

Compendio al corso di:
Meccanica Statistica,
Il gruppo di Rinormalizzazione

Gabriele Cembalo

[gCembalo.github.io](https://github.com/gCembalo)

Last update: 23/04/2026

Contents

1	Introduzione	2
1.1	Blocking di spin	2
1.2	Decimazione	2
2	Modello di Ising in $d = 1$	2
3	Modello di Ising in $d = 2$	5
3.1	Applicazione RG	7
3.2	Stima $K'(K_1, K_2)$	8
3.3	Classe di universalità	10

Disclaimer

Questa è un rapida Appendice alle note del corso di *Meccanica Statistica*. Si tratterà solamente il gruppo di rinormalizzazione.

1 Introduzione

È un approccio molto generale allo studio delle fluttuazioni a larga scala tipiche dei fenomeni di transizione di fase. Si applica anche in altri contesti, in particolare in QFT. Fu introdotto da Kadanoff negli anni '60 e perfezionato da Wilson (1971).

L'idea è di riscrivere la funzione di partizione (o altre osservabili) in termini di un reticolo contenente una frazione degli spin originari ed avente un passo reticolare più ampio. Le interazioni tra gli spin di questo nuovo reticolo saranno fisicamente a scala più grande.

1.1 Blocking di spin

Possiamo raggiungere il nostro scopo rimpiazzando "blocchi" di spin contigui con una sola variabile di spin il cui valore è determinato - secondo una qualche regola - dalla configurazione degli spin originari nel blocco. Vedi la figura 1.

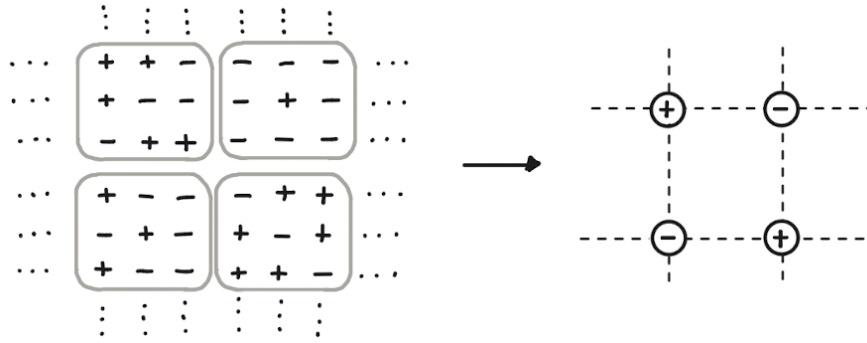


Figure 1

Se il sistema ha dimensionalità d e il blocco di spin ha lato b , allora il numero di spin N' e il passo reticolare a' del nuovo reticolo sono connessi ad N ed a del reticolo originario da:

$$N' = N/b^d, \quad a' = ba. \quad (1)$$

Nell'esempio in figura 1 si ha $d = 2$ e $b = 3$; dunque, in ogni blocco vi sono $9 = 3^2$ spins.

Per determinare il valore della variabile collettiva di spin S' associata ad un blocco contenente gli spin $\{s_i\}$ ($i = 1 \dots b^d$) si usa tipicamente la **regola della maggioranza**:

$$S' = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum s_i > 0 \quad (\text{la maggioranza degli spin nel blocco vale } 1) \\ -1 & \text{se } \sum s_i < 0 \quad (\text{la maggioranza degli spin nel blocco vale } -1) \\ s_k & \text{se } \sum s_i = 0 \quad (\text{per dirimere il caso di parità}) \end{cases} \quad (2)$$

in cui s_k è un particolare spin nel blocco, fissato arbitrariamente, ad esempio quello nell'angolo in alto a sx (ind=1).

1.2 Decimazione

Una procedura alternativa ma nella sostanza equivalente al blocking è quella di effettuare parzialmente la somma sulle configurazioni, sommando su una frazione degli spin in modo che i rimanenti siano disposti su un reticolo di passo maggiore. Questa è la tecnica che useremo negli esempi espliciti seguenti.

2 Modello di Ising in $d = 1$

L'esempio più semplice in cui applicare questa procedura è il modello di Ising monodimensionale, in cui per semplicità prendiamo a zero il campo esterno h .

Abbiamo dunque una catena di N spin, raffigurata in figura 2, e vogliamo effettuare una "decimazione", sommando parzialmente sugli spin di indice pari ($s_2, s_4, \dots$). Gli spin rimanenti ($s_1, s_3, s_5, \dots$) formano una catena di $N/2$ spin con passo reticolare doppio. Vedi la figura 3

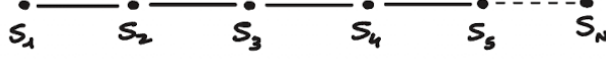


Figure 2

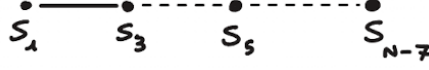


Figure 3

Per effettuare la somma parziale scriviamo la funzione di partizione per la catena 2 come segue (ricordando $K = \beta J$):

$$Z(K, N) = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N} e^{K(s_1 s_2 + s_2 s_3)} e^{K(s_3 s_4 + s_4 s_5)} \dots \quad (3)$$

in modo che ogni spin di indice pari (su cui sommiamo) compare in un fattore solo. In tal modo, la somma su $s_2, s_4, \dots$ ci dà:

$$Z(K, N) = \sum_{s_1, s_3, s_5, \dots} \underbrace{(e^{K(s_1 + s_3)} + e^{-K(s_1 + s_3)})}_{\substack{\uparrow \\ s_2 = 1}} \underbrace{(e^{K(s_3 + s_5)} + e^{-K(s_3 + s_5)})}_{\substack{\uparrow \\ s_4 = -1}} \times (\dots) \quad (4)$$

Cerchiamo ora di riscrivere tale espressione come la funzione di partizione del modello di Ising definito sulla catena 3, con un accoppiamento possibilmente diverso K' , a meno di un fattore overall.

Focalizzandosi su una particolare coppia di spin s, s' nella catena 3 richiediamo che $\forall$ confignaz. di s, s' :

$$e^{K(s+s')} + e^{-K(s+s')} = f(K) e^{K' s s'} \quad (5)$$

in cui a sinistra abbiamo il fattore che appare nell'eq. (4), mentre quello di destra è il fattore che si ha nel modello di Ising sulla catena 3.

Vi sono due casi indipendenti di configurazioni:

$$s = s' = \pm 1 \implies e^{2K} + e^{-2K} = f(K) e^{K'} \quad (6)$$

$$s = -s' = \pm 1 \implies 2 = f(K) e^{-K'} \quad (7)$$

dividendo le due equazioni otteniamo:

$$\cosh(2K) = e^{2K'} \quad (8)$$

da cui:

$$K' = \frac{1}{2} \log[\cosh(2K)]. \quad (9)$$

Dalla (7) ricaviamo allora:

$$f(K) = 2e^{K'} = 2[\cosh(2K)]^{1/2}. \quad (10)$$

Sostituendo la (5) nella (4) riusciamo dunque ad avere la funzione di partizione come segue:

$$Z(K, N) = \sum_{s_1, s_3, s_5, \dots} f(K) e^{K' s_1 s_3} f(K) e^{K' s_3 s_5} \dots \quad (11)$$

ovvero sia:

$$Z(K, N) = [f(K)]^{N/2} Z(K', N/2). \quad (12)$$

Introduciamo la quantità:

$$g(K) = \frac{1}{N} \log Z(K, N) \quad (13)$$

che nel limite termodinamico è intensiva, quindi dipende solo da K . In termini della free energy $G = -\frac{1}{\beta} \log Z$, è:

$$g(K) = -\beta \frac{G(K, N)}{N} = -\frac{1}{\kappa T} \frac{G(K, N)}{N} \quad (14)$$

è (meno) l'energia libera per sito rapportata all'energia termica κT . Dalla (12) segue che:

$$g(K) = \frac{1}{N} \left\{ \frac{N}{2} \log f(K) + \log Z(K', N/2) \right\} \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2} \log f(K) + \frac{1}{2} \frac{1}{N/2} \log Z(K', N/2) \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2} \log f(K) + \frac{1}{2} g(K') \quad (17)$$

L'insieme di queste relazioni, insieme alla (9), costituiscono le equazioni del gruppo di rinormalizzazione per la trasformazione considerata (somma su metà degli spin e passaggio a un reticolo con passo reticolare doppio). Stiamo parlando di:

$$\begin{cases} K' = \frac{1}{2} \log[\cosh(2K)] \\ g(K') = 2g(K) - \log\{2[\cosh(2K)]^{1/2}\}. \end{cases} \quad (18)$$

Notiamo che in questa trasformazione si ha sempre:

$$K' < K. \quad (19)$$

Inoltre, vi sono solo due punti fissi "banali". Infatti se imponiamo $K' = K$, ovvero sia:

$$K = \frac{1}{2} \log[\cosh(2K)] \quad (20)$$

allora troviamo solo due soluzioni:

- $K = 0$ che corrisponde a un sistema "libero", completamente disordinato.
- $K = \infty$ nel qual caso gli spin sono tutti allineati.

Sia un sistema completamente disordinato ($K = 0$) che uno completamente ordinato ($K = \infty$) appaiono uguali a qualsiasi scala li si esamini, e quindi è naturale e consistente che questi due valori di K rappresentino dei punti fissi della trasformazione di riscaldamento (18). Partendo da un qualsivoglia valore finito di $K > 0$ e iterando la trasformazione (18), si ha che la costante di accoppiamento decresce via via verso il punto fisso banale $K = 0$. Il *flusso del gruppo di rinormalizzazione* può essere rappresentato come in figura 4.

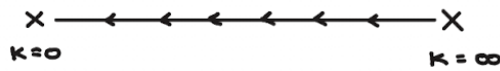


Figure 4

Ciò è coerente con quel che ci dice la soluzione esatta del modello in $d = 1$, per la quale non vi è alcuna transizione di fase e per qualsiasi $T > 0$ ($K < \infty$) non si ha ordine a lungo raggio — non c'è magnetizzazione spontanea. Pertanto andando a esaminare le fluttuazioni a scale via via maggiori troviamo meno ordine, cioè K diventa minore.

Nota. La procedura di decimazione (somma parziale sugli spin) che abbiamo seguito è del tutto equivalente ad uno spin blocking con blocchi di lunghezza $b = 2$, come in figura 5.



Figure 5

Consideriamo ad esempio il blocco $\{s_1, s_2\}$. La regola della maggioranza, eq. (2), ci dice che la variabile S' associata al blocco vale:

$$\begin{array}{ccc}
 s_1 & s_2 & S' \\
 + & + & + \\
 + & - & + \\
 - & + & - \\
 - & - & -
 \end{array} \implies S' = s_1 \quad (21)$$

e la somma sulle configurazioni si riscrive come

$$\sum_{S'=s_1} \left(\sum_{s_2} \dots \right) \quad (22)$$

la quale coincide esattamente con la procedura di decimazione che abbiamo seguito.

3 Modello di Ising in $d = 2$

Applichiamo nuovamente il metodo della decimazione sommando su metà degli spin secondo lo schema di figura 6. Gli spin rimanenti formano un reticolo quadrato di passo $a' = \sqrt{2}a$, (ruotato di 45° rispetto a quello originale).

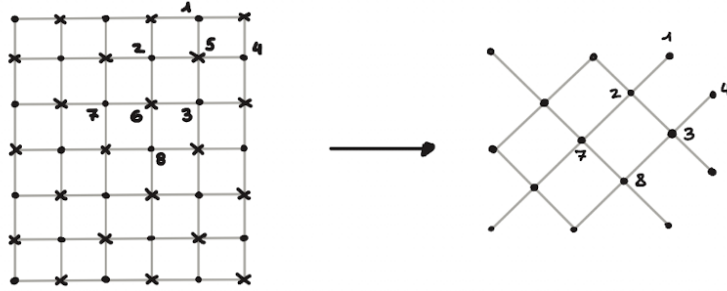


Figure 6: Nota che nella figura di destra gli spin crocettati sono quelli su cui si somma.

Partizioniamo Z in modo che ogni spin che viene sommato appaia in un fattore solo:

$$Z(K, N) = \sum_{s_1, s_2, \dots} e^{K(s_1+s_2+s_3+s_4)s_5} e^{K(s_2+s_3+s_7+s_8)s_6} \dots \quad (23)$$

sommando su $s_5, s_6, \dots$ otteniamo così:

$$\begin{aligned}
 Z(K, N) = & \sum_{\text{spin rimanenti}} \left(e^{K(s_1+s_2+s_3+s_4)} + e^{-K(s_1+s_2+s_3+s_4)} \right) \times \\
 & + \left(e^{K(s_2+s_3+s_7+s_8)} + e^{-K(s_2+s_3+s_7+s_8)} \right) \times \dots \quad (24)
 \end{aligned}$$

Vorremmo ora portare il membro di destra nella forma standard di Ising per il nuovo reticolo, con un coupling diverso K' . Focalizzandoci su un fattore, ad esempio quello contenente $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ (spin ai vertici di una "plachetta" del nuovo reticolo), come in figura 7, allora la richiesta è:

$$e^{K(s_1+s_2+s_3+s_4)} + e^{-K(s_1+s_2+s_3+s_4)} = f(K) e^{K'(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_4 + s_4 s_1)} \quad (25)$$

dove i termini ad esponente indicano le interazioni tra primi vicini.

Tuttavia questa richiesta *non* può venire soddisfatta siccome:

- Ci sono 2 incognite, $f(K)$ e K' .

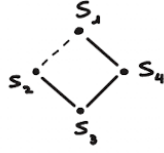
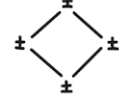


Figure 7: Nota che nella figura di destra gli spin crocettati sono quelli su cui si somma.

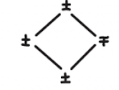
- Ci sono 4 configurazioni indipendenti di $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$:

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = \pm 1$$



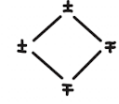
(26)

$$s_1 = s_2 = s_3 = -s_4 = \pm 1$$



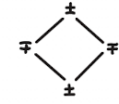
(27)

$$s_1 = s_2 = -s_3 = -s_4 = \pm 1$$



(28)

$$s_1 = -s_2 = s_3 = -s_4$$



(29)

che, inserite in (25), danno 4 equazioni.

È dunque inconsistente assumere che nel nuovo reticolo ci siano solamente interazioni ai primi vicini. In effetti nel reticolo originario lo spin s_5 interagiva con tutti gli spin s_1, s_2, s_3, s_4 . L'operazione di somma su di esso media interazioni fra tutti questi spin. Assumiamo dunque che nel nuovo reticolo vi siano anche un'interazione ai "secondi vicini" ($s_1 s_3$ e $s_2 s_4$) e un'interazione a 4 spin. Promuoviamo dunque la richiesta (25) a:

$$e^{K(s_1+s_2+s_3+s_4)} + e^{-K(s_1+s_2+s_3+s_4)} = f(K) \exp \left\{ \frac{1}{2} K_1 (s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_4 + s_4 s_1) + \right. \quad (30)$$

$$\left. + K_2 (s_1 s_3 + s_2 s_4) + K_3 s_1 s_2 s_3 s_4 \right\}. \quad (31)$$

Per i 4 casi indipendenti (26) - (29) otteniamo le seguenti 4 relazioni:

$$e^{4K} + e^{-4K} = f(K) e^{2K_1 + 2K_2 + K_3} \quad (32)$$

$$e^{2K} + e^{-2K} = f(K) e^{-K_3} \quad (33)$$

$$2 = f(K) e^{-2K_2 + K_3} \quad (34)$$

$$2 = f(K) e^{-2K_1 + 2K_2 + K_3} \quad (35)$$

dividendo la (32) per la (35) otteniamo:

$$\cosh(4K) = e^{4K_1} \quad (36)$$

da cui:

$$K_1 = \frac{1}{4} \log[\cosh(4K)]. \quad (37)$$

Dividendo la (32) per la (34) otteniamo:

$$\cosh(4K) = e^{2K_1} e^{4K_2} = [\cosh(4K)]^{1/2} e^{4K_2} \quad (38)$$

da cui:

$$K_2 = \frac{1}{8} \log[\cosh(4K)] = \frac{K_1}{2}. \quad (39)$$

Dividendo la (33) per la (34) abbiamo:

$$\cosh(2K) = e^{2K_2} e^{-2K_3} = [\cosh(4K)]^{1/4} e^{-2K_3} \quad (40)$$

da cui:

$$K_3 = \frac{1}{8} \log[\cosh(4K)] - \frac{1}{2} \log[\cosh(2K)]. \quad (41)$$

Dalla (34) otteniamo infine:

$$f(K) = 2e^{K_2 - K_3} = 2 \exp \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) \log[\cosh(4K)] + \frac{1}{2} \log[\cosh(2K)] \right\} \quad (42)$$

da cui:

$$f(K) = 2[\cosh(4K)]^{1/8} [\cosh(2K)]^{1/2}. \quad (43)$$

La funzione di partizione si riscrive come:

$$Z(K, N) = [f(K)]^{N/2} \sum_{\substack{\text{spin} \\ \text{rimanenti}}} \exp \left\{ \frac{K_1}{2} (s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_4 + s_4 s_1) + K_2 (s_1 s_3 + s_2 s_4) + K_3 s_1 s_2 s_3 s_4 \right\} \times \dots \quad (44)$$

in cui nei puntini mettiamo un fattore analogo per ogni "plachetta" di 4 spin rimanenti.

Notiamo che i link primi vicini (come $s_2 s_3$) appaiono in due fattori di plachetta, mentre quelli secondi vicini (come $s_1 s_3$) solo in uno. Vedi la figura 8.

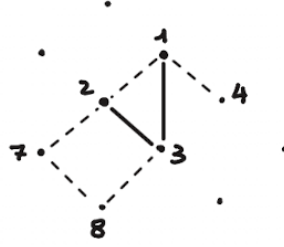


Figure 8

Pertanto la (44) si scrive come:

$$Z(K, N) = [f(K)]^{N/2} \sum_{\substack{N/2 \text{ spin} \\ \text{rimanenti}}} \exp \left\{ K_1 \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j + K_2 \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j + K_3 \sum_{\text{plaq}} s_i s_j s_k s_l \right\} \quad (45)$$

dove con $\sum'$ intendiamo la somma sui primi vicini, con $\sum''$ quella dei secondi vicini e con $\sum^{pl}$ quella sulle placchette.

Ricordiamo che la formulazione della funzione di partizione era:

$$Z(K, N) = \sum_{N \text{ spin}} \exp \left\{ K \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j \right\}. \quad (46)$$

Dopo la somma su una frazione degli spin, si sono generati nuovi tipi di interazione presenti in (45) ma non nella (46). Per poter applicare il gruppo di rinormalizzazione (RG) dobbiamo passare a lavorare in uno spazio a *multi-couplings* (vedi in seguito).

3.1 Applicazione RG

Possiamo applicare il RG in modo approssimato facendo delle assunzioni semplificatorie sul ruolo dei couplings K_2 e K_3 .

Se trascuriamo completamente l'effetto di K_2 e K_3 , l'equazione di trasformazione del RG è semplicemente:

$$Z(K, N) = [f(K)]^{N/2} Z(K_1, N/2) \quad (47)$$

con:

$$K_1 = \frac{1}{4} \log[\cosh(4K)]. \quad (48)$$

Essa è del tutto analoga a quella del caso 1d, eq. (18); non ammette punti fissi non banali, ha un diagramma di flusso del tipo 4 e non prevede quindi transizione ferromagnetica. Questa approssimazione brutale conduce quindi a risultati *qualitativamente* sbagliati!

Supponiamo invece di continuare a trascurare K_3 , ma ipotizziamo che l'effetto delle interazioni ai secondi vicini parametrizzate da K_2 sia, efficacemente, di modificare l'accoppiamento ai primi vicini:

$$K_1 \sum_{\langle i,j \rangle}' s_i s_j + K_2 \sum_{\langle i,j \rangle}'' s_i s_j \sim K'(K_1, K_2) \sum_{\langle i,j \rangle}' s_i s_j. \quad (49)$$

In tale ipotesi, la (45) diviene:

$$Z(K, N) = [f(K)]^{N/2} Z(K', N/2). \quad (50)$$

In termini di $g(K) = 1/N \log Z(K, N)$ questo ci dà (come nella (14)):

$$g(K) = \frac{1}{2} \ln f(K) + \frac{1}{2} g(K') \quad (51)$$

da cui, usando la (43):

$$g(K') = 2g(K) - \log\{2[\cosh(4K)]^{1/8}[\cosh(2K)]^{1/2}\}. \quad (52)$$

3.2 Stima $K'(K_1, K_2)$

Però potremmo chiederci a questo punto come possiamo stimare $K'(K_1, K_2)$? Consideriamo la situazione in cui tutti gli spin sono allineati, quindi $s_i s_j = 1 \forall$ coppia. Il numero di coppie prime vicine e seconde vicine è uguale e vale:

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{N}{2} = N \quad (53)$$

in cui il fattore $1/2$ è per evitare il doppio conteggio, mentre $N/2$ ci dà il numero di siti del nuovo reticolo. Vedi la figura 9, in cui le linee "solide" rappresentano primi vicini, mentre le linee tratteggiate i secondi vicini.

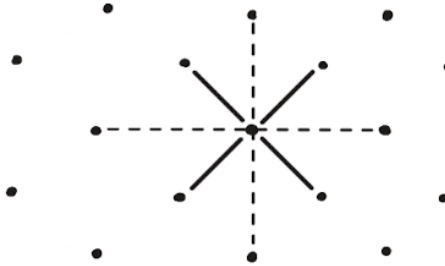


Figure 9

Si ha dunque:

$$K_1 \sum_{\langle i,j \rangle}' s_i s_j = N K_1 \quad , \quad K_2 \sum_{\langle i,j \rangle}'' s_i s_j = N K_2 \quad (54)$$

e, in questa situazione, possiamo incorporare l'effetto dei secondi vicini ponendo:

$$K_1 \rightarrow K' = K_1 + K_2 = \frac{3}{2} K_1 \quad (55)$$

dove nel secondo step abbiamo tenuto conto della (39). Dalla (37) quindi otteniamo infine (assumendo che la (55) valga approssimativamente):

$$K' \sim \frac{3}{8} \log[\cosh(4K)]. \quad (56)$$

Questa trasformazione, a differenza della (48), *ammette un punto fisso non banale*. Infatti la condizione di invarianza:

$$K' = \frac{3}{8} \log[\cosh(4K)] = K \quad (57)$$

ha soluzione numerica:

$$K_c \approx 0.506 \dots \quad (58)$$

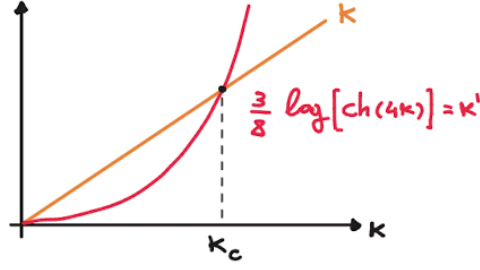


Figure 10

vedi il grafico della funzione in figura 10.

Tale valore non è molto lontano dal valore critico esatto:

$$K_c \sim 0.44 \dots \quad (59)$$

a cui si ha la transizione di fase, ricordando che avevamo trovato l'equazione:

$$e^{2K_c} = 1 + \sqrt{2} \implies K_c = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \sim 0.44.$$

Notiamo che, come si vede dal grafico, si ha:

$$\text{per } K < K_c, \quad K' < K \quad \text{per } K > K_c, \quad K' > K. \quad (60)$$

Il flusso del RG è dunque rappresentabile come in figura 11. In cui $K = 0$ e $K = \infty$ sono un punto stabile, mentre il punto K_c è un punto fisso instabile (*punto critico*). K_c è detto instabile perché se per una fluttuazione me ne esco, il flusso del RG ce ne allontaniamo ancora di più.

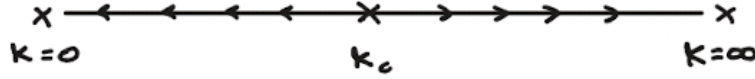


Figure 11

Si ha:

- Per $K > K_c$, se con iterazioni successive esaminiamo il sistema su scale via via più grandi lo vediamo più ordinato; nel limite TD c'è magnetizzazione spontanea. Siamo dunque nella fase ordinata a simmetria rotta.
- Per $K < K_c$, lo vediamo diventare sempre più disordinato; non c'è long range order. Siamo nella fase disordinata a simmetria preservata.
- Il punto critico K_c separa le due fasi, è dunque il punto di transizione di fase.

Con la presente trattazione si può anche osservare il comportamento della capacità termica vicino alla transizione. Dall'espressione generale:

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = T \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \quad (61)$$

si può mostrare che (esercizio!)

$$\frac{C}{\kappa N} = K^2 \frac{\partial^2 g}{\partial K^2} \quad (62)$$

con κ di Boltzman.

Dallo sviluppo di Taylor della (52) intorno al punto critico $K = K_c$ si può mostrare che, in termini della temperatura ridotta $t = \frac{T - T_c}{T_c}$, si ha

$$\frac{\partial^2 g}{\partial K^2} \propto |t|^{-\alpha} \quad (63)$$

con:

$$\alpha = 2 - \frac{\log 2}{\log \left(\frac{dK'}{dK} \right)_{K_c}} \sim 0.131. \quad (64)$$

Questo comportamento non è qualitativamente lontano dal comportamento logaritmico previsto dalla trattazione esatta, che ricordiamo essere:

$$C_N \sim kN \left(-0.49 \dots \log |t| + \text{const.} \right)$$

per cui:

$$\frac{C}{\kappa N} \propto -\log |t| \quad (65)$$

dato che α è piccolo (il comportamento logaritmico corrisponde a $\alpha \rightarrow 0$ [log]).

Questo trattamento approssimato ci ha mostrato che il RG può fornire predizioni corrette solo se teniamo conto delle ulteriori interazioni (non ai primi vicini) che emergono dalle trasformazioni Kadanoff.

È facile intuire che iterando la trasformazione emergono ulteriori interazioni coinvolgenti altri sottomisieri di spin (accoppiamenti terzi vicini, interazioni a 6 spin, ...)

Dobbiamo quindi in realtà lavorare in uno spazio *multiparametrico* in cui l'Hamiltoniana è del tipo:

$$\begin{aligned} \beta H(K_1, K_2, K_3, K_4, \dots; N) = & K_1 \sum' s_i s_j + K_2 \sum'' s_i s_j + \\ & + K_3 \sum^{pl} s_i s_j s_k s_l + K_4 \sum^{6sp} s_i s_j s_k s_l s_m s_n + \dots \end{aligned} \quad (66)$$

L'Hamiltoniana del modello di Ising è solo un caso particolare:

$$H(K_1, 0, 0, 0, \dots; N). \quad (67)$$

La prima Kadanoff Transformation, eq (45), va interpretata come:

$$Z(K, 0, 0, \dots, 0; N) = [f(K)]^{N/2} Z(K_1, K_2, K_3, 0, \dots; N/2). \quad (68)$$

Dopo un certo numero di iterazioni tipicamente si sono "accese" tutte le interazioni fisicamente significative, l'Hamiltoniana si è "stabilizzata", e negli ulteriori passi cambiano solo più le costanti di accoppiamento:

$$K_i \rightarrow K'_i(\{K_j\}). \quad (69)$$

3.3 Classe di universalità

A questo punto si è persa memoria di quale fosse il modello microscopico iniziale (per noi il modello di Ising con solo l'interazione ai primi vicini). L'Hamiltoniana "invariante" non dipende più dai dettagli del modello, può dipendere solo da caratteristiche generali quali il gruppo di simmetria e la dimensionalità del sistema. Questo fatto è legato al concetto di "classe di universalità", già precedentemente accennato.

La lunghezza di correlazione ξ , per cui già sappiamo:

$$\xi \sim |t|^{-\nu} \quad , \quad G_{kn} = \exp \left\{ -\frac{|n-k|}{\xi} \right\} \quad , \quad \xi = \frac{1}{\log \left(\frac{1}{\tanh K} \right)} > 0 \quad (70)$$

e per come è stata definita, rappresenta il valore in unità di passo reticolare della lunghezza "fisica" (dimensionale) di correlazione. In una trasformazione del RG, il passo reticolare cambia come (vedi eq. (1)):

$$a \rightarrow a' = ba \quad (71)$$

($b > 1$). La trasformazione del RG è una *riscrittura* del sistema, non ne cambia le proprietà fisiche; la lunghezza di correlazione *fisica* deve rimanere invariata:

$$\xi[K_i] \cdot a = \xi'[K'_i] \cdot a' \implies \xi'[K'_i] = \xi[K_i]/b. \quad (72)$$

I punti fissi delle RG transformation devono realizzare la condizione:

$$\xi[K_i^*] = \xi[K_i^*]/b \quad (73)$$

e quindi devono essere:

$$\xi = 0 \quad \text{punti fissi banali} \quad T = 0 \quad (K = \infty) \quad \text{e} \quad T = \infty \quad (K = 0) \quad (74)$$

$$\xi = \infty \quad \text{punti fissi non banali (punti critici)} \quad K_i^* = K_i^c. \quad (75)$$

Poniamoci vicino un punto critico $K_i \sim K_i^*$ ed approssimiamo la RG transformation a delle costanti di accoppiamento (che è piccola essendo K_i^* un punto fisso) al primo ordine:

$$K'_i = K_i^* + T_i^j (K_j - K_j^*) \quad (76)$$

deve:

$$T_i^j = \left. \frac{\partial K_i}{\partial K_j} \right|_{K=K^*} . \quad (77)$$

Per le deviazioni rispetto al valore critico $\delta K_i = K_i - K_i^*$ abbiamo così, in uno step del RG:

$$\delta K'_i = T_i^j \delta K_j. \quad (78)$$

Supponiamo che la matrice T sia diagonalizzabile e siano:

$$\lambda_i \equiv b^{y_i} \quad (79)$$

i suoi autovalori e:

$$g_i = \sum_j C_i^j K_j \quad (80)$$

i suoi autovettori. Dunque per le combinazioni g_i di coupling constants cambiano come:

$$g_i \rightarrow g'_i = b^{y_i} g_i \quad (81)$$

cioè *riscalano* per una potenza y_i del fattore di riscaldamento del passo reticolare. Abbiamo che:

- Se $y_i > 0$, g_i è un accoppiamento *rilevante*: cresce con la trasformazione del RG verso scale di grandezza maggiori.
- Se $y_i < 0$, g_i è un accoppiamento *irrilevante*: diminuisce con la trasformazione del RG.
- Se $y_i = 0$, g_i è detto *marginale*.

Definiamo la *ipersuperficie critica* nello spazio delle costanti d'accoppiamento quella in cui $g_i = 0 \forall g_i$ rilevante. Trascurando il ruolo dei coupling marginali, il diagramma di flusso nei pressi del punto critico è dunque tipo quello in figura 12.

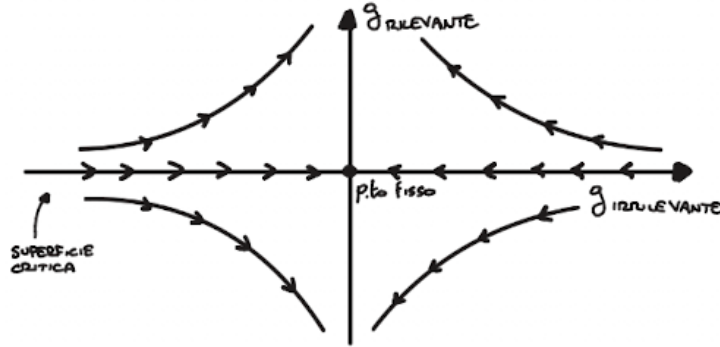


Figure 12

Nel caso del modello di Ising con la trattazione semplificata in cui l'unico campo è K , che è *rilevante*, questa si riduce al diagramma 13.



Figure 13

Nella maggior parte dei sistemi noti vi sono 2 coupling rilevanti, mentre tutti gli (infiniti) altri sono irrilevanti (o marginali). Ad esempio nei sistemi magnetici i due coupling rilevanti possono essere scelti come la temperatura ridotta t e il campo esterno h .