

Appunti del corso di:
Particelle Elementari 1

Gabriele Cembalo

A.A. 2025-2026



Università degli Studi di Torino
Dipartimento di Fisica
Via Giuria, 1, Torino (TO)

It's nice to be right sometimes.

Peter Higgs

Prefazione

In questo documento intendo raccogliere i miei appunti basati sul materiale del corso “**Particelle Elementari 1**”, tenuto dal Prof. R. Covarelli, E. Migliore e seguito presso *Università degli Studi di Torino* nell’anno accademico 2025-2026. Durante il corso sono stati consigliati diversi libri (elencati in Bibliografia), e cercherò di indicare i riferimenti corrispondenti all’inizio di ogni capitolo.

Questi appunti sono una versione riscritta delle note prese durante le lezioni, quindi la fonte principale è il materiale presentato dal professore. Declino ogni responsabilità e rimando alla mia pagina personale per saperne di più su questi appunti e sul fatto che non hanno natura né accademica né didattica.

Questi appunti vanno chiaramente intesi come note personali, riscritte in maniera ordinata a partire dalle lezioni. Eventuali sviste, errori o imprecisioni sono dovuti ai miei limiti. Inoltre, ho scritto questi appunti principalmente per “spiegare” a me stesso l’argomento, quindi alcune sezioni potrebbero risultare eccessivamente dettagliate o, al contrario, troppo superficiali a seconda del lettore. In ogni caso, spero possano comunque essere utili a qualcuno. Spero anche di essere riuscito a produrre un documento chiaro e ben strutturato.

Una raccolta dei miei appunti è disponibile sulla mia pagina GitHub personale: gCembalo.github.io.

Eventuali errori o refusi possono essere segnalati alla mia email personale: g70362643@gmail.com.

Last update: 30/08/2026

Indice

1	Nozioni di base	1
1.1	Interazioni fondamentali	1
1.2	Cinematica relativistica	4
1.2.1	Decadimenti	5
1.2.2	Decadimenti a due corpi	5
1.2.3	Decadimento a 3 corpi	7
1.2.4	Collisioni	9
1.3	Sezione d'urto e luminosità	11
1.3.1	Caso di bersaglio spesso	12
1.3.2	Regola aurea di Fermi	13
1.4	Misure di luminosità	14
1.4.1	Misura di $\mathcal{L}$ in collisioni e^+e^-	15
1.4.2	Collisori adronici	18
2	Particelle di materia	23
2.1	I leptoni	23
2.1.1	Apparati sperimentali	23
2.1.2	Elettrone e positrone	26
2.1.3	Muoni	28
2.1.4	Tau	31
2.1.5	Neutrini elettronici	36
2.1.6	Neutrini muonici	41
2.1.7	Neutrino tauonico	43
2.2	I pioni	43
2.2.1	Pioni carichi	44
2.2.2	Pione neutro	48
3	Le simmetrie in fisica delle particelle	53
3.1	Parità	54
3.2	Come assegnare la parità intrinseca	55
3.2.1	Protone e neutrone	55
3.2.2	Fermioni	55
3.2.3	Pioni carichi	56

3.2.4	Pione neutro	58
3.2.5	Fotone	60
3.3	Parità di sistemi particella-antiparticella	61
3.3.1	Sistema mesone-antimesone	61
3.3.2	Sistema fermione-antifermione	61
3.4	Violazione di parità nelle interazioni deboli	61
3.4.1	Conservazione parità nelle interazioni elettromagnetiche	62
3.4.2	Come verificare la violazione della parità nelle interazioni deboli	64
3.4.3	Esperimento di Madame Wu	65
3.5	La coniugazione di carica	68
3.5.1	Fotone	68
3.5.2	Pione neutro	69
3.5.3	Sistema mesone-antimesone	70
3.5.4	Sistema fermione-antifermione	70
3.6	Inversione temporale	71
3.6.1	Caso newtoniano	71
3.6.2	Caso quantistico	72
3.6.3	Esempio di degenerazione	75
3.6.4	Esempio non degenerare	75
3.6.5	Verifica sperimentale	76
4	Risonanze adroniche	79
4.1	Risonanze in formazione	79
4.2	Risonanze in produzione	80
4.3	Distribuzione di Breit e Wigner	81
4.4	Studio di risonanze in produzione	88
4.4.1	Misure di spin (Dalitz plot)	89
4.4.2	Considerazioni sulla parità	91
4.4.3	Considerazioni su simmetria/antisimmetria	91
4.4.4	Considerazioni sulla cinematica	92
4.4.5	Alcuni esempi	96
5	Modello a quark statico	97
5.1	Particelle con Stranezza	97
5.1.1	Mesoni strani	98
5.1.2	Barioni strani	99
5.2	La Relazione di Gell-Mann e Nishijima	100
5.3	Costruzione di multipletti mesonici e barionici	100
5.4	Rappresentazione fondamentale, antifondamentale e i loro prodotti	102
5.5	Studio stati legati fermione-antifermione	104
5.5.1	Stato legato e^-p Atomo di Idrogeno	104
5.5.2	Il positronio	105

5.5.3	Il Charmonio e la verifica sperimentale del quark c . . .	109
5.5.4	Confronto Positronio e Charmonio	120
5.5.5	Charmonio e bottomonio	122
5.6	I Mesoni Leggeri	122
5.6.1	Particelle $\eta, \eta', \omega, \phi$	127
5.7	I Barioni	131
5.7.1	Composizione degli stati $J^P = 1/2^+$	132
5.7.2	Momento magnetico dei barioni	134
5.8	Il colore	136
5.8.1	Cenni di QCD	137
5.8.2	QED vs QCD	137
6	Teoria delle interazioni deboli	141
6.1	Il decadimento β	141
6.1.1	Spettro degli elettroni	142
6.1.2	Intensità dell'interazione debole	146
6.1.3	Sezione d'urto $\sigma(\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n)$ (Cowan - Reines)	148
6.2	La struttura delle interazioni deboli	149
6.2.1	Violazione di parità	150
6.2.2	Esperimento di Goldhaber	152
6.3	Le correnti deboli	156
6.3.1	Decadimenti deboli adronici	158
6.3.2	Mixing di Cabibbo e meccanismo GIM	161
6.4	Correnti neutre	163
6.5	I bosoni W e Z	165
6.6	Mesoni K^0 e $\bar{K}^0$	172
6.6.1	CP di $\pi\pi$ e $\pi\pi\pi$	173
6.6.2	Mixing $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$	175
6.6.3	Rigenerazione e misura di Δm	177
6.6.4	Violazione di $\mathbb{CP}$	178
	Appendici	180
A	Unità naturali	183
A.1	Unità naturali	183
	Bibliografia	185

Capitolo 1

Nozioni di base

Vediamo in questo capitolo alcune nozioni base utili a tutto il resto del corso. Utilizzeremo per tutto il corso le unità naturali (quando non sarà così, e quindi ci metteremo nel SI, sarà evidente) che analizziamo nell'Appendice [A](#).

1.1 Interazioni fondamentali

È ben noto il fatto che in natura le forze fondamentali siano 4: elettromagnetica, gravitazionale, nucleare forte e nucleare debole. È possibile studiare le singole intensità e confrontarle tra loro. Adottiamo un approccio semiclassico, ossia, modellizziamo le interazioni come potenziali che agiscono tra due protoni a distanza relativa r . Le energie potenziali sono:

Gravità	$E_p(r) = G_N m_p^2 \frac{1}{r}$
EM	$E_p(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$
Nucleare debole	$E_p(r) = \frac{g_w^2}{4\pi} \frac{e^{-r/R_w}}{r}$
Nucleare forte	$E_p(r) = \frac{g_s^2}{4\pi} \frac{e^{-r/R_s}}{r}$

in cui abbiamo usato espressioni classiche per le interazioni gravitazionale ed EM ed un'espressione alla Yukawa (dalla QFT) per le interazioni nucleari forte e debole.

Possiamo fare un paio di osservazioni. Con l'approssimazione semiclassica abbiamo delle espressioni dei potenziali con costanti di accoppiamento indipendenti dalla scala delle approssimazioni, ma nella realtà esse dipendono dalla scala di impulsi ed energie a cui ci si trova. Nelle espressioni dei potenziali alla Yukawa possiamo vedere che compare ad esponente un

parametro R , che è una distanza caratteristica oltre la quale l'interazione è trascurabile. Nella teoria di Yukawa R è legata alla massa del mediatore dell'interazione secondo:

$$R = \frac{\hbar}{mc} \quad (1.1.1)$$

dunque, in elettromagnetismo e per teorie di gravità, in cui si ha $m = 0$, il raggio $R \rightarrow \infty$, il che le rende interazioni a *long range*. Per interazioni deboli, per cui $m_w \sim 100 \text{ GeV}/c^2$, il raggio $R_w \sim 10^{-18} \text{ m}$. Per le interazioni forti, in cui $m_s \sim 140 \text{ GeV}/c^2$, il raggio $R_s \sim 10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm}$. Un'ultima cosa a cui bisogna fare attenzione è che l'interazione nucleare forte pura è al livello dei quark e quella che noi vediamo agire tra nucleoni ne è il residuo. La massa del bosone mediatore, che in questo caso consideriamo essere il $\pi^\pm$ e π^0 , è quindi quella associata all'interazione tra nucleoni.

Possiamo fare un confronto tra le varie interazioni scegliendone una di riferimento e calcolando il rapporto con le altre. Scegliamo l'interazione elettromagnetica come interazione di riferimento. Però, anziché confrontare le energie potenziali confrontiamo le loro trasformate di Fourier. Il motivo di ciò è che così (passando nello spazio degli impulsi) si può effettuare un confronto in termini di impulso trasferito. Vogliamo quindi calcolare per ogni potenziale:

$$\hat{E}_p(q) = \int d^3r E_p(r) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \quad (1.1.2)$$

ma il conto non è così lungo poiché siamo dotati della conoscenza che la trasformata di un oggetto del tipo:

$$\frac{e^{-r/R}}{r}$$

risulta essere:

$$\int d^3r \frac{e^{-r/R}}{r} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = 4\pi \frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2 + m^2 c^2} \quad (1.1.3)$$

in cui si è esplicitata la definizione di R e in cui m è la massa del mediatore. Si hanno dunque:

Gravit�	$\hat{E}_p(q) = G_N m_p^2 4\pi \frac{\hbar^2}{ \vec{q} ^2}$
EM	$\hat{E}_p(q) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \frac{\hbar^2}{ \vec{q} ^2}$
Nucleare debole	$\hat{E}_p(q) = \frac{g_w^2}{4\pi} 4\pi \frac{\hbar^2}{ \vec{q} ^2 + (m_w c)^2}$
Nucleare forte	$\hat{E}_p(q) = \frac{g_s^2}{4\pi} 4\pi \frac{\hbar^2}{ \vec{q} ^2 + (m_s c)^2}$

di cui possiamo fare i rapporti.

Gravitazionale

$$\frac{\hat{E}_p(q)_{grav}}{\hat{E}_p(q)_{EM}} = \frac{G_N m_p^2 4\pi \frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2}}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2}} = \frac{G_N m^2}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} = \frac{\frac{G_N}{\hbar c} m^2}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}} \quad (1.1.4)$$

possiamo ricordare che:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \sim \frac{1}{137} \quad ; \quad m_{Plank} = \sqrt{\frac{G_N}{\hbar c}} = 10^{-19} \text{ GeV}/c^2 \quad (1.1.5)$$

per cui

$$\frac{\hat{E}_p(q)_{grav}}{\hat{E}_p(q)_{EM}} = \frac{m^2}{m_{Plank}^2} \frac{1}{\alpha} \sim 10^{-38} \cdot 137 \sim 10^{-36} \quad (1.1.6)$$

in cui si è usato $m_{nucleone} \sim 1 \text{ GeV}/c^2$. Abbiamo quindi trovato che a questa scala l'interazione gravitazionale è molto meno intensa rispetto la EM.

Nucleare debole Per i confronti della forza nucleare forte e debole è necessario fissare un valore di momento. Si sceglie $|\vec{q}| = 1 \text{ GeV}/c$ e per cui valgono:

$$\begin{aligned} |\vec{q}|^2 + (m_w c)^2 &\sim m_w^2 c^2 & , & & m_w &\sim 100 \text{ GeV}/c^2 \\ |\vec{q}|^2 + (m_s c)^2 &\sim |\vec{q}|^2 & , & & m_s &\sim 140 \text{ GeV}/c^2 \end{aligned}$$

Dunque abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{E}_p(q)_{weak}}{\hat{E}_p(q)_{EM}} &= \frac{\frac{g_w^2}{4\pi} 4\pi \frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2 + (m_w c)^2}}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2}} = \frac{g_w^2}{4\pi} \frac{q^2}{q^2 + (m_w c)^2} \frac{1}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \\ &\sim \frac{g_w^2}{4\pi \hbar c} \frac{q^2}{m_w^2 c^2} \frac{1}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}} = \alpha_{NW} \frac{q^2}{m_w^2 c^2} \frac{1}{\alpha} \sim 5 \cdot 10^{-5} \quad (1.1.7) \end{aligned}$$

in cui si è utilizzata:

$$\alpha_{NW} = \frac{g_w^2}{4\pi \hbar c} \sim 4 \cdot 10^{-3} \quad (1.1.8)$$

Nucleare forte

$$\begin{aligned} \frac{\hat{E}_p(q)_{strong}}{\hat{E}_p(q)_{EM}} &= \frac{\frac{g_s^2}{4\pi} 4\pi \frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2 + (m_s c)^2}}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2}} = \frac{g_s^2}{4\pi \hbar c} \frac{q^2}{q^2 + (m_s c)^2} \frac{1}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}} \\ &\sim \alpha_{NS} \frac{q^2}{q^2} \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha_{NS}}{\alpha} \sim 2 \cdot 10^3 \quad (1.1.9) \end{aligned}$$

in cui si è utilizzata:

$$\alpha_{NS} = \frac{g_s^2}{4\pi\hbar c} \sim 15. \quad (1.1.10)$$

Dunque, vediamo che a queste scale l'interazione nucleare forte è 3 ordini di grandezza più grande dell'interazione EM.

Abbiamo trovato dunque la seguente gerarchia:

$$\frac{\text{Grav.}}{\text{EM}} \sim 10^{-36} \quad \frac{\text{NW}}{\text{EM}} \sim 10^{-5} \quad \frac{\text{NS}}{\text{EM}} \sim 10^3$$

e si noti che la stessa gerarchia la si può osservare nelle vite medie. Il tempo medio di decadimento legato ad un processo nucleare forte ha un rapporto con il tempo medio di un processo di decadimento legato all'interazione EM comparabile con il rapporto trovato per le intensità delle interazioni. I tempi dei decadimenti sono:

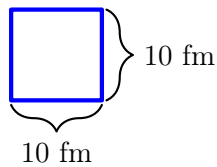
$$\tau_{NW} = 10^{-12} - 10^{-6} \text{ s}$$

$$\tau_{EM} = 10^{-16} \text{ s}$$

$$\tau_{NS} = 10^{-23} - 10^{-20} \text{ s}.$$

Ricorda che dalle misure delle vite medie si può capire da che tipo di interazione è dominato il processo.

Definiamo brevemente un'unità di misura utile per esprimere sezioni d'urto in Fisica Nucleare. Definiamo il **Barn** come l'area di un quadrato di lato 10 fm:

$$1 \text{ b} = 100 \text{ fm}^2 \quad \implies \quad 1 \text{ fm}^2 = 10^{-2} \text{ b}$$


e analogamente vale:

$$1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$$

1.2 Cinematica relativistica

Analizziamo (ripassiamo) in questa sezione alcuni concetti fondamentali di Relatività Speciale.

1.2.1 Decadimenti

Prendiamo in esame processi del tipo:

$$a \longrightarrow b + c + \dots$$

La cinematica di questo tipo di processi può essere studiata servendosi della conservazione del quadrimpulso e ciò è agevolato da un'opportuna scelta del sistema di riferimento. Prendendo il SR del c.m., che indichiamo con una * ad apice, (in cui la particella a è a riposo) si ha:

$$p_i^\mu = (m_a, \vec{0}) \quad (1.2.1)$$

$$p_f^\mu = (E_f^*, \vec{p}_f^*). \quad (1.2.2)$$

Combinando la conservazione dell'energia e la relazione di mass-shell (per lo stato finale) si ha:

$$\begin{cases} m_a = \sum_f E_f^* \\ E_f^{*2} = m_f^2 + p_f^{*2} \geq m_f^2 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

$$\implies m_a = \sum_f E_f^* \geq \sum_f m_f. \quad (1.2.4)$$

Si è dunque trovata una relazione fondamentale, che permette di vedere che la massa della particella che decade dev'essere sempre maggiore, o al limite uguale, alla somma delle masse dello stato finale:

$$m_a \geq \sum_f m_f. \quad (1.2.5)$$

1.2.2 Decadimenti a due corpi

Prendiamo in esame processi del tipo:

$$a \longrightarrow b + c$$

dunque in cui una particella decade in due. Guardando il SR del c.m.:

$$p_a^\mu = (m_a, \vec{0})$$

$$p_b^\mu = (E_b^*, \vec{p}_b^*)$$

$$p_c^\mu = (E_c^*, \vec{p}_c^*)$$

in cui, se utilizzata la conservazione del tri-impulso, vediamo:

$$\vec{0} = \vec{p}_b^* + \vec{p}_c^* \implies \vec{p}_b^* = -\vec{p}_c^* \implies p_b^* = p_c^* = p^*$$

e dunque riscriviamo:

$$\begin{aligned} p_a^\mu &= (m_a, \vec{0}) \\ p_b^\mu &= (E_b^*, p^*) \\ p_c^\mu &= (E_c^*, -p^*). \end{aligned}$$

Combinando le relazioni di mass-shell:

$$\begin{cases} E_b^{*2} = m_b^2 + \vec{p}_b^2 \\ E_c^{*2} = m_c^2 + \vec{p}_c^2 \end{cases} \quad (1.2.6)$$

si ottiene:

$$\begin{cases} E_b^{*2} - \vec{p}_b^2 = m_b^2 \\ E_c^{*2} - \vec{p}_c^2 = m_c^2 \end{cases} \implies E_b^{*2} - E_c^{*2} = m_b^2 - m_c^2. \quad (1.2.7)$$

Si può anche vedere cosa dice la conservazione dell'energia:

$$m_a = E_b^{*2} + E_c^{*2}. \quad (1.2.8)$$

Rapportando la condizione di mass-shell e la conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{E_b^{*2} - E_c^{*2}}{E_b^{*2} + E_c^{*2}} = \frac{m_b^2 - m_c^2}{m_a} \implies E_b^* - E_c^* = \frac{m_b^2 - m_c^2}{m_a} \quad (1.2.9)$$

che combinata con la conservazione dell'energia:

$$E_c^* + E_b^* = m_a \quad (1.2.10)$$

si possono ottenere le energie:

$$\begin{cases} E_b^* = \frac{m_a^2 + m_b^2 - m_c^2}{2m_a} \\ E_c^* = \frac{m_a^2 + m_c^2 - m_b^2}{2m_a} \end{cases} \quad (1.2.11)$$

Ricordando che vale:

$$|\vec{p}^*| = p^* = \sqrt{E_b^{*2} - m_b^2} \quad (1.2.12)$$

l'impulso può essere scritto in forma compatta usando la relazione (1.2.11):

$$p^* = \left[\frac{(m_a^2 + m_b^2 - m_c^2)^2}{4m_a^2} - m_b^2 \right]^{1/2} \quad (1.2.13)$$

$$= \left[\frac{m_a^4 + m_b^4 + m_c^4 + 2m_a^2 m_b^2 - 2m_a^2 m_c^2 - 2m_b^2 m_c^2 - 4m_a^2 m_b^2}{4m_a^2} \right]^{1/2} \quad (1.2.14)$$

$$= \left[\frac{m_a^4 + m_b^4 + m_c^4 - 2m_a^2 m_b^2 - 2m_a^2 m_c^2 - 2m_b^2 m_c^2}{4m_a^2} \right]^{1/2} \quad (1.2.15)$$

$$= \frac{\sqrt{(m_a^2 - m_b^2 - m_c^2)^2}}{2m_a} \quad (1.2.16)$$

e lo possiamo anche riscrivere come:

$$p^* = \frac{[\lambda(m_a^2, m_b^2, m_c^2)]^{1/2}}{2m_a} \quad (1.2.17)$$

dove indichiamo la funzione:

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz. \quad (1.2.18)$$

Dunque abbiamo trovato che la cinematica dei decadimenti a 2 corpi è esattamente determinata.

È anche utile notare il caso in cui $m_c = 0$ (massa nulla), per cui si ha:

$$E_c^* = \frac{m_a^2 - m_b^2}{2m_a} \quad ; \quad |\vec{p}_c^*| = \frac{m_a^2 - m_b^2}{2m_a} = E_c^*. \quad (1.2.19)$$

per quanto sembri un caso strano (1.2.19), in realtà sono processi tipici riguardanti fotoni γ .

1.2.3 Decadimento a 3 corpi

Prendiamo in esame processi del tipo:

$$a \longrightarrow b + c + d$$

La trattazione di un decadimento a 3 corpi è più complessa, poiché la cinematica non è chiusa, a differenza di quelli a 2 corpi, ossia, ci sono ulteriori parametri liberi (come ad esempio angoli di diffusione). Si veda la figura 1.1. Infatti in decadimenti a 3 corpi i prodotti hanno uno spettro continuo.

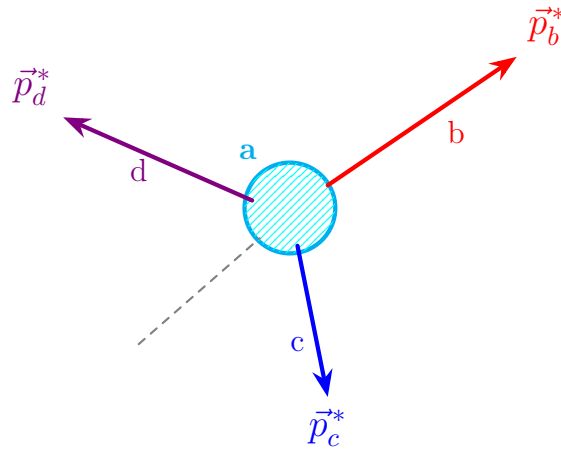


Figura 1.1

Se consideriamo la variabile di Mandelstam, invariante di Lorentz, allora vediamo:

$$s_{cd} = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2 \quad (1.2.20)$$

allora possiamo renderci conto che ci sono dei valori massimi e minimi di energia delle particelle nello stato finale. Vediamo infatti che siamo in una condizione di *minimo*:

$$s_{cd} = (p_c + p_d)^2 \quad (1.2.21)$$

$$= (E_c + E_d)^2 - (\vec{p}_c + \vec{p}_d)^2 \quad (1.2.22)$$

che in un sistema di riferimento in cui $\vec{p}_c + \vec{p}_d = 0$ è:

$$s_{cd} = (E_c + E_d)^2 \quad (1.2.23)$$

$$\geq (m_c + m_d)^2. \quad (1.2.24)$$

Nella condizione di *massimo* si ha:

$$s_{cd} = (p_a^* + p_b^*)^2 \quad (1.2.25)$$

$$= m_a^2 + m_b^2 - 2m_a E_b^* \quad (1.2.26)$$

$$\leq (m_a - m_b)^2 \quad (1.2.27)$$

poiché abbiamo:

$$E_b^* = (m_b^2 + \vec{p}_b^2)^{1/2} \geq m_b \quad \implies \quad -E_b^* \leq -m_b. \quad (1.2.28)$$

Lo spettro di b è compreso tra due valori limite. Esplicitamente:

$$m_a^2 + m_b^2 - 2m_a(E_b^*)_{max} = (s_{cd})_{min} \quad (1.2.29)$$

$$\implies \quad E_{b,max}^* = \frac{m_a^2 + m_b^2 - (m_c + m_d)^2}{2m_a} \quad (1.2.30)$$

e anche:

$$m_a^2 + m_b^2 - 2m_a(E_b^*)_{min} = (s_{cd})_{max} \quad (1.2.31)$$

$$\implies \quad E_{b,min}^* = \frac{m_a^2 + m_b^2 - (m_c + m_d)^2}{2m_a} = m_b. \quad (1.2.32)$$

Rivediamo meglio i concetti analizzati. Fissate le informazioni su b è possibile studiare gli spettri di c e d . Si può studiare la situazione in cui $m_d \ll m_c$, che per quanto restrittivo possa sembrare, in realtà è un caso frequente, essendo infatti il caso del decadimento β in cui viene prodotto il neutrino, che è molto più leggero del nucleone. Abbiamo già visto che nel caso a due corpi ($a \rightarrow b + c$) si hanno (nel SR del c.m.) le relazioni (1.2.11, 1.2.17), che continuano a valere anche nel caso di 3 corpi con $m_d \ll m_c$. In generale, in un decadimento a 3 corpi si può valutare l'energia cinetica di b massima con

cui viene prodotta utilizzando la conservazione del quadrimpulso. Ponendosi nel SR del c.m., dunque con $\vec{p}_a^* = \vec{0}$, si capisce immediatamente che se b si mette in moto con $\vec{p}_b^* \neq \vec{0}$, allora, gli impulsi di c e d devono essere tali da soddisfare:

$$\vec{0} = \vec{p}_b^* + \vec{p}_c^* + \vec{p}_d^* \quad (1.2.33)$$

per cui se una tra c e d è ferma, l'altra deve obbligatoriamente muoversi. La condizione che permette di spendere meno energia possibile nella coppia c, d , e avere per b più energia a disposizione, è quella in cui viene prodotta ferma la particella più leggera, in questo caso d (infatti in questa situazione $\vec{p}_c^*$ compensa facilmente $\vec{p}_b^*$). Nel caso $m_d \ll m_c$ e in cui d sia prodotta ferma, l'energia iniziale del SR del c.m. non è m_a , bensì $m_a - m_d$. Dunque l'espressione per $T_b^* \rightarrow T_{b \max}^*$ è:

$$T_{b \max}^* = \frac{(m_a - m_b - m_d)^2 - m_c^2}{2(m_a - m_d)}. \quad (1.2.34)$$

Nota infatti che l'energia $m_a - m_d$ è l'energia iniziale disponibile nel c.m. e utilizzata per produrre e fornire energia cinetica a b, c .

1.2.4 Collisioni

Prendiamo in esame processi del tipo:

$$a + b \longrightarrow c + d + \dots$$

Processi di questo tipo, se osservato nel SR del c.m., può essere trattato come un processo di decadimento del tipo:

$$x \longrightarrow c + d + \dots$$

Utilizziamo nuovamente la variabile di Mandelstam:

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 \quad (1.2.35)$$

che rappresenta l'energia del c.m.. La variabile s viene utilizzata nel ruolo della madre nella descrizione del decadimento (ossia si vede $m_x \rightarrow \sqrt{s}$). Il quadrimpulso dello stato iniziale $a + b$ è:

$$p_i^\mu = (\sqrt{s}, \vec{0}) \quad (1.2.36)$$

e, sempre combinando la relazione di mass-shell con la conservazione dell'energia, si trova la **condizione di soglia** che dev'essere rispettata nei processi d'urto:

$$\sqrt{s} \geq \sum_f m_f. \quad (1.2.37)$$

La variabile di Mandelstam s , essendo invariante, può essere ricavata nel SR del laboratorio. Sono molto comodi da trattare esperimenti a bersaglio fisso

(storicamente sono stati proprio questi i primi ad essere stati effettuati). In questo tipo di processi si ha una particella bersaglio in quiete ed una in stato di moto. Si può supporre noto l'impulso del fascio. Si ha:

$$\begin{cases} p_a^\mu = (E_a, \vec{p}_a) \\ p_b^\mu = (m_b, \vec{0}) \end{cases} \quad (1.2.38)$$

dunque:

$$s = (p_a + p_b)^2 = p_a^2 + p_b^2 + 2p_a p_b = m_a^2 + m_b^2 + 2E_a m_b \quad (1.2.39)$$

e la condizione di soglia risulta:

$$s \geq \left(\sum_f m_f \right)^2 \implies m_a^2 + m_b^2 + 2E_a m_b \geq \left(\sum_f m_f \right)^2. \quad (1.2.40)$$

La **soglia** (quindi l'uguaglianza) è:

$$\bar{E}_a = \frac{(\sum m_f)^2 - (m_a^2 + m_b^2)}{2m_b} \quad (1.2.41)$$

dove l'energia $\bar{E}_a$ rappresenta l'energia di soglia del fascio, ovvero, l'energia minima del fascio per generare prodotti con una certa massa totale ($\sum m_f$). Spesso si valuta la soglia in termini di energia cinetica del fascio:

$$\bar{T}_a = \bar{E}_a - m_a = \frac{(\sum m_f)^2 - (m_a + m_b)^2}{2m_b} \quad (1.2.42)$$

Collisioni $2 \rightarrow 2$ Prendiamo in esame processi del tipo:

$$a + b \longrightarrow c + d$$

se utilizziamo il SR del c.m., applichiamo la sostituzione $m_a \rightarrow \sqrt{s}$ e utilizziamo i risultati trovati per il decadimento a due corpi (1.2.11, 1.2.17) è semplice trovare:

$$\begin{cases} E_c^* = \frac{s + m_c^2 - m_d^2}{2\sqrt{s}} \\ E_d^* = \frac{s + m_d^2 - m_c^2}{2\sqrt{s}} \\ |\vec{p}_f^*| = \frac{[\lambda(s, m_c^2, m_d^2)]^{1/2}}{2\sqrt{s}} = |\vec{p}_c^*| = |\vec{p}_d^*| \end{cases} \quad (1.2.43)$$

e risultati analoghi per lo stato iniziale:

$$\begin{cases} E_a^* = \frac{s + m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}} \\ E_b^* = \frac{s + m_b^2 - m_a^2}{2\sqrt{s}} \\ |\vec{p}_f^*| = \frac{[\lambda(s, m_a^2, m_b^2)]^{1/2}}{2\sqrt{s}} = |\vec{p}_a^*| = |\vec{p}_b^*|. \end{cases} \quad (1.2.44)$$

Notiamo che, essendo s invariante, possiamo calcolarla nel sistema di riferimento del laboratorio e risalire allo stato iniziale del centro di massa.

1.3 Sezione d'urto e luminosità

Possiamo introdurre in questa sezione i concetti di sezione d'urto e luminosità dal punto di vista di un modello semiclassico, in cui si considera il tipico esperimento a bersaglio fisso b irradiato da un fascio di particelle a . Si faccia riferimento alla figura 1.2.

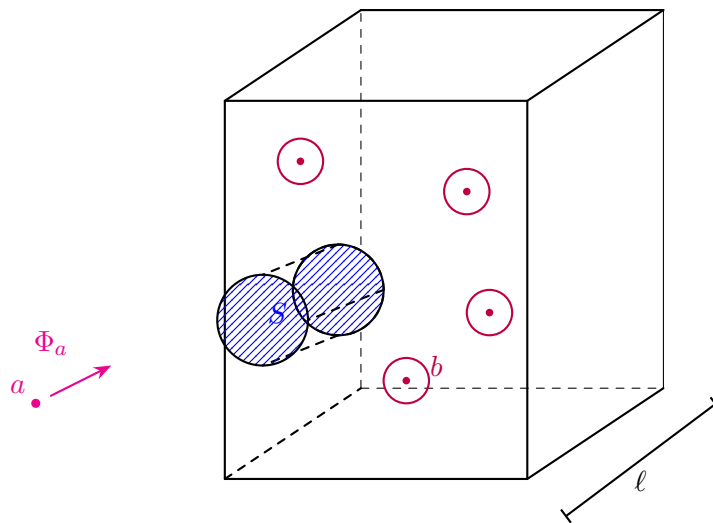


Figura 1.2

Costruiamo il modello secondo alcune ipotesi:

- Bassa densità delle particelle del fascio (in questo modo si considerano assenti le interazioni tra le particelle del fascio).
- Bassa densità delle particelle del bersaglio (in questo modo non sono possibili interazioni multiple con il bersaglio).
- Energia caratteristica di interazione $\gg$ dell'energia di legame tra le particelle bersaglio (in questo modo possiamo trascurare effetti diffrattivi).

Come già sappiamo da altri corsi, al processo viene associata un'area efficace: maggiore è l'area, maggiore sarà la probabilità che avvenga il processo. Quest'area è chiamata **sezione d'urto**. È necessario definire anche altre grandezze:

- $\dot{N}$ è il numero di eventi / unità di tempo.
- $\dot{N}_a$ è il numero di particelle arrivate sulla superficie / unità di tempo.
- P_{int} è la probabilità di interazione.

- Φ_a è il flusso di particelle incidenti.
- S è l'area illuminata (cioè irradiata dalle particelle incidenti).

Dafinite queste grandezze possiamo quantificare la probabilità del processo P_{int} come il rapporto tra il numero di eventi per unità di tempo e il numero totale di particelle incidenti:

$$P_{int} = \frac{\dot{N}}{\dot{N}_a} = \frac{\dot{N}}{\Phi_a S} \quad (1.3.1)$$

ossia, valutiamo il rapporto dei casi favorevoli sui casi possibili. Un altro modo di esprimere P_{int} è quello di tener conto che ogni bersaglio ha la suddetta area efficace σ , mentre la superficie complessivamente illuminata dal fascio è S . La probabilità di interazione è legata alla frazione della superficie illuminata ricoperta dai centri diffusori. Calcoliamo quindi il rapporto tra l'area di interazione e l'area totale:

$$P_{int} = \frac{N_b \sigma}{S}. \quad (1.3.2)$$

Confrontando le due scritte:

$$\frac{\dot{N}}{\Phi_a S} = \frac{N_b \sigma}{S} \implies \boxed{\dot{N} = N_b \Phi_a \sigma}. \quad (1.3.3)$$

Possiamo definire la quantità:

$$\mathcal{L} = N_b \Phi_a \quad (1.3.4)$$

nota come **luminosità** e parametro fondamentale negli esperimenti.

Nota In generale, sul bersaglio possono verificarsi diversi processi. Ogni processo *rimuove* una particella dal fascio e ad ognuno di essi è associata una sezione d'urto σ_i e di conseguenza la sezione d'urto totale sarà:

$$\sigma_t = \sum_i \sigma_i. \quad (1.3.5)$$

1.3.1 Caso di bersaglio spesso

Noti i parametri del bersaglio possiamo quantificare la probabilità del processo come:

$$P_{int} = \frac{N_b \sigma}{S} = \frac{n_b S l \sigma}{S} = n_b l \sigma \quad (1.3.6)$$

in cui scriviamo n_b che rappresenta la densità dei centri diffusori ($[n_b] = L^{-3}$) ed l che è lo spessore del bersaglio. Si definisce:

$$l_c = \frac{1}{n_b \sigma} \quad (1.3.7)$$

come **lunghezza di collisione**, che quantifica quanto il fascio incidente penetra nel bersaglio. Si noti anche che è dimensionalmente corretta $[l_c] = L^3 L^{-2} = L$. La probabilità di interazione, in termini di l_c , si esplicita come:

$$P_{int} = \frac{l}{l_c}. \quad (1.3.8)$$

Nel caso di bersaglio spesso si può legare la lunghezza di collisione l_c all'attenuazione del fascio. Possiamo valutare come il fascio incidente si attenui man mano che penetra nel bersaglio. Ci possiamo chiedere quante siano le particelle nel fascio dopo aver percorso una distanza dx nel bersaglio, ricordando che una collisione implica una particella rimossa dal fascio. Abbiamo la situazione rappresentata in figura 1.3.

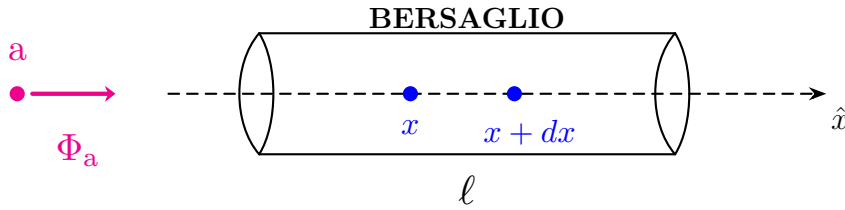


Figura 1.3

Valutiamo:

$$\dot{N} = \sigma \Phi_a N_b \implies d\dot{N} = \Phi_a(x) \sigma n_b S dx \quad (1.3.9)$$

in cui la quantità $d\dot{N}$ rappresenta le particelle rimosse dal fascio. Conseguentemente si ha una variazione (diminuzione) del numero di particelle nel fascio:

$$d\Phi_a = -\frac{d\dot{N}}{S} = -\Phi_a(x) \sigma n_b dx \quad (1.3.10)$$

risolvendo l'equazione differenziale si trova:

$$\Phi_a = \Phi_a(0) e^{-x/l_c}. \quad (1.3.11)$$

Nota Nei primi esperimenti storicamente effettuati, la sezione d'urto σ , era misurata da come il fascio fosse attenuato, ovvero, era ricavata da misure di l_c .

1.3.2 Regola aurea di Fermi

È possibile vedere il legame tra teoria ed esperimento. Sappiamo dalla Meccanica Quantistica che per dare un'espressione della probabilità di interazione per unità di tempo e di centro diffusore possiamo utilizzare la regola aurea di Fermi:

$$\frac{P_{int}}{N_b} = \frac{\dot{N}}{N_a N_b} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{if}|^2 \rho(v_f) \quad (1.3.12)$$

in cui $\rho(v_f)$ è la densità nello spazio delle fasi. Possiamo notare a questo punto che vale:

$$\dot{N} = N_b \Phi_a \sigma \implies \frac{\dot{N}}{N_b} = \Phi_a \sigma = \frac{N_a}{V} v_a \sigma \quad (1.3.13)$$

$$\implies \frac{\dot{N}}{N_a N_b} = \frac{v_a}{V} \sigma \quad (1.3.14)$$

e per cui si ha:

$$\frac{v_a \sigma}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{if}|^2 \rho(v_f) \implies \sigma = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{if}|^2 \rho(v_f) \frac{V}{v_a}. \quad (1.3.15)$$

1.4 Misure di luminosità

Ricordando la definizione della luminosità (1.3.4) possiamo vedere come entri in gioco negli esperimenti. In esperimenti a bersaglio fisso, $\mathcal{L}$ è di facile misura, ma in esperimenti in collider, in cui le particelle sono accelerate, è più complicato. La luminosità è una caratteristica del solo esperimento e non dipende, ad esempio, dal processo osservato. Consideriamo un esperimento in un collider, del tipo in figura 1.4.

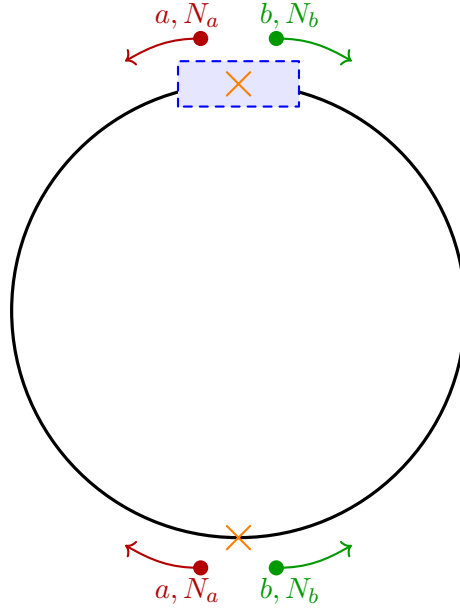


Figura 1.4

Valutiamo il numero Φ_a , ovvero, il numero di particelle incidenti per unità di tempo e superficie, da inserire nell'espressione di $\mathcal{L}$. Teniamo però conto di due cose: f_{rev} la frequenza di rivoluzione (l'inverso del tempo affinché

uno dei fasci - a o b - compia un giro completo) e il fatto che i fasci non siano continui, ma siano divisi in pacchetti (bunch), chiamiamo n_{bunch} il numero di pacchetti che si incrociano in un giro. Indichiamo con S l'area di sovrapposizione dei due fasci. Abbiamo che vale:

$$\Phi_a = \frac{f_{rev}}{S} N_a \quad (1.4.1)$$

per cui:

$$\mathcal{L} = \Phi_a N_b \implies \mathcal{L} = \frac{f_{rev}}{S} N_b N_a n_{bunch}. \quad (1.4.2)$$

Nota. In un giro completo i due fasci, in realtà, collidono due volte (segnati con una x nella figura), ma non si inserisce un fattore 2 nell'espressione di $\mathcal{L}$, per tenere conto di ciò, poiché l'evento viene osservato tipicamente in un punto unico (segnalato in blu nella figura).

Uno dei problemi dell'espressione di (1.4.2) è che l'area di sovrapposizione S non è banale da misurare e viene stimata in modi diversi a seconda se il collisore è tipo e^+e^- oppure adronico. Tipicamente la luminosità viene misurata direttamente a partire da un processo noto (ossia per cui la sezione d'urto σ_x è nota con precisione sufficiente) e misurandone il rate $\dot{N}_x$:

$$\dot{N}_x = \mathcal{L} \sigma_x. \quad (1.4.3)$$

Per stimare il numero N_a , ad esempio nel caso di particelle cariche, si possono utilizzare misure di correnti, del tipo:

$$i_a = e N_a n_{bunch} f_{riv} \quad (1.4.4)$$

1.4.1 Misura di $\mathcal{L}$ in collisioni e^+e^-

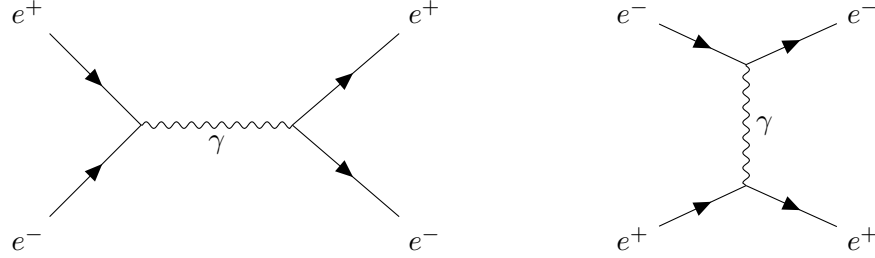
Il titolo di questa sottosezione potrebbe essere sbagliato, dato che è possibile misurare direttamente la sezione d'urto di un processo di interesse. Per collisori e^+e^- si sceglie un processo di riferimento per valutare la $\mathcal{L}$. La sezione d'urto del processo di riferimento la si indica con σ_{rif} , mentre quella ignota σ_x . Valgono:

$$\begin{cases} \dot{N}_{rif} = \mathcal{L} \sigma_{rif} \\ \dot{N}_x = \mathcal{L} \sigma_x \end{cases} \longrightarrow \sigma_x = \sigma_{rif} \frac{\dot{N}_x}{\dot{N}_{rif}} \quad (1.4.5)$$

in cui si è utilizzato il fatto che la luminosità non dipende dal processo, ma è una proprietà dell'esperimento, per cui uguale in entrambi i casi. Per collisori e^+e^- il processo di riferimento scelto è tipicamente la **diffusione Bhabha** a piccoli angoli, ossia, un processo del tipo:

$$e^- + e^+ \longrightarrow e^- + e^+$$

Il processo è descritto dai seguenti diagrammi di Feynmann:



Risulta che per piccoli angoli (la situazione in cui si siamo messi) il processo del diagramma di destra, ovvero il diagramma di scambio del canale t , è il diagramma dominante. Da un punto di vista cinematico si ha la situazione in figura 1.5, con conseguente diffusione di un angolo θ .

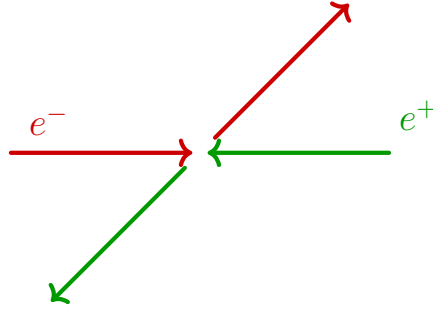


Figura 1.5

Il perché venga scelto un processo di questo tipo viene da un'importante motivazione. Dalla propagazione gaussiana segue che:

$$\frac{\Delta\sigma_x}{\sigma_x} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\sigma_{rif}}{\sigma_{rif}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\dot{N}_x}{\dot{N}_x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\dot{N}_{rif}}{\dot{N}_{rif}}\right)^2} \quad (1.4.6)$$

che noi vorremmo essere il più piccolo possibile. Per rendere piccolo l'errore su σ_x è necessario che la sezione d'urto del processo di riferimento sia nota con precisione. Il Bhabha è un processo ben noto dalla QED e dunque permette di dire che l'errore $\frac{\Delta\sigma_{rif}}{\sigma_{rif}}$ sia piccolo. Inoltre, gli errori sui conteggi sono di tipo statistico e seguono delle poissoniane, ovvero, vanno come $\frac{\Delta\dot{N}}{\dot{N}} = 1/\sqrt{N}$. È fondamentale anche il fatto che il processo scelto non sia un processo raro, ossia, non dev'essere un processo con meno eventi di quelli osservati, poiché il termine $\frac{\Delta\dot{N}_{rif}}{\dot{N}_{rif}}$ non dev'essere dominante rispetto quello poissoniano del processo ignoto ($\frac{\Delta\dot{N}_x}{\dot{N}_x}$). Importante notare anche che nei collider non si utilizza tutto l'angolo solido per il processo di riferimento, ma

solo una parte, motivo per cui bisogna conoscere bene i bordi dello spazio delle fasi (Ω_{rif}) a cui siamo interessato per poter integrare. Fatte queste considerazioni si trova che $\frac{\Delta\sigma_x}{\sigma_x}$ è dell'ordine di 1/1000.

Nota Si riescono a contare bene i N_{rif} poiché trattando un processo elastico, stato iniziale e finale hanno energie praticamente uguali, però le particelle prodotte hanno una segnatura sperimentale molto chiara, quindi, il conteggio degli eventi è più facile.

Possiamo a questo punto studiare com'è fatto il collisore. Esso ha geometria cilindrica e racchiude l'asse dei fasci. È rappresentato in figura 1.6.

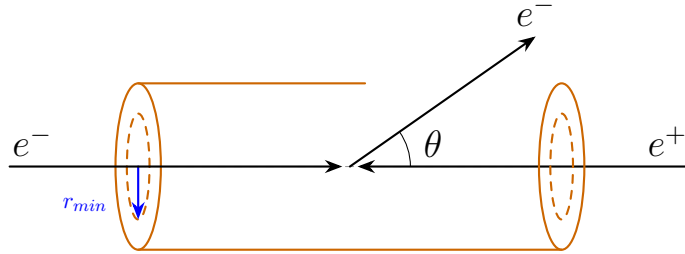


Figura 1.6

Sono presenti due calorimetri elettromagnetici per permettere l'identificazione delle particelle (se e^+ o e^-) e per misurare l'energia, visto che in un urto elastico nello stato finale si hanno le stesse energie iniziali. Il singolo calorimetro è posto molto vicino alla linea del fascio (piccolo angolo) e ha simmetria cilindrica (motivo per cui l'integrazione sull'angolo azimutale φ sarà semplicemente 2π). Il motivo per cui ci si mette a piccoli angoli è perché nel processo del canale t (ovvero quello del diagramma di destra) si ha $\sigma \propto 1/\theta^4$, per cui la maggior parte degli eventi sono a piccoli angoli. I calorimetri si posizionano il più vicino possibile alla direzione del fascio, con raggi caratteristici dell'ordine $r_{min} \sim 10$ cm e $r_{max} \sim 50$ cm e con una distanza dal punto di interazione (indicando con $\hat{z}$ l'asse dei fasci) dell'ordine $z \sim 2$ m. Scriviamo la sezione d'urto:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 16 \frac{\alpha^2}{s} \frac{1}{\theta^4} (\hbar c)^2 = 16 \alpha^2 \left(\frac{\hbar c}{\sqrt{s}} \right)^2 \frac{1}{\theta^4} = \sigma_0 \frac{1}{\theta^4} \quad (1.4.7)$$

ricordando che sezioni d'urto con andamento $1/\theta^4$ sono tipo Rutherford e che negli esperimenti recenti (LEP) si hanno delle energie dell'ordine $\sqrt{s} = 100$ GeV. Possiamo trovare la sezione d'urto totale. Possiamo vedere:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\cos\theta} \frac{d}{d\varphi} = \frac{d\sigma}{d\cos\theta} \frac{1}{2\pi} \quad (1.4.8)$$

dunque (1.4.7):

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = 2\pi 16 \frac{\alpha^2}{s} \frac{1}{\theta^4} (\hbar c)^2 \equiv \frac{\sigma_0}{\theta^4} \quad (1.4.9)$$

tenendo conto che a piccoli angoli si ha:

$$\cos\theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2} \implies \theta \frac{d}{d\cos\theta} = \left| \frac{d}{d\theta} \right| \quad (1.4.10)$$

per cui integrando sugli angoli:

$$\sigma_{rif} = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} d\theta \frac{d\sigma}{d\theta} \quad (1.4.11)$$

$$= \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} d\theta \sigma_0 \frac{1}{\theta^3} \quad (1.4.12)$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_0 \left(\frac{1}{\theta_{min}^2} - \frac{1}{\theta_{max}^2} \right) \quad (1.4.13)$$

$$\sim \frac{\sigma_0}{2} \left(\frac{1}{\tan^2\theta_{min}} - \frac{1}{\tan^2\theta_{max}} \right) \quad (1.4.14)$$

$$= \frac{\sigma_0}{2} \left(\frac{z^2}{r_{min}^2} - \frac{z^2}{r_{max}^2} \right) \quad (1.4.15)$$

poiché dai valori considerati dell'apparato sperimentale ($z = 2$, $r_{min} = 0.1$ m, $r_{max} = 0.5$ m) si può anche dire che:

$$\begin{cases} \tan\theta = \frac{r}{z} \sim \theta \\ \theta_{min} = \frac{r_{min}}{z} \\ \theta_{max} = \frac{r_{max}}{z} \end{cases} \implies \begin{cases} \theta_{min} = 1/20 \\ \theta_{max} = 5/20 \end{cases} \quad (1.4.16)$$

e dunque si può calcolare la sezione d'urto (considerando $\sigma_0 \sim 0.2$ nb):

$$\sigma_{rif} \sim 200\sigma_0 = 40 \text{ nb}. \quad (1.4.17)$$

Si noti che il risultato è coerente con ciò che si osserva, infatti, i processi di interazione debole hanno sezioni d'urto dell'ordine di qualche nb, pertanto lo scattering Bhabha risulta adeguato come processo di riferimento.

1.4.2 Collisori adronici

Nei processi adronici ci sono maggiori difficoltà rispetto i processi e^+e^- . Il calcolo della luminosità si fa procedendo in maniera differente poiché:

- Non si ha un processo di riferimento, in quanto la collisione tra adroni raramente è elastica (si vede che interazioni forti adroniche hanno diffusioni elastiche molto rare), sono processi in cui vengono prodotti molti adroni, le cui misure sono molto complicate, e soprattutto è difficile ottenere una buona precisione.

- Le particelle dei fasci adronici interagiscono spesso sia con il gas residuo, dal momento che il vuoto praticato nei collider non è perfetto, sia tra di loro; ciò rende la luminosità non costante (l'effetto è che nelle interazioni vengono rimosse particelle dal fascio e ciò rende $\mathcal{L}$ non costante), ma variabile nel tempo con una legge del tipo:

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}_0 e^{-t/\tau} \quad (1.4.18)$$

in cui $\tau \sim 12$ h. In 10 min si ha una variazione relativa dell'1%, certamente non trascurabile.

Per superare questi problemi si può procedere in due modi, o si misura direttamente la luminosità del fascio, oppure si determina una variabile che varia nel tempo con $\mathcal{L}$ e la si utilizza per monitorare la luminosità.

Lo scan di Van Der Meer È uno strumento che permette di avere misurare direttamente la luminosità. Riprendiamo la definizione di luminosità:

$$\mathcal{L} = \frac{f_{rev}}{S} N_b N_a n_{branch} \quad (1.4.19)$$

e facciamo l'ipotesi che la distribuzione delle particelle nei fasci nel piano trasverso (rispetto l'asse) sia gaussiana, in entrambe le direzioni spaziali. Fatta questa ipotesi, dette σ_x e σ_y le deviazioni standard di tali gaussiane, è possibile stimare la regione di sovrapposizione dei due fasci come:

$$S = 4\pi \sigma_x \sigma_y \quad (1.4.20)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_0 = f_{riv} n_{bunch} \frac{N_a N_b}{4\pi \sigma_x \sigma_y}. \quad (1.4.21)$$

Si faccia attenzione però che l'espressione (1.4.20) vale solo quando i fasci sono completamente sovrapposti. Sperimentalmente quello che si fa è sfalsare poco alla volta i fasci l'uno rispetto l'altro lungo una certa direzione, come in figura 1.7, introducendo una distanza dy . Sfalsando i fasci cambia S , e di conseguenza cambia $\mathcal{L}$, ma dalla relazione:

$$\dot{N} = \mathcal{L}\sigma$$

essendo σ costante (fissato un processo), vediamo che $\dot{N}$ cambia e segue l'andamento di $\mathcal{L}$.

Si potrebbe dimostrare che, per una distribuzione gaussiana nei fasci, l'andamento seguito è

$$\mathcal{L}(dy) = \mathcal{L}_0 \frac{1}{\Sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{dy^2}{\Sigma_y^2}\right\} \quad (1.4.22)$$

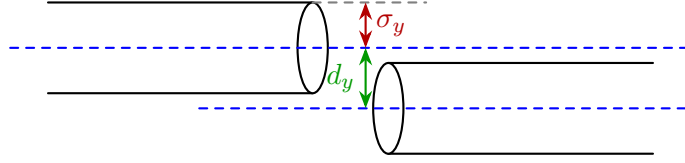


Figura 1.7

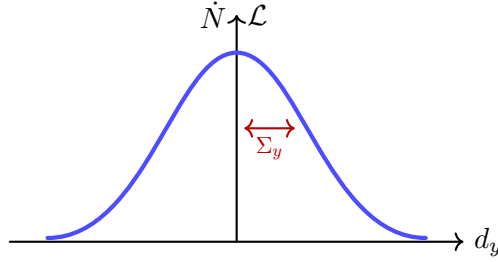


Figura 1.8

in cui Σ_y è la somma in quadratura della larghezza dei due fasci. Si veda la figura 1.8. Per due fasci con uguale larghezza σ_y vale $\Sigma_y = \sqrt{2} \sigma_y$.

Il modo di procedere è quindi questo: sfalsando i fasci (lungo la direzione y) possiamo metterci a contare gli eventi e costruire un grafico tipo $\mathcal{L}(dy)$, da cui possiamo ricavare Σ_y e dunque $\sigma_y = \Sigma_y / \sqrt{2}$; ripetendo lo stesso procedimento si può ricavare anche σ_x . Una volta trovate le deviazioni standard delle gaussiane si può stimare S dalla relazione (1.4.20) e di conseguenza trovare la luminosità da (1.4.21).

Esempio numerico Ad LHC si ha:

$$\begin{aligned} f_{riv} &\sim 10^4 \text{ Hz} \quad , \quad N_a \sim N_b \sim 10^{11} \text{ part/bunch} \\ n_{bunch} &\sim 3 \cdot 10^3 \quad , \quad \sigma_x = \sigma_y \sim 60 \text{ } \mu\text{m} \end{aligned}$$

dunque:

$$\mathcal{L}_0 = n_{bunch} f_{riv} \frac{N_a N_b}{4\pi\sigma_x\sigma_y} = 10^4 \cdot 3 \cdot 10^3 \frac{10^{22}}{4\pi \cdot 36 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2} \text{ Hz} = 1 \text{ nb}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

Il metodo degli scan di Van Der Meer risulta comunque poco pratico per monitorare l'intensità dei fasci. Le criticità principali sono due. Infatti si potrebbe pensare di ripetere le misure di S ogni 10 minuti, facendo ciò il metodo porterebbe a rischiare di perdere fasci, e inoltre non sarebbe un modo efficace di utilizzare l'acceleratore, poiché con i fasci sfalsati non si contano molti eventi e per buona parte del tempo si lavora a bassa luminosità.

Monitoring Consideriamo la definizione di luminosità tramite rate (relazione (1.4.3)) ed esprimiamola tramite altre grandezze:

$$\dot{N} = \mathcal{L} \sigma_{vis} = n_{bunch} f_{riv} \mu \quad (1.4.23)$$

in cui abbiamo scritto μ , che indica il numero medio di interazioni protone-protone / BX (con BX indichiamo il beam cross = $n_{bunch} f_{riv}$, ossia, un numero di incroci dei fasci). Il parametro μ segue una statistica poissoniana, da cui possiamo ricavare (in generale da una generica poissoniana):

La probabilità che non ci siano eventi:

$$P(0, \mu) = e^{-\mu}. \quad (1.4.24)$$

La probabilità di interazione / BX:

$$1 - P(0, \mu) = 1 - e^{-\mu}. \quad (1.4.25)$$

Per cui seguiamo il valore di μ dalla probabilità di non avere interazioni. Per avere un'idea degli ordini di grandezza coinvolti si può calcolare μ a partire dai valori tipici (in LHC):

$$\begin{aligned} f_{riv} &\sim 10^4 \text{ Hz} \quad , \quad \mathcal{L} = 10^3 3 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \\ n_{bunch} &\sim 3 \cdot 10^3 \quad , \quad \sigma_{vis} = 0.1 \text{ b} \end{aligned}$$

per cui si ha

$$\mu = \frac{\mathcal{L} \sigma_{vis}}{n_{bunch} f_{riv}} \sim 3 \quad , \quad P(0, \mu) = e^{-3} \sim 5\%$$

dunque ci aspettiamo che nel 5% degli incroci dei fasci non si veda nulla.

Così come l'altro metodo, anche questo per determinare $\mathcal{L}$ non è perfetto. In questo caso i limiti sono: considerando un evento raro e desiderando di aumentare la luminosità si finisce con aumentare μ , il che è un problema poiché così facendo il numero di eventi in cui non ci sono interazioni diminuisce drasticamente e abbiamo pochi eventi (che misuriamo) per stimare il valore di μ . La luminosità viene monitorata considerando ciò. La soluzione al problema è quella di costruire il rivelatore non come un unico blocco, bensì segmentato avanti, indietro, a destra e a sinistra in torri di lettura trattate in modo indipendente. Facendo così si aumenta la probabilità di non osservare eventi in ciascuna di esse. Si veda la rappresentazione in figura 1.9.

Le torri le si costruisce in modo che siano senza segnale quando avviene l'interazione $p-p$. Si indica con f_0 la frazione di canali spenti (in cui non c'è segnale) durante un'interazione $p-p$. Possiamo calcolare il valore medio di f_0 ad ogni incrocio dei fasci. Se avessimo una sola interazione il valore medio sarebbe f_0 , se ce ne fossero due sarebbe $(f_0)^2$ e così via. La frazione media

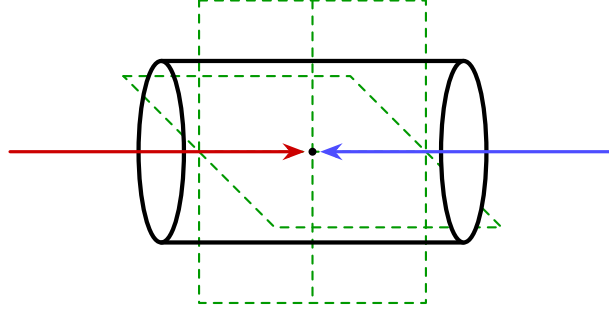


Figura 1.9

del rivelatore in cui non ci sono segnali durante un'interazione si ottiene moltiplicando la probabilità di avere k segnali all'incrocio con la frazione del rivelatore alla k (dalle relazioni date dalla distribuzione di Poisson), ossia:

$$\langle f_0 \rangle = (f_0)^k \cdot \frac{e^\mu \mu^k}{k!} \quad (1.4.26)$$

sommiamo inoltre su tutti i possibili valori di k :

$$\langle f_0 \rangle = \sum_k (f_0)^k \cdot \frac{e^\mu \mu^k}{k!} = e^{-\mu} e^{f_0 \mu} = e^{\mu(f_0-1)} = e^{-\mu(1-f_0)}. \quad (1.4.27)$$

Si può notare che se segmentassimo di più il rivelatore f_0 aumenterebbe e $1 - f_0$ diminuirebbe e si ridurrebbe $e^{-\mu}$. Quello che facciamo operativamente è misurare $\langle f_0 \rangle$ e ricavare μ per diversi istanti di tempo.

Capitolo 2

Particelle di materia

Vediamo in questo capitolo i leptoni, con i relativi neutrini, e i pioni.

Una prima suddivisione che possiamo fare delle particelle elementari è tra leptoni e adroni. Differenziamo questi due tipi di particelle poiché differiscono per la sensibilità alla forza nucleare forte. Infatti, i leptoni non ne sono sensibili, mentre gli adroni sì.

I *leptoni* sono tutti fermioni; gli *adroni* si suddividono in mesoni (di spin intero) e barioni (di spin semi-intero). Nel Modello Standard altre particelle che si possono trovare sono i bosoni di gauge γ , $W^\pm$ e Z .

Analizziamo alcune particelle elementari (e non).

2.1 I leptoni

I leptoni sono suddivisi in tre famiglie:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} . \quad (2.1.1)$$

Non parleremo troppo delle caratteristiche che queste particelle hanno da un punto di vista teorico, ma analizzeremo come possiamo costruire apparati sperimentali per la loro ricerca.

2.1.1 Apparati sperimentali

I principali strumenti di indagine sono la misura di p_T , ovvero l'impulso trasverso, e di dE/dx , ossia la perdita di energia per unità di lunghezza.

La misura dell'impulso avviene immergendo il sistema in un campo magnetico esterno, così le particelle sono deflesse e lungo i piani ortogonali al campo $\vec{B}$ si muovono di moto circolare uniforme; chiamiamo ρ il raggio di tale traiettoria. Al moto circolare assegniamo solo la componente dell'impulso

ortogonale al campo magnetico, p_T . La relazione che lega impulso e raggio di curvatura è:

$$p_T = 0.3 B \rho \quad (2.1.2)$$

in cui p_T è misurato in GeV/c, il campo $\vec{B}$ in tesla (T) e ρ in metri.

L'altra misura che si vuole fare, la perdita di energia per unità di lunghezza, la si riporta tipicamente in funzione di:

$$\gamma\beta = \gamma \frac{v}{c} = \frac{p}{m} \quad (2.1.3)$$

dove si considerano le unità naturali. Dall'andamento tipico di dE/dx , rappresentato in figura 2.1, individuiamo tre distinte regioni. La regione *blu*, con $\gamma\beta < 3$, in cui la perdita di energia va come $1/\beta^2$; la regione *verde*, con $3 < \gamma\beta < \mathcal{O}(10^3)$, in cui dE/dx è praticamente costante, per questo chiamata regione di minimo di ionizzazione (MIP), ha una leggera dipendenza dal materiale e assume, tipicamente, il valore di $1.5 \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2/\text{g}$; la regione *rossa*, in cui $\gamma\beta > 10^3$, dove vediamo che c'è un andamento lineare con β , infatti, in questa regione $p \sim E$ e vale la relazione:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{E}{x_0} \quad (2.1.4)$$

con x_0 parametro.

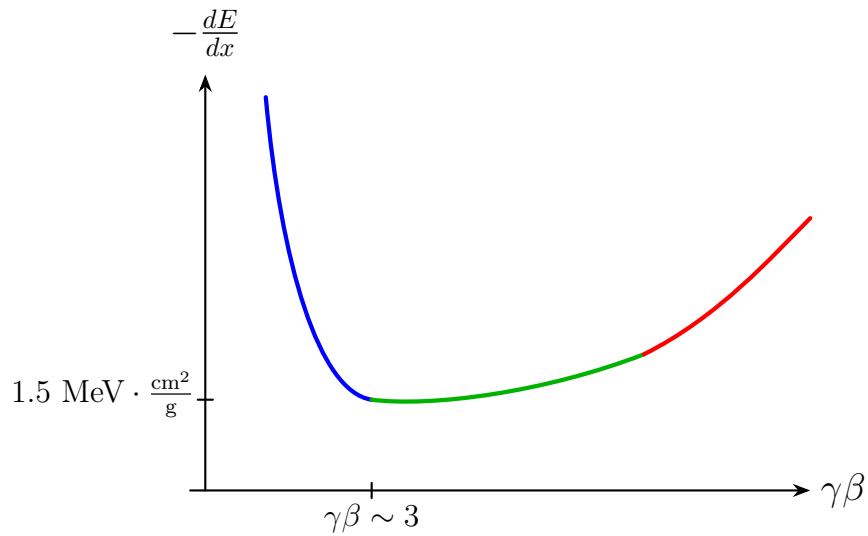
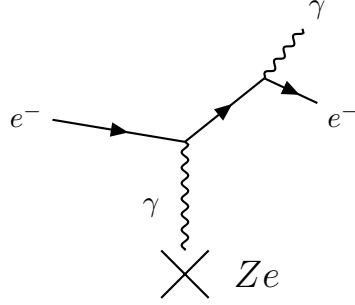


Figura 2.1: Curva di Bethe-Bloch.

Nota. Nelle prime due regioni il processo principale in gioco è la ionizzazione, mentre nella terza il Brehmstrahlung, raffigurabile come:



Vediamo ora quale errore, che chiamiamo ϵ , si commette facendo l'approssimazione $E \sim p$ (unità naturali). Utilizziamo le unità standard:

$$\frac{E - pc}{pc} = \frac{\gamma mc^2 - \gamma mvc}{m\gamma vc} \quad (2.1.5)$$

$$= \frac{m\gamma c^2 - m\beta c^2 \gamma}{m\beta c^2 \gamma} \quad (2.1.6)$$

$$= \frac{1 - \beta}{\beta} \quad (2.1.7)$$

$$= \epsilon \quad (2.1.8)$$

il che implica:

$$1 - \beta = \beta\epsilon \implies \beta = \frac{1}{\epsilon + 1}. \quad (2.1.9)$$

Ad esempio, se l'errore è del 1%, allora:

$$\epsilon = \frac{1}{100} \implies \beta = \frac{100}{101} \implies v = \frac{100}{101}c.$$

Sul grafico 2.1, abbiamo dE/dx in funzione di $\gamma\beta$, per cui ricordando:

$$pc = m\gamma\beta c^2 \quad (2.1.10)$$

si ha:

$$\gamma^2\beta^2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \quad (2.1.11)$$

$$= \frac{1}{(\epsilon + 1)^2} \cdot \left[1 - \frac{1}{(\epsilon + 1)^2} \right]^{-1} \quad (2.1.12)$$

$$= \frac{1}{(\epsilon + 1)^2 - 1} \quad (2.1.13)$$

$$= \frac{1}{\epsilon^2 + 2\epsilon} \quad (2.1.14)$$

$$\sim \frac{1}{2\epsilon} \quad (2.1.15)$$

considerando ϵ piccolo. Dunque vediamo:

$$\gamma\beta \sim \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \quad (2.1.16)$$

$$= \frac{pc}{m} \quad (2.1.17)$$

il che implica:

$$pc = \frac{m}{\sqrt{2\epsilon}} = \frac{0.511 \text{ MeV}}{\sqrt{2 \cdot 10^{-2}}} = 7 \cdot 0.5 \text{ MeV}. \quad (2.1.18)$$

L'ultimo conto è stato fatto per un e^- nel caso in cui l'errore commesso sia dell'ordine di 0.01. In generale è quindi lecita l'approssimazione $p \sim E$ con un errore dell'1%, se $pc \sim 7 \text{ mc}^2$.

2.1.2 Elettrone e positrone

L'esistenza del positrone venne ipotizzata per la prima volta da Dirac per dare significato alle soluzioni dell'omonima equazione ad energia negativa. Il problema delle energie negative è che gli atomi non sarebbero stabili. Per ovviare al problema si suppose che tutti i livelli energetici negativi siano già occupati nello stato di vuoto. Vedi la figura 2.2. In ogni livello ad energia negativa abbiamo un elettrone di energia $-E$, impulso $\vec{p}$, spin s , carica $-e$ ed un elettrone di energia $-E$, impulso $-\vec{p}$, spin $-s$ e carica e .

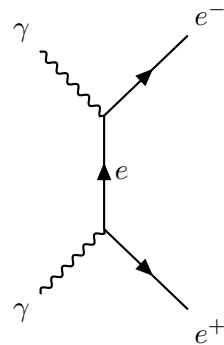
Se dal vuoto rimuoviamo un e^- fornendo energia, allora otteniamo uno stato che è:

$$\text{vuoto} - (-e, -\vec{p}, -s, -E) = \text{vuoto} + (E, \vec{p}, s, e).$$

Ovvero, è come se al vuoto aggiungessimo una particella di carica $+e$, energia E , impulso $\vec{p}$ e spin s . Per tale oggetto vale:

$$E^2 - \vec{p}^2 = m_e^2. \quad (2.1.19)$$

Dirac propose che un modo di cercare queste antiparticelle potesse essere:

$$\gamma + \gamma \longrightarrow e^+ + e^- \quad (2.1.20)$$


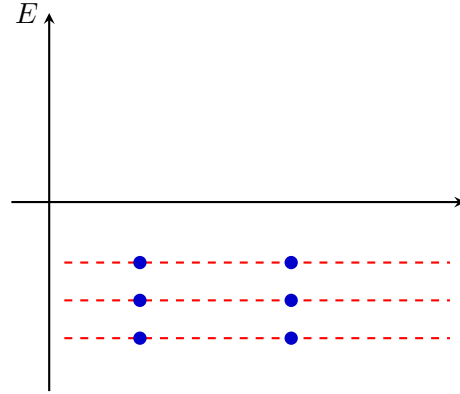
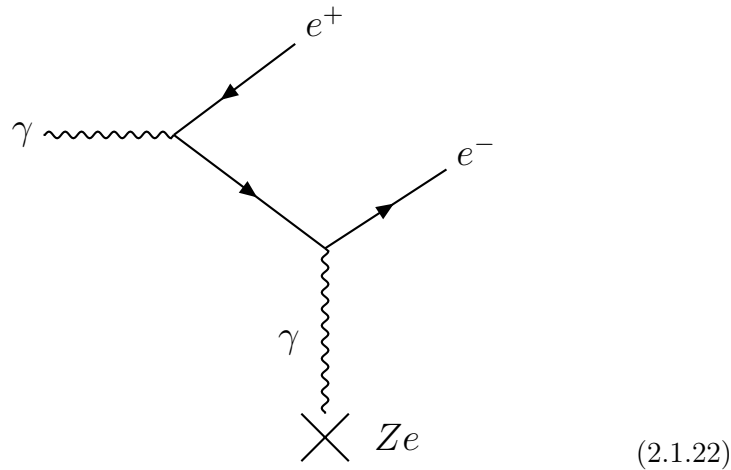


Figura 2.2: Mare di Dirac.

che è un'esperimento difficile da realizzare ancora oggi. Tuttavia e^+ si incontra anche nell'interazione tra i fotoni e la materia, cioè si può studiare la *produzione di coppie*:

$$\gamma \longrightarrow e^+ + e^-. \quad (2.1.21)$$

Tuttavia da solo il γ non può originare la coppia, poiché nel decadimento la massa iniziale dev'essere sempre maggiore della somma delle masse finali (come abbiamo visto). Per questo motivo il processo avviene solamente per l'interazione con un nucleo:



$$(2.1.22)$$

Vediamo come è stato osservato. Sono state utilizzate delle lastre esposte ai raggi cosmici con camere a nebbia. In tali camere a nebbia è presente un campo magnetico, per cui le particelle che le attraversano seguono traiettorie curve. Dalle traiettorie delle particelle troviamo il raggio di curvatura. Si trova un raggio dell'ordine 10 cm se si utilizza un campo magnetico dell'ordine 1/1.5 T. Si trova dunque, utilizzando (2.1.2):

$$p_T \sim 45/50 \text{ MeV}/c. \quad (2.1.23)$$

Le particelle cariche note all'epoca erano solamente due, elettrone e protone, e si può ricavare per essi:

$$\gamma\beta = \begin{cases} p: & 50 \text{ MeV}/1\text{GeV} = 0.05 \\ e^-: & 50 \text{ MeV}/0.5 \text{ GeV} \sim 100. \end{cases} \quad (2.1.24)$$

Questi valori molto diversi di $\gamma\beta$ ci collocherebbero in zone molto diverse dell'energia persa per lunghezza (figura 2.1). In particolare, per il protone saremmo nella regione in cui dE/dx decresce come $1/\beta^2$, mentre per e^- saremmo al minimo di ionizzazione.

Storicamente si osservarono nella camera due tracce di particelle, come nella figura 2.3, che in base al loro verso di percorrenza, fissato $\vec{B}$, si vide avere due cariche opposte. Come già detto, le uniche due particelle cariche erano protone ed elettrone, per cui si pensò che fossero loro due ad essere entrati nella camera. Però si può studiare in che regione della curva dE/dx si trova una data particella studiando la densità di bolle nella camera.

In questo modo si comprese che non si potesse trattare di un protone, ma di qualcosa simile all'elettrone, poiché la densità delle bolle non era elevata tanto quanto quella del caso del protone.

Si poteva trattare di una particella carica positivamente proveniente dal basso, oppure una negativa proveniente dall'alto. La fotografia su lastra che si fece, ovviamente è statica, per cui non permetteva di comprendere il verso di percorrenza della traiettoria.

Per determinare il verso della traiettoria si è inserito un blocco di piombo dello spessore di 0.6 cm in mezzo alla camera: attraverso tale blocco la particella perde energia e quindi riduce il raggio di curvatura della traiettoria. In questo modo, confrontando i raggi prima e dopo si comprese il verso di percorrenza delle particelle.

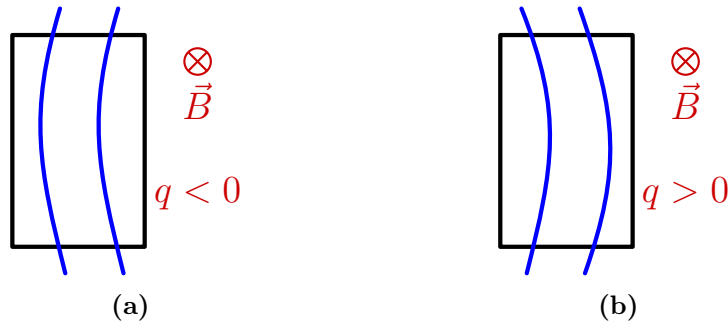


Figura 2.3

2.1.3 Muoni

L'osservazione sperimentale dei muoni venne effettuata all'inizio degli anni '40. Inizialmente era solo una componente particolarmente penetrante dei

raggi cosmici. La tecnica sperimentale è simile alla precedente: abbiamo lastre fotografiche esposte ai raggi cosmici e nella camera a bolle è inserito un blocco di platino spesso 1 cm. Si veda la figura 2.4. Dal raggio di curvatura misuriamo $\vec{p}_i$ e $\vec{p}_f$ e, nell'ipotesi di particelle ultrarelativistiche, approssimiamo l'impulso con l'energia.

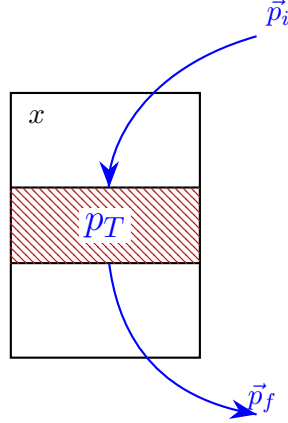


Figura 2.4

Possiamo anche graficare:

$$\Delta E = |\vec{p}_i| - |\vec{p}_f| \quad (2.1.25)$$

in funzione di $E = |\vec{p}_i|$. Vedi la figura 2.5, in cui si individuano due popolazioni.

La regione 1. è una retta con $\Delta E \propto E$, quindi, dal confronto dE/dx in funzione di $\gamma\beta$, vuol dire $\gamma\beta$ grande, per cui sono elettroni e il processo è *brehmstrahlung*.

La regione 2. ha $\Delta E \sim 0$ inizialmente non compreso, ma poi identificato con la regione MIP. L'impulso misurato dai raggi di curvatura era di circa 150 MeV, quindi se si fosse trattato di protoni:

$$\gamma\beta \sim 150 \text{ MeV}/1 \text{ GeV} \simeq 0.15. \quad (2.1.26)$$

Però se $\gamma\beta \simeq 0.15$ saremmo in una regione con densità di ionizzazione molto alta, e non si misura tale densità. Dunque, queste particelle dovevano avere una massa compresa tra quella dell'elettrone e del protone (ossia il muone).

La misura della massa dei muoni avvenne tramite un esperimento in cui venne utilizzato un *trigger* per la prima volta (per questo molto importante). Infatti, non siamo interessati a tutti gli eventi, ma solo a radiazione altamente penetrante con energia ed impulso tali da poter calcolare m con sufficiente precisione.

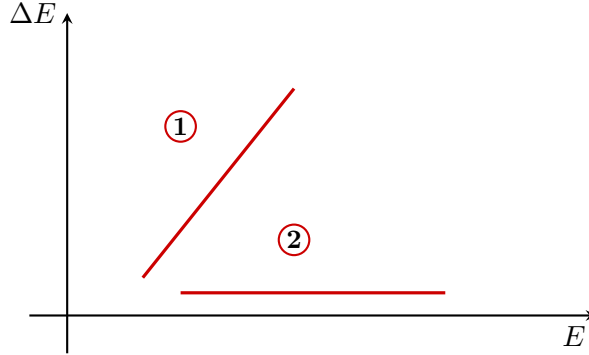


Figura 2.5

Nell'apparato sperimentale, raffigurato in figura 2.6, abbiamo due contatori geiger c_1 e c_2 per verificare che il segnale sia in coincidenza e per eliminare rumore. Poi mettiamo un blocco di piombo per selezionare radiazione penetrante; dopo il blocco si pone un terzo contatore Geiger, ma non siamo interessati a particelle con $\gamma\beta = p/m$ troppo grande, in quanto non li vogliamo al minimo di ionizzazione, poiché in tale regione per 3 ordini di grandezza di p/m , dE/dx rimane costante, quindi abbiamo poca sensibilità. Il terzo contatore Geiger c_3 lo mettiamo in coincidenza con c_1 per selezionare solamente le particelle penetranti.

È meglio porci ad un $\gamma\beta$ più basso per avere maggiore sensibilità, per questo motivo il blocco di piombo serve a fare in modo che i muoni si fermino nella camera a nebbia; non c'è poi un quarto contatore.

Quindi da dE/dx misuriamo p/m , da R ricaviamo p , quindi stimiamo:

$$m_\mu \sim 100 \text{ MeV}. \quad (2.1.27)$$

All'epoca si stava anche ricercando la particella mediatrice dell'interazione forte (residua tra nucleoni) che si supponeva avesse una massa dell'ordine 100 MeV. L'esperimento di Conversi dimostrò come ciò non potesse essere vero.

L'idea è che essendoci due possibili cariche associate ai muoni, se il μ fosse il mediatore della forza forte, i μ^+ tenderebbero ad essere respinti dai nuclei, mentre i μ^- attratti, per cui spenderebbero più tempo in prossimità dei nuclei e avrebbero più probabilità di interagire di mediare le interazioni forti. Quindi in uscita da un materiale ci aspettiamo più muoni positivi e meno negativi.

Nell'esperimento di Conversi la sorgente di muoni sono sempre i raggi cosmici. L'apparato sperimentale è raffigurato in figura 2.7. Abbiamo un contatore Geiger c_1 , poi un ferromagnete percorso da corrente che genera su una metà un campo penetrante e nell'altro un campo uscente.

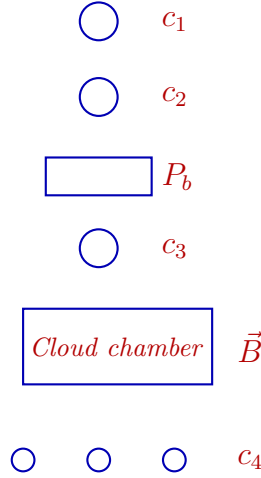


Figura 2.6

A seconda della direzione di arrivo i μ^+/μ^- vengono curvati in maniera diversa, opposta. Notiamo che invertendo i versi delle correnti passiamo da configurazioni in cui i μ^+ incidono sull'assorbitore e i μ^- divergono a quella opposta. I muoni incidono poi sull'assorbitore e in uscita confrontiamo il rapporto tra i muoni negativi ed i muoni positivi, lavorando prima in una e poi in un'altra configurazione.

Il conteggio è effettuato tramite un terzo contatore Geiger. Il rapporto muoni incidenti/non incidenti è indipendente dalla carica, quindi i muoni non sono i mediatori della forte. Dunque, nonostante la massa ~ 100 MeV lo renda un possibile candidato della mediazione dell'interazione forte residua tra nucleoni, non notando nessuna discrepanza tra le probabilità di interazione con la materia di μ^- , piuttosto che μ^+ , dobbiamo escludere questa ipotesi.

Il muone è una particella *instabile* e decade come:

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (2.1.28)$$

$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu. \quad (2.1.29)$$

Il decadimento è a tre corpi in quanto, a fissata energia del muone, l'energia dell'elettrone non è fissata: i neutrini tipicamente non si rivelano, mentre il muone e l'elettrone sì, quindi ne riusciamo a fare una misura di energia. La vita media è data da $\tau \sim 2 \cdot 10^{-6}$ s.

2.1.4 Tau

La particella tau venne scoperta negli anni '70 nell'esperimento *MARK I* a *SLAC*, in un collisore e^+/e^- .

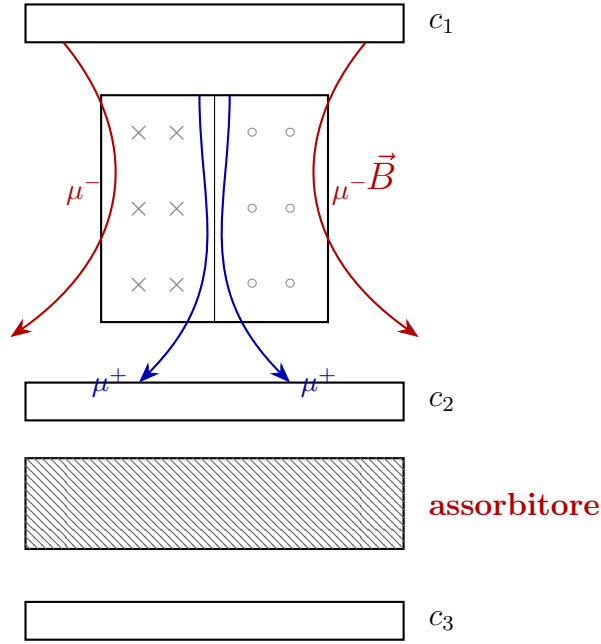


Figura 2.7

La configurazione cinematica era tale per cui i fasci avevano stessa energia, ma impulsi opposti. Si notò che per $\sqrt{s} \geq 4$ GeV si manifestavano processi in cui c'erano un elettrone ed un muone **acomplanari**:

$$e^+ + e^- \longrightarrow e^- + \mu^+ \quad ; \quad e^+ + e^- \longrightarrow e^+ + \mu^-$$

Infatti, se ci poniamo nello stato iniziale, poiché gli impulsi dei fasci sono opposti, il quadrimpulso può essere scritto come $(2E, \vec{0})$, quindi per la conservazione del quadrimpulso, anche la somma dei tri-impulsi finali deve essere nulla, ma questo non si osserva; date le direzioni dell'elettrone iniziale e dell'elettrone finale, esse generano un piano e l'impulso del muone non appartiene a tale piano, quindi il quadri-impulso sembra non conservarsi, a meno che nello stato finale non ci sia un'altra particella, o meglio, esistano processi intermedi che portino a quello che vediamo nei processi di cui sopra.

Questo esperimento, che graficamente puoi vedere in figura 2.8, incontrò alcune difficoltà:

1. non copre tutto l'angolo solido
2. Nel 20% dei casi i leptoni venivano scambiati per adroni e viceversa

A causa di questi problemi non si aveva la certezza che in tale processo venisse effettivamente prodotta una nuova particella, anche perché tali eventi erano rari e potevano essere impubili ad errori sperimentali.

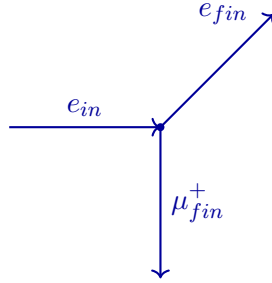
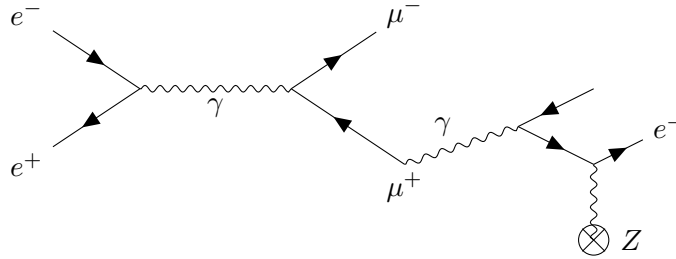


Figura 2.8

Ad esempio, dato il processo:



che è la combinazione di un'annichilazione e del **brehstralung**, si perdono μ^+ ed e^- , quindi compariva l'acomplanarietà ma non si producevano effettivamente nuove particelle.

L'apparato sperimentale venne in seguito migliorato aumentando lo spessore esterno, in modo da identificare meglio i muoni.

Anche dopo tali miglioramenti, solo circa 25 eventi su 35.000 manifestarono acomplanarietà.

In realtà, il processo avviene come:

$$e^+ + e^- \longrightarrow \tau^+ + \tau^-$$

$$\text{con } \tau^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau$$

$$\tau^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_\tau$$

I neutrini sfuggono, per cui e^- e μ^+ non appaiono sullo stesso piano.

Il fatto che questo processo avvenga per $\sqrt{s} \gtrsim 4$ GeV all'incirca, ci permette di stimare la massa dei leptoni τ , utilizzando la condizione di soglia $\sqrt{s} \geq \sum_f m_f$. Alla soglia:

$$\sqrt{s} = 2m_\tau \implies m_\tau \simeq 1,78 \text{ GeV.} \quad (2.1.30)$$

Inoltre l'andamento della sezione d'urto rispetto $\sqrt{s}$, in prossimità della soglia, dipende dallo spin: i punti si collocano sulla curva teorica corrispondente a spin 1/2. Vedi la figura 2.9.

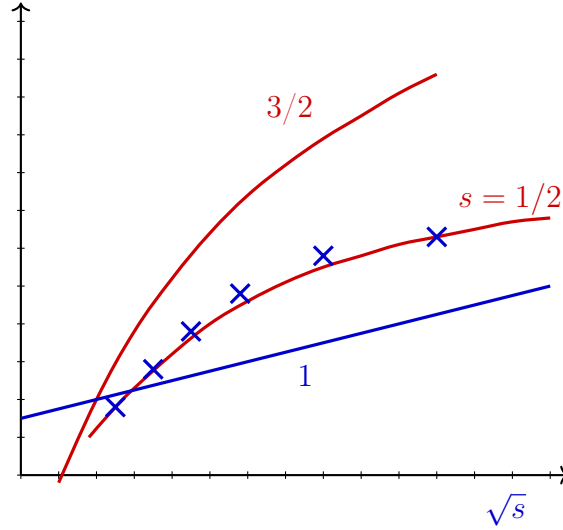


Figura 2.9

I τ sono particelle instabili, infatti hanno vita media di circa 0.3 ps. Abbiamo i seguenti decadimenti possibili:

$$\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \quad 1/6 \quad (2.1.31)$$

$$\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \quad 1/6 \quad (2.1.32)$$

$$\tau^- \rightarrow h^- + \nu_\tau \quad 1/2 \quad (h \text{ è un adrone}) \quad (2.1.33)$$

$$\tau^- \rightarrow h^- + h^- + h^+ + \nu_\tau \quad 1/6 \quad (2.1.34)$$

Possiamo anche analizzare come venne misurata la vita media dei τ . L'importanza di questa misura sta nel fatto che permette di confrontare la vita media di τ con quella di μ^- , in modo da testare l'universalità dei decadimenti deboli.

Tipicamente si misura la distanza tra il punto di produzione ed il punto di assorbimento, che ha il problema intrinseco che lo sperimentatore deve conoscere dove viene creata e annichilita la particella. Introduciamo la quantità:

$$c\tau = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 3 \cdot 10^{-13} \text{ s} = 9 \cdot 10^{-5} \text{ m}. \quad (2.1.35)$$

Questa distanza è troppo piccola per essere misurata e non si può lavorare a $\sqrt{s} \sim 4 \text{ GeV}$, poiché sulla soglia il τ viene emesso fermo (punto di produzione e decadimento nello stesso punto), per cui si deve lavorare ad energie più alte. Negli esperimenti LEP si ha $\sqrt{s} \sim 100 \text{ GeV}$ e quindi, nel processo $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$, ogni τ ha un'energia di circa 50 GeV e, dal momento che è all'incirca 7 volte maggiore della sua energia a riposo, è lecita l'approssimazione $E \sim p$.

In questo caso si ha:

$$\gamma\beta = \frac{pc}{m} = \frac{50 \text{ GeV}}{1,8 \text{ GeV}} \approx 25 \quad (2.1.36)$$

e la lunghezza dell'intervallo, nel laboratorio, percorso dalla particella prima di decadere è dato da:

$$\gamma\beta c\tau \approx 25 \cdot 90 \mu\text{m} \approx 2.25 \text{ mm}. \quad (2.1.37)$$

Se si misura la distribuzione delle distanze prima di decadere, è un esponenziale decrescente di parametro 2.5 mm, quindi:

$$\frac{dN}{dx} = e^{-x/c\tau}. \quad (2.1.38)$$

Il problema è che sono esperimenti di collisione, dunque sappiamo stimare dove avviene la collisione (**vertice primario**) ma non riusciamo a posizionare un rivelatore a 2.5 mm da tale punto, a causa della presenza della *camera a vuoto*. Infatti, noi abbiamo che il τ decade nella beam pipe (camera a vuoto) e con il rivelatori osserviamo solamente i prodotti dei decadimenti. La tecnica utilizzata per stimare la posizione di decadimento è un'analisi statistica del parametro d'impatto, ovvero si studia la distanza tra l'asse dei fasci e il prolungamento delle tracce di decadimento.

Per capire dove decade il τ servirebbe più di una particella carica; però nello stato finale dei decadimenti abbiamo tipicamente una sola particella carica, per cui non possiamo prolungare all'indietro le traiettorie e vedere dove si intersecano.

Per ricostruire la traccia di una particella carica si utilizzano **rivelatori al silicio**. Che puoi vedere in figura 2.10. Abbiamo rappresentato con l la distanza tra vertice primario e vertice secondario, in cui avviene il decadimento, e $d = l \sin \psi$ il parametro d'impatto. Al crescere della vita media, aumenta l , quindi aumenta d . Dalla misura di d e dalla sua distribuzione si ricava la vita media.

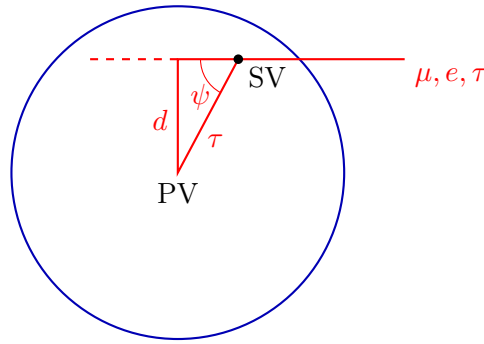


Figura 2.10

Abbiamo però anche un altro problema: i fasci non sono puntiformi, quindi l'interazione non è puntuale, bensì è una nuvola. Facciamo riferimento alla figura 2.11. Per rimediare a ciò si sfrutta il fatto che τ^+ e τ^- vengono emessi in direzioni opposte, quindi misuriamo la distribuzione di $d = d_+ + d_-$,

andando a compensare gli errori. Se d è il nostro parametro d'impatto, d_+ e d_- sono i parametri d'impatto rispetto al vero punto in cui sono prodotti τ^+ e τ^- .

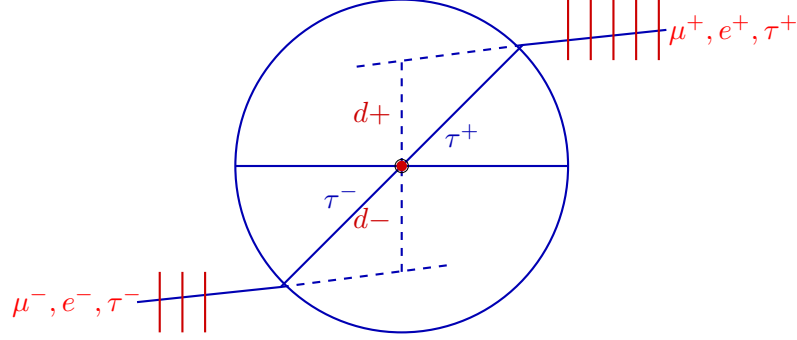


Figura 2.11: Le sbarrette verticali alle estremità dei fasci sono i rivelatori al silicio.

Quindi nell'esperimento si ricostruisce la distribuzione delle distanze $e^{-x/\gamma\beta c\tau}$ e dal parametro τ del fit ricaviamo la vita media. Nella pratica: misuriamo la distribuzione di d , con simulazioni ipotizziamo andamenti di ψ , e quindi l , e poi confrontiamo.

Se volessimo ancora migliorare l'approssimazione potremmo utilizzare dei parametri d'impatto $\hat{d}_{\pm}$, riferiti rispetto al centro nominale della regione luminosa, che approssimano i $d_{\pm}$, così che al primo ordine si abbia:

$$\langle d_+ + d_- \rangle = \langle \hat{d}_+ + \hat{d}_- \rangle. \quad (2.1.39)$$

Ulteriore problema: La *BEAM PIPE* (tubo di vuoto) ha raggio 5 cm, quindi il τ^- decade dentro la beam pipe e non possiamo mettere un rivelatore così vicino.

2.1.5 Neutrini elettronici

L'antineutrino elettronico venne osservato per la prima volta nell'esperimento di Cowan & Reines (anni '50).

Il processo sfruttato per osservarlo è il *doppio decadimento* β :

$$\bar{\nu}_e + p \longrightarrow e^+ + n.$$

Questo processo viene identificato grazie al fatto che le particelle nello stato finale hanno una ben definita segnatura sperimentale:

- *positrone*: lo riconosciamo poiché, attraversando un materiale, si annichila con gli elettroni lì presenti producendo una coppia di fotoni:

$$e^+ + e^- \longrightarrow \gamma + \gamma.$$

- *neutrone*: esso può interagire con alcuni atomi, eccitandoli, i quali quando si diseccitano emettono un fotone. Uno di tali atomi è il cadmio:



Quindi ci aspettiamo di osservare tre fotoni, ma diversi: i primi due emessi simultaneamente, il terzo alcuni microsecondi dopo, dal momento che non interagisce in maniera immediata con il cadmio, e inoltre occorrono alcuni microsecondi prima che il cadmio si ecciti e si disecciti.

Altre cose a cui si deve stare attenti nell'esperimento sono: spegnendo il reattore non si devono osservare segnali; rimuovendo il Cd non si deve osservare il terzo fotone.

Possiamo vedere l'apparato sperimentale in figura 2.12.

Però ci si potrebbe chiedere quale sia la sorgente di tale processo. Nella pratica si utilizza un reattore a fissione nucleare che ha come materiale fissile l' ^{235}U .

Anche se l'esperimento risale agli anni '50, già evidenzia alcune caratteristiche degli esperimenti che rivelano neutrini: *l'esperimento è a bersaglio fisso* e il bersaglio è un *elemento sensibile del rivelatore*.

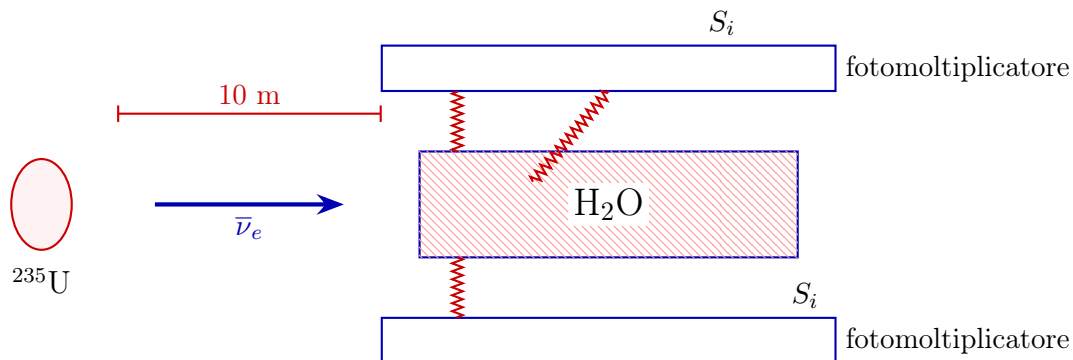


Figura 2.12

Gli antineutrini elettronici emessi dalla sorgente di uranio incidono su un bersaglio contenente 200 L di H_2O contenente sali di cloruro di cadmio. I positroni e i neutroni emettono poi fotoni rivelati tramite fotomoltiplicatori: tali strumenti permettono di verificare che i primi due fotoni siano emessi in maniera simultanea, mentre il terzo alcuni microsecondi dopo.

Problemi che si riscontrano: il numero di eventi atteso è piccolo, quindi spesso eventi di fondo sono scambiati per il segnale ricercato. Nota che anche il passaggio di raggi cosmici che dà segnali simultanei può essere scambiato.

Per risolvere questo problema: l'esperimento è svolto sottoterra per avere maggiore schermatura dai raggi cosmici e si raddoppia l'apparato sperimentale, ossia, utilizziamo due vasche e tre scintillatori. Vedi la figura

2.13. In questo modo: se un raggio cosmico passa, dà luogo a tre eventi simultanei, quindi lo possiamo distinguere chiaramente dal segnale a cui siamo interessati, per il quale abbiamo solo due eventi simultanei (rilevati dai fotomoltiplicatori).

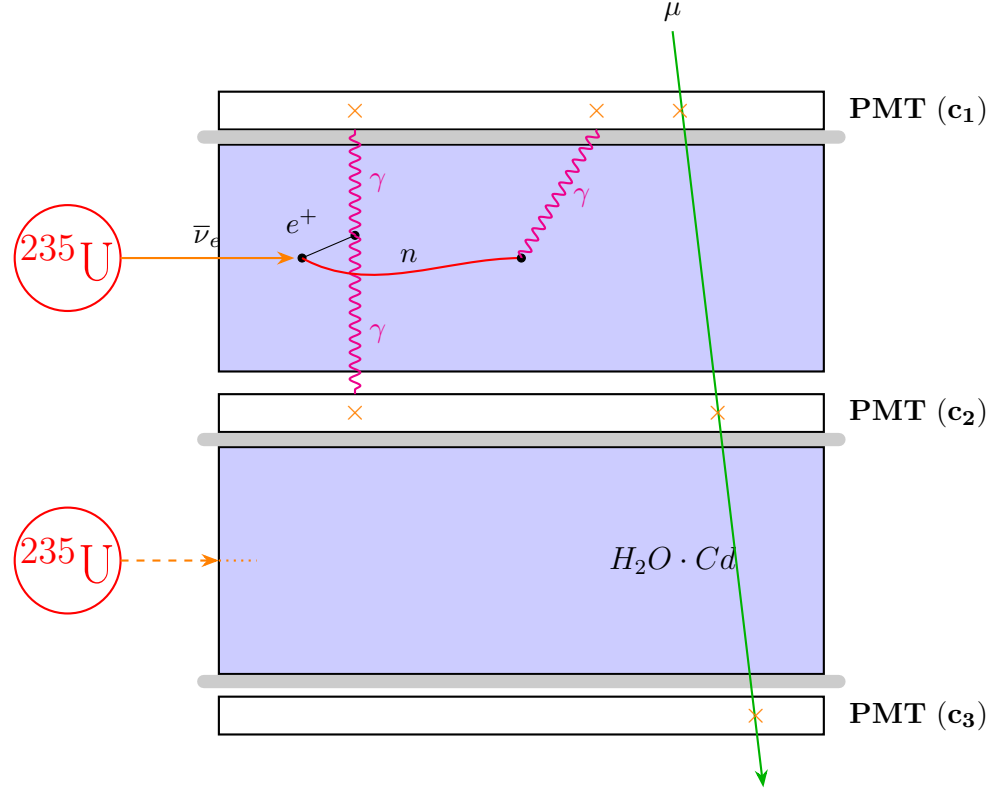


Figura 2.13

Valutiamo il numero di eventi: essendo un esperimento a bersaglio fisso, vale la relazione:

$$\dot{N} = \phi_2 N_0 \sigma \quad (2.1.40)$$

Nota. σ si riferisce al processo $\bar{\nu}_e + \text{atomo di } H$, quindi N_0 è il numero di atomi di H presenti nella vasca.

La sezione d'urto di questo processo è legata a quella del decadimento β e al tempo la sua espressione analitica era nota:

$$\sigma = \frac{4}{\pi} G_F^2 E_e p_e \quad (2.1.41)$$

in cui G_F è la costante di Fermi, E_e e p_e sono energia ed impulso del positrone.

Valutiamo la soglia di questo processo. Ricordiamo:

$$\sqrt{s} \geq \sum m_f \implies E_{soglia} = \frac{(\sum m_f)^2 - m_a^2 - m_b^2}{2m_b} \quad (2.1.42)$$

$$= \frac{(m_e + m_n)^2 - m_\nu^2 - m_p^2}{2m_p} \quad (2.1.43)$$

se assumiamo $m_\nu \sim 0$ (come la struttura del Modello Standard ci dice) abbiamo:

$$E_{soglia, \bar{\nu}} = \frac{(m_e + m_n - m_p)(m_e + m_n + m_p)}{2m_p} \quad (2.1.44)$$

però $m_p \sim 1$ GeV e $m_n - m_p \sim 1.3$ MeV, mentre $m_e \sim 0.5$ MeV, quindi detta $\Delta = m_n - m_p \sim 1.3$ MeV, risulta:

$$E_{soglia, \bar{\nu}} = \frac{(m_e + \Delta)(m_e + 2m_p + \Delta)}{2m_p} \quad (2.1.45)$$

ma:

$$\frac{m_e + 2m_p + \Delta}{2m_p} \sim 1 \quad (2.1.46)$$

quindi in definitiva:

$$E_{soglia} \sim \boxed{m_e + \Delta} = 1.8 \text{ MeV}. \quad (2.1.47)$$

Nel sistema di riferimento del laboratorio l'impulso iniziale è diverso da 0 e coincide con quello dell'antineutrino, quindi dalla cinematica dei processi $2 \rightarrow 2$, segue che $p_e \neq 0$. Proviamo a stimare σ . Partiamo da:

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} \sim 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (2.1.48)$$

che implica:

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} \frac{(m_e c^2)^2}{(m_e c^2)^2} = \frac{1}{(m_e c^2)^2} \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \cdot (5 \cdot 10^{-4})^2 \quad (2.1.49)$$

$$= \frac{1}{(m_e c^2)^2} \cdot \frac{10^{-11}}{4}. \quad (2.1.50)$$

Per completare il calcolo, passiamo in unità standard: aggiungendo $(\hbar c)^3$ al denominatore di G_F , tale quantità è un'energia alla -2 , ma abbiamo moltiplicato e diviso per $m_e c^2$, quindi il contributo complessivo è di un'energia alla -2 ; per ottenere un'area basta moltiplicare ancora per $(\hbar c)^2$ e distribuire

le potenze di $(m_e c^2)^4$ tra E_e , $p_e c$ e $(\hbar c)^2$. Si ha:

$$\sigma = \frac{4}{\pi} \left[\frac{G_F}{(\hbar c)^3} (m_e c^2)^2 \right]^2 \frac{E_e}{m_e c^2} \frac{p_e c}{m_e c^2} \frac{(\hbar c)^2}{(m_e c^2)^2} \quad (2.1.51)$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{10^{-22}}{16} \cdot 16 \cdot 10^2 \text{ barn} \frac{E_e}{m_e c^2} \frac{p_e c}{m_e c^2} \quad (2.1.52)$$

$$= 10^{-20} \text{ barn} \cdot \frac{E_e}{m_e c^2} \frac{p_e c}{m_e c^2} \quad (2.1.53)$$

$$= \sigma_0 \frac{E_e}{m_e c^2} \frac{p_e c}{m_e c^2} \quad (2.1.54)$$

con $\sigma_0 = 10^{-20}$ barn, più precisamente $2 \cdot 10^{-20}$ b. σ_0 ha le dimensioni di un'area.

Noi abbiamo fatto un po' un'approssimazione semiclassica, il calcolo esatto della sezione d'urto totale tiene conto che lo spettro energetico dei neutrini emessi dal reattore è *continuo*: ad ogni impulso del neutrino corrisponde un certo impulso dell'elettrone e quindi un certo valore di σ . La σ totale si otterrebbe sommando tutti i contributi; tipicamente $p_e c \sim E_e \sim \mathcal{O}(\text{MeV})$. Segue che $\sigma \sim (\text{unità}) \cdot \sigma_0$ e si dimostra che $\sigma = 10^{-19} \text{ b} = 10^{-43} \text{ cm}^2$.

Possiamo anche fare delle considerazioni sul *numero dei bersagli*, ovvero il numero di atomi di idrogeno nel serbatoio. Sappiamo che 200 L d'acqua corrispondono a 200 kg di H_2O . Se dividiamo per la massa molare ricaviamo il numero di moli, che poi moltiplicato per il numero di Avogadro, e poi ancora per 2, che è il numero di atomi di H in ogni molecola, ci dà:

$$N_b = \frac{2 \cdot 10^5 \text{ g}}{18 \text{ g/mol}} \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 2 \simeq 10^{28} \text{ atomi di H.}$$

Possiamo anche valutare il flusso di neutrini. Per fare ciò si tiene conto che in una catena si producono $6\bar{\nu}$ ed $E_0 = 200 \text{ MeV}$; quindi, conoscendo la potenza del reattore, si può dedurre il numero di neutrini per secondo:

$$\dot{N} = \frac{W}{E_0} = 10^{20} \quad \bar{\nu}/\text{secondo}. \quad (2.1.55)$$

Supponiamo che il reattore emetta i neutrini in modo isotropo, quindi, se la distanza tra il reattore e la vasca è di $d = 10 \text{ m}$, possiamo calcolare il flusso:

$$\phi = \frac{\dot{N}}{4\pi d^2} = \frac{10^{20} \bar{\nu} \cdot \text{s}^{-1}}{4\pi \cdot 10^6 \text{ cm}^2} \simeq 10^{13} \text{ cm}^{-2} \text{s}^{-1} \quad (2.1.56)$$

quindi

$$\dot{n} = \phi \cdot N_b \cdot \sigma \simeq 10^{-2} \text{ s}^{-1}. \quad (2.1.57)$$

Abbiamo trovato un numero molto basso, circa un conteggio ogni 100 secondi (se facessimo i conti corretti $1.2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$, cioè un conteggio ogni 80 secondi),

quindi ci aspettiamo solo pochi eventi ad ora.

Osservazione. Per fare ulteriore verifica del fatto che i processi considerati venissero originati proprio da $\bar{\nu}_e + p$ si tiene conto che i γ emessi dall'annichilazione hanno ciascuno energia di 0.5 MeV. Per verificare ciò tra la vasca e i fotomoltiplicatori si pongono degli strati di materiale assorbente tali che se l'energia dei fotoni che li attraversa è maggiore di 0.5 MeV non vengono assorbiti, altrimenti sì.

Un'altra verifica consiste nell'eliminare i sali di cadmio dal serbatoio: in questo modo si vede che il terzo fotone scompare. Inoltre, se si spegne il reattore non si osserva nulla (o almeno non si dovrebbe)!

In una maniera analoga si cerca di capire se sia possibile il processo $\bar{\nu}_e + n \rightarrow e^- + p$, che teoricamente non sarebbe possibile poiché non conserva il numero leptonico. In questo caso nel bersaglio non usiamo cadmio, ma cloro ($Z = 17$). Se il processo fosse possibile, del cloro trasmuterebbe in Argon ($Z = 18$), in quanto verrebbe prodotto un protone, ma ciò non si osserva.

2.1.6 Neutrini muonici

Il processo che venne sfruttato per osservare il neutrino muonico è:

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

nell'esperimento di Steinberg (1962). Si sapeva che praticamente nel 99% dei casi π^+ decade in questo modo, producendo un *neutrino*, però bisognava capire se tale neutrino fosse lo stesso di quello prodotto nella fissione dell'uranio. Gli altri processi di decadimento sono:

$$\begin{aligned} \pi^- &\longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu & (99\%) \\ \pi^+ &\longrightarrow e^+ + \nu_e & (1\%) \\ \pi^- &\longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e & (1\%). \end{aligned}$$

Se fosse stato lo stesso ν , allora avrebbe dovuto originare il processo:

$$\nu_e + n \longrightarrow e^- + p$$

mentre se fosse di tipo diverso, allora nello stato finale al posto di e^- , avremmo avuto un altro leptone, ad esempio un muone:

$$\nu + n \longrightarrow \mu^- + p$$

e quindi avremmo un neutrino di tipo diverso. Chiaramente a seconda dello stato finale, la segnatura sperimentale è diversa. Cioè la differenza tra

le diverse famiglie leptoniche è data dalle tracce sperimentali. Nell'esperimento si usano circa 90 camere riempite di gas, delimitate da lastre di alluminio e chiamate *spark chamber*. I neutrini interagiscono con i neutroni dell'alluminio, in cui c'è un'elevata densità di centri diffusori essendo un metallo; dunque, le particelle dello stato finale attraversano il gas ionizzandolo e poi incontrano gli altri blocchi di alluminio. Il μ^- tipicamente li supera tutti, essendo molto penetrante, mentre e^- emette tipicamente fotoni per *bremssstrahlung*, essendo più leggero, e si genera uno sciame elettromagnetico. Ovvero, per il ν_μ non succede nulla, il neutrino attraversa tutti i blocchi indisturbato, al contrario del e^- che, può emettere fotoni per *bremssstrahlung*, i quali ogni volta che incontrano una parete di alluminio (con il vertice della QED) evettono a loro volta un elettrone e un positrone, continuando così il processo e arrivando ad uno stato finale con un sciame elettromagnetico.

Sperimentalmente lo sciame non si osserva, per cui possiamo concludere che siamo in presenza di un muone.

Possiamo parlare un po' di numeri. Per come sono fatti gli esperimenti abbiamo:

$$\dot{N} = \phi_2 N_b \sigma \quad (2.1.58)$$

in cui $\sigma \sim 10^3 \sigma_C$, con σ_C sezione d'urto dell'esperimento di Cowan (il fattore 10^3 deriva dal fatto che i neutrini abbiano $|\vec{p}| \sim 15$ GeV e dunque energie dell'ordine del GeV); però, se non usassimo come sorgente un reattore, il flusso di neutrini si ridurrebbe di un fattore 10^{-4} , per questo si aumenta N_b e si utilizza quindi l'alluminio, che è un materiale molto denso. Puoi vedere l'apparato sperimentale in figura 2.14.

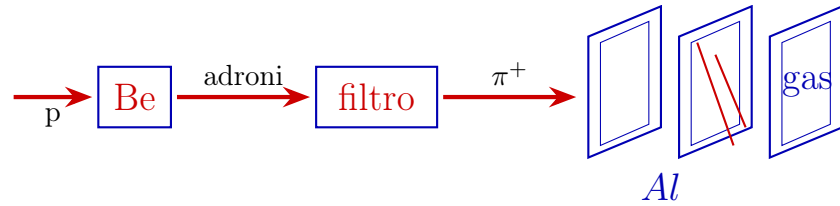


Figura 2.14

Nell'esperimento un fascio di protoni ad energia di 15 GeV viene fatto incidere su un bersaglio di berillio e vengono generati molti adroni: si utilizza un filtro in ferro/paraffina per selezionare solo π^+ , che decade in $\mu^- + \bar{\nu}_\mu$, per poi interagire con l'alluminio. Ogni piastra di alluminio ha area di 1 m^2 e spessore di 2.5 cm. Ogni blocco di alluminio comprende due lastre, per cui un blocco ha volume:

$$1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 0.025 \text{ m} = 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 2.5 \cdot 10^4 \text{ cm}^3$$

la densità di Al è 3 g/cm^3 . Ogni blocco ha quindi massa di $15 \cdot 10^4 \text{ g} = 150 \text{ kg}$.

2.1.7 Neutrino tauonico

Il neutrino ν_τ venne osservato per la prima volta nel 2000, nel contesto dell'esperimento *DONUT*.

L'idea è la stessa delle altre rivelazioni di neutrini: si fa interagire un neutrino con un nucleone e si vede se si produce il leptone τ . Un problema di questo esperimento fu costituito dal fatto che la massa del τ è di circa 1.8 GeV, quindi la soglia è più alta di quella del muone. Un'altra difficoltà è legata al fatto che il τ ha una vita media dell'ordine di 10^{-13} s, quindi decade molto rapidamente e non è facile da osservare.

Se nella ricerca di ν_μ si utilizzava il decadimento di π^+ , ora per ricercare ν_τ si utilizza il decadimento di un adrone più pesante, ossia, il *mesone* D_s^+ di massa di 2 GeV, dunque sufficiente a produrre il τ , e formato dai quark $c\bar{s}$. Quindi:

$$D_s^+ \longrightarrow \tau^+ + \nu_\tau \quad (2.1.59)$$

$$\text{con } \nu_\tau + n \longrightarrow \tau^- + p. \quad (2.1.60)$$

Quindi cerchiamo processi in cui nello stato finale abbiamo un p e un τ^- , i quali hanno una segnatura sperimentale specifica; infatti, il protone ionizza molto il gas, mentre il τ^- dà luogo ad una *traccia corta* che decade 5 volte su 6 in un'unica particella carica:

$$\tau^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau.$$

L'apparato sperimentale lo si può vedere in figura 2.15.



Figura 2.15

Qui i protoni hanno energia di 800 GeV ed incidono su un bersaglio di tungsteno, producendo molti adroni, i quali incidono su un filtro, molto più complesso rispetto al precedente, di lunghezza 35 m. Successivamente ci sono delle emulsioni in cui abbiamo delle vere e proprie fotografie delle traiettorie; a valle abbiamo un sistema di rivelatori e calorimetri: essi ricostruiscono la traccia e ci fanno capire dove andare a cercare nelle emulsioni.

2.2 I pioni

Il pione è una particella comune ed ha una grande importanza concettuale dal momento che l'assegnazione dei numeri quantici sui pioni costituisce il paradigma di quello che poi si fa per le altre particelle.

Abbiamo due diversi tipi di pioni, carichi e neutri, essi formano un tripletto di isospin di valore $I = 1$ e le caratteristiche sono riassunte nella tabella 2.1.

	$\pi^\pm$	π^0
massa	140 MeV	135 MeV
vita media	25 ns	10^{-16} s
interazione del decadimento	debole	elettromagnetica
reazione di decadimento	$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ (99%) $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ (1%)	$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ (99%)
spin	0	0

Tabella 2.1: Caratteristiche generali dei pioni.

2.2.1 Pioni carichi

I pioni carichi vennero osservati per la prima volta nei raggi cosmici, e solo successivamente vennero studiati negli esperimenti agli acceleratori.

Vediamo come venne effettuata la misura della massa. Si sfrutta il decadimento a due corpi:

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

che ha cinematica chiusa. Se ci poniamo nel sistema di riferimento del centro di massa, abbiamo visto che il modulo dell'impulso delle particelle nello stato finale, nel caso in cui una delle due abbia massa nulla (in questo caso il neutrino), è dato da:

$$|p_\mu|^* = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \quad (2.2.1)$$

quindi da una misura di $|p_\mu|$, dato il muone emesso, misuriamo m_π .

A posteriori, visto che sappiamo che $m_\pi = 140$ MeV e $m_\mu = 105$ MeV, allora possiamo dire che $|p_\mu| \sim 30$ MeV.

Poiché questa misura viene effettuata in un campo magnetico vale:

$$p = 0,3B\rho \quad (2.2.2)$$

dunque con i valori numerici vediamo:

$$30 \cdot 10^{-3} \text{ GeV} = 3 \cdot 10^{-1} B\rho$$

cioè nell'esperimento abbiamo $B\rho = 0.1$.

Solitamente, nell'apparato sperimentale abbiamo un fascio di pioni che viene rallentato in modo che si fermi all'ingresso di una camera, in cui è presente un campo magnetico. Il pione quindi si ferma e decade: il muone carico emesso viene deflesso, dalla misura del raggio della traiettoria si ricava $|p|$ e da qui m_π .

Tipicamente si hanno $B = 0.3$ T e $\rho = 1/3$ m.

Possiamo anche vedere come avviene la misura della vita media. L'idea è di sfruttare la distribuzione delle distanze tra il punto in cui la particella è prodotta ed il punto in cui decade. La distribuzione dei tempi di decadimento è:

$$\frac{dN}{dt^*} = Ne^{-t^*/\tau} \quad (2.2.3)$$

si può passare ad una distribuzione delle distanze di decadimento:

$$x = \gamma\beta ct^* \quad (2.2.4)$$

ovvero:

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dt^*} \frac{dt^*}{dx} = \frac{N}{\gamma\beta c} \cdot e^{-t^*/\tau} = Ke^{-x/\gamma\beta c\tau} \quad (2.2.5)$$

in cui il prefattore è una costante indipendente dalla distanza.

Dalla distribuzione delle distanze ritroviamo il parametro τ .

Notiamo che all'esponente non compare solo $c\tau$, ma anche il parametro $\gamma\beta$, che deve essere noto per calcolare τ . Sappiamo valere:

$$\gamma\beta = \frac{p}{m} \frac{1}{E} = p/m \quad (2.2.6)$$

quindi doviamo conoscere l'impulso, cioè, a fissata massa, la velocità della particella. La misura di velocità è effettuata tramite rivelatori che misurano **tempi di volo**.

Notiamo che:

$$c\tau = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 25 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 7.5 \text{ m}$$

che va poi moltiplicato per $\gamma\beta$, ma comunque l'ordine di grandezza delle distanze di decadimento è macroscopico.

Abbiamo detto che il modo di decadimento più probabile (o equivalentemente $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$) è:

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

in quanto ha branching ratio del 99,99%; in teoria sono possibili anche altri processi, come ad esempio:

$$\pi^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e \quad BR = 10^{-4} \quad (2.2.7)$$

$$\pi^- \longrightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e \quad BR = 10^{-8} \quad (2.2.8)$$

Analizziamo entrambi questi processi.

Nel calcolo di Λ (probabilità) del processo (2.2.7) c'è un fattore di densità di spazio delle fasi, che possiamo provare a determinare. Una scrittura generica è:

$$\Lambda(\text{processo}) = K \cdot (p^*)^2 \frac{dp^*}{dE_f} \quad (2.2.9)$$

in cui K contiene le informazioni sulla matrice di transizione. Esso è il volume nello spazio degli impulsi che la particella finale occupa. Se è emessa con impulso compreso tra p^* e $p^* + dp^*$, allora è proporzionale a:

$$p^{*2} \frac{dp^*}{dE_f^*}. \quad (2.2.10)$$

dunque abbiamo:

$$E_f^* = p^* + \sqrt{p^{*2} + m_e^2} = E_\nu^* + E_e^* \quad (2.2.11)$$

per cui:

$$\frac{dE_f^*}{dp^*} = 1 + \frac{1}{2} \frac{2p^*}{\sqrt{p^{*2} + m_e^2}} \quad (2.2.12)$$

ma vale:

$$p^{*2} + m_e^2 = \frac{(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{4m_\pi^2} + m_e^2 \quad (2.2.13)$$

$$= \frac{(m_\pi^2 + m_e^2)^2}{4m_\pi^2} \quad (2.2.14)$$

per cui otteniamo:

$$\frac{dE_f^*}{dp^*} = 1 + \frac{p^*}{\sqrt{p^{*2} + m_e^2}} \quad (2.2.15)$$

$$= \frac{m_\pi \cdot 2m_\pi}{m_\pi^2 + m_e^2} \quad (2.2.16)$$

$$= \frac{2m_\pi^2}{m_\pi^2 + m_e^2} \quad (2.2.17)$$

quindi:

$$p^{*2} \frac{dp^*}{dE_f^*} = \frac{(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{4m_\pi^2} \cdot \frac{(m_\pi^2 + m_e^2)}{2m_\pi^2} \quad (2.2.18)$$

Ora se supponiamo che gli elementi di matrice di $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ e di $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ siano uguali, quindi consideriamo solo i termini di spazio delle fasi, allora otteniamo il rapporto:

$$\frac{\Lambda(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu)}{\Lambda(\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e)} = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2 (m_\pi^2 + m_\mu^2)}{(m_\pi^2 - m_e^2)^2 (m_\pi^2 + m_e^2)} \sim 2/3 \quad (2.2.19)$$

però sperimentalmente tale valore è di 10^{-4} . La ragione è legata all'elemento di matrice e al fatto che le interazioni deboli violano la parità e dunque non sono esattamente cancellabili tra i due processi.

Se analizziamo il secondo processo, ovvero (2.2.8), esso ha branching ratio di 10^{-8} ; per ciò che sappiamo è un processo debole, infatti l'isospin non si conserva (le interazioni forti lo conservano).

Per determinare lo spin, facciamo il confronto tra sezioni d'urto di due processi tenendo conto di due fondamenti:

1. Se misuriamo una sezione d'urto in condizioni di *fasci non polarizzati* (ovvero non si conosce lo spin dello stato iniziale), in σ ci sarà un fattore statistico che dipende dallo spin dello stato iniziale:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{1}{2s_a + 1} \frac{1}{2s_b + 1} \quad (2.2.20)$$

con s_a ed s_b spin dello stato iniziale.

2. I processi mediati dalle interazioni forti sono invarianti per parità spaziale e inversione temporale (entrambe queste simmetrie saranno oggetto del prossimo capitolo); se sommiamo sugli stati finali e mediamo su quelli iniziali, allora i moduli quadri di $\mathcal{M}$ sono uguali per un processo e per il suo inverso (cioè vale quello che si chiama **principio bilancio dettagliato**).

I processi usati sono:

$$\pi^+ + d \longrightarrow p + p \quad (2.2.21)$$

$$p + p \longrightarrow \pi^+ + d \quad (2.2.22)$$

in cui indichiamo con d il deuterio.

Ci accorgiamo che sono processi forti poiché le sezioni d'urto sono grandi, dell'ordine dei mbarn. Per le precedenti considerazioni gli elementi di matrice $\mathcal{M}$ per i processi sono uguali!

Sappiamo scrivere l'espressione per la sezione d'urto:

$$\sigma = K \cdot \frac{1}{s} \frac{p_f^2}{p_i v_i} \frac{1}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)} \sum |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (2.2.23)$$

e dunque possiamo scriverci:

$$\sigma(\pi^+ + d \rightarrow p + p) = \frac{k}{s} \frac{p_p^2}{p_\pi v_d} \cdot \frac{1}{3 \cdot (2s_\pi + 1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \sum |\mathcal{M}|^2 \quad (2.2.24)$$

$$\sigma(p + p \rightarrow \pi^+ + d) = \frac{k}{s'} \frac{p_\pi^2 v_d}{p^2 v_p} \cdot \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}|^2 \quad (2.2.25)$$

in cui, nel processo (2.2.24), il fattore $1/2$ è dovuto all'indistinguibilità delle particelle finali (protoni). Se consideriamo $s = s'$ abbiamo:

$$\frac{\sigma(\pi^+ + d \rightarrow p + p)}{\sigma(p + p \rightarrow \pi^+ + d)} = \left(\frac{p_p}{p_\pi}\right)^2 \frac{2}{3} \frac{1}{2s_\pi + 1}. \quad (2.2.26)$$

Per conservazione momento angolare, s_π può essere solo intero. In particolare se $s_\pi = 0$, allora $2s_\pi + 1 = 1$; se $s_\pi = 1$, $2s_\pi + 1 = 3$; se $s_\pi = 2$, $2s_\pi + 1 = 5$, quindi questo rapporto varia di fattori 3 o 5, per cui ha un effetto rilevante. Dal confronto con i dati risulta $s_\pi = 0$.

2.2.2 Pione neutro

Il pione π^0 è stato osservato per la prima volta negli esperimenti agli acceleratori.

Analizziamo come venne osservato. Il π^0 decade principalmente in fotoni. Se consideriamo lo scattering tra protoni ed un bersaglio fisso di carbonio, abbiamo la formazione di π^0 , il quale poi decade in fotoni; dunque, noi misuriamo i fotoni emessi a valle nel processo:

$$p + C \longrightarrow \pi^0 + X \quad (2.2.27)$$

$$\text{con } \pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma. \quad (2.2.28)$$

Misuriamo la distribuzione energetica dei fotoni, plot raffigurato in figura 2.16, in cui vediamo che finché l'energia cinetica dei protoni T_p si mantiene sotto la soglia di 280 MeV si misura la curva (a), attribuita a fenomeni come bremsstrahlung. Per $T_p \geq 280$ MeV, invece, la curva registrata è la (b) con un picco in corrispondenza di $E_\gamma = 70$ MeV.

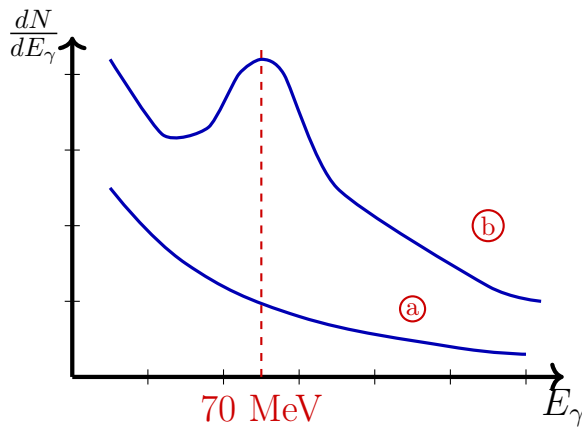


Figura 2.16

L'interpretazione cinematica è che $T_p = 280$ MeV è l'energia di soglia di $p + C \rightarrow \pi^0 + X$ e l'aumento dei fotoni è dovuto al decadimento di π^0 .

In realtà p interagisce con un nucleone N . Usiamo la relazione vista per la soglia in un processo $2 \rightarrow 2$:

$$T_{th} = \frac{(\sum m_f + m_a + m_b)(\sum m_f - m_a - m_b)}{2m_b} \quad (2.2.29)$$

$$= \frac{(m_\pi + 2m_N + 2m_p) \cdot m_\pi}{2m_N} \quad (2.2.30)$$

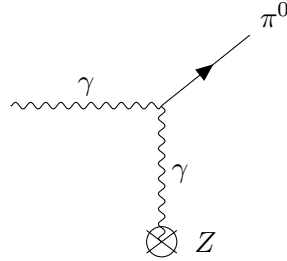
$$\simeq \frac{(4m_p + m_\pi) \cdot m_\pi}{2m_N} \quad (2.2.31)$$

$$\simeq \frac{4m_p m_\pi}{2m_p} = 2m_\pi \quad (2.2.32)$$

in cui abbiamo considerato il fatto che $m_p \simeq m_N \gg m_\pi$.

Alla soglia di 280 MeV, il pione è emesso a riposo e possiamo stimare $m_\pi = 140$ MeV. Inoltre, ciò è in accordo con il fatto che il massimo di dN/dE_γ si abbia per $E_\gamma = 70$ MeV, che è proprio l'energia dei fotoni emessi dal decadimento di π^0 in quiete.

Se volessimo stimare la *vita media* dei π^0 , essa sarebbe più difficile rispetto alle controparti cariche. A posteriori sappiamo che $\tau \sim 10^{-16}$ s, quindi $c\tau \sim 10^{-8}$ m e anche moltiplicando per un opportuno fattore $\gamma\beta$ tale distanza rimarrebbe microscopica, quindi non fu possibile misurarla dalla misura della distribuzione delle distanze di decadimento. Per la misura si sfrutta quello che si chiama **effetto Primakoff**, ovvero, si utilizza un processo con lo stesso elemento di matrice di $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, ovvero $\gamma \rightarrow \pi^0$ per interazione di un γ esterno con un γ emesso da un nucleo atomico. Stiamo considerando il processo:



La sezione d'urto di tale processo è misurabile e risulta uguale alla larghezza di decadimento di π^0 . Da ciò possiamo dedurre la vita media.

Inoltre, possiamo dedurre lo spin di π^0 . Per fare questo caso si utilizza il **Teorema di Landau-Yang** che dice che uno stato di spin 1 non può decadere in due stati a massa nulla e spin 1.

Dal decadimento $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, poiché $S_\gamma = 1$, allora per la somma degli spin $S_{\pi^0} = 0, 1, 2$, cioè ha tre possibili valori. Consideriamo il decadimento di π^0 nel sistema di riferimento di riposo e orientiamo l'asse di quantizzazione spaziale nella direzione di emissione dei fotoni. Se ci concentriamo su

tali componenti di spin, abbiamo quattro possibili configurazioni di spin dei fotoni, rappresentate in figura 2.17.

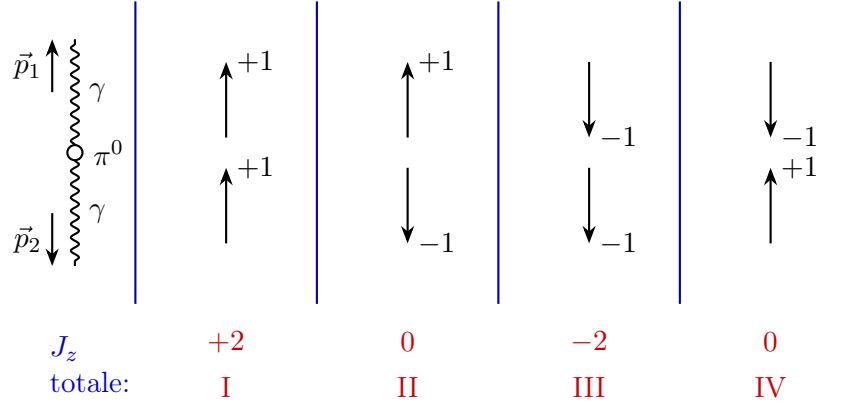


Figura 2.17

I casi I e III sono compatibili solo con uno spin del pione pari a 2, ma lo si esclude poiché non si vuole assegnare spin 2 ad una particella *semplice ed elementare* come il pione. Rimangono i casi II e IV in cui $J_z = 0$, che è compatibile con $S_\pi = 0, 1, 2$; come prime escludiamo il caso di spin 2. Notiamo che in tali casi i fotoni hanno la stessa elicità $h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$; nel caso II $h = 1$, nel caso IV $h = -1$.

Lo stato quantistico dei due fotoni, messi nel sistema di riferimento della figura 2.18, è specificato da θ, ϕ, h_1 e h_2 :

$$|\gamma\gamma\rangle = |\theta, \phi, h_1, h_2\rangle = |\theta, \phi, h\rangle. \quad (2.2.33)$$

Si dimostra che nel caso $S_\pi = 1$ l'elemento di matrice che descrive il processo è antisimmetrico per lo scambio dei fotoni; se lo spin è 0, $\mathcal{M}$ è simmetrico.

Dal momento che nello stato finale i γ sono indistinguibili, $\mathcal{M}$ deve essere simmetrico, quindi possiamo concludere che $S = 0$.

Questo metodo è stato usato anche per determinare lo spin del bosone di Higgs.

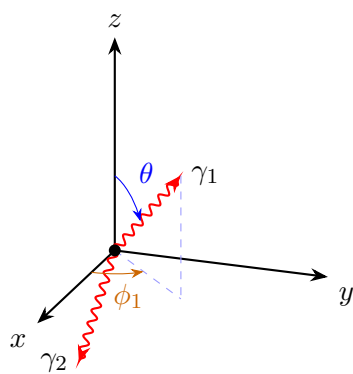


Figura 2.18

Capitolo 3

Le simmetrie in fisica delle particelle

Le simmetrie in fisica delle particelle hanno un duplice ruolo:

- Dalle simmetrie deduciamo i numeri quantici, utili per poter classificare le particelle elementari.
- Ci dicono come scrivere la lagrangiana. Infatti, dalle simmetrie rispettati sperimentalmente scriviamo opportuni termini di potenziale.

Per prima cosa vediamo il ruolo delle simmetrie in Meccanica Quantistica : in generale una particella è descritta da uno stato $|\psi\rangle$, mentre una simmetria è rappresentata da operatori U , che trasforma gli stati come $U|\psi\rangle = |\psi'\rangle$ e che deve rispettare determinate proprietà, ossia dev'essere unitario $U^\dagger U = \mathbb{1}$, in modo da preservare la normalizzazione:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle U\psi|U\psi\rangle = \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle. \quad (3.0.1)$$

L'altra proprietà è che se U rappresenta una simmetria del sistema, allora deve commutare con l'hamiltoniana:

$$[H, U] = 0. \quad (3.0.2)$$

In più ci possono essere due possibili casi riguardo la natura di U . Infatti:

- U è **hermitiano**, ossia $U = U^\dagger$. In questo caso l'autovalore può essere solamente pari a ± 1 , poiché se $U|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ e $UU^\dagger = \mathbb{1}$, ma $U = U^\dagger$, allora $U^2 = \mathbb{1}$ e dunque:

$$U^2|\psi\rangle = \lambda^2|\psi\rangle = |\psi\rangle \implies \lambda^2 = 1 \implies \lambda = \pm 1. \quad (3.0.3)$$

I corrispondenti numeri quantici di tali operatori sono moltiplicativi. Esempi di tali trasformazioni sono le trasformazioni discrete, come la parità, inversione temporale e la coniugazione di carica.

- **U è non hermitiano.** Per una trasformazione dipendente da un parametro continuo, possiamo scrivere una generica trasformazione in forma esponenziale $U = e^{i\epsilon F}$, in cui F è detto generatore della trasformazione. In questo caso $[H, U] = 0$ implica $[H, F] = 0$, mentre $UU^\dagger = \mathbb{1}$ implica $FF^\dagger = \mathbb{1}$. I numeri quantici sono in questo caso additivi. Esempi di questo tipo di trasformazioni continue sono le traslazioni spaziali, temporali e le rotazioni.

Da un punto di vista matematico, questo tipo di operatori sono interessanti perché sono simili al caso in cui si ha un certo numero di particelle degeneri per qualche osservabile, ovvero il caso di multipletti di particelle.

3.1 Parità

La trasformazione di parità $\mathbb{P}$ inverte le coordinate spaziali:

$$\vec{x} \longrightarrow -\vec{x} \quad (3.1.1)$$

mentre lascia invariato il tempo e tutti i numeri quantici additivi, come ad esempio la carica Q . Si può vedere anche che l'impulso, il momento angolare e lo spin trasformano come:

$$\vec{p} \longrightarrow -\vec{p} \quad (3.1.2)$$

$$\vec{l} = \vec{x} \times \vec{p} \longrightarrow \vec{l} \quad (3.1.3)$$

$$\vec{s} \longrightarrow \vec{s}. \quad (3.1.4)$$

Potremmo anche vedere se ci sono autostati per questo operatore di inversione spaziale. Assumiamo che il vuoto sia autostato con autovalore $+1$:

$$\mathbb{P} |0\rangle = +1 |0\rangle. \quad (3.1.5)$$

Prendendo un sistema di riferimento cartesiano e vedendo come viene trasformato sotto $\mathbb{P}$, vedi la figura 3.1, possiamo vedere che le armoniche sferiche $Y_l^m(\theta, \phi)$ sono autostati. L'inversione spaziale implica la trasformazione sugli angoli:

$$\theta \longrightarrow \pi - \theta \quad (3.1.6)$$

$$\phi \longrightarrow \phi + \pi \quad (3.1.7)$$

e si può dimostrare che:

$$Y_l^m(\theta, \phi) \longrightarrow Y_l^m(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi) \quad (3.1.8)$$

Consideriamo ora un processo del tipo:

$$a \longrightarrow b + c \quad (3.1.9)$$

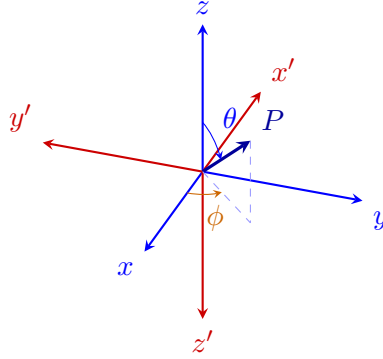


Figura 3.1

e supponiamo che l'interazione che descrive il decadimento preservi la parità. Però bisogna tenere conto che oltre la **parità orbitale**, cioè quella che abbiamo definito prima, dovuta al momento angolare del sistema, e che ci dice che per lo stato finale avremo $(-1)^{l_f}$, dobbiamo introdurre anche una **parità intrinseca**, cioè l'autostato della parità della singola particella. Sapendo che gli autovalori di parità sono moltiplicativi, allora se la parità del processo è conservata avremo:

$$P_a = (-1)^{l_f} P_b P_c \quad (3.1.10)$$

con P_i parità intrinseche delle particelle ed l_f numero quantico legato al momento angolare complessivo dello stato finale.

3.2 Come assegnare la parità intrinseca

Vediamo ora come facciamo ad assegnare la parità intrinseca alle particelle.

3.2.1 Protone e neutrone

Per convenzione si assegna +1 al protone e al neutrone:

$$P |p\rangle = +1 |p\rangle \quad P |n\rangle = +1 |n\rangle. \quad (3.2.1)$$

Nota che essendo p ed n un doppietto di isospin è ragionevole assumere che abbiano stesso autovalore.

3.2.2 Fermioni

Per convenzione si assegna anche ai seguenti fermioni:

$$e^-, \mu^-, \tau^-, q \quad (3.2.2)$$

parità +1. Però, si deve tenere a mente che per ogni fermione vale la proprietà:

$$\mathbb{P}_f = -\mathbb{P}_{\bar{f}} \quad (3.2.3)$$

ovvero che la parità di ogni antiparticella è opposta a quella della corrispondente particella.

3.2.3 Pioni carichi

Dobbiamo prendere un processo che utilizzi il pione carico, e che conservi la parità. Prendiamo l'urto di un pione contro un deutone d (nucleo di deuterio):

$$\pi^- + d \longrightarrow n + n \quad (3.2.4)$$

che ci piace perché l'unica cosa che non conosciamo è P_π (del deuterio conosciamo il fatto che la parità sia +1). Questo processo lo vediamo come l'assorbimento di pioni carichi *lenti* su un nucleo di deuterio. Per la conservazione della parità (vera nelle interazioni forti) infatti abbiamo:

$$P_\pi P_d (-1)^{l_i} = P_n P_n (-1)^{l_f}. \quad (3.2.5)$$

Avere pioni lenti vuol dire che nello stato iniziale (in onda s) possiamo assumere che $l_i = 0$. Questa però non è scontata come assunzione; infatti noi conosciamo la condizione di soglia:

$$\sqrt{s} \geq \sum_f m_f \quad \implies \quad \sqrt{s} \geq 2m_n \quad (3.2.6)$$

che in questo caso vuol dire:

$$\sqrt{s} \simeq m_\pi + m_d \simeq m_\pi + m_p + m_n \quad (3.2.7)$$

e visto che i pioni sono lenti:

$$m_\pi + m_d > 2m_n \quad (3.2.8)$$

dunque il processo può avvenire.

Inoltre, vedendo che la sezione d'urto del processo è dell'ordine del mb sappiamo che il processo avviene per mezzo dell'interazione forte, per cui siamo sicuri che la parità sia conservata. Si verifica infatti che descrivendo un processo in un certo sistema di riferimento e poi in quello in cui gli assi spaziali sono invertiti, la descrizione (cioè la distribuzione angolare dello stato finale) è la stessa.

Assumendo la parità di protone e neutrone +1, allora nella relazione (3.2.5) essi danno contributo +1. Dunque abbiamo:

$$P_\pi (-1)^{l_i} = (-1)^{l_f} \quad (3.2.9)$$

però ancora, se assumiamo che $l_i = 0$ abbiamo:

$$P_\pi = (-1)^{l_f}. \quad (3.2.10)$$

Per capire l_f dobbiamo analizzare la conservazione del momento angolare dei due neutroni finali. In generale sappiamo che deve valere $\vec{J}_i = \vec{J}_f$, e se noi nello stato iniziale abbiamo:

$$\vec{J}_i = \vec{S}_\pi + \vec{S}_d + \vec{L}_i \quad (3.2.11)$$

ma con $\vec{S}_\pi = 0$ e $\vec{L}_i = 0$ allora:

$$\vec{J}_i = \vec{S}_d = 1 \quad (3.2.12)$$

in cui abbiamo utilizzato la conoscenza dello spin del deuterio. Nello stato finale abbiamo:

$$\vec{J}_f = \vec{S}_n + \vec{S}_n + \vec{L}_f. \quad (3.2.13)$$

Entrambi i neutroni hanno spin $1/2$, quindi la loro somma può dar luogo ad uno stato di tripletto (simmetrico) o di singoletto (antisimmetrico). Noi sappiamo che la funzione d'onda complessiva del sistema di due neutroni dev'essere antisimmetrica, essendo fermioni. Dunque, se i due neutroni sono in uno stato di tripletto, la componente orbitale dev'essere antisimmetrica, cioè l è dispari, mentre se i due neutroni sono in un singoletto, allora avremmo l pari. Si possono vedere tutti i possibili valori¹, ma per via della conservazione del momento angolare l'unica scelta possibile è che i neutroni siano in un singoletto e che $l_f = 1$. Dunque si trova²:

$$P_{\pi^\pm} = -1. \quad (3.2.14)$$

Alcune osservazioni. Notiamo che la parità è un grado di libertà interno, infatti abbiamo scelto le parità intrinseche di p ed n essere uguali, ma avremmo potuto definire un operatore:

$$P' = -Pe^{i\pi Q} \quad (3.2.15)$$

con Q carica elettrica; se le interazioni forti conservano la parità, allora conservano P e Q , per cui continua a valere:

$$[H, P'] = 0. \quad (3.2.16)$$

¹Quello che intendo dire è prendere i casi $\vec{S}_n + \vec{S}_n = \{0, 1\}$ e da (3.2.13) vedere se $\vec{L}_f$ è compatibile con i valori che deve assumere affinché la funzione d'onda collettiva sia antisimmetrica. Per $\vec{S}_n + \vec{S}_n = 0$ abbiamo il singoletto di spin, per cui abbiamo la ψ_{orb} simmetrica e $\vec{L}_f$ è pari; però da (3.2.13) vediamo che $\vec{L}_f = 1$, per cui è una strada non possibile. L'alternativa che abbiamo è prendere $\vec{S}_n + \vec{S}_n = 1$, che corrisponde allo stato di tripletto con ψ_{orb} antisimmetrica, dunque $\vec{L}_f$ dispari; la relazione (3.2.13) è soddisfatta se $l_f = \{0, 1, 2\}$, che dovendo essere dispari ci lascia con solo $l_f = 1$ possibile.

²Dalla QFT si vede, come scriveremo nella sezione §3.3.1, che per ogni mesone anche la sua antiparticella ha stessa parità, per cui possiamo scrivere che π^- ha la stessa P_π del π^+ .

Però in questo caso otterremmo:

$$P' |p\rangle = |p\rangle \quad (3.2.17)$$

$$P' |n\rangle = -|n\rangle \quad (3.2.18)$$

ma comunque lo stesso risultato per i pioni carichi.

In generale, per un multipletto i cui membri sono distinguibili per un numero quantico additivo, non esiste un modo univoco in cui definire la parità intrinseca senza ambiguità.

Quello che abbiamo visto è effettivamente una misura, poiché è un processo osservato. Nei primi esperimenti, non si riuscivano a rivelare neutroni, ma al massimo fotoni. Per capire se nello stato finale ci fossero solo due neutroni, allora si fece il confronto con il processo $\pi^- + p$, inviando un fascio di π^- su un bersaglio di idrogeno. Sono possibili due tipi di processi:

$$\pi^- + p \longrightarrow \gamma + n \quad (3.2.19)$$

$$\pi^- + p \longrightarrow \pi^0 + n \longrightarrow 2\gamma + n. \quad (3.2.20)$$

Quindi abbiamo processi ad un γ e processi a due γ . Se si sostituisce il target di H con uno solo di deuterio, comunque si continuano ad osservare processi a singolo fotone:

$$\pi^- + p \longrightarrow \gamma + n + n \quad (3.2.21)$$

assumendo che uno dei due n del deuterio sia uno spettatore, ma manca l'osservazione di eventi a due fotoni, ovvero non si verifica (3.2.20), per cui si ipotizza che nello stato finale ci siano solo due neutroni.

3.2.4 Pione neutro

In questo caso, la determinazione della parità intrinseca dipende da misure di elicità dei fotoni emessi dal decadimento di π^0 . Dal momento che esso ha spin 0, abbiamo visto che i fotoni emessi hanno la stessa elicità, o entrambi +1 o entrambi -1. L'elicità però sappiamo non essere invariante sotto parità:

$$\lambda \longrightarrow -\lambda. \quad (3.2.22)$$

Quindi ciascuna configurazione in cui π^0 decade non è autostato di parità:

$$\mathbb{P} |\lambda\rangle = |-\lambda\rangle \quad (3.2.23)$$

dunque, l'autostato di parità che stiamo cercando sarà una combinazione delle due. Introduciamo gli stati:

$$|R\rangle = |\lambda_1 = +1, \lambda_2 = +1\rangle \quad (3.2.24)$$

$$|L\rangle = |\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1\rangle \quad (3.2.25)$$

che sono gli stati in cui si possono trovare i fotoni emessi. Gli autostati di parità sono:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle) \quad (3.2.26)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle - |L\rangle). \quad (3.2.27)$$

Bisogna capire se il sistema si trova nello stato $|+\rangle$, piuttosto che $|-\rangle$, per cui bisogna misurare la fase tra $|R\rangle$ ed $|L\rangle$. Per capirlo utilizziamo la parametrizzazione, per un singolo fotone, tramite polarizzazione circolare (in cui $|x, y\rangle$ sono le polarizzazioni lineari):

$$|\lambda_1 = +1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_x + i\epsilon_y) \quad (3.2.28)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle + i|y_1\rangle) \quad (3.2.29)$$

$$|\lambda_1 = -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_x - i\epsilon_y) \quad (3.2.30)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle - i|y_1\rangle) \quad (3.2.31)$$

e di conseguenza:

$$|R\rangle = \frac{1}{2}(|x_1x_2\rangle + i|x_1y_2\rangle + i|y_1x_2\rangle - |y_1y_2\rangle) \quad (3.2.32)$$

$$|L\rangle = \frac{1}{2}(|x_1x_2\rangle - i|x_1y_2\rangle - i|y_1x_2\rangle - |y_1y_2\rangle) \quad (3.2.33)$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1x_2\rangle - |y_1y_2\rangle) \quad (3.2.34)$$

$$|-\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1x_2\rangle + |y_1y_2\rangle). \quad (3.2.35)$$

che ci mostrano come l'autostato a parità positiva è quello in cui i fotoni sono sullo stesso piano, mentre quella negativa quando sono su piani ortogonali.

I fotoni emessi dal decadimento di π^0 hanno energia di 70 MeV, quindi non possiamo misurare la polarizzazione tramite metodi ottici, ma una volta su 10000 ($BR = 10^{-4}$) i fotoni prodotto producono coppie e^+/e^- . Quindi nello stato finale abbiamo due coppie e^+/e^- . In base alle coppie che hanno massa invariante nulla, capiamo quali sono le coppie provenienti dai decadimenti del γ . Sperimentalmente, si individuano i piani in cui sono emesse le coppie e si misura l'angolo compreso tra i piani. Si verifica che essi sono ortogonali, quindi la configurazione ha parità negativa, dunque:

$$P_{\pi^0} = -1. \quad (3.2.36)$$

3.2.5 Fotone

La parità intrinseca del fotone non è misurata, ma assegnata. L'idea è che in approssimazione semiclassica lo stato di un fotone è rappresentato dal potenziale vettore $\vec{A}(\vec{x})$. Noi sappiamo che non esiste un sistema di riferimento di riposo del γ e sappiamo:

$$\mathbb{P} \left| \gamma; \vec{k}; \lambda \right\rangle \longrightarrow \left| \gamma; -\vec{k}; -\lambda \right\rangle. \quad (3.2.37)$$

Quindi la parità intrinseca di $|\gamma\rangle$, che ricordiamo essere definita nel sistema di riposo della particella, dipende da come trasforma $\vec{A}$ sotto parità:

$$\mathbb{P} \vec{A} = P_\gamma \vec{A}. \quad (3.2.38)$$

Possiamo ricordare che $\vec{A}$ entra in gioco parlando di campo elettrico. Ripartendo dalla definizione di forza elettrica $\vec{F} = q\vec{E}$ possiamo vedere che sotto parità vale:

$$\mathbb{P} \vec{F} = \mathbb{P}(m\vec{a}) \longrightarrow -\vec{F} = -m\vec{a} \quad (3.2.39)$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \longrightarrow -\vec{F} = q\mathbb{P}(\vec{E}). \quad (3.2.40)$$

Però l'interazione elettromagnetica conserva la parità, per cui abbiamo:

$$\mathbb{P}(\vec{E}) = -\vec{E}. \quad (3.2.41)$$

Allo stesso tempo sappiamo che:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.2.42)$$

e sotto parità si ha $\phi \rightarrow \phi$, $\vec{\nabla} \rightarrow -\vec{\nabla}$, $\partial_t \rightarrow \partial_t$ e dunque per fare in modo che $\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$ dobbiamo avere che:

$$\vec{A} \longrightarrow -\vec{A} \quad (3.2.43)$$

sotto parità. Dunque si deduce:

$$\mathbb{P} |\gamma\rangle = -|\gamma\rangle \quad (3.2.44)$$

cioè $P_\gamma = -1$.

In modo analogo si ottengono le parità anche degli altri bosoni vettoriali g, W, Z (che risulta -1).

3.3 Parità di sistemi particella-antiparticella

3.3.1 Sistema mesone-antimesone

Consideriamo lo stato generico di mesone e antimesone:

$$|m, \bar{m}\rangle = \psi_{orb}(\vec{r}_m - \vec{r}_{\bar{m}}) \psi_{spin}(m, \bar{m}) |m\rangle |\bar{m}\rangle \quad (3.3.1)$$

con $|m\rangle$, $|\bar{m}\rangle$ gli stati intrinseci delle particelle. Sotto parità:

$$\psi_{orb}(\vec{r}_m - \vec{r}_{\bar{m}}) \longrightarrow (-1)^l \psi_{orb}(\vec{r}_m - \vec{r}_{\bar{m}}) \quad (3.3.2)$$

$$\psi_{spin}(m, \bar{m}) \longrightarrow \psi_{spin}(m, \bar{m}) \quad (3.3.3)$$

in cui in (3.3.2) abbiamo notato che sotto parità scambiamo mesone e antimesone; inoltre, dalla teoria dei campi sappiamo:

$$\mathbb{P} |m\rangle = P_m |m\rangle \quad (3.3.4)$$

$$\mathbb{P} |\bar{m}\rangle = P_{\bar{m}} |\bar{m}\rangle \quad (3.3.5)$$

$$P_m = P_{\bar{m}} \quad (3.3.6)$$

dunque otteniamo:

$$P(|m, \bar{m}\rangle) = (-1)^l |m, \bar{m}\rangle. \quad (3.3.7)$$

3.3.2 Sistema fermione-antifermione

Consideriamo lo stato:

$$|f, \bar{f}\rangle = \psi_{orb}(\vec{r}_f - \vec{r}_{\bar{f}}) \psi_{spin}(f, \bar{f}) |f\rangle |\bar{f}\rangle \quad (3.3.8)$$

in questo caso abbiamo:

$$\mathbb{P} |f\rangle = P_f |f\rangle \quad (3.3.9)$$

$$\mathbb{P} |\bar{f}\rangle = P_{\bar{f}} |\bar{f}\rangle \quad (3.3.10)$$

$$P_f = -P_{\bar{f}} \quad (3.3.11)$$

dalla teoria dei campi. Quindi:

$$P(|f, \bar{f}\rangle) = (-1)^{l+1} |f, \bar{f}\rangle. \quad (3.3.12)$$

3.4 Violazione di parità nelle interazioni deboli

Storicamente si è indagato sulla violazione di parità nelle interazioni deboli perché erano state osservate due particelle, che erano state chiamate θ e τ , con la stessa massa (circa 500 MeV), stessa vita media (circa 10 ns), ma la prima di esse ha il seguente decadimento:

$$\theta^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad (3.4.1)$$

mentre la seconda:

$$\tau^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^-. \quad (3.4.2)$$

Dalla distribuzione angolare dei prodotti si vede che θ^+ e τ^+ sono stati a parità diversa, infatti, θ^+ ha parità $+1$, mentre τ^+ -1 . Però per massa e vita media dovrebbero essere la stessa particella. Se l'interazione debole conservasse la stranezza, allora non si potrebbe capire quale potrebbe essere la sua parità. Ricorda che noi possiamo dire che i decadimenti siano deboli dalla vita media. Quindi si indaga sul fatto che l'interazione debole conservi la parità o meno.

Ad oggi si è capito che θ^+ e τ^+ sono il mesone K^+ .

3.4.1 Conservazione parità nelle interazioni elettromagnetiche

Cerchiamo di capire cosa vuol dire se un'interazione conserva o meno la parità. Facciamo riferimento alla figura 3.2. Dato un sistema di riferimento, applicare la parità equivale a invertire il segno dell'asse y e poi performare una rotazione di 180° intorno ad y' . Con una trasformazione di parità se siamo partiti da un sistema di coordinate destrorso, allora ne otteniamo uno sinistrorso.

Se l'interazione è invariante per parità, allora ciò che si può predire, conoscendo la forma dell'interazione, è uguale sia nel sistema destrorso che sinistrorso. Dunque la descrizione di un fenomeno è la stessa nei due sistemi di riferimento.

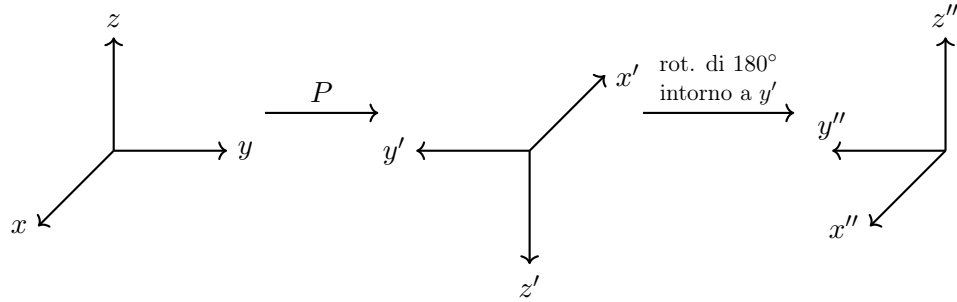


Figura 3.2: Immagine per vedere come si trasforma un sistema di riferimento sotto trasformaione di parità.

Come esempio di interazione che conserva la parità consideriamo quella elettromagnetica. Facciamo riferimento alla figura 3.3. Noi sappiamo che l'EM conserva la parità e per verificarlo consideriamo un circuito piano a forma di spira quadrata sul piano xy nei due possibili sistemi di riferimento.

Noi ci aspettiamo che la descrizione fisica dei sistemi di riferimento sinistrorso e destrorso sia la stessa.

Prendiamo la stessa spira in entrambi i sistemi di riferimento e la montiamo opportunamente (nota che la forza elettromotrice e la polarizzazione sono montati in modo coerente con l'orientazione degli assi). Nel caso I, il campo magnetico che si genera all'interno della spira per effetto del campo elettrico, è uscente e, se consideriamo un elettrone, esso si muove per via della forza di Lorentz nel verso negativo dell'asse x , e viene deflesso nel verso negativo dell'asse y . È semplice vederlo utilizzando la regola della mano destra, oppure scrivendo:

$$\vec{v} = -v\hat{i} \quad , \quad \vec{B} = B\hat{k} \quad (3.4.3)$$

per cui:

$$\vec{F} = (-e)(-v)B\hat{i} \times \hat{k} = -evB\hat{j}. \quad (3.4.4)$$

Nel sistema speculare, l'elettrone viene mandato nel verso negativo dell'asse x' . Essendo un sistema sinistrorso, possiamo usare la regola della mano sinistra anziché quella della mano destra, tenendo a mente che bisogna applicarla due volte, ovvero, sia per determinare il campo magnetico sia per la direzione e verso della forza di Lorentz. Il campo magnetico risulta orientato verso l'alto e la regola della mano sinistra ci dice che la forza di Lorentz deflette verso destra, ovvero la direzione $-y'$.

Dunque, in entrambi i sistemi di riferimento la descrizione è la stessa, poiché possiamo dire che in entrambi i casi l'elettrone viene deflesso verso la posizione della forza elettromotrice.

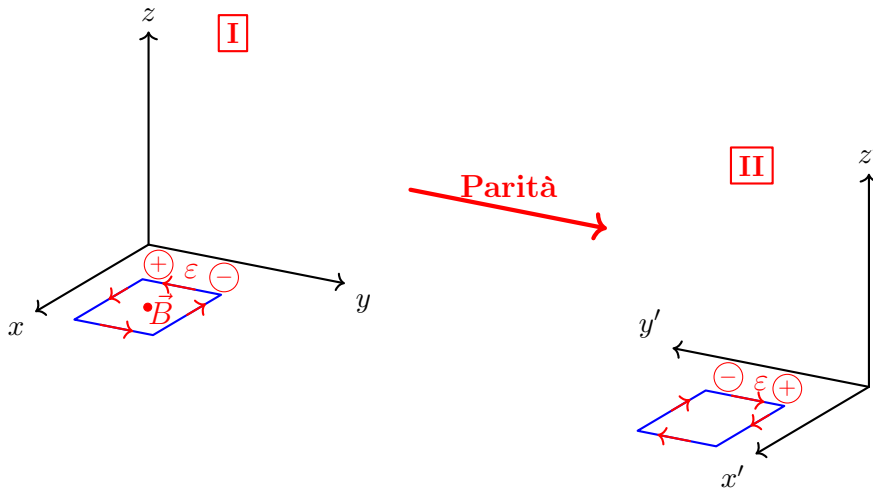


Figura 3.3

3.4.2 Come verificare la violazione della parità nelle interazioni deboli

Nel caso delle interazioni deboli tutto quello detto non succede. Se continuiamo a fare riferimento alla figura 3.3, possiamo studiare cosa succede ad un nucleo di Cobalto, che decade debolmente, messo al centro della spira, e proviamo a misurare la direzione in cui sono emessi gli elettroni. In un caso sono emessi verso l'alto, mentre nell'altro verso il basso, per cui il processo non è descritto allo stesso modo.

L'elemento fondamentale è che, se un'interazione preserva la parità, non si sa determinare se i risultati di un esperimento fanno riferimento ad un sistema di coordinate destrorso o sinistrorso.

Osservazione. Nel caso della misura dei prodotti del decadimento β , non basta fare un conteggio degli elettroni prodotti, ma bisogna fare una misura della loro *distribuzione angolare*, ovvero la direzione degli elettroni rispetto ad una direzione di riferimento invariante sotto parità. Dunque, è necessario che come direzione di riferimento scegliamo un *vettore assiale*.

Un'idea potrebbe essere la seguente. Dato il decadimento:

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.4.5)$$

supponendo di poter misurare gli impulsi di tutte le particelle dello stato finale, potremmo costruire un vettore assiale come:

$$\vec{p}_p \times \vec{p}_\nu \quad (3.4.6)$$

e misurare l'angolo di $\vec{p}_e$ rispetto tale direzione. Però tale procedimento sarebbe inutile, poiché nel sistema di riferimento di riposo di n si ha:

$$\vec{p}_e + \vec{p}_\nu + \vec{p}_p = 0 \quad (3.4.7)$$

che da un punto di vista geometrico vuol dire che essi sono sullo stesso piano. Per cui, dato il piano formato da $\vec{p}_\nu$ e $\vec{p}_p$, sappiamo che $\vec{p}_\nu \times \vec{p}_p$ è ortogonale a tale piano, ma $\vec{p}_e$ deve necessariamente appartenere, per la conservazione dell'impulso, quindi otterremmo che la proiezione di $\vec{p}_e$ su tale direzione è sempre nulla.

Un'idea migliore è quella di utilizzare come direzione di riferimento quella del *momento magnetico* μ del nucleo che decade. Per conoscerlo però dobbiamo polarizzare i nuclei. Infatti, se noi considerassimo solamente lo spin del ^{60}Co , saremmo un po' in difficoltà, poiché dovremmo misurare l'elettrone lungo tale direzione. Però se mettiamo un campo magnetico, allora lo spin si allinea al campo e noi possiamo fare la misura dell'elettrone rispetto $\vec{B}$.

3.4.3 Esperimento di Madame Wu

La prova sperimentale della violazione di parità fu l'esperimento di Madame Wu, in cui si considera la catena di decadimenti:

$${}^{60}\text{Co} \longrightarrow {}^{60}\text{Ni}^* + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.4.8)$$

$${}^{60}\text{Ni}^* + \gamma \longrightarrow \text{Ni} + \gamma \quad (3.4.9)$$

che ha un $\tau \sim 1$ anno. Scegliamo questo processo poiché il nucleo di Cobalto ha spin 5, quindi il momento magnetico è:

$$\vec{\mu} = \frac{u}{J} \vec{J} \quad (3.4.10)$$

ma soprattutto ha vita media molto lunga. Il sistema sperimentale, tutto criogenico, è in figura 3.4. Nella catena di decadimento vengono prodotti fotoni. Il campione di Cobalto è in un materiale paramagnetico. Infatti, tutto il sistema è avvolto da una bobina percorsa da corrente, che genera un campo magnetico amplificato dal materiale paramagnetico (che non modifica la direzione del campo), raggiungendo anche valori dell'ordine di 10 T. Per rivelare elettroni si utilizzava uno scintillatore, seguito da una guida di luce, ed in fondo un fotomoltiplicatore.

L'obiettivo dell'esperimento è quello di trovare delle differenze nella distribuzione angolare degli elettroni rispetto una direzione di riferimento, che è quella del campo magnetico; dunque in linea di principio andrebbero utilizzati due rivelatori, in modo da capire cosa accade anche nella direzione opposta al campo, però al tempo i rivelatori non erano molto efficienti e c'era il rischio di scambiare eventi non rivelati dai rivelatori poco efficienti per asimmetrie nella direzione angolare. Per questo motivo si utilizzò un unico rivelatore, e per capire cosa accade nella direzione opposta al campo magnetico semplicemente invertiamo il verso della corrente nella bobina, così che essa generi un campo magnetico nella direzione opposta, e si possa utilizzare lo stesso rivelatore.

Il punto però è che noi vogliamo massimizzare gli atomi di ${}^{60}\text{Co}$ allineati con il campo esterno $\vec{B}$. Infatti, in genere, se noi abbiamo un qualche momento di spin $\vec{J}$, esso ci dice che esistono $2s + 1$ possibili stati (corrispondenti a diverse possibili terze componenti). Nel nostro caso, per cui $J = 5$, abbiamo 11 possibili terze componenti.

In prima approssimazione, la statistica che individua la probabilità che la terza componente di spin assuma un certo valore, e quindi che si allinei o meno rispetto il campo magnetico $\vec{B}$ in cui è immerso, è la *statistica di Boltzmann*:

$$\exp\left\{-\frac{u_m}{kT}\right\} \quad (3.4.11)$$

in cui:

$$u_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\frac{\mu}{J} \vec{J} \cdot \vec{B} = -\frac{\mu}{J} B J_z \quad (3.4.12)$$

dunque, prendendo stati quantizzati (cioé proiettiamo $\vec{J}$ lungo la direzione di $\vec{B}$):

$$\exp\left\{\frac{\mu}{J}J_z\frac{B}{kT}\right\}. \quad (3.4.13)$$

Noi sappiamo che tutti gli stati possibili sono quelli tali per cui:

$$-J_z \leq m_z \leq J_z \quad (3.4.14)$$

e se noi ci mettiamo a confrontare la probabilità di avere m_z rispetto $m_z - 1$ otteniamo:

$$\frac{\text{Prob}(m_z - 1)}{\text{Prob}(m_z)} = \frac{\exp\left\{\frac{\mu}{J}\frac{B}{kT}(m_z - 1)\right\}}{\exp\left\{\frac{\mu}{J}\frac{B}{kT}m_z\right\}} \quad (3.4.15)$$

$$= \exp\left\{-\frac{\mu}{J}\frac{B}{kT}\right\}. \quad (3.4.16)$$

Noi vogliamo che spin (m_z) e campo magnetico siano allineati, per cui dobbiamo massimizzare la probabilità di trovarci in un valore di m_z più alto possibile³. Cerchiamo quindi in che condizioni abbiamo il rapporto di probabilità molto piccolo.

Vediamo che se B/T è un rapporto piccolo, allora il rapporto di probabilità tende ad 1, il che ci dice che abbiamo una distribuzione di probabilità uniforme; allo stesso tempo però, se B/T è grande, allora gli stati non sono equipopolati e il nucleo effettivamente si polarizza. Per questo motivo, ovvero allineare gli spin con il campo $\vec{B}$, si è lavorato con campi magnetici grandi e a basse temperature.

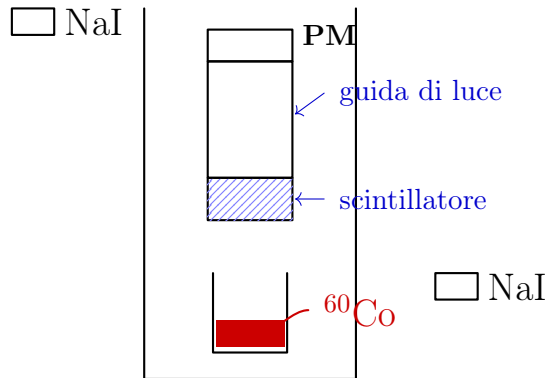


Figura 3.4

Però si trovò un'altra difficoltà. L'esperimento veniva fatto in assenza di campo magnetico, in quanto si vuole misurare una distribuzione angolare

³Ricorda la rappresentazione degli spin nelle varie shell energetiche (lezione 20/03/2026).

di elettroni e , se fosse stato presente un campo $\vec{B}$, gli elettroni sarebbero stati deflessi e la misura falsata. Dunque, la bobina è percorsa da corrente solamente inizialmente, per poter polarizzare il campione, poi viene spenta.

Il problema che ne discende è che dopo un po' il campione si depolarizza. Per controllare lo stato di polarizzazione del nucleo misuriamo la distribuzione dei fotoni: quando il nucleo è polarizzato i γ vengono emessi trasversalmente, poi man mano che il Cobalto si depolarizza, essi vengono emessi in maniera più casuale. Possiamo misurare i fotoni tramite cristalli di NaI posti a $\pi/2$ e a 0° rispetto l'asse z . Inizialmente quando il nucleo è polarizzato abbiamo più conteggi nel rivelatore a $\pi/2$. L'andamento è in figura 3.5 ed è lo stesso per entrambe le configurazioni di campo magnetico.

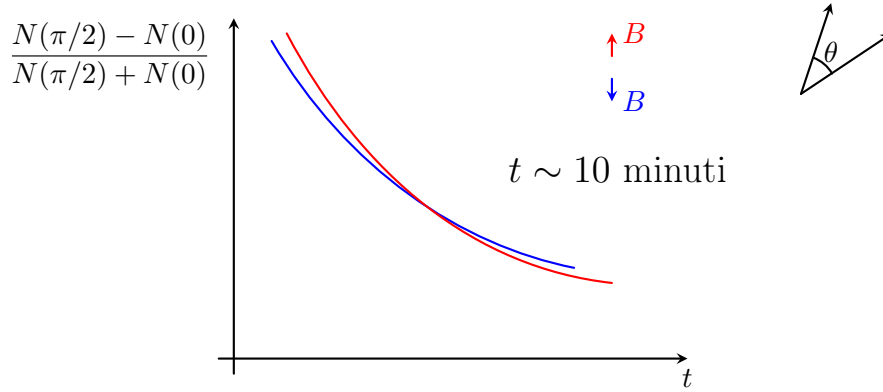


Figura 3.5: Distribuzione conteggi per i fotoni emessi.

Per quanto riguarda gli elettroni invece, guardando la figura 3.6, abbiamo più conteggi quando il campo magnetico è diretto verso il basso, ossia quando lo spin del cobalto è diretto verso il basso.

Lo spin del nucleo di Ni^* emesso è 4 ed è anch'esso diretto verso il basso. Dalla conservazione del momento angolare (spin) possiamo vedere:

$$\begin{array}{ccccccc}
 {}^{60}Co & \longrightarrow & Ni^* & + & e^- & + & \bar{\nu}_e \\
 J & 5 & 4 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \\
 J_z & -5 & -4 & & -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2}
 \end{array}$$

cioè, anche e^- e $\bar{\nu}_e$ hanno spin verso il basso.

Per quanto riguarda gli impulsi si ha che gli e^- vanno verso l'alto e gli anti-neutrini verso il basso. I neutrini, di conseguenza, sono right-handed, elicità +1, mentre gli e^- hanno elicità -1 e dunque sono sinistrorsi.

Dunque abbiamo visto che la parità non è conservata: ci sono elettroni solo in una direzione. In seguito, grazie a misure più accurate, si verifica che:

$$\frac{dN_e}{d\cos\theta} = k(1 - P\beta\cos\theta) \quad (3.4.17)$$

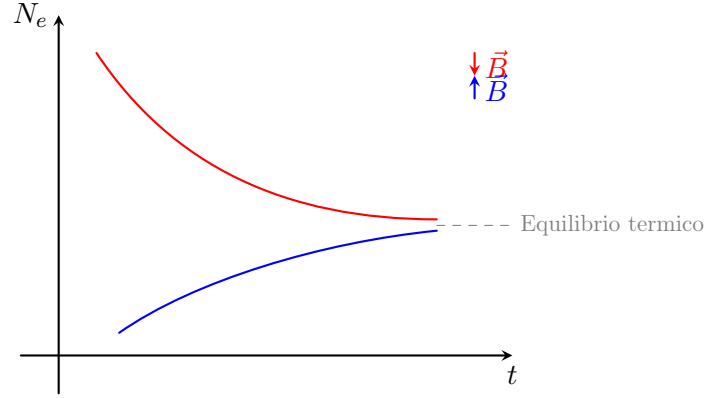


Figura 3.6: Distribuzione conteggi per gli elettroni emessi.

in cui P è la polarizzazione dell'elettrone, k una qualche costante, θ l'angolo tra $\vec{p}_e$ e $\vec{B}$ e $\beta = v/c$.

3.5 La coniugazione di carica

L'operazione di coniugazione di carica, che è una simmetria discreta, opera nel seguente modo:

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{x} \quad (3.5.1)$$

$$t \longrightarrow t \quad (3.5.2)$$

$$Q \longrightarrow -Q \quad (3.5.3)$$

che comporta:

$$\vec{p}, \vec{L}, \vec{S} \longrightarrow \vec{p}, \vec{L}, \vec{S}. \quad (3.5.4)$$

Cerchiamo gli autostati dell'operatore di coniugazione di carica, notando che dal momento che:

$$C |q\rangle = K |q\rangle \quad (3.5.5)$$

gli autostati devono essere stati di carica elettrica nulla, e come facile rendersi conto sono piuttosto pochi. La coniugazione di carica è un numero quantico moltiplicativo.

Inoltre a noi interessa che lo stato abbia tutti numeri additivi nulli. Per esempio, il neutrone ha carica nulla, ma non è autostato di coniugazione di carica, poiché tale operazione lo manda in un anti-neutrone, che in genere ha numeri quantici (additivi) diversi, e quindi è uno stato differente.

3.5.1 Fotone

Un possibile autostato della coniugazione di carica è il fotone. In analogia a quanto fatto per la parità, facciamo considerazioni su come trasformi il

potenziale vettore sotto la trasformazione di C . Partiamo da $\vec{F} = q\vec{E}$ e vediamo:

$$C(\vec{F}) = C(q)C(\vec{E}) = -qC(\vec{E}). \quad (3.5.6)$$

Noi sappiamo, dagli esperimenti, che la forza elettromagnetica è invariante sotto coniugazione di carica, per cui necessariamente abbiamo:

$$C(\vec{E}) = -\vec{E}. \quad (3.5.7)$$

Ricordando il legame:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \quad (3.5.8)$$

vediamo che:

$$C(\vec{E}) = -\vec{\nabla}C(\phi) - \frac{\partial}{\partial t}C(\vec{A}) = -\vec{E} \quad (3.5.9)$$

da Poisson sappiamo:

$$\Delta\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies C(\phi) = -\phi \quad (3.5.10)$$

per cui abbiamo:

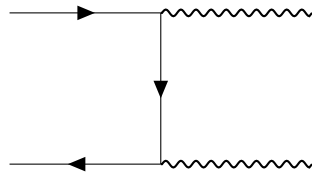
$$C(\vec{A}) = -\vec{A}. \quad (3.5.11)$$

Segue che:

$$C|\gamma\rangle = (-1)|\gamma\rangle. \quad (3.5.12)$$

3.5.2 Pione neutro

Sfruttando il decadimento:

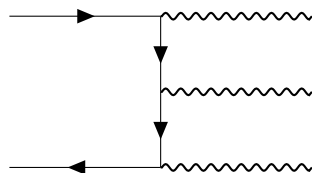


$$\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma \quad (3.5.13)$$

che essendo un processo elettromagnetico, conserva l'autovalore della coniugazione di carica, e in cui conosciamo tutti i numeri quantici che ci interessano tranne la coniugazione di carica di π^0 . Possiamo vedere:

$$C(\pi^0) = C(\gamma)C(\gamma) = +1. \quad (3.5.14)$$

Cinematicamente sarebbe possibile anche il processo:



$$\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma + \gamma \quad (3.5.15)$$

che però è vietato dalla non conservazione dell'autovalore di coniugazione di carica. Il contributo all'ampiezza del diagramma corrispondente al processo vietato è cancellato da altri diagrammi, per cui l'ampiezza totale è nulla.

3.5.3 Sistema mesone-antimesone

Un possibile autostato della coniugazione di carica è il sistema mesone-antimesone.

Infatti, se prendiamo lo stato:

$$|m, \bar{m}\rangle = \psi_{orb}(\vec{r}_m - \vec{r}_{\bar{m}}) \psi_s(m\bar{m}) |m\rangle |\bar{m}\rangle \quad (3.5.16)$$

e applichiamo la coniugazione di carica:

$$C(|m, \bar{m}\rangle) = C(\psi_{orb}(\vec{r}_m - \vec{r}_{\bar{m}})) C(\psi_s(m\bar{m})) C(|m\rangle) C(|\bar{m}\rangle) \quad (3.5.17)$$

sulla componente orbitale, la coniugazione di carica equivale alla parità:

$$(-1)^l \psi_{orb}(\vec{r}_m - \vec{r}_{\bar{m}}) \quad (3.5.18)$$

poiché cambiare carica equivale a scambiare di posizione mesone e antimesone.

Per quanto riguarda la componente di spin, se m e $\bar{m}$ hanno ad esempio spin 1, allora per il sistema complesso, utilizzando i coefficienti di Clebsch-Gordan (vedi nella tabella, al seguente [link](#), le combinazioni per due particelle di spin 1), ci sono le seguenti possibilità:

$$s = \begin{cases} 2 & \text{simmetrico} \\ 1 & \text{anti-simmetrico, dunque da' un fattore } (-1)^s \\ 0 & \text{simmetrica.} \end{cases} \quad (3.5.19)$$

Dunque abbiamo:

$$C(\psi_s(m\bar{m})) = (-1)^s \psi_s. \quad (3.5.20)$$

Per quanto riguarda i singoli stati:

$$C|m\rangle = C_1 |m\rangle \quad (3.5.21)$$

$$C|\bar{m}\rangle = C_2 |\bar{m}\rangle \quad (3.5.22)$$

ma dalla QFT (in analogia alla sezione §3.3.1 per la parità) sappiamo $C_1 C_2 = 1$, quindi:

$$C|m, \bar{m}\rangle = (-1)^l (-1)^s |m, \bar{m}\rangle. \quad (3.5.23)$$

3.5.4 Sistema fermione-antifermione

Valgono le stesse considerazioni fatte in precedenza per i mesoni, ma ora la somma di spin può dare 0 e 1, ovvero rispettivamente uno stato antisimmetrico ed uno simmetrico.

Abbiamo che la parità della componente di spin è $(-1)^{l+s}$, mentre per gli stati veri e propri:

$$C|f\rangle = C_1 |f\rangle \quad (3.5.24)$$

$$C|\bar{f}\rangle = C_2 |\bar{f}\rangle \quad (3.5.25)$$

ma $C_f C_{\bar{f}} = -1$. Quindi l'autovalore complessivo è $(-1)^{l+s+2}$:

$$C |f, \bar{f}\rangle = (-1)^{l+s} |f, \bar{f}\rangle. \quad (3.5.26)$$

3.6 Inversione temporale

L'inversione temporale è definita come:

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{x} \quad (3.6.1)$$

$$t \longrightarrow -t \quad (3.6.2)$$

$$Q \longrightarrow Q \quad (3.6.3)$$

che comporta:

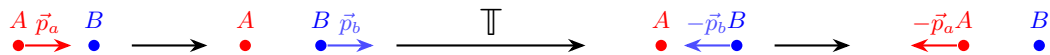
$$\vec{p}, \vec{L}, \vec{S} \longrightarrow -\vec{p}, -\vec{L}, -\vec{S}. \quad (3.6.4)$$

Il fatto che un'interazione sia simmetrica sotto inversione temporale dipende dalla misura del momento di dipolo elettrico.

3.6.1 Caso newtoniano

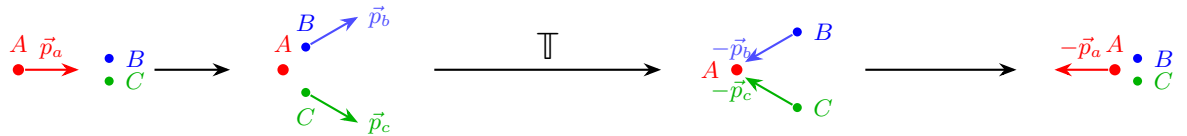
La seconda legge della dinamica, $\vec{F} = m\vec{a}$, è invariante sotto inversione temporale solo se la forza non dipende da t . Tuttavia, il secondo principio della termodinamica individua una freccia del tempo (come abbiamo visto ampiamente nel corso di Meccanica Statistica), il che mette in contrasto la meccanica macroscopica e microscopica. Questa incongruenza tra mondo micro e macroscopico dipende dal numero di gradi di libertà del sistema.

Per capire meglio facciamo un esempio. Prendiamo un urto tra corpi puntiformi:



in cui: se A urta B e gli impulsi sono $\vec{p}_a$ e $\vec{p}_b$, allora sotto inversione temporale è B che urta A e gli impulsi saranno opposti. In questo caso il processo che si ottiene sotto inversione temporale è più probabile che avvenga.

Possiamo anche aumentare il numero di particelle, e ne considerarne 3:

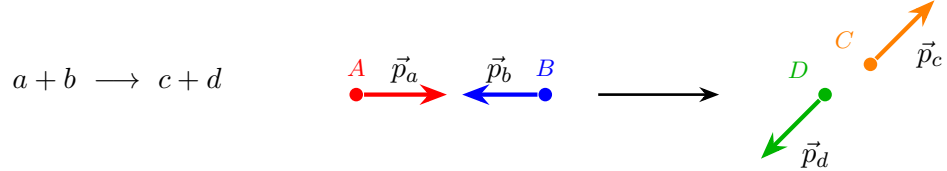


Però con 3 (o 4 corpi) è meno probabile che il processo inverso si realizzi, per via del maggior numero di impulsi da controllare.

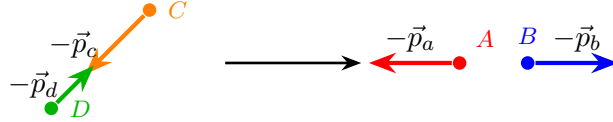
Dunque, per quello che dice il secondo principio della termodinamica, è che in presenza di un elevato numero di gradi di libertà il processo inverso sia impossibile, o meglio poco probabile, anche se la legge microscopica è reversibile temporalmente.

3.6.2 Caso quantistico

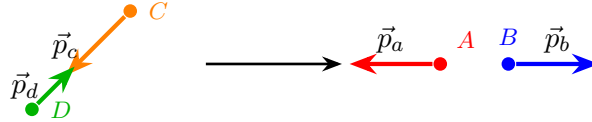
Microscopicamente, se un'interazione è reversibile temporalmente, si confrontano le probabilità di un processo ed il suo inverso. Consideriamo ad esempio il processo:



Applicando l'inversione temporale scambiamo stato iniziale e finale, oltre ad invertire gli impulsi, ottenendo:



Se vogliamo solamente scambiare stato iniziale e finale, ma mantenendo gli impulsi inalterati, allora oltre l'inversione tempotale eseguiamo anche un'operazione di parità:



Se l'interazione è invariante sotto parità e inversione temporale, allora ci aspettiamo stessa sezione d'urto. In generale però non è questo che succede, poiché quello che abbiamo detto vale solo se le particelle sono puntiformi e prive di spin.

Infatti, se a ha spin, allora anch'esso è invertito dall'inversione temporale e neanche applicando la parità possiamo recuperare il segno di partenza. Per questo motivo, in generale, prendiamo processi in cui abbiamo sia spin $\vec{s}_a$, che $-\vec{s}_a$, e combiniamo i due processi. Così otteniamo la stessa sezione d'urto non polarizzata, cioè quella ottenuta sommando su tutte le possibili configurazioni di spin:

$$\sum |\mathcal{M}_{if}|^2 = \sum |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (3.6.5)$$

Quello detto è stato verificato anche sperimentalmente studiando l'andamento dei processi:

$$p + Al \longrightarrow \alpha + Mg \quad (3.6.6)$$

$$\alpha + Mg \longrightarrow p + Al \quad (3.6.7)$$

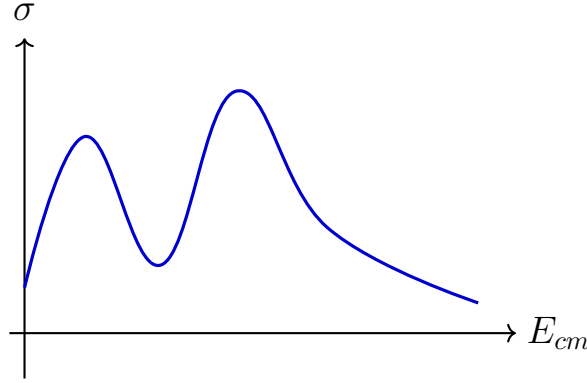


Figura 3.7

in funzione dell'energia del centro di massa, dunque in cui non è detto che $E_p = E_\alpha$. Si faccia riferimento alla figura 3.7.

Vediamo come implementare l'inversione temporale in meccanica quantistica. Partiamo dall'equazione di Schrodinger:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (3.6.8)$$

applichiamo l'operatore di inversione temporale:

$$-i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(-t)\rangle = \hat{H} |\psi(-t)\rangle \quad (3.6.9)$$

ammettendo che:

$$[\hat{H}, T] = 0 \quad (3.6.10)$$

cioè che $\hat{H}$ è invariante per inversione temporale. Anche nel caso valga il commutatore (3.6.10) il vettore $|\psi(-t)\rangle$ non risolve l'equazione di Schrodinger poiché è presente un $-i$ al posto di $+i$, per cui possiamo implementare l'inversione temporale ammettendo che, non solo $t \rightarrow -t$, ma anche che avvenga complessa coniugazione:

$$\hat{T} = UK. \quad (3.6.11)$$

Applicando il nuovo operatore all'equazione (3.6.8) supponendo un'hamiltoniana reale:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi^*(-t)\rangle = \hat{H} |\psi^*(-t)\rangle \quad (3.6.12)$$

in questo modo $|\psi^*(-t)\rangle$ è ancora soluzione.

Il problema è che (3.6.11), oltre ad essere un operatore *antiunitario*, è un operatore *non hermitiano*. Non essendo hermitiano non possiamo associarci un'osservabile fisica; dunque, non possiamo fare una cosa analoga a quanto fatto per parità e parità intrinseca.

Ricordiamo che tutto questo vale per stati privi di spin, ma nel momento in cui lo introduciamo tutto si complica.

Per verificare la reversibilità temporale utilizziamo il seguente risultato: se un'interazione è invariante sotto inversione temporale, allora gli autostati non degeneri hanno momento di dipolo elettrico permanente nullo.

Data una distribuzione di carica, definiamo *momento di dipolo elettrico*:

$$\vec{d} = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{r} \simeq q\vec{r}. \quad (3.6.13)$$

Il momento di dipolo elettrico che consideriamo deve essere *permanente*, cioè dev'essere presente anche in assenza di campo elettrico esterno.

Analizziamo ora la condizione di non degenerazione degli autostati. Si ha che se una particella è autostato di inversione temporale non degenera, allora si ha che il momento di dipolo elettrico o è parallelo o è antiparallelo allo spin, e tali possibilità sono mutuamente esclusive (ovviamente). Semiclassicamente, ciò si può giustificare pensando ad una distribuzione di carica rotante (nel piano trasverso all'asse di rotazione gli effetti sono nulli).

Partiamo da uno stato in cui $\vec{d}$ è parallelo a $\vec{J}$:

$$|J, J_z, d\rangle = |+J_z\rangle \quad (3.6.14)$$

e calcoliamo:

$$\langle \vec{d} \rangle = \langle +J_z | q\vec{r} | J_z \rangle. \quad (3.6.15)$$

Se l'interazione è invariante per inversione temporale, allora l'osservatore che ha la coordinata temporale invertita deve osservare lo stesso momento di dipolo. Appliciamo l'inversione temporale a (3.6.15):

$$\langle \vec{d}' \rangle = \langle +J'_z | q\vec{r}' | J'_z \rangle \quad (3.6.16)$$

$$-\langle \vec{d} \rangle = \langle -J_z | q\vec{r} | -J_z \rangle \quad (3.6.17)$$

in cui abbiamo tenuto conto che applicando l'inversione temporale, q ed $\vec{r}$ non cambiano, mentre gli stati di spin vengono invertiti. Quindi, il valore medio del momento di dipolo per il secondo osservatore è opposto rispetto al primo, ma per l'invarianza sotto inversione temporale:

$$\langle \vec{d}' \rangle = -\langle \vec{d} \rangle \quad (3.6.18)$$

dunque si ha:

$$\langle \vec{d} \rangle = 0. \quad (3.6.19)$$

Se lo stato fosse degenero avremmo entrambe le possibilità di spin; cioè:

$$|J, +J_z, +d\rangle \quad , \quad |J, +J_z, -d\rangle \quad (3.6.20)$$

$$|J, -J_z, +d\rangle \quad , \quad |J, -J_z, -d\rangle. \quad (3.6.21)$$

Quindi, se prendiamo una combinazione lineare abbiamo ancora un autostato. Abbiamo:

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|J_z, d\rangle + |-J_z, d\rangle \right) \quad (3.6.22)$$

su cui ci possiamo applicare l'inversione temporale, ma essendo autostato vale:

$$T |\psi_+\rangle = |\psi_+\rangle. \quad (3.6.23)$$

Possiamo calcolare il valor medio del momento di dipolo:

$$\langle \vec{d} \rangle = \langle \psi_+ | q\vec{r} | \psi_+ \rangle \quad (3.6.24)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\langle J_z, d | + \langle -J_z, d | \right] q\vec{r} \left[|J_z, d\rangle + |-J_z, d\rangle \right] \quad (3.6.25)$$

guardando le combinazioni:

$$\langle J_z, d | q\vec{r} | J_z, d \rangle \quad (3.6.26)$$

$$\langle -J_z, d | q\vec{r} | -J_z, d \rangle \quad (3.6.27)$$

ci rendiamo conti che essi danno contributi uguali ed opposti, per cui si ha:

$$\langle \vec{d} \rangle = \langle -J_z, d | q\vec{r} | J_z, d \rangle + \langle J_z, d | q\vec{r} | -J_z, d \rangle \quad (3.6.28)$$

$$= 2 \operatorname{Re} \{ \langle -J_z, d | q\vec{r} | J_z, d \rangle \}. \quad (3.6.29)$$

Possiamo fare la stessa cosa anche per l'osservatore di tempi $-t$ e ottenere:

$$\langle \vec{d}' \rangle = \langle \psi'_+ | q\vec{r}' | \psi'_+ \rangle \quad (3.6.30)$$

$$= \operatorname{Re} \{ \langle J_z, d | q\vec{r} | J_z, d \rangle \}. \quad (3.6.31)$$

Dunque vediamo che se non c'è degenerazione allora si ha $\langle \vec{d} \rangle = \langle \vec{d}' \rangle = 0$, mentre se c'è degenerazione $\langle \vec{d} \rangle = \langle \vec{d}' \rangle \neq 0$.

3.6.3 Esempio di degenerazione

Un esempio di autostati degeneri è dato da alcune molecole come NH_3 . Si hanno due configurazioni, rappresentate in figura 3.8. L'ammoniaca solitamente si trova in una sovrapposizione di tali stati.

3.6.4 Esempio non degeneri

Un esempio non degeneri sono i neutroni. Teoricamente sappiamo che il neutrone è un autostato non degeneri poiché, avendo spin $+1/2$, avremmo quattro possibili stati degeneri:

$$d, -d, 1/2, -1/2. \quad (3.6.32)$$

Quindi in ogni livello energetico nel nucleo avremo 4 neutroni, ma conoscendone la massa, sappiamo che ce ne sono solamente 2.

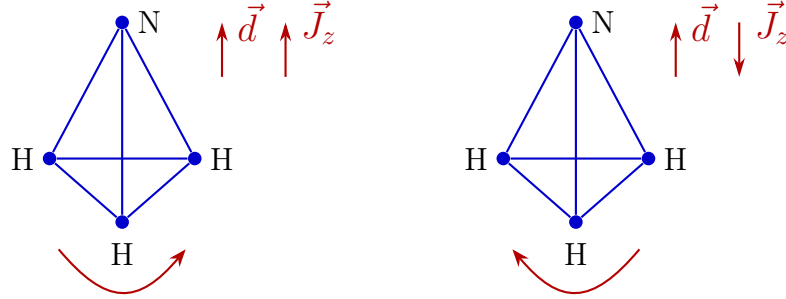


Figura 3.8

3.6.5 Verifica sperimentale

Il fatto che i neutroni non abbiano momento di dipolo elettrico è stato verificato sperimentalmente. Storicamente lo sviluppo spaziale dell'apparato sperimentale è stato quello in figura 3.9, ma con le tecnologie moderne avviene tutto nello stesso punto.

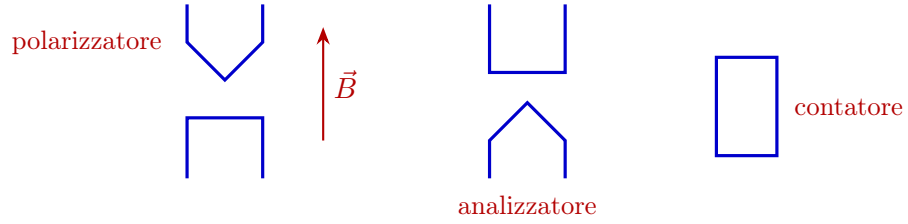


Figura 3.9

Consideriamo un fascio di neutroni incidenti, tutti alla stessa velocità, e con momento magnetico dato dalla legge di Larmor:

$$\vec{\mu} = g \frac{e}{2m_N} \vec{s} \cdot \left(\frac{q}{e} + k \right) \quad (3.6.33)$$

che nel caso di un protone il fattore tra parentesi vale $1 + 1.179$ (tra cui $k = 1.91$ che è l'anomalia magnetica del neutrone), ma per il neutrone è $0 - 1.91$.

Innanzitutto il fascio passa attraverso un polarizzatore (un campo magnetico) per allineare tutti i momenti magnetici nella stessa direzione. Poi i neutroni si propagano in una direzione che fa precedere il momento magnetico. La velocità angolare di precessione è data da:

$$\omega_L = \frac{\mu B}{s}. \quad (3.6.34)$$

Il momento magnetico sui momenti è:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (3.6.35)$$

Se tutti i neutroni hanno lo stesso momento magnetico, allora nello spazio tra il polarizzatore e l'analizzatore tutti i vettori momento magnetico ruotano dello stesso angolo, dunque all'analizzatore tutti i neutroni hanno lo stesso momento magnetico. L'analizzatore seleziona solo neutroni con il momento magnetico in una specifica regione.

Se i neutroni avessero anche momento di dipolo elettrico, nel caso fosse presente solo un capo magnetico, non si registrerebbero cambiamenti; se però fosse presente anche un campo elettrico, allora ci sarebbe un'altro momento meccanico:

$$\vec{d} \times \vec{E} \quad (3.6.36)$$

che cambia la frequenza di precessione totale:

$$\omega = \omega_L + \frac{dE}{s}. \quad (3.6.37)$$

Si ripete analogo anche con campo elettrico opposto.

Quindi, se i neutroni avessero momento di dipolo elettrico il numero di conteggi cambierebbe in presenza o assenza di campo elettrico. Il che dimostra che i neutroni non ne sono provvisti.

L'entità di $\vec{d}$ può essere studiata osservando lo spettro di assorbimento quando il sistema viene illuminato da della radiazione elettromagnetica. Si faccia riferimento alla figura 3.10. Gli ultimi esperimenti stimano:

$$d_n < 10^{-28} \text{ Cm}. \quad (3.6.38)$$

Possiamo anche studiare lo splitting dei livelli energetici indotto dal campo $\vec{E}$ rispetto quello indotto da $\vec{B}$:

$$\frac{\Delta\nu_E}{\Delta\nu_B} = \frac{dE}{\mu B} \quad (3.6.39)$$

che utilizzando il dato sperimentale di d , e il valore di μ , ci da':

$$\frac{\Delta\nu_E}{\Delta\nu_B} \sim \frac{1}{6} \cdot 10^{-20} \frac{E}{B}. \quad (3.6.40)$$

Aumentare il rapporto E/B pone i problemi di natura sperimentale:

- Per $E > 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ il campo crea scariche in aria.
- Per $B \sim 10^{-4} \text{ T}$ diventa rilevante il campo magnetico terrestre, che vale $\sim 0.5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

Anche considerando esperimenti successivi, su diverse particelle, non è mai stata trovata evidenza di dipoli permanenti non degeneri.

Le interazioni deboli prevederebbero un dipolo 10 volte più piccolo, mentre la QED più grande e questo è il motivo per cui si introduce l'*assione*.

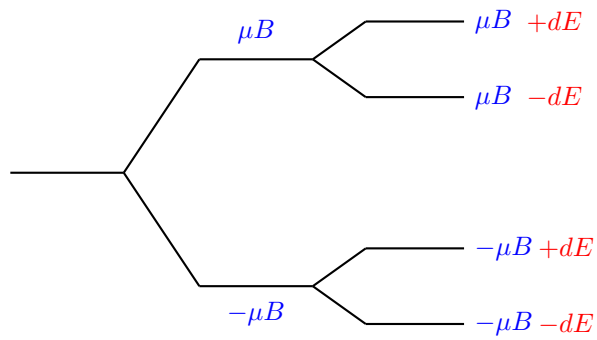


Figura 3.10: Sperimentalmente si osserva lo spostamento nei livelli energetici cambiando il verso del campo $\vec{E}$.

Capitolo 4

Risonanze adroniche

Abbiamo visto le simmetrie discrete, ma vi sono anche trasformazioni continue di coordinate interne che portano a classificare le particelle come multipletti, stati alla stessa energia di una stessa interazione, come l'isospin.

Uno dei principali processi in cui gli adroni sono stati osservati sono le cosiddette **risonanze**, sia in produzione che in formazione. Nel seguito del capitolo le analizzeremo entrambe.

Parliamo di risonanze nel momento in cui nell'andamento della sezione d'urto (di un qualche processo) osserviamo dei picchi ad energie definite, dette appunto *risonanze*.

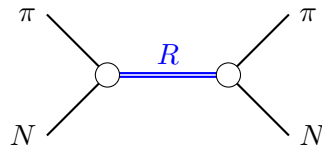
4.1 Risonanze in formazione

Osserviamo la sezione d'urto σ di un processo di collisione *elastica* tra due adroni in funzione dell'energia del centro di massa. Ad esempio prendiamo:

$$\pi + N \longrightarrow \pi + N$$

con N nucleone. Osserviamo un aumento di qualche ordine di grandezza ad un certo valore di $\sqrt{s}$, che corrisponde alla massa del propagatore. Vedi il grafico [4.1](#).

L'interpretazione è la seguente. Dato il diagramma di Feynman:



si ha che per quello specifico valore di $\sqrt{s}$ c'è uno *stato di risonanza* che poi decade nuovamente in π ed N .

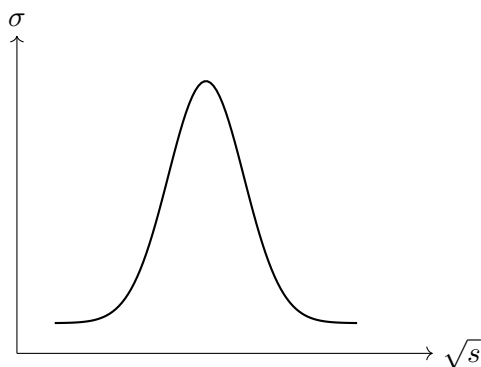


Figura 4.1

4.2 Risonanze in produzione

Riconsideriamo la collisione tra adroni, questa volta anelastica, per cui nello stato finale vi sono varie particelle:

$$\pi + N \longrightarrow a + b + \dots$$

Per queste particelle finali misuriamo i quadrimpulsi p_a, p_b e a due a due o a tre a tre costruiamo il quadrato della somma delle particelle, ad esempio: $m_{ab}^2 = (p_a + p_b)^2$. Quello che si osserva è che se costruiamo un istogramma in cui riportiamo il numero di eventi in funzione di m_{ab}^2 , come in figura 4.2 notiamo un aumento di qualche ordine di grandezza in corrispondenza di un certo valore (che corrisponde alla produzione di uno specifico stato finale).

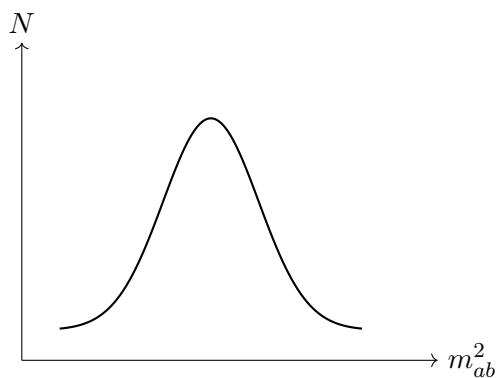
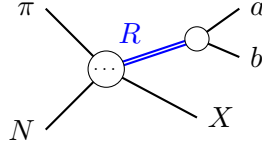


Figura 4.2

L'interpretazione è la seguente: π ed N interagiscono, si forma uno stato risonante che decade in a e b , ma si forma anche il rimanente stato X .

Abbiamo un diagramma di Feynman del tipo:



4.3 Distribuzione di Breit e Wigner

Abbiamo visto in breve i due tipi di risonanze che possiamo avere, ma vi sono delle *differenze* tra le risonanze accessibili in formazione ed in produzione, che hanno a che fare con le masse ed i numeri quantici additivi.

Riprendiamo $\pi^- + N$, cerchiamo di capire le differenze tra le risonanze. Cominciamo a vedere le risonanze in formazione:

- *In cinematica*: Nel processo d'urto vale $\sqrt{s} \geq \sum_f m_f$. Se applichiamo la disuguaglianza alle risonanze in formazione, nella condizione di soglia $m_f = m_R$ (massa della risonanza), abbiamo (nel nostro esempio di prima):

$$m_R \geq \sum_i m_i = m_\pi + m_N \quad (4.3.1)$$

quindi non si possono osservare risonanze in formazione di massa maggiore di quelle iniziali.

- *Numeri additivi (carica)*: sappiamo bene che la carica si conserva, ovvero vale:

$$Q_R = Q_\pi + Q_N \quad (4.3.2)$$

ma anche il numero barionico, che per i nucleoni vale 1, viene conservato nel processi, il che vuol dire che non possiamo formare solo mesoni. Si ha:

$$B_R = B_\pi + B_N. \quad (4.3.3)$$

Nelle risonanze in produzione, poiché è presente un generico stato X , questi vincoli sono *meno stringenti*:

- Il *vincolo cinematico* si rifrassa come:

$$m_R + m_X \geq m_\pi + m_N \quad (4.3.4)$$

quindi la massa della risonanza non è necessariamente minore della massa dello stato iniziale.

- Anche per la *carica* vale una relazione analoga:

$$Q_R + Q_X = Q_\pi + Q_N \quad (4.3.5)$$

e per il numero barionico succede lo stesso; quindi, qui la risonanza potrebbe essere un barione. Infatti si ha:

$$B_R = B_\pi + B_N - \sum B_X. \quad (4.3.6)$$

A prescindere dal tipo di risonanza, la possiamo descrivere con la **distribuzione di Breit e Wigner**:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \frac{2J+1}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \frac{\Gamma_i \Gamma_f / 4}{(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (4.3.7)$$

in cui s_a, s_b sono gli spin delle particelle iniziali, k è il numero d'onda, M è la larghezza.

La B-W viene dimostrata in Meccanica Quantistica (rivedere il capitolo dello sviluppo in onde parziali visto al corso di Meccanica Quantistica 2 può essere utile). Consideriamo uno stato di onda piana che si propaga lungo z :

$$\psi(z, t) = \psi_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (4.3.8)$$

una particella rappresentata da tale stato può interagire con un *potenziale*, che poniamo nell'origine del sistema di riferimento, descritto in coordinate polari. Possiamo sviluppare la componente descritta da z in *onde sferiche*:

$$e^{ikz} \simeq \frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} [(-1)^l e^{-ikr} - e^{ikr}] (2l+1) P_l(\cos \theta) \quad \text{per } kr \gg 1. \quad (4.3.9)$$

Ad r grande, e con un'onda piana interagente con un potenziale, trascurando lo spin, si usa quell'espressione che dipende dal numero d'onda k , un coefficiente dipendente da r ed i polinomi di Legendre P_l . Stiamo applicando quello visto al corso di Meccanica Quantistica 2.

Se consideriamo la fase dell'onda piana $\varphi = kz - \omega t$ e prendiamo i punti su cui la fase è costante, possiamo vedere come sono definiti nello sviluppo i vari termini.

Per il primo coefficiente la fase è $-i(kr + \omega t) = i\varphi_0$, cioè al passare del tempo i punti con fase costante sono quelli in cui r diminuisce; il secondo termine è $i(kr - \omega t) = i\varphi_0$, invece quando qui è costante, e il tempo t passa, r aumenta. Quindi ciò vuol dire che nello sviluppo abbiamo un'**onda incidente** ed un'**onda uscente**.

Se nell'origine è presente un potenziale, un centro diffusore, ci aspettiamo che esso non modifichi la parte incidente, ma solamente quella uscente, ovvero:

$$\psi_{in} \rightarrow \psi_{in}, \quad \psi_{us} \rightarrow \psi'_{us} \quad : \quad e^{ikr} \rightarrow \eta_l e^{i2\delta_l} e^{ikr} \quad (4.3.10)$$

cioè l'onda uscente cambia in *ampiezza e fase*. Noi non considereremo mai variazioni di ampiezza, per cui per noi vale $\eta_l = 1$, cioè ci mettiamo nella situazione in cui non c'è assorbimento!

Possiamo calcolare la sezione d'urto:

$$\sigma \propto |\psi'_{us} - \psi_{us}|^2 \quad (4.3.11)$$

$$= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left| \frac{e^{i2\delta_l} - 1}{2i} \right|^2 \quad (4.3.12)$$

per ottenere la B-W vediamo:

$$\frac{e^{i2\delta_l} - 1}{2i} = e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) \quad \implies \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2(\delta_l) \quad (4.3.13)$$

che è la standard espressione della sezione d'urto in Meccanica Quantistica.

Se ci fosse un valore di l , e di E , per cui δ_l dovesse valere $\pi/2$, allora avremmo $\sin^2(\delta_l) \sim 1$, e dunque un valore dominante nella somma (ricorda che la risonanza corrisponde ad un massimo della sezione d'urto). Per tale valore di l ed E :

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \quad ; \quad \text{con } \delta_l(E = E_R) = \pi/2. \quad (4.3.14)$$

La B-W la otteniamo vedendo come varia σ nell'intorno di E_R , ma anche vedendo come varia δ_l in tale intorno. Facciamo quindi lo sviluppo di $e^{i\delta_l} \sin(\delta_l)$ per $E \simeq E_R$.

Tipicamente si scrive:

$$e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) = \frac{\sin(\delta_l)}{e^{-i\delta_l}} \quad (4.3.15)$$

$$= \frac{\sin(\delta_l)}{\cos(\delta_l) - i \sin(\delta_l)} \quad (4.3.16)$$

$$= \frac{1}{\cot \delta_l - i} \quad (4.3.17)$$

di cui possiamo farne lo sviluppo nell'intorno di $\delta_l = \pi/2$, ma in cui dobbiamo tenere conto di:

$$\cot(\pi/2) = 0 \quad (4.3.18)$$

$$\left. \frac{\partial \cot(\delta_l)}{\partial \delta_l} \right|_{\pi/2} = -1 \quad (4.3.19)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \cot(\delta_l)}{\partial \delta_l^2} \right|_{\pi/2} = 0. \quad (4.3.20)$$

Con un solo termine dello sviluppo, a causa degli 0, trascuriamo i termini fino a $(E - E_R)^3$, quindi:

$$e^{i\delta_l} \sin \delta_l = \frac{1}{\underbrace{-\frac{\partial \delta_l}{\partial E} \bigg|_{E_R}}_{2/\Gamma} (E - E_R) - i} \quad (4.3.21)$$

$$= \frac{1}{-\frac{2}{\Gamma}(E - E_R) - i} \quad (4.3.22)$$

il che implica:

$$|e^{i\delta_l} \sin \delta_l|^2 = \frac{(\Gamma/2)^2}{(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (4.3.23)$$

e dunque la sezione d'urto:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{(\Gamma/2)^2}{(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2}. \quad (4.3.24)$$

Analizziamo meglio quanto trovato:

- Quest'espressione contiene il termine $(2l+1)$, che rimanda all'armonica sferica, che è legata al momento angolare, ma dobbiamo ricordarci che noi abbiamo trascurato lo spin. Nel caso in cui includessimo lo spin, l non sarebbe l'unica componente del momento angolare, per cui avremmo nell'espressione $|2J+1|$, con J momento angolare totale, e quando passiamo dalle funzioni d'onda alla σ , ci sarebbe un termine di flusso che, nel caso in cui le particelle abbiano spin, ha un fattore statistico. Dunque il termine corretto da considerare, nel caso di spin non trascurabile, sarebbe:

$$\frac{2J+1}{(2s_a+1)(2s_b+1)}. \quad (4.3.25)$$

- Il numero d'onda k faceva riferimento all'onda piana incidente sul centro diffusore. Se abbiamo una particella incidente su un bersaglio, nel processo d'urto tale particella è deflessa, mentre il bersaglio rimane fermo, dunque solo in questo caso k non cambia, si ha $M_{bers} \gg M_{inc}$, cioè quando il sistema di riferimento del centro di massa coincide con quello del laboratorio.

Se ciò non vale, k è il numero d'onda della particella incidente nel sistema di riferimento del centro di massa.

Però potremmo chiederci: *perché la risonanza la interpretiamo come un nuovo stato?*

Se abbiamo uno stato instabile che decade con una legge del tipo:

$$|\psi(t)|^2 = |\psi_0|^2 \exp(-t/\tau) \quad (4.3.26)$$

con τ vita media, esso *non* è un autostato dell'Hamiltoniana ed ha energie centrate intorno ad una certa E_R caratteristico. La funzione d'onda è:

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \psi_0 e^{-i(E_R - \frac{i}{2\tau})t} & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.3.27)$$

se ne facciamo la trasformata di Fourier¹:

$$= \frac{i}{(E - E_R) + i/(2\tau)} \xrightarrow{|\cdot|^2} \frac{1}{(E - E_R)^2 + 1/(4\tau^2)}. \quad (4.3.29)$$

Dunque, da un lato abbiamo un'espressione che dice come varia in funzione dell'energia la probabilità che a interagisca con b , ovvero la sezione d'urto, mentre dall'altra c'è un'espressione che ci dice come varia con l'energia la probabilità di trovare questo stato instabile con energia E ; possiamo identificare queste due probabilità, a patto di identificare:

$$\Gamma = 1/\tau. \quad (4.3.30)$$

Per questi motivi dai fit ricaviamo Γ e possiamo stimare la vita media.

Arrivati a questo punto, potremmo definire due quantità, ovvero Γ_i e Γ_f .

Finora, abbiamo descritto un urto elastico $2 \rightarrow 2$, ma può capitare che le particelle finali non coincidano con quelle iniziali, cioè la risonanza può decadere in diverse. Infatti, la stessa risonanza R può essere generata da particelle diverse:

$$\begin{aligned} a + b &\longrightarrow R \\ a' + b' &\longrightarrow R \\ a'' + b'' &\longrightarrow R \end{aligned}$$

e possiamo scrivere il rapporto:

$$\frac{\sigma_{i \rightarrow R}}{\sigma_{tot}} = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{tot}} \quad (4.3.31)$$

che ci dice quante volte produciamo R , partendo da un certo stato iniziale i , sul totale. Possiamo scrivere la stessa cosa per gli stati finali:

$$\frac{\sigma_{R \rightarrow f}}{\sigma_{tot}} = \frac{\Gamma_f}{\Gamma}. \quad (4.3.32)$$

¹Che ricordiamo essere definita (con le opportune convenzioni):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{iEt} dt. \quad (4.3.28)$$

Da questi rapporti vorremmo ottenere una larghezza parziale che ci dice quante volte sul totale capita quel determinato processo. Possiamo sostituire al numeratore $\Gamma^2 \rightarrow \Gamma_i \Gamma_f$, ma non al denominatore.

In questo modo abbiamo la curva di B-W, che ha l'andamento in figura 4.3.

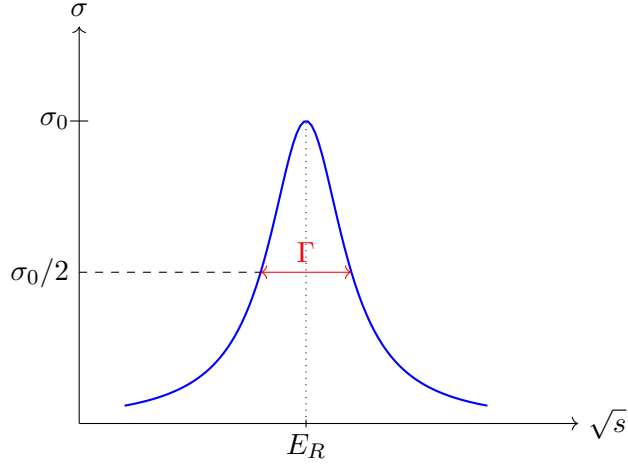


Figura 4.3

Se identifichiamo la risonanza con una particella, allora $E_R = m_R$. Se $\Gamma_i = \Gamma_f = \Gamma$, allora vale:

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \frac{2J+1}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \quad (\text{a } E = E_R). \quad (4.3.33)$$

Se ci spostiamo dal massimo di $\pm\Gamma/2$, allora $\sigma = \sigma_0/2$, ovvero si dimezza, e questo è il criterio per trovare Γ .

La Δ

Vediamo una particolare risonanza *in formazione*. Essa è osservata in processi di diffusione elastica tra pioni e nucleoni, come:

$$\begin{array}{ll} \Delta^{++} & : \quad \pi^+ + p \longrightarrow \pi^+ + p \\ \Delta^+ & : \quad \pi^+ + n \longrightarrow \pi^+ + n \\ \Delta^0 & : \quad \pi^- + p \longrightarrow \pi^- + p \\ \Delta^- & : \quad \pi^- + n \longrightarrow \pi^- + n. \end{array} \quad (4.3.34)$$

Tutti questi processi furono realizzati nella configurazione di bersaglio fisso ed in corrispondenza di $T_\pi \simeq 200$ MeV la σ passava da 10 mb a 200 mb, ovvero aveva un andamento risonante.

Si possono estrarre i numeri quantici. La *massa*, conoscendo T_π di soglia, la si può ricavare conservando p ; infatti:

$$m_\Delta^2 = m_\pi^2 + m_p^2 + 2m_p(m_\pi + T_\pi) \quad (4.3.35)$$

$$\simeq 1232 \text{ MeV}. \quad (4.3.36)$$

È una risonanza in formazione, per cui deve valere (4.3.1), che è verificata:

$$m_R > m_\pi + m_p. \quad (4.3.37)$$

Per quanto riguarda la *vita media*, possiamo misurare la Γ come la distanza tra i punti in cui σ diminuisce da σ_0 a $\sigma_0/2$.

Si ha che:

$$\Gamma \simeq 100 \text{ MeV} \quad (4.3.38)$$

$$\Rightarrow \tau = 1/\Gamma \quad (4.3.39)$$

$$= \hbar/\Gamma \quad (4.3.40)$$

$$= \frac{\hbar c}{\Gamma \cdot c} \quad (4.3.41)$$

$$= \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{100 \text{ MeV}} \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \quad (4.3.42)$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{-15}}{3 \cdot 10^8} \text{ s} \quad (4.3.43)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 10^{-23} \text{ s} \quad (4.3.44)$$

che essendo molto piccola, è stimabile solo dicendo che τ caratteristico delle *interazioni forti*.

Per determinare la *carica* sfruttiamo la sua conservazione. Questa risonanza si produce nei vari processi (4.3.34), dunque è una particella con 4 stati di carica, con stessa massa e vita media τ , per cui abbiamo un **multipletto di isospin** di 4 membri, il che implica ipercarica:

$$I = \frac{3}{2}. \quad (4.3.45)$$

Sappiamo anche che *numero barionico* si conserva nelle interazioni forti, per cui abbiamo che esso vale 1, il che vuol dire che Δ può decadere in mesoni e barioni nelle forti.

Lo *spin* è determinato dalla B-W: ci mettiamo in un punto in cui conosciamo sia l'energia che s_a, s_b , e in cui l'unica incognita è J ; ricordiamoci che σ si misura.

Se ci mettiamo a $E = E_R$, allora $\sqrt{s} = m_R$ e il termine energetico va ad $\Gamma_i \Gamma_f / \Gamma^2$; in cui Γ_i e Γ_f sono misurabili.

Per ora facciamo un caso facile: consideriamo solo:

$$\pi^+ + p \longrightarrow \pi^+ + p \quad (4.3.46)$$

per cui:

$$\frac{\Gamma_i}{\Gamma} = \frac{\Gamma_f}{\Gamma} = 1 \quad (4.3.47)$$

che implica che al picco si abbia:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \frac{(2J+1)}{2} \quad (4.3.48)$$

dove k è il numero d'onda nel sistema di riferimento del centro di massa; quindi l'espressione dell'impulso è:

$$p^* = \frac{\sqrt{\lambda(m_\Delta^2, m_\pi^2, m_p^2)}}{2m_\Delta} = 230 \text{ MeV}/c. \quad (4.3.49)$$

Però la relazione $\hbar k = p^*$ implica:

$$\sigma = 50 \text{ mb} \cdot (2J+1) = 200 \text{ mb} \quad (4.3.50)$$

in cui 200 mb è il valore sperimentale, e per confronto ci fa vedere che:

$$J = 3/2. \quad (4.3.51)$$

Possiamo per finire stimare la *parità* utilizzando la sua conservazione (ricordando che abbiamo a che fare con un processo forte). Prendiamo:

$$\Delta^{++} \longrightarrow \pi^+ + p \quad (4.3.52)$$

per cui abbiamo:

$$P_\Delta = P_\pi \cdot P_p \cdot (-1)^{l_f} \quad (4.3.53)$$

ma:

$$\vec{J}_\Delta = \vec{S}_\pi + \vec{S}_p + \vec{l}_f \implies \frac{3}{2} = 0 + \frac{1}{2} + l_f \quad (4.3.54)$$

per cui, andrebbe bene sia $l_f = 1$ che $l_f = 2$, ma per motivi energetici (cinematicamente) è più favorito $l_f = 1$, quindi troviamo:

$$P_\Delta = +1. \quad (4.3.55)$$

4.4 Studio di risonanze in produzione

Per quanto riguarda *massa e vita media* si fitta la curva sperimentale con la curva di Breit e Wigner, mentre per quanto riguarda la *carica*, conoscendo a e b in cui decade una data particella, si ha $Q_R = Q_a + Q_b$ per via della conservazione.

Quando nella collisione si formano altre particelle oltre alla risonanza, è più difficile determinare lo *spin*; per questo motivo si utilizza la tecnica dei **Dalitz plot**.

4.4.1 Misure di spin (Dalitz plot)

Consideriamo un caso semplificato: una risonanza che decade in tre pioni, che quindi hanno la stessa massa. Facciamo un'altra approssimazione: assumiamo che possano essere trattati in un regime non relativistico.

L'idea è di fare un'ipotesi sullo spin e sulla parità della risonanza per poi vedere come questa ipotesi si traduce nello spin e nella parità dell'elemento di matrice che descrive il decadimento. Però lo spin e la parità dell'elemento di matrice si possono studiare sperimentalmente, in base alla distribuzione delle variabili cinematiche dei pioni nello stato finale; infatti, l'elemento di matrice determina p_a, p_b, p_c che si possono misurare.

Innanzitutto cerchiamo di capire quante sono le *variabili indipendenti*. Avendo tre particelle nello stato finale, per ogni pione c'è un quadrimpulso incognito, ma vale la relazione di *mass-shell*, per cui per ogni pione abbiamo 3 gradi di libertà (d.o.f.), dunque in tutto abbiamo 9 variabili. Però dobbiamo considerare anche il fatto che nel decadimento si conservano energia ed impulso. Dunque, in totale abbiamo 4 vincoli, quindi rimangono **5 d.o.f.** cinematici.

Quindi, per scrivere un generatore di eventi Monte-Carlo assegnamo ad ogni evento 5 numeri, ma così facendo abbiamo il problema che l'elemento di matrice $\mathcal{M}_{fi}$ non dipende da 5 numeri.

Se ci poniamo nel sistema di riferimento della risonanza, quindi del centro di massa, abbiamo $\vec{p}_a + \vec{p}_b + \vec{p}_c = 0$, ovvero che i tre impulsi *giacciono in un piano*. Ad ogni decadimento, dunque a diverse configurazioni di impulsi, cambia il piano. Il piano è individuato da un versore normale, quindi due numeri. Se per ogni evento conosciamo il piano, allora riduciamo il numero di gradi di libertà da 5 a 3. Però abbiamo qualche margine di manovra per semplificarci la situazione, infatti, da evento ad evento possiamo scegliere l'asse x coincidente con $\vec{p}_a$, per esempio, e dunque prendiamo $p_{ay} = 0$. Per questo, in generale, per ogni evento, scegliamo il piano ed il sistema di riferimento e ci rimangono solo **2 variabili indipendenti** (d.o.f.).

Parliamo di matematica. Abbiamo λ costante di decadimento data dalla regola aurea di Fermi:

$$d\lambda = K |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d^3 p_a}{2E_a} \frac{d^3 p_b}{2E_b} \frac{d^3 p_c}{2E_c} \delta(m_R - E_a - E_b - E_c) \delta^3(\vec{p}_a + \vec{p}_b + \vec{p}_c) \quad (4.4.1)$$

e il discorso fatto finora si traduce matematicamente facendo integrali sulle varie variabili, per cui si trova:

$$d\lambda = K' |\mathcal{M}_{fi}|^2 dE_a dE_b \implies \frac{d^2 \lambda}{dE_a dE_b} = K' |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (4.4.2)$$

essa è la probabilità di decadimento in intervalli di energia dE_a e dE_b e dipende solamente dal modulo quadro dell'elemento di matrice. Questa relazione dice che se realizziamo un istogramma bidimensionale del numero di

eventi in funzione dell'energia, otteniamo il modulo quadro dell'elemento di matrice, ossia quello che si diceva all'inizio.

Poiché i pioni sono non relativistici, valgono:

$$E_a = m_a + T_a \quad , \quad E_b = m_b + T_b \quad (4.4.3)$$

quindi:

$$\frac{d^2\lambda}{dT_a dT_b} = \underbrace{\frac{\partial(E_a, E_b)}{\partial(T_a, T_b)}}_{\text{Jacob}=1} \frac{d\lambda}{dE_a dE_b} = K' |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (4.4.4)$$

Se scriviamo la conservazione dell'energia:

$$m_R = T_a + T_b + T_c + 3m_\pi \quad (\text{uguale per tutti gli eventi}). \quad (4.4.5)$$

Possiamo misurare queste tre quantità e rappresentarle su un piano. Vedi la figura 4.4. Però se la somma deve essere costante, allora questa è la condizione che abbiamo in un piano quando è presente un *triangolo equilatero*. Infatti il *teorema di Viviani* ci dice: dato un qualunque punto interno ad un triangolo equilatero, la somma delle distanze dei tre lati è costante. Inoltre, se misuriamo le altezze di un punto rispetto ai 3 lati esse sono le energie cinetiche.

In questo diagramma un punto è un evento e le energie cinetiche sono le distanze dai lati. Però non tutti i punti interni al triangolo sono cinematicamente possibili: ad esempio il vertice alto, che ha $T_b, T_c = 0$, non è possibile. La regione cinematicamente accessibile (cioè quella per cui è conservato il tri-impulso) è la **circonferenza inscritta** nel triangolo.

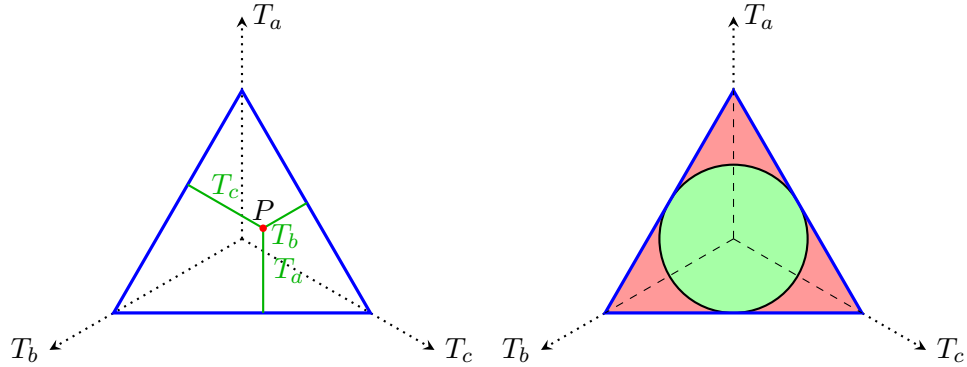


Figura 4.4

Osservazione. Capita di fare misure sbagliate visto che ci sono tante particelle, graficamente possiamo eliminare i dati errati utilizzando il fatto che abbiamo 2d.o.f., ma osserviamo 3 pioni. Infatti, possiamo utilizzare l'informazione *extra* per scartare gli eventi spuri, per cui:

$$T_c \neq m_R - 3m_\pi - (T_a + T_b). \quad (4.4.6)$$

Per questo si valuta la densità di eventi in queste figure.

Riassumendo: si fa un'ipotesi su spin e parità, si vede che effetto ha $\mathcal{M}_{fi}$; conoscendolo sappiamo quale figura/distribuzione aspettarci e la si confronta con i dati.

4.4.2 Considerazioni sulla parità

Abbiamo visto il modo di procedere per risonanze in produzione, ma facciamo qualche considerazione sulla parità.

Stiamo considerando il decadimento della risonanza in pioni, ma in generale sappiamo che l'interazione forte conserva la parità, per cui:

$$P_R = (P_\pi)^3 P_{orb}. \quad (4.4.7)$$

Poiché $P_\pi = -1$, la conservazione della parità dice che $P_R = -P_{orb}$.

Inoltre, abbiamo visto che la **parità orbitale** è la parità dell'elemento di matrice.

L'ipotesi sullo spin e la parità della risonanza implica l'ipotesi su spin e parità di $\mathcal{M}_{fi}$, quindi abbiamo la stessa legge di trasformazione, ma parità opposta:

$$R: J^P \longrightarrow \mathcal{M}_{fi}: J^{-P} \quad (4.4.8)$$

4.4.3 Considerazioni su simmetria/antisimmetria

Vediamo la funzione d'onda dei tre pioni: $|\pi_a \pi_b \pi_c\rangle$. Essi non hanno spin, $s = 0$, quindi lo stato è descritto da una funzione d'onda simmetrica per lo scambio di pioni identici (sono dunque bosoni). Possiamo scrivere:

$$|\pi_a \pi_b \pi_c\rangle = \psi_{orb}(\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{p}_c) \psi_{isospin}(I_a, I_b, I_c). \quad (4.4.9)$$

Abbiamo detto che l'isospin del pione vale 1, quindi:

$$\vec{I}_a + \vec{I}_b = \vec{0}, \vec{1}, \vec{2} \quad (4.4.10)$$

per cui:

$$\vec{I}_{ab} + \vec{I}_c = \vec{0}, \vec{1}, \vec{2}, \vec{3}. \quad (4.4.11)$$

Avendo uno stato di isospin I , ci aspettiamo $2I + 1$ stati di carica; si osservano risonanze a 1 e 3 stati di carica che decadono in π , dunque si può avere $I = 0$ o $I = 1$.

Scegliamo $I = 0$. Se la risonanza ha isospin 0, vuol dire $I_{ab} = 1$ e $I_c = 1$. Dai coefficienti di Clebsch-Gordan (vedi la tabella al seguente [link](#)) si trova che la funzione d'onda di isospin deve essere *antisimmetrica* per lo scambio di due pioni, quindi $\psi_I(a, b) = -\psi_I(b, a)$.

Questo vuol dire che quando prendiamo la funzione complessiva, che deve essere *simmetrica*, anche la componente orbitale deve essere *antisimmetrica*.

Essendoci tre pioni, il tutto va replicato per qualunque possibile scambio e questo porta a una ψ_{orb} totalmente antisimmetrica.

Dunque, per quello imparato prima, dobbiamo scrivere $\mathcal{M}_{fi}$ in funzione di $\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{p}_c$ che se $I = 0$ deve essere antisimmetrica per qualunque scambio, visto che si riflette nello stato, e si deve comportare come J^P .

4.4.4 Considerazioni sulla cinematica

Possiamo scomporre la cinematica del decadimento di una risonanza in tre pioni, che stiamo considerando in questa sezione, come diviso in due parti: abbiamo un pione che rincula sugli altri due, supponiamo π_a e π_b . Vedi la figura 4.5. Nel sistema del centro di massa (cdm), se π_a e π_b si muovono con $\vec{p}$, allora π_c si muove con $-\vec{p}$. In generale a e b non si muovono insieme, dobbiamo introdurre una nuova direzione: se il sistema $\pi_a + \pi_b$ si muove con $\vec{p}$, supponiamo che nel loro sistema di riferimento, allora uno si muove con $\vec{q}$ e l'altro con $-\vec{q}$. Quindi abbiamo:

- $\vec{p}_a = \vec{p}/2 + \vec{q}$
- $\vec{p}_b = \vec{p}/2 - \vec{q}$
- $\vec{p}_c = -\vec{p}$

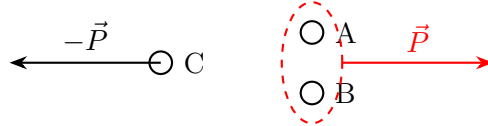


Figura 4.5

Per i momenti angolari, per questo sistema è scomponibile in l_{ab} e l_c . Come in figura 4.6. Se prendiamo:

$$p_a^2 - p_b^2 = 2\vec{p} \cdot \vec{q} \implies T_a - T_b = 2m_\pi \cdot 2\vec{p} \cdot \vec{q} = E_a - E_b. \quad (4.4.12)$$

Inoltre:

$$\vec{p}_a - \vec{p}_b = 2\vec{q}. \quad (4.4.13)$$

Osservazione. Abbiamo uno scalare ed un vettore *antisimmetrici* per scambio di particelle.

Vediamo alcune ipotesi: supponiamo che la risonanza abbia $J^P = 0^-$, cioè che per $\mathcal{M}_{fi}$ si abbia 0^+ . Abbiamo visto che vogliamo uno scalare che non cambia segno sotto parità, ma antisimmetrico per scambio di pioni. Quindi useremo $\vec{p} \cdot \vec{q}$.

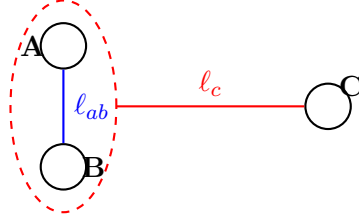


Figura 4.6

Se vogliamo verificare che R abbia 0^+ , quindi per $\mathcal{M}_{fi}$ abbiamo 0^- , allora non è un problema perché non si verifica mai. Infatti, nel decadimento deve conservarsi la parità:

$$(+1) = (-1)^3(-1)^{l_{ab}}(-1)^{l_c} \quad (4.4.14)$$

ma nella nostra ipotesi la risonanza ha spin 0, quindi per conservazione del momento angolare totale:

$$\vec{0} = \vec{s}_\pi + \vec{l}_{ab} + \vec{l}_c \quad (4.4.15)$$

$$= \vec{l}_{ab} + \vec{l}_c \quad (4.4.16)$$

$$= 0 \quad (4.4.17)$$

$$\implies |\vec{l}_{ab}| = |\vec{l}_c| \quad (4.4.18)$$

quindi avremmo parità non conservata. Dunque, *questo processo non si verifica!*

Se per R ipotizziamo $J^P = 1^-$, allora per $\mathcal{M}$ si ha $J^P = 1^+$, e utilizziamo:

$$\vec{p} \wedge \vec{q} \quad (\text{vettore assiale}). \quad (4.4.19)$$

Se per R ipotizziamo $J^P = 1^+$, allora per $\mathcal{M}$ abbiamo $J^P = 1^-$, e dunque un vettore antisimmetrico $\vec{q}$.

Facciamo un esempio pratico. Prendiamo per R $J^P = 0^-$, dunque per $\mathcal{M}_{fi}$ 0^+ , e abbiamo detto che

$$\mathcal{M}_{fi} \propto \vec{p} \cdot \vec{q} \propto T_a - T_b. \quad (4.4.20)$$

Questo è solo il termine che contiene a e b , ma dobbiamo tenere conto anche degli altri scambi, quindi:

$$\mathcal{M} \propto (T_a - T_b)(T_b - T_c)(T_c - T_a). \quad (4.4.21)$$

Se $T_a = T_b$, allora $\mathcal{M} = 0$, quindi se costruiamo l'istogramma a triangolo *sulle bisettrici non devono esserci eventi*. Vedi la figura 4.7.

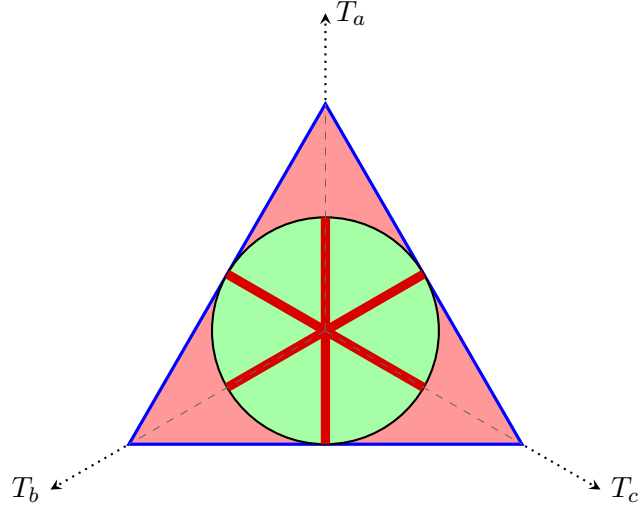


Figura 4.7

Ora, prendiamo $J^P = 1^-$, quindi:

$$\mathcal{M}_{fi} \propto \vec{p} \wedge \vec{q} \quad (4.4.22)$$

$$\propto \vec{p}_c \wedge (\vec{p}_a - \vec{p}_b) \quad (4.4.23)$$

aggiungiamo gli altri scambi:

$$\vec{p}_a \wedge (\vec{p}_b - \vec{p}_c) + \vec{p}_b \wedge (\vec{p}_c - \vec{p}_a). \quad (4.4.24)$$

Vediamo come popola si il diagramma. L'elemento di matrice si annulla quando $\vec{p}_a \parallel \vec{p}_b, \vec{p}_b \parallel \vec{p}_c$ o $\vec{p}_c \parallel \vec{p}_a$, il che avviene al *limite cinematico*: quando due pioni sono paralleli tra loro, bilanciano la conservazione con la minima energia cinetica di a e b . Vedi la figura 4.8.

Se $J^P = 1^+$, dunque $\mathcal{M} \propto 1^-$, abbiamo:

$$\mathcal{M} \propto \vec{d} = \vec{p}_a - \vec{p}_b \quad (4.4.25)$$

aggiungiamo gli altri:

$$\mathcal{M} \propto T_c(\vec{p}_a - \vec{p}_b) + T_a(\vec{p}_b - \vec{p}_c) + T_b(\vec{p}_c - \vec{p}_a). \quad (4.4.26)$$

In questo caso c'è *annullamento al centro*, poiché è il punto in cui sono tutte le T_i uguali tra di loro. Vedi la figura 4.9. Gli altri zeri si trovano ai massimi delle energie cinetiche; massimizzando ad esempio T_c si ha $T_a = T_b = T_{ab}$ e:

$$\mathcal{M} = k(\vec{p}_a - \vec{p}_b)(T_c - T_{ab}) = (T_c - T_{ab})\vec{q}$$

dunque, nella situazione di T_c massima si ha $\vec{q} = 0$, dunque $\mathcal{M} = 0$.

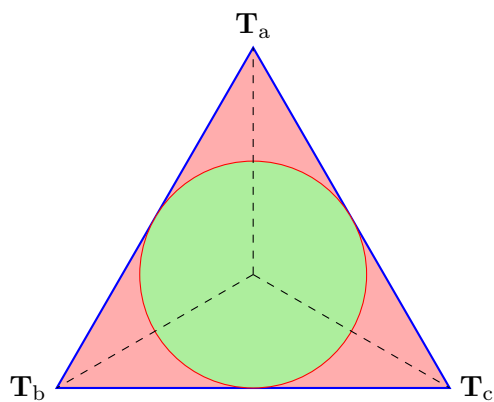


Figura 4.8

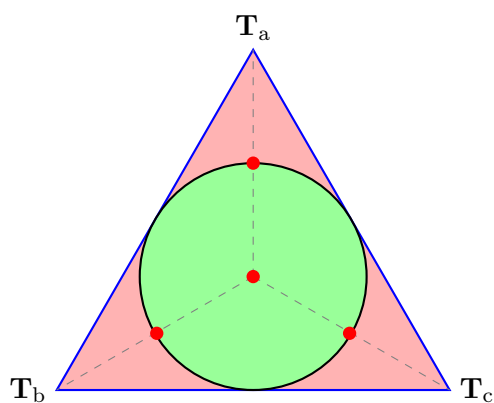


Figura 4.9

In caso di cinematica *ultra-relativistica* le masse sono trascurabili e per questo le circonferenze diventano triangoli rovesciati. Vedi la figura 4.10. Inoltre i pioni sono identici, dunque ripieghiamo lo schema sugli assi e costruiamo una distribuzione unidimensionale, ma in cui le regioni con la stessa area non corrispondono più agli stessi raggi.

Un esempio di processo con masse trascurabili è il decadimento:

$$\omega \longrightarrow 3\pi \quad (4.4.27)$$

per cui il triangolo diventa quello in figura 4.10.

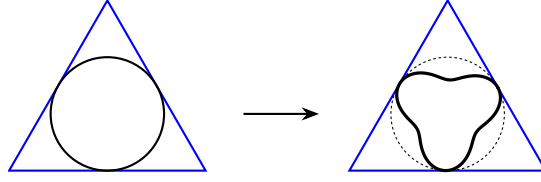


Figura 4.10: Le correzioni relativistiche portano ad uno schiacciamento della regione permessa.

4.4.5 Alcuni esempi

	η	ρ	ω	η'
m	550 MeV	770 MeV	780 MeV	960 MeV
Γ	1 keV	100 MeV	10 MeV	100 keV
d	$\eta \rightarrow \gamma\gamma$	$\rho \rightarrow \pi\pi$	$\omega \rightarrow 3\pi$	$\eta' \rightarrow \eta\gamma$
I	0	1	0	0
J^{PC}	0^{-+}	1^{--}	1^{--}	0^{-+}

Vediamo come determinare alcuni numeri quantici. Ad esempio vediamo come determinare l'autovalore di *coniugazione di carica* di η , sapendo che esso decade in 2 fotoni:

$$\eta \longrightarrow 2\gamma$$

per cui si ha:

$$\mathcal{C} |\eta\rangle = \mathcal{C} |\gamma\rangle \cdot \mathcal{C} |\gamma\rangle \quad (4.4.28)$$

$$= (-1)(-1) = +1 \quad (4.4.29)$$

$$\implies \mathcal{C} |\eta\rangle = + |\eta\rangle. \quad (4.4.30)$$

Facciamo anche l'esempio di:

$$\rho^0 \longrightarrow \pi\pi$$

nello stato finale abbiamo un sistema di due mesoni, quindi:

$$\mathcal{C} |m\bar{m}\rangle = (-1)^{l+s} |m\bar{m}\rangle \quad (4.4.31)$$

e sapendo che $s = 0$, cerchiamo l imponendo la conservazione del momento angolare totale:

$$\vec{J}_i = \vec{1}; \quad \vec{J}_f = \vec{s}_\pi + \vec{s}_\pi + \vec{l} = \vec{l} \implies \vec{l} = \vec{1} \implies l = 1 \quad (4.4.32)$$

dunque abbiamo:

$$\mathcal{C} |\rho^0\rangle = - |\rho^0\rangle. \quad (4.4.33)$$

Capitolo 5

Modello a quark statico

Vediamo in questo capitolo il modello a quark statico, il quale permette di organizzare le particelle in multipletti, secondo i loro numeri quantici.

5.1 Particelle con Stranezza

Storicamente si osservarono particelle prodotte per interazione forte, dunque con $\sigma \sim \text{mb}$, sempre a coppie e che decadono per interazione debole.

In particolare, le considerazioni che faremo sulle particelle con stranezza si basano sull'osservazione di tre processi fondamentali:

$$p + \pi^- \longrightarrow \Lambda^0 + K^0 \quad (5.1.1)$$

$$\pi^+ + n \longrightarrow \Lambda^0 + K^+ \quad (5.1.2)$$

$$\pi^+ + p \longrightarrow K^+ + p + K^0. \quad (5.1.3)$$

Questi processi sono stati osservati grazie all'affinamento di tecnologie tali da produrre fasci di pioni da inviare su bersagli di idrogeno o deuterio. Furono osservati sia mesoni che barioni con stranezza, in particolare:

- **Mesoni:** $K^0, \bar{K}^0, K^+, K^-$
- **Barioni:** $\Lambda^0, \Sigma^{\pm,0}, \Xi^{-,0}, \Omega^-$

Consideriamo il primo processo (5.1.1). Esso manifesta due caratteristiche fondamentali:

- Rivela il meccanismo della "**produzione associata**", ovvero, Λ^0 e K^0 sono sempre prodotti insieme. Se osserviamo l'una c'è l'altra (e viceversa).
- La sezione d'urto è dell'ordine dei mbarn, quindi il processo è *forte*.

Vediamo i decadimenti dei prodotti. Sia Λ^0 che K^0 hanno una vita media dell'ordine dei ns, quindi si tratta di *decadimenti deboli*. In particolare:

$$K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (\text{mesone con } B = 0) \quad (5.1.4)$$

$$\Lambda^0 \longrightarrow p + \pi^- \quad (\text{barione con } B = 1). \quad (5.1.5)$$

In particolare possiamo vedere la carica e il numero barionico delle particelle nella tabella 5.1. Però, non si capisce perché tali particelle decadano

	π^-	$+p$	$\rightarrow \Lambda^0$	$+K^0$
$Q :$	-1	+1	0	0
$B :$	0	1	1	0

Tabella 5.1

solamente in maniera debole. Per provare a capire, si introduce un nuovo numero quantico, la *stranezza* (S).

- Si assegna $S = 0$ alle particelle note fino a quel momento (p, n, π).
- Si assegnano valori opposti a Λ^0 e K^0 , poiché si suppone che l'*interazione forte* e quella *elettromagnetica* conservino la stranezza, mentre la *debole* no.
- Poiché l'interazione forte deve conservare la stranezza ($0 + 0 \rightarrow S_\Lambda + S_K$), si assegna: $S = -1$ per Λ^0 e $S = +1$ per K^0 .

5.1.1 Mesoni strani

Sperimentalmente, erano stati osservati 4 mesoni strani, organizzati in due doppietti, in modo che i mesoni dello stesso doppietto avessero la medesima stranezza:

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}_{S=+1}, \quad \begin{pmatrix} K^- \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix}_{S=-1} \quad (5.1.6)$$

Queste 4 particelle hanno una massa di circa 490 MeV; i $K^\pm$ hanno una vita media di circa 10 ns, quindi decadono debolmente e lasciano tracce facilmente identificabili. Invece, i K^0 e i $\bar{K}^0$ hanno una vita media non definita poiché non sono autostati del decadimento.

Queste particelle hanno $J^P = 0^-$.

Il mesone K^+ ha anche $S = +1$ perché è prodotto sempre insieme a Λ^0 , tramite il processo:

$$\pi^+ + n \longrightarrow \Lambda^0 + K^+ \quad (5.1.7)$$

invece $\bar{K}^0$ ha stesse Q e B di K^0 ma ha diversa S ; per questo motivo non è autostato di coniugazione di carica. Gli autostati di $\mathcal{C}$ devono avere tutti i

numeri quantici additivi nulli. Quindi:

$$\mathcal{C} |K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle. \quad (5.1.8)$$

Dal processo:

$$\pi^+ + p \longrightarrow p + K^+ + \bar{K}^0 \quad (5.1.9)$$

vediamo i numeri quantici in tabella 5.2.

	π^+	$+p$	$\rightarrow p$	$+K^+$	$+\bar{K}^0$	
$Q :$	1	1	1	1	0	
$B :$	0	1	1	0	0	
$S :$	0	0	0	+1	-1	(conservata)

Tabella 5.2

Essendo un processo forte e conservando la stranezza si ha che $S(\bar{K}^0) = -1$. Quest'ultimo processo venne osservato storicamente più tardi poiché per verificare la condizione di soglia i pioni iniziali devono essere molto energetici.

5.1.2 Barioni strani

Facciamo una rassegna di alcuni barioni strani che sono stati osservati:

- Λ^0 : $S = -1$. $M \simeq 1100$ MeV, $\tau \simeq 10^2$ ps (decadimento debole). Ha decadimenti:

$$\Lambda \longrightarrow p + \pi^- \quad (5.1.10)$$

$$\Lambda \longrightarrow n + \pi^0. \quad (5.1.11)$$

Si ha $J^P = 1/2^+$.

- $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$: $S = -1$. $M \simeq 1200$ MeV. Ha decadimenti:

$$\Sigma^\pm \longrightarrow N + \pi \quad \tau \simeq 10^2 \text{ ps (decadimento debole)} \quad (5.1.12)$$

$$\Sigma^0 \longrightarrow \Lambda^0 + \gamma \quad \tau \simeq 10^{-19} \text{ s (decadimento elettromagnetico)}. \quad (5.1.13)$$

Si ha $J^P = 1/2^+$.

- Ξ^0, Ξ^- : $S = -2$. $M \simeq 1300$ MeV, $\tau \simeq 10^{-10}$ s (decadimento debole). Si ha $J^P = 1/2^+$.

- Ω^- : $S = -3$. $M \simeq 1700$ MeV, $\tau \simeq \text{ns}$ (decadimento debole). Si ha $J^P = 3/2^+$.

Alcune di queste risonanze vengono osservate creando fasci di mesoni K che vengono mandati su bersagli di nucleoni; in particolare $K^- + N$ dà risonanze, $K^+ + N$ no; quindi hanno spesso stranezza dello stesso segno di K^- , cioè $S < 0$.

5.2 La Relazione di Gell-Mann e Nishijima

Man mano che le nuove particelle vennero scoperte, vennero innanzitutto divise tra mesoni e barioni. Poi sono state organizzate in multipletti in maniera tale che vi appartenessero particelle con lo stesso J^P . Possiamo vedere alcuni esempi, calcolando Q , B , S e $\langle Q \rangle$, definita come:

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2}(B + S) \quad (5.2.1)$$

nella tabella 5.3.

	Q	$\langle Q \rangle$	B	S	$B + S$
π^+, π^-, π^0	$+1, -1, 0$	0	0	0	0
K^+, K^0	$+1, 0$	$1/2$	0	$+1$	$+1$
p, n	$+1, 0$	$1/2$	$+1$	0	1
Λ^0	0	0	$+1$	-1	0

Tabella 5.3

In base al numero di stati di carica che si osservano si assegna l'isospin. Sommando e sottraendo la terza componente di isospin (I_3) al valore medio della carica del multipletto si ricavano le cariche dei membri del multipletto. Quindi:

$$\frac{Q}{e} = I_3 + \frac{1}{2}(B + S) \quad (5.2.2)$$

in cui:

$$Y = B + S \quad (5.2.3)$$

è detta **ipercarica**. La relazione:

$$\frac{Q}{e} = \frac{1}{2}Y + I_3 \quad (5.2.4)$$

è la relazione di *Gell-Mann-Nishijima*.

Vediamo alcuni multipletti. Nello stesso multipletto abbiamo particelle con la stessa J^P .

5.3 Costruzione di multipletti mesonici e barionici

Partiamo dai **multipletti mesonici**: possiamo avere i mesoni scalari, per cui $J^P = 0^-$, vedi la figura 5.1a, ma possiamo anche avere i mesoni vettori per cui $J^P = 1^-$, raffigurati in figura 5.1b.

Per i mesoni, l'asse di I_3 (ovvero $Y = 0$) corrisponde a particelle con stranezza nulla ($S = 0$).

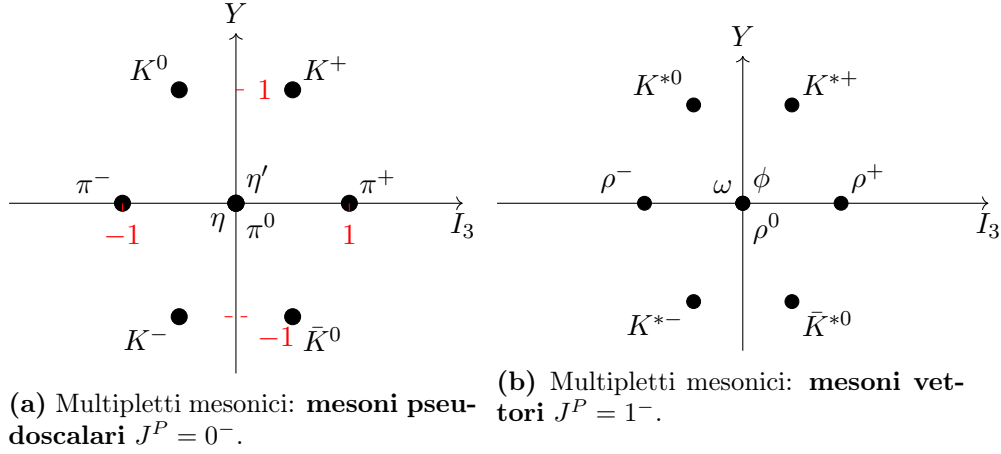


Figura 5.1: Multipletti mesonici.

Però possiamo anche analizzare i **multipletti barionici**, che sono organizzati in multipletti secondo lo stesso principio. Abbiamo un'ottetto barionico, per cui $J^P = 1/2^+$, raffigurati in figura 5.2a. Abbiamo anche il decupletto barionico, con $J^P = 3/2^+$, in figura 5.2b. Nei barioni, la riga $Y = 1$ corrisponde a particelle a stranezza nulla ($S = 0$).

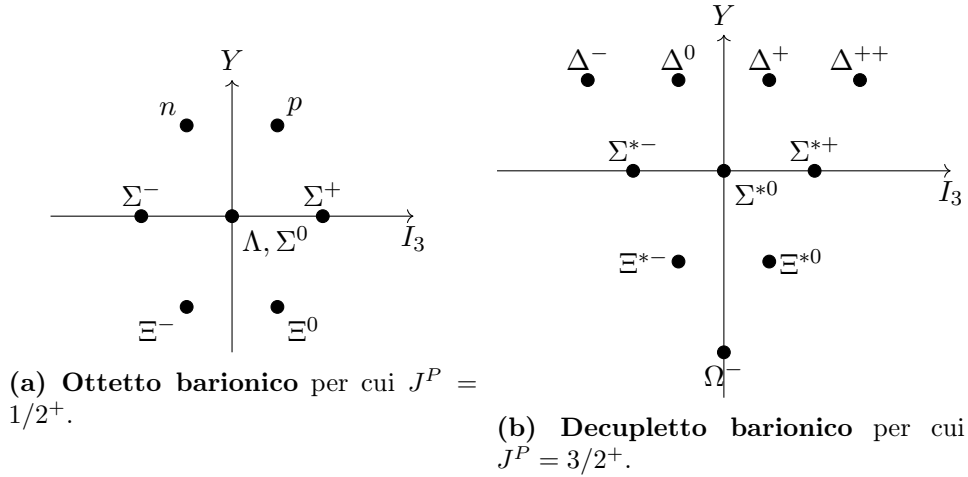


Figura 5.2: Multipletti barionici.

Nei multipletti abbiamo inserito particelle con lo stesso J^P , che sono quindi autostati degeneri di un'interazione che ha una proprietà di simmetria tale da dar luogo a due osservabili, ovvero Y e I_3 , che permettono di distinguerle. Abbiamo quindi una simmetria di $SU(3)$, anche se non è esatta.

5.4 Rappresentazione fondamentale, antifondamentale e i loro prodotti

La rappresentazione fondamentale di $SU(3)$ ha dimensione 3 e ha 8 generatori, di cui 2 diagonali che possiamo diagonalizzare contemporaneamente, e a cui associamo le quantità I_3 e Y . La base di autovettori comuni coincide con la base standard. Le matrici associate a I_3 e Y sono:

$$I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (5.4.1)$$

Definiamo gli autovettori (quark) e i relativi autovalori:

quark	u	d	s
autovettori	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
I_3	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Y	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
Q	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

in cui la carica elettrica Q è stata ricavata utilizzando la relazione di Gell-Mann Nishijima.

Possiamo rappresentare su un piano (I_3, Y) la rappresentazione fondamentale (tripletto fondamentale). Vedi il triangolo blu in figura 5.3. Però possiamo anche utilizzare i generatori della rappresentazione antifondamentale, in modo da ottenere gli anti-quark. Vedi il triangolo rosso in figura 5.3.

Visto come descrivere gli oggetti fondamentali, ovvero i quark, possiamo costruire gli adroni tramite prodotti di rappresentazioni. Infatti, nel Modello Standard gli adroni vengono costruiti combinando i quark (rappresentazione 3) e gli antiquark (rappresentazione $\bar{3}$) attraverso prodotti tensoriali. In particolare:

- **Mesoni:** $3 \times \bar{3}$, ovvero sono formati dalla coppia $q\bar{q}$.
- **Barioni:** $3 \times 3 \times 3$, ovvero sono formati da qqq (gli anti-barioni da $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$).

Ad esempio, per i mesoni, per visualizzare graficamente il prodotto $3 \times \bar{3}$, si costruisce il triangolo della rappresentazione $\bar{3}$ (antiquark) centrato su ogni elemento della base della rappresentazione 3 (quark).

Stiamo considerando le **rappresentazioni irriducibili** di $3 \times \bar{3}$; per irriducibile intendiamo che applicando ad un membro del multipletto una trasformazione del gruppo di simmetria, rimaniamo all'interno del multipletto stesso. Vedi la figura 5.4.

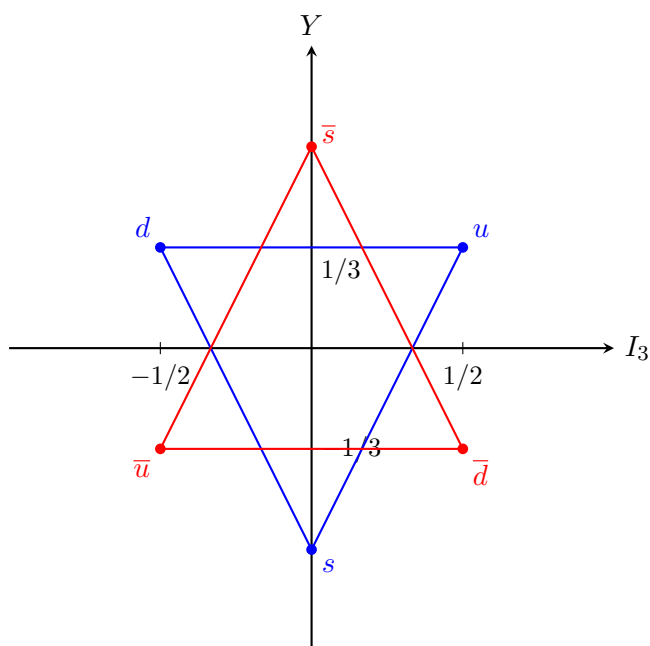


Figura 5.3: Tripletto fondamentale e antifondamentale sul piano (I_3, Y) .

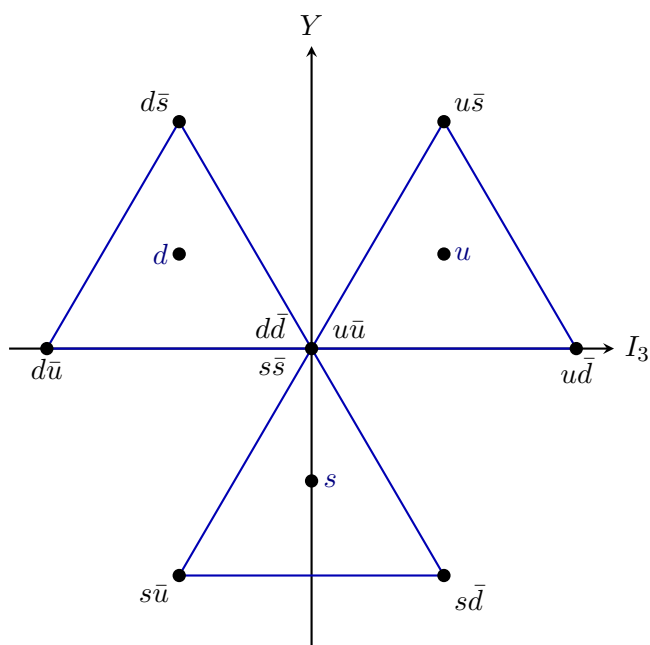


Figura 5.4: Costruzione Mesoni tramite il prodotto delle rappresentazioni $3 \times \bar{3}$.

Dalla scomposizione matematica si ottiene:

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 \quad (5.4.2)$$

ovvero un **ottetto** (gli stati esterni più due combinazioni centrali) e un **singoletto** (una combinazione centrale totalmente simmetrica).

5.5 Studio stati legati fermione-antifermione

Alla luce del modello a quark, i mesoni sono costituiti da un fermione e da un antifermione. Per dedurre le proprietà del sistema legato $|ff\rangle$ prendiamo come paradigma uno stato legato fermione-antifermione noto di cui conosciamo le proprietà: il **positronio**, cioè uno stato legato elettrone-positrone (e^+e^-), mantenuto unito dalla *forza elettromagnetica*, il cui potenziale è descritto dalla QED:

$$E_p(r) = -\frac{\alpha}{r}. \quad (5.5.1)$$

Nota che potrebbe essere complementare vedere l'Esercitazione numero 3 presente nel file di esercizi nella mia pagina personale. Durante tale esercitazione sono stati visti esercizi in parallelo a delle spiegazioni teoriche. Ho cercato di integrare le nozioni di teoria in questi appunti e lasciare solamente i due esercizi nella parte "linkata".

5.5.1 Stato legato e^-p Atomo di Idrogeno

Però, prima di tuffarci sul positronio, facciamo un passo indietro e consideriamo lo stato legato $e^- - p$, che già conosciamo, ovvero l'atomo di Idrogeno. Facciamo questo perché ci semplificherà leggermente la trattazione. Utilizziamo la *quantizzazione di Bohr* per descrivere un sistema a due corpi di questo tipo; introduciamo la massa ridotta m_r tale che:

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p} \quad (5.5.2)$$

ma se $m_p \approx 2000 m_e$, allora abbiamo che $m_r \approx m_e$. Dunque, scriviamo l'energia totale:

$$E_n = \frac{1}{2} m_r v^2 - \frac{\alpha}{r}. \quad (5.5.3)$$

Possiamo ipotizzare il momento angolare L quantizzato:

$$L = mvr = n\hbar = n \quad (5.5.4)$$

in unità naturali ($\hbar = 1$). Dall'uguaglianza tra forza centripeta e forza elettromagnetica si ha:

$$m_r \frac{v^2}{r} = \frac{\alpha}{r^2} \quad (5.5.5)$$

$$m_r v^2 = \frac{\alpha}{r} \quad (5.5.6)$$

$$mvr \cdot v = \alpha \quad (5.5.7)$$

$$nv = \alpha \quad (5.5.8)$$

$$\implies v_n = \frac{\alpha}{n}. \quad (5.5.9)$$

Sostituendo quest'ultima relazione in r abbiamo:

$$r_n = \frac{n}{mv_n} = \frac{n^2}{m\alpha} \quad (5.5.10)$$

e sostituendo in E :

$$E_n = -\frac{1}{2} m_r \frac{\alpha^2}{n^2}. \quad (5.5.11)$$

Notiamo che i raggi variano come n^2 , mentre le energie come n^{-2} . Nel modello di Bohr, n è il numero quantico principale (valori interi), mentre il numero quantico orbitale l va da 0 a $n - 1$.

Possiamo valutare numericamente alcuni termini. Ad esempio:

$$\frac{1}{2} m_r \alpha^2 = 0.5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{137^2} \approx \frac{1}{4} \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^4} \text{ eV} \approx 13.6 \text{ eV} \quad (5.5.12)$$

che è l'energia di Rydberg, e per cui l'energia è:

$$E_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}. \quad (5.5.13)$$

Possiamo anche valutare il raggio di Bohr:

$$r_0 = \frac{1}{m_e \alpha} = \frac{\hbar c}{m_e c^2 \alpha} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{0.5 \text{ MeV}} \cdot 137 \approx 0.53 \cdot 10^{-10} \text{ m}. \quad (5.5.14)$$

5.5.2 Il positronio

Alla luce di quanto imparato per l'atomo di Idrogeno, possiamo vedere come trattare lo stato legato e^+e^- (positronio), per cui facciamo le stesse considerazioni, ma cambiamo la *massa ridotta*, che diventa:

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_e} = \frac{2}{m_e} \implies m_r = \frac{1}{2} m_e. \quad (5.5.15)$$

Dunque, per il positronio le costanti vanno dimezzate rispetto all'idrogeno a causa della massa ridotta (5.5.15):

$$E_n = -\frac{6.8 \text{ eV}}{n^2} \quad (5.5.16)$$

in cui anche in questo caso n assume valori interi, mentre l va da 0 a $n - 1$. La struttura dei livelli energetici è raffigurata in figura 5.5.

Questi risultati non riescono a descrivere appieno quanto si osserva sperimentalmente a causa del fatto che abbiamo utilizzato una quantizzazione "rozza". Dobbiamo tenere conto di due correzioni (dobbiamo considerare le correzioni di struttura fine) sull'energia:

- *Accoppiamento spin-orbita*: $\Delta E \propto \vec{L} \cdot \vec{S}$
- *Accoppiamento tra spin*: $\Delta E \propto \vec{S}_+ \cdot \vec{S}_-$ (interazione iperfine)

Lavoriamo solo con lo **stato fondamentale** ($n = 1$), dunque $l = 0$, e per cui trascuriamo la correzione spin-orbita. La correzione spin-spin tiene conto dell'interazione tra i momenti magnetici:

$$\vec{\mu}_- = g \frac{(-e)}{2m_e} \vec{S}_+, \quad \vec{\mu}_+ = g \frac{e}{2m_e} \vec{S}_-. \quad (5.5.17)$$

In questo caso

$$\Delta E \propto \langle \vec{\mu}_+ \cdot \vec{\mu}_- \rangle \quad (5.5.18)$$

quindi:

$$\Delta E = \frac{k\alpha}{m_e^2} \langle \vec{S}_+ \cdot \vec{S}_- \rangle \cdot \left(\frac{1}{r_1^3} \right) \quad (5.5.19)$$

in cui $1/r_1^3$ è il fattore di sovrapposizione delle funzioni d'onda. Sapendo che $r_1 = 2/(m_e \alpha)$, otteniamo:

$$\Delta E = \frac{1}{3} \alpha^4 m_e \langle \vec{S}_+ \cdot \vec{S}_- \rangle. \quad (5.5.20)$$

Osservazioni. Notiamo che $\Delta E \propto \alpha^4$ mentre $E \propto \alpha^2$. Inoltre, questa correzione per l'atomo di H contiene un ulteriore fattore $m_e/m_p \approx 1/2000$, quindi presenta una forte soppressione rispetto al positronio.

Valutiamo $\langle \vec{S}_+ \cdot \vec{S}_- \rangle$. Nel positronio lo spin totale $\vec{S} = \vec{S}_+ + \vec{S}_-$ può assumere valori 0 (singoletto) o 1 (tripletto), e in tali casi otteniamo correzioni differenti. Abbiamo dunque la distinzione tra lo stato di parapositronio ($S = 0$) e ortopositronio ($S = 1$). Facendo coincidere i valori medi con gli autovalori si ha:

$$\vec{S}^2 = \vec{S}_+^2 + \vec{S}_-^2 + 2\vec{S}_+ \cdot \vec{S}_- \quad (5.5.21)$$

$$\Rightarrow S(S+1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + 2\langle \vec{S}_+ \cdot \vec{S}_- \rangle. \quad (5.5.22)$$

Chiaramente se $S = 0$ o $S = 1$ otteniamo una correzione diversa. Risulta:

$$\Delta E_{ss}(S = 1) - \Delta E_{ss}(S = 0) = \frac{1}{3}\alpha^4 m_e \quad (5.5.23)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4 \cdot 10^2} \cdot 5 \cdot 10^5 \text{ eV} \quad (5.5.24)$$

$$\approx \frac{5}{12} \cdot 10^{-3} \text{ eV}. \quad (5.5.25)$$

In realtà, facendo il conto preciso, la differenza risulta di 1 meV.

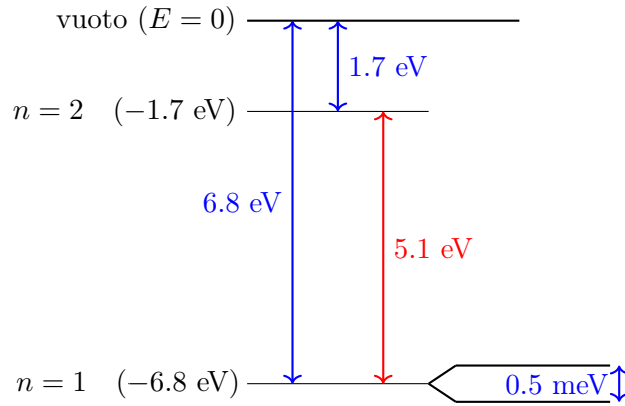


Figura 5.5: Livelli energetici positronio.

L'effetto che risulta è che l'accoppiamento tra spin splitta il livello fondamentale $n = 1$ in due livelli distinti: l'**ortopositronio** (3S_1) e il **parapositronio** (1S_0). Nella tabella 5.4 e nella figura 5.5. È possibile indicare gli stati del positronio con la notazione spettroscopica $n^{2s+1}L_J$.

nome	notazione	n	l	s	J	P	C	J^{PC}
ortopositronio	1^1S_0	1	0	1	1	-1	-1	1^{--}
parapositronio	1^1S_1	1	0	0	0	-1	+1	0^{-+}

Tabella 5.4: Proprietà riassuntive positronio.

Inoltre, per quanto riguarda la parità e coniugazione di carica (per quanto imparato nel capitolo §3 delle simmetrie) si ha che:

$$P |f\bar{f}\rangle = (-1)^{l+1} |f\bar{f}\rangle = - |f\bar{f}\rangle \quad (5.5.26)$$

$$C |f\bar{f}\rangle = (-1)^{l+s} |f\bar{f}\rangle = (-1)^s |f\bar{f}\rangle. \quad (5.5.27)$$

Sperimentalmente, distinguiamo i due stati in base ai loro prodotti del decadimento. Essendo uno stato e^+/e^- , ci aspettiamo un processo di annichilazione in un certo numero di fotoni: $e^+e^- \rightarrow n\gamma$.

Per capire quanto vale n , numero di fotoni, utilizziamo la conservazione di C , visto che il positronio decade elettromagneticamente (in cui sappiamo essere conservata $\mathbb{C}$). Abbiamo:

$$^3S_1 \longrightarrow n\gamma \quad (5.5.28)$$

$$C : -1 = (-1)^n \implies n \text{ dispari} \quad (5.5.29)$$

e in modo analogo:

$$^1S_0 \longrightarrow n\gamma \quad (5.5.30)$$

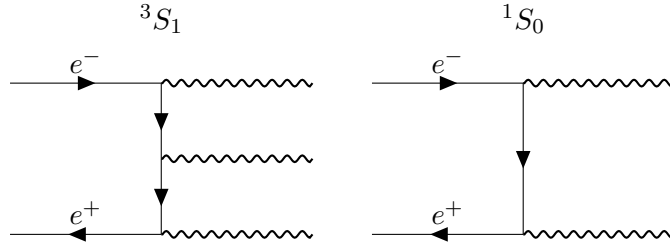
$$C : 1 = (-1)^n \implies n \text{ pari}. \quad (5.5.31)$$

Imponendo le corrette condizioni cinematiche, si ricava che:

$$^3S_1 \rightarrow 3\gamma \quad (5.5.32)$$

$$^1S_0 \rightarrow 2\gamma \quad (5.5.33)$$

rappresentati nei diagrammi di Feynman:



ogni vertice ha peso $\sqrt{\alpha}$, e dunque $\Gamma(^3S_1) \propto \alpha^3$ e $\Gamma(^1S_0) \propto \alpha^2$. Ci aspettiamo che:

$$\frac{\tau(^3S_1)}{\tau(^1S_0)} = \frac{\Gamma(^1S_0)}{\Gamma(^3S_1)} \propto \frac{1}{\alpha} \quad (5.5.34)$$

e in effetti si misura $\tau(^3S_1) \sim 0.1 \mu\text{s}$ e $\tau(^1S_0) \sim 0.1 \text{ ns}$.

Quindi i due livelli hanno una segnatura sperimentale ben definita a seconda del numero di fotoni e della vita media.

Ora analizziamo lo schema tipico dell'esperimento, raffigurato in figura 5.6.

In una camera contenente gas è presente un campione di sodio 22 (^{22}Na), che decade per decadimento β^+ :

$$^{22}\text{Na} \longrightarrow ^{22}\text{Ne}^* + e^+ + \nu_e \quad (5.5.35)$$

in cui il Neon (Ne) risultante è in uno stato eccitato e decade nuovamente:

$$^{22}\text{Ne}^* \longrightarrow ^{22}\text{Ne} + \gamma. \quad (5.5.36)$$

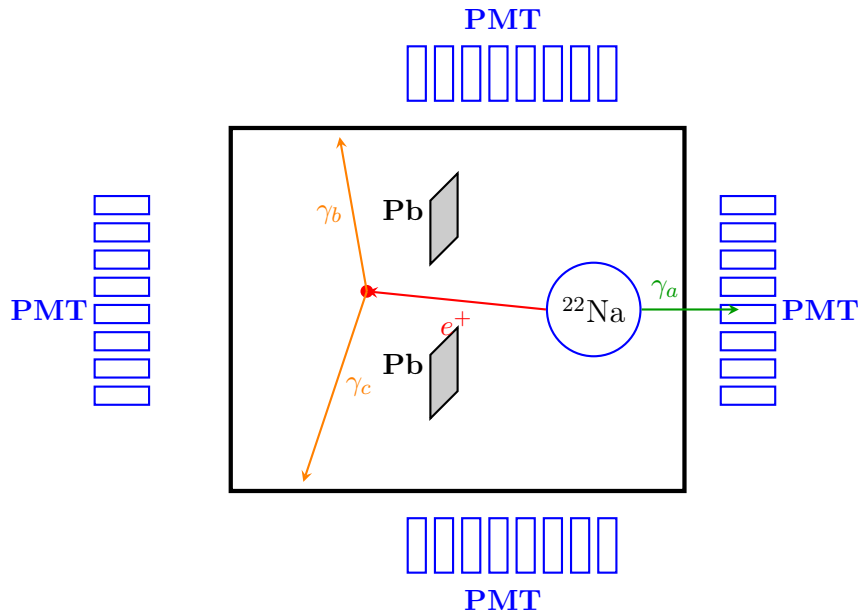


Figura 5.6: Apparato sperimentale per rivelare il positronio.

Sperimentalmente, ci accorgiamo che un nucleo di Na è decaduto se rileviamo un fotone dal decadimento γ del Ne^* , il quale ha una vita media $\tau \sim ps$.

Ciò che succede con il decadimento del Na è che l' e^+ emesso si combina con un e^- del gas e forma il *positronio*, che poi decade in fotoni. A seconda della vita media e del numero di fotoni nello stato finale, possiamo distinguere i due stati (orto e para).

All'interno dell'apparato il **piombo** (Pb) serve a separare i γ emessi dal decadimento β^+ e i γ emessi dall'annichilazione del positronio.

5.5.3 Il Charmonio e la verifica sperimentale del quark c

Il *charmonio* è uno stato legato costituito da un quark c e da un antiquark $\bar{c}$ ($c\bar{c}$). In realtà non è l'unico stato legato formato da una coppia di quark, ma ci si riferisce a *quarkonia* per indicare tutti gli stati legati, non relativistici, formati da quark-antiquark.

Prima di parlare delle sue caratteristiche vediamo prima com'è stata verificata l'esistenza del quark c .

L'esistenza del quark c (e quindi dello stato legato $c\bar{c}$) era attesa dal *meccanismo GIM*. Storicamente, all'inizio degli anni '70 erano noti i quark u, d, s , utilizzati nel modello di Gell-Mann per formare gli stati legati (mesoni e barioni), ma l'esistenza *solo* di questi tre flavour nascondeva un'asimmetria per quanto riguarda le famiglie leptoniche e adroniche. Inoltre, sperimentalmente si osservavano anche dei decadimenti deboli, di mixing di flavour,

soppressi che potevano essere spiegati solamente introducendo questo nuovo quark più pesante (rispetto i primi tre), ma parleremo di questo nell'ultimo capitolo. Per simmetria anche il c è un fermione di spin $1/2$.

Era stato ipotizzato, basandosi su alcuni esperimenti con $E(\text{beams}) \gg 10$ GeV (già abbastanza energetici), che il quark c avesse una massa dell'ordine del GeV e carica $+2/3e$. Una massa $m_c \gtrsim 1$ GeV costituiva un problema; essa è molto maggiore della scala di interazione in gioco, dunque, stati legati formati da $c\bar{c}$ dovevano dare un comportamento simile a quello del positronio, cioè essere in movimento molto lento tra loro, dare luogo a livelli discreti e ad uno spettro di risonanze. Per questo, non ci si aspettava solamente uno stato legato, bensì uno spettro, come quello riportato in tabella 5.5.

Ovviamente la predizione teorica non bastava e infatti lo stato legato $c\bar{c}$, il charmonio, venne osservato contemporaneamente nel 1974 tramite due processi diversi: in una risonanza in formazione e in una in produzione.

Scoperta particella J. Nel Novembre 1974, con l'esperimento di Ting a BNL si osservò una risonanza, in particolare lo stato 3S_1 (vedi la tabella 5.5) in produzione. In particolare si svolse un processo di Drell-Yang (risonanza in produzione). Il processo considerato è il seguente:

$$p + Be \longrightarrow R(e^+ + e^-) + X \quad (5.5.37)$$

in cui:

$$R \longrightarrow e^+ + e^- \quad (5.5.38)$$

raffigurato tramite il seguente diagramma di Feynman:

$$(5.5.39)$$

Vedi l'apparato sperimentale nella figura 5.7. Ciò che si fece nella pratica fu' mandare un fascio di protoni a 30 GeV di energia su un bersaglio di Berillio (Be). La collisione forma molte particelle e tra di esse anche una risonanza, la quale decade nella coppia e^+/e^- . L'idea di Ting era quella di sfruttare il fatto che la coppia e^+/e^- fossero prodotte al limite dell'energia disponibile, per cui gli X avessero energia bassissima e quasi tutta nel charmonio, per cui quello che si vede è sostanzialmente un decadimento a due corpi nel centro di massa.

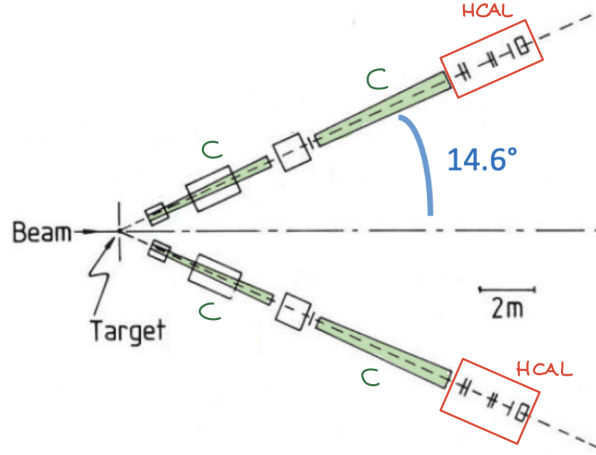


Figura 5.7: Apparato sperimentale esperimento di Ting.

Una volta identificati l'elettrone e il positrone, si opera una misura di quadrimpulso e se ne fa il quadrato della somma:

$$M^2 = (p_{e^+} + p_{e^-})^2. \quad (5.5.40)$$

Dopodiché se ne costruisce una distribuzione e si nota un accumulo di eventi per un certo valore dell'energia nel centro di massa.

Per prima cosa bisogna selezionare le coppie e^+/e^- e distinguerle da adroni, come ad esempio i pioni. Per fare ciò si utilizza un *rivelatore Cerenkov*, che individua particelle che si muovono molto rapidamente nel mezzo; infatti, a parità di impulso, poiché $m_e \ll m_\pi$, gli elettroni sono molto più veloci. Dopo il Cerenkov si usa anche un *calorimetro* tale che, quando l'elettrone lo attraversa, genera uno *sciame elettromagnetico*.

Notiamo che:

$$m_{ee}^2 = (p_+ + p_-)^2 \quad (5.5.41)$$

$$= m_e^2 + m_e^2 + 2(E_+ E_- - \vec{p}_+ \cdot \vec{p}_-) \quad (5.5.42)$$

in cui nel prodotto scalare c'è l'angolo compreso tra gli impulsi. L'apparato era costruito in modo tale che nel sistema di riferimento del CM e^+ ed e^- vengano emessi a 90° rispetto alla direzione del fascio di protoni. Questo metodo di selezione è noto come *metodo dell'accettanza verticale*. Come nella figura 5.8. Nota che nel processo considerato possiamo fare questa cosa poiché negli altri processi succede che si formano molto adroni nello stato finale, dunque mai back-to-back.

Assunto questo setup sperimentale, cioè che si vuole prendere gli elettroni ortogonali al fascio nel c.m., e preso θ l'angolo tra $\vec{p}_e$ e la direzione del fascio

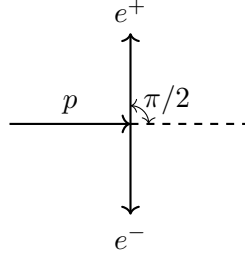


Figura 5.8

di protoni nel sistema di riferimento del laboratorio; allora vale:

$$\tan \theta = \frac{p_T}{p_Z} = \frac{\sin \theta^*}{\gamma_{cm}(\cos \theta^* + \beta_{cm})} \quad (5.5.43)$$

e dato che $\theta^* = \pi/2$, segue:

$$\tan \theta = \frac{1}{\gamma_{cm}\beta_{cm}}. \quad (5.5.44)$$

Dato il processo considerato, e assunti e^+e^- emessi in direzione generica, θ , possiamo fare le trasformazioni di Lorentz:

$$p_{z,p}^* = \gamma^*(p_{z,p} - \beta^* E_p) \quad (5.5.45)$$

$$p_{z,N}^* = \gamma^*(p_{z,N} - \beta^* E_N) \quad (5.5.46)$$

$$= -\gamma^*\beta^* m_N \quad (5.5.47)$$

dove abbiamo usato il fatto che nel sistema di riferimento del laboratorio abbiamo $p_{z,N} = 0$ e $E_N = m_N$. Possiamo utilizzare la conservazione del quadrimpulso, per cui $p_{z,p}^* = -p_{z,N}^*$, così abbiamo:

$$\gamma^*(p_{z,p} - \beta^* E_p) = \gamma^*\beta^* m_N \quad (5.5.48)$$

che ci porta a:

$$\beta^* = \frac{E_p}{E_p + m_N} = \frac{30}{31} \simeq 0.97 \quad (5.5.49)$$

nello stato iniziale e in cui abbiamo approssimato $p_{z,p} \sim E_p$ essendo a 30 GeV. Per lo stato finale abbiamo:

$$p_{z,e^-}^* = \gamma^*(p_{z,e^-} - \beta^* E_{e^-}) \quad (5.5.50)$$

che possiamo imporre $p_{z,e^-} = 0$ prendendo solamente e^- che escono a $\pi/2$ rispetto al fascio; così troviamo:

$$\cos \theta = \frac{p_{z,e^-}}{|\vec{p}_{e^-}|} = \frac{p_{z,e^-}}{E_{e^-}} = \beta^* \quad (5.5.51)$$

dunque:

$$\theta = 14.6^\circ. \quad (5.5.52)$$

Questo calcolo fissa l'apertura tra i bracci dello spettrometro nel sistema di riferimento del laboratorio.

Però si deve misurare l'impulso. Una difficoltà sperimentale era costituita dal fatto che e^+ ed e^- venissero emessi a 14.5° rispetto alla direzione di riferimento, ma la misura di p tipicamente si basava su una deflessione. Perciò, la deflessione appare nel piano verticale. Dalle misure segue che:

$$m_{ee} = 3.1 \text{ GeV}. \quad (5.5.53)$$

Sembra tutto così bello, ma in realtà questo esperimento non era l'ideale. Il problema di questo esperimento era che fu' un processo EM, che deve competere con processi forti, dunque è molto soppresso. In più, nello stato iniziale abbiamo un $\bar{q}$, che non è presente né nel p che nel Be , ma solamente all'interno del mare di quark. Per cui c'è un'altro fattore soppressivo.

Scoperta della particella ψ . Nel 1974, in contemporanea a Ting, si svolse a SPEAR, SLAC l'esperimento *Mark I* da parte di Richter e collaboratori. Questo esperimento ricercava, sfruttando un collisore e^+e^- , delle possibili risonanze in formazioni; dunque un esperimento completamente differente da quello di Ting. Il processo sfruttato è il seguente:

$$e^+ + e^- \longrightarrow R \longrightarrow \text{adroni}, \mu^+\mu^-, e^+e^-. \quad (5.5.54)$$

Variando $\sqrt{s}$, si nota l'esistenza di un valore di $\sqrt{s}$ critico per cui la sezione d'urto σ aumenta di un fattore 100 (considerando qui la σ totale).

In questo tipo di esperimento, nel centro di massa, si aveva già tutto il necessario. Anche il rivelatore è complementare differente rispetto l'esperimento di Ting. Infatti, avendo una collisione nel centro di massa, dunque con fasci di uguale energia, si deve mettere il rivelatore tutto intorno al punto di interazione e coprire tutto l'angolo solido. Perciò, attorno all'asse dei fasci vi è una serie di rivelatori in grado di identificare lo stato finale in cui decade la risonanza (adroni, μ o e).

Visto che tipicamente in un collider si riesce sempre a trovare la luminosità, $\mathcal{L}$, e poiché conosciamo la sua relazione con la sezione d'urto, solitamente si misurano i conteggi N e poi si ricava la sezione d'urto σ da:

$$\sigma = \frac{\dot{N}}{\epsilon \mathcal{L}} \quad (5.5.55)$$

in cui ϵ è l'efficienza (che può essere posta ad 1 se l'esperimento è ideale). Qui la risonanza è osservata a $\sqrt{s} = 3.1 \text{ GeV}$.

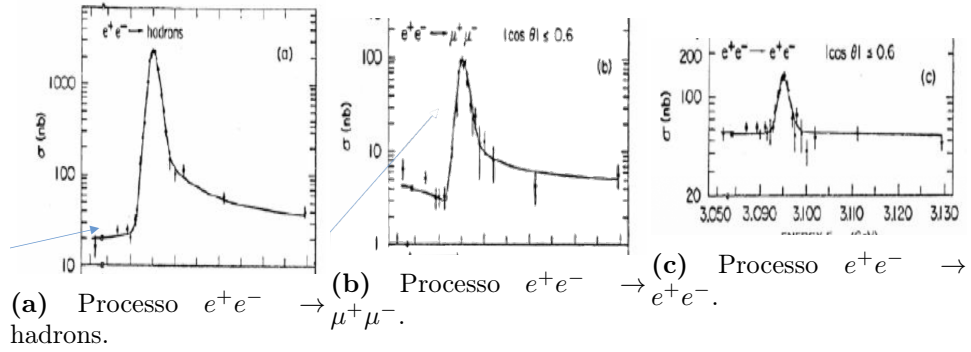


Figura 5.9

Sperimentalmente si costruiscono i plot $\sigma(E)$. Puoi vedere nella figura 5.9.

In particolare si ha:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow f\bar{f}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} Q_f^2 \quad (5.5.56)$$

il cui picco non è molto stretto, come succedeva per l'esperimento di Ting, poiché anche quando non siamo esattamente alla risonanza ci sono altri diagrammi, con altri stati finali, che fanno interferenza.

Si trova anche:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{2J+1}{(2S_1+1)(2S_2+1)} \frac{\pi}{p_{cm}^2} \frac{\Gamma_{in} \times \Gamma_{out}}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma_{tot}^2}{4}} \quad (5.5.57)$$

e sperimentalmente si trova $\sigma_{peak} \sim 100$ nb. Però, svolgendo l'esercizio 2 del foglio 3, si può trovare utilizzando (5.5.57) al picco $\sigma_{peak} \sim 5.4 \mu\text{b}$. Questa discrepanza non è solo colpa delle interferenze, come per il caso $e^+e^- \rightarrow$ adroni, ma soprattutto della bassa risoluzione dell'esperimento stesso (~ 5 MeV) e anche del fatto che tutto gli eventi con $|\cos \theta| > 0.6$ venissero scartati. Ciò comporta che la Γ sia molto ridotta:

$$\frac{\sigma_{abs}}{\sigma_{EW}} \approx \frac{\Gamma}{R} \quad (5.5.58)$$

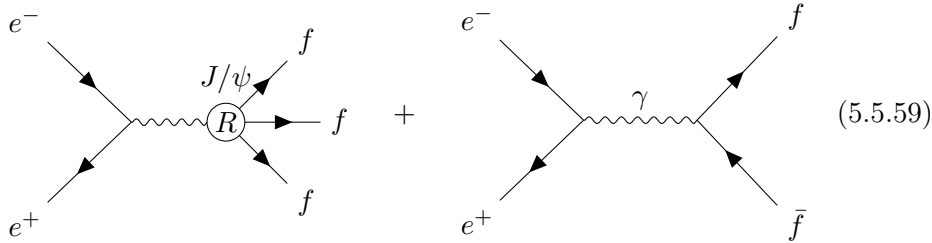
in cui R è la risoluzione, $R \sim 5$ MeV, e risulta $\Gamma \sim 100$ keV.

Arrivati fino a questo punto si potrebbero analizzare i numeri quantici e la larghezza della risonanza. Da entrambi gli esperimenti (Ting e Richter) si ricava $\sqrt{s} = 3.1$ GeV e sappiamo bene che per ricavare la vita media τ ci serve la larghezza Γ della curva di *Breit-Wigner*. Il problema è che in entrambi i casi, Γ è dominata da incertezze sperimentali. Nel primo caso abbiamo incertezze sugli impulsi, mentre nel secondo caso sull'energia dei fasci.

Infatti, considerando l'esperimento che la vede come *risonanza in formazione*: in questo caso c'è incertezza su $\sqrt{s}$, quindi su dove posizionare il punto sperimentale lungo l'asse x del grafico $(\sigma, \sqrt{s})$. Però facendo il grafico sperimentale per punti di $\sigma(\sqrt{s})$, si vede che *l'area sottesa a tale curva è la stessa* indipendentemente dal posizionamento errato dei punti lungo l'asse x .

Dunque, per entrambi, la Γ che tanto vorremmo è più piccola della risoluzione dell'esperimento e per questo è nascosta. Quindi, dai due esperimenti non si riuscì a misurare le due ampiezze a mezza altezza.

Ciò che possiamo fare è confrontare l'area valutata tramite dati sperimentali con l'area teorica ottenuta integrando la Breit-Wigner. Nota che è sostanzialmente la seconda parte dell'esercizio 2 del foglio 3. Utilizziamo l'espressione (5.5.57). Innanzitutto, si nota che i valori sperimentali di σ coincidono con le predizioni teoriche ricavate dalla teoria dei campi se teniamo conto di due diagrammi e della loro *interferenza*:



$$(5.5.59)$$

cioè teniamo conto anche del processo mediato da un fotone virtuale. Affinché si possa considerare correttamente l'interferenza tra i diagrammi, la J/ψ deve avere gli stessi numeri quantici di γ ; in particolare devono avere lo stesso J^{PC} . Quindi:

$$J = 1, \quad P = -1, \quad C = -1. \quad (5.5.60)$$

Per quanto riguarda Γ_{in} e Γ_{out} consideriamo solo processi in cui la risonanza sia formata dall'annichilazione tra e^+ ed e^- ed in cui R decade in e^+/e^- ; per questo $\Gamma_{in} = \Gamma_{out} = \Gamma_{e^+e^-}$. Quindi:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma_{ee}^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} \quad (5.5.61)$$

che possiamo integrare:

$$\int \sigma dE = \frac{4\pi}{k^2} \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{1}{\frac{(E - E_R)^2}{(\Gamma/2)^2} + 1} \quad (5.5.62)$$

introduciamo la variabile:

$$\tan x = \frac{E - E_R}{\Gamma/2} \implies dE = \frac{\Gamma}{2} \frac{dx}{\tan^2 x + 1} \quad (5.5.63)$$

e se $E \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \pi/2$, ma anche se $E \rightarrow 0$, dato che $E_R \gg \Gamma$, è lecito approssimare x a $-\pi/2$. Quindi abbiamo:

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} dx \frac{\Gamma}{2} = \frac{1}{2} \Gamma \pi \quad (5.5.64)$$

che ci porta a:

$$\int_0^{+\infty} dE \sigma(E) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{3}{4} \left(\frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma} \right)^2 \cdot \frac{\Gamma \pi}{2}. \quad (5.5.65)$$

Sperimentalmente si ricava che l'area sottesa vale $900 \text{ MeV} \cdot \text{nbarn}$. Anche il rapporto Γ_{ee}/Γ si determina sperimentalmente e vale 7%.

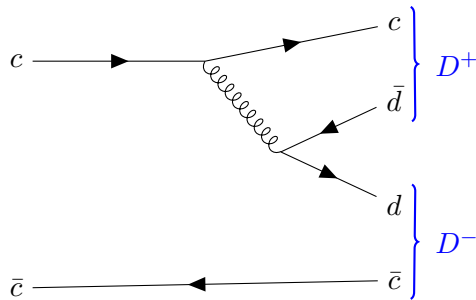
Ricapitoliamo un attimo prima di continuare. Conosciamo la formula standard per calcolare la larghezza di decadimento:

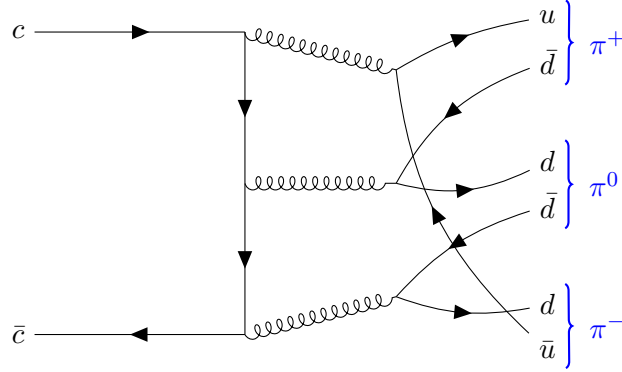
$$\Gamma(\psi \rightarrow l^+ l^-) \propto \alpha^2 \frac{(Q_l)^2 (Q_q)^2}{m_\psi^2} \quad (5.5.66)$$

in cui m_ψ^2 sarebbe s^2 . Sappiamo anche che le larghezze di decadimento e i branching ratio sono legati come:

$$B_{ll} = \frac{\Gamma_{ll}}{\Gamma_{tot}} \quad (5.5.67)$$

e notiamo che B_{ll} (leptone-leptone) è dato solamente dall'esperimento della ψ . Però ci potremmo chiedere, essendo $Q_l, Q_q = 1$ nella maggior parte dei casi, quindi $\Gamma \propto \alpha^2/m_\psi^2$, e sapendo che α^2 è molto piccola (rispetto a decadimenti forti), come mai riusciamo a rivelare una larghezza di decadimento finita, ovvero $\Gamma \sim 7\%$, che dopotutto non è così piccola. Il motivo è che per la ψ i decadimenti forti, che quindi dominerebbero, sono dati da:





In cui, nel secondo diagramma, possiamo notare che il numero minimo di gluoni che dobbiamo avere è effettivamente 3. Infatti, se i gluoni fossero $n_g = 1$ avremmo un processo nel centro di massa ($c\bar{c}$) e il π finale violerebbe la conservazione dell'energia. Se $n_g = 2$ allora avremmo $C(c\bar{c}) = +1$ e violeremmo CP. Dunque, concludiamo che $n_g = 3$ affinché tutto sia consistente; però è proprio questo grande numero di g (e quindi π) che sopprime il diagramma, essendo di ordine 6, favorendo quello EW.

Continuiamo i conti da (5.5.65), che avevamo ottenuto prima di fare la pausa. Possiamo calcolare il k associato a p^* nel sistema di riferimento del centro di massa. Abbiamo:

$$p^* = \frac{[s - (m_e^2 + m_e^2)^2]^{1/2}}{2\sqrt{s}} \simeq \frac{m_R}{2} \quad (5.5.68)$$

ma $m_R^2 \gg m_e^2$, quindi:

$$p^* = \frac{m_R}{2} \implies cp^* = \frac{1}{2}m_Rc^2 \quad (5.5.69)$$

e $\hbar k = p^*$. Dunque troviamo:

$$\implies k = \frac{p^*c}{\hbar c} = \frac{mc^2/2}{\hbar c} \simeq \frac{1500 \text{ MeV}}{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}} \simeq 7 \text{ fm}^{-1}. \quad (5.5.70)$$

Così possiamo vedere che l'integrale di σ vale:

$$4\pi \cdot \frac{1}{7^2} \cdot 10^2 \cdot 10^3 \text{ nb} \cdot \frac{3}{4} \cdot 7^2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{\Gamma\pi}{2} = 900 \text{ MeV} \cdot \text{nbarn} \quad (5.5.71)$$

e dunque vediamo:

$$\frac{3}{2}\pi^2 \cdot 10^3 \text{ nbarn} \cdot \Gamma_{ee} = 9 \cdot 10^2 \text{ MeV} \cdot \text{nb} \implies \Gamma \approx 60 \text{ keV}. \quad (5.5.72)$$

Oggi le stime più precise, come già detto, pongono $\Gamma \sim 100 \text{ keV}$. Dunque, abbiamo una risonanza più stretta rispetto alla ρ , che ha massa 770 MeV,

$\Gamma = 100$ MeV e gli altri numeri quantici simili/uguali alla J/ψ . Poiché la J/ψ ha massa e vita media molto diverse da quelle della ρ , allora è lecito ipotizzare che sia costituita da un nuovo tipo di quark.

Inoltre, un'altra "stranezza" riscontrata era che J/ψ non decadeva spesso in adroni.

Oltre il livello 3S_1 si volevano cercare anche gli altri stati di charmonio, che avevano la difficoltà di non essere producibili da e^+e^- (come abbiamo visto nell'esercizio 1 del foglio 3). Prima di parlare di esperimenti ricaviamo anche qua i vari livelli possibili per il $c\bar{c}$.

Abbiamo già detto che per analizzare i livelli energetici del charmonio, si fa un'analisi spettroscopica. I possibili stati sono:

- $n = 1: l = 0 \implies J = 0$ (1^1S_0) o $J = 1$ (1^3S_1).
- $n = 2$ ($s = 0, 1$):
 - $l = 0 \implies J = 0, 1 \implies 2^1S_0, 2^3S_1$.
 - $l = 1 \implies$ se $s = 0 \implies J = 1$ (2^1P_1).
 - $l = 1 \implies$ se $s = 1 \implies J = 0, 1, 2 \implies 2^3P_0, 2^3P_1, 2^3P_2$.

Tramite la notazione spettroscopica, organizziamo i vari stati del charmonio e gli assegniamo i valori di J^{PC} . Vedi la tabella 5.5.

l	s	J	indice spettroscopico	J^{PC}	particella
0	0	0	1S_0	0^{-+}	η_c
0	1	1	3S_1	1^{--}	J/ψ
1	0	1	1P_1	1^{+-}	h_c
1	1	0,1,2	3P_1	$(0, 1, 2)^{++}$	$\chi_{c,\{0,1,2\}}$
2	0	2	1D_2	2^{-+}	
2	1	1,2,3	$^3D_{1,2,3}$	$(1, 2, 3)^{--}$	

Tabella 5.5: Livelli energetici charmonio.

Come detto, tramite i collisori e^+e^- siamo in grado di produrre direttamente solo gli stati con lo stesso J^{PC} del fotone virtuale (γ), quindi lo stato 3S_1 , ovvero J/ψ . Per osservare gli altri stati si sfruttano le *transizioni radiative* che producono fotoni monocromatici (1 o 2γ).

Intorno gli anni 80 si costruì l'*esperimento di Crystal Ball*, che era un'esperimento sempre a e^+e^- , ma rispetto i precedenti collider era ad energia più alta, così da poter ricercare lo stato 3D_1 . L'idea alla base era che una volta prodotto 3D_1 esso decadde in stati ad energia inferiore, producendo γ .¹ Dunque, a differenza di Ting e Richter, non si osservava il decadimento

¹Notiamo che, correttamente, ci si aspettava sempre particelle neutre.

del charmonio in particelle leggere, ma si ricercavano le transizioni spettroscopiche tra i vari livelli energetici. Infatti, partendo dal livello D ci sono molti decadimenti a cascata.²

Da un punto di vista pratico, sperimentalmente, nel collider si inserisce una sfera di cristallo (rivelatore a cristalli) intorno al punto di collisione che permette di misurare l'energia dei fotoni emessi e si ricava così lo *spettro dei fotoni*, raffigurato in figura 5.10.

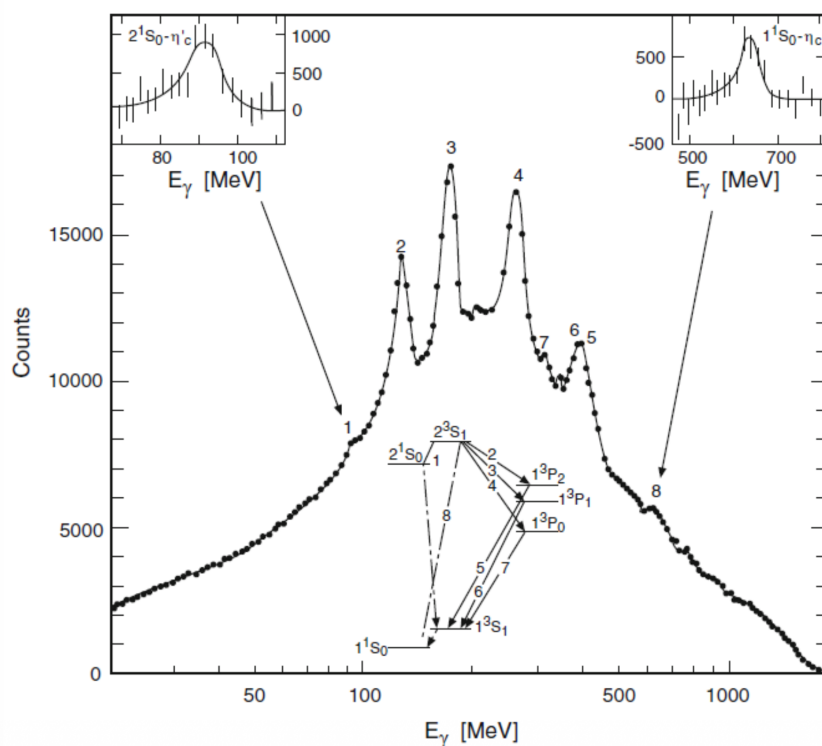


Figura 5.10: Spettro dei fotoni emessi nell'esperimento Crystal Ball.

Dal fit dei dati sperimentali 5.10, che si riesce a fare con delle *funzioni di Crystal Ball* (gaussiane con delle code a sinistra), si riescono a ricavare i vari picchi e a ricostruire tutto lo spettro energetico del charmonio, riportato nella stessa figura.

²La cosa comoda di questo procedimento, essendo in presenza solo di decadimenti a due corpi successivi, è che nota la massa dello stato iniziale, o finale, e poiché il γ esce ad energia fissa (presi due stati di un decadimento), allora possiamo ricostruire tutte le masse degli stati intermedi. Nell'esperimento di Crystal Ball la massa che si conosceva era la J/ψ e da essa si sono ricavate tutte le altre.

Questo procedimento è lo stesso che nel corso di *Introduzione alla fisica nucleare e subnucleare* è stato seguito per ricavare la massa del Torio.

5.5.4 Confronto Positronio e Charmonio

Vennè naturale, una volta ottenuto lo spettro del charmonio, confrontarlo con quello del positronio. In particolare si guardano i due spettri in figura 5.11. Notiamo che nella figura ai livelli del charmionio non viene sottratta la massa del $c\bar{c}$, mentre per il positronio è presente solamente l'energia di legame (dunque senza la massa del e^+e^-).

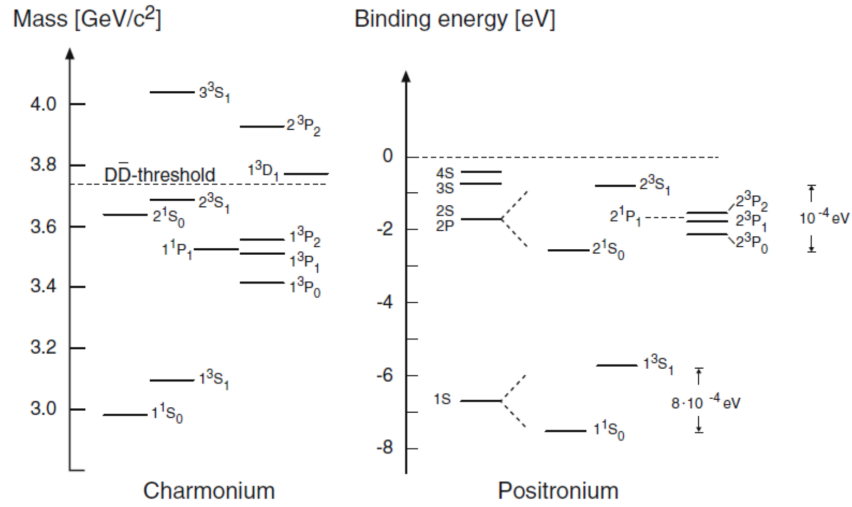


Figura 5.11

Si vede chiaramente che le energie degli stati $c\bar{c}$ sono molto più elevate e si osserva un'effetto dell'accoppiamento spin-spin molto più grande. La differenza è data dal fatto che il charmonio è legato per interazione forte, mentre il positronio elettromagnetica. Inoltre si vede che per il positronio lo splitting fine e iperfine è dell'ordine del meV ed è dato da $\alpha^4 m_e$, ma per il charmonio, lo splitting è dato da $\alpha_s^4 m_c$ con $\alpha_s \sim 20\alpha_e$, dunque dell'ordine di centinaia di MeV, molto più rilevante. Infatti si vede che dobbiamo scalare fino a 10^{-4} eV per vedere la struttura fine del positronio, il che non è necessario per il charmonio.

Fatte queste considerazioni sulla struttura fine, ricordiamo che i livelli energetici del positronio scalano come $1/n^2$ per la forma del potenziale elettromagnetico, e di conseguenza nel charmonio i livelli devono scalare in maniera diversa. Se anche per il charmionio avessimo un potenziale EM avremmo lo stesso spettro di e^+e^- . È anche logico che $c\bar{c}$ sia legato da un potenziale, differente rispetto quello del positronio, poiché coinvolge l'interazione forte.

Per questo motivo si fa' l'ansatz:

$$V = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s(r) \hbar c}{r} + k \cdot r \quad (5.5.73)$$

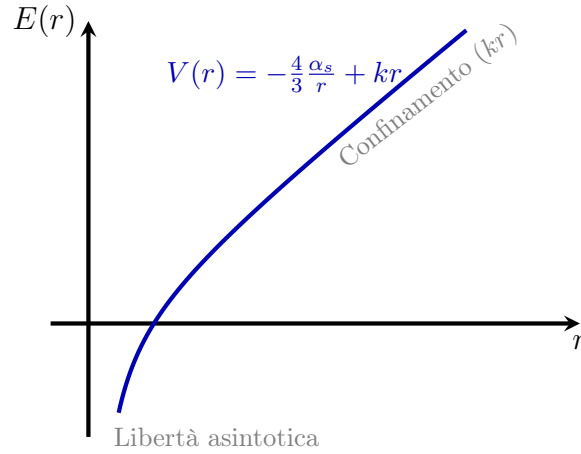


Figura 5.12: Potenziale di Cornell.

con (da fit di dati sperimentali dalle soluzioni dell'equazione di Schrodinger):

$$\alpha_s \approx 0.2 \quad , \quad k \sim 1 \text{ GeV/fm} \quad , \quad m_c \sim 1.5 \text{ GeV}/c^2 \quad (5.5.74)$$

raccontato in figura 5.12 e detto **potenziale di Cornell**. Sostanzialmente si considera un potenziale di tipo Coulombiano, ma con una correzione di running, ovvero con una dipendenza di α_s dalla distanza, a cui si aggiunge un termine che aumenta con r (in prima approssimazione lineare), così da tenere conto dell'impossibilità di osservare quark liberi; questo termine aggiuntivo è anche chiamato *termine di confinamento*.

In particolare dai valori di (5.5.74) possiamo fare alcune osservazioni. Trovando quel valore di α_s confermiamo quanto ci aspettavamo, ovvero che fosse più grande di α_{EM} (precisamente è un'ordine di grandezza maggiore). Il valore alto di k ci dice che già a distanze dell'ordine $\sim \text{fm}$ il termine confinante è fortemente dominante. Per finire, il valore di m_c , che viene fuori quando guardiamo gli splitting energetici e non compare in V , ci conferma logicamente il fatto che, essendo il charmonio formato da una coppia $c\bar{c}$, viene che la massa di un quark c è la metà di $c\bar{c}$.

Per finire facciamo delle osservazioni sui decadimenti. L'interazione forte conserva la parità di carica C . La J/ψ (3S_1) decade in $(2n+1)\gamma$ o $(2n+1)g$ (gluoni) per conservare C . Cinematicamente non può decadere in un unico fotone reale, ma deve decadere in un fotone virtuale che produce una coppia fermione-antifermione $f\bar{f}$. Invece, non può decadere in un gluone reale poiché non conserverebbe il colore. Può decadere solo in, almeno, 3 gluoni reali, che vengono osservati come adroni.

Allo stesso tempo lo stato 1S_0 decade in un numero *pari* di γ o g reali.

5.5.5 Charmonio e bottomonio

Analogamente al confronto tra charmonio e positronio si può fare il confronto anche con altri stati legati di altri flavour di quark. Infatti, negli anni successivi alla scoperta del c , in particolare negli anni 80, venne osservato un quark ancora più pesante, il b (bottom), osservato nello stato $b\bar{b}$, chiamato **bottomonio**. Lo spettro è simile a quello del charmonio e veniva osservato sia in produzione che in formazione. Nella figura 5.13 è riportato il confronto degli spettri energetici. Il quark b ha una massa compresa tra i 9 e 10 GeV. Esattamente come per il charmonio il primo stato scoperto fu' il 3S_1 e successivamente vennero ricavati gli altri.

Dall'osservazione del mass splitting si evidenzia anche per $b\bar{b}$ un potenziale non Coulombiano.

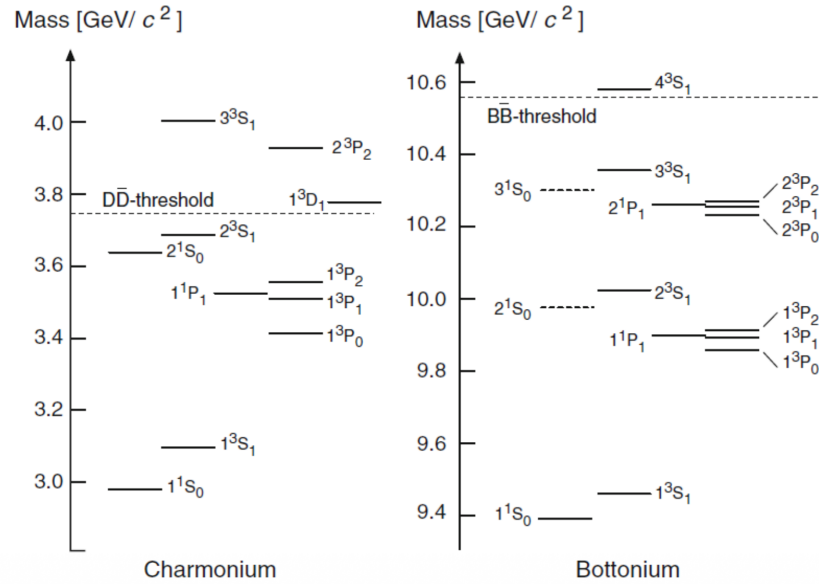


Figura 5.13

5.6 I Mesoni Leggeri

La funzione d'onda dei mesoni leggeri ($q\bar{q}$) ha una parte orbitale, una di spin, una di colore ed una di flavour (sapore). Per quanto riguarda la parte *orbitale*, assumiamo $l = 0$ sia per pseudoscalari che per vettori. Il *colore*, lo prendiamo comune a tutti i membri del multipletto, volendo un singoletto di colore. Per lo *spin*, visto che sia q che $\bar{q}$ sono fermioni di spin $1/2$,

combinandoli possiamo avere stati di singoletto o tripletto:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad \text{singoletto (antisimmetrico)} \quad s = 0 \quad (5.6.1)$$

$$\begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases} \quad \text{tripletto (simmetrico)} \quad s = 1. \quad (5.6.2)$$

Poiché abbiamo assunto $l = 0$, il momento angolare totale $\vec{J}$ coincide con lo spin: $\vec{J} = \vec{l} + \vec{s} = \vec{s}$.

Qui viene la differenza tra *mesoni pseudoscalari e vettori*: gli pseudoscalari hanno $\vec{J} = 0$, mentre i vettori $\vec{J} = 1$. In più, sapendo che per la parità teniamo conto che:

$$P |f\bar{f}\rangle = (-1)^{l+1} |f\bar{f}\rangle \quad (5.6.3)$$

allora se $l = 0$ l'autovalore di parità è -1 per i mesoni.

Flavour Abbiamo introdotto i quark u, d, s come base dello spazio vettoriale su cui agisce la rappresentazione fondamentale di $SU(3)$. In questo linguaggio, i mesoni leggeri sono rappresentazioni irriducibili di $3 \times \bar{3}$ e graficamente si ottengono, come abbiamo visto nella figura 5.4, sovrapponendo i triangoli nel piano Y/I_3 .

Per i mesoni periferici è immediato dedurre la composizione in quark:

$$\begin{aligned} \pi^- &= u\bar{d} \quad , \quad \pi^+ = u\bar{d} \quad , \quad K^+ = u\bar{s} \\ K^- &= s\bar{u} \quad , \quad K^0 = d\bar{s} \quad , \quad \bar{K}^0 = s\bar{d} \end{aligned}$$

la situazione si complica nell'origine, dove abbiamo mesoni con Y e I_3 nulli; lì abbiamo:

$$u\bar{u} \quad , \quad s\bar{s} \quad , \quad d\bar{d}$$

e ci aspettiamo che mesoni con Y e I_3 nulli (autostati di interazione) siano combinazioni lineari di $u\bar{u}, d\bar{d}$ e $s\bar{s}$ (vedremo dopo come scriverle). Se assumiamo $m_u = m_s = m_d$ allora abbiamo una simmetria esatta.

Conservazione isospin In realtà la simmetria di $SU(3)$ non è esatta, poiché come sappiamo $m_u \neq m_d \neq m_s$ (c'è una scala delle interazioni forti rispetto a questa simmetria e rispetto essa tutte e tre sono piccole.); e da altri corsi sappiamo anche che l' $SU(2)$ di isospin mescola u e d , anche $\bar{u}$ e $\bar{d}$. Il problema però è che quark e antiquark trasformano in modo diverso: u, d, s trasformano con $\exp\{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}/2\}$ (con $\vec{T} = \frac{\vec{\lambda}}{2}$ generatori di $SU(3)$), mentre $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ trasformano con $\exp\{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}^*/2\}$.

Essi vengono mescolati da matrici diverse, ma vorremmo che fossero la stessa, almeno per u, d e $\bar{u}, \bar{d}$. Per questo ridefiniamo la rappresentazione antifondamentale affinché $\bar{u}$ e $\bar{d}$ trasformino bene. Infatti, se introduciamo la matrice:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tale che } R^\dagger R = 1 \quad (5.6.4)$$

essa è tale che $R^\dagger(-T_k^*)R = T_k$ per $k = 1, 2, 3$ (mescolano l'isospin). A questo punto possiamo usare R per ridefinire $\bar{u}$ e $\bar{d}$ facendo un cambio base. Ad $|\bar{u}\rangle$ associamo:

$$R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |d\rangle \quad (5.6.5)$$

che ha $I_3 = -1/2$. A $|\bar{d}\rangle$ associamo:

$$R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -|u\rangle \quad (5.6.6)$$

che ha $I_3 = +1/2$. A $|\bar{s}\rangle$ associamo:

$$R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |s\rangle \quad (5.6.7)$$

con $I_3 = 0$. Ora, in questa base le stesse matrici che mescolano u e d mescolano $\bar{u}$ e $\bar{d}$. In questo modo non distinguiamo il quark dall'antiquark, ma li trattiamo come oggetti di spin $1/2$ e isospin $1/2$.

In generale abbiamo lo stato $|q\bar{q}\rangle$, che possiamo rileggere in termini di isospin. Dato q , a $\uparrow$ associamo up $|u\rangle$ e a $\downarrow$ associamo down $|d\rangle$; per $\bar{q}$ associamo $\uparrow$ a $|\bar{d}\rangle$ e $\downarrow$ a $|\bar{u}\rangle$. Combinando gli isospin di q e $\bar{q}$ abbiamo (come per lo spin e assumendo come convenzione di scrivere sempre prima i quark e poi gli antiquark):

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) & \longrightarrow & \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) \\ \begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases} & \longrightarrow & \begin{cases} -|u\bar{d}\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) \\ |d\bar{u}\rangle \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} I_3 = +1 \\ I_3 = 0 \\ I_3 = -1 \end{array}$$

Gli stati di tripletto con $I_3 = \pm 1$ corrispondono a $\pi^\pm$, in base alla regola di composizione di 3 e $\bar{3}$, per cui la componente di tripletto è identificabile

come π^0 per i pseudoscalari e ρ^0 per i vettori.

Manca ancora $s\bar{s}$. Immaginiamo $SU(3)$ come se fosse una simmetria esatta, ovvero per cui $m_s = m_u = m_d$. Assumiamo di considerare uno spazio con dimensione pari a 3 e scegliamo come base $|u\bar{u}\rangle$, $|d\bar{d}\rangle$ e $|s\bar{s}\rangle$. L'interazione può essere rappresentata tramite la matrice:

$$H = \begin{pmatrix} m + \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & m + \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & m + \epsilon \end{pmatrix} \begin{matrix} |u\bar{u}\rangle \\ |d\bar{d}\rangle \\ |s\bar{s}\rangle \end{matrix} \quad (5.6.8)$$

se la simmetria è esatta, allora la matrice è *simmetrica*, ma non diagonale, a causa delle interazioni, che però hanno la stessa intensità tra i vari stati. Infatti abbiamo assunto stesso autovalore m per i tre vettori di base e stesso termine di interazione ϵ .

Diagonalizziamo il blocco 2×2 in alto:

$$\begin{pmatrix} m + \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & m + \epsilon \end{pmatrix} \longrightarrow \det \begin{bmatrix} (m + \epsilon - \mu) & \epsilon \\ \epsilon & (m + \epsilon - \mu) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.6.9)$$

che implica:

$$(m + \epsilon - \mu)^2 = \epsilon^2 \implies m + \epsilon - \mu = \pm \epsilon \implies \begin{cases} \mu = m \\ \mu = 2\epsilon + m \end{cases} \quad (5.6.10)$$

e possiamo cercare gli autovalori. Per $\mu = m$:

$$\begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 0 \implies a_1 + b_1 = 0 \implies a_1 = -b_1 \implies v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (5.6.11)$$

mentre per $\mu = m + 2\epsilon$:

$$\begin{pmatrix} -\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & -\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \implies a_2 = b_2 \implies v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.6.12)$$

I due autovettori trovati ci forniscono i vettori:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) \quad (5.6.13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle). \quad (5.6.14)$$

Otteniamo che nella base:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle), |s\bar{s}\rangle \right\} \quad (5.6.15)$$

riscrivendo l'hamiltoniana (cambiando base, anche in base ai termini di interazione con $|s\bar{s}\rangle$):

$$H_{13} = \langle s\bar{s} | \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) \quad (5.6.16)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\langle s\bar{s} | u\bar{u} \rangle}_{\epsilon} - \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\langle s\bar{s} | d\bar{d} \rangle}_{\epsilon} \quad (5.6.17)$$

$$= 0 \quad (5.6.18)$$

$$H_{23} = \langle s\bar{s} | \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) \quad (5.6.19)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle s\bar{s} | u\bar{u} \rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle s\bar{s} | d\bar{d} \rangle \quad (5.6.20)$$

$$= \epsilon\sqrt{2} \quad (5.6.21)$$

$$(5.6.22)$$

la matrice si scrive come:

$$H = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m + 2\epsilon & \sqrt{2}\epsilon \\ 0 & \sqrt{2}\epsilon & m + \epsilon \end{pmatrix}. \quad (5.6.23)$$

Ora possiamo diagonalizzare il blocco in basso a destra:

$$(m + 2\epsilon - \mu')(m + \epsilon - \mu') - 2\epsilon^2 = 0 \implies \begin{cases} \mu'_1 = m \\ \mu'_2 = m + 3\epsilon \end{cases} \quad (5.6.24)$$

i cui autovettori sono:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \quad , \quad \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \quad (5.6.25)$$

Dunque, nella nuova base:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle), \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle), \frac{1}{\sqrt{3}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) \right\} \quad (5.6.26)$$

si ha la matrice³:

$$H = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m + 3\epsilon \end{pmatrix}. \quad (5.6.27)$$

I primi due elementi della base hanno lo stesso autovalore di massa, mentre l'ultimo ha un autovalore diverso. Al primo elemento corrispondono π^0 e ρ^0 , il secondo è ancora nell'ottetto, ed è detto $|\psi_8\rangle$, mentre l'ultimo, che ha autovalore differente, è considerato lo stato di singoletto $|\psi_1\rangle$.

³Si può verificare che i termini non diagonali (puoi vederli a p. 42 degli appunti di Visca), dunque H_{12} o H_{13} , sono ancora nulli.

5.6.1 Particelle $\eta, \eta', \omega, \phi$

Tuttavia $SU(3)$ non è una simmetria esatta: gli stati fisici non corrispondono a $|\psi_8\rangle$ e $|\psi_1\rangle$, ma alle loro combinazioni lineari. Per questo introduciamo delle *matrici di rotazione*, che ci forniscono i mesoni fisici $|\eta\rangle, |\eta'\rangle, |\omega\rangle$ e $|\phi\rangle$. Per gli pseudoscalari:

$$\begin{pmatrix} |\eta\rangle \\ |\eta'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_P & \sin \theta_P \\ -\sin \theta_P & \cos \theta_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_8\rangle \end{pmatrix} \quad (5.6.28)$$

per i vettori:

$$\begin{pmatrix} |\omega\rangle \\ |\phi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_V & \sin \theta_V \\ -\sin \theta_V & \cos \theta_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_8\rangle \end{pmatrix} \quad (5.6.29)$$

e poiché $SU(3)$ non è una simmetria esatta, $\theta_V \neq \theta_P$. Gli angoli vengono misurati sperimentalmente e si trova:

$$\tan \theta_P = -0.3 \quad ; \quad \tan \theta_V = 1/\sqrt{2}. \quad (5.6.30)$$

Calcoliamo lo stato della ω :

$$|\omega\rangle = \cos \theta_V |\psi_1\rangle + \sin \theta_V |\psi_8\rangle \quad (5.6.31)$$

$$= \cos \theta_V (|\psi_1\rangle + \tan \theta_V |\psi_8\rangle) \quad (5.6.32)$$

$$= \cos \theta_V \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) \right] \quad (5.6.33)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta_V \left[(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) + \frac{1}{2}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) \right] \quad (5.6.34)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta_V \frac{3}{2}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) \quad (5.6.35)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle). \quad (5.6.36)$$

Analogamente per la ϕ :

$$|\phi\rangle = -\sin \theta_V |\psi_1\rangle + \cos \theta_V |\psi_8\rangle \quad (5.6.37)$$

$$= \cos \theta_V \left(-\frac{1}{2}|\psi_1\rangle + |\psi_8\rangle \right) \quad (5.6.38)$$

$$= \cos \theta_V \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{3}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) + \frac{1}{\sqrt{6}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) \right] \quad (5.6.39)$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta_V |s\bar{s}\rangle \quad (5.6.40)$$

$$= -|s\bar{s}\rangle. \quad (5.6.41)$$

Possiamo parlare di masse. ρ e ω sono entrambi formati da combinazioni di u e d , quindi ci aspettiamo masse simili. Infatti si ha $m_\rho \approx 770$ MeV e $m_\omega \approx 780$ MeV. Invece la ϕ è composta da $s\bar{s}$, quindi è più pesante e si ha $m_\phi \approx 1020$ MeV.

Come intuibile queste particelle hanno diversi decadimenti. La ω è costituita solo da quark u e d , decade come:

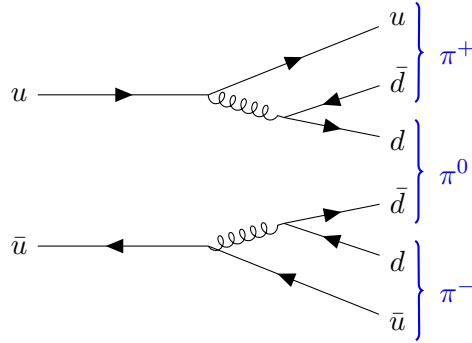
$$\omega \longrightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^- \quad (5.6.42)$$

con $BR \approx 100\%$. Invece, il medesimo decadimento per la ϕ è meno probabile ($\phi \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ ha $BR \approx 15\%$, si vede $Q = m_\phi - 3m_\pi \sim 600$ MeV), mentre è favorito:

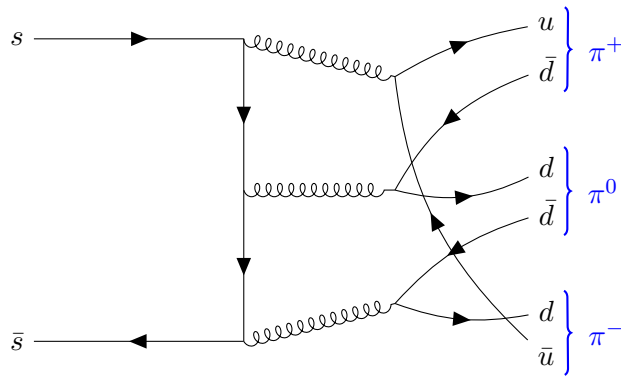
$$\phi \longrightarrow K^+ K^- \quad (5.6.43)$$

con $BR \approx 85\%$ (si vede $Q = m_\phi - 2m_K \sim 30$ MeV), poiché conserva il sapore dei quark s . Considerando il Q -value si vede che le differenze dei BR non sono dovute allo spazio delle fasi.

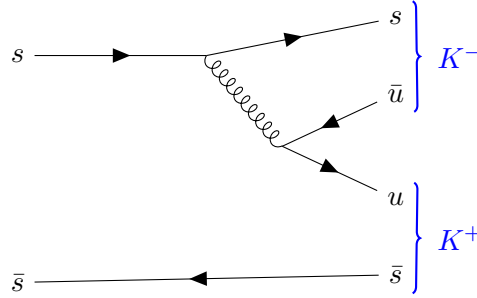
Vediamo i vari diagrammi di Feynman con i quark. Si analizzano i decadimenti dei mesoni vettoriali tramite linee di quark. Per la ω , i quark u, d dello stato iniziale si ritrovano direttamente nei pioni finali:



Per la ϕ , invece, affinché decada in pioni (π), i quark s e $\bar{s}$ devono necessariamente annichilirsi in tre gluoni:



Quando invece la ϕ decade in mesoni K , i quark iniziali $(s, \bar{s})$ si ritrovano nello stato finale:



Da ciò ricaviamo una *regola empirica*: i processi in cui i quark dello stato iniziale si ritrovano nello stato finale sono più probabili. Questa è la **regola Ozi di Zweig**.

Effetto spin-spin. L'accoppiamento tra lo spin del quark e dell'antiquark:

$$\left\langle \frac{\vec{s}_q \cdot \vec{s}_{\bar{q}}}{m_q m_{\bar{q}}} \right\rangle \quad (5.6.44)$$

determina la differenza di massa tra il multipletto pseudoscalare e quello vettoriale. Dalle masse misurate dei membri del multipletto, si risale alle masse costituenti dei quark:

$$m_u \approx m_d \approx 300 \text{ MeV} \quad (5.6.45)$$

$$m_s \approx 500 \text{ MeV}. \quad (5.6.46)$$

Vediamo la parità del π^- . Dato il modello a quark, possiamo reinterpretare vecchi risultati. Consideriamo il processo:

$$\pi^- + d \longrightarrow n + n$$

sapendo che $\pi^- = d\bar{u}$, ricordandoci che per l'antisimmetria di $|nn\rangle$ vale $P_n^2(-1)^{l_f} = -1$, mantenendo $L = 0$, allora possiamo esprimere lo stato iniziale in funzione dei quark che lo compongono e conservando la parità si ottiene:

$$-1 = \mathbb{P}(|\bar{u}d\rangle + |uud\rangle + |udd\rangle)_{\epsilon=0} \quad (5.6.47)$$

$$= P_{\bar{u}} P_d P_u^2 P_d P_u P_d^2 \quad (5.6.48)$$

$$= P_u P_{\bar{u}} P_d^2 \quad (5.6.49)$$

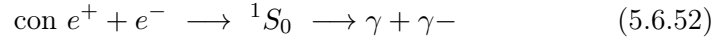
e dunque che:

$$P_u P_{\bar{u}} = -1. \quad (5.6.50)$$

Questo risultato convalida la generica proprietà dei fermioni (3.3.11). Abbiamo quindi capito che quark e antiquark hanno *parità opposta*.

Questo si può verificare sperimentalmente tramite il decadimento del parapositronio $^1S_0 \rightarrow \gamma + \gamma$, dove $P |^1S_0\rangle = -|^1S_0\rangle$ (stato 0^{-+}).

La misura avviene come per il π^0 , rilevando i due fotoni emessi in direzioni opposte tramite un dispositivo con una sorgente di rame, il quale emette e^+ per decadimento β^+ . L' e^+ si combina con l' e^- dando il positronio. Il decadimento è:



Selezioniamo stati 1S_0 in base al numero di fotoni in cui decade, ovvero due fotoni emessi lungo direzioni opposte. Per selezionare unicamente i decadimenti di 1S_0 si ricopre l'apparato sperimentale lasciando due fori opposti, in modo da far passare i fotoni back-to-back. L'apparato sperimentale è raffigurato in figura 5.14.

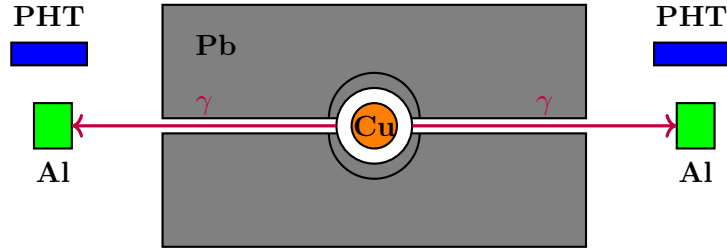


Figura 5.14

Dobbiamo controllare se le direzioni di polarizzazione sono *parallele* oppure *ortogonali*. La polarizzazione dei γ è studiata tramite l'interazione con gli e^- dell'alluminio. Infatti, il campo elettrico associato ai fotoni fa oscillare gli elettroni del mezzo che poi riemettono nel piano perpendicolare all'oscillazione. Vedi la figura 5.15.

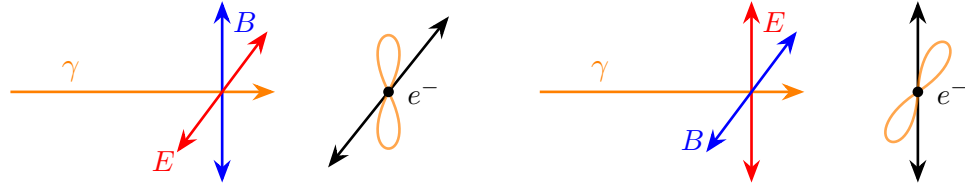


Figura 5.15

Sperimentalmente studiamo i massimi di emissione nelle due direzioni e vediamo se sono su piani perpendicolari o paralleli. A differenza del π^0 , qui i fotoni sono meno energetici:

$$E_\gamma = 500 \text{ keV}/2 = 250 \text{ keV}. \quad (5.6.53)$$

Le misure che possiamo fare sono:

$$\vec{\varepsilon}_1 \parallel \vec{\varepsilon}_2 \rightarrow +1 \quad (5.6.54)$$

$$\vec{\varepsilon}_1 \perp \vec{\varepsilon}_2 \rightarrow -1. \quad (5.6.55)$$

Spostando uno dei due PMT si conta il numero di coincidenze ottenute in configurazione parallela e perpendicolare. Sperimentalmente si osserva un massimo in configurazione perpendicolare, confermando che $\vec{\varepsilon}_1 \perp \vec{\varepsilon}_2$ e dunque che $P_f P_{\bar{f}} = -1$.

5.7 I Barioni

Nel modello a quark statico i barioni sono adroni costituiti da tre quark aventi spin semi-intero. Li abbiamo organizzati in due multipletti: $\frac{1}{2}^+$ e $\frac{3}{2}^+$. Come per i mesoni, vediamo come scrivere il generico stato per tre quark:

$$|qqq\rangle = \psi_{orb} \psi_{spin} \psi_{flavour} \psi_{colore}. \quad (5.7.1)$$

Per la parte orbitale, poniamo $l(totale) = 0$. Per un sistema di tre particelle possiamo scrivere il momento angolare totale come la somma del momento angolare di una coppia più quello del terzo rispetto agli altri due (un po' come visto nell'esercizio 5 del foglio 2 di esercizi). Assumiamo valga $l = l' = 0$ sia per l'ottetto che per il decupletto.

Nota su flavour/colore. Ci sono stati che hanno uno stato di flavour necessariamente simmetrico, essendo formati da quark tutti dello stesso flavour, per esempio:

$$\Delta^- \rightarrow ddd \quad , \quad \Delta^{++} \rightarrow uuu \quad , \quad \Omega^- \rightarrow sss$$

tutti e tre hanno spin $3/2$, quindi la terza componente assume valori da $-3/2$ a $+3/2$. Prendiamo gli stati con terza componente $+3/2$ o $-3/2$, quando gli spin sono necessariamente allineati; abbiamo per questo motivo uno stato di spin *simmetrico*:

$$|\Delta, J_z = -3/2\rangle = |d^\downarrow d^\downarrow d^\downarrow\rangle \quad (5.7.2)$$

$$|\Delta, J_z = +3/2\rangle = |u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle \quad (5.7.3)$$

ma allora tutto lo stato è simmetrico, il che però è incompatibile con la statistica fermionica. Per risolvere ciò, è introdotto un nuovo grado di libertà: il **colore**, tale da antisimmetrizzare lo stato (poiché le particelle si osservano in stati di singoletto di colore). Scriviamo:

$$\psi_{colore} = \frac{1}{\sqrt{6}} \{rgb + gbr + brg - grb - rgb - bgr\}. \quad (5.7.4)$$

Nota. Assumiamo che (5.7.4) sia lo stato di colore per tutti i barioni, in questo modo *spin + flavour deve essere simmetrico*.

Analizziamo i diversi stati. Partiamo da stati con $J^P = \frac{3}{2}^+$. Scriviamo lo stato di alcuni barioni appartenenti al decupletto, quali le particelle Δ :

$$|\Delta^{++}, J_z = +3/2\rangle = |u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle \quad (5.7.5)$$

$$|\Delta^+, J_z = +3/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|u^\uparrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle + |u^\uparrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle + |d^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle \right) \quad (5.7.6)$$

$$|\Delta^0, J_z = +3/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|u^\uparrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle + |d^\uparrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle + |d^\uparrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle \right) \quad (5.7.7)$$

$$|\Delta^-, J_z = +3/2\rangle = |d^\uparrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle. \quad (5.7.8)$$

5.7.1 Composizione degli stati $J^P = 1/2^+$

Vediamo gli stati di $J^P = (1/2)^+$. Cominciamo ad analizzare gli stati a $J_z = +1/2$ ($\uparrow$) e poi otteniamo gli altri tramite gli operatori di scala. Cominciamo con il sommare gli spin di due quark e per semplicità consideriamo i casi in cui ψ_{spin} e $\psi_{flavour}$ sono singolarmente simmetrici:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) & S = 0 \\ \begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases} & S = 1. \end{cases}$$

Scartiamo lo stato con $S = 0$ poiché antisimmetrico e lo stato $|\downarrow\downarrow\rangle$ poiché è impossibile formare uno stato $J_z = +1/2$ aggiungendo un altro quark. Consideriamo quindi gli stati $\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) = |1, 0\rangle$ e $|\uparrow\uparrow\rangle = |1, 1\rangle$. Cerchiamo lo stato con $J = 1/2$ e $J_z = +1/2$, utilizzando i coefficienti di Clebsch-Gordan combinando $|1, 0\rangle$ con $|q^\downarrow\rangle$:

$$\begin{aligned} |J = 1/2, J_z = +1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |J = 1, J_z = +1; J = 1/2, J_z = -1/2\rangle - \\ &\quad - \sqrt{\frac{1}{3}} |J = 1, J_z = 0; J = 1/2, J_z = +1/2\rangle \end{aligned} \quad (5.7.9)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle \quad (5.7.10)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} (2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \quad (5.7.11)$$

che non è ancora del tutto simmetrico, e per questo dobbiamo aggiungere il flavour. Per quanto riguarda il protone, sappiamo che lo stato completo deve

essere simmetrico per scambio di due quark qualsiasi sotto $Spin \times Flavour$; dunque preso (5.7.11), aggiunto il flavour e simmetrizzando il protone $p = uud$:

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ 2 \left| u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow \right\rangle - \left| u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow \right\rangle - \left| u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow \right\rangle + \right. \\ \left. + 2 \left| d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow \right\rangle - \left| d^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow \right\rangle - \left| d^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow \right\rangle + \right. \\ \left. + 2 \left| u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow \right\rangle - \left| u^\uparrow d^\downarrow u^\downarrow \right\rangle - \left| u^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow \right\rangle \right\} \quad (5.7.12)$$

e da qui possiamo scrivere lo stato degli altri barioni tramite sostituzioni dirette:

- $|n^\uparrow\rangle$ lo otteniamo da $|p\rangle$ facendo $u \leftrightarrow d$.
- $|\Sigma^{+\uparrow}\rangle$ facciamo $d \leftrightarrow s$.
- $|\Sigma^{-\uparrow}\rangle$ dal $|n\rangle$ facciamo $d \leftrightarrow s$.
- $|\Xi^{-\uparrow}\rangle$ dal $|\Sigma^{-\uparrow}\rangle$ facciamo $s \leftrightarrow d$.
- $|\Xi^{0\uparrow}\rangle$ dal $|\Sigma^{+\uparrow}\rangle$ con $s \leftrightarrow u$.

Possiamo vedere come ottenere lo stato Σ^0 . Partiamo da (5.7.12), scambiamo $d \leftrightarrow s$ ottenendo:

$$|\Sigma^{-\uparrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \left\{ 2 \left(\left| u^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow \right\rangle + \left| u^\uparrow s^\downarrow u^\uparrow \right\rangle + \left| s^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow \right\rangle \right) - \right. \\ \left. - \left(\left| u^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow \right\rangle + \left| u^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow \right\rangle + \left| s^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow \right\rangle \right) - \right. \\ \left. - \left(\left| u^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow \right\rangle + \left| u^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow \right\rangle + \left| s^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow \right\rangle \right) \right\} \quad (5.7.13)$$

a questo punto per ottenere Σ^0 da Σ^+ dobbiamo applicare l'operatore di scala di isospin I^- , tale che:

$$I^- |u\rangle = |d\rangle \quad (5.7.14)$$

così, rinormalizzando opportunamente, abbiamo:

$$|\Sigma^{-\uparrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{36}} \left\{ 2 \left(\left| u^\uparrow d^\uparrow s^\downarrow \right\rangle + \left| d^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow \right\rangle + \left| u^\uparrow s^\downarrow d^\uparrow \right\rangle + \left| d^\uparrow s^\downarrow u^\uparrow \right\rangle + \left| s^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow \right\rangle + \left| s^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow \right\rangle \right) - \right. \\ \left. - \left(\left| u^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow \right\rangle + \left| d^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow \right\rangle + \left| u^\uparrow s^\uparrow d^\downarrow \right\rangle + \left| d^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow \right\rangle + \left| s^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow \right\rangle + \left| s^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow \right\rangle \right) - \right. \\ \left. - \left(\left| u^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow \right\rangle + \left| d^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow \right\rangle + \left| u^\downarrow s^\uparrow d^\uparrow \right\rangle + \left| d^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow \right\rangle + \left| s^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow \right\rangle + \left| s^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow \right\rangle \right) \right\}. \quad (5.7.15)$$

Si può fare una costruzione simile, ma non uguale, per lo stato Λ . Il problema qua è che Λ è un singoletto di isospin, per cui $\psi_{flavour}$ è antisimmetrica per scambio $u \leftrightarrow d$. L'antisimmetria (parziale) è compensata dall'antisimmetria nella componente di spin. Prendiamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (|ud\rangle - |du\rangle) = \\ = \frac{1}{2} \left[|u^\uparrow d^\downarrow\rangle + |d^\downarrow u^\uparrow\rangle - |u^\downarrow d^\uparrow\rangle - |d^\uparrow u^\downarrow\rangle \right] \end{aligned} \quad (5.7.16)$$

aggiungendo $|s^\uparrow\rangle$ e simmetrizzando:

$$\begin{aligned} |\Lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} \left[|u^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow\rangle + |d^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow\rangle - |u^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow\rangle - |d^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow\rangle + \right. \\ \left. + |u^\uparrow s^\uparrow d^\downarrow\rangle + |d^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow\rangle - |u^\downarrow s^\uparrow d^\uparrow\rangle - |d^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow\rangle + \right. \\ \left. + |s^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle + |s^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle - |s^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle - |s^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle \right]. \end{aligned} \quad (5.7.17)$$

5.7.2 Momento magnetico dei barioni

Vediamo come tutto quello che abbiamo fatto ha effetto sullo spettro. L'interazione spin-spin per i barioni tiene conto di tre coppie di quark:

$$\Delta m_{ss} = k \alpha_s \left\{ \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{m_1 m_2} + \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_3}{m_1 m_3} + \frac{\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3}{m_2 m_3} \right\} \quad (5.7.18)$$

rispetto al positronio abbiamo 3 coppie e le masse al denominatore sono in principio diverse. Ci aspettiamo, in generale, che per i barioni a spin $3/2$ l'effetto sia maggiore che nel caso di spin $1/2$.

Quanto visto ha anche effetto sui momenti magnetici. Dato un barione B , il suo momento magnetico è la somma dei momenti dei singoli quark:

$$\vec{\mu}_B = \langle B^\uparrow | \vec{\mu} | B^\uparrow \rangle \quad (5.7.19)$$

$$= \langle q_1 | \vec{\mu} | q_1 \rangle + \langle q_2 | \vec{\mu} | q_2 \rangle + \langle q_3 | \vec{\mu} | q_3 \rangle \quad (5.7.20)$$

$$= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \quad (5.7.21)$$

e per un fermione sappiamo:

$$\vec{\mu} = g \frac{q}{2m} \vec{s}$$

in cui $g_{Dirac} = 2$. Per il protone (e per il neutrone) con $J_z = +1/2$, utilizzando lo stato simmetrizzato precedentemente ricavato, ma trascurando la

ripetizione dei termini introdotta per simmetrizzare (poiché si semplifica con la normalizzazione), si ottiene:

$$\mu_p = \langle p^\uparrow | \mu | p^\uparrow \rangle \quad (5.7.22)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(2 \langle u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow | - \langle u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow | - \langle u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow | \right) \vec{\mu} \frac{1}{\sqrt{6}} \left(2 | u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow \rangle - | u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow \rangle - | u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow \rangle \right) \quad (5.7.23)$$

$$= \frac{1}{6} \left[4(\mu_u + \mu_u + \mu_d) + (\mu_u - \mu_u + \mu_d) + (-\mu_u + \mu_u + \mu_d) \right] \quad (5.7.24)$$

$$= \frac{2}{3}(2\mu_u - \mu_d) + \frac{1}{6}\mu_d + \frac{1}{6}\mu_d \quad (5.7.25)$$

$$= \frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d. \quad (5.7.26)$$

Analogamente per il neutrone:

$$\langle n^\uparrow | \mu | n^\uparrow \rangle = \frac{4}{3}\mu_d - \frac{1}{3}\mu_u. \quad (5.7.27)$$

Sperimentalmente si osserva:

$$\vec{\mu}_p = 2 \cdot 2.79 \frac{e}{2m_p} \vec{s} \quad (5.7.28)$$

$$\vec{\mu}_n = 2(-1.91) \frac{e}{2m_N} \vec{s} \quad (5.7.29)$$

e si può scrivere la forma generica:

$$\vec{\mu} = g \left(\frac{q}{e} + \kappa \right) \frac{e}{2m_N} \vec{s} \quad (5.7.30)$$

dove κ rappresenta il momento magnetico anomalo e vale:

$$p : \quad \kappa = 1.79 \quad (5.7.31)$$

$$n : \quad \kappa = -1.91. \quad (5.7.32)$$

Possiamo calcolare il rapporto:

$$\frac{\langle n^\uparrow | \mu | n^\uparrow \rangle}{\langle p^\uparrow | \mu | p^\uparrow \rangle} = \frac{\frac{4}{3}\mu_d - \frac{1}{3}\mu_u}{\frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d} \quad (5.7.33)$$

$$= \frac{4\mu_d - \mu_u}{4\mu_u - \mu_d} \quad (5.7.34)$$

$$= \frac{6\mu_d}{-9\mu_d} \quad (5.7.35)$$

$$\simeq -\frac{2}{3} \quad (5.7.36)$$

in cui notiamo che se $\mu_u \approx -2\mu_d$ allora $m_u \approx m_d$. Dagli esperimenti si ha:

$$\frac{-1,91}{2,79} \quad (5.7.37)$$

dunque un buon accordo. In questo modo abbiamo una prima stima (in approssimazione di modello statico) della massa del quark up:

$$\mu_p = \langle p | \vec{\mu} | p \rangle = -3\mu_d = -3 \cdot 2 \frac{(-1/3)e}{2m_d} \vec{S} = 2 \frac{e}{2m_d} \vec{S} \quad (5.7.38)$$

il che implica:

$$\frac{1}{m_d} = \frac{2,279}{m_N} \implies m_d \simeq \frac{m_N}{2,79} = m_u \simeq 300 \text{ MeV}. \quad (5.7.39)$$

5.8 Il colore

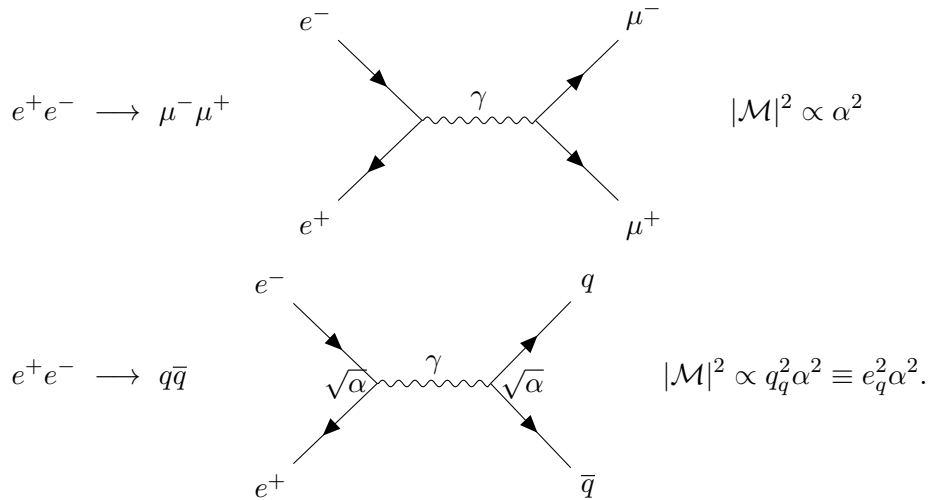
Precedentemente abbiamo introdotto il colore per antisimmetrizzare stati che altrimenti sarebbero completamente simmetrici, quali:

$$\Delta^{++}, \Delta^-, \Omega^-.$$

Sperimentalmente viene dedotto misurando la seguente quantità:

$$R(\sqrt{s}) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (5.8.1)$$

che si ricava dai diagrammi:



Dunque, il rapporto $R(\sqrt{s})$ ha come baseline (ovvero, lontano dalle risonanze):

$$R(\sqrt{s}) = \frac{1}{\alpha^2} \sum_q e_q^2 \alpha^2 = \sum_q e_q^2 \quad (5.8.2)$$

in cui la sommatoria corre su tutti i quark producibili, ovvero quelli per cui $m_q \leq \sqrt{s}/2$. Inoltre, si vede che aumentando $\sqrt{s}$ produciamo man mano più flavour:

$$m_s \leq \frac{1}{2}\sqrt{s} \leq m_c \quad : \quad R = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3} \quad (5.8.3)$$

$$m_c \leq \frac{1}{2}\sqrt{s} \leq m_b \quad : \quad R = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9} \quad (5.8.4)$$

$$m_b \leq \frac{1}{2}\sqrt{s} \leq m_t \quad : \quad R = \frac{10}{9} + \frac{1}{9} = \frac{11}{9}. \quad (5.8.5)$$

Sopra 10 GeV, il rapporto sperimentalmente vale 11/3. Il fattore 3 mancante può essere spiegato dicendo che manca un fattore 3 di colore (di degenrazione, in cui ciascun quark si può presentare).

In conclusione, per il colore, anche nel decadimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, si commetterebbe un errore sulla vita media di un fattore 3 se non si considerasse il colore.

5.8.1 Cenni di QCD

Il gruppo di simmetria del colore è $SU(3)_c$. In rappresentazione fondamentale abbiamo i 3 vettori di colore (Red, Green, Blue):

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.8.6)$$

I generatori di $SU(3)$ sono le 8 matrici di Gell-Mann, interpretate come **gluoni**, che fanno da mediatori nell'interazione forte. Gli stati di multipletto (ottetto) di colore (gli 8 gluoni) si costruiscono in modo analogo ai mesoni del multipletto di flavour:

$$r\bar{g}, \quad g\bar{b}, \quad b\bar{r}, \quad (5.8.7)$$

$$g\bar{r}, \quad b\bar{g}, \quad r\bar{b}, \quad (5.8.8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}). \quad (5.8.9)$$

Ricordiamo anche che la Lagrangiana della QCD è invariante per trasformazioni di gauge locali.

5.8.2 QED vs QCD

Proviamo ad elencare le differenze che abbiamo tra l'Elettrodinamica Quantistica e la Cromodinamica Quantistica:

1. Hanno un diverso gruppo di simmetria: $U(1)$ per la QED e $SU(3)$ per la QCD.

2. La QED è abeliana, la QCD non abeliana. Inoltre si può vedere che i gluoni hanno carica di colore, quindi la QCD è una teoria di gauge *autointeragente* (esistono vertici a 3 o 4 gluoni).
3. La carica di colore cambia nelle interazioni (ad esempio un quark q_r può diventare q_b emettendo un gluone $r\bar{b}$).
4. Gli adroni sono *neutri* dal punto di vista del colore (singoletti). Ciò implica che per un adrone:

$$I_{3c} |\text{adrone}\rangle = 0 \quad (5.8.10)$$

$$Y_c |\text{adrone}\rangle = 0 \quad (5.8.11)$$

dove gli operatori di *isospin* e *ipercarica di colore* (in analogia agli analoghi operatori di flavour) sono definiti dalle matrici:

$$I_{3c} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_c = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (5.8.12)$$

In generale, un generico adrone si può scrivere come:

$$|h\rangle = |\alpha r + \beta g + \gamma b + \alpha' \bar{r} + \beta' \bar{g} + \gamma' \bar{b}\rangle \quad (5.8.13)$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{Z}$. Le condizioni di singoletto di colore impongono che l'isospin e l'ipercarica di colore totali siano nulli:

$$I_{3c} |\dots\rangle = 0 \implies \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') - \frac{1}{2}(\beta - \beta') = 0 \quad (5.8.14)$$

$$Y_c |\dots\rangle = 0 \implies \frac{1}{3}(\alpha - \alpha') + \frac{1}{3}(\beta - \beta') - \frac{2}{3}(\gamma - \gamma') = 0 \quad (5.8.15)$$

dalla prima equazione segue:

$$\alpha - \alpha' = \beta - \beta' \quad (5.8.16)$$

che sostituita nella seconda:

$$(\alpha - \alpha') + (\beta - \beta') = 2(\gamma - \gamma') \implies \alpha - \alpha' = \beta - \beta' = \gamma - \gamma'. \quad (5.8.17)$$

Definiamo:

- Numero di quark: $n_q = \alpha + \beta + \gamma$.
- Numero di antiquark: $n_{\bar{q}} = \alpha' + \beta' + \gamma'$.

e sia:

$$p = \alpha - \alpha' = \beta - \beta' = \gamma - \gamma' \quad (5.8.18)$$

allora:

$$n_q - n_{\bar{q}} = (\alpha - \alpha') + (\beta - \beta') + (\gamma - \gamma') = 3p \quad (5.8.19)$$

ovvero abbiamo trovato la relazione:

$$n_q - n_{\bar{q}} = 3p. \quad (5.8.20)$$

Quest'ultima formula si utilizza per trovare le combinazioni neutre di colore ammesse. Infatti, vedendo:

$$p = 0 \implies n_q = n_{\bar{q}} \quad (5.8.21)$$

si ha:

$$\text{se } n_q = 0 \implies \text{vuoto} \quad (5.8.22)$$

$$\text{se } n_q = 1 \implies q\bar{q} \implies \text{mesone} \quad (5.8.23)$$

$$\text{se } n_q = 2 \implies \text{tetra-quark} \quad (5.8.24)$$

mentre se $p = 1$, allora:

$$n_q = 3 + n_{\bar{q}} \quad (5.8.25)$$

e si hanno:

$$\text{se } n_{\bar{q}} = 0 \implies n_q = 3 \implies \text{barione } B \quad (5.8.26)$$

$$\text{se } n_{\bar{q}} = 1 \implies n_q = 4 \implies \text{penta-quark } P. \quad (5.8.27)$$

Capitolo 6

Teoria delle interazioni deboli

Vediamo in questo capitolo la trattazione delle interazioni elettrodeboli e le loro evidenze sperimentali.

6.1 Il decadimento β

Cominciamo il nostro studio dal decadimento β , analizzando lo spettro degli elettroni risultanti, e cercando di intuire l'intensità dell'interazione debole.

Consideriamo il decadimento:

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (6.1.1)$$

(o equivalentemente $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$) in cui possiamo analizzare lo spettro energetico dell'elettrone emesso. Puoi guardare la figura 6.1. Si osserva che non è monocromatico, bensì *continuo*, per cui si può concludere, per pure considerazioni cinematiche, che il decadimento è *almeno a 3 corpi*.

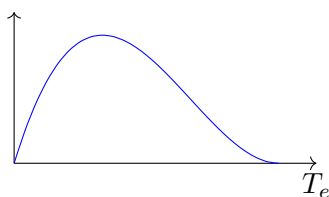


Figura 6.1

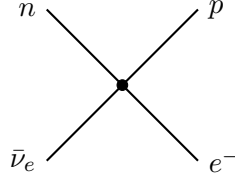
Inoltre, una terza particella doveva essere presente anche per la conservazione del momento angolare:

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (6.1.2)$$

$$1/2 \longrightarrow 1/2 + 1/2 + l_\nu \quad (6.1.3)$$

e sapendo che soli spin $1/2$ combinati non danno mai spin $1/2$, venne supposta l'esistenza dell'*antineutrino*.

Ipotizziamo che l'elemento di matrice, del diagramma rappresentante il decadimento, sia costante, e lo descriviamo con un'interazione alla Fermi, del tipo *corrente-corrente*; in questo caso abbiamo una corrente leptonica ed una adronica.



6.1.1 Spettro degli elettroni

Una prima predizione che si può fare per questo processo è lo spettro degli elettroni finali. Scriviamo la probabilità del processo utilizzando la regola aurea di Fermi, ovvero:

$$\lambda = 2\pi |M_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad (6.1.4)$$

da cui vediamo che se l'energia dello stato finale fosse più grande, allora avremmo un rate di interazione più grande. Ipotizziamo che $|M|$ sia costante e ragioniamo su $\rho(E_f)$, ovvero la densità degli stati. Adottiamo, come sempre, le unità naturali $\hbar, c = 1$.

Per $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ descritto nel sistema in cui n è a riposo, il bilancio energetico è:

$$m_n = E_p + E_e + E_{\bar{\nu}} \quad (6.1.5)$$

trascuriamo il rinculo del protone, cioè consideriamo $E_p \simeq m_p$, e consideriamo il neutrino con massa trascurabile, ovvero per cui $E_{\bar{\nu}} \simeq |\vec{p}_{\bar{\nu}}|$. Alla luce di queste assunzioni:

$$m_n = m_p + p_{\bar{\nu}} + E_e = m_p + p_{\bar{\nu}} + m_e + T_e \quad (6.1.6)$$

$$\implies m_n - m_p - m_e = T_e + p_{\bar{\nu}}. \quad (6.1.7)$$

Il Q value è:

$$Q = m_n - m_p - m_e \quad (6.1.8)$$

dunque troviamo:

$$p_{\bar{\nu}} = Q - T_e \quad (6.1.9)$$

La *densità di stati finali* è il numero di stati accessibili alle tre particelle finali; consideriamo solo e^- e $\bar{\nu}_e$, trascurando il rinculo del protone che quindi avrà stato fissato, e toglie solo parte del Q-value. Per una particella singola la densità di stati è data da:

$$n = \frac{V}{h^3} \int d^3p \quad (6.1.10)$$

che appunto ci dà il numero di stati in unità di energia. L'idea è che se abbiamo una particella in una dimensione e confinata su un segmento lungo

L , $n = Lp/h$, allora andando in 3 dimensioni si ha $L \rightarrow V$ e $p \rightarrow$ tutti gli impulsi possibili. In unità naturali si ha quindi:

$$n = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p. \quad (6.1.11)$$

Quindi:

$$n = \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi \int p^2 dp \quad (6.1.12)$$

$$= \frac{V}{2\pi^2} \int p^2 dp \quad (6.1.13)$$

e scrivendo per lo stato finale:

$$n_f = n_e \cdot n_\nu \quad (6.1.14)$$

possiamo concludere che:

$$\lambda = 2\pi |M_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad (6.1.15)$$

$$= 2\pi |M_{fi}|^2 \frac{d}{dE_f} (n_e n_\nu) \quad (6.1.16)$$

che ci fornisce la probabilità totale; per sapere com'è fatto lo spettro, dobbiamo sapere quanti elettroni ci sono in un certo intervallo di energia/impulso. Quindi calcoliamo $\frac{d\lambda}{dp_e}$.

Notiamo che in λ compare $d/dE_f(n_e n_\nu)$; quello abbiamo fatto è stato eliminare il contributo del protone e vedere come varia λ in termini di $n_e n_\nu$. Dunque per p_e fissato:

$$\frac{d}{dE_f} = \frac{d}{dE_\nu} \quad (6.1.17)$$

visto che fissiamo l'energia dell'elettrone, dal momento che nell'analisi dello spettro lavoriamo in intervalli di energia dell'elettrone. Se vale ciò allora:

$$\frac{d\lambda}{dp_e} = 2\pi |M_{fi}|^2 \frac{d}{dp_e} \left[\frac{V}{2\pi^2} \int p_e^2 dp_e \right] \left[\frac{d}{dE_\nu} n_\nu \right] \quad (6.1.18)$$

$$= 2\pi |M_{fi}|^2 \frac{V}{2\pi^2} p_e^2 \cdot \frac{V}{2\pi^2} p_\nu^2 \quad (6.1.19)$$

$$= \frac{1}{2\pi^3} V^2 |M_{fi}|^2 p_e^2 p_\nu^2 \quad (6.1.20)$$

$$= \frac{d}{dE_\nu} n_\nu \quad (6.1.21)$$

$$= \underbrace{\frac{dp_\nu}{dE_\nu}}_{=1} \frac{d}{dp_\nu} \left(\frac{V}{2\pi^2} \int dp_\nu p_\nu^2 \right) \quad (6.1.22)$$

$$= \frac{V^2}{2\pi^3} |M_{fi}|^2 p_e^2 (Q - T_e)^2. \quad (6.1.23)$$

Dunque, abbiamo finalmente trovato che:

$$N(p_e) = K p_e^2 (Q - T_e)^2. \quad (6.1.24)$$

La relazione trovata si verifica sperimentalmente con il **Kurie plot**, che possiamo vedere in figura 6.2, e otteniamo prendendo $N(p_e)$, lo dividiamo per p_e^2 , facciamo $\sqrt{\quad}$ e la grafichiamo in termini di T_e .

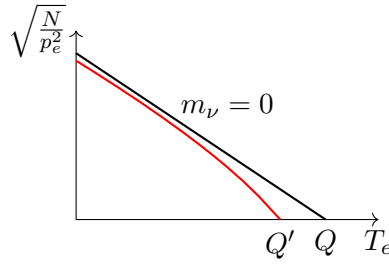


Figura 6.2: Kurie plot.

Dalla teoria ci si aspetta un andamento lineare in $(Q - T_e)$, ma come si vede dal plot, nella prima parte i dati non seguono troppo questo andamento, per colpa degli effetti di materiale, ma poi c'è un buon accordo.

C'è un problema quando la retta intercetta l'asse x, tale punto viene chiamato *end point*: teoricamente ci aspetteremmo tale punto per $T_e = Q$, però in tale regione capita che se $m_\nu = 0$, allora il grafico è esattamente una retta ed il punto coincide con il Q-value. Se però $m_\nu \neq 0$, ci aspettiamo che la retta intercetti l'asse x ad un valore di Q più piccolo, tale:

$$Q = m_n - m_p - m_e - m_\nu; \quad (6.1.25)$$

ma non solo, osserviamo che cambia anche la derivata rispetto a E_ν , infatti ora scriveremmo:

$$\frac{dp_\nu}{dE_\nu} = \frac{dE_\nu}{dp_\nu}. \quad (6.1.26)$$

Dunque in $N(p_e)$ comparirebbe anche il fattore E_ν/p_ν . Ci rendiamo anche conto che all'intersezione siamo vicini al limite cinematico, dunque stiamo guardando l'energia massima dell'elettrone, ovvero la configurazione in cui l'energia del neutrino è minima, e dunque per cui $p_\nu \rightarrow 0$. Il rapporto E_ν/p_ν , se $m_\nu = 0$, allora vale 1; mentre se $m_\nu \neq 0$ $E_\nu/p_\nu \rightarrow \infty$.

Quindi se $m_\nu \neq 0$ abbiamo che la forma della curva cambia e la raffiguriamo come in figura 6.3.

Questo comportamento, appena analizzato, è utilizzato per porre limiti alle masse dei neutrini. Però il problema di questo tipo di misura è che all'end point abbiamo pochi eventi e sono difficili da misurare. Dunque, l'unica scelta che abbiamo è aspettare molto tempo, e per ovviare ad errori grandi, utilizzare grandi sorgenti.

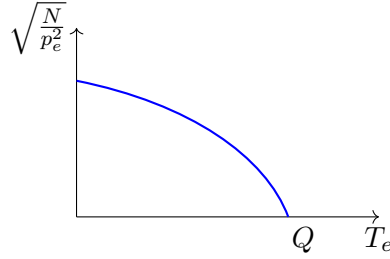
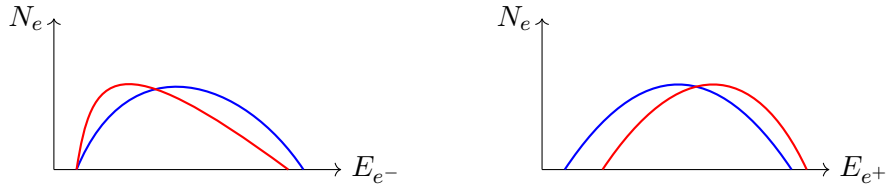


Figura 6.3

Per le misure sperimentali usiamo uno *spettrometro*. Dobbiamo tenere anche conto che se la sorgente è grande, abbiamo più statistica, il che ci piace, ma non sappiamo con precisione da dove sia partita la stessa! Infatti, avere una sorgente grande implica un'incertezza maggiore nel reggio di curvatura degli elettroni nello spettrometro, e dunque una maggiore incertezza sull'impulso.

In più, un altro effetto sperimentale è che se consideriamo uno spettro β per il decadimento di un nucleo, abbiamo che l' e^+ e l' e^- sono carichi, e poiché il nucleo rimasto è anch'esso carico, l'interazione modifica lo spettro. Vedi la figura 6.4.

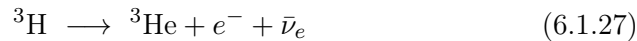


(a) Spettro per l'elettrone e^- , il quale è rallentato dal nucleo. La curva blu è l'andamento teorico, mentre il rosso quello modificato.

(b) Spettro per il positrone e^+ , il quale è accelerato, e si allontana, dal nucleo. La curva blu è l'andamento teorico, mentre il rosso quello modificato.

Figura 6.4

I fattori correttivi, che chiamiamo $F(Z, E_e)$, si possono calcolare. Se prendiamo il decadimento del trizio:



per cui $\tau \sim 12$ y e $Q = 20$ keV; la correzione è facile da calcolare e l'end point è a 18 KeV, ma la risoluzione è finita, per cui $\Delta E/E$ finisce in Δm del neutrino. Infatti la risoluzione energetica è $\Delta E/E \sim 10^{-4}$, di conseguenza il setup sperimentale permette di definire un upper bound $\Delta m_\nu = \frac{\Delta E}{E} Q \sim 2$ eV.

Quindi se Q è grande per risolvere masse piccole serve una grande risoluzione. Se invece Q è minore, a fissato $\Delta E/E$ (finito) dello strumento, si riescono a risolvere masse più piccole; infatti da:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{E} Q \quad (6.1.28)$$

Q più piccolo implica Δm più piccolo.

6.1.2 Intensità dell'interazione debole

Riportiamo da:

$$\frac{d\lambda}{dp_e} = \frac{V^2}{2\pi^3} |M_{fi}|^2 p_e^2 p_\nu^2 \quad (6.1.29)$$

e calcoliamo l'ordine di grandezza dell'elemento di matrice. Vogliamo confrontare l'integrale di $d\lambda/dp_e$, così da ottenere λ , e confrontarlo con la vita media del neutrone, che è nota, $\tau \simeq 900$ s. Per il conto facciamo le seguenti assunzioni: gli elettroni sono ultrarelativistici, cioè $E_e \simeq p_e$, i neutrini sono massless, dunque $p_\nu \simeq E_\nu$ e assumiamo anche che $E_0 = E_e + E_\nu$ sia l'energia disponibile nel decadimento. Abbiamo, per queste assunzioni:

$$E_\nu = E_0 - E_e \quad (6.1.30)$$

oltre che:

$$\frac{d}{dp_e} = \frac{d}{dE_e}. \quad (6.1.31)$$

Quindi abbiamo:

$$\frac{d\lambda}{dE_e} = \frac{V^2}{2\pi^3} |M_{fi}|^2 E_e^2 (E_0 - E_e)^2 \quad (6.1.32)$$

che possiamo integrare in E_e tra 0 ed E_0 :

$$\lambda = \frac{V^2}{2\pi^3} |M_{fi}|^2 \int_0^{E_0} E_e^2 (E_0 - E_e)^2 dE \quad (6.1.33)$$

$$= \frac{V^2}{2\pi^3} |M_{fi}|^2 \frac{E_0^5}{30} \quad (6.1.34)$$

che ci permette di vedere che $\lambda \propto E_0^5$, ma non conosciamo E_0 . Riscriviamo la dipendenza da E_0 (incognita) come un fattore numerico, f , che dipende dal processo, per un fattore che dà la giusta scala energetica. Scegliamo questa scala di energia pari a m_e , il resto è assorbito in f . Quindi:

$$\lambda = \frac{V^2}{2\pi^3} |M_{fi}|^2 f m_e^5 \quad (6.1.35)$$

che dobbiamo confrontare con $\frac{1}{\tau}$ (dove $\tau \simeq 900$ s). Troviamo:

$$\frac{V^2}{2\pi^3} |M_{fi}|^2 f (m_e c^2)^5 = L^6 \cdot M^2 L^4 T^{-4} \cdot f \cdot (M L^2 T^{-2})^5 \quad (6.1.36)$$

e se vogliamo l'inverso di un tempo, dobbiamo dividere per $(\hbar c)^7$, visto che:

$$[\hbar c] = ML^2T^{-2} \cdot LT^{-1} = MT^{-2}L^3$$

dunque otteniamo:

$$L^6 \left(\frac{ML^2}{T^2} \right)^7 \frac{1}{\left(\frac{ML^2}{T^2} \right)^7 L^7} = \frac{1}{L}. \quad (6.1.37)$$

Quindi confrontiamo con $1/c\tau$:

$$\frac{V^2}{2\pi^3} |M_{fi}|^2 f(m_e c^2)^5 \frac{1}{(\hbar c)^7} \frac{(\hbar c)^2}{(m_e c^2)^2} = \frac{1}{c\tau} \quad (6.1.38)$$

$$\Rightarrow |M_{fi}|^2 = \frac{1}{c\tau} \frac{2\pi^3}{V^2} \frac{1}{f} \left(\frac{\hbar c}{m_e c^2} \right)^7 (m_e c^2)^7 \quad (6.1.39)$$

noi abbiamo:

$$c\tau = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 10^3 \text{ s} = 3 \cdot 10^{11} \text{ m} = 3 \cdot 10^{26} \text{ fm}$$

ma vale $\langle r_p^2 \rangle^{1/2} \simeq 0,8 \text{ fm}$. Se assumiamo il protone essere sferico, dunque per cui:

$$V = \frac{4}{3} \pi \langle r_p^2 \rangle^{3/2} \simeq 2 \text{ fm}^3. \quad (6.1.40)$$

Se teniamo anche conto che si può ricavare che $f = 1.7$ troviamo:

$$\frac{\hbar c}{m_e c^2} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{0.5 \text{ MeV}} = 400 \text{ fm} \quad (6.1.41)$$

dunque ricaviamo finalmente:

$$|M_{fi}|^2 = \frac{1}{3 \cdot 10^{26} \text{ fm}} \cdot \frac{2 \cdot 30}{4 \text{ fm}^6} \cdot \frac{4^7}{1,7} \cdot 10^{14} \text{ fm}^7 (m_e c^2)^2 \quad (6.1.42)$$

$$= 2 \cdot 10 \cdot 4^6 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{1}{1,7} (m_e c^2)^2 \quad (6.1.43)$$

$$= 10(4^3 \cdot 10^{-6})^2 |M|^2 \quad (6.1.44)$$

$$= 3 \cdot 4^3 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{2} \text{ MeV} \quad (6.1.45)$$

$$\simeq 100 \text{ eV}. \quad (6.1.46)$$

Se i nucleoni sono autostati dell'interazione forte che ha energia dell'ordine del GeV, allora l'interazione debole ne è una correzione.

6.1.3 Sezione d'urto $\sigma(\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n)$ (Cowan - Reines)

Consideriamo il processo:

$$\nu_e + n \rightarrow p + e^- \quad (6.1.47)$$

che otteniamo come:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \implies \nu_e + n \rightarrow p + e^- \quad (6.1.48)$$

o equivalentemente:

$$n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}_e \implies p + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+. \quad (6.1.49)$$

L'idea è che l'elemento di matrice è lo stesso sia per il decadimento del neutrone sia per l'ultimo scattering. Abbiamo ricavato l'espressione di $|M_{fi}|$ per cui possiamo scrivere σ :

$$\sigma = \frac{2\pi |M_{fi}|^2 \rho(E_f)}{\text{flusso}} \quad (6.1.50)$$

in cui se $\bar{\nu}_e + p$ è studiato nel sistema di riferimento in cui p è fermo, allora il flusso è $\frac{v}{V} \simeq \frac{c}{V}$ se $m_\nu = 0$; dunque in unità naturali risulta $\Phi = 1/V$. Troviamo per cui:

$$\sigma = \frac{2\pi |M_{fi}|^2 \rho(E_f)}{1/V}. \quad (6.1.51)$$

Possiamo fare l'ipotesi per cui trascuriamo il rinculo del neutrone, quindi:

$$n \equiv e^+ = \frac{V \cdot 4\pi}{(2\pi)^3} \int p_e^2 dp_e \quad (6.1.52)$$

da cui deduciamo:

$$\rho(E_f) = \frac{d}{dE_f} n_{e^+}. \quad (6.1.53)$$

Inoltre, il fatto che $E_f = E_e$ ci porta a:

$$\frac{d}{dE_f} = \frac{d}{dE_e} \quad (6.1.54)$$

e dunque:

$$\frac{d}{dE_e} = \frac{d}{dp_e} \frac{dp_e}{dE_e} \quad (6.1.55)$$

$$= \frac{d}{dp_e} \frac{E_e}{p_e} \quad (6.1.56)$$

$$\implies \frac{dn_e}{dE_e} = \frac{E_e}{p_e} \frac{d}{dp_e} \frac{2V}{(2\pi)^2} \int p_e^2 dp_e \quad (6.1.57)$$

$$= \frac{E_e}{p_e} \frac{2V}{(2\pi)^2} p_e^2 \quad (6.1.58)$$

che ci porta alla sezione d'urto:

$$\sigma = 2\pi \frac{|M_{fi}|^2}{1/V} \cdot \frac{4\pi V}{(2\pi)^3} \frac{E_e}{p_e} p_e^2 \quad (6.1.59)$$

$$= \frac{V^2}{\pi} |M_{fi}|^2 E_e p_e. \quad (6.1.60)$$

Possiamo passare ad unità fisiche. Vale:

$$L^2 = L^6 (ML^2 T^{-2})^2 (ML^2 T^{-2})^2 \quad (6.1.61)$$

Introduciamo una scala, $m_e c^2$, moltiplichiamo e dividiamo σ per $(\hbar c)^4$:

$$\sigma = \frac{V^2}{\pi^2} |M_{fi}|^2 \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^4} \frac{E_e}{m_e c^2} \frac{p_e c}{m_e c^2} \frac{1}{(m_e c^2)^2} \quad (6.1.62)$$

ma abbiamo:

$$\frac{1}{c\tau} = \frac{V^2}{2\pi^3} |M_{fi}|^2 f(m_e c^2)^5 \frac{1}{(\hbar c)^7} \frac{(\hbar c)^2}{(m_e c^2)^2} \quad (6.1.63)$$

per cui possiamo dividere:

$$\frac{\sigma}{1/c\tau} = 2\pi^2 \frac{1}{f} \left(\frac{\hbar c}{m_e c^2} \right)^3 \frac{E_e}{m_e c^2} \frac{p_e c}{m_e c^2}. \quad (6.1.64)$$

Definitivamente possiamo scrivere:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{E_e}{m_e c^2} \frac{p_e c}{m_e c^2} \quad (6.1.65)$$

in cui:

$$\sigma_0 = \frac{2\pi^2}{f} \frac{1}{c\tau} \left(\frac{\hbar c}{m_e c^2} \right)^3 \quad (6.1.66)$$

$$= 2 \cdot 10^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^3 \cdot 10^6 \text{ fm}^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^{26} \text{ m}} \quad (6.1.67)$$

$$= 10^8 \text{ fm}^2 \cdot 20 \quad (6.1.68)$$

$$= 2 \cdot 10^{-20} \text{ b} \quad (6.1.69)$$

in cui abbiamo scritto $100 \text{ fm}^2 = 1 \text{ b}$. Abbiamo trovato la stessa espressione di Conan.

6.2 La struttura delle interazioni deboli

Finora abbiamo assunto l'elemento di matrice, oltre l'essere costante, anche che la sua espressione preveda l'interazione tra due correnti, una adronica ed una leptonica:

$$M_{fi} = G_F [\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n] [\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu] = G_F J_h J_{lep}. \quad (6.2.1)$$

Questa non è la forma più generale possibile, che invece è data da:

$$(\bar{\psi}_p O_i \psi_n)(\bar{\psi}_e O_i \psi_\nu) \quad (6.2.2)$$

in cui O_i è un generico operatore che può essere uno scalare, pseudoscalare, vettore o pseudovettore, e non necessariamente le matrici γ^μ di Dirac.

Sappiamo bene che gli spinori ψ sono a quattro componenti; le energie in gioco sono dell'ordine del MeV e la trattazione corretta prevederebbe di trattare tutte e 4 le componenti contemporaneamente, ma in realtà solamente le prime due sono le più importanti, viste le energie in gioco; dunque trascuriamo le altre. Scriviamo per questo:

$$\psi_p = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.2.3)$$

Le possibili forme bilineari che possiamo inserire nell'elemento di matrice sono: scalare (1), pseudoscalare (γ_5), vettore (γ^μ), pseudovettore ($\gamma_5 \gamma^\mu$) e tensore ($\gamma^{\mu\nu}$). Riscrivendo l'elemento di matrice in maniera esplicita si ha:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2.4)$$

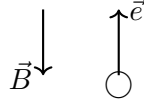
Allora, guardando il termine $\mathcal{M} \propto \bar{\psi}_p O_i \psi_n$ cosa diventa nei diversi casi:

scalare	$\mathcal{M} \propto p^\dagger n$
pseudo-scalare	$\mathcal{M} \propto O$
vettore	$\mathcal{M} \propto \begin{cases} p^\dagger n & \text{se } \mu = 0 \\ 0 & \text{se } \mu \neq 0 \end{cases}$
vettore assiale	$\mathcal{M} \propto p^\dagger \sigma^k n \quad (\text{se } \mu = k)$
tensore	$\mathcal{M} \propto p^\dagger \sigma^k n \quad (\text{se } \mu = i, \nu = j).$

Nella realtà si osservano sia decadimenti in cui gli spin sono allineati ($\Delta J = 0$), legati a quelle chiamate *transizioni di Fermi* (Scalari - Pseudo scalari - Vettori), sia *transizioni alla Gamow Teller* in cui gli spin hanno $\Delta J = 1$ (vettori Assiali - Tensori, e in cui gli indici μ , ed eventualmente ν , sono indici spaziali, ad esempio k, i, j).

6.2.1 Violazione di parità

L'evidenza sperimentale riguardo la violazione della parità da parte delle interazioni deboli, venne dall'esperimento di Madame Wu, il quale, sfruttando il decadimento del ^{60}Co , però vedeva gli elettroni solo quando essi erano nella direzione opposta rispetto quella del campo magnetico. Vedi uno schema nella figura 6.5.

**Figura 6.5**

Nella nostra teoria abbiamo dovuto introdurre, non solo le matrici γ_μ , ma anche altri oggetti, quali le forme bilineari di γ_μ . Capiamo anche che osservando la *violazione di parità*, poiché correnti *vettoriali* sono invarianti per parità, è necessario introdurre γ_5 nella teoria; dunque scriviamo:

$$\psi O_i \psi \longrightarrow \bar{\psi} O_i \gamma_5 \psi. \quad (6.2.5)$$

Madame Wu svolse un'esperimento che aveva esito binario; in seguito gli esperimenti vennero raffinati ed in particolare si riuscì a misurare la distribuzione angolare degli elettroni:

$$\frac{dN}{d \cos \theta} \simeq 1 - \cos \theta \quad (6.2.6)$$

in cui θ è angolo di e^- (del loro impulso) rispetto a $\vec{B}$. Se $\theta = 0$ non ci sono elettroni, se $\theta = \pi$ ci sono eventi. Gli esperimenti determinano meglio i fattori e si trova:

$$\frac{dN}{d \cos \theta} \simeq 1 - \frac{p_e \cos \theta}{E_e} \quad (6.2.7)$$

ma con $\frac{p_e}{E_e} = \beta$. Il fatto che si riesca a determinare il coefficiente di $\cos \theta$ è aiutato dal fatto che gli elettroni abbiano *spettro continuo*; infatti, a partire dal fatto che la distribuzione sperimentale sia proprio quella predetta da una teoria che utilizza elettroni left, allora si capisce che gli e^- del decadimento sono autostati di *chiralità left* e quindi autostati del proiettore $P_L = (1 - \gamma_5)/2$. Ciò vuol dire che lo spinore che compare è:

$$P_L \psi_e = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi_e. \quad (6.2.8)$$

Questo implica (si dimostra esplicitando le definizioni di $\bar{\psi}$ e le regole di anticommutazione delle γ) che $\bar{\psi}_{eL} = \bar{\psi}_e P_R$.

Questa caratteristica pone un vincolo sull'elicità del neutrino, che in approssimazione massless corrisponde alla chiralità, e dipende dall'operatore O_i considerato. Dobbiamo dare conto sia di interazioni con $\Delta J = 0$ che

$\Delta J = 1$. Possiamo vedere i due casi, per cui $\Delta J = 0$ e $O_i = S, V$;

$$\begin{aligned}
 O = S, P \quad , \quad & \begin{cases} \bar{\psi}_{e,L} \mathbb{1} \psi_\nu &= \bar{\psi}_e P_R \psi_\nu \\ &= \bar{\psi}_e \psi_{\nu,R} \\ \bar{\psi}_{e,L} \gamma_5 \psi_\nu &= \bar{\psi}_e P_R \gamma_5 \psi_\nu \\ &= \bar{\psi}_e \gamma_5 P_R \psi_\nu = \bar{\psi}_e \gamma_5 \psi_{\nu,R} \end{cases} \implies \text{il } \bar{\nu} \text{ è right} \\
 O = V \quad , \quad & \begin{cases} \bar{\psi}_{e,L} \gamma_\mu \psi_\nu &= \bar{\psi}_e P_R \gamma_\mu \psi_\nu \\ &= \bar{\psi}_e \gamma_\mu P_L \psi_\nu = \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_{\nu,L} \\ \bar{\psi}_{e,L} \gamma_\mu \gamma_5 \psi_\nu &= \bar{\psi}_e P_R \gamma_\mu \gamma_5 \psi_\nu \\ &= \bar{\psi}_e \gamma_\mu \gamma_5 P_L \psi_\nu = \bar{\psi}_e \gamma_\mu \gamma_5 \psi_{\nu,L} \end{cases} \implies \text{il } \nu \text{ è left.}
 \end{aligned}$$

Bisogna decidere se le interazioni a $\Delta J = 0$ sono descritte da S o V, e questo implica scegliere se il neutrino è L o R. Se $O = \mathbb{1}$, ν è right, se $O = \gamma^\mu$, ν è left.

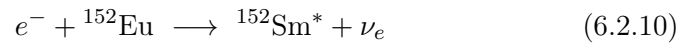
Stesso ragionamento vale con $\Delta J = 1$. Se abbiamo un vettore assiale o un tensore, allora ν partecipa con L o R.

6.2.2 Esperimento di Goldhaber

Nel corso del tempo si è cominciato a voler fare misure sul neutrino, in particolare si voleva misurare la sua elicità. Il problema di misurare l'elicità di esso si collega alla chiralità. Infatti, se $m_\mu = 0$ sappiamo bene che l'autovalore di chiralità *coincide con elicità*. Ricordiamo inoltre che l'elicità è definita da:

$$\lambda = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}. \quad (6.2.9)$$

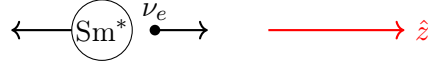
Misurare l'elicità vuol dire misurare la proiezione di $\vec{s}$ nella direzione del moto. Le σ di questi processi sono piccole, per cui abbiamo quindi bisogno di bersagli grandi. L'idea è quella di prendere un processo in cui sono presenti sia neutrini che altre particelle, ed essendo ν difficilmente osservabile, misuriamo l'elicità di altre particelle, così che possiamo determinare quelle di ν (essendo legate). Il processo considerato è la cattura K del ^{152}Eu :



in cui Sm è il samario ed Eu l'europio. Il samario è in uno stato eccitato e si diseccita, producendo:

$${}^{152}\text{Sm}^* \longrightarrow {}^{152}\text{Sm} + \gamma. \quad (6.2.11)$$

Sperimentalmente si misura la polarizzazione del γ poiché è la stessa di ν_e . Possiamo dimostrare quest'ultima affermazione lavorando nel sistema di riferimento del centro di massa. Lo stato finale del processo è raffigurato in figura 6.6, in cui i γ vengono emessi

**Figura 6.6**

Gli spin, considerando $S_{Eu} = 0$, $S_{Sm^*} = 1$ e $S_{Sm} = 0$, sono:

$$\begin{array}{ccccccc} e & + & E & \longrightarrow & Sm^* & + & \nu & \longrightarrow & Sm & + & \gamma & + & \nu \\ \frac{1}{2} & & 0 & & 1 & & \frac{1}{2} & & 0 & & 1 & & \frac{1}{2} \end{array} \quad (6.2.12)$$

da cui possiamo lavorare sulla conservazione del momento angolare. Scegliamo come direzione di quantizzazione quella del moto del neutrino. In tale direzione, l' e^- potrebbe avere sia $-1/2$ che $+1/2$. Dunque possiamo costruire la tabella 6.1 in cui alcuni casi sono esclusi poiché dobbiamo anche considerare che il γ può avere solo polarizzazione ± 1 .

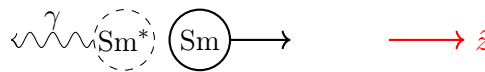
e^-	Eu	ν_e	Sm^*	Sm	γ
$-1/2$	0	$-1/2$	0	0	$\times$
		$+1/2$	-1	0	-1
		$\times$	$+1$	$\times$	$\times$
$+1/2$	0	$+1/2$	0	0	$\times$
		$-1/2$	$+1$	0	$+1$
		$\times$	-1	$\times$	$\times$

Tabella 6.1

Possiamo guardare le elicità nei due casi possibili. Se ν_e va nel verso positivo di z , dunque $\lambda(\nu) = +1$, o se ν va negli z negativi, quindi $\lambda(\nu) = -1$. Chiamiamo rispettivamente caso 1 e 2. Dobbiamo cercare di capire $\lambda(\gamma)$. Ricordiamo che $\gamma_R = -1$ e $\gamma_L = +1$.

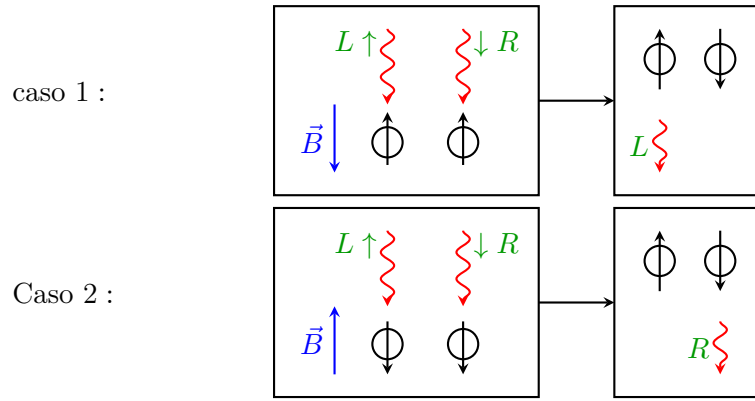
Quando Sm^* si diseccita, può emettere γ in varie direzioni; assumiamo di limitarci ai γ che si muovono lungo la direzione delle z negative, cioè emessi lungo la direzione della linea di volo di $^{152}Sm^*$, possiamo pensarla come in figura 6.7, per cui abbiamo:

$$\begin{array}{cc} & \lambda(\gamma) \\ \text{caso 1} & +1 \\ \text{caso 2} & -1 \end{array}$$

**Figura 6.7**

Infatti, ricordando che $\vec{p}_\nu \parallel \hat{z}$ e $\vec{p}_\gamma \parallel -\hat{z}$ risulta che le uniche combinazioni $(\lambda_\nu, \lambda_\gamma)$ possibili sono $(+, +)$ e $(-, -)$. Per cui per misurare λ_ν è sufficiente λ_γ .

Possiamo costruire l'apparato sperimentale in figura 6.8 e misurare la polarizzazione dei fotoni. Utilizziamo un ferromagnete, in cui sono presenti elettroni, e in cui possiamo orientare lo spin grazie alla presenza del campo magnetico $\vec{B}$. La corrente nel materiale la possiamo far scorrere in due diversi versi, e ciascuno di essi (come sappiamo) produce due possibili campi magnetici (rispettivamente il caso 1 e 2):



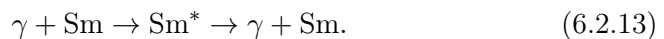
In questo modo si possono selezionare gli stati di chiralità dei γ di decadimento: gli e^- non assorbono il γ se non c'è uno stato di spin disponibile per la transizione.

Se arrivano dei fotoni nel ferromagnete, essi possono essere sia left che right. Se il fotone è *right-handed*, la probabilità di assorbimento è più piccola se lo spin del fotone e dell'elettrone sono allineati, mentre invece se sono opposti l'assorbimento è più probabile. Nel caso di fotoni *left-handed* vale l'opposto. Quindi con $\vec{B}$ verso il basso passano fotoni *left*, mentre se $\vec{B}$ è verso l'alto passano i *right*.

L'esperimento prende dati in due configurazioni di $\vec{B}$ e misura che $N_\gamma(\vec{B} \downarrow) \gg N_\gamma(\vec{B} \uparrow)$, ovvero conclude che i fotoni sono *left-handed*. Quindi anche che il neutrino è *left*. Dunque, trattando un processo di Fermi, segue che l'operatore della corrente leptonica è di tipo vettoriale: $J_{lep}^\mu = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L$.

Però dobbiamo ancora capire come sapere che i γ sono quelli emessi nella direzione del samario eccitato.

Questa selezione avviene in una seconda parte dell'apparato, la quale sfrutta l'*assorbimento risonante*: tali γ sono visibili poiché incidono su un anello di samario (Sm_2O_3) e lì avviene l'assorbimento risonante, così avviene:



Questo capita nell'anello e il γ riemesso va nello scintillatore di NaI e restituisce un conteggio. Infatti, il γ prodotto è emesso isotropicamente e può

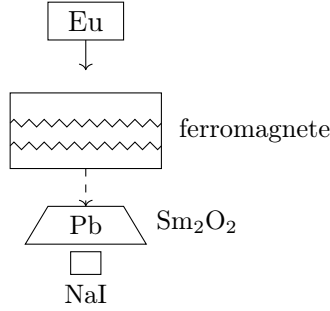


Figura 6.8

produrre un segnale (i γ primari sono schermati dal Pb). Questo si verifica solo per i γ che si muovono nella direzione di Sm^* . Infatti, per ragioni cinematiche, la condizione di risonanza è $\vec{p}_\gamma \parallel \vec{p}_{\text{Sm}^*}$. Utilizziamo una *maschera* di piombo per eliminare fotoni emessi direttamente da altri processi.

Quando arrivano i γ sugli atomi di Sm dell'anello essi hanno un'energia della diseccitazione che è la stessa di eccitazione dell'anello. In tale punto però gli atomi sono fermi.

Oltre all'eccitazione bisogna conservare energia ed impulso, e parte dell'energia del γ è spesa per mettere in moto l'atomo di samario dell'anello. Associando i quadrimpulsi:

$$\text{Sm}^* \rightarrow (M + E_0, \vec{0}) \quad (6.2.14)$$

$$\gamma \rightarrow (\omega, -\omega \vec{k}) \quad (6.2.15)$$

$$\text{Sm} \rightarrow \left(M + \frac{\omega^2}{2M}, +\omega \vec{k} \right) \quad (6.2.16)$$

e conservando il quadrimpulso, possiamo vedere:

$$\Rightarrow M + E_0 = \omega + M + \frac{\omega^2}{2M} \quad (6.2.17)$$

$$\Rightarrow \omega^2 + 2M\omega - 2ME_0 = 0 \quad (6.2.18)$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2} = -M \pm \sqrt{M^2 + 2ME_0} = -M \pm M \left(1 + \frac{2E_0}{M} \right)^{1/2}. \quad (6.2.19)$$

Prendiamo la soluzione positiva:

$$\omega = -M + M \left(1 + \frac{2E_0}{M} \right)^{1/2} \quad (6.2.20)$$

in cui E_0 è la differenza tra l'energia dello stato *eccitato* e il fondamentale del Sm, e vale $E_0 \simeq 1 \text{ MeV}$, dunque $M \simeq 150 \text{ GeV}$. Notiamo che $\omega < E_0$ e se sviluppiamo in serie:

$$\omega \simeq -M + M + E_0 - \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{M} \quad (6.2.21)$$

se ci fermiamo al primo ordine *non conserviamo l'impulso* (poiché troviamo $\omega = E_0$), quindi dobbiamo andare al secondo ordine:

$$\omega \simeq E_0 - \frac{E_0^2}{2M} \quad (6.2.22)$$

$$= 1 \text{ MeV} - \frac{10^{12} \text{ eV}^2}{300 \cdot 10^9 \text{ eV}} \quad (6.2.23)$$

$$= 1 \text{ MeV} - 3 \text{ eV} \quad (6.2.24)$$

Dunque vediamo che il fotone emesso ha un deficit energetico rispetto E_0 di $E_0^2/(2M) \sim 3 \text{ eV}$, cioè non porta via 1 MeV, bensì $1 \text{ MeV} - 3 \text{ eV}$.

La stessa cosa vale quando il γ incide sull'anello di samario, non ha E_0 che realizzerebbe la transizione; gli mancano 6 eV per fare la transizione al Sm. Infatti, considerando il processo $\gamma + \text{Sm} \rightarrow \text{Sm}^*$ (che da un punto di vista cinematico è identico al primo), per conservare l'impulso si deve considerare il rinculo di Sm^* che toglie altri eV, portando il deficit a 6 eV. Le possibili fonti per recuperare tale energia sono svariate: la larghezza di decadimento, l'agitazione termica e la cattura K.

L'agitazione termica e la larghezza di decadimento non coprono i 6 eV, ma solamente pochi meV. I 6 eV arrivano perché nella cattura K c'era un guadagno 1 MeV, il samario ha più energia, il Sm^* non è prodotto fermo, ma con un impulso iniziale, e l'energia in più è quella che serve al fotone, che quindi dà assorbimento risonante.

Con questa doppia configurazione quindi contiamo il numero dei fotoni con una certa elicità.

Se il Sm^* si muoveva nella stessa direzione di γ , allora il γ è emesso ad energia più alta e quindi solo quei γ possono dare assorbimento risonante sull'anello.

Nota. Però perché Sm^* si muove? Perché è prodotto in cattura K in cui ha liberata energia $E_0 \simeq 1 \text{ MeV}$.

6.3 Le correnti deboli

Ci sono tre processi che ci guidano nello studio delle correnti deboli:

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad \text{vs} \quad \pi^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e \quad (6.3.1)$$

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad \text{vs} \quad K^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (6.3.2)$$

$$K^+ \longrightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e \quad \text{vs} \quad K^+ \longrightarrow \pi^+ + \nu + \bar{\nu}. \quad (6.3.3)$$

Siamo partiti da un'interazione puntiforme alla Fermi con elemento di matrice costante:

$$M_{fi} = G_F \bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_\nu = G_F J_{had}^\mu J_{lep}^\mu \quad (6.3.4)$$

e abbiamo ricavato che i leptoni hanno spinori sinistrorsi.

Se consideriamo decadimenti del tipo:

$$l^- \longrightarrow e^- + \nu_l + \bar{\nu}_e \quad (6.3.5)$$

come ad esempio:

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad (6.3.6)$$

che nel caso del muone è l'unico processo di decadimento possibile, e lo possiamo studiare contraendo due correnti leptoniche:

$$[\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_\mu] [\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}]. \quad (6.3.7)$$

Dalla misura della vita media del muone si ricava la costante di Fermi ($G_F \sim 1.16 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$); sperimentalmente si ricava $\tau \simeq 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ e dal punto di vista teorico sappiamo scrivere la probabilità di decadimento come:

$$\lambda = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} = \frac{1}{\tau}. \quad (6.3.8)$$

Se ora prendiamo un altro processo, puramente leptonico, possiamo riutilizzare l'espressione (6.3.8) cambiando la massa, poiché possiamo sfruttare il *principio di universalità leptonica* che ci dice che possiamo assumere che la corrente debole sia la stessa per tutti i leptoni; per il τ :

$$\tau^- \longrightarrow \nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_e, \quad \lambda = \frac{G_F^2 m_\tau^5}{192\pi^3}. \quad (6.3.9)$$

Se τ decadde solo in e , allora useremmo direttamente quest'espressione, ma esso decade anche in adroni carichi: ricordiamo che i possibili decadimenti sono:

$$\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau, \quad \tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau, \quad \tau^- \rightarrow u + \bar{d} + \nu_\tau.$$

La λ trovata (6.3.9) va bene per un decadimento di τ in leptoni, ma bisogna capire come scrivere la larghezza totale di decadimento (considerando anche la parte di adroni). Scriviamo:

$$\tau^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \quad \Gamma_0 \quad (6.3.10)$$

$$\tau^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \quad \Gamma_0 \quad (6.3.11)$$

$$\tau^- \longrightarrow \bar{u} + d + \nu_\tau \quad 3\Gamma_0 \quad (6.3.12)$$

$$\bar{c} + s + \nu_\tau \quad (6.3.13)$$

in cui (6.3.10) e (6.3.11) sono uguali nell'assunzione che gli altri leptoni siano massless, mentre (6.3.12) corrisponde a $3\Gamma_0$, in cui 3 è il fattore di colore. Notiamo anche che (6.3.13), ovvero il decadimento in $\bar{c} + s$, non è accessibile

cinematicamente poiché non rispetta la condizione di soglia. Concludiamo dunque:

$$\Gamma_\tau = 5\Gamma_0. \quad (6.3.14)$$

Avendo misurato $\tau(\mu)$ e sapendo che:

$$\tau(\mu) = \frac{192\pi^3}{G_F^2} \frac{1}{m_\mu^5} \quad (6.3.15)$$

considerando:

$$\tau(\tau) = \frac{192\pi^3}{G_F^2} \frac{1}{m_\tau^5} \cdot \frac{1}{5} \quad (6.3.16)$$

allora facendo il rapporto tra le vite medie otteniamo:

$$\tau(\tau) = \frac{1}{5} \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^5 \tau(\mu) \quad (6.3.17)$$

$$\simeq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{32 \cdot 16} \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \quad (6.3.18)$$

$$\simeq 10^{-13} \text{ s.} \quad (6.3.19)$$

Questo risultato è in accordo con i dati sperimentali: è un test di consistenza.

6.3.1 Decadimenti deboli adronici

Confrontiamo i decadimenti di π^- :

$$\pi^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e \quad , \quad \pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu. \quad (6.3.20)$$

Avevamo visto che, includendo solo la parte cinematica, ci aspetteremmo che fosse più probabile il decadimento in e^- , ma invece si rileva che il branching ratio del decadimento in μ è più alto (10^4 volte più probabile). Ipotizzando degli elementi di matrice:

$$|\mathcal{M}_{fi}|_{l=e}^2 = |\mathcal{M}_{fi}|_{l=\mu}^2 \quad (6.3.21)$$

e ricordando che valgono:

$$p^* = \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi} \quad (6.3.22)$$

$$E^* = \frac{m_\pi^2 + m_l^2}{2m_l} \quad (6.3.23)$$

abbiamo:

$$\lambda = K p^{*2} \frac{dp^*}{dE_f} \quad (6.3.24)$$

$$= K \frac{(m_\pi^2 - m_l^2)^2}{4m_\pi^2} \frac{m_\pi^2 + m_l^2}{2m_\pi^2} \quad (6.3.25)$$

Se noi continassimo i conti arriveremmo alla predizione sbagliata che abbiamo già accennato¹. Questa mancata predizione del decadimento più probabile si può interpretare con il fatto che K non sia lo stesso per e e μ , poiché nelle interazioni deboli i leptoni carichi sono in un autostato di chiralità Left, quindi l'espressione di λ scritta è sbagliata. Abbiamo un'esperimento del tipo quello raffigurato in figura 6.9, in cui ci ricordiamo di cosa abbiamo imparato nell'esperimento di Goldhaber, ovvero che i neutrini sono sempre autostati di chiralità (ed elicità essendo massless) sinistrorsa, e di come questo influenzi l'elicità dei leptoni; infatti, se ν è sinistrorso, allora $\bar{\nu}$ è destrorso e per la conservazione del momento angolare il leptone carico dev'essere in uno stato destrorso di elicità.

L'espressione corretta per λ sarebbe:

$$\lambda' = K' \left(1 - \frac{p^*}{E^*}\right) p^{*2} \frac{dp^*}{dE_f}. \quad (6.3.27)$$

Vale:

$$\frac{p^*}{E^*} = \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{m_\pi^2 + m_l^2} \implies 1 - \frac{p^*}{E^*} = \frac{2m_l^2}{m_\pi^2 + m_l^2} \quad (6.3.28)$$

il che ci porta a:

$$\lambda = K' \frac{2m_l^2}{m_\pi^2 + m_l^2} \frac{(m_\pi^2 - m_l^2)^2 (m_\pi^2 + m_l^2)}{8m_\pi^4} \quad (6.3.29)$$

$$= \frac{K'}{4} \frac{(m_\pi^2 - m_l^2)^2}{m_\pi^4} m_l^2 \quad (6.3.30)$$

quindi:

$$\frac{\lambda(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu)}{\lambda(\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e)} = \left[\frac{m_\mu(m_\pi - m_\mu)}{m_e(m_\pi - m_e)} \right]^2 \sim \left(\frac{m_\mu}{m_e} \right)^2 \quad (6.3.31)$$

il che dà il fattore 10^4 osservato.

Facciamo qualche osservazione riguardo quello trovato. Il termine $1 - p/E$ è legato alla violazione di parità; dato il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l$, nel sistema di riposo del pione, porta ad uno stato finale in cui l^- e $\bar{\nu}$ sono emessi back to back. Vedi la figura 6.9.

Abbiamo capito che è necessario avere un leptone carico con elicità Right e chiralità Left. Sappiamo anche che le particelle massive non sono autostati

¹Infatti, se procedi con i conti che seguono trovi:

$$\frac{\lambda(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu)}{\lambda(\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e)} = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2 (m_\pi^2 + m_\mu^2)}{(m_\pi^2 - m_e^2)^2 (m_\pi^2 + m_e^2)} \sim \frac{1}{3} \quad (6.3.26)$$

in netto contrasto con il dato sperimentale 10^4 .

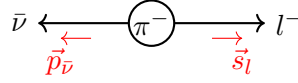


Figura 6.9

dell'elicità, e la probabilità di mixing dei due stati dipende dalla massa, secondo:

$$P = 1 - \beta = 1 - \frac{P^*}{E^*} = \frac{2m_l^2}{m_\pi^2 + m_l^2}. \quad (6.3.32)$$

Ci rendiamo conto che nel caso limite $m_l \rightarrow 0$ (elettrone), $\beta \rightarrow 1$, allora il decadimento è proibito. Il fatto che $m_e \neq 0$ permette il decadimento.

In un esperimento in cui facciamo uso dei neutrini, tipicamente produciamo fasci di neutrini facendo decadere π . Puoi vedere uno schema in figura 6.10. Infatti, il processo di decadimento dei pioni carichi permette di produrre fasci di (anti)neutrini.

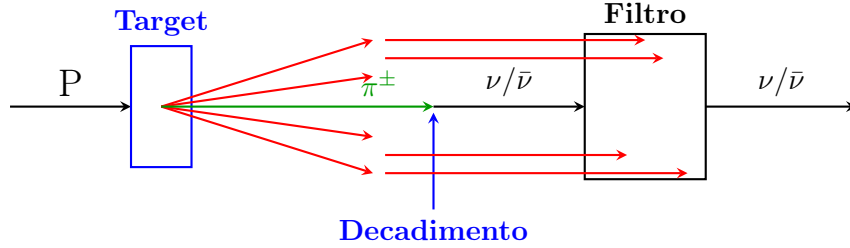


Figura 6.10

Ciò che si fa' è mandare fasci di p su un bersaglio, a valle si creeranno vari adroni, tra cui pioni con una certa carica, che poi decadranno in (anti)neutrini, e che possiamo isolare sfruttando opportuni campi EM.

In particolare, per produrre ν partiamo da π^+ , mentre invece per produrre $\bar{\nu}$ partiamo da π^- .

Notiamo anche che il rapporto tra i decadimenti:

$$\frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)} \simeq 10^{-4} \quad (6.3.33)$$

ci dice che nella maggior parte dei casi produciamo ν_μ e non ν_e , tranne 1 volta su 10.000; non c'è modo di liberarci di questo fondo. Infatti i fasci di neutrini sono prevalentemente muonici, con una combinazione di neutrini elettronici per circa una parte su 10.000. Bisogna tenerne conto in tutti i casi in cui tenere conto della composizione di un fascio è importante.

6.3.2 Mixing di Cabibbo e meccanismo GIM

Tutto il ragionamento fatto con $\pi^\pm$ si può ripetere per $K^\pm$. Anche il modo di selezionarli è simile; con solo una differenza, che possiamo notare se consideriamo i processi:

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad K^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (6.3.34)$$

e analizziamo le larghezze di decadimento. Tra i processi in cui $\Delta S = 1$ (ovvero $K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$) e $\Delta S = 0$ (cioè $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$), rispetto alla predizione, il primo è soppresso di un fattore 20. Questa evidenza è stata interpretata da Cabibbo come: la corrente adronica si può scomporre in due termini, uno a $\Delta S = 0$, $J_{\Delta S=0}^\mu$, ed uno a $\Delta S = 1$, $J_{\Delta S=1}^\mu$, cioè abbiamo una corrente che varia stranezza ed una no; la miscela delle due, per mantenere la normalizzazione, è parametrizzata dall'angolo di Cabibbo. La corrente totale la scriviamo per questo come:

$$J = \cos \theta_C J_0 + \sin \theta_C J_1. \quad (6.3.35)$$

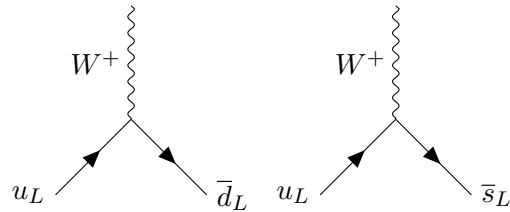
Sperimentalmente si riesce a trovare:

$$\theta_C \simeq 13^\circ \Rightarrow \sin \theta_C = 0,22 \quad (6.3.36)$$

e prendendo il rapporto abbiamo:

$$\frac{\sin^2 \theta_C}{\cos^2 \theta_C} \sim \frac{1}{20}. \quad (6.3.37)$$

In una visione più elementare, in cui lavoriamo con i quark, abbiamo i diagrammi:



$$\quad (6.3.38)$$

e possiamo scrivere:

$$(\bar{d}_L \cos \theta_C + \bar{s}_L \sin \theta_C) \gamma_\mu u_L = J_{adr,\mu}. \quad (6.3.39)$$

Quindi sono possibili accoppiamenti nuovi, che portano a correnti cariche CC , in cui si ha $u \leftrightarrow d, s$.

Nei processi visti la carica cambia; infatti, abbiamo correnti cariche, ma ci sono anche correnti neutre, in cui nel vertice non cambia la carica. Per le correnti neutre abbiamo accoppiamenti del tipo:

$$NC \propto (\bar{d}_L \cos \theta_C + \bar{s}_L \sin \theta_C) \gamma_\mu (d_L \cos \theta_C + s_L \sin \theta_C) \quad (6.3.40)$$

$$\bar{d}_L \gamma_\mu d_L \cos^2 \theta_C + \bar{s}_L \gamma_\mu s_L \sin^2 \theta_C + [\bar{d}_L \gamma_\mu d_L + \bar{s}_L \gamma_\mu s_L] \cos \theta_C \sin \theta_C \quad (6.3.41)$$

Consideriamo i processi, in cui il primo è un processo carico, mentre il secondo neutro:

da cui possiamo vedere come variano stranezza e carica. Nel decadimento di sinistra abbiamo carica e stranezza dello stato iniziale $+1$, mentre nello stato finale 0 , per cui abbiamo $\Delta Q = \Delta S$. Nel decadimento di destra vediamo ancora carica e stranezza $+1$ nello stato iniziale, ma in quello finale abbiamo rispettivamente $+1$ e 0 , per cui $\Delta Q \neq \Delta S$.

Se fossero presenti i termini con ΔS e ΔQ allora questi processi sarebbero entrambi possibili; sperimentalmente il primo è osservato, mentre il secondo è 10^{11} volte meno probabile. La spiegazione teorica avviene tramite il meccanismo GIM, il quale ci dice che dobbiamo considerare tutti i processi nelle interazioni deboli, dunque oltre al doppietto:

dobbiamo anche includere un altro doppietto, formato da un nuovo quark c charm, simile ad u :

Così facendo abbiamo nuovi termini, in aggiunta a quelli già esistenti, della forma:

$$(-\bar{d}_L \sin \theta + \bar{s}_L \cos \theta) \gamma_\mu (-d_L \sin \theta + s_L \cos \theta). \quad (6.3.44)$$

Facendo le somme risulta che nella corrente totale ci sono ancora termini con accoppiamenti $\bar{d}_L \gamma^\mu d_L$, $\bar{s}_L \gamma^\mu s_L$, che ci piacciono, ma si elidono contributi del tipo $\bar{d}_L \gamma^\mu s_L$ e $\bar{s}_L \gamma^\mu d_L$, i quali davano problemi.

Quindi il meccanismo GIM spiega, introducendo un nuovo quark (c), il fatto che il secondo processo sia meno probabile e che le uniche correnti neutre non sopresse siano quelle senza cambio di flavours.

Il Modello Standard attuale ha tre famiglie di quark:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad (6.3.45)$$

e per mescolarle abbiamo la matrice 3×3 CKM (Cabibbo-Kobayashi-Moskawa).

6.4 Correnti neutre

Si vuole verificare l'effettiva esistenza di processi deboli mediati da correnti neutre. Nei processi mediati da correnti neutre non cambia la carica. Il processo in cui è osservata questa evidenza è il seguente:

$$\nu_\mu + N \longrightarrow \nu_\mu + X \quad (6.4.1)$$

in cui N è incidente e sono esperimenti effettuati in camere a bolle, che sfruttano fasci di (anti)neutrini. Vediamo come è fatto l'esperimento tipico: innanzitutto si produce un fascio di neutrini che è mandato su un bersaglio N . Come al solito in questi esperimenti, il bersaglio è anche un elemento sensibile. Il ν_μ è mandato in una camera con fluidi molto densi e si "fotografa" ciò che accade in queste camere.

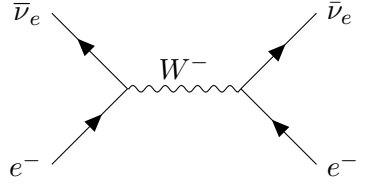
Il ν interagisce con un nucleone, che "si rompe", e si osservano i frammenti dovuti alla rottura. Due possibili eventi sono raffigurati in seguito:

$$NC : \nu_\mu + N \longrightarrow \nu_\mu + X \quad \text{---} \quad \begin{array}{c} \text{Diagramma per NC: } \nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + X \\ \text{Un fascio di neutrini } \nu_\mu \text{ (linee rosse) interagisce con un nucleone } N \text{ (punto nero).} \\ \text{Il neutrino uscente } \nu_\mu \text{ (linea blu) è mostrato separatamente.} \end{array} \quad (6.4.2)$$

$$CC : \nu_\mu + N \longrightarrow \mu^- + X \quad \text{---} \quad \begin{array}{c} \text{Diagramma per CC: } \nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + X \\ \text{Un fascio di neutrini } \nu_\mu \text{ (linee rosse) interagisce con un nucleone } N \text{ (punto nero).} \\ \text{Il muone uscente } \mu^- \text{ (linea blu) è mostrato separatamente.} \end{array} \quad (6.4.3)$$

Noi cerchiamo eventi di *correnti neutre*, *senza muone*, ma i due processi sono difficilmente riconoscibili a causa della presenza di un fondo. Infatti, essendo

che è chiaramente fuori dal range sperimentale. Il diagramma è:



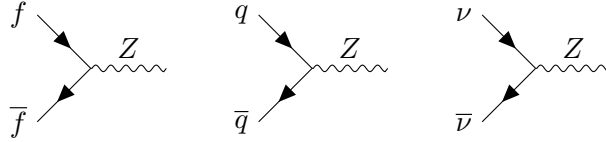
$$, \quad \bar{\nu} + e^- \rightarrow \bar{\nu} + e^- \quad (6.4.8)$$

Siamo sicuri che è un processo di corrente neutra, poiché tipicamente il ν che interagisce è il ν_μ ma $1/1000$ è ν_e .

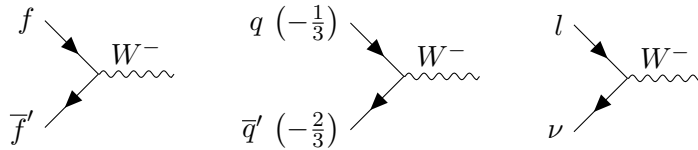
L'osservazione di questo processo è la prova *incontrovertibile dell'esistenza delle correnti neutre*.

6.5 I bosoni W e Z

I bosoni W e Z sono stati scoperti negli esperimenti UA1 e UA2 al collisore $Spp\bar{p}S$ al Cern (~ 1980). La teoria prevedeva che tali bosoni fossero massivi, anche se non sapeva bene quale fosse il valore preciso, si ipotizzava che avessero massa compresa tra 40 e 100 GeV. Dalla lagrangiana della teoria si vede che essi si accoppiano ad una coppia $f\bar{f}$ (solo Z):



mentre i bosoni $W^\pm$ si accoppiano ad un fermione ed al suo coniugato di carica:



Per i processi del W^+ si utilizzano i processi coniugati di carica. Questi sono i vertici possibili: si cercano esperimenti per indagare su un intervallo di masse il più alto possibile. Si sceglie un collisore $p - \bar{p}$:

$$\overrightarrow{p} \quad \quad \overleftarrow{\bar{p}}$$

così che i bosoni saranno originati da accoppiamenti $q/\bar{q}$. Infatti, sperimentalmente non è possibile gestire fasci di neutrini, e in aggiunta al fatto che data la grande incertezza su m_Z anche uno scan energetico con processi $l\bar{l} \rightarrow Z$ è poco pratico, si studiano i processi $q\bar{q} \rightarrow Z$ e $q\bar{q}' \rightarrow W$ in collider

adronici $p - \bar{p}$.

Nota. Abbiamo due fasci di protoni, ma a livello fondamentale sono i partoni ad interagire; un partone trasporta una frazione x dell'impulso del protone (determinata secondo le PDF), x varia da evento ad evento, quindi anche l'energia della collisione partone-partone cambia! In questo modo esploriamo un ampio range di possibili valori di massa.

Dunque, la collisione a livello fondamentale è tra q e $\bar{q}$, quindi usiamo un fascio di p ed un fascio di $\bar{p}$ per sfruttare collisioni tra q e $\bar{q}$ di valenza. Bisogna stabilire l'energia dei fasci: se definiamo P_1 il quadri-impulso di p e P_2 il quadri-impulso di $\bar{p}$, allora l'interazione è tra un quark q (di p) di quadri-impulso p_1 tale che $p_1 = x_1 P_1$ e un antiquark $\bar{q}$ (di $\bar{p}$) di quadri-impulso p_2 tale che $p_2 = x_2 P_2$. Possiamo definire un'asse z di riferimento e definire:

$$P_1 = (E_b, E_b \hat{u}_z) \quad , \quad P_2 = (E_b, -E_b \hat{u}_z) \quad (6.5.1)$$

in cui trascuriamo la massa di p e $\bar{p}$, poiché anche considerando la stima inferiore per m_Z , cioè $m_Z \sim 40$ GeV, abbiamo che:

$$m_Z^2 \geq (40 \text{ GeV})^2 = 1600 \text{ GeV}^2 \gg 1 \text{ GeV}^2 \quad (\text{massa a riposo dei } p).$$

Calcoliamo l'energia del centro di massa:

$$s = (P_1 + P_2)^2 \quad (6.5.2)$$

$$= P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 \quad (6.5.3)$$

$$\simeq 4E_b^2 \quad (6.5.4)$$

ma l'energia dell'interazione effettiva è:

$$\hat{s} = (p_1 + p_2)^2 \quad (6.5.5)$$

$$= (x_1 P_1 + x_2 P_2)^2 \quad (6.5.6)$$

$$\simeq 2x_1 x_2 P_1 \cdot P_2 \quad (6.5.7)$$

$$= x_1 x_2 s. \quad (6.5.8)$$

È conveniente un collider adronico, poiché fissando s l'energia dell'esperimento è ancora variabile grazie alla distribuzione statistica di x_1 e x_2 . Bisogna settare s dell'esperimento. Se il processo è risonante, allora la sezione d'urto è massima se $\hat{s} = m^2$; la richiesta è dunque:

$$s = \frac{1}{x_1 x_2} m^2 \quad (6.5.9)$$

con $m^2 \simeq 100 \text{ GeV}^2$. Però non conosciamo x_1 e x_2 , che cambiano da evento ad evento, hanno una loro distribuzione e c'è un valore più probabile. Il

valore più probabile è $x \simeq 1/6$: x è compreso tra 0 e 1 ma ci sono 3 q di valenza e gluoni; i gluoni hanno circa metà del quadrimpulso del protone e la rimanente metà è divisa tra i quark di valenza, quindi $1/6$. Per cui:

$$x_1 \simeq x_2 \simeq 1/6 \quad (6.5.10)$$

il che implica:

$$s \simeq 6^2 m^2 \quad (6.5.11)$$

$$\Rightarrow \sqrt{s} \simeq 6m \quad (6.5.12)$$

$$\Rightarrow 2E_b \simeq 6m \quad (6.5.13)$$

$$\Rightarrow E_b \simeq 3m \simeq 300 \text{ GeV} \quad (6.5.14)$$

Abbiamo però il problema di generare un fascio di $\bar{p}$ che non si trova in natura. In genere per realizzare fascio di adroni utilizziamo un fascio di protoni che collide su un target (tipicamente Cu) e genera vari adroni, tra i quali filtriamo i $\bar{p}$, tramite filtri, assorbitori e deflettori. Però lo spettro dei $\bar{p}$ è in questo modo *casuale*, quindi dovremmo dare una "spinta" diversa ad ogni $\bar{p}$, per questo anche l'accelerazione non è banale. Per questo motivo si utilizza il *raffreddamento stocastico* che riduce la dispersione in impulso.

I bosoni di gauge sono instabili, dunque li osserviamo tramite prodotti di decadimento. Come abbiamo detto, abbiamo degli accoppiamenti tra bosoni e fermioni: l'accoppiamento di decadimento è lo stesso. La teoria prevedeva per il decadimento del W uno stato finale del tipo $q\bar{q}'$, o $e\bar{\nu}_e$, $\mu\bar{\nu}_\mu$, $\tau\bar{\nu}_\tau$, tutti accessibili. Per l'universalità leptonica ogni decadimento leptonico avviene $1/9$ delle volte (per ogni famiglia), mentre in $q\bar{q}'$ $6/9$. Per il bosone Z si ha:

$$q\bar{q} \quad 70/100 \quad (6.5.15)$$

$$e^- e^+ \quad 3/100 \quad (6.5.16)$$

$$\mu^- \mu^+ \quad 3/100 \quad (6.5.17)$$

$$\tau^- \tau^+ \quad 3/100 \quad (6.5.18)$$

$$\nu\bar{\nu} \quad 21/100. \quad (6.5.19)$$

Dobbiamo rivelare tali stati guardando lo stato finale: in prima battuta vorremmo cercare decadimenti in $q\bar{q}$, visto che per entrambi i bosoni sono i più probabili, ma in realtà vediamo un fascio di adroni, un *jet*, che *sono i decadimenti più probabili*. Cerchiamo dunque due jet. Faremo massa invariante e cercheremo la risonanza.

Incontriamo però un problema. Abbiamo detto però che siamo partiti da un collisore $p\bar{p}$, in cui avviene un numero molto elevato di interazioni elementari. I prodotti di queste interazioni (molti adroni) si sovrappongono ai jet del decadimento e la situazione in cui ci troviamo è come cercare un ago in un pagliaio. Infatti, non c'è un solo processo in cui si producono

jet, ce ne sono altri in cui W e Z non sono coinvolti, che costituiscono un background molto intenso e si trova che la sezione d'urto dei processi forti molto maggiore di quella studiata. Ad esempio:

$$q\bar{q} \longrightarrow q\bar{q} \longrightarrow 2J \quad (6.5.20)$$

$$gg \longrightarrow gg \longrightarrow 2J \quad (6.5.21)$$

$$g\bar{q} \longrightarrow g\bar{q} \longrightarrow JJ \quad (6.5.22)$$

$$gg \longrightarrow gg \longrightarrow JJ \quad (6.5.23)$$

che sono tutti **processi forti** e quindi hanno costante di accoppiamento più alta. In termini di sezione d'urto, il primo processo debole ha $\sigma \simeq \text{nb}$, mentre quelli forti $\sigma \simeq 10/10^2 \text{ mb}$. Quindi:

$$\frac{\text{Segnale}}{\text{Fondo}} = \frac{nb}{10/10^2 \text{ mb}} \quad (6.5.24)$$

$$\simeq \frac{10^{-9}}{10^{-2}/10^{-1}} \quad (6.5.25)$$

$$\simeq 10^{-7}/10^{-8} \quad (6.5.26)$$

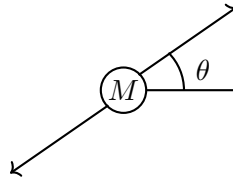
dunque, come già detto, il fondo è troppo alto e non lo utilizziamo. Usiamo come stati finali, dove andare a cercare i bosoni, dei canali di decadimento leptonici carichi, $e\nu$ e $\mu\nu$ per W ed e^+e^- e $\mu^+\mu^-$ per Z ; non usiamo τ perché decade subito e il ν è difficile da rilevare.

Ricostruiamo Z (e W) dalla massa invariante di e^+/e^- o μ^+/μ^- .

Però se abbiamo stati finali con leptoni che cosa cerchiamo? Cerchiamo situazioni in cui sono presenti due proprietà, quali: sono processi *isolati* e hanno un impulso trasverso p_T *grande*.

Parliamo di stati **isolati** per riferirci a situazioni in cui siamo lontani dai jets, così che non possiamo confondere gli eventuali prodotti di decadimento di mesoni, insieme a W nell'urto $p\bar{p}$. Quindi, sono eventi in cui dove ricostruiamo l intorno non ci deve essere nulla: di solito poche tracce di adroni o decadimenti di leptoni immersi in jet, questi si scartano.

Per **impulso trasverso** intendiamo impulso trasverso all'asse dei fasci (che assumiamo z), quindi nel piano xy . Se prendiamo un bosone M e ne prendiamo il decadimento:



allora nel sistema in cui M è a riposo i leptoni sono emessi back to back; considerare l'impulso trasverso vuol dire considerare $p_T = p \sin \theta$ (θ in figura).

Se $M \simeq 100$ GeV e, trascurando m_e e m_μ , per conservazione dell'impulso nel sistema di riferimento in cui il bosone decade si ha $p^* \equiv M/2 \simeq 50$ GeV. Però nella collisione M non è prodotto a riposo, bensì si muove lungo z , quindi bisogna usare le *trasformazioni di Lorentz*, che non cambiano ciò che accade lungo l'asse trasverso. Per cui se:

$$p_T = p^* \sin \theta = \frac{M}{2} \sin \theta \quad (6.5.27)$$

non cambia esso può assumere valori da 0 a 50 GeV. Ciò che si osserva è che se $\theta = 0$, $p_T = 0$; ma ci sono eventi in cui $p_T \simeq 50$ GeV e non ci sono altri meccanismi per produrre leptoni ad impulso trasverso così alto.

L'esperimento può essere schematizzato come segue:

$$(E_b, E_b \hat{n}_z) \longrightarrow \longleftarrow (E_b, -E_b \hat{n}_z) \quad (6.5.28)$$

nella collisione il quadrimpulso si conserva, dunque si ha $\vec{P}_p = -\vec{P}_{\bar{p}}$, per cui:

$$P_{tot} = (2E_b, \vec{0}) = P_f \quad (6.5.29)$$

Inoltre, nello stato finale abbiamo vari prodotti, per cui per il W^+ , prodotto da quark che possono avere impulsi diversi:

$$\begin{aligned} p + \bar{p} &\longrightarrow W + X \\ W &\rightarrow l + \nu \end{aligned}$$

si ha:

$$\sum_f p_f^\mu = 0 \implies \begin{cases} \sum_f \vec{p}_{T,f} = 0 \\ \sum_f p_{z,f} = 0 \end{cases} \quad (6.5.30)$$

che nelle componenti trasverse è:

$$(\vec{p}_T)_l + (\vec{p}_T)_\nu + \sum_k (\vec{p}_T)_X = 0 \quad (6.5.31)$$

e lungo z :

$$(p_z)_l + (p_z)_\nu + \sum_k (p_z)_X = 0 \quad (6.5.32)$$

dunque, non troppo è utile. Ricorda che le somme $\sum_k$ si intendono fatte sui jets.

Le relazioni trovate, ovvero (6.5.31) e (6.5.32), le utilizziamo per analizzare gli eventi, anche se la seconda relazione (6.5.32) è poco utile.

Parliamo prima della relazione (6.5.32). Poiché il W è prodotto da quark che possono avere impulsi diversi, si ha:

$$p_{z,l} + p_{z,\nu} + p_{z,W} \neq 0. \quad (6.5.33)$$

Tuttavia, ciò non consente di ottenere informazioni su $p_{z,W}$ a causa dell'indeterminazione su $\sum_{jet} p_z$. Infatti le particelle emesse lungo la linea di fascio, cioè con $p_T \sim 0$, non vengono rivelate, non essendo possibile posizionare rivelatori lungo l'asse di fascio. Infatti, il rivelatore è un cilindro attorno all'asse dei fasci, ma non è ermetico lungo l'asse dei fasci, per questo non sappiamo misurare $\sum_{jet} p_z$.

Parliamo della relazione (6.5.31). Il moto trasverso dei partoni in $p/\bar{p}$ è inferiore ai 400 MeV (moto di Fermi), alle energie in gioco esso è dunque trascurabile e si può assumere $\vec{p}_{T,W} = 0$ e dunque:

$$(\vec{p}_T)_l + (\vec{p}_T)_\nu = 0 \quad , \quad \sum_k (\vec{p}_T)_X = 0. \quad (6.5.34)$$

Le quantità misurate sono $\vec{p}_{T,l}$ e $\sum_{jet} \vec{p}_T$, da cui si ricava $\vec{p}_{T,\nu}$ come impulso trasverso mancante:

$$\vec{p}_{T,\nu} = - \left(\vec{p}_{T,l} + \sum_{jet} \vec{p}_T \right). \quad (6.5.35)$$

Nota che anche $\sum_{jet} \vec{p}_T$ è misurabile, ma gli unici jet considerati sono quelli allineati al fascio, e hanno di conseguenza $\vec{p}_T$ trascurabile. Infatti, se non c'è un buco nel rivelatore allora $p_{T,l} + p_{T,\nu}$ è molto piccolo, quindi anche $\sum_k p_{T,X}$ è piccola; infatti se fosse grande non potrebbe avere "buchi" tipicamente solo in avanti.

Osservazione. Consideriamo che x_1 e x_2 cambiano da evento ad evento, $x_1 \neq x_2$ diversi, dunque produciamo W in moto lungo z , ma non conosciamo il suo impulso. Però conosciamo bene p_e^{tot} , dunque, misuriamo p_e e se riuscissimo a misurare $(p_z)_X$, allora potremmo stimare p_z . Però nella realtà molte X finiscono in avanti e non le misuriamo, proprio perché il rivelatore non è ermetico in avanti.

Parliamo ora, in modo leggermente più dettagliato, dell'esperimento.

È costruito come (dall'interno all'esterno): drift chamber, un dipolo, un calorimetro EM, un calorimetro HAD e una camera a drift per muoni.

Le proprietà che possiede sono:

- **Z:** $m \simeq 91$ GeV, $\Gamma \simeq 2.5$ GeV. Le sue proprietà sono state indagate a LEP con grande precisione (collisore e^+e^-). Da lì sappiamo anche il numero di famiglie di neutrini: $N_\nu = 3$.
- **W:** $m \simeq 80$ GeV, $\Gamma \simeq 2.0$ GeV.

La massa dello Z è stata misurata tramite la ricerca di una risonanza. Per la W non si procede allo stesso modo poiché non esistono collisori $\bar{\nu}\nu$; infatti

nel caso dello Z vediamo masse invarianti, mentre per il W non misuriamo i neutrini. L'idea, per quest'ultima stima, è di usare la distribuzione di eventi in funzione del p_T del leptone carico. Vogliamo utilizzare:

$$\frac{dN}{dp_T} \quad (6.5.36)$$

ma abbiamo visto che $p_T = \frac{M}{2} \sin \theta^*$ è invariante per trasformazioni di Lorentz. Dobbiamo fare assunzioni sulla distribuzione. Assumiamo che $\frac{dN}{d \cos \theta^*}$ non sia singolare e poi passiamo a $\frac{dN}{dp_T}$ calcolando lo Jacobiano:

$$p_T^2 = \left(\frac{M}{2}\right)^2 \sin^2 \theta^* = \left(\frac{M}{2}\right)^2 (1 - \cos^2 \theta^*) \quad (6.5.37)$$

il che implica il cambio:

$$2p_T dp_T = \left(\frac{M}{2}\right)^2 2 \cos \theta^* d \cos \theta^* \quad (6.5.38)$$

$$\Rightarrow \frac{d \cos \theta^*}{dp_T} = \frac{p_T}{\cos \theta^*} \left(\frac{2}{M}\right)^2 = \frac{p_T}{\left(\frac{M}{2}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{p_T}{M/2}\right)^2}} \quad (6.5.39)$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dp_T} = \frac{dN}{d \cos \theta^*} \frac{p_T}{\left(\frac{M}{2}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{p_T}{M/2}\right)^2}}. \quad (6.5.40)$$

Questo vuol dire che quando $p_T \rightarrow M/2$, si ha $dN/dp_T \rightarrow \infty$, quindi se lo misuriamo nella distribuzione reale troviamo un picco (*Jacobian peak*), non previsto dall'andamento teorico. Infatti, c'è un altro effetto da considerare. Da evento a evento la m_W cambia poiché ha una larghezza di 2 GeV, quindi i vari contributi si "appiattiscono". Vedi la figura 6.11. Dunque, imputiamo alle differenze tra previsione ed esperimento, la risoluzione sperimentale e la larghezza di risonanza di W .

Possiamo identificare, in modo simile, anche delle tracce relative al decadimento di Z . Anche in questo caso si guardano dei decadimenti leptonici, ma questa volta con delle caratteristiche aggiuntive: isolati, ad alto impulso trasverso, leptoni della stessa famiglia, carica e p_T opposti.

Osservando entrambi i prodotti di decadimento, la massa di Z si ottiene semplicemente da:

$$m_Z = (p_{\bar{l}} + p_l)^2. \quad (6.5.41)$$

Una volta ottenuta una stima per m_Z è possibile utilizzare un collider e^+e^- per caratterizzare meglio la curva di risonanza (esperimenti a LEP e SNC). I risultati sono $m_Z \sim 91$ GeV e $\Gamma_Z \sim 2.5$ GeV.

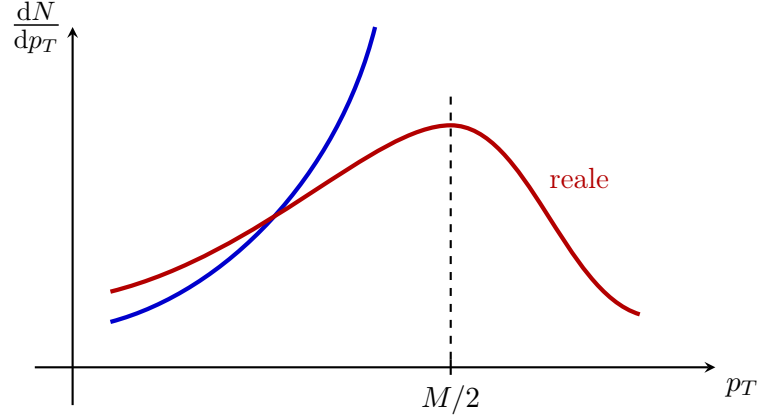


Figura 6.11

6.6 Mesoni K^0 e $\bar{K}^0$

I mesoni K^0 e $\bar{K}^0$ sono stati osservati nei seguenti processi di interazione forte:

$$\pi^- + p \longrightarrow \Lambda + K^0 \quad (6.6.1)$$

$$\pi^+ + n \longrightarrow \Lambda + K^+ \quad (6.6.2)$$

$$\pi^+ + p \longrightarrow \Sigma^+ + K^0 + p \quad (6.6.3)$$

che non sono altro che processi di interazione tra pioni carichi e materia. Essi sono **processi forti**: dunque che conservano la stranezza (S) e sono alla base della classificazione dei mesoni K in due doppietti di isospin:

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix} \\ S = +1, \quad S = -1.$$

Per convenzione si è assegnata stranezza $S = +1$ al primo scoperto (K^+).

I kaoni sono autostati di stranezza, ma decadono tramite **interazione debole**, infatti hanno vite medie dell'ordine dei ns. In questi decadimenti (deboli) la stranezza non si conserva: $[H_{deb}, S] \neq 0$.

Si pensava inizialmente, fino al 1964, che, poiché le interazioni deboli violassero la $\mathbb{P}$ -parità, per trovare autostati dell'hamiltoniana di decadimento si dovesse assumere che $\mathcal{H}_{weak}$ conservasse il prodotto CP (cioè che $[H_{deb}, CP] = 0$). Tuttavia, applicando l'operatore di coniugazione di carica C al K^0 , si ottiene l'antiparticella $\bar{K}^0$ (per convenzione si prende coefficiente +1):

$$C |K^0\rangle = + |\bar{K}^0\rangle, \quad C |\bar{K}^0\rangle = + |K^0\rangle \quad (6.6.4)$$

quindi K^0 e $\bar{K}^0$ *non sono* autostati di CP . Ricordando che $J^P(K^0) = 0^-$, e $J^P(\bar{K}^0) = 0^-$ cerchiamo combinazioni lineari che siano autostati di CP . Otteniamo:

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \implies CP|K_1\rangle = +1|K_1\rangle \quad (6.6.5)$$

$$|K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \implies CP|K_2\rangle = -1|K_2\rangle \quad (6.6.6)$$

in cui dobbiamo riassorbire una fase. Questi stati sono distinti sperimentalmente dalle loro vite medie molto differenti:

$$\tau(K_1) \ll \tau(K_2) \quad (6.6.7)$$

poiché si trova:

$$\tau(K_1) \simeq 90 \text{ ps} \quad , \quad \tau(K_2) \simeq 60 \text{ ps}. \quad (6.6.8)$$

Potremmo anche interrogarci sul perché otteniamo valori così diversi, ma ci rendiamo subito conto che K_1 e K_2 decadono in stati finali di pioni, che ovviamente hanno diverso valore di CP . Infatti:

$$K_1 \rightarrow \pi\pi \text{ (Stato finale con } CP = +1\text{)}.$$

$$K_2 \rightarrow \pi\pi\pi \text{ (Stato finale con } CP = -1\text{)}.$$

Il decadimento in due pioni ha uno spazio delle fasi molto più grande del decadimento in tre pioni, rendendo la vita media di K_1 molto più breve.

6.6.1 CP di $\pi\pi$ e $\pi\pi\pi$

Studiamo in questa sezione la CP degli stati prodotto dei decadimenti di $K_{1,2}$. Ci serve ricordare che $J^P(\pi) = 0^-$, così come $J^P(K) = 0^-$.

Possiamo avere diverse possibilità, di cui analizzeremo le proprietà di CP , ovvero:

$$K_1 \longrightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (6.6.9)$$

$$K_1 \longrightarrow \pi^0 + \pi^0 \quad (6.6.10)$$

$$K_2 \longrightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \quad (6.6.11)$$

$$K_2 \longrightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0. \quad (6.6.12)$$

Consideriamo prima $K_1 \rightarrow \pi^0 + \pi^0$, in cui se conserviamo il momento angolare totale:

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \pi \quad \pi \\ J & 0 & 0 \quad 0 \quad l_{orb} \end{array} \quad (6.6.13)$$

che vuol dire:

$$\vec{J} = \vec{S}_\pi + \vec{S}_\pi + \vec{l}_{orb} = 0 \implies \vec{l}_{orb} = \vec{0} \implies l = 0. \quad (6.6.14)$$

Se applichiamo $\mathbb{CP}$:

$$\mathbb{CP} |\pi^0 \pi^0\rangle = \mathbb{C} \{ \mathbb{P} |\pi^0 \pi^0\rangle \} \quad (6.6.15)$$

$$= \mathbb{C} \{ P_\pi^2 (-1)^{l_{orb}} |\pi^0 \pi^0\rangle \} \quad (6.6.16)$$

$$= P_\pi^2 (-1)^{l_{orb}} C_\pi^2 |\pi^0 \pi^0\rangle \quad (6.6.17)$$

$$= +1 |\pi^0 \pi^0\rangle. \quad (6.6.18)$$

Vediamo allo stesso modo $K_1 \rightarrow \pi^+ \pi^-$:

$$\mathbb{CP} |\pi^+ \pi^-\rangle = \mathbb{C} \{ P |\pi^+ \pi^-\rangle \} \quad (6.6.19)$$

$$= \mathbb{C} \{ P_\pi^2 (-1)^{l_{orb}} |\pi^+ \pi^-\rangle \} \quad (6.6.20)$$

$$= P_\pi^2 (-1)^{l_{orb}} (-1)^l |\pi^+ \pi^-\rangle \quad (6.6.21)$$

$$= (+1) |\pi^+ \pi^-\rangle. \quad (6.6.22)$$

Analizziamo $K_2 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0$, in cui:

$$\mathbb{P} |\pi^0 \pi^0 \pi^0\rangle = P_\pi^3 (-1)^{l_{12}} (-1)^{l_3} |\pi^0 \pi^0 \pi^0\rangle \quad (6.6.23)$$

se conserviamo il momento angolare, associando $\vec{l}_{12}$ alla prima coppia e $\vec{l}_3$ al terzo pione rispetto al centro di massa degli altri due:

$$\vec{J} = \vec{S}_\pi + \vec{S}_\pi + \vec{S}_\pi + \vec{l}_{12} + \vec{l}_3 = \vec{0} \quad (6.6.24)$$

troviamo:

$$\vec{l}_{12} + \vec{l}_3 = 0 \implies l_{12} = l_3 \quad (6.6.25)$$

appliciamo $\mathbb{CP}$:

$$\mathbb{CP} |\pi^0 \pi^0 \pi^0\rangle = \mathbb{C} \{ \mathbb{P} |\pi^0 \pi^0 \pi^0\rangle \} \quad (6.6.26)$$

$$= P_\pi^3 (-1)^{l_{12}} (-1)^{l_3} C^3 |\pi^0 \pi^0 \pi^0\rangle \quad (6.6.27)$$

$$= - |\pi^0 \pi^0 \pi^0\rangle \quad (6.6.28)$$

in cui ricordiamo che $\mathbb{C} |\pi^0\rangle = +1 |\pi^0\rangle$.

Vediamo come ultimo caso $K_2 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$:

$$\mathbb{CP} |\pi^+ \pi^- \pi^0\rangle = \mathbb{C} \{ P_\pi^3 (-1)^{l_{12}} (-1)^{l_3} |\pi^+ \pi^- \pi^0\rangle \} \quad (6.6.29)$$

$$= P_\pi^3 (-1)^{l_{12}} (-1)^{l_3} (-1)^{l_{12}} |\pi^+ \pi^- \pi^0\rangle \quad (6.6.30)$$

$$= (-1)^{l_3+1} |\pi^+ \pi^- \pi^0\rangle \quad (6.6.31)$$

dunque, abbiamo trovato un risultato con un risultato che non è fisso e può potenzialmente violare CP .

Però potremmo chiederci quale sia il più probabile tra i possibili. È ragionevole che sia quello più favorito energeticamente, infatti essendoci una barriera con un termine $l(l+1)$, la possiamo ridurre scegliendo $l = 0$. Dunque, il valore più favorito è $l = 0$.

Anche guardando il Q -value vediamo:

$$Q_{value} = m_K - 3m_\pi \simeq 500 \text{ MeV} - 420 \text{ MeV} \simeq 80 \text{ MeV} \quad (6.6.32)$$

che favorisce cinematicamente il caso $l = 0$, che è anche quello che minimizza l'energia.

6.6.2 Mixing $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$

C'è la possibilità che gli autostati di stranezza S , cioè K^0 e $\bar{K}^0$, evolvano nel tempo come autostati di CP , dunque con H_{weak} , come K_1 e K_2 . Stiamo assumendo che $[H_{weak}, CP] = 0$, i processi per cui CP è violata li studieremo in seguito.

A seconda del tipo di decadimento, capiamo se sono K^0 o $\bar{K}^0$ e si misura la frequenza con cui K^0 diventa $\bar{K}^0$.

Supponiamo che a $t = 0$ ci sia solo $|K^0\rangle$, dunque:

$$|\psi(0)\rangle = |K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1\rangle + |K_2\rangle). \quad (6.6.33)$$

L'evoluzione temporale è dettata dall'interazione di cui sono autostati (H_{weak}). Definendo la frequenza complessa:

$$\omega_i = m_i - i\frac{\Gamma_i}{2} \quad (6.6.34)$$

dove m_i è la massa e Γ_i la larghezza di decadimento, allora si ha:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K_1\rangle e^{-i\omega_1 t} + \frac{1}{\sqrt{2}}|K_2\rangle e^{-i\omega_2 t}. \quad (6.6.35)$$

Lavorando nel sistema di riferimento di riposo e riesprimendo $|K_1\rangle$ e $|K_2\rangle$ in termini di $|K^0\rangle$ e $|\bar{K}^0\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)e^{-i\omega_1 t} + \frac{1}{2}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)e^{-i\omega_2 t} \quad (6.6.36)$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-i\omega_1 t} + e^{-i\omega_2 t})|K^0\rangle + \frac{1}{2}(e^{-i\omega_1 t} - e^{-i\omega_2 t})|\bar{K}^0\rangle. \quad (6.6.37)$$

Nota che la trasformazione tra basi è:

$$\begin{cases} |K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \\ |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \end{cases} \implies \begin{cases} |K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1\rangle + |K_2\rangle) \\ |\bar{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1\rangle - |K_2\rangle) \end{cases}. \quad (6.6.38)$$

La probabilità che al tempo t ci sia ancora un K^0 è:

$$\text{Prob}(K^0, t|K^0) = |\langle K^0|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}|e^{-i\omega_1 t} + e^{-i\omega_2 t}|^2 \quad (6.6.39)$$

$$\text{Prob}(\bar{K}^0, t|K^0) = |\langle \bar{K}^0|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}|e^{-i\omega_1 t} - e^{-i\omega_2 t}|^2 \quad (6.6.40)$$

Ricordando che:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}\{z_1 z_2^*\}$$

e considerando la parte reale del prodotto incrociato $\text{Re}\{e^{-i\omega_1 t} e^{i\omega_2^* t}\}$, si può dimostrare velocemente che si ottiene un termine di interferenza proporzionale a $\cos(\Delta m t)$, dove $\Delta m = m_1 - m_2$:

$$\text{Re}\{e^{-i\omega_1 t} e^{i\omega_2^* t}\} = \exp\left\{i\left(m_1 - i\frac{M_1}{2}\right)t - i\left(m_2 - i\frac{M_2}{2}\right)t\right\} \quad (6.6.41)$$

$$= \exp\left\{i(m_1 - m_2)t - \frac{1}{2}(M_1 + M_2)t\right\} \quad (6.6.42)$$

$$= \exp\left\{\frac{M_2 - M_1}{2}t\right\} \cos(m_1 - m_2)t \quad (6.6.43)$$

dunque si ha:

$$\text{Prob}(K^0 \rightarrow K^0) = \frac{1}{4}\left\{e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + 2e^{-\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2}t} \cos(\Delta m t)\right\} \quad (6.6.44)$$

$$\text{Prob}(K^0 \rightarrow \bar{K}^0) = \frac{1}{4}\left\{e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} - 2e^{-\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2}t} \cos(\Delta m t)\right\} \quad (6.6.45)$$

Il cui andamento si può vedere in figura 6.12.

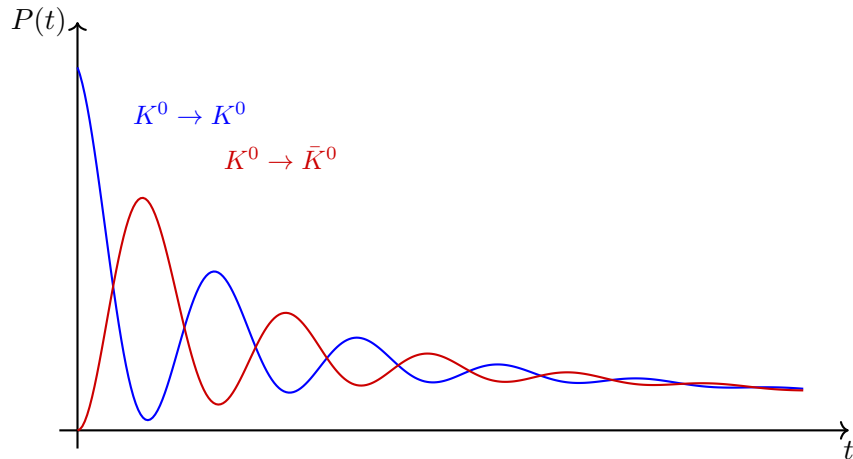


Figura 6.12

6.6.3 Rigenerazione e misura di Δm

L'oscillazione è smorzata dall'esponenziale e il principale termine smorzante è $\Gamma_1 = \frac{1}{90} \text{ ps}^{-1}$. Definiamo la frequenza come $\omega = \Delta m$, che è puramente teorica, poiché nella pratica è differente, visto che spesso si compiono molte oscillazioni prima di decadere. Si misura:

$$\Delta m \simeq 3.5 \mu\text{eV} \implies \frac{\Delta m}{m} \simeq 7 \cdot 10^{-15} \quad (6.6.46)$$

in cui consideriamo $m \sim 500 \text{ MeV}$. Dato $\Delta m \simeq 3.5 \mu\text{eV}$ otteniamo un periodo $\sim 200 \text{ ps}$. Dunque, vediamo che il tempo caratteristico di smorzamento è minore di quello di oscillazione.

Parliamo del processo di rigenerazione. Per le misure di Δm vengono sfruttati delle misure di interferenza. In particolare, se consideriamo la produzione tramite interazione forte: $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda$, se scambiamo π^- e K^0 , otteniamo la reazione d'urto:

$$\bar{K}^0 + p \rightarrow \pi^+ + \Lambda. \quad (6.6.47)$$

È legittimo anche il processo coniugato di carica:

$$K^0 + \bar{p} \rightarrow \pi^- + \bar{\Lambda}. \quad (6.6.48)$$

Non è possibile il processo $K^0 + p \rightarrow \dots$ poiché non conserverebbe contemporaneamente stranezza e numero barionico. Infatti, $K^0 + p \rightarrow \pi^- + \pi$ è una reazione non possibile poiché viola la conservazione del numero barionico, mentre $K^0 + p \rightarrow \pi + \Lambda$ viola la stranezza.

Costruiamo un setup sperimentale volto a sfruttare il processo di rigenerazione. Puoi vedere la figura 6.13. Dobbiamo fare alcune approssimazioni: abbiamo un fascio monocromatico di particelle, gli elementi assorbitori sono sottili (dunque il loro tempo di attraversamento è trascurabile), è presente solo l'interazione forte e la sezione d'urto dell'interazione forte è ∞ (cioè c'è assorbimento completo).

Ciò che ci aspettiamo dall'esperimento è: il primo assorbitore rimuove tutti i $\bar{K}^0$, poiché essendo composto da materia ordinaria contiene p e non $\bar{p}$, per cui lascia passare tutti i K^0 ; appena dopo il primo assorbitore lo stato del sistema è:

$$|\psi(0)\rangle = |K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|K_1\rangle + |K_2\rangle \right). \quad (6.6.49)$$

Il fascio così composto si propaga, con la componente K_1 che decade immediatamente in $\pi\pi$ (lo rivedremo dopo). Dopo una lunghezza L , di qualche metro, il fascio arriva al secondo assorbitore all'istante:

$$t = \frac{1}{\beta\gamma c} \quad (6.6.50)$$

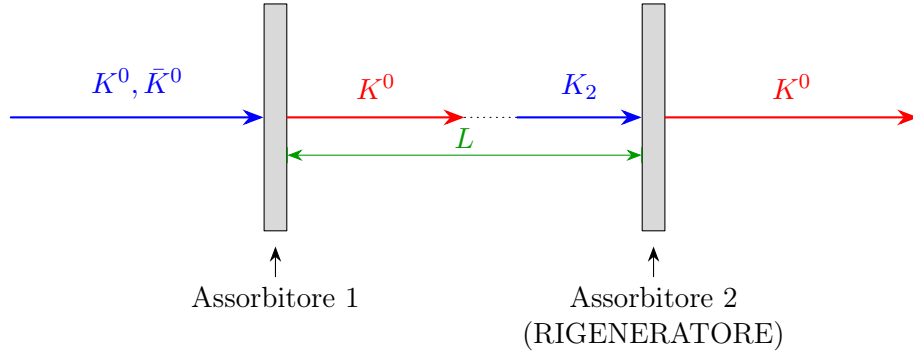


Figura 6.13: Posizioniamo l'assorbitore 1 a $x = 0$ e $t = 0$, mentre il 2 in $x = L$ raggiunto al tempo $t = L/\gamma\beta c$.

e a questo punto lo stato è:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left(e^{-i\omega_1 t} + e^{-i\omega_2 t} \right) |K^0\rangle + \frac{1}{2} \left(e^{-i\omega_1 t} - e^{-i\omega_2 t} \right) |\bar{K}^0\rangle. \quad (6.6.51)$$

A questo punto il secondo assorbitore rimuove i $\bar{K}^0$ e lo stato appena successivo è quindi:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left(e^{-i\omega_1 t} + e^{-i\omega_2 t} \right) |K^0\rangle \quad (6.6.52)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(e^{-i\omega_1 t} + e^{-i\omega_2 t} \right) \left(|K_1\rangle + |K_2\rangle \right). \quad (6.6.53)$$

Vengono così rigenerati dei K_1 , che decadono in $\pi\pi$. Misurando i conteggi di eventi $K_1 \rightarrow \pi\pi$ prima e dopo il rigeneratore si ottiene:

$$\frac{N_{2\pi}(t)}{N_{2\pi}(0)} = \frac{1/2 \left| 1/2 (e^{-i\omega_1 t} + e^{-i\omega_2 t}) \right|^2}{1/2}. \quad (6.6.54)$$

Dallo studio del modulo quadro è possibile ricavare il valore di Δm .

Nota. Come misuriamo $N(t)$: spostiamo il blocco nel tempo; quello che conta è quanti N abbiamo a t rispetto all'inizio, tanto prendiamo il rapporto e scompare l'incertezza su quanti N c'erano a $t = 0$.

6.6.4 Violazione di $\mathbb{CP}$

Quello che analizzeremo è stato il primo sistema, nel 1964, in cui è stata verificata la violazione della simmetria $\mathbb{CP}$. Puoi vedere uno schema dell'apparato sperimentale in figura 6.14. Prima abbiamo assunto che $[H_{weak}, \mathbb{CP}] = 0$, che implica che gli autostati di $\mathbb{CP}$, ovvero K_1 e K_2 , corrispondano rispettivamente agli autostati di decadimento (H_{weak}) K_s e K_L .

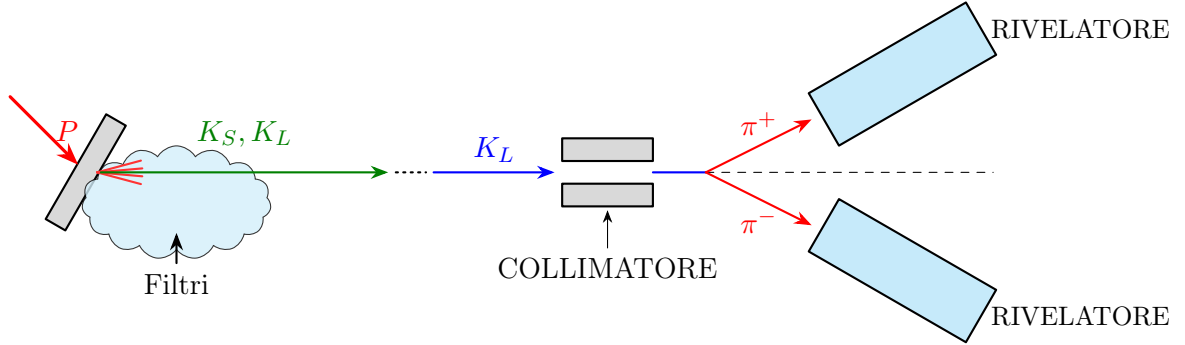


Figura 6.14

Ciò che facciamo è utilizzare un fascio di protoni, a 30 GeV, per produrre K^0 e $\bar{K}^0$ a circa 1 GeV. In questo modo i cammini medi:

$$\lambda = \gamma\beta c\tau = \frac{p}{m}\tau \quad (6.6.55)$$

valgono rispettivamente 5 cm per K_s e 30 cm per K_L . Ponendo il resto dell'esperimento a 18 m dalla sorgente si possono isolare i K_L e studiarne il decadimento. I detector permettono di definire il p^μ dei pioni carichi, mentre π^0 non viene rivelato. Nel decadimento $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ ci si aspetta che nel calcolo della massa invariante si ottenga $(p_{\pi^+} + p_{\pi^-})^2 < m_K^2$.

Infatti, ci aspettiamo anche che i K_2 decadano in 3π per conservare $CP = 1$; ma osserviamo che 1 volta su 1000 K_2 decade in 2π e quindi viola CP. In linea di principio il terzo π può scappare e non essere misurato. Possiamo rendercene conto misurando gli impulsi.

In realtà, circa lo 0.2% delle volte si osserva che $(p_{\pi^+} + p_{\pi^-})^2 = m_K^2$, con $\vec{p}_{\pi^+} + \vec{p}_{\pi^-}$ parallelo alla linea di fascio. Ciò implica che non c'è nessun terzo pione che ci sfugge e dimostra l'esistenza del processo $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-$, che viola la simmetria $\mathbb{CP}$ nelle interazioni deboli.

Appendici

Appendice A

Unità naturali

Vediamo in questa rapida Appendice cosa si intende con unità naturali.

A.1 Unità naturali

Studiamo in questa sezione cosa si intende con unità naturali. In Fisica è molto comune utilizzare le *God givens units*, ossia, le cosiddette unità naturali. I tipi indipendenti di grandezze sono la lunghezza $[L]$, il tempo $[T]$, la massa $[M]$ e - se consideriamo anche la termodinamica e la meccanica statistica - la temperatura $[T]$. In natura esistono delle costanti dimensionali universali, quali la velocità della luce c , la costante di Plank ridotta $\hbar$, la costante gravitazionale di Newton G_N e la costante di Boltzmann k . Usualmente vengono definite come unità naturali quelle in cui si pone:

$$\hbar = c = 1 \quad (\text{A.1.1})$$

e di conseguenza quando si modificano le quantità (in unità standard):

$$\begin{cases} \hbar = 6.66 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s} \\ c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ \hbar c \sim 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \end{cases} \implies \begin{cases} \hbar = 1 \\ c = 1 \\ \hbar c = 1. \end{cases}$$

Dire che la velocità della luce è una grandezza unitaria adimensionale implica che le unità di lunghezza e tempo sono equivalenti:

$$[L] = [T] \quad (\text{A.1.2})$$

di conseguenza anche:¹

$$[E] = [\vec{p}] = [M] \quad (\text{A.1.4})$$

¹Come conseguenza della relazione tra massa ed energia della Relatività Speciale:

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (\text{A.1.3})$$

Per una forza F si ha:

$$[F] = [EL^{-1}] = [ML^{-1}] \quad (\text{A.1.5})$$

per cui una quantità, tipo $\hbar$, che ha le dimensioni di un'azione, ovvero $[ET]$, in unità naturali è:

$$[\hbar] = [ET] = [ML] = 1 \implies [M] = [L^{-1}]. \quad (\text{A.1.6})$$

Dalle relazioni viste tra le grandezze si ha solo una di esse realmente indipendente. Scegliendo la lunghezza come indipendente vale:

$$[L] = [T] \quad , \quad [E] = [\vec{p}] = [M] = [L^{-1}] \quad , \quad [F] = [L^{-2}]. \quad (\text{A.1.7})$$

Tipicamente, in QFT, le sezioni d'urto sono espresse in unità naturali, ma ciò non è molto comodo da utilizzare nel mondo fisico, poiché a noi servono unità standard. In generale (non solo per le sezioni d'urto), ricordando quali siano le unità di misura di $\hbar$ e c è possibile passare dall'espressione di una grandezza in unità naturali in una sua espressione in unità del S.I. moltiplicando opportune potenze di $\hbar$ e c . Si ha:

$$[\hbar] = ML^2T^{-1} \quad ; \quad [c] = LT^{-1}.$$

Vediamo un esempio. Prendiamo la sezione d'urto di Thomson in unità naturali e rendiamola in unità standard. Abbiamo il processo:

$$\gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^-$$

con l' e^- libero e la sezione d'urto:

$$\sigma_T = \frac{8}{3}\pi \frac{\alpha^2}{m_e^2} \quad (\text{A.1.8})$$

che riscriviamo come:

$$\sigma_T = \frac{8}{3}\pi \frac{\alpha^2}{m_e^2} \hbar^x c^y \quad (\text{A.1.9})$$

di cui analizzando le dimensioni:

$$\begin{aligned} L^2 &= M^{-2} (ML^2T^{-1})^x (LT^{-1})^y \\ L^2 &= M^{x-2} L^{2x+y} T^{-x-y}. \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} L : 2 = 2x + y \\ M : 0 = x - 2 \\ T : 0 = -x - y \end{cases} \implies \begin{cases} x = -y \\ x = 2 \\ y = -2. \end{cases}$$

Dunque la sezione d'urto è:

$$\sigma_T = \frac{8}{3}\pi \frac{\alpha^2}{m_e^2} \left(\frac{\hbar}{c}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{(m_e c^2)^2} (\hbar c)^2 \sim 64 \text{ fm}^2 = 64 \cdot 10^{-2} \text{ b}. \quad (\text{A.1.10})$$

Bibliografia

- [1] Claude Amsler. *Nuclear and Particle Physics*. Lug. 2015. ISBN: 978-0-7503-1141-0. DOI: [10.1088/978-0-7503-1140-3](https://doi.org/10.1088/978-0-7503-1140-3).
- [2] Giles Barr et al. *Particle Physics in the LHC Era*. Mar. 2016. ISBN: 9780198748557. DOI: [10.1093/acprof:oso/9780198748557.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198748557.001.0001).
- [3] Alessandro Bettini. *Introduction to Elementary Particle Physics*. Mag. 2008. ISBN: 978-0-521-88021-3. DOI: [10.1017/CB09780511809019](https://doi.org/10.1017/CB09780511809019).
- [4] Sylvie Braibant, Giorgio Giacomelli e Maurizio Spurio. *Particelle e interazioni fondamentali. Il mondo delle particelle*. UNITEXT. Dordrecht, Netherlands: Springer, 2012. ISBN: 978-88-470-2753-4. DOI: [10.1007/978-88-470-2754-1](https://doi.org/10.1007/978-88-470-2754-1).
- [5] R. N. Cahn e G. Goldhaber. *The experimental foundations of particle physics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. ISBN: 978-0-521-52147-5. DOI: [10.1017/CB09780511609923](https://doi.org/10.1017/CB09780511609923).
- [6] Nicolo' Cartiglia. *MANUALE DI ESERCIZI IN FISICA DELLE PARTICELLE*. Levrotto&Bella, 2015. ISBN: 9788882181864.
- [7] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley-VCH, Weinheim, 2008. DOI: [10.1002/9783527618460](https://doi.org/10.1002/9783527618460).
- [8] Mark Thomson. *Modern particle physics*. New York: Cambridge University Press, ott. 2013. ISBN: 978-1-107-03426-6. DOI: [10.1017/CB09781139525367](https://doi.org/10.1017/CB09781139525367).