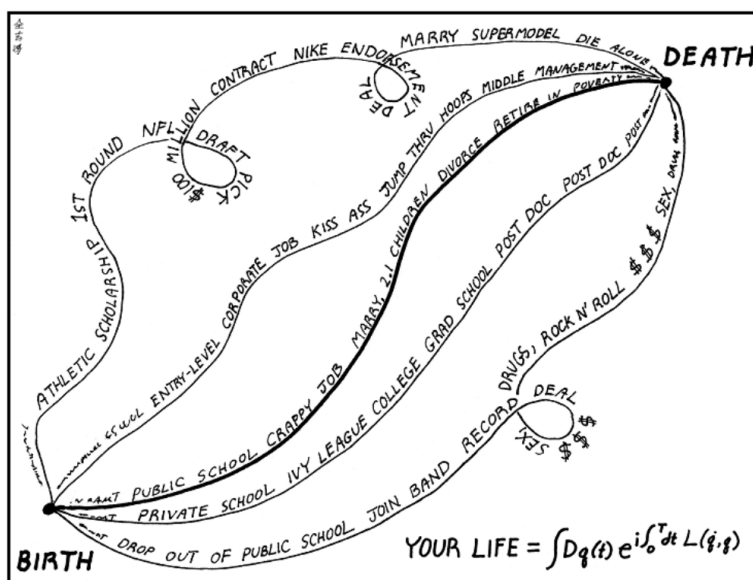


Appunti del corso di:

Gabriele Cembalo

A.A. 2023-2024



Università degli studi di Torino
Dipartimento di Fisica
Via Giuria, 1, Torino (TO)

God used very advanced
mathematics in constructin the
universe.

P. A. M. Dirac

Prefazione

In questo documento intendo raccogliere i miei appunti basati sul materiale del corso “**Meccanica Quantistica II**”, tenuto dal Prof. M. Frau e seguito presso *Università degli studi di Torino* nell’anno accademico 2023-2024. Durante il corso sono stati consigliati diversi libri (elencati in Bibliografia), e cercherò di indicare i riferimenti corrispondenti all’inizio di ogni capitolo.

Questi appunti sono una versione riscritta delle note prese durante le lezioni, quindi la fonte principale è il materiale presentato dal professore. Declino ogni responsabilità e rimando alla mia pagina personale per saperne di più su questi appunti e sul fatto che non hanno natura né accademica né didattica.

Questi appunti vanno chiaramente intesi come note personali, riscritte in maniera ordinata a partire dalle lezioni. Eventuali sviste, errori o imprecisioni sono dovuti ai miei limiti. Inoltre, ho scritto questi appunti principalmente per “spiegare” a me stesso l’argomento, quindi alcune sezioni potrebbero risultare eccessivamente dettagliate o, al contrario, troppo superficiali a seconda del lettore. In ogni caso, spero possano comunque essere utili a qualcuno. Spero anche di essere riuscito a produrre un documento chiaro e ben strutturato.

Una raccolta dei miei appunti è disponibile sulla mia pagina GitHub personale: [gCembalo.github.io](https://github.com/gCembalo).

Eventuali errori o refusi possono essere segnalati alla mia email personale: g70362643@gmail.com.

Last update: 17/06/2025

Indice

1	Postulati della Meccanica Quantistica	1
2	Integrali di cammino	3
2.1	Introduzione	3
2.2	Propagatore o kernel	5
2.2.1	Propagatore di particella libera unidimensionale	9
2.3	I Path Integral	14
2.4	L'equazione di Schrodinger	22
2.5	Teoria gaussiana e determinanti funzionali	25
2.5.1	Caso matrici diagonali	28
2.5.2	Caso matrici simmetriche	31
2.5.3	Caso di operatore differenziale	33
2.6	Casi tipici	34
2.6.1	Particella libera	34
2.6.2	Oscillatore armonico	40
2.7	Effetto Ahranov-Bohm	47
2.8	Funzione di partizione	50
3	Approssimazione semiclassica WKB	57
3.1	Note	58
4	Teoria dell'urto	65
4.1	Introduzione	65
4.2	Sezione d'urto	66
4.2.1	Urto con sfera rigida	71
4.3	Generalità	72
4.3.1	Ampiezza di diffusione e sezione d'urto	78
4.4	Serie ed approssimazione di Born	80
4.4.1	Condizioni di validità dell'approssimazione di Born	84
4.5	Sviluppi in onde parziali	86
4.5.1	Ampiezza di diffusione e sezione d'urto	93
4.5.2	Teorema ottico	97
4.5.3	Urto contro una sfera impenetrabile	98

5	Entanglement	101
5.1	Base di Bell, teletrasporto e clonazione	102
5.1.1	Base di Bell	102
5.1.2	Teletrasporto quantistico	104
5.1.3	Teorema di non clonazione	107
5.2	Paradosso EPR	110
5.2.1	Il teorema di Bell	112
5.3	Il gatto di Schrödinger	116
	Appendici	117
A	Digressione sulla δ di Dirac	119
B	Dimostrazione valore $\zeta'(0)$	121
C	Funzione di Green	125
C.1	Normalizzazione di una funzione di Green	125
C.2	Funzione di Green nello spazio degli impulsi	127
D	Densità di correnti	131
D.1	Componenti angolari di $\mathbf{J}_{out}$	131
D.2	Caso di angoli piccoli	132
D.2.1	Equazione di continuità	134

Capitolo 1

Postulati della Meccanica Quantistica

Un indice rapido di questa sezione è:

1.1. Postulato 0: lo stato del sistema

1.1.1. Ripasso di metodi matematici

1.2. Postulato 0': le osservabili, gli operatori e il loro spettro

1.3. Un esempio: la buca rettangolare finita

1.4. Osservazioni di carattere generale sui potenziali

1.5. Spettro di $\hat{H}$

1.6. Prodotto diretto di spazi di Hilbert

1.7. Postulato 1: il postulato della misura

1.8. Matrice densità

1.9. Polarizzazione della luce

1.9.1 Esercizio

1.10. Postulato 2: riduzione della funzione d'onda

1.11. Postulato 3: evoluzione temporale

Ho deciso di non scrivere delle note a riguardo poiché l'unica fonte per questa parte sono le note del prof. Sciuto God used very advanced mathematics in constructin the universe.Sciuto, per cui rimando direttamente a quelle note per evitare di non aggiungere nulla se non qualche errore di copiatura. Le sezioni da guardare di God used very advanced mathematics in constructin the universe.Sciuto sono:

- Capitolo **2** (tutto); Appendice **A** (tutta); Appendice **B**; Appendice **C**.

Capitolo 2

Integrali di cammino

La formulazione degli integrali di cammino (path integral) è essenziale, non solo per una completezza della Meccanica Quantistica non relativistica, ma soprattutto per lo studio della Teoria Quantistica dei Campi e altri corsi successivi di Fisica teorica. I riferimenti per questo argomento possono essere veramente infiniti, quelli più famosi, ed utilizzati sono *God used very advanced mathematics in constructin the universe.feynman2010quantum*, *marino2021advanced*, *marinoLN*. In questo capitolo vedremo la formulazione usuale dei path integral con la loro definizione nello spazio delle configurazioni e delle fasi, avremo un'assaggio del fatto che rendendo gli integrali di cammino assiomatici ci è possibile ricavare i risultati già noti della Meccanica Quantistica, in particolare l'equazione di Schrodinger, vedremo quella che va sotto il nome di teoria gaussiana e il calcolo di determinanti funzionali, fondamentali per la teoria, concluderemo il capitolo con due esempi tipici di calcoli, con un effetto non locale della Meccanica Quantistica e con un discorso riguardo la funzione di partizione e il collegamento tra Meccanica Statistica e Meccanica Quantistica.

Come fonti utili per studi successivi si possono vedere, oltre le note di Mariño *God used very advanced mathematics in constructin the universe.marinoLN*, i libri di Lancaster e Blundell *God used very advanced mathematics in constructin the universe.Lancaster:2014pza* e di Peskin e Schroeder *God used very advanced mathematics in constructin the universe.Peskin:1995ev*.

2.1 Introduzione

La formulazione della Meccanica Quantistica mediante gli integrali di cammino (path integral) si fonda sull'idea introdotta da Feynmann nel 1948. Feynmann ragionò sostanzialmente sull'idea che, mentre nella Fisica classica il cammino seguito da un qualsiasi corpo è quello per cui l'azione è minima, nella Meccanica Quantistica non relativistica il cammino seguito da una

particella (notando che il concetto di cammino, e quindi di traiettoria, è un po' ambiguo) potrebbe essere uno qualsiasi tra gli infiniti possibili (opportunamente pesati). Per capire l'idea alla base del ragionamento del fisico statunitense possiamo analizzare meglio l'esperimento delle due fenditure. L'esperimento può essere immaginato come quello raffigurato in figura 2.1. Come sappiamo, la funzione d'onda che arriva al rivelatore non è altro che

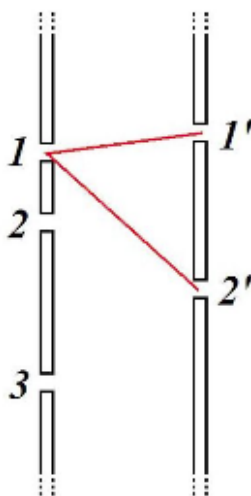


Figura 2.1: Raffigurazione esperimento delle due fenditure.

la somma delle funzioni d'onda relative al passaggio da ciascuna delle due fenditure. Immaginiamo di mettere, anziché 2, moltissime fenditure in una singola parete, in modo da formare una specie di reticolo, e al tempo stesso di mettere altrettanti schermi tra la sorgente e il rivelatore. Per arrivare al rivelatore la particella dovrà fare una specie di slalom tra le varie fenditure e, come nel caso semplice, la funzione d'onda finale sarà la somma di quelle relative a tutti i cammini possibili. Quello descritto può essere visto in figura (2.2). La presenza degli schermi e delle fenditure serve a rendere finito il numero di termini della somma, che poi potremo rendere infiniti in un secondo momento. L'idea di Feynmann, come già accennato, è stata quella di sostituire l'idea classica dell'esperimento, in cui una particella segue il cammino di minima azione, con la somma su tutti i cammini possibili, opportunamente pesati. Feynmann suppose, come potremo vedere, che il peso di ciascun cammino sia $\exp\{i\frac{S}{\hbar}\}$, dove S è proprio l'azione relativa al cammino. La formulazione dei path integral è più importante di quanto sembra, non solo perché sarà utile per la Teoria Quantistica dei Campi, ma anche perché rappresenta un altro punto di partenza per costruire la Meccanica Quantistica. Quello che noi faremo però non sarà assumere i path integral come postulato e ricostruire i risultati della Meccanica Quantistica, ma prenderemo i

postulati della MQ come li abbiamo già visti e formuleremo gli integrali di cammino.

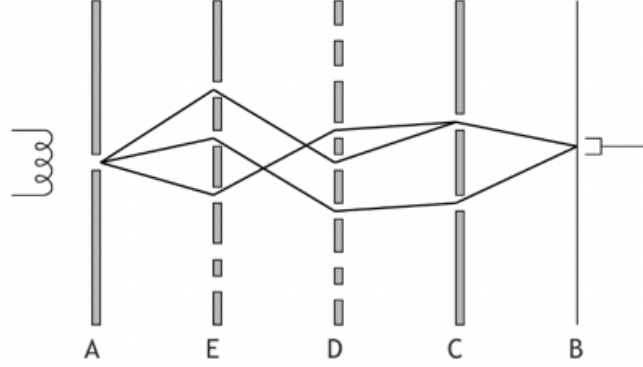


Figura 2.2: Raffigurazione esperimento con molte fenditure.

Come avremo modo di vedere nelle numerose pagine di conti, per la Meccanica Quantistica di sistemi con pochi gradi di libertà il formalismo dei path integral è poco più di un esercizio di bravura, utile per migliorare la comprensione della natura dei fenomeni e soprattutto la relazione con la fisica classica, ma piuttosto scomodo per fare i conti. Il nuovo formalismo, si rivelerà uno strumento essenziale per la meccanica quantistica dei sistemi a infiniti gradi di libertà, ovvero per la Teoria Quantistica dei Campi e la Meccanica Statistica.

2.2 Propagatore o kernel

In questa sezione parleremo di un oggetto a dir poco fondamentale per la teoria dei campi. Nello schema di Schrodinger, lo stato del sistema $|\Psi(t_b)\rangle$ al tempo $t_b \geq t_a$ è dato da:

$$|\psi(t_b)\rangle = \hat{U}(t_b, t_a) |\psi(t_a)\rangle \quad (2.2.1)$$

in cui l'operatore $\hat{U}(t_b, t_a)$ è l'operatore di evoluzione temporale, che ricordiamo, per un sistema descritto da un'hamiltoniana indipendente dal tempo $\hat{H} = H(\hat{q}, \hat{p})$ risulta essere:

$$\hat{U}(t_b, t_a) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_b - t_a)}. \quad (2.2.2)$$

Notiamo solo che abbiamo indicato con $\hat{q}$ e $\hat{p}$ gli operatori corrispondenti alle n coordinate lagrangiane e le n coordinate dei momenti coniugati di un sistema con n gradi di libertà. Inoltre, supporremo per tutto il capitolo di essere in presenza di un'hamiltoniana indipendente dal tempo, in modo da utilizzare la relazione (2.2.2).

Se prendiamo $|q\rangle$ gli autostati degli operatori posizione:

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle \quad (2.2.3)$$

che formano una base generalizzata (vedi gli appunti di MQ1) per lo spazio di Hilbert del sistema, allora, possiamo scrivere la funzione d'onda nello spazio delle configurazioni da (2.2.1):

$$\psi(q_b, t_b) = \langle q_b | \psi(t_b) \rangle = \langle q_b | \hat{U}(t_b, t_a) | \psi(t_a) \rangle \quad (2.2.4)$$

$$= \int d^n q \langle q_b | U(t_b, t_a) | q \rangle \langle q | \psi(t_a) \rangle \quad (2.2.5)$$

$$= \int d^n q \langle q_b | U(t_b, t_a) | q \rangle \psi(q, t_a) \quad (2.2.6)$$

$$= \int d^n q K(q_b, t_b; q, t_a) \psi(q, t_a) \quad (2.2.7)$$

in cui abbiamo utilizzato la completezza dello spazio:

$$\int d^n q |q\rangle \langle q| = \mathbb{1} \quad (2.2.8)$$

e abbiamo definito l'operatore¹:

$$K(q_b, t_b, q, t_a) = \langle q_b | U(t_b, t_a) | q \rangle \theta(t_b - t_a) \quad (2.2.9)$$

che chiamiamo **propagatore** o kernel dell'equazione di Schrodinger. Nota che (2.2.9) non è altro che l'elemento di matrice nello spazio delle configurazioni dell'operatore di evoluzione temporale.

Però, che cosa significa fisicamente K ? In più, siamo sicuri che contenga tutta l'informazione rilevante sul sistema?

È immediato vedere che $K(q_b, t_b; q_a, t_a)$ rappresenta un'ampiezza di probabilità. Infatti, per un sistema che nell'istante t_a si trovi nel punto dello spazio delle configurazioni q_a , quindi descritto dalla funzione d'onda $\psi(q, t_a) = \delta^f(q - q_a)$, l'equazione (2.2.7) ci mostra che l'ampiezza di probabilità $\psi(q_b, t_b)$ di trovarsi nel punto q_b all'istante $t_b \geq t_a$ è proprio $K(q_b, t_b; q_a, t_a)$. Segue da questo che la relazione (2.2.7) può essere visto come il principio di Huygens generalizzato, e dunque, vedere il fronte d'onda al tempo t_b come generato da sorgenti puntiformi in tutti i punti del fronte d'onda al tempo t_a .

In generale, per un sistema che all'istante iniziale t_a si trovi nello stato $|\psi_a\rangle$ l'ampiezza di probabilità di trovarsi nello stato $|\psi_b\rangle$ all'istante $t_b \geq t_a$,

¹Nota che abbiamo introdotto una θ di Heavyside ($\theta(t_b - t_a) = 1$ per $t_b \geq t_a$ e $\theta(t_b - t_a) = 0$ per $t_b < t_a$) per assicurarci, in generale, che il tempo scorra in avanti. Infatti, se prepariamo il sistema al tempo t_a nello stato puro $|\psi(t_a)\rangle$, effettuando le misure nello SCOC del sistema, allora ci è possibile prevedere cosa succederà in istanti successivi, ma non abbiamo modo di sapere in quale stato si trovava il sistema in precedenza.

usando due volte la relazione di completezza, è data da:

$$\langle \psi_b | \hat{U}(t_b, t_a) | \psi_a \rangle = \int d^n q_a d^n q_b \langle \psi_b | q_b \rangle K(q_b, t_b; q_a, t_a) \langle q_a | \psi_a \rangle \quad (2.2.10)$$

$$= \int d^n q_a d^n q_b \psi(q_b) K(q_b, t_b; q_a, t_a) \psi(q_a). \quad (2.2.11)$$

Possiamo notare, inoltre, che possiamo scrivere l'operatore $\hat{U}(t_b, t_a)$ in termini di autostati di $\hat{H}$, φ , come:

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_b - t_a)} \langle q_b | E_n \rangle \langle E_n | q_a \rangle \quad (2.2.12)$$

$$= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_b - t_a)} \varphi_n(q_b) \varphi_n^*(q_a). \quad (2.2.13)$$

In secondo luogo possiamo verificare, abbastanza facilmente, che a parte un fattore $1/i\hbar$ il kernel è la funzione di Green dell'equazione di Schrodinger dipendente dal tempo, infatti:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) K(q_b, t; q_a, t_a) = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \underbrace{\langle q_b | U(t - t_a) | q_a \rangle}_{K(q_b, t; q_a, t_a)} \theta(t_b - t_a) \quad (2.2.14)$$

$$= \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) K \theta(t - t_a) - \hat{H} K \theta(t - t_a) \quad (2.2.15)$$

$$= i\hbar \frac{\partial K}{\partial t} \theta(t - t_a) - \hat{H} K \theta(t - t_a) + i\hbar K \delta(t - t_a) \quad (2.2.16)$$

eq. Schrodinger di K soddisfatta
perché soddisfatta per U

$$= K \delta(t - t_a) \quad (2.2.17)$$

togliamo $i\hbar$

$$= \underbrace{f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)}_{\mathbb{1}} \langle q_b | \underbrace{U(t_a, t_a)}_{\mathbb{1}} | q_a \rangle \delta(t - t_a) \quad (2.2.18)$$

$$= \delta(t - t_a) \langle q_b | q_a \rangle \quad (2.2.19)$$

$$= \delta(t - t_a) \delta^f(q_b - q_a). \quad (2.2.20)$$

Possiamo, dunque, vedere il propagatore come l'inverso dell'operatore di Schrodinger:

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i\hbar} \hat{H}. \quad (2.2.21)$$

Abbiamo capito il significato del propagatore (2.2.9), ma non abbiamo ancora visto, in modo esplicito, come effettivamente sia fatto. Mettiamoci per semplicità in $\dim = n = 1$ e con $t_a = 0$, $t_b = t$, $q_b = x$ e facciamo l'ipotesi (quella suggerita da Feynmann):

$$K(x, t, q_a, 0) \equiv \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(x, t, q_a, 0) \right\} \quad (2.2.22)$$

in cui S è una funzione generica, non ancora specificata, ma che usiamo per parametrizzare K . Nota che non stiamo considerando un'eventuale costante di normalizzazione.

Abbiamo detto che, per via del fatto che $\hat{U}$ la risolva (postulato dell'evoluzione temporale), il propagatore K risolve l'equazione di Schrodinger, ma cosa vuol dire questo per la funzione S ? Scriviamo l'equazione di Schrodinger utilizzando (2.2.22), vediamo le varie derivate singolarmente prima:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} K = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(x, t, q_a, 0)\right\} \left(-\frac{\partial S}{\partial t}\right) \quad (2.2.23)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(x, t, q_a, 0)\right\} \cdot \left(-\frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right) \quad (2.2.24)$$

dunque l'equazione è (nota che rimuoviamo il fattore K comune a tutti i termini):

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + V(x). \quad (2.2.25)$$

Nell'equazione di Schrodinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.2.26)$$

non possiamo fare il limite classico $\hbar \rightarrow 0$ poiché perderebbe totalmente di significato, ma ora siamo in una situazione diversa e possiamo vedere che succede per $\hbar$ piccolo, rispetto tutte le azioni in gioco², ottenendo dunque:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x\right) \quad (2.2.27)$$

che non è altro che l'equazione di Hamilton-Jacobi. Il termine di destra di (2.2.27) non è altro che l'hamiltoniana H calcolata lungo una curva di moto. In più (2.2.27) essendo l'equazione di Hamilton-Jacobi so che è soddisfatta per:

$$S \equiv \text{Azione classica} \quad (2.2.28)$$

il che vuol dire che ogni volta che mi calcolo (2.2.10) il peso di ogni $\psi(q_b)$ è legato all'azione classica calcolata su quello stesso cammino. Il cammino classico, avendo l'azione stazionaria, rende l'esponenziale poco variabile (ricorda il metodo della fase stazionaria di Metodi Matematici per la Fisica 2) quando cambiamo cammino, rimanendo vicino a quello classico, e i cammini si sommano in modo coerente; al contrario, quando ci allontaniamo molto dal cammino classico, l'azione S varia molto rapidamente e sostanzialmente i contributi di quei cammini si cancellano (per via del lemma di Riemann). Una rappresentazione grafica è presentata nella figura 2.3.

²Ricorda sempre che quando facciamo dei particolari limiti, in questo caso $\hbar \rightarrow 0$, lo facciamo rispetto ad alcune grandezze fisiche di riferimento. In Relatività Speciale facevamo il limite non relativistico con $c \rightarrow 0$, che sostanzialmente significava che eravamo in presenza di velocità v piccole rispetto c .

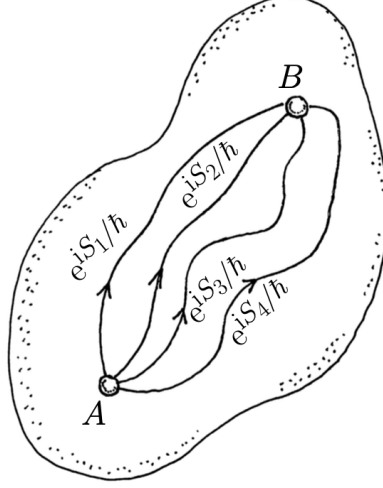


Figura 2.3: Diversi cammini pesati con diverse azioni. Credit: part VI cap. 23.1 di Lancaster Blundell God used very advanced mathematics in constructin the universe.Lancaster:2014pza.

Vedremo nelle prossime sezioni vari casi "semplici" riguardo quello che abbiamo visto.

2.2.1 Propagatore di particella libera unidimensionale

Proviamo a calcolare esplicitamente il propagatore di particella libera nel caso unidimensionale $n = 1$. Abbiamo:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (2.2.29)$$

dunque, gli autostati di $\hat{H}$ corrispondono ad autostati di $\hat{p}$:

$$\hat{p} |p\rangle = p |p\rangle \quad , \quad \hat{H} |p\rangle = \frac{p^2}{2m} |p\rangle . \quad (2.2.30)$$

Ricordiamo, inoltre, che siamo in uno spazio completo, per cui:

$$\int dp |p\rangle \langle p| = \mathbb{1}. \quad (2.2.31)$$

Dalla definizione di propagatore (2.2.9) abbiamo:

$$K(q', t'; q, t) = \langle q' | U(t' - t) | q \rangle \quad (2.2.32)$$

$$= \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t' - t)} | q \rangle \quad (2.2.33)$$

$$= \int dp \langle q' | p \rangle \langle p | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t' - t)} | q \rangle \quad (2.2.34)$$

$$= \int dp e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t' - t)} \langle q' | p \rangle \langle p | q \rangle \quad (2.2.35)$$

in cui abbiamo sfruttato il fatto che $\hat{p}$ sia hermitiano, che quindi pinzato nel braket, a sinistra legge l'autovalore p e l'esponenziale non contiene più l'operatore, ma l'autovalore dell'impulso. Possiamo ricordarci la definizione di onda piana:

$$\langle p | q \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i}{\hbar} p q} \quad , \quad \langle q' | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{\hbar} p q} \quad (2.2.36)$$

dunque:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t' - t)} e^{\frac{i}{\hbar} p (q' - q)}. \quad (2.2.37)$$

Se riuscissimo a fare l'integrale (2.2.37) allora avremmo finito i nostri conti e avremmo il nostro propagatore di particella libera. Il problema è che l'integrale non esiste, poiché stiamo integrando una cosa di modulo 1 (l'esponenziale complesso) tra $-\infty$ e $+\infty$. Dobbiamo regolarizzare l'integrale in qualche modo. Ci sono due strade percorribili: complessificare la massa con un fattore convergente, oppure fare una rotazione di Wick. Complessificare la massa vuol dire aggiungere un termine complesso convergente, invece, fare una rotazione di Wick vuol dire passare da una metrica minkowskiana ad una euclidea. Vediamo entrambi i modi.

Metodo 1 Complessifichiamo la massa aggiungendo un pezzo complesso, che poi potremo mandare a 0:

$$2m \longrightarrow 2(m + i\varepsilon) \quad (2.2.38)$$

in questo modo:

$$\frac{p^2}{2(m + i\varepsilon)} = \frac{p^2}{2m} \frac{1}{1 + \frac{i\varepsilon}{m}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{p^2}{2m} \left(1 - \frac{i\varepsilon}{m} \right) = \frac{p^2}{2m} - \frac{ip^2\varepsilon}{2m^2} \quad (2.2.39)$$

per semplicità possiamo moltiplicare per $-i/\hbar$:

$$-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2(m + i\varepsilon)} = -\frac{ip^2}{2\hbar m} - \frac{p^2\varepsilon}{2\hbar m^2}. \quad (2.2.40)$$

Non utilizzeremo l'espansione (2.2.40) per semplicità di calcolo, lasciamo $2(m + i\varepsilon)$. Riprendendo (2.2.37) e sostituendo (2.2.38):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2(m+i\varepsilon)}(t'-t)} e^{\frac{i}{\hbar} p(q'-q)} \quad (2.2.41)$$

analizziamo meglio l'argomento dell'esponenziale che compare:

$$-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2(t'-t)}{2(m+i\varepsilon)} + \frac{i}{\hbar} p(q'-q) \quad (2.2.42)$$

$$= -\frac{1}{2\hbar} \left[\frac{ip^2(t'-t)}{m+i\varepsilon} - 2ip(q'-q) \right] \quad (2.2.43)$$

$$= -\frac{1}{2\hbar} \left[\frac{p^2(t'-t)}{\varepsilon - im} - 2ip(q'-q) \right] \quad (2.2.44)$$

possiamo completare il quadrato:

$$-\frac{1}{2\hbar} \left[\left(p \sqrt{\frac{t'-t}{\varepsilon - im}} - i(q'-q) \sqrt{\frac{\varepsilon - im}{t'-t}} \right)^2 + (q'-q)^2 \frac{\varepsilon - im}{t'-t} \right] \quad (2.2.45)$$

facendo il seguente cambio di variabile:

$$w = p \sqrt{\frac{t'-t}{\varepsilon - im}} - i(q'-q) \sqrt{\frac{\varepsilon - im}{t'-t}} \quad (2.2.46)$$

$$dp = \sqrt{\frac{\varepsilon - im}{t'-t}} dw \quad (2.2.47)$$

l'argomento dell'esponenziale diventa:

$$-\frac{1}{2\hbar} w^2 - \frac{(q'-q)^2}{2\hbar} \frac{\varepsilon - im}{t'-t} \quad (2.2.48)$$

e di conseguenza l'integrale:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon - im}{t'-t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \frac{\varepsilon - im}{t'-t} (q'-q)^2 \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{-\frac{w^2}{2\hbar}}. \quad (2.2.49)$$

Notiamo che in (2.2.49) abbiamo $w \in \mathbb{C}$ anche se $p \in \mathbb{R}$, quindi non staremmo integrando tra $-\infty$ e $+\infty$ di $\mathbb{R}$, ma in una direzione generica, però, l'integrando è una funzione regolare ovunque, e di conseguenza possiamo deformare il cammino ed integrare tra $-\infty$ e $+\infty$ sull'asse reale. Dunque, l'integrale in (2.2.49) è un'integrale gaussiano che fa $\sqrt{2\pi\hbar}$. Siamo arrivati a:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon - im}{2\pi\hbar(t'-t)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \frac{\varepsilon - im}{t'-t} (q'-q)^2 \right\} \quad (2.2.50)$$

in cui dobbiamo ancora fare il limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Il propagatore di particella libera è quindi:

$$K(q', t'; q, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\varepsilon - im}{2\pi\hbar(t' - t)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar} \frac{\varepsilon - im}{t' - t} (q' - q)^2\right\} \quad (2.2.51)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t' - t)}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m(q' - q)^2}{2(t' - t)}} \quad (2.2.52)$$

Abbiamo quindi trovato il propagatore di una particella libera unidimensionale.

Metodo 2 Facciamo un rotazione di Wick, ovvero, ruotiamo di $\pi/2$ in senso orario l'asse dei tempi:

$$t \longrightarrow t = -it_E \quad (2.2.53)$$

in cui indichiamo t_E tempo euclideo, perché se partiamo da una metrica minkowskiana:

$$-c^2 dt^2 + d\vec{x} \cdot d\vec{x} \quad (2.2.54)$$

e facciamo la rotazione (2.2.53):

$$c^2 dt_E^2 + d\vec{x} \cdot d\vec{x} \quad (2.2.55)$$

che è una metrica euclidea. Riprendiamo l'integrale (2.2.37):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t' - t)} e^{\frac{i}{\hbar} p(q' - q)} \quad (2.2.56)$$

facendo la rotazione di Wick otteniamo una cosa convergente, poiché scompare la i , e scriviamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\hbar\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar} \left(\frac{p^2}{m} (t'_E - t_E) - 2ip(q' - q)\right)\right\} \quad (2.2.57)$$

in modo analogo a quanto fatto con il primo metodo, completando il quadrato e facendo il cambio di variabile otteniamo:

$$K(q', t'; q, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar(t'_E - t_E)}} e^{-\frac{1}{2\hbar} \frac{m(q' - q)^2}{(t'_E - t_E)}} \quad (2.2.58)$$

in cui, se rifacciamo la rotazione (2.2.53) al contrario, riotteniamo il tempo vero e un risultato identico a quello trovato con il metodo di complessificazione della massa.

Controlliamo, però, a questo punto che il propagatore K che abbiamo trovato sia effettivamente parametrizzabile nel modo suggerito da Feynmann

(2.2.22). Prendiamo il risultato (2.2.52) e notiamo che possiamo scriverlo come:

$$K(q', t'; q, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t' - t)}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{(q' - q)^2}{2(t' - t)}} \equiv \frac{1}{\mathcal{N}} e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (2.2.59)$$

in cui indichiamo:

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{2\pi i \hbar (t' - t)}{m}} \quad (2.2.60)$$

$$S = \frac{(q' - q)^2}{2(t' - t)} \quad (2.2.61)$$

dove la prima riga è un fattore di normalizzazione, e la seconda è verificabile essere effettivamente l'azione della particella libera calcolata sulla curva del moto. Partiamo dalla lagrangiana libera:

$$L = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{q' - q}{t' - t} \right)^2 \quad (2.2.62)$$

in cui abbiamo riscritto la velocità dicendo che ci stiamo spostando da q a q' nel tempo $t' - t$ e vediamo la v come rapporto incrementale. L'azione è dunque:

$$S = \int_t^{t'} d\tau \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v^2 (t' - t) = \frac{m(q' - q)^2}{2(t' - t)} \quad (2.2.63)$$

ossia, l'argomento che compare nell'esponenziale di (2.2.52). È dunque corretto dire che il propagatore dipende in modo esponenziale dall'azione definita in modo classico.

Ovviamente, dobbiamo ricordare che S è calcolata sullo specifico cammino che seguiamo (nel caso semplificato che abbiamo visto è indifferente), quindi in generale scriviamo:

$$S = \int_t^{t'} d\tau L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) \quad (2.2.64)$$

e a seconda del $q(t)$ che inseriamo nella lagrangiana otteniamo azioni differenti. Per questo motivo l'azione è un **funzionale del cammino**. La cosa curiosa è che in Meccanica Quantistica noi potremmo potenzialmente seguire un qualsiasi cammino di quello possibili, però, facendo i conti troviamo che nel caso di particella libera abbiamo il propagatore K che contiene proprio l'azione calcolata sul cammino classico.

Vedremo nelle prossime sezioni che anche nel caso in cui aggiungiamo interazioni, il propagatore avrà sempre un termine di particella libera (S classica) con aggiunti i pezzi di interazione.

In questa sottosezione abbiamo visto il caso unidimensionale, ma i conti si possono generalizzare ad una dimensione generica n , la differenza sarà che compariranno n integrali gaussiani che si potranno risolvere in successione. Puoi vedere a riguardo un qualsiasi libro di riferimento, ad esempio *God used very advanced mathematics in constructin the universe.feynman2010quantum*, oppure le note del corso di IFIF.

2.3 I Path Integral

Vediamo in questa sezione il propagatore (2.2.9) in modo più generale, definiamo che cosa sono effettivamente i path integral sia nello spazio delle fasi che delle configurazioni.

Prendiamo in esame un'hamiltoniana del tipo:

$$\hat{H} = \hat{H}(q, p) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \quad (2.3.1)$$

però in cui non è presente solo il termine cinetico, come nella sezione §2.2.1, ma anche un potenziale dipendente solo dalle coordinate. Possiamo definire l'operatore di evoluzione temporale:

$$\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)}. \quad (2.3.2)$$

Dalla definizione (2.2.9) si ha:

$$K(q', t'; q, t) = \langle q' | U(t', t) | q \rangle = \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)} | q \rangle \quad (2.3.3)$$

in cui possiamo fare come nel caso libero, ossia, introdurre la completezza di p , che in genere ha n componenti:

$$K(q', t'; q, t) = \int d^n p \langle q' | p \rangle \langle p | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)} | q \rangle \quad (2.3.4)$$

in cui abbiamo l'esponenziale definito come serie di potenze:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)} \equiv \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}(t' - t) \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(q) \right] - \frac{1}{\hbar^2}(t' - t)^2 \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(q) \right]^2 + \dots \quad (2.3.5)$$

che però non è un'espressione bellissima. Nel caso libero l'esponenziale (2.3.2) non aveva dato problemi, infatti, in (2.2.34) avevamo fatto agire $\hat{p}$ a sinistra senza troppi problemi e avevamo continuato i nostri conti. Eravamo in una situazione felice in §2.2.1 perché avevamo in $\hat{U}$ ad esponente un'operatore hermitiano, mentre ora non è più così liscia la situazione. Mentre i primi due termini di (2.3.5) non danno problemi e possiamo farli agire a sinistra su p o a destra su q a piacere, gli infiniti termini dopo la $[\dots]^2$ sono

problematici poiché non commutando $\hat{p}$ e $\hat{q}$ dovremmo considerare i termini misti:

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} V(\hat{q}) \quad , \quad V(\hat{q}) \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (2.3.6)$$

che non sono un granché visto che abbiamo $\hat{p}$ affacciato su $|q\rangle$ e $V(\hat{q})$ affacciato su $\langle p|$, che non essendo loro autostati non abbiamo un risultato immediato. Per avere equazioni agli autovalori dovremmo riordinare i termini in (2.3.6) sostituendo il pezzo che non ci piace con quello con i termini invertiti + il commutatore degli operatori. Questa operazione si chiamerebbe **normal ordering**, in cui abbiamo:

$$\langle p| O(p) |q\rangle \quad (2.3.7)$$

ma definiamo:

$$: O : = O - \langle O \rangle \quad \text{t.c.} \quad \langle : O : \rangle = 0 \quad (2.3.8)$$

e quello che vorremmo fare è un'operazione di questo tipo per ogni termine dello sviluppo (2.3.5), in modo da avere tutti gli operatori $\hat{q}$ che si affaccino su $|q\rangle$ e tutti i $\hat{p}$ su $\langle p|$. Però, dovendolo fare per ∞ termini non è una cosa possibile.

Sembra che siamo bloccati, ma in realtà ci viene in soccorso una proprietà dell'operatore di evoluzione temporale. Sappiamo che $U(t, t_0)$ rappresenta l'evoluzione del sistema dal tempo t_0 al tempo t . Se scegliamo un tempo intermedio $t_1 \in (t_0, t)$, allora vale:

$$U(t, t_0) |\psi_0\rangle = |\psi(t)\rangle \quad (2.3.9)$$

$$U(t_1, t_0) |\psi_0\rangle = |\psi(t_1)\rangle \quad (2.3.10)$$

$$U(t, t_1) |\psi(t_1)\rangle = |\psi(t)\rangle \quad (2.3.11)$$

e di conseguenza:

$$U(t, t_1) U(t_1, t_0) = U(t, t_0) \quad (2.3.12)$$

che ci dice semplicemente che possiamo agire in successione con diversi operatori U da un tempo iniziale ad uno finale fermandoci ogni volta in un tempo intermedio in modo equivalente a quando utilizziamo un'unico operatore U dall'inizio alla fine. Possiamo quindi vedere l'evoluzione temporale del nostro sistema da t_0 a t in modo spezzato. È facile verificarlo con un'hamiltoniana indipendente dal tempo (ricordando anche che $[H, H] = 0$):

$$e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_1)} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_1-t_0)} = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}. \quad (2.3.13)$$

Possiamo quindi inserire nel braket di (2.3.4) un tempo intermedio:

$$\langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(q,p)(t'-t_1)} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(q,p)(t_1-t)} | q \rangle \quad (2.3.14)$$

e sarebbe bello riuscire a vedere il propagatore K come prodotto di altri propagatori intermedi, aggiungiamo per questo la completezza di $|q\rangle$:

$$\int d^n q_1 \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(q,p)(t'-t_1)} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(q,p)(t_1-t)} | q \rangle \quad (2.3.15)$$

quindi, (2.3.4) diventa:

$$K(q', t'; q, t) = \int d^n q_1 K(q', t'; q_1, t_1) K(q_1, t_1; q, t) \quad (2.3.16)$$

e quindi vediamo che K è la convoluzione di altri propagatori. La relazione (2.3.16) ci insegna una cosa molto importante, ci dice che in Meccanica Quantistica la probabilità di andare da un punto (q, t) al punto (q', t') non è semplicemente il prodotto delle probabilità di fare i tragitti intermedi, ma è l'integrale su tutte le possibili posizioni intermedie ai diversi tempi intermedi. Per andare da (q, t) a (q', t') contribuiscono tutti i possibili cammini quantisti, in cui il cammino classico dà il contributo probabilistico più dominante. Preso un certo tempo t_1 è normale che noi integriamo su tutte le possibili q_1 (occupabili a t_1) visto che tutte sono possibili per la Meccanica Quantistica. Una rappresentazione grafica è data dalla figura 2.4. Infatti,

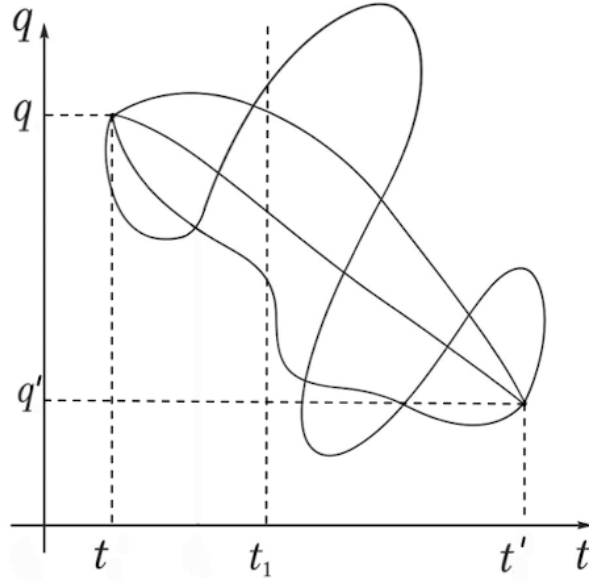


Figura 2.4: Rappresentazione grafica di tutti i cammini possibili.

se non facessimo una misura al tempo t_1 , potremmo essere in una qualsiasi posizione (ragionando quantisticamente), ma ovviamente con diverse probabilità. È cruciale, però, in questo ragionamento che *non* facciamo la misura e non sappiamo effettivamente a quale q_1 ci troviamo. Se facessimo la misura la funzione d'onda collasserebbe.

Il concetto di propagatore inteso come convoluzione di propagatori intermedi ha un'importanza non solo concettuale, ma anche pratica. Infatti, possiamo introdurre $N - 1$ tempi intermedi, dividendo quindi l'intervallo in

N fette, usare $N - 1$ relazioni di completezza per ottenere $N - 1$ integrali:

$$K(q', t'; q, t) = \int d^n q_1 \cdots \int d^n q_{N-1} \prod_{i=0}^{N-1} \langle q_{i+1} | U(t_{i+1}, t_i) | q_i \rangle \quad (2.3.17)$$

$$q_0 = q \quad , \quad q_N = q'. \quad (2.3.18)$$

Notiamo che, se infittissimo tanto (N grande) e rendessimo gli intervalli temporali $t_{i+1} - t_i$ piccoli, in ciascun termine avremmo:

$$U(t_{i+1}, t_i) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(q, p)(t_{i+1} - t_i)} \quad (2.3.19)$$

$$= \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} (t_{i+1} - t_i) \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \right] + \dots \quad (2.3.20)$$

ma se $t_{i+1} - t_i$ è piccolo, allora lo sviluppo è ben approssimato al primo ordine, termine che come abbiamo visto in precedenza, non dà problemi quando pinzato tra $|p\rangle$ (o $|q\rangle$) qualunque sia la forma di $\hat{H}$. Otteniamo quindi:

$$\langle q_{i+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(q, p)(t_{i+1} - t_i)} | q_i \rangle = \langle q_{i+1} | \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \hat{H}(q, p)(t_{i+1} - t_i) | q_i \rangle \quad (2.3.21)$$

$$= \int \frac{d^n p_i}{(2\pi\hbar)^n} \langle q_{i+1} | p_i \rangle \langle p_i | \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \hat{H}(q, p)(t_{i+1} - t_i) | q_i \rangle \quad (2.3.22)$$

che è un oggetto non problematico e in cui possiamo far agire, senza problemi di ordinamento, i termini $\hat{p}$ che compaiono in $\hat{H}$ a sinistra, e quelli $\hat{q}$ a destra. Possiamo far agire $\hat{H}$ ed ottenere:

$$\int \frac{d^n p_i}{(2\pi\hbar)^n} \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H(q, p)(t_{i+1} - t_i) \right) \langle q_{i+1} | p_i \rangle \langle p_i | q_i \rangle \quad (2.3.23)$$

$$\int \frac{d^n p_i}{(2\pi\hbar)^n} \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H(q, p)(t_{i+1} - t_i) \right) e^{\frac{i}{\hbar} p_i (q_{i+1} - q_i)} \quad (2.3.24)$$

in cui abbiamo ricordato la definizione (2.2.36). Notiamo anche che nel risultato ottenuto $H(q, p)$ è una funzione e non un operatore. Utilizzando questo risultato, ottenuto infittendo tanto, l'espressione del propagatore (2.3.17) diventa (riscriviamo per comodità di scrittura $\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H(t_{i+1} - t_i)$ come esponenziale):

$$K(q', t'; q, t) = \int d^n q_1 \cdots \int d^n q_{N-1} \prod_{i=0}^{N-1} \langle q_{i+1} | U(t_{i+1}, t_i) | q_i \rangle \quad (2.3.25)$$

$$= \int \prod_{i=1}^{N-1} d^n q_i \prod_{j=0}^{N-1} \frac{d^n p_j}{(2\pi\hbar)^n} \prod_{k=0}^{N-1} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [p_j (q_{j+1} - q_j) - H(q_j, p_j)(t_{j+1} - t_j)] \right\} \quad (2.3.26)$$

possiamo chiamare $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ e riscrivere:

$$= \int \prod_{i=1}^{N-1} d^n q_i \prod_{j=0}^{N-1} \frac{d^n p_i}{(2\pi\hbar)^n} \prod_{k=0}^{N-1} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Delta t_i \left[\frac{p_i(q_{i+1} - q_i)}{\Delta t_i} - H(q, p) \right] \right\} \quad (2.3.27)$$

questa è una scrittura per noi più carina perché possiamo supporre che i vari q_i e p_i siano i valori $q(t)$ e $p(t)$ al tempo t_i , ossia che valga:

$$\begin{cases} q(t) \\ p(t) \end{cases} \implies \begin{cases} q(t_i) = q_i \\ p(t_i) = p_i \end{cases} . \quad (2.3.28)$$

Se vale (2.3.28) e se Δt_i è piccolo, allora, $\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t_i}$ è una versione discreta della derivata $\dot{q}_i$ ³. Riscrivendo abbiamo:

$$K(q', t'; q, t) = \int \prod_{i=1}^{N-1} d^n q_i \prod_{j=0}^{N-1} \frac{d^n p_i}{(2\pi\hbar)^n} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i (p\dot{q} - H(q, p)) \Big|_{t=t_i} \right\}. \quad (2.3.29)$$

Importante notare che nella parentesi tonda valutata a $t = t_i$ compare proprio la lagrangiana del sistema, definita appunto come:

$$L = p\dot{q} - H. \quad (2.3.30)$$

La versione di (2.3.29) che ci interessa è con $N \rightarrow \infty$, ovvero il caso in cui infittiamo l'intervallo tantissimo. Nel limite in cui N è enorme la somma nell'esponentiale è l'integrale di Riemann per definizione⁴:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_i (p\dot{q} - H) \Big|_{t=t_i} \longrightarrow \int_t^{t'} dt (p\dot{q} - H) \quad (2.3.31)$$

al tempo stesso, però, abbiamo $N - 1$ integrali n -dimensionali su q , N integrali n -dimensionali su p , ma tutti su $\mathbb{R}$. Gli integrali sono dunque:

$$6N + 6(N - 1) \quad \text{integrali} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}$$

che, se N è finito, in qualche modo si riescono a fare. Il problema, però è che gli integrali diventano infattibili se $N \rightarrow \infty$. Graficamente è una cosa visualizzabile come in figura 2.5, in cui nota che è disegnato solo 1 degli ∞ cammini possibili.

³Vedere $\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t_i}$ come versione discreta della derivata $\dot{q}_i$ è una definizione formale e non molto lecita sotto certi aspetti. Per prima cosa non è detto che Δt_i sia piccolo, ma anche nel caso in cui lo fosse, le q_{i+1} e q_i sono variabili di integrazione indipendenti, il che è un problema perché anche diminuendo Δt_i non è detto che si rimpicciolisca la differenza $q_{i+1} - q_i$, cosa che invece siamo sicuri succeda quando abbiamo una funzione continua e rimpiccioliamo Δt_i , poiché in questo caso si rimpicciolisce anche la differenza di due valori della funzione a tempi diversi.

⁴Questo è un classico passaggio da una somma di Riemann a un integrale, che è proprio alla base della formulazione degli integrali di cammino.

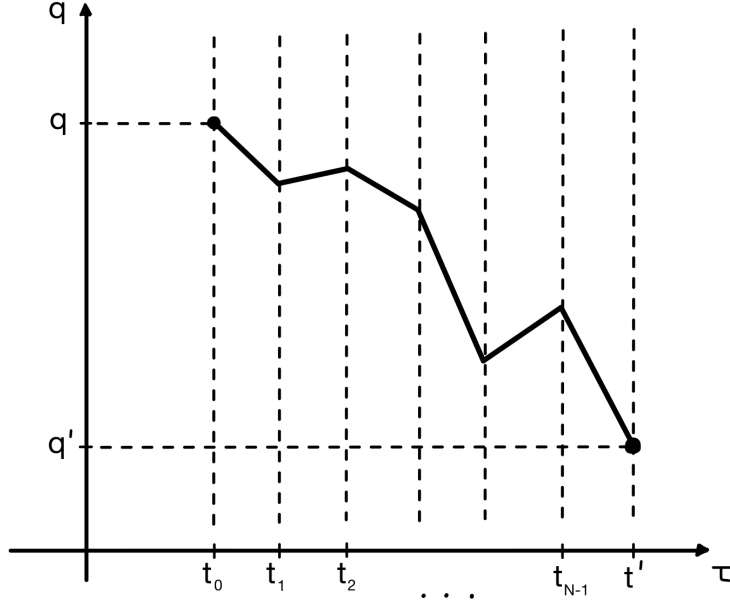


Figura 2.5: Rappresentazione cammino spezzato a tempi intermedi.

Facendo il limite al continuo, ovvero mandare $N \rightarrow \infty$ e infittire la griglia, otteniamo una cosa raffigurabile come in figura 2.6. Il grafico in figura 2.6 ci mostra come q varia in t . Classicamente sappiamo che per andare dal punto q a q' abbiamo solo un cammino possibile, ovvero una sola curva del moto, ma come già detto, quantisticamente non possiamo escluderne nessuna e le consideriamo tutte, ma ricordando di pesarle opportunamente.

Quando mandiamo $N \rightarrow \infty$ l'integrale (2.3.29) diventa il cosiddetto **integrale di cammino**, che scritto in modo sintetico è:

$$K(q', t'; q, t) = \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\tau), p(\tau)]} \quad (2.3.32)$$

in cui S è proprio l'azione definita nel modo classico, poiché in (2.3.29), dopo aver fatto il limite $N \rightarrow \infty$, avevamo:

$$\int_t^{t'} d\tau (p\dot{q} - H) = \int_t^{t'} d\tau L(q, p) \equiv S[q(\tau), p(\tau)]. \quad (2.3.33)$$

Come già detto, S è un funzionale del cammino $q(\tau)$.

Quello scritto (2.3.32) è il **path integral nello spazio delle fasi**. Il path integral è un'oggetto un po' strano, basti pensare a cos'abbiamo fatto per arrivarci, e ogni tanto non ben definito. È comunque un oggetto di notevole importanza nella Fisica. In Meccanica Quantistica per fare i conti si

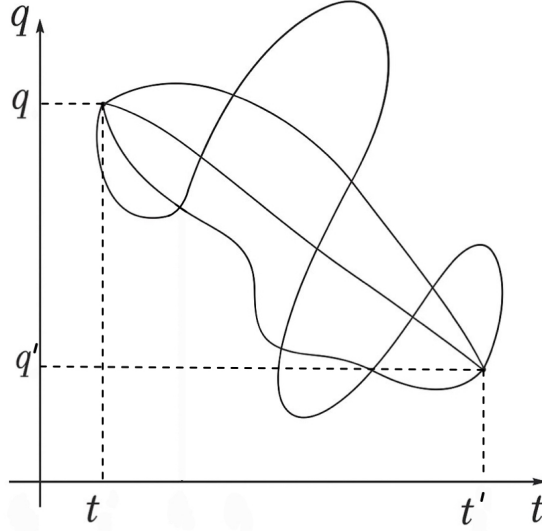


Figura 2.6: Rappresentazione cammino spezzato a tempi intermedi ma con $n \rightarrow \infty$.

utilizza la versione con N finito (2.3.29) e i $6N + (6N - 1)$ integrali, facendo soltanto alla fine il limite $N \rightarrow \infty$ del risultato. Il principale vantaggio di utilizzare i path integral sta nel fatto che, in generale, gli operatori quantistici vengono sostituiti dalle rispettive funzioni (vedi quando prima siamo passati da $\hat{H}(q, p)$ a $H(q, p)$) che sono decisamente più semplici da trattare. Sarà vantaggioso sia in Meccanica Quantistica che in Teoria Quantistica dei Campi.

Nota la forma del path integral nello spazio delle fasi potrebbe essere comodo ricavarci anche l'espressione nello spazio delle configurazioni. Se abbiamo un'hamiltoniana standard (cosa che succede nella maggior parte dei casi) siamo in presenza di una cosa del tipo:

$$\hat{H}(q, p) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \quad (2.3.34)$$

in cui in $\hat{p}$ abbiamo tutti i momenti sommati. Nel caso di (2.3.34) possiamo utilizzare tutti i trucchetti visti nel caso della particella libera, quindi, possiamo completare il quadrato nell'argomento dell'esponenziale:

$$p_i \dot{q}_i - H(q, p) = -\frac{p_i^2}{2m} + p_i \dot{q}_i - V(q) \quad (2.3.35)$$

$$= -\frac{1}{2m} (p_i - \dot{q}_i m)^2 + \frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - V(q) \quad (2.3.36)$$

che se messo nell'integrale vediamo che il pezzo in dp si fattorizza. Implementiamo i conti dimenticandoci del pezzo $\frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - V(q)$ che tanto non dipende

da p e lo reinseriamo in un secondo momento:

$$\int \prod_{k=0}^{N-1} \frac{d^n p_k}{(2\pi\hbar)^n} \exp \left\{ -\frac{i\Delta t_i}{2m\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} (p_j - \dot{q}_j m)^2 \right\} \quad (2.3.37)$$

non è restrittivo prendere $\Delta t_i \equiv \Delta t \quad \forall i$, poiché stiamo solo prendendo la griglia con separazione sempre uguale, però è comodo perché nella produttoria abbiamo N oggetti tutti uguali:

$$\left[\int \frac{d^n p_j}{(2\pi\hbar)^n} \exp \left\{ -\frac{i\Delta t_i}{2m\hbar} (p_j - \dot{q}_j m)^2 \right\} \right]^N \quad (2.3.38)$$

però avendo ancora i singoli integrali tutti uguali, possiamo scrivere:

$$\left[\int \frac{dp}{(2\pi\hbar)^n} \exp \left\{ -\frac{i\Delta t_i}{2m\hbar} (p - \dot{q} m)^2 \right\} \right]^{nN} \quad (2.3.39)$$

che è una cosa identica a quello che ci usciva nei conti di particella libera e di cui sappiamo il risultato (facendo gli stessi conti e con il cambio di variabile $p - m\dot{q}$) portandoci quindi a:

$$\left(\frac{1}{\mathcal{N}} \right)^{nN} = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \right)^{nN}. \quad (2.3.40)$$

Rimettendo tutto quello visto nell'espressione del propagatore (2.3.29) otteniamo:

$$K(q', t'; q, t) = \frac{1}{\mathcal{N}^n} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d^n q_k}{\mathcal{N}^n} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^{N-1} \Delta t \left(\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - V(q) \right) \right\}. \quad (2.3.41)$$

Ricapitolando, nel caso di un'hamiltoniana standard (2.3.34), allora riusciamo ad ottenere un'espressione per il propagatore con la lagrangiana e solo integrali in dq . Ci siamo riusciti a spostare nello spazio delle configurazioni e possiamo dire che con il completamento del quadrato abbiamo fatto una trasformata di Legendre in cui siamo passati da H ad L . L'espressione (2.3.41) non è l'espressione del path integral nello spazio delle configurazioni definitivo che possiamo ottenere, infatti, possiamo ancora fare un passaggio, ovvero ricordare la definizione di lagrangiana e scrivere:

$$K(q', t'; q, t) = \frac{1}{\mathcal{N}^n} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d^n q_k}{\mathcal{N}^n} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^{N-1} L(q, \dot{q}) \Big|_{q=q_i} \Delta t \right\}. \quad (2.3.42)$$

Facendo di nuovo il limite per $N \rightarrow \infty$ otteniamo il **path integral nello spazio delle configurazioni**:

$$K(q', t'; q, t) = \int \mathcal{D}_q e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} L(q, \dot{q}) d\tau} = \int \mathcal{D}_q e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\tau)]}. \quad (2.3.43)$$

Facciamo un paio di osservazioni riguardo (2.3.43). Notiamo che abbiamo scritto l'azione calcolata sul cammino $q(\tau)$ tra t e t' . Dentro $\mathcal{D}_q$ abbiamo inserito la misura $\frac{d^n q_k}{\mathcal{N}^n}$ nello spazio delle q , ma l' $1/\mathcal{N}^n$ che non è "accoppiato" con nessun dq_k e avanza dove va? Ricordiamo che per definizione abbiamo:

$$\psi(q', t') = \int d^n q' K(q', t'; q, t) \psi(q, t) \quad (2.3.44)$$

in cui, se utilizziamo l'espressione di $K(q', t'; q, t)$ (2.3.42) all'interno, il termine $1/\mathcal{N}^n$, che pensavamo avanzasse, serve a rendere la misura del $d^n q$ presente in $\psi(q', t')$ sullo stesso piano degli altri.

2.4 L'equazione di Schrodinger

Abbiamo già detto che la formulazione dei path integral poiché non solo è importante nella costruzione della Teoria Quantistica dei Campi o nella Meccanica Statistica, ma permette, assumendoli come assiomi della teoria, anche di, ricavare tutti i risultati già trovati della Meccanica Quantistica che già conosciamo⁵. Infatti, sappiamo che possiamo scrivere la funzione d'onda ad un certo tempo t in una certa posizione x in termini del propagatore $K(x, t; x_0, 0)$ e alla funzione d'onda al tempo precedente $t = 0$ e nella posizione iniziale x_0 :

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 K(x, t; x_0, 0) \psi(x_0, 0). \quad (2.4.1)$$

Abbiamo visto che se $\psi(x, t)$ soddisfa l'equazione di Schrodinger, allora anche K la risolve e ne sappiamo dare una rappresentazione sia nello spazio delle fasi che delle configurazioni. Però, la relazione (2.4.1) l'abbiamo scritta a suo tempo nella sezione §2.2 partendo dall'operatore di evoluzione temporale e dal postulato dell'evoluzione temporale della Meccanica Quantistica. Ora, proviamo a partire dalla scrittura di K come path integral, passare dalla scrittura (2.4.1), ovvero ad una scrittura della funzione d'onda come convoluzione del propagatore con la funzione d'onda in un punto iniziale e vedere che equazione differenziale specifica soddisfa ψ . Vedremo che l'equazione soddisfatta da ψ risulterà essere l'equazione di Schrodinger.

Schematicamente possiamo scrivere:

$$\text{Eq. Schrodinger} \quad \Longleftrightarrow \quad K = \int \mathcal{D}_x e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

⁵Infatti, sul libro *Quantum Mechanics: A Mathematical Introduction*, di Andrew J. Larkoski, Cambridge University Press (2022) c'è un intero capitolo dedicato ai path integral e in cui partendo dall'esistenza di un'operatore di evoluzione temporale (e di propagatore) ricava non solo l'equazione di Schrodinger, come facciamo noi, ma anche tutti gli altri risultati della Meccanica Quantistica.

il cammino da sinistra a destra lo abbiamo già visto e nel resto della sezione vedremo come andare da destra a sinistra.

L'equazione di Schrodinger è un'equazione differenziale che coinvolge tempo e spazio, per cui ci servirà fare spostamenti sia nello spazio che nel tempo, anche piccoli, per avere delle derivate. Studiamo quindi $\psi(x, t)$ con $t = \varepsilon$ piccolo, che implica anche avere spostamenti spaziali piccoli, dal momento che bisogna sempre avere velocità finite. Il motivo di prendere $t = \varepsilon$ piccolo è che se il tempo è piccolo, allora non abbiamo bisogno di spazzettare l'integrale e abbiamo il propagatore K che è dato da un solo termine. Consideriamo (2.2.59) e implementiamo i conti con $t = \varepsilon$:

$$K(x, t; x_0, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_0^\varepsilon d\tau \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)\right)\right\} \quad (2.4.2)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} \exp\left\{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)\right)\right\} \quad (2.4.3)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} \exp\left\{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right)^2 - V(x)\right)\right\} \quad (2.4.4)$$

in cui abbiamo utilizzato il fatto che se ε è piccolo, allora abbiamo anche incrementi della posizione piccoli e quindi possiamo scrivere la derivata come un rapporto incrementale. Abbiamo quindi:

$$K(x, t; x_0, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} e^{-\frac{i}{\hbar} \varepsilon V(x)} e^{\frac{i}{2} \frac{m}{\hbar} \frac{(x-x_0)^2}{\varepsilon}} \quad (2.4.5)$$

che se inserita nell'espressione per $\psi(x, t)$ (2.4.1) si ha:

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} e^{-\frac{i}{\hbar} \varepsilon V(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 e^{\frac{i}{2} \frac{m}{\hbar} \frac{(x-x_0)^2}{\varepsilon}} \psi(x_0, 0) \quad (2.4.6)$$

al cui interno riconosciamo una cosa parente alla δ di Dirac. Si veda l'Appendice A per dettagli. Infatti, facendo opportuni cambi di variabile riusciamo ad ottenere nell'integrale di $\psi(x, t)$ una cosa collegabile con lo sviluppo (A.0.9). Per prima cosa facciamo una rotazione di Wick:

$$i\varepsilon = \alpha \quad (2.4.7)$$

e un cambio di variabili:

$$\sqrt{\frac{m}{\hbar}} (x - x_0) = y_0 \quad (2.4.8)$$

così scriviamo:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{\alpha}{\hbar} V(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 e^{-\frac{y_0^2}{2\alpha}} \psi\left(x - \sqrt{\frac{\hbar}{m}} y_0, 0\right). \quad (2.4.9)$$

Così siamo felici perché possiamo utilizzare la relazione trovata in Appendice A:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} = \delta(x) + \frac{\alpha}{2} \delta''(x) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (2.4.10)$$

e scrivere:

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{\alpha}{\hbar} V(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 \left(\delta(y_0) + \frac{\alpha}{2} \delta''(y_0) \right) \psi \left(x - \sqrt{\frac{\hbar}{m}} y_0, 0 \right) \quad (2.4.11)$$

in cui l'integrale con $\delta(y_0)$ è immediato e quello con $\delta''(y_0)$, invece, si fa per parti. Otteniamo:

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{\alpha}{\hbar} V(x)} \left(\psi(x, 0) + \frac{\alpha}{2} \frac{d^2 \psi(x - \sqrt{\hbar/m} y_0)}{dy_0^2} \Big|_{y=0} \right) \quad (2.4.12)$$

notiamo che il nostro cambio di variabile implica:

$$\sqrt{\frac{m}{\hbar}} (x - x_0) = y_0 \implies dy_0 = \sqrt{\frac{m}{\hbar}} dx \implies \frac{d^2}{dy_0^2} = \frac{\hbar}{m} \frac{d^2}{dx^2} \quad (2.4.13)$$

e quindi:

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{\alpha}{\hbar} V(x)} \left(\psi(x, 0) + \frac{\alpha \hbar}{2m} \frac{d^2 \psi(x, 0)}{dx^2} \right) \quad (2.4.14)$$

$$= e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x)} \left(\psi(x, 0) + \frac{i\varepsilon \hbar}{2m} \psi''(x, 0) \right) \quad (2.4.15)$$

in cui abbiamo utilizzato $\alpha = i\varepsilon$. Ricapitoliamo un attimo: siamo partiti dalla relazione (2.4.1), abbiamo utilizzato la definizione di propagatore come path integral, ci siamo messi in una situazione con $t = \varepsilon$ piccolo e siamo riusciti, grazie alle proprietà della δ di Dirac a scrivere lo sviluppo in ε al primo ordine del termine di destra della relazione di (2.4.1). Quindi, dobbiamo ancora sviluppare al primo ordine il pezzo di sinistra e l'esponenziale di destra di (2.4.1). Implementiamo i conti partendo da (2.4.15) (in cui ricordiamo di mettere $t = \varepsilon$):

$$\psi(x, 0) + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \varepsilon = \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V \right) \left(\psi(x, 0) + \frac{i\varepsilon \hbar}{2m} \psi''(x, 0) \right) \quad (2.4.16)$$

$$= \psi(x, 0) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x) \psi(x, 0) + \frac{i\varepsilon \hbar}{2m} \psi''(x, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.4.17)$$

in cui, cancellando i termini comuni, otteniamo:

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \varepsilon = \frac{i\varepsilon \hbar}{2m} \psi''(x, 0) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x) \psi(x, 0) \quad (2.4.18)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x, 0) + V(x) \psi(x, 0). \quad (2.4.19)$$

L'equazione (2.4.19) non è altro che l'equazione di Schrodinger come la conosciamo calcolata per $t = 0$, ma vista l'arbitrarietà con cui abbiamo fissato $t = 0$, quello che abbiamo trovato vale $\forall t$.

2.5 Teoria gaussiana e determinanti funzionali

Per questa sezione è fondamentale ricordare diversi concetti visti a Metodi Matematici per la Fisica 2, per cui rimando agli appunti del corso per le parti di analisi complessa.

Nella sezione §2.2.1 siamo riusciti a fare i conti, e in generale in n dimensioni riusciamo a farli, perché tutti gli integrali che compaiono sono gaussiani. Quella che va sotto il nome di teoria gaussiana permette di riscrivere l'espressione di $K(q', t'; q, t)$ in modo da fattorizzare un termine contenente l'azione classica e un termine in cui bisogna svolgere un integrale gaussiano. Per giungere ad un'espressione di questo tipo Mariño God used very advanced mathematics in constructin the universe.marinoLN esplicita l'espressione di una lagrangiana quadratica nelle velocità e svolge i conti all'interno dell'espressione di K . Noi proviamo a seguire un ragionamento diverso, ma nei fatti facendo circa le stesse cose; proviamo a verificare che, come logico, l'espressione:

$$K(q', t'; q, t) = \int \mathcal{D}_q e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\tau)]} \quad (2.5.1)$$

che considera sia il cammino classico, sia gli altri ∞ cammini quantistici possibili, contenga solo la S classica nel momento in cui consideriamo un sistema macroscopico.

Attenzione solo al fatto che con in termine *contenere* intendiamo dire che il contributo dominante all'integrale del propagatore viene da un intorno (salsicciotto) piccolo quanto si vuole dell'azione classica. Il che vuol dire, sapendo che $\hbar \sim 1 \cdot 10^{-34}$ Js e che nell'esponenziale compare:

$$\frac{i}{\hbar} S[q(\tau)] \quad (2.5.2)$$

che in un sistema macroscopico stiamo dividendo un'azione S macroscopica per un numero molto piccolo.

Prendiamo il cammino $q(t)$ e un generico cammino:

$$q'(t) = q(t) + \delta q(t) \quad (2.5.3)$$

tra un'istante iniziale t_a e finale t_b , con la condizione che:

$$\delta q(t_a) = \delta q(t_b) = 0. \quad (2.5.4)$$

È ragionevole prendere δq piccolo, poiché inteso come una deformazione del cammino $q(t)$, che si traduce in:

$$\frac{\delta q}{q} \ll 1. \quad (2.5.5)$$

Però, per un sistema macroscopico anche un δq piccolo è tale per cui:

$$\frac{\delta q}{\hbar} \sim \infty \quad (2.5.6)$$

quindi, quando facciamo la variazione del cammino per un sistema classico anche cammini molto vicini hanno azioni molto diverse, e quindi fasi dell'esponenziale molto diverse (oscillazioni grandi). I contributi nel path integral si cancellano tutti, per via delle forti oscillazioni per piccole deformazioni e quindi per via del lemma di Riemann, e rimane solo il contributo del cammino classico, che rende minima l'azione e per cui il termine al primo ordine dello sviluppo per piccole variazioni di cammino di S_{cl} è nullo. Più il sistema è macroscopico più il tubetto, che dà contributo al propagatore, attorno l'azione classica si restringe.

I cammini che non danno contributo nullo a K sono quelli per cui l'azione varia di una quantità paragonabile ad $\hbar$, in modo che la fase dell'esponenziale non sia paragonabile a ∞ e non si applichi il lemma di Riemann.

Abbiamo intuito che dobbiamo fare uno sviluppo di K utilizzando il metodo della fase stazionaria. Scriviamo:

$$K_N(b; a) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{dq_k}{\mathcal{N}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^{N-1} L(q, \dot{q})_{t=t_i} \Delta t \right\} \quad (2.5.7)$$

in cui abbiamo scritto:

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} L(q, \dot{q})_{t=t_i} \Delta t \quad (2.5.8)$$

con all'interno:

$$L(q, \dot{q})_{t=t_i} = L(q_i, \dot{q}_i) \equiv L(q_i, q_{i+1}) = \frac{1}{2} m (q_{i+1} - q_i)^2 \frac{1}{\Delta t^2} - V(q_i) \quad (2.5.9)$$

in cui abbiamo utilizzato il fatto che nel caso discreto la derivata la possiamo scrivere come rapporto incrementale.

Dal metodo della fase stazionaria sappiamo bene che per via del lemma di Riemann tutti gli integrali dell'esponenziale si cancellano ad eccezione di quello per cui la fase, quindi nel nostro caso l'azione, è stazionaria. Dobbiamo cercare quindi chi soddisfa:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i \quad (2.5.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} L(q_i, q_{i+1}) + \frac{\partial}{\partial q_i} L(q_{i-1}, q_i) = 0 \quad (2.5.11)$$

scriviamo la forma discreta della derivata:

$$-\frac{m(q_{i+1} - q_i)}{\Delta t^2} - \frac{\partial V(q_i)}{\partial q_i} + \frac{m(q_i - q_{i-1})}{\Delta t^2} = 0 \quad (2.5.12)$$

$$\frac{m}{\Delta t} \{\dot{q}_{i-1} - \dot{q}_i\} - \frac{\partial V(q_i)}{\partial q_i} = 0 \quad (2.5.13)$$

$$m\ddot{q}_i = -\frac{\partial V(q_i)}{\partial q_i} \quad (2.5.14)$$

che è un'espressione che ci piace poiché non è altro che l'equazione di Newton e che ci conferma il fatto che i punti q_i che rendono stazionario S sono quelli classici.

Chiamiamo q_{i0} le soluzioni dell'equazione (2.5.14). Possiamo sempre scrivere, in modo generico, un cammino discostato dal cammino classico di una quantità ω_i come:

$$q_i = q_{i0} + \omega_i \quad (2.5.15)$$

e preso questo cammino generico, possiamo scrivere l'azione $S(q_i)$ e sviluppare in potenze di ω_i :

$$S(q_i) = S(q_{i0} + \omega_i) \quad (2.5.16)$$

$$= S(q_{i0}) + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_i} \Big|_{q_i=q_{i0}}}_{=0} \omega_i + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q_i=q_{i0}}}_{\equiv X_{ij}} \omega_i \omega_j + \mathcal{O}(\omega^3) \quad (2.5.17)$$

in cui abbiamo definito l'operatore X_{ij} . Possiamo scrivere lo sviluppo come:

$$S(q_i) = S_{cl} + S_2 + S_{\geq 3} \quad (2.5.18)$$

in cui i vari termini sono:

$$S_{cl} = \text{azione classica} \quad (2.5.19)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q_i=q_{i0}} \omega_i \omega_j = X_{ij} \omega_i \omega_j \quad (2.5.20)$$

$$S_{\geq 3} = \text{termini con 3 o più } \omega. \quad (2.5.21)$$

Dunque, scrivendo il generico cammino (2.5.15) abbiamo suggerito un cambio di variabile da fare nell'integrale di K , ovvero una traslazione di una costante (il cammino classico), e per cui:

$$dq_i = d\omega_i \quad (2.5.22)$$

il propagatore (2.5.7) diventa quindi:

$$K_N(b; a) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d\omega_k}{\mathcal{N}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} e^{\frac{i}{\hbar} \omega_i X_{ij} \omega_j} \left(1 + \frac{i}{\hbar} S_{\geq 3} + \dots \right) \quad (2.5.23)$$

in cui abbiamo già fatto il primo passaggio del metodo della fare stazionaria, ovvero scrivere:

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_{\geq 3}} \sim \left(1 + \frac{i}{\hbar} S_{\geq 3} + \dots \right). \quad (2.5.24)$$

Il termine dominante dello sviluppo (2.5.23) ci darà l'**approssimazione semiclassica**, mentre prendendo i termini successivi, che sono i termini che distinguono i vari cammini, saremo in grado di fare uno **sviluppo perturbativo**.

Possiamo però notare che abbiamo, indici sommati i e j nel termine:

$$S_2(\omega) = \sum_{ij} \omega_i X_{ij} \omega_j \quad (2.5.25)$$

che non è altro che una generica forma quadratica in ω . L'espressione (2.5.25) può anche essere scritta come prodotto di vettori e matrici di dimensione N e $N \times N$:

$$S_2 = \omega^T X \omega. \quad (2.5.26)$$

Guarderemo nelle due sottosezioni seguenti come trattare due casi specifici.

2.5.1 Caso matrici diagonali

Consideriamo il caso semplificato in cui abbiamo solo matrici diagonali, in questo modo anche S_2 e i pezzi di $S_{\geq 3}$ lo sono, e abbiamo:

$$S_2(\omega) = \sum_k \omega_k X_{kk} \omega_k = \sum_k X_{kk} \omega_k^2 \quad (2.5.27)$$

$$S_{\geq 3}(\omega) = \sum_k Y_k \omega_k^3 + Z_k \omega_k^4 + \dots \quad (2.5.28)$$

e l'integrale di cammino lo possiamo scrivere in modo compatto come:

$$K = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\mathcal{N}^2} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} A_k \quad (2.5.29)$$

dove, indicando con x_k gli elementi di matrice di X_{kk} :

$$A_k = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_k e^{\frac{i}{\hbar} x_k \omega_k^2} \left[1 + \frac{i}{\hbar} (Y_k \omega_k^3 + Z_k \omega_k^4 + \dots) - \frac{1}{2\hbar^2} (Y_k \omega_k^3 + Z_k \omega_k^4 + \dots)^2 + \dots \right]. \quad (2.5.30)$$

Quindi, non abbiamo più da fare un'integrale multiplo per calcolarci K , bensì una moltiplicazione di tanti integrali.

Continuiamo a seguire il metodo della fase stazionaria. Supponiamo $x_k > 0$ e scriviamo il cambio:

$$\omega_k = e^{i\frac{\pi}{4}\rho_k} \quad (2.5.31)$$

così da modificare il cammino per passare sul punto stazionario con un'inclinazione di $\pi/4$. Ricordiamo che stiamo sviluppando per $\hbar \rightarrow 0$. In questo modo abbiamo:

$$A_k = e^{i\frac{\pi}{4}\rho_k} \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho_k e^{-\frac{x_k}{\hbar}\rho_k^2} \left(1 - \frac{i}{\hbar} Z \rho^4 + \frac{i}{2\hbar^2} Y \rho^6 + \dots \right) \quad (2.5.32)$$

in cui abbiamo scritto le correzioni in $\hbar$ solo diverse da zero, ovvero, quelle pari, poiché le correzioni con potenze dispari di ρ andranno a zero una volta integrate; per vedere ciò basta ricordare i risultati:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (2.5.33)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} x^4 = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{1}{\alpha^2} \quad (2.5.34)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} x^6 = -\frac{15}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{1}{\alpha^3}. \quad (2.5.35)$$

Facendo i conti, tenendo solo le prime correzioni in ρ , di (2.5.32) arriviamo a:

$$A_k = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{x_k}} \left(1 - \frac{i}{\hbar} Z \frac{3}{4} \frac{\hbar^2}{x_k^2} - \frac{i}{2\hbar^2} Y \frac{15}{8} \frac{\hbar^3}{x_k^3} \right) \quad (2.5.36)$$

$$= e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{x_k}} \left[1 - i\hbar \left(Z \frac{3}{4} \frac{1}{x_k^2} + Y \frac{15}{16} \frac{1}{x_k^3} \right) \right] \quad (2.5.37)$$

notiamo che abbiamo ottenuto una cosa del tipo $[1 + \alpha(\dots)]$ in cui i termini tra parentesi tonde sono i pezzi dello sviluppo perturbativo in potenze di $\hbar$, che derivano dallo sviluppo dei pezzi di S non quadratici.

Come possiamo vedere graficamente questa cosa? Abbiamo detto che fare il limite $\hbar \rightarrow 0$ vuol dire porsi in traiettorie prossime (in un salsicciotto sempre più piccolo) a quella classica, poiché, come già detto, se $S(\omega) \gg \hbar$ allora si hanno oscillazioni frenetiche dell'esponenziale che annullano il contributo dell'integrale. Graficamente è visibile nella figura 2.7, in cui possiamo notare che nelle regioni prima e dopo il picco centrale i contributi di $S(\omega)$ vanno a 0. L'unico pezzo non mediato a 0 è dove $S(\omega)$ è stazionario, ossia costante, che abbiamo visto e sappiamo essere per $\omega = 0$. Infatti, $\omega = 0$ è proprio il punto per cui si ha $e^{\frac{i}{\hbar}S}$ con fase costante e non si media a 0. Per motivazioni riguardo quello appena detto rimando agli appunti di Metodi Matematici per la Fisica 2.

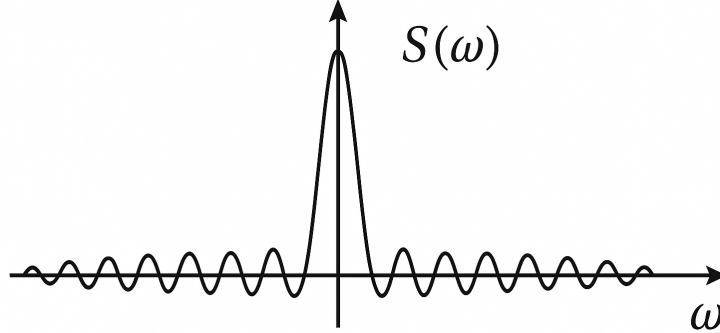


Figura 2.7: Rappresentazione grafica dei contributi dei vari cammini.

Continuiamo ad implementare i conti che avevamo iniziato e consideriamo solo il termine dominante di (2.5.37):

$$A_k = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{x_k}} = \sqrt{\frac{i\pi\hbar}{x_k}} \quad (2.5.38)$$

che rimettendolo nell'integrale (2.5.29) porta a:

$$K(t_b, x_b; t_a, x_a) = \frac{1}{\mathcal{N}} e^{i\frac{\hbar}{\hbar} S_{cl}} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d\omega_k}{\mathcal{N}} e^{i\frac{\hbar}{\hbar} S_2(\omega_k)} \left(1 + \dots\right) \quad (2.5.39)$$

$$= \frac{e^{i\frac{\hbar}{\hbar} S_{cl}} (i\pi\hbar)^{\frac{N-1}{2}}}{\mathcal{N} \mathcal{N}^{N-1}} \frac{1}{(x_1 x_2 \dots x_{N-1})^{1/2}} \quad (2.5.40)$$

Notiamo a questo punto che l'ultimo denominatore di (2.5.40) non è altro che il determinante della matrice X_{kk} , che ricordiamo avere elementi x_k , nel caso di S_2 diagonale. Ovviamente è un caso particolare e valido in generale.

Eslicitando la costante di normalizzazione:

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\Delta t}{m}} \quad (2.5.41)$$

viene:

$$K(t_b, x_b; t_a, x_a) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{2\Delta t}\right)^{\frac{N-1}{2}} e^{i\frac{\hbar}{\hbar} S_{cl}} (\det X)^{-1/2}. \quad (2.5.42)$$

Quindi, siamo riusciti a vedere che il propagatore ha un pezzo classico e pezzi perturbativi. Il termine $\det X$ lo chiamiamo **determinante funzionale** e risulterà fondamentale saperlo calcolare in varie situazioni.

Infatti, calcolare un path integral implica calcolare il limite per $N \rightarrow \infty$ del determinante di una matrice $N \times N$, che abbiamo chiamato X . Ci

viene naturale interpretare il limite come il determinante dell'operatore X . Possiamo giustificare il risultato vedendo l'integrale:

$$\int \mathcal{D}\omega e^{\frac{im}{2\hbar}\omega X \omega} \quad (2.5.43)$$

che è il pezzo, sviluppando l'azione, in cui compare l'operatore X , come una versione infinito dimensionale di un'integrale gaussiana e che ci possiamo aspettare essere proporzionale a:

$$\frac{1}{\sqrt{\det X}}. \quad (2.5.44)$$

Il determinante possiamo pensare di calcolarlo, anche se non proprio ben definito, come prodotto infinito degli autovalori λ_n dell'operatore X :

$$\det X = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n. \quad (2.5.45)$$

La realtà è che riusciremo nella maggior parte dei casi a risolvere lo spettro di X , quindi a trovare autofunzioni ed autovalori, ma allo stesso tempo ci troveremo quasi sempre in situazioni in cui il prodotto (2.5.45) è chiaramente divergente. Vedremo due esempi, nella sezione §2.6, in cui riusciremo a regolarizzare e a calcolare il determinante.

2.5.2 Caso matrici simmetriche

Noi abbiamo fatto una notevole semplificazione quando abbiamo scelto X diagonale, rendendo il risultato un caso particolare, ma possiamo generalizzarlo facilmente al caso in cui X è diagonalizzabile. Infatti, se X è simmetrica, allora si può diagonalizzare con una matrice D diagonale che contiene gli autovalori di X , una matrice M ortogonale formata dagli autovettori di X e possiamo sempre scrivere:

$$X = M D M^T \quad (2.5.46)$$

in cui, essendo X simmetrica, si ha $M^T = M^{-1}$. Nello sviluppo di $S(\omega)$ si ha:

$$\omega^T X \omega \quad (2.5.47)$$

il cambio di variabili che faremo sarà:

$$x = M^T \omega \quad (2.5.48)$$

che porta a:

$$\omega^T X \omega = \omega^T M D M^T \omega = x^T D x. \quad (2.5.49)$$

Il cambio (2.5.49) nell'integrale (2.5.29), a meno di fattori di normalizzazione, comporta:

$$\int \prod_{k=1}^{N-1} d\omega_k e^{\frac{i}{\hbar} \omega^T X \omega} = \int \prod_{k=1}^{N-1} dx_k J e^{\frac{i}{\hbar} x^T D x} \quad (2.5.50)$$

in cui abbiamo inserito J jacobiano, che non è altro che il determinante (in valore assoluto) del cambio di variabile. Se vale che $M^T = M^{-1}$, ossia M è ortogonale, allora si ha:

$$M^T M = M^{-1} M = \mathbb{1} \implies \det\{M^T M\} = \det\{\mathbb{1}\} \quad (2.5.51)$$

$$\implies (\det\{M\})^2 = 1 \implies \det\{M\} = \pm 1 \quad (2.5.52)$$

dunque si ha $J = 1$ con questo cambio di coordinate. In questo modo abbiamo l'integrale:

$$\prod_{k=1}^{N-1} \int dx_k e^{\frac{i}{\hbar} \lambda_k x_k^2} \quad (2.5.53)$$

dove indichiamo con λ_k gli elementi della matrice D :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & & \lambda_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (2.5.54)$$

Come abbiamo già potuto notare nella prima parte della sezione otteniamo:

$$\prod_{k=1}^{N-1} \int dx_k e^{\frac{i}{\hbar} \lambda_k x_k^2} = \prod_{k=1}^{N-1} \sqrt{\frac{\pi \hbar i}{\lambda_k}} = (\sqrt{i \hbar \pi})^{N-1} (\det X)^{-1/2} \quad (2.5.55)$$

in cui abbiamo scritto il determinante funzionale di X , quando in realtà sarebbe $\det D$, poiché:

$$\det X = \det\{M^T D M\} = \det\{M^T\} \det\{D\} \det\{M\} = \det D. \quad (2.5.56)$$

Però, fin'ora abbiamo solo fatto il caso discreto e ci siamo dimenticati dei fattori di normalizzazione di (2.5.29). Vediamo le cose fatte bene:

$$K_D(t_b, x_b; t_a, x_a) = \frac{1}{\mathcal{N}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d\omega_k}{\mathcal{N}} e^{\frac{i}{\hbar} S_2(\omega_k)} (1 + \dots) \quad (2.5.57)$$

che nel limite continuo $N \rightarrow \infty$:

$$K_D(t_b, x_b; t_a, x_a) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int \mathcal{D}\omega e^{\frac{i}{\hbar} S_2[\omega]} (1 + \dots). \quad (2.5.58)$$

Dalla relazione (2.5.58) si vede che tutta la dipendenza da x_a e x_b sta nell'esponenziale con l'azione classica S_{cl} , mentre l'integrale funzionale contiene solo quella da t_a e t_b visto che ω ha condizioni periodiche (ricordiamoci che $\omega(t)$ rappresenta la fluttuazione di ciascun cammino rispetto quello classico, dunque è tale per cui $\omega(t_a) = \omega(t_b) = 0$). La relazione (2.5.58) ovviamente è identico a quello trovato con le matrici diagonali e porta allo stesso risultato (2.5.42).

2.5.3 Caso di operatore differenziale

Prima di concludere la sezione notiamo che saremmo potuti arrivare allo stesso risultato (2.5.42) semplicemente utilizzando la definizione di propagatore. Abbiamo:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \mathcal{D}_q e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \quad , \quad S = \int_{t_a}^{t_b} dt L(q, \dot{q}) \quad (2.5.59)$$

e ci chiediamo cos'è l'azione $S[q]$ quando deformiamo il cammino come $q = q_0 + \omega$:

$$S[q] = S[q_0] + S_1[\omega] + S_2[\omega] + S_3[\omega] + \dots \quad (2.5.60)$$

in cui abbiamo: $S[q_0]$ che è l'azione calcolata sul cammino classico; $S_1[\omega] = 0$ poiché sviluppare l'azione al primo ordine equivale a sviluppare la lagrangiana $L(q, \dot{q})$ al primo ordine, e dunque ottenere l'equazione di Eulero-Lagrange; i termini S_2, S_3 eccetera sono fluttuazioni. Analizziamo meglio chi è il secondo termine dello sviluppo, ovvero, il primo non nullo dopo l'azione sul cammino classico:

$$S_2[\omega] = \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \Big|_{q=q_0} \dot{\omega}^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \Big|_{q=q_0} \omega \dot{\omega} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \Big|_{q=q_0} \omega^2 \right) \quad (2.5.61)$$

$$\frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt (\dot{\omega} A \dot{\omega} + \omega B \dot{\omega} + \omega C \omega) \quad (2.5.62)$$

in cui abbiamo scritto:

$$A = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \Big|_{q=q_0} \quad , \quad B = \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \Big|_{q=q_0} \quad , \quad C = \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \Big|_{q=q_0} \quad (2.5.63)$$

e nella forma (2.5.62) il propagatore è scritto quasi come forma quadratica in ω , in cui dovremmo avere una cosa tipo $\omega(\dots)\omega$. Proviamo a fare un'integrazione per parti, del termine in cui compare A , per provare ad arrivare ad una forma quadratica:

$$\int \dot{\omega} A \dot{\omega} = \int \frac{d\omega}{dt} dt = \underbrace{\omega(A \dot{\omega})}_{=0} \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} dt \omega (\dot{A} \dot{\omega} + A \ddot{\omega}) \quad (2.5.64)$$

e si ha dunque:

$$S_2[\omega] = \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt \omega \left[-\dot{A} \frac{d}{dt} - A \frac{d^2}{dt^2} + B \frac{d}{dt} + C \right] \omega \quad (2.5.65)$$

in cui il termine tra le parentesi quadre è l'operatore che prima abbiamo chiamato X , che in questo caso non è una matrice (diagonale o simmetrica) bensì un'operatore differenziale.

Dallo sviluppo di $S[q]$ possiamo scrivere:

$$K(b, a) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int \mathcal{D}\omega e^{\frac{i}{\hbar} S_2[\omega]} \quad (2.5.66)$$

e per via di quello detto per l'equazione (2.5.65) possiamo sempre dire che:

$$K(b, a) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} (\det X)^{1/2} \quad (2.5.67)$$

a meno di fattori di normalizzazione e in cui $\det X$ è il determinante funzionale.

Quindi, in ipotetici esercizi o conti l'unica cosa importante è individuare l'operatore X con cui si ha a che fare e calcolarne il determinante in qualche modo. Notiamo due cose: la prima è che l'integrazione per parti che ci ha permesso di arrivare a (2.5.65) non è una cosa specifica per questa parte di teoria, ma un "truccetto" che si usa in molti casi; la seconda è che calcolare il determinante non vuol dire altro che moltiplicare tutti gli autovalori di X . Vedremo in seguito alcuni casi notevoli.

2.6 Casi tipici

Vediamo in questa sezione alcuni esempi, unidimensionali, su come effettivamente si utilizzino gli integrali di cammino. Una volta che capiremo il formalismo al discreto potremo elevare tutto al continuo molto facilmente. Applicheremo:

$$K_D(t_b, x_b; t_a, x_a) = \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int \mathcal{D}\omega e^{\frac{i}{\hbar} S_2[\omega]} (1 + \dots) \quad (2.6.1)$$

ovvero, la teoria gaussiana e il calcolo degli integrali funzionali, a due esempi specifici.

2.6.1 Particella libera

Riprendiamo lo stesso esempio visto nella sezione §2.2.1, ma stavolta utilizzeremo gli strumenti sviluppati nella sezione §2.5 e di cui potremo confrontare i risultati con quelli già trovati.

Abbiamo già visto che l'azione classica di particella libera è:

$$S_{cl} = \frac{1}{2}m \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \quad (2.6.2)$$

quindi dovremmo capire chi è S_2 da inserire in (2.5.58). Partiamo come al solito dalla definizione:

$$S = \int dt \frac{m}{2} \dot{q}^2 \quad (2.6.3)$$

facciamo il cambio di variabili:

$$q = q_0 + \omega \quad \longrightarrow \quad \dot{q} = \dot{\omega} \quad (2.6.4)$$

e otteniamo:

$$S_2 = \frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\omega}^2 \quad (2.6.5)$$

ma ricordandoci che gli estremi sono fissi:

$$\omega(t_a) = \omega(t_b) = 0. \quad (2.6.6)$$

Inserendo le cose appena viste nell'espressione del propagatore (2.5.58) al primo ordine abbiamo:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a}} \int \mathcal{D}\omega e^{\frac{im}{2\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\omega}^2} \quad (2.6.7)$$

in cui vediamo che la dipendenza dalle coordinate (x) compare solo nell'azione classica. Confrontando l'espressione (2.6.7) con il risultato del propagatore che già abbiamo trovato (2.2.52) possiamo vedere che:

$$\int \mathcal{D}\omega e^{\frac{im}{2\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\omega}^2} \equiv \frac{1}{\mathcal{N}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)}} \quad (2.6.8)$$

e, come intuito qualche pagina fa nella sezione §2.5, vediamo che la dipendenza temporale è contenuta nell'integrale funzionale e che possiamo scrivere:

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(t_b - t_a). \quad (2.6.9)$$

Quest'ultimissima affermazione ovviamente è verificabile. Il punto di partenza è:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int dx_c K(x_b, t_b; x_c, t_c) K(x_c, t_c; x_a, t_a) \quad (2.6.10)$$

in cui prendiamo:

$$t_b - t_a = (t_b - t_c) + (t_c - t_a) \quad (2.6.11)$$

cosa valida $\forall x$, il che ci permette di fissare arbitrariamente:

$$x_a = x_b = 0 \quad (2.6.12)$$

che ci fa vedere:

$$K(0, t_b; 0, t_a) = \int dx_c K(0, t_b; x_c, t_c) K(x_c, t_c; 0, t_a). \quad (2.6.13)$$

Utilizzando i risultati della sezione §2.2.1 possiamo dire:

$$K(0, t_b; x_c, t_c) = \frac{1}{\mathcal{N}(t_b - t_c)} e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{x_c^2}{t_b - t_c}} \quad (2.6.14)$$

$$K(x_c, t_c; 0, t_a) = \frac{1}{\mathcal{N}(t_c - t_a)} e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{x_c^2}{t_c - t_a}} \quad (2.6.15)$$

che ci forniscono il risultato complessivo:

$$K(0, t_b; 0, t_a) = \frac{1}{\mathcal{N}(t_b - t_c)\mathcal{N}(t_c - t_a)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_c e^{i\alpha x_c^2} \quad (2.6.16)$$

dove scriviamo:

$$\alpha = \frac{m}{2\hbar} \left(\frac{1}{t_b - t_c} + \frac{1}{t_c - t_a} \right) = \frac{m}{2\hbar} \frac{t_b - t_a}{(t_b - t_c)(t_c - t_a)}. \quad (2.6.17)$$

L'integrale in (2.6.16) è un'integrale gaussiano che, dopo aver fatto una rotazione di Wick analoga a quella fatta in §2.2.1, sappiamo risolvere facilmente e che ci fornisce:

$$K(0, t_b; 0, t_a) = \frac{1}{\mathcal{N}(t_b - t_c)\mathcal{N}(t_c - t_a)} \sqrt{\frac{\pi i}{\alpha}} \quad (2.6.18)$$

e per confronto mi aspetto:

$$K(0, t_b; 0, t_a) = \frac{1}{\mathcal{N}(t_b - t_c)\mathcal{N}(t_c - t_a)} \sqrt{\frac{\pi i}{\alpha}} = \frac{1}{\mathcal{N}(t_b - t_a)}. \quad (2.6.19)$$

Chiamiamo:

$$T_1 = t_b - t_c \quad , \quad T_2 = t_c - t_a \quad , \quad T = T_1 + T_2 \quad (2.6.20)$$

e abbiamo:

$$\frac{1}{\mathcal{N}(T_1)\mathcal{N}(T_2)} \sqrt{\frac{\pi i}{\alpha}} = \frac{1}{\mathcal{N}(T)} \quad (2.6.21)$$

$$\frac{\mathcal{N}(T)}{\mathcal{N}(T_1)\mathcal{N}(T_2)} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi i}} \quad (2.6.22)$$

$$\frac{\mathcal{N}(T)}{\mathcal{N}(T_1)\mathcal{N}(T_2)} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar}} \sqrt{\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}} \quad (2.6.23)$$

duqnue possiamo scrivere:

$$\mathcal{N}(T) = \sqrt{\frac{2\pi i \hbar T}{m}}. \quad (2.6.24)$$

Questo esempio è importante perché ci permette di notare una cosa che si ripresenterà anche nel futuro, ossia, che oltre al dover calcolare gli integrali funzionali (che vedremo dopo), la cosa difficile è anche il dover fissare una normalizzazione, che solitamente si fa in modo opportuno a seconda del problema. Per certi sistemi la normalizzazione si fissa tenendo conto di quella che si ha nel caso libero, il che vuol dire che, scritto il propagatore, spegniamo l'interazione, vediamo il caso libero, fissiamo la normalizzazione e poi torniamo al nostro problema.

Analizzato meglio il discorso riguardo la normalizzazione e del dove si trovano le varie dipendenze spaziali e temporali, possiamo provare a calcolare il path integral sfruttando la teoria gaussiana vista nella sezione §2.5, e dunque calcolando il determinante funzionale di un operatore ancora da identificare.

Abbiamo come lagrangiana del sistema libero unidimensionale:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (2.6.25)$$

possiamo fare una deformazione del cammino:

$$x = x_0 + \omega \quad (2.6.26)$$

in cui x_0 rappresenta il cammino classico e ω sono le solite fluttuazioni per cui vale la condizione:

$$\omega(t_a) = \omega(t_b) = 0. \quad (2.6.27)$$

Conosciamo l'azione classica:

$$S_{cl} = \frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \quad (2.6.28)$$

e vediamo facilmente che la deformazione del cammino porta al cambio di variabili tali per cui:

$$\dot{x} = \dot{\omega}. \quad (2.6.29)$$

L'espressione, del propagatore che vogliamo calcolare, è:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \exp\left\{\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a}\right\} \int \mathcal{D}_\omega e^{\frac{im}{2\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\omega}^2} \quad (2.6.30)$$

di cui, abbiamo visto nella sezione §2.5, che l'integrale funzionale risulta essere:

$$\int \mathcal{D}_\omega e^{\frac{im}{2\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\omega}^2} = C (\det X)^{-1/2} \quad (2.6.31)$$

dove C è un'opportuna normalizzazione. Nel resto della sezione ci dimenticheremo della normalizzazione del propagatore libero e ci concentreremo solamente sull'integrale funzionale. Cerchiamo di individuare l'operatore di cui calcolare il determinante. Prendiamo l'integrale che compare nell'esponentiale dell'integrale funzionale:

$$\int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\omega}^2 \quad (2.6.32)$$

e facciamo con esso, il trucchetto già intravisto in §2.5, dell'integrazione per parti, in modo da riuscire a ricondursi ad una forma bilineare in ω :

$$\int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\omega}^2 = \omega \dot{\omega} \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} dt \omega \ddot{\omega} = \int_{t_a}^{t_b} dt \omega \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) \omega \quad (2.6.33)$$

individuiamo l'operatore:

$$X = -\frac{d^2}{dt^2} \quad (2.6.34)$$

e per calcolarne il determinante possiamo calcolare il prodotto (infinito) degli autovalori (faremo la stessa cosa anche per l'oscillatore armonico). Supponiamo che le fluttuazioni attorno al cammino classico ω siano periodiche in modo da continuare a far valere la condizione che siano nulle agli estremi. Facendo questa ipotesi possiamo sviluppare la funzione $\omega(t)$ tramite Fourier:

$$\omega(t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin \left(\frac{\pi n t}{T} \right) = \sum_{n \geq 1} a_n \phi_n \quad (2.6.35)$$

con $T = t_b - t_a$. Proviamo ad agire con l'operatore X su $\omega(t)$ sviluppata con Fourier e vedere se otteniamo qualcosa di bello:

$$X\omega(t) = \sum_{n \geq 1} a_n X\phi_n = \sum_{n \geq 1} a_n \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) \sin \left(\frac{\pi n t}{T} \right) \quad (2.6.36)$$

$$= \sum_{n \geq 1} a_n \left(\frac{\pi^2}{T^2} n^2 \right) \phi_n = \left(\frac{\pi^2}{T^2} n^2 \right) \omega(t) \quad (2.6.37)$$

dunque, vediamo che $\omega(t)$, o meglio ϕ_n , sono le autofunzioni di X e $\pi^2 n^2 / T^2$ sono gli autovalori. Quindi possiamo dire:

$$\det X = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{T^2} n^2 \quad (2.6.38)$$

che è l'obiettivo di questa sottosezione, ma ha il problemino di essere una cosa divergente. Un modo di procedere e arrivare al risultato è quello di fare ciò che va sotto il nome di **Zeta function regularization**. Definiamo:

$$\zeta_x(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n^s} \quad (2.6.39)$$

dove individuiamo con λ_n gli autovalori del nostro operatore. La definizione di $\zeta_x(s)$ è utile perché se $s \in \mathbb{R}$ e sufficientemente grande, prima o poi allora convergerà e possiamo cercarne continuazioni analitiche. Notiamo che in generale la somma (2.6.39) converge se $\operatorname{Re}\{s\} > 1/2$, ma che possiamo immaginare di continuarla analiticamente in un dominio più grande, contenente $s = 0$, dov'è regolare. Ricordiamo che possiamo sempre scrivere:

$$\lambda_n^{-s} = e^{-s \log \lambda_n}. \quad (2.6.40)$$

Vediamo la derivata di $\zeta_x(s)$:

$$\left. \frac{d\zeta_x}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \sum_{n \geq 1} e^{-s \log \lambda_n} \right|_{s=0} \quad (2.6.41)$$

$$= \sum_{n \geq 1} \left. \frac{1}{\lambda_n^s} (-\log \lambda_n) \right|_{s=0} = - \sum_{n \geq 1} \log \lambda_n. \quad (2.6.42)$$

Notare (2.6.42) ci è utile perché permette di scrivere:

$$\det X = \prod_{n \geq 1} \frac{\pi^2}{T^2} n^2 = e^{\sum \log \lambda_n} = e^{-\zeta'_x(0)}. \quad (2.6.43)$$

Quindi, se troviamo dove $\zeta_x(s)$ converge, possiamo valutarne la derivata in $s = 0$ e riuscire a trovare il determinante di X . In questo caso abbiamo:

$$\zeta_x(s) = \left(\frac{T}{\pi}\right)^{2s} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2s}} \equiv \left(\frac{T}{\pi}\right)^{2s} \zeta(2s) \quad (2.6.44)$$

dunque, con l'operatore X , vediamo la funzione Zeta di Riemann⁶ come continuazione analitica di (2.6.39), che può essere estesa fino $s = 0$ e che ci permette di calcolare:

$$\zeta'_x(s) = \left(\frac{T}{\pi}\right)^{2s} \left[2 \log \left(\frac{T}{\pi}\right) \zeta(2s) + 2\zeta'(2s) \right] \quad (2.6.46)$$

$$\implies \zeta'_x(0) = 2 \log \left(\frac{T}{\pi}\right) \zeta(0) + 2\zeta'(0) \quad (2.6.47)$$

in cui sappiamo che valgono⁷:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta'(0) = \log(2\pi)\zeta(0) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) \quad (2.6.48)$$

⁶Ricorda che la Zeta di Riemann è definita come:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (2.6.45)$$

e nel corso di Metodi 2 abbiamo visto come estendere il suo dominio a tutto il piano complesso e come il suo unico polo, semplice, sia $s = 1$.

⁷La prima delle due relazioni di (2.6.48) l'abbiamo vista nel corso di Metodi 2, quindi rimando agli appunti di quel corso, mentre la seconda relazione in 2.6.48 è dimostrata nell'Appendice B.

che quindi portano a:

$$\zeta'_x(0) = -\log\left(\frac{T}{\pi}\right) - \log(2\pi) = -\log(2T) \quad (2.6.49)$$

per cui:

$$\det X = e^{\log(2T)} = 2T = 2(t_b - t_a) \quad (2.6.50)$$

e di conseguenza:

$$(\det X)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2(t_b - t_a)}} \quad (2.6.51)$$

che, a meno di una normalizzazione numerica che abbiamo brutalmente ignorato, è la dipendenza temporale che mi aspettavo comparisse nel propagatore.

Notiamo solo che per far tornare le normalizzazioni dovremmo considerare la misura di $\mathcal{D}_\omega$.

Questo esempio è istruttivo poiché mostra che nonostante ci imbattiamo, a volte, in cose divergenti possiamo comunque calcolarle. Discorsi di questo tipo saranno utili in Teoria Quantistica dei Campi.

2.6.2 Oscillatore armonico

La cosa importante da ricordare ancora prima di affrontare questo esempio è che, come abbiamo già visto nel capitolo dedicato nel corso di Meccanica Quantistica I, nel caso di potenziali quadratici (come anche la particella libera) l'espressione che troviamo del propagatore K è un risultato esatto e tutti i termini perturbativi $S_{\geq 3}$ sono nulli.

Svilupperemo i conti calcolando il determinante funzionale, così come fece Feynmann nel suo lavoro originale, ma ricordiamo che potremmo farli in più modi, ad esempio, potremmo discretizzare il cammino e poi calcolare gli integrali.

Sappiamo scrivere la lagrangiana del sistema:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (2.6.52)$$

possiamo scegliere liberamente:

$$t_a = 0 \quad , \quad t_b = T. \quad (2.6.53)$$

parametrizziamo il cammino come:

$$x = x_0 + z \quad (2.6.54)$$

dove x_0 è il solito cammino classico e z le fluttuazioni attorno esso. L'espressione del propagatore è:

$$K(x_b, T; x_a, 0) = e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}} \int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar}S_2[z]}. \quad (2.6.55)$$

Quindi dobbiamo calcolare: l'azione classica S_{cl} dell'oscillatore armonico e il determinante funzionale di un operatore che dobbiamo ancora individuare. Cominciamo a preoccuparci dell'azione classica:

$$S_{cl} = \frac{m}{2} \int_0^T dt (\dot{x}_0^2(t) - \omega^2 x_0^2(t)) \quad (2.6.56)$$

in cui abbiamo $x_0(t)$ equazione del moto, che essendoci già nota, rende molto più rapido il problema rispetto altri casi in cui x_0 sarebbe da calcolare. In modo generico possiamo scrivere:

$$x_0(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (2.6.57)$$

$$\implies \dot{x}_0(t) = i\omega (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) \quad (2.6.58)$$

dove A e B sono costanti fissabili con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_0(0) = A + B \equiv x_a \\ x_0(T) = Ae^{i\omega T} + Be^{-i\omega T} \equiv x_b \end{cases} \quad (2.6.59)$$

che portano a:

$$A = \frac{x_b - x_a e^{-i\omega T}}{e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}} \quad (2.6.60)$$

$$B = \frac{x_a e^{i\omega T} - x_b}{e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}}. \quad (2.6.61)$$

La lagrangiana è dunque:

$$L(x_0, \dot{x}_0) = \frac{m}{2} (\dot{x}_0^2 - \omega^2 x_0^2(t)) = \frac{m}{2} [-2\omega^2 (A^2 e^{2i\omega t} + B^2 e^{-2i\omega t})] \quad (2.6.62)$$

che ci permette di calcolare l'azione:

$$S_{cl} = \frac{m}{2} \int_0^T (-2\omega^2) (A^2 e^{2i\omega t} + B^2 e^{-2i\omega t}) dt \quad (2.6.63)$$

$$= -m\omega^2 \left(A^2 \frac{e^{2i\omega t}}{2i\omega} \Big|_0^T - B^2 \frac{e^{-2i\omega t}}{2i\omega} \Big|_0^T \right) \quad (2.6.64)$$

$$= -\frac{m\omega}{2i} (A^2 (e^{2i\omega T} - 1) - B^2 (e^{-2i\omega T} - 1)) \quad (2.6.65)$$

utilizziamo le espressioni di A (2.6.60) e B (2.6.61):

$$S_{cl} = \frac{m\omega i}{2} \frac{1}{(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T})^2} \left[(x_b - x_a e^{-i\omega T})^2 (e^{2i\omega T} - 1) - (x_a e^{i\omega T} - x_b)^2 (e^{-2i\omega T} - 1) \right] \quad (2.6.66)$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega i}{2} \frac{1}{(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T})^2} \left[x_b^2 (e^{2i\omega T} - 1 - e^{-2i\omega T} + 1) - \right. \\ \left. - 2x_a x_b (e^{i\omega T} - e^{-i\omega T} + e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}) + x_a^2 (1 - e^{-2i\omega T} - 1 + e^{2i\omega T}) \right] \quad (2.6.67)$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega i}{2(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T})^2} \left[(x_a^2 + x_b^2)(e^{2i\omega T} - e^{-2i\omega T}) - \right. \\ \left. - 4x_a x_b (e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}) \right] \quad (2.6.68)$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega i}{2(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T})^2} \left[(x_a^2 + x_b^2)(e^{i\omega T} + e^{-i\omega T})(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}) - \right. \\ \left. - 4x_a x_b (e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}) \right] \quad (2.6.69)$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega i}{2(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T})^2} (e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}) \left[(x_a^2 + x_b^2)(e^{i\omega T} + e^{-i\omega T}) - \right. \\ \left. - 4x_a x_b \right] \quad (2.6.70)$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega i}{2 \cdot 2i \sin(\omega T)} \left[(x_a^2 + x_b^2) 2 \cos(\omega T) - 4x_a x_b \right] \quad (2.6.71)$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega}{\sin(\omega T)} \left[(x_a^2 + x_b^2) \cos(\omega T) - 2x_a x_b \right] \quad (2.6.72)$$

che è l'espressione dell'azione classica che utilizzeremo. Possiamo ancora moltiplicare per $i/\hbar$ in modo da avere un'espressione già pronta per il propagatore:

$$\frac{i}{\hbar} S_{cl} = \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{\sin(\omega T)} \left[(x_a^2 + x_b^2) \cos(\omega T) - 2x_a x_b \right]. \quad (2.6.73)$$

Ora ci manca da capire come calcolare il determinante funzionale. Possiamo scrivere il pezzo dell'integrale funzionale e analizzarlo meglio:

$$\int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar} S_2[z]} = \int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \int_0^T dt (\dot{z}^2 - \omega^2 z^2)} \quad (2.6.74)$$

dobbiamo riuscire a trovare una forma quadrata in z così da poter individuare l'operatore (differenziale) di cui calcolare il determinante. Utilizziamo il solito truccetto dell'integrazione per parti. Il primo pezzo risulta:

$$\int_0^T dt \dot{z}^2 = z \dot{z} \Big|_0^T - \int_0^T dt z \frac{d^2}{dt^2} z = - \int_0^T dt z \frac{d^2}{dt^2} z \quad (2.6.75)$$

l'integrale nella fase dell'esponenziale è:

$$\int_0^T dt (\dot{z}^2 - \omega^2 z^2) = \int_0^T dt (-z) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) z \quad (2.6.76)$$

e possiamo individuare l'operatore, che nella sezione §2.5 abbiamo chiamato X :

$$X = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \quad (2.6.77)$$

per calcolarne il determinante utilizzeremo la strategia di Feynmann. Supponiamo che le fluttuazioni attorno al cammino classico siano periodiche in modo da continuare a far valere la condizione che siano nulle agli estremi. Essendo periodiche possiamo sviluppare le z tramite Fourier:

$$z(t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin \left(\frac{\pi}{T} nt \right) \quad (2.6.78)$$

una rappresentazione di ciò che stiamo parlando è in figura 2.8.

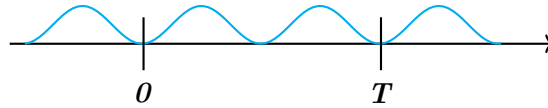


Figura 2.8: Deformazioni del cammino classico z .

Nell'integrale funzionale stiamo integrando su tutti i possibili z con misura $\mathcal{D}_z$, ma una volta sviluppato $z(t)$ tramite Fourier un modo naturale di integrare è quello di farlo rispetto tutti i possibili coefficienti di Fourier a_n . Scritta una certa funzione in una certa base, allora fare il path integral vuol dire integrare su tutti i coefficienti. Quello che stiamo dicendo è che scriviamo il cambio:

$$\mathcal{D}_z = \prod_{n \geq 1} da_n \quad (2.6.79)$$

e vale il *teorema di conservazione del casino*, nel senso che se prima l'integrale in dz era un pasticcio e difficile, allora lo sarà anche l'integrale in da_n poi. Le relazioni (2.6.78) e (2.6.79) ci sono molto utili poichè le funzioni trigonometriche sono autofunzioni, a meno di numeri, dell'operatore (2.6.77). Riprendiamo l'integrale (2.6.76) e sostituiamo lo sviluppo (2.6.78):

$$\int_0^T dt \sum_{n \geq 1} a_n \sin \left(\frac{\pi nt}{T} \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \sum_{m \geq 1} a_m \sin \left(\frac{\pi mt}{T} \right) \quad (2.6.80)$$

facciamo agire l'operatore sulla sommatoria di destra:

$$\sum_{n,m \geq 1} \int_0^T dt a_n a_m \underbrace{\left(-\frac{\pi^2 m^2}{T^2} - \omega^2 \right)}_{\text{autovalori}} \sin \left(\frac{\pi nt}{T} \right) \sin \left(\frac{\pi mt}{T} \right) \quad (2.6.81)$$

l'integrale in dt lo sappiamo fare, visto che sono solamente due funzioni ortogonali, e il risultato è $T/2 \delta_{nm}$, per cui:

$$\frac{T}{2} \sum_{n \geq 1} a_n^2 \left(\omega^2 - \frac{\pi^2 n^2}{T^2} \right). \quad (2.6.82)$$

La relazione (2.6.82) è proprio l'azione S_2 nelle variabili a_n che dovremo mettere nel path integral. Facendo la sostituzione otteniamo:

$$\int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar} S_2[z]} = M \int da_n \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \frac{mT}{2} \sum_{n \geq 1} a_n^2 \left(\omega^2 - \frac{\pi^2 n^2}{T^2} \right) \right\} \quad (2.6.83)$$

$$= M \prod_{n \geq 1} \int da_n \exp \left\{ -\frac{imT}{4\hbar} a_n^2 \left(\omega^2 - \frac{\pi^2 n^2}{T^2} \right) \right\} \quad (2.6.84)$$

$$\equiv M \prod_{n \geq 1} I_n \quad (2.6.85)$$

in cui scriviamo l'integrale:

$$I_n = \int da_n \exp \left\{ \frac{imT}{4\hbar} a_n^2 \left(\frac{\pi^2 n^2}{T^2} - \omega^2 \right) \right\}. \quad (2.6.86)$$

Nel path integral (2.6.84) abbiamo, oltre un fattore di normalizzazione inserito per sicurezza, una produttoria di integrali non solo fattibili, ma che abbiamo anche già calcolato più volte.⁸ Calcoliamo l'integral (2.6.86) utilizzando il metodo della fase stazionaria; mettiamo:

$$a_n = e^{i\frac{\pi}{4}} x_n \quad (2.6.87)$$

in questo modo:

$$I_n = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dx_n \exp \left\{ \frac{imT}{4\hbar} i x_n^2 \left[\frac{\pi^2 n^2}{T^2} - \omega^2 \right] \right\} \quad (2.6.88)$$

$$= e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \exp \left\{ -\frac{mT}{4\hbar} \cdot \frac{\pi^2 n^2}{T^2} \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2} \right) x_n^2 \right\} \quad (2.6.89)$$

$$= e^{i\frac{\pi}{4}} N_n \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2} \right)^{-1/2} \quad (2.6.90)$$

in cui abbiamo scritto:

$$N_n = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{4\hbar T}{m\pi^2 n^2}} \quad (2.6.91)$$

⁸Nota che la i non è un problema perché possiamo fare una rotazione di Wick.

in cui non abbiamo inglobato anche la parentesi $(\dots)^{-1/2}$ di (2.6.90) per evidenziare dove si trova la dipendenza da ω . Dunque ora abbiamo:

$$\int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar} S_2[z]} = M \prod_{n \geq 1} e^{i \frac{\pi}{4}} N_n \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2}\right)^{-1/2} \equiv \hat{M} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2}\right)^{-1/2} \quad (2.6.92)$$

in cui:

$$\hat{M} = M \prod_{n=1}^{\infty} N_n e^{i \frac{\pi}{4}}. \quad (2.6.93)$$

Scrivendo le funzioni che maneggiamo in termini degli autovettori dell'operatore con cui abbiamo a che fare, non stiamo facendo altro che diagonalizzare l'operatore, il cui determinante, come sappiamo, è il prodotto degli autovalori, che si troveranno sulla diagonale. L'unico intoppo è che il prodotto che dobbiamo fare è infinito e bisogna capire bene che cos'è, oltre che regolarizzarlo in seguito. Quello che solitamente si fa è scrivere al posto del prodotto un'opportuna funzione e in seguito dire che la produttoria non è altro che quella specifica funzione valutata in un certo punto. In questo caso possiamo regolarizzare il prodotto infinito come:

$$\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2}\right)^{-1/2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n \geq 1}^N \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2}\right)^{-1/2} \quad (2.6.94)$$

che possiamo facilmente vedere di che cosa si tratta. Sappiamo che una funzione analitica è ben determinata una volta trovati poli e zeri. Potremmo dunque vedere quali sono le regioni in cui abbiamo poli e zeri del nostro prodotto e cercare una qualche funzione che si comporti allo stesso modo e costruire una continuazione analitica. Ragioniamo su ciò che abbiamo imparato dall'analisi delle funzioni speciali in analisi complessa. Sappiamo che:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (2.6.95)$$

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \frac{1}{z\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\Gamma(1+z)\Gamma(1-z)} \quad (2.6.96)$$

e ricordiamo la definizione della funzione Digamma e la rappresentazione come prodotto delle funzioni Γ :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{z\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad (2.6.97)$$

$$\implies \frac{1}{z\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(1+z)} = e^{z\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad (2.6.98)$$

facendo il cambio $z \rightarrow -z$ abbiamo anche:

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = e^{-z\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \quad (2.6.99)$$

e facendo il prodotto tra le relazioni (2.6.98) e (2.6.99) vediamo che:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{1}{\Gamma(1+z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}. \quad (2.6.100)$$

Chiamando:

$$z = \frac{\omega T}{\pi} \quad (2.6.101)$$

possiamo vedere che (2.6.94) è:

$$\prod_{n \geq 1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 n^2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{\sin(\omega T)}{\omega T}\right)^{-1/2}. \quad (2.6.102)$$

Troviamo quindi:

$$\int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar} S_2[z]} = \hat{M} \sqrt{\frac{\omega T}{\sin(\omega T)}} \equiv I(\omega). \quad (2.6.103)$$

Possiamo fissare facilmente la costante di normalizzazione di (2.6.103), poiché sappiamo che se spegniamo il potenziale armonico, ovvero facciamo $\omega \rightarrow 0$, dobbiamo ottenere il risultato di particella libera. Dunque:

$$I(0) = \hat{M} \cdot 1 = \left(\frac{n}{2\pi i \hbar T}\right)^{1/2}. \quad (2.6.104)$$

Complessivamente abbiamo quindi trovato:

$$I(\omega) = \int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar} S_2[z]} = \sqrt{\frac{m\omega T}{2\pi i \hbar \sin(\omega T)}} \quad (2.6.105)$$

in cui individuiamo il pezzo $\omega / \sin(\omega T)$ che avanza rispetto al caso libero per via del fatto che stiamo trattando un oscillatore armonico e non una particella libera. Come visto nella sezione §2.5 nell'equazione (2.5.67) l'integrale $I(\omega)$ non è altro che $(\det X)^{-1/2}$.

In conclusione, quindi, il propagatore nel caso dell'oscillatore armonico risulta essere:

$$K(x_b, T; x_a, 0) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int \mathcal{D}_z e^{\frac{i}{\hbar} S_2[z]} \quad (2.6.106)$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega T}{2\pi i \hbar \sin(\omega T)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{\sin(\omega T)} \left[(x_a^2 + x_b^2) \cos(\omega T) - 2x_a x_b \right] \right\}. \quad (2.6.107)$$

2.7 Effetto Ahranov-Bohm

Vediamo in questa sezione un effetto della Meccanica Quantistica non relativistica utilizzando il formalismo degli integrali di cammino. Fin'ora abbiamo supposto che esista solamente un cammino classico, il che però equivale a dire di conoscere la $q(t)$, ovvero la traiettoria, il che è incompatibile con il principio di indeterminazione che ben conosciamo.

Supponiamo che esistano 2 cammini classici per andare a un punto A , ad un punto B . Vediamo la figura 2.9. Questa supposizione, dal punto di vista classico, non è un problema poiché data una posizione iniziale a t_a , possiamo conoscere anche l'impulso a quel tempo e sappiamo che date le condizioni iniziali (posizione e velocità) possiamo conoscere dove andrà la particella. Anche assumendo l'esistenza di due cammini, dunque, tutto è ragionevole poiché preso un certo impulso iniziale la particella passerà solo da uno dei due. Da punto di vista quantistico sappiamo, ricordando l'esperimento delle due fenditure, che questo è impossibile. Il principio di indeterminazione ci dice che se noi conosciamo esattamente la posizione iniziale della particella, ad esempio il punto A , non ci è possibile conoscere l'impulso che avrà lì, e dunque, non ci è possibile sapere da dove passa.

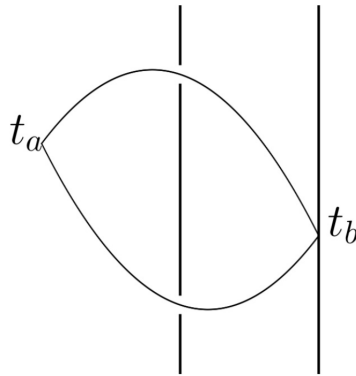


Figura 2.9: Rappresentazione di due cammini classici tra i punti A e B .

Per capire di che cosa si tratta l'effetto Ahranov-Bohm, prendiamo le solite due fenditure, una particella carica e mettiamo un campo magnetico B costante in una regione in cui siamo sicuri non passi la particella. Possiamo dire che in una certa regione non passa la particella perché mettendo le due fenditure sufficientemente distanti, nella regione che le separa vediamo che la funzione d'onda è pressoché nulla. La situazione è raffigurata nella figura 2.10.

Supponiamo che all'inizio la particella sia esattamente localizzata in $\mathbf{x}_a$, che vuol dire:

$$\psi(\mathbf{x}_a, t_a) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) \quad (2.7.1)$$

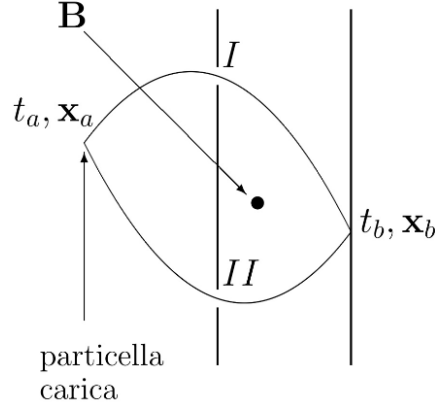


Figura 2.10: Rappresentazione del fenomeno di Aharonov-Bohm.

quindi sappiamo dire che:

$$\psi(\mathbf{x}_b, t_b) = \int d^3x K(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}, t_a) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) \quad (2.7.2)$$

$$= K(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) \quad (2.7.3)$$

$$= \mathcal{N} \int \mathcal{D}_x^3 e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt L(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \varphi)} \quad (2.7.4)$$

in cui abbiamo inserito la lagrangiana L che è funzione della posizione $\mathbf{x}$, del potenziale vettore $\mathbf{A}$ e del potenziale scalare φ per via della presenza del campo magnetico B . La lagrangiana di una particella in un campo elettromagnetico è:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} - q\varphi \quad (2.7.5)$$

ma se vogliamo metterci in una situazione in cui sia presente solo il campo magnetico $\mathbf{B}$ costante e il campo elettrico $\mathbf{E}$ sia nullo, allora ci possiamo mettere in un particolare gauge in cui $\varphi = 0$, abbiamo solamente $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e per cui:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}. \quad (2.7.6)$$

In generale, in elettromagnetismo sappiamo che vale:

$$\mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \quad (2.7.7)$$

che ci è utile poiché possiamo calcolare l'azione:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L = S_0 + \frac{q}{c} \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \quad (2.7.8)$$

$$= S_0 + \frac{q}{c} \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.7.9)$$

in cui indichiamo con γ la traiettoria seguita dalla particella. Però, a questo punto dobbiamo ricordarci che abbiamo due possibili cammini da cui può passare la particella, infatti, la carica può passare dal cammino I, oppure II, motivo per cui il propagatore totale sarà la somma di due pezzi, che non si parlano, di cui uno guarda il cammino I e l'altro il cammino II:

$$K(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = K_I(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) + K_{II}(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a). \quad (2.7.10)$$

Nota che quello scritto in (2.7.10) è la stessa cosa che succedeva con le funzioni d'onda nello stesso esperimento delle due fenditure. Come visto nella sezione §2.5 ciascuno dei propagatori lo possiamo scrivere come:

$$K_k(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}^k} \int \mathcal{D}\omega e^{\frac{i}{\hbar} S_2^k} \quad (2.7.11)$$

e possiamo calcolarli:

$$K_I = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_I} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} K_{0I}(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) \quad (2.7.12)$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_I} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} \psi_{0I}(\mathbf{x}_b, t_b) \quad (2.7.13)$$

$$\equiv \psi_I \quad (2.7.14)$$

$$K_{II} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_{II}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} \psi_{0II}(\mathbf{x}_b, t_b) \equiv \psi_{0II} \quad (2.7.15)$$

in cui indichiamo il propagatore libero con K_{0I} . Notiamo subito che rispetto al caso di propagatore libero (2.7.3), per cui avevamo $K_0 = \psi_0$, ora abbiamo guadagnato una fase per colpa della presenza di $\mathbf{B}$. Abbiamo già detto che, in analogia a quanto fatto in Meccanica Quantistica con le funzioni d'onda nell'esperimento delle due fenditure, possiamo calcolare il propagatore totale come somma di K_I e K_{II} . Abbiamo quindi:

$$\psi = \psi_I + \psi_{II} \quad (2.7.16)$$

in cui ψ_k hanno una fase aggiuntiva, dovuta a $\mathbf{B}$, rispetto le funzioni d'onda ψ_{0k} del caso libero.

Se ragioniamo un attimo ci rendiamo facilmente conto che quella fase aggiuntiva che troviamo non ha motivo di avere un particolare significato fisico sul risultato finale. Infatti, in Meccanica Quantistica abbiamo detto fin dall'inizio che l'informazione fisica della teoria fosse contenuta nel modulo quadro della funzione d'onda e che l'aggiunta di una fase arbitraria davanti al nostro stato non avrebbe cambiato in alcun modo l'informazione del sistema. Inoltre, la fase in più che ci ritroviamo è dovuta al campo magnetico $\mathbf{B}$, ma che è presente in una regione in cui la funzione d'onda non è presente. In più, sappiamo bene che il potenziale vettore $\mathbf{A}$, che compare nella fase aggiuntiva,

non è un'osservabile fisica (ciò che osserviamo in elettromagnetismo sono i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$).

Ovviamente, in Meccanica Quantistica nulla è come sembra a primo impatto e quella fase ha un'interpretazione e modifica il risultato finale rispetto al caso libero. Infatti, sappiamo bene che ciò che conta è la funzione d'onda complessiva:

$$\psi = \psi_I + \psi_{II} \quad (2.7.17)$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_I} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} \psi_{0I} + \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_{II}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} \psi_{0II} \quad (2.7.18)$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_I} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} \left[\psi_{0I} + \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left(\int_{\gamma_{II}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\gamma_I} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right)\right\} \psi_{0II} \right] \quad (2.7.19)$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_I} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} \left[\psi_{0I} + \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right\} \psi_{0II} \right]. \quad (2.7.20)$$

La fase relativa di ψ_{0II} che troviamo nella parentesi quadra di (2.7.20) sappiamo bene che è un'effetto osservabile dal momento che quando facciamo il modulo quadro di ψ da [...] usciranno 3 termini di cui uno la contiene e non è irrilevante. Ciò che si vede sperimentalmente è che variando il campo $\mathbf{B}$ variano le frange di interferenza. Però, prima avevamo osservato che il potenziale vettore non è un'osservabile fisica, ora però diciamo che la fase di (2.7.20), in cui c'è $\mathbf{A}$, è rilevante fisicamente. Ci stiamo contraddicendo? Assolutamente no, è ancora vero che $\mathbf{A}$ non è una quantità osservabile, e guardando bene l'integrale della fase in (2.7.20) ci accorgiamo che non è esattamente il potenziale vettore a darci informazioni:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma / \partial\Sigma=\gamma} \vec{\nabla} \times \mathbf{A} d\Sigma = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\hat{\Sigma}. \quad (2.7.21)$$

Abbiamo, grazie l'effetto di Aharonov-Bohm, un'altra conferma che la Meccanica Quantistica vede cose non intuibili classicamente e mostra l'esistenza di fenomeni non locali.

L'effetto di Aharonov-Bohm è stato anche il primo esperimento in cui si è visto che il campo $\mathbf{A}$ non è solo un'artificio matematico, ma proprio un grado di libertà del sistema.

2.8 Funzione di partizione

In questa sezione proviamo a paragonare la versione euclidea dei path integral con la funzione di partizione di un sistema statistico, così come la abbiamo studiata nella Meccanica Statistica classica.

Abbiamo già visto che cos'è, come si fa una rotazione di Wick, e il fatto che permette di andare da uno spazio minkowskiano ad uno euclideo. Abbiamo studiato, nella sezione §2.5, anche come una rotazione permetta di rendere tutti gli integrali gaussiani. Una rotazione di Wick è una trasformazione del tipo:

$$t \longrightarrow -it_E \equiv -i\tau \quad (2.8.1)$$

che, per come l'abbiamo vista e come l'abbiamo fatta sembrare, sembra essere solamente un trucchetto matematico, ma nella realtà una rotazione del tipo (2.8.1) è il collegamento tra la Meccanica Quantistica e la Meccanica Statistica. In realtà una rotazione di Wick permette anche di collegare la Teoria Quantistica dei Campi con la Teoria dei Campi Statistica, come vedremo nei corsi successivi.

Prendiamo un'hamiltoniana indipendente dal tempo, tipo quella una che descrive un sistema all'equilibrio termodinamico, e scriviamo l'operatore di evoluzione temporale:

$$U(t, 0) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} H(q, p) t \right\} \quad (2.8.2)$$

facciamo la rotazione (2.8.1):

$$U(\tau, 0) = \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} H(q, p) \tau \right\} \quad (2.8.3)$$

e ci chiediamo che succederebbe se dovessimo calcolare la traccia di (2.8.3) nello spazio delle configurazioni:

$$\text{Tr}(U(t, 0)) = \int d^n q \langle q | U(t, 0) | q \rangle = \int d^n q K(q, -i\tau; 0, 0) \quad (2.8.4)$$

che non è altro che l'ampiezza di probabilità che lo stato $|q\rangle$, dopo un certo tempo immaginario $-i\tau$, si ritrovi nello stesso stato $|q\rangle$ (ovvero il propagatore K), integrata $\forall q$. Esplicitando (2.8.3) abbiamo l'uguaglianza:

$$\text{Tr} \left(e^{-\frac{1}{\hbar} H(q, p) \tau} \right) = \int d^n q K(q, -i\tau; 0, 0). \quad (2.8.5)$$

Ricordiamo un paio di cose prima di procedere. La funzione di partizione definita in modo classico era:

$$Z = \frac{1}{N! h^{3N}} \int \prod_i d^3 q_i d^3 p_i e^{-\beta H(q_i, p_i)} \quad (2.8.6)$$

notiamo che somiglia all'espressione di un path integral come lo abbiamo definito all'inizio del capitolo. La forma discreta della stessa funzione di partizione, nella sua forma canonica è:

$$Z = \sum_j e^{-\beta E_j}. \quad (2.8.7)$$

Ricordiamo che l'espressione, classica, della costante β è:

$$\beta = \frac{1}{k_B T}. \quad (2.8.8)$$

Ora, proviamo a trovare un'espressione quantistica della stessa funzione Z .

Il termine di sinistra di (2.8.5) lo possiamo individuare come una funzione di partizione, che scriviamo come:

$$Z = \text{Tr} \left(e^{-\beta H} \right) \quad (2.8.9)$$

in cui sta volta la costante β è definita come:

$$\beta = \frac{\tau}{\hbar} \quad (2.8.10)$$

che ci permette di vedere che il tempo, immaginario, ha il ruolo dell'inverso della temperatura del sistema statistico. La funzione di partizione è l'ampiezza di probabilità nel vuoto, ovvero $\langle q | U | q \rangle$.

Proviamo ora a verificare che fare il limite classico di un sistema quantistico, quindi fare $\hbar \rightarrow 0$, e di un sistema statistico, in cui facciamo $T \rightarrow \infty$, è la stessa cosa. Verificare ciò non sarebbe così assurdo, poichè fare il limite classico vuol dire chiedere che valga:

$$\frac{\hbar \omega}{k_B T} \ll 1 \quad (2.8.11)$$

che si verifica sia se $\hbar$ è piccolo, sia se T è grande. Se prendiamo la relazione (2.8.5):

$$Z = \int d^n q \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle = \int d^n q d^n p \langle q | p \rangle \langle p | e^{-\beta H} | q \rangle \quad (2.8.12)$$

nel limite classico $\hbar \rightarrow 0$ possiamo non preoccuparci troppo dell'ordinamento dell'hamiltoniana, far filtrare fuori l'esponenziale dal braket, ed esplicitare le definizioni di onde piane (2.2.36):

$$Z = \int d^n q d^n p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{\hbar} p q} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i}{\hbar} p q} e^{-\beta H} = \frac{1}{2\pi} \int d^n q d^n p e^{-\beta H} \quad (2.8.13)$$

che non è altro che la definizione classica (2.8.6) che avevamo visto.

Verifichiamo, a questo punto, che le espressioni di Z coincidano sia da una descrizione classica che con la definizione quantistica. Vediamo il caso di un'oscillatore armonico, quindi per cui sappiamo già:

$$iS_{cl} = \frac{m\omega}{2} \frac{i}{\sin(\omega T)} \left((q_a^2 + q_b^2) \cos(\omega T) - 2q_a q_b \right). \quad (2.8.14)$$

Conosciamo bene l'espressione del propagatore che compare in Z (2.8.5), ovvero (2.3.43):

$$K = \int \mathcal{D}_q e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\tau)]} \quad (2.8.15)$$

e in cui possiamo vedere cosa diventa l'azione quando facciamo la rotazione di Wick:

$$\frac{i}{\hbar} S = \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{dt'} \right)^2 - V(q) \right) \quad (2.8.16)$$

$$\stackrel{2.8.1}{=} \frac{i}{\hbar} \int_0^{-i\beta\hbar} dt' \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{dt'} \right)^2 - V(q) \right) \quad (2.8.17)$$

$$\stackrel{\text{chiamiamo } t'=-i\tau}{=} \frac{i}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} (-i d\tau) \left(-\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 - V(q) \right) \quad (2.8.18)$$

$$= -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \right) \quad (2.8.19)$$

$$= -\frac{1}{\hbar} S_E \quad (2.8.20)$$

in cui chiamiamo S_E l'azione euclidea. Abbiamo dunque la funzione di partizione:

$$Z = \int dq \int \mathcal{D}_q \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 + V(q) \right) \right\} \quad (2.8.21)$$

in cui dobbiamo ancora inserire il caso specifico dell'oscillatore armonico. Prendiamo l'oscillazione rispetto al cammino classico:

$$q = q_{cl} + x(\tau) \quad (2.8.22)$$

con la solita condizione:

$$x(0) = x(\beta\hbar) = 0. \quad (2.8.23)$$

Dalla teoria gaussiana analizzata in §2.5 sappiamo che potremmo scrivere:

$$Z = \int dq \left\{ e^{-\frac{1}{\hbar} S_{E,cl}} \int \mathcal{D}_x e^{-\frac{1}{\hbar} S_{E,2}} \right\} \quad (2.8.24)$$

ci resta da capire che cosa mettere per $S_{E,cl}$ e $S_{E,2}$ nel caso dell'oscillatore armonico. Riprendiamo l'azione classica (2.8.14), mettiamo $q_a = q_b = q$:

$$iS_{cl} = im\omega q^2 \frac{-2 \sin^2 \left(\frac{\omega T}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\omega T}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega T}{2} \right)} \quad (2.8.25)$$

$$= im\omega q^2 \tan \left(\frac{\omega T}{2} \right) \quad (2.8.26)$$

faccio la rotazione $T = -i\beta\hbar$:

$$iS_{cl} = -m\omega q^2 \frac{e^{\frac{\beta\hbar}{2}\omega} - e^{-\frac{\beta\hbar}{2}\omega}}{e^{\frac{\beta\hbar}{2}\omega} + e^{-\frac{\beta\hbar}{2}\omega}} \quad (2.8.27)$$

$$= -m\omega q^2 \tanh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \quad (2.8.28)$$

$$\equiv -S_{E,cl} \quad (2.8.29)$$

quindi, abbiamo ottenuto:

$$S_{E,cl} = m\omega q^2 \tanh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right). \quad (2.8.30)$$

Possiamo vedere che cos'è l'azione nell'integrale funzionale:

$$S_{E,2} = \frac{m}{2} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left(\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \omega^2 x^2 \right) \quad (2.8.31)$$

$$= \frac{m}{2} \int_0^{\beta\hbar} d\tau x X x \quad (2.8.32)$$

in cui vediamo il solito operatore:

$$X = -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \quad (2.8.33)$$

e di cui avevamo trovato:

$$\det X = \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} \quad (2.8.34)$$

che facendo la rotazione di Wick $T = -i\beta\hbar$ diventa:

$$\det X = \frac{\sinh(\omega\beta\hbar)}{\omega\beta\hbar}. \quad (2.8.35)$$

Come già detto, le normalizzazioni le fissiamo dal caso di particella libera, non rifaccio tutti i conti, ma inserisco direttamente il risultato della sezione §2.6.2:

$$Z = \int dq e^{-\frac{m\omega}{\hbar} q^2 \tanh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)} \int \mathcal{D}_x e^{-\frac{1}{\hbar} S_{E,2}} \quad (2.8.36)$$

$$= \int dq e^{-\frac{m\omega}{\hbar} q^2 \tanh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)} \mathcal{C}(\det X)^{-1/2} \quad (2.8.37)$$

$$= \int dq e^{-\frac{m\omega}{\hbar} q^2 \tanh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)} \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(\beta\hbar\omega)}} \quad (2.8.38)$$

in cui compare un'integrale gaussiano, che sappiamo fare, e che ci permette di arrivare al risultato:

$$Z = \sqrt{\pi \frac{\hbar}{m\omega \tanh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}} \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(\beta\hbar\omega)}} = \sqrt{\frac{\cosh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}{2 \sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \sinh(\beta\hbar\omega)}} \quad (2.8.39)$$

possiamo utilizzare la relazione:

$$\sinh z = 2 \sinh\left(\frac{z}{2}\right) \cosh\left(\frac{z}{2}\right) \quad (2.8.40)$$

per trovare:

$$Z = \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)} \quad (2.8.41)$$

che è la funzione di partizione di un oscillatore armonico, cosa che volevamo trovare.

Riassumendo: partiamo da $U(t, 0)$, facciamo una rotazione di Wick, otteniamo un'operatore di evoluzione temporale euclideo e dopodiché facciamo la traccia dell'operatore, il che non vuol dire altro che calcolare il valore di aspettazione tra gli stati $|q\rangle$, $|q\rangle$ ed integrando in dq , ovvero, integrare il propagatore $K(q, -i\tau; q, 0)$, tutto ciò prendendo condizioni al contorno periodiche.

Notiamo un secondo che avremmo potuto anche fare la somma su tutti i livelli energetici possibili, ovvero, avremmo potuto fare:

$$Z = \text{Tr} \left(e^{-\beta H} \right) = \sum_n e^{-\beta(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}. \quad (2.8.42)$$

Capitolo 3

Approssimazione semiclassica WKB

La descrizione quantistica di un sistema fisico deve contenerne, almeno implicitamente, anche la descrizione classica, in quanto i confini tra “mondo quantistico” e “mondo classico” non possono essere confini invalicabili. Deve quindi esistere un procedimento che permetta di ottenere predizioni di tipo classico a partire da quelle quantistiche. Tale procedimento viene abitualmente presentato dicendo che le leggi classiche si ottengono da quelle quantistiche mandando a zero il valore della costante di Planck $\hbar$. Ovviamente tale limite, essendo $\hbar$ una costante, è puramente formale.

La transizione dalla Meccanica Quantistica alla meccanica classica è formalmente simile a quella che fa passare dall’ottica ondulatoria all’ottica geometrica; quest’ultima è, come noto, utilizzabile quando le lunghezze d’onda delle radiazioni elettromagnetiche costituenti i “raggi luminosi” sono piccole rispetto alle dimensioni degli ostacoli e delle fenditure incontrati dalla luce sul proprio cammino; in modo analogo, la meccanica classica può ritenersi una buona approssimazione di quella quantistica quando le lunghezze d’onda di De Broglie, $\lambda = h/p$, associate ai microsistemi siano piccole rispetto alle dimensioni caratterizzanti il loro moto. Un metodo di soluzione approssimata dell’equazione di Schrodinger - metodo che viene abitualmente indicato come metodo WKB¹, ovvero come approssimazione semiclassica (o quasi-classica) - che può essere proficuamente applicato allo studio di molti problemi che non si sappiano risolvere esattamente.

Per questa parte di programma il riferimento bibliografico è solamente uno: Rossetti God used very advanced mathematics in constructin the universe. Rossetti. Ho deciso per questo motivo di non riportare tutta la trattazione dell’argomento, dal momento che si sarebbe trattato di un lavoro

¹Dalle iniziali dei nomi di G. Wentzel, H. A. Kramers e L. Brillouin che furono tra i primi a studiare e utilizzare tale metodo.

pressoché di copiatura e i miei contributi sarebbero stati ridotti all'essenziale. Nell'unica sezione di questo capitolo riporto delle piccole note personali da incollare in vari punti del capitolo del libro. Potrebbe esistere, in un futuro molto prossimo, un mio ripensamento a riguardo ed una scrittura del capitolo soddisfacente, per ora mi limito a segnalare le sezioni che sono state viste negli studi:

- C. Rossetti God used very advanced mathematics in constructin the universe.Rossetti: capitolo **IX** sezioni **1, 2, 3, 4, 4.1, 5, 7** e cenni delle **8** e **8.2**.

È stato necessario anche uno studio delle funzioni di Airy presenti nel Rossetti God used very advanced mathematics in constructin the universe.Rossetti nel capitolo **VI** nella sezione **15**. Ricordiamoci anche che tale argomento è stato svolto nel corso di *Metodi Matematici per la Fisica 2* e può essere utile rivedere anche quegli appunti, e il Rossetti God used very advanced mathematics in constructin the universe.Rossetti2, soprattutto per un ripasso del metodo del punto a sella.

3.1 Note

Io farò riferimento a determinate equazioni, ma si tenga conto che la numerazione potrebbe cambiare con le varie edizioni del testo di Rossetti God used very advanced mathematics in constructin the universe.Rossetti. Ad ogni modo la copia in mio possesso è un seconda edizione.

Sezione 1

- *Inizio capitolo*: con il metodo WKB cerchiamo la soluzione semiclassica dell'equazione di Schrodinger, in modo molto simile a quanto già fatto nel capitolo §2; nel senso che anche in quel caso l'approssimazione semiclassica era data dalle prime correzioni in $\hbar$.
- *Eq. [1.5]*: può essere vista nella forma:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\vec{\nabla}S, x).$$

- *Discorso a seguire dell'equazione [1.9]*: possiamo dire che se $S \in \mathbb{R}$, allora significa che in termini classici ψ è una pura fase.
- *Eq. [1.21]*: deriva dall'equazione [1.16]; poiché scrivendo $p = \sigma'$ e usando:

$$\frac{1}{2m}\sigma'^2 + V(x) = E$$

allora otteniamo [1.21].

Sezione 2

- Eq. [2.6]: non è altro che l'azione classica del sistema.
- Eq. [2.7]: deriva direttamente dall'equazione non numerata appena sopra. Infatti:

$$\sigma'_1 = \frac{i}{2} \frac{p'(x)}{p(x)} \implies \sigma_1(x) = \frac{i}{2} \int dx' \frac{p'(x)}{p(x)} = i \ln \sqrt{p(x)}.$$

- Eq. [2.8]: se considerassimo solo σ_0 avremmo:

$$\psi(x) = \exp \left\{ \pm \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x dx' p(x') \right\}$$

che usando $k(x) = \frac{p(x)}{\hbar}$ diventa:

$$\psi(x) = \exp \left\{ \pm i \int_{x_0}^x dx' k(x') \right\}$$

che non è altro che la generalizzazione al caso $V(x)$ costante, la cui soluzione è un'onda piana. Notiamo però che $\psi(x)$ ha tale forma (onda piana) solo nel caso di $k(x)$ lentamente variabile, dunque $\sim$ costante, per per l'appunto porta a:

$$\psi(x) \sim \exp\{\pm i k x\}.$$

- Eq. [2.16]: si giunge a tale espressione con conti analoghi a quelli svolti per trovare [2.11].

Sezione 3

- Oss. Abbiamo trovato nella sezione 2 delle soluzioni valide per $E < V$ e $E > V$, ma non delle soluzioni in un intorno piccolo a piacere del punto di inversione a . Nella sezione 3 cerchiamo un modo di raccordare le soluzioni della sezione; cercheremo qualcosa di valido nell'intorno di a e che abbia un range di validità che si sovrapponga con le regioni di validità delle [2.11] e [2.16], in modo da poter confrontare le espressioni di ψ e fissare i vari coefficienti. Vogliamo fare una sorta di continuazione analitica, come mostrato in figura 3.1.
- Eq. [3.3]: non è altro che l'equazione di Schrodinger con potenziale lineare che sappiamo risolvere.
- Oss. Come possiamo dire che effettivamente le ψ_{WKB} abbiano delle regioni di validità che intersecano il dominio delle soluzioni in cui $V(x)$

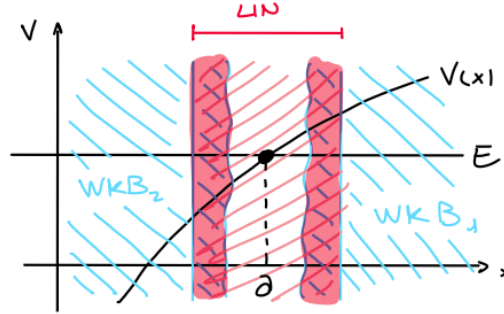


Figura 3.1

è lineare (funzioni di Airy)? Abbiamo visto che la condizione di validità di WKB è:

$$|x - a| > \frac{\hbar}{2p}$$

ma anche che la condizione affinché il potenziale sia lineare (e quindi che noi possiamo buttare via gli ordini superiori al primo dello sviluppo di $V(x)$) è:

$$\left| \frac{V''(a)(x-a)^2}{2V'(a)(x-a)} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x - a| < \left| \frac{2V'(a)}{V''(a)} \right|$$

dunque, complessivamente nella regione:

$$\frac{\hbar}{2p} < |x - a| < \left| \frac{2V'(a)}{V''(a)} \right|$$

abbiamo una regione di intersezione, che ovviamente dipende dal potenziale considerato.

- *Oss. dopo la fig. 9.2.* Le [3.9] e [3.10] sono le soluzioni esatte che troviamo per il potenziale lineare per $x \rightarrow \pm\infty$ e abbiamo visto che le funzioni di Airy si incollano bene con le ψ_{WKB} . Abbiamo anche visto che, nella regione che interessa a noi per cui $x \rightarrow a$, le funzioni di Airy vanno ancora bene poiché coincidono con i loro andamenti asintotici ovunque, tranne in $x = a$ ($z = 0$), e quindi a noi basta prendere $|z| \gtrsim 1$. Vuol dire che con:

$$z = \left(\frac{2m V'(a)}{\hbar^2} \right)^{-2/3} \frac{2m}{\hbar^2} |E - V| = \left(\frac{2m V'(a)}{\hbar^2} \right)^{-2/3} \frac{p^2}{\hbar^2}$$

dobbiamo avere:

$$|z| \gtrsim 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \left(\frac{2m V'(a)}{\hbar^2} \right)^{-2/3} \frac{p^2}{\hbar^2} \right| \gtrsim 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{2m\hbar V'(a)}{p^3} \right| < 1$$

che è equivalente alla condizione di validità del metodo WKB. Dunque, quando inizia a valere l'approssimazione WKB abbiamo la funzione di Airy che coincide con il suo andamento asintotico.

- *Eq. [3.11]*: le funzioni ψ_{WKB} le trovi solamente scambiano i pezzetti opportunamente; così come per gli andamenti asintotici.
- *Oss. dopo eq. [3.12]*: dice che intorno ai punti a e b localmente sappiamo trovare una soluzione, però nella regione $a < x < b$ non possiamo buttare via il pezzo di esponenziale crescente in ψ come se nulla fosse, e dobbiamo tenerci una combinazione liberare di $\exp$. Stessa cosa succede per il seno.
- *Wronskiano p.445*: possiamo vedere che è costante derivandolo e sfruttando il fatto che ψ_i soddisfa l'equazione di Schrodinger. Inoltre, mostra che ψ_I e ψ_{II} sono linearmente indipendenti. Nei conti successivi usa il fatto che vale:

$$\left| \frac{\beta'}{\beta^2} \right| \propto \left| \frac{dV/dx}{p^3} \right| \ll 1.$$

- *Oss. di fine sezione*. Facciamo i discorsi per il punto di inversione a , ma per b valgono le stesse considerazioni. Le equazioni [3.13] e [3.14] ci danno le forme di ψ_1 per $x \gg a$ e $x \ll a$, allo stesso tempo le equazioni [3.21] e [3.22] quelle di ψ_2 per $x \gg a$ e $x \ll a$. Noi abbiamo visto che se troviamo in $x \gg a$ la soluzione [3.13], allora sappiamo già che in $x \ll a$ abbiamo la forma [3.14]; ugualmente, se in $x \ll a$ troviamo la soluzione [3.22], allora diciamo che in $x \gg a$ abbiamo la [3.21]. Dobbiamo fare attenzione al fatto che queste implicazioni non sono biunivoce, ma vanno solamente nel verso che abbiamo descritto, proprio perché una delle due forme è un'andamento asintotico, che noi sappiamo bene non essere continuabile in modo univoco in altre zone di $\mathbb{R}$. Ad esempio, se vediamo in $x \gg a$ un'esponenziale decrescente sappiamo che deve connettersi con un certo tipo di andamento oscillante; mentre, se in $x \ll a$ vediamo un andamento oscillante, esso deve connettersi con un esponenziale crescente. Se però ci mettiamo in $x \gg a$ (ragioniamo con ψ_{II}) e abbiamo un esponenziale crescente, non possiamo essere sicuri che in $x \ll a$ abbiamo il pezzo oscillante scritto come [3.22], poiché l'esponenziale crescente ammazzerebbe un eventuale esponenziale decrescente nella stessa zona ($x \gg a$). Ovviamente, caso diverso se in $x \gg a$ (sta volta parliamo di ψ_I) vediamo un esponenziale decrescente, perché sappiamo che questo non può uccidere nessun altro andamento esponenziale, e possiamo dire che in $x \ll a$ è quello oscillante dato da [3.14]. Comunque in generale vediamo che le corrispondenze degli andamenti non sono biunivoche ed è proprio questo aspetto a rendere il caso di 2 punti di inversione ad essere complicato da trattare.

Sezione 4

- Oss. dopo eq. [4.5]: quello che dice è che se hai una cosa tipo:

$$A \sin \alpha = B \sin \beta$$

essa è soddisfatta solo se abbiamo $A = B$ o $A = -B$, dunque se $|A| = |B|$. Se vediamo il caso $A = B$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \beta \\ &= \sin(\beta + \alpha - \alpha) \\ &\equiv \sin \alpha \quad \text{sse } \beta + \alpha = n' \pi \end{aligned}$$

e allo stesso modo per $A = -B$:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= -\sin \beta \\ &= \sin(-\beta + \alpha - \alpha) \\ &\equiv \sin \alpha \quad \text{sse } \alpha - \beta = n' \pi \end{aligned}$$

e ci portano entrambe alla condizione [4.6].

- Oss. dopo [4.12]: fa un discorso sull'energia, ed è chiaro che quantizzare k è come quantizzare E , dal momento che k la contiene.
- Eq. [4.20]: deriva da:

$$[4.19] \quad \Rightarrow \quad \frac{m\omega}{\hbar} \frac{E}{m\omega^2} \pi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad \Rightarrow \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega.$$

Sezione 5

- Oss. dopo [5.11]: possiamo anche vedere:

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{\frac{e^{-L}}{4} - e^L}{\frac{e^{-L}}{4} + e^L} \right)^2 = \left(\frac{e^L \left(1 - \frac{e^{-2L}}{4}\right)}{e^L \left(1 + \frac{e^{-2L}}{4}\right)} \right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{e^{-2L}}{4}\right)^2 \left(1 + \frac{e^{-2L}}{4}\right)^{-2} \\ &\sim \left(1 - \frac{1}{2}e^{-2L} + \dots\right) \left(1 - \frac{1}{2}e^{-2L} + \dots\right) \\ &= 1 + \frac{1}{4}e^{-4L} - e^{-2L} + \mathcal{O}(e^{-4L}) \\ &\sim 1 - e^{-2L} \end{aligned}$$

che ci dice che quasi tutto è riflesso. Infatti, classicamente non ci aspettiamo nulla di trasmesso, è poi la prima correzione che ci dice che solo una piccolissima parte è effettivamente trasmessa. Notiamo anche che vale, per $L \gg 1$ (quindi per $e^{-2L} \ll 1$), che $T + R = 1$.

Sezione 7

- *Oss. dopo fig. 9.7:* a sinistra, cioè per $x < 0$, avremmo $\psi = 0$ e le soluzioni WKB a destra, $x > 0$, per raccordarle dovremmo trovare una soluzione esatta in $x = 0$. Per questo motivo imponiamo la condizione $\psi(x = 0) = 0$.

Capitolo 4

Teoria dell'urto

I riferimenti per questo capitolo è principalmente il Rossetti¹ God used very advanced mathematics in constructin the universe.Rossetti, ma anche in parte il Cohen God used very advanced mathematics in constructin the universe.Cohen (soprattutto la parte introduttiva e alcune osservazioni sulle onde parziali) e le note del prof. Sciuto God used very advanced mathematics in constructin the universe.Sciuto (per tutta la parte generale e le approssimazioni).

Ci tengo a segnalare il fatto che la trattazione della matrice $\hat{S}$ non è stata fatta durante questo corso, ma è un argomento di notevole rilevanza e ne si può trovare una trattazione più che notevole nel Rossetti God used very advanced mathematics in constructin the universe.Rossetti nel capitolo XVII nelle sezioni che vanno dalla 11 alla 13. La matrice di scattering e il suo sviluppo perturbativo (lo *sviluppo di Dyson*) saranno fondamentali nello studio delle teorie interagenti della Teoria Quantistica dei Campi, ma per questo rimando a corsi successivi.

4.1 Introduzione

In questo parleremo della teoria dell'urto in Meccanica Quantistica. Ovviamente ci restringeremo in alcuni situazioni particolari, con determinati sistemi e in alcune condizioni. Innanzitutto parleremo di particelle 1 quando ci riferiremo alle particelle incidenti (proiettili), mentre parleremo di particelle 2 quando ci riferiamo alle particelle bersaglio. Ovviamente, se fossimo in Meccanica Classica e volessimo determinare la deviazione del fascio incidente, dopo l'urto, rispetto la direzione iniziale potremmo semplicemente

¹In alcune parti del capitolo, potrai rendertene conto, io ho spudoratamente riportato esattamente i passaggi del libro. Questo semplicemente perché tendenzialmente erano parti non troppo interpretabili e per motivi di tempo non sono stato molto a confrontare fonti diverse.

seguire la traiettoria e i conti (da un punto di vista matematico) risulterebbero discretamente semplici. Ora, però noi parliamo di Meccanica Quantistica per cui il concetto di traiettoria scompare e dobbiamo trattare delle funzioni d'onda, le loro evoluzioni spazio-temporali e come vedremo il problema si complica leggermente. Per non lavorare nei casi troppo complicati facciamo alcune ipotesi sui nostri sistemi:

- Supponiamo che le particelle con cui abbiamo a che fare non abbiano spin.
- Supponiamo che i tipi di urti che studiamo non modifichino/interessino la struttura interna delle particelle 1 e 2. Trattiamo quindi il caso di **urti elastici** ($1 + 2 \rightarrow 1 + 2$).
- Assumiamo che il bersaglio sia sufficientemente piccolo da non permettere scattering multipli.
- Supponiamo di essere in casi non relativistici.
- Trattiamo urti tridimensionali.
- Assumiamo che l'interazione tra le particelle 1 e 2 possa essere descritta da un potenziale del tipo $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, che dipende solo dalla distanza relativa $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

4.2 Sezione d'urto

Lo studio sperimentale delle interazioni tra particelle viene abitualmente effettuato studiando la collisione di una particella "proiettile" (2) con una particella "bersaglio" (1), con un montaggio che prevede l'invio di un fascio di proiettili contro il bersaglio e il successivo conteggio delle particelle diffuse nelle varie direzioni² dalle informazioni di tipo statistico così ottenute si cerca poi di risalire alle modalità dell'urto e quindi al tipo di interazione proiettile-bersaglio che le ha determinate.

Per usare una similitudine, la situazione sperimentale è, in un certo senso, analoga a quella in cui si troverebbe un giardiniere che innaffiasse con una pompa una statua invisibile e cercasse di risalire alla forma della statua stessa analizzando l'intensità e la distribuzione degli spruzzi d'acqua determinate dalla presenza della statua sul tragitto del getto d'acqua.

Da un punto di vista teorico, è necessario definire e, nota che sia la natura dell'interazione tra proiettile e bersaglio, calcolare quantità che siano direttamente connesse con le informazioni sperimentali.

²Poiché, nell'urto contro il bersaglio, le particelle proiettile vengono diffuse, la teoria dell'urto viene equivalentemente detta *teoria della diffusione*.

In un montaggio ideale, il fascio incidente è un fascio uniforme, monocromatico (cioè di particelle aventi tutte la stessa energia), di intensità tale che l'interazione tra le particelle del fascio sia trascurabile e ben collimato parallelamente ad una direzione predeterminata; la sezione trasversa del fascio va poi considerata come infinita; in pratica, una situazione del genere si può realizzare con fasci la cui sezione sia molto maggiore della portata delle forze di interazione tra le particelle proiettile e il bersaglio. Qualunque sia l'energia delle particelle del fascio, questo contiene particelle che posseggono tutti i possibili momenti angolari rispetto al centro diffusore (scelto come origine, e coincidente col bersaglio, se considerabile come puntiforme, ovvero col suo centro) ed è a priori prevedibile che le particelle vengano diffuse in tutte le direzioni possibili. Il fascio delle particelle proiettile deve essere preparato ad una distanza "grande" dal centro diffusore, in modo che, oltre ad essere trascurabile l'interazione tra di esse, lo sia anche quella col bersaglio. Le particelle del fascio, provenendo parallelamente, da grande distanza, con una velocità iniziale v , entrano nel campo d'azione del centro diffusore e, per effetto delle forze di interazione, vengono diffuse in tutte le direzioni possibili e, ad una distanza dal bersaglio tale che gli effetti delle forze di interazione non siano più sensibili, acquisiscono delle velocità finali v_f ; distribuite in direzione e modulo in funzione delle modalità dell'urto. L'informazione sperimentale più diretta che si può ottenere su un processo di diffusione è la **sezione d'urto differenziale**, ovvero la quantità:

$$d\sigma \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \equiv \sigma(\Omega) d\Omega \quad (4.2.1)$$

che è definita come il rapporto tra il numero di particelle diffuse per unità di tempo nell'angolo solido elementare $d\Omega$ e il numero di particelle incidenti per unità di tempo attraverso l'unità di superficie ortogonale alla direzione del fascio; in altre parole, $\sigma(\Omega) d\Omega$ è il numero di particelle diffuse in $d\Omega$ per unità di tempo e unità di flusso incidente:

$$d\sigma \equiv \sigma(\Omega) d\Omega = \frac{\text{n. di particelle diffuse in } d\Omega/s}{\text{n. di particelle incidenti}/s \times \text{cm}^2} \quad (4.2.2)$$

$$\equiv \frac{\text{n. di particelle diffuse in } d\Omega}{s \times (\text{unità di flusso incidente})}. \quad (4.2.3)$$

Nel linguaggio corrente il nome di sezione d'urto differenziale viene attribuito direttamente alla quantità (finita!) $\sigma(\Omega) = d\sigma/d\Omega$; essa ha, ovviamente, le dimensioni di una superficie (per unità di angolo solido). Nel caso di forze centrali, alle quali faremo riferimento prevalente in quanto segue, se assumiamo come asse z la retta avente la direzione del fascio e passante per il centro diffusore, scelto come origine, il problema dell'urto risulta un problema a simmetria cilindrica rispetto all'asse z ; la sezione d'urto differenziale, pertanto, dipenderà in tal caso solamente dall'angolo di diffusione θ , coincidente con la colatitudine della particella diffusa, ma non dalla sua anomalia φ .

Un'altra grandezza importante è la sezione d'urto totale, definita come l'integrale esteso a tutto l'angolo solido ($0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) della sezione d'urto differenziale. Essa è una quantità che, per un determinato processo, è funzione solo dell'energia E dei proiettili:

$$\sigma_{tot} \equiv \sigma_{tot}(E) = \int d\Omega \sigma(\Omega). \quad (4.2.4)$$

La sezione d'urto totale rappresenta il numero totale di particelle diffuse, in ogni direzione, nell'unità di tempo, rapportato al numero di particelle incidenti per unità di superficie ortogonale al fascio nell'unità di tempo:

$$\sigma_{tot} = \frac{\text{n. di particelle diffuse}/s}{\text{n. di particelle incidenti}/s \times \text{cm}^2} \quad (4.2.5)$$

$$\equiv \frac{\text{n. di particelle diffuse}}{s \times (\text{unità di flusso incidente})}. \quad (4.2.6)$$

Per un urto elastico che avvenga solo come conseguenza di un'interazione di contatto tra le particelle incidenti ed il bersaglio, vengono deviate tutte e solo le particelle che toccano effettivamente il bersaglio e tali particelle sono, ovviamente, quelle contenute nella sezione trasversa del fascio intercettata dal bersaglio stesso o, meglio, dalla sua massima sezione trasversa: il numero di particelle diffuse per ogni particella incidente per unità di area è quindi uguale all'area della massima sezione trasversa del bersaglio e la sezione d'urto totale coincide quindi, in questo caso, con la sezione geometrica del bersaglio. Intuitivamente, possiamo dire che la sezione d'urto totale dà un'idea delle dimensioni del bersaglio, quali esse appaiono al proiettile, a causa della loro interazione (una raffigurazione pittorica è data dal Lancaster e Bludell God used very advanced mathematics in constructin the universe. Lancaster:2014pza in figura 4.1); tali dimensioni apparenti saranno, in generale, funzione dell'energia della particella incidente e possiamo ragionevolmente supporre che, in linea di massima, esse decrescano al crescere dell'energia dei proiettili, dato che, al crescere dell'energia, diminuisce il tempo di transito nella regione di interazione ed è quindi lecito attendersi che i suoi effetti siano minori, con conseguente diminuzione della sezione d'urto totale.

Facciamo una rapida osservazione. La sezione d'urto totale, grandezza fondamentale per lo studio dei processi di natura quantistica, ha, invece, una scarsa rilevanza dal punto di vista classico, perché, per ogni campo di forze che non abbia una portata finita, la sezione d'urto totale risulta infinita: da un punto di vista classico, infatti, per qualsiasi potenziale di portata infinita si ha diffusione, magari assai piccola, anche per particelle che passino "lontano" quanto si voglia dal centro diffusore e quindi tutte le particelle del fascio vengono diffuse. Diversa è la situazione in meccanica quantistica, dove la sezione d'urto totale è finita per ogni potenziale che tenda a zero all'infinito

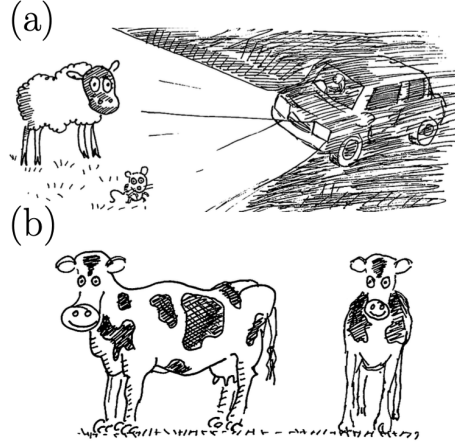


Figura 4.1: Rappresentazione che mostra che se illuminati con i fari dell'auto vediamo le sezioni d'urto $\sigma_{sheep} > \sigma_{mouse}$, ma che anche $\sigma_{mucca, laterale} > \sigma_{mucca, frontale}$.

più rapidamente di $1/r^2$.

Un'unità di misura che viene sovente utilizzata per le sezioni d'urto totali è il **barn**:

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2. \quad (4.2.7)$$

Tutto molto bello, ma vediamo un modo per calcolare effettivamente queste quantità. Per determinare la sezione d'urto differenziale, consideriamo un fascio di particelle, di definita, energia, incidenti, parallelamente alla direzione delasse z , verso un bersaglio posto nell'origine. Tenendo presente la corrispondenza biunivoca esistente tra parametro d'urto b ed angolo di diffusione θ , è facile rendersi conto che le particelle diffuse con una colatitudine finale compresa tra θ e $\theta + d\theta$ sono quelle incidenti con parametro d'urto compreso tra b e $b + db$: di conseguenza il numero di particelle diffuse nell'angolo solido $d\Omega$, cioè il numero di particelle aventi colatitudine finale compresa tra θ e $\theta + d\theta$ e anomalia³ ϕ compresa tra ϕ e $\phi + d\phi$, uguaglia il numero di particelle incidenti con parametro d'urto compreso tra b e $b + db$ ad anomalia compresa tra ϕ e $\phi + d\phi$. Cioè, come illustrato nella figura 4.2, il numero di particelle che attraversano l'elemento della corona circolare ortogonale al fascio, compresa tra i cerchi di raggio b e $b + db$, limitato dagli angoli ϕ e $\phi + d\phi$ e avente quindi area $b db d\phi$.

³Ora ϕ indica l'anomalia delle particelle del fascio, ovvero l'angolo di rotazione intorno l'asse del fascio, scelto z , e identifica il piano su cui giace la traiettoria di una particolare particella; non è da confondere con l'angolo φ che rappresenta l'anomalia della particella in un sistema di coordinate polari piane nel piano del moto.

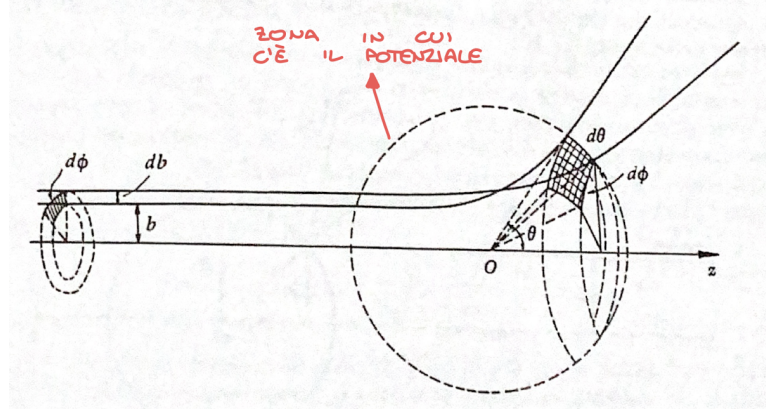


Figura 4.2

Se I è l'intensità del fascio incidente, possiamo allora asserire, ricordando la definizione di sezione d'urto differenziale, che il numero di particelle diffuse in $d\Omega$ al secondo è dato da:

$$I \sigma(\Omega) d\Omega \equiv I \sigma(\Omega) d(\cos \theta) d\phi = I b db d\phi. \quad (4.2.8)$$

Per un urto elastico centrale, la sezione d'urto differenziale è dunque legata al parametro d'urto dalla relazione:

$$d\sigma \equiv \sigma(\Omega) d\Omega \equiv \sigma(\Omega) d(\cos \theta) d\phi = b db d\phi \quad (4.2.9)$$

e la sezione d'urto $\sigma(\Omega) = \sigma(\theta)$ risulta semplicemente data da:

$$\sigma(\theta) = \frac{b db}{d(\cos \theta)} = \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta}. \quad (4.2.10)$$

Per la sezione d'urto totale, usando la (4.2.9), troviamo:

$$\sigma_{tot}(E) = \int \sigma(\Omega) d\Omega \quad (4.2.11)$$

$$= 2\pi \int_0^{b_{max}} b db \quad (4.2.12)$$

$$= \pi b_{max}^2. \quad (4.2.13)$$

Il parametro b_{max} sta ad indicare il massimo valore del parametro d'urto per il quale vi è interazione tra proiettile e bersaglio; ovviamente, b_{max} sarà finito solo per interazioni con portata finita; per un campo di forze di portata infinita, anche se a decrescita rapida per $r \rightarrow \infty$, risulta $b_{max} = \infty$, l'integrale che compare nella (4.2.13) è divergente e la sezione d'urto totale risulta infinita, come già osservato in precedenza.

Nota che il parametro d'impatto b è legato al momento angolare delle particelle incidenti, poiché preso l'impulso $\mathbf{p}$ delle particelle, possiamo semplicemente calcolare $|\mathbf{L}| = b |\mathbf{p}|$.

4.2.1 Urto con sfera rigida

Come primo, semplice esempio di studio di un processo d'urto in meccanica classica, consideriamo l'urto di particelle materiali puntiformi contro una sfera rigida, perfettamente riflettente, di raggio R e centro nell'origine, supponendo che l'interazione avvenga esclusivamente per contatto diretto. Le sezioni d'urto differenziale e totale di questo processo possono essere ottenute rapidamente con semplici considerazioni geometriche; nel caso specifico, infatti, in cui solo le particelle che toccano effettivamente la sfera vengono deflesse, le loro traiettorie risultano composte da due semirette confluenti nel punto di impatto sulla sfera, simmetriche rispetto alla direzione radiale passante per tale punto, come illustrato nella figura 4.3.

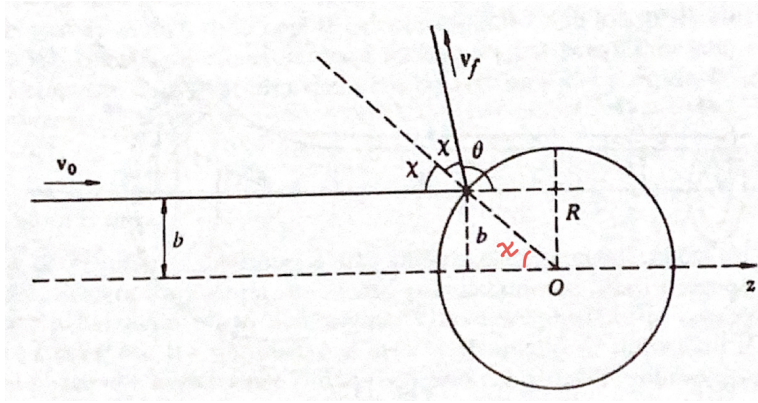


Figura 4.3

Facendo sempre riferimento alla figura 4.3 vediamo subito che $\theta = \pi - 2\chi$ e che il parametro d'urto è:

$$b = R \sin \chi = R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = R \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (4.2.14)$$

e conseguentemente la sezione d'urto differenziale:

$$d\sigma \equiv b db d\phi \quad (4.2.15)$$

$$= R \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[-\frac{1}{2} R \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] d\theta d\phi \quad (4.2.16)$$

$$= -\frac{1}{4} R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.2.17)$$

$$= \frac{1}{4} R^2 d(\cos \theta) d\phi \quad (4.2.18)$$

$$\equiv \frac{1}{4} R^2 d\Omega \quad (4.2.19)$$

ottenendo dunque:

$$\sigma(\Omega) \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} R^2 \quad (4.2.20)$$

ossia abbiamo trovato che la sezione d'urto differenziale risulta, per questo semplicissimo processo, indipendente anche da θ e quindi isotropa e la sezione d'urto totale è:

$$\sigma_{tot} \equiv \int d\Omega \sigma(\Omega) = \pi R^2 \quad (4.2.21)$$

e coincide con la sezione geometrica massima della sfera. Si può ancora notare come il risultato (4.2.21) sia fornito direttamente e subito anche dalla (4.2.13), dato che, nel caso specifico, è:

$$b_{max} = R. \quad (4.2.22)$$

4.3 Generalità

Nel corso di Meccanica quantistica I si è principalmente analizzato lo spettro discreto dei potenziali proposti, ma bisogna tener conto che vi è quasi sempre uno spettro continuo (si pensi ad esempio al potenziale dell'atomo di idrogeno). Un'eccezione è anche l'oscillatore armonico dove lo spettro è solo discreto, ma questo è solo un caso ideale (piccole oscillazioni); in realtà vi sarà sempre un'energia sufficientemente alta in cui la particella si libera dal suo legame. Ad uno *spettro discreto* è associata la presenza di livelli energetici e ciò che si va a calcolare sono le probabilità di transizione da un livello a un altro; è questo oggetto di studio della spettroscopia. Uno *spettro continuo* non prevede livelli energetici e per discuterlo è necessario introdurre la teoria dell'urto. In questa trattazione verranno discussi solo urti elastici, come già anticipato e quindi l'energia coinvolta nel processo è molto minore dell'energia di legame dei costituenti del proiettile e del bersaglio; inoltre ci occuperemo esclusivamente di meccanica quantistica non relativistica (si trascureranno dunque, per esempio, fenomeni di Bremstrahlung i quali coinvolgono l'elettromagnetismo) e quindi solo di processi con particelle a velocità trascurabile rispetto a quella della luce.

Prendiamo una particella che urta contro un bersaglio fisso, interagendo con una forza descritta da un potenziale $V(x)$, x essendo la distanza dal bersaglio, il sistema è descritto dall'Hamiltoniana d'interazione:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \quad (4.3.1)$$

Se invece l'urto avviene tra due particelle in movimento, secondo un potenziale $V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, allora si ha:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (4.3.2)$$

Come è noto, se si passa dalle coordinate $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ a $\mathbf{x} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ distanza relativa e $\mathbf{R}$, coordinata del centro di massa si ha:

$$H = H_{rel}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + H_{cm}(\mathbf{R}, \mathbf{P}) \quad (4.3.3)$$

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{R}) = \psi(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{R}) \quad (4.3.4)$$

e l'equazione agli autovalori dell'hamiltoniana:

$$H\psi = E_{tot}\psi \quad (4.3.5)$$

si separa in:

$$H_{rel}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \psi = E \psi \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(\mathbf{x}) \right) \psi = E \psi \quad (4.3.6)$$

$$H_{cm}(\mathbf{R}, \mathbf{P}) \psi = E_{cm} \psi \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathbf{P}^2}{2M} \psi = E_{cm} \psi \quad (4.3.7)$$

in cui abbiamo indicato l'energia totale con $E_{tot} = E + E_{cm}$, la massa ridotta e totale:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2 \quad (4.3.8)$$

e valgono le rappresentazioni:

$$\mathbf{p} = -i\hbar \nabla_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{P} = -i\hbar \nabla_{\mathbf{R}}. \quad (4.3.9)$$

Si vede così che in entrambi i casi è sufficiente lo studio dell'Hamiltoniana (4.3.1). In questo corso useremo la *formulazione stazionaria*, che consiste nello studio delle autofunzioni dell'hamiltoniana per $E > 0$ e analizza il fenomeno fisico di un'onda piana o fascio stazionario di particelle incidente su un bersaglio posto nell'origine; come mostrato in figura 4.4.

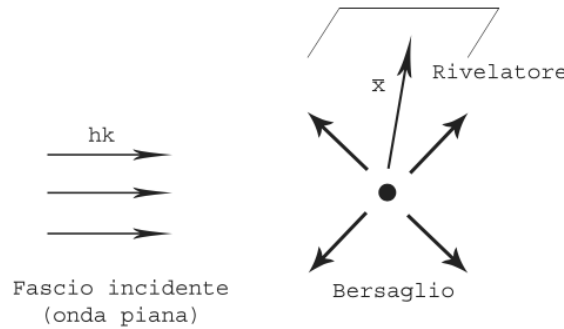


Figura 4.4: Rappresentazione di un processo d'urto.

Ci limitiamo a potenziali a corto raggio⁴, ovvero rapidamente decrescenti all'infinito, ad esempio del tipo (potenziale di Yukawa):

$$V(\mathbf{x}) \sim A \frac{e^{-\frac{\mu c r}{\hbar}}}{r} \quad r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (4.3.10)$$

e quince che:

$$V(\mathbf{x}) \simeq 0 \quad r \gg r_0 = \frac{\hbar}{\mu c} \quad (4.3.11)$$

in cui μ è la massa della particella che media l'interazione. Notiamo che restano fuori da questa nostra trattazione i potenziali di tipo Coulombiano. Noi guarderemo sempre potenziali a range finito così che la particella all'inizio e alla fine si comporti come se fosse libera.

A questo punto potremmo definire:

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \geq 0 \quad (4.3.12)$$

$$U(\mathbf{x}) = \frac{2m V(\mathbf{x})}{\hbar^2} \quad (4.3.13)$$

l'equazione stazionaria di Schrödinger (4.3.5) diventa:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = U\psi \quad (4.3.14)$$

sulla quale bisognerà imporre opportune condizioni al contorno (C.C.) in modo che essa rappresenti la situazione fisica da noi considerata in figura (4.4). Notiamo che avendo uno spettro continuo, ∞ energie, possiamo risolvere $\forall k$ (dunque E) l'equazione di Schrödinger con infinite funzioni e di conseguenza abbiamo degenerazione infinita sugli autovalori positivi di H . Vogliamo sostituire a questa equazione differenziale un'equazione integrale, che ha il doppio vantaggio di incorporare le C.C. e di essere risolubile con un metodo perturbativo. Per fare ciò si usa il metodo della funzione di Green, che per definizione permettono di scrivere:

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \text{C.C.} \quad (4.3.15)$$

in cui come condizioni al contorno prendiamo che:

- La funzione d'onda iniziale sia un'onda libera $\psi_{in}(\mathbf{x}) = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$.
- La funzione d'onda uscente $\psi_{out}(\mathbf{x})$ è un'onda sferica uscente.

⁴In questo modo abbiamo potenziali del tipo $V \sim r^{-1}$ quando $r \rightarrow \infty$, ovvero $V = o(1/r^2)$, dunque è un potenziale per cui tutti gli integrali convergono.

Risolta (4.3.15), dunque trovata $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, possiamo scrivere l'equazione integrale:⁵

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi_{omog}(\mathbf{x}) + \int d^3y G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) U(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}) \quad (4.3.16)$$

in cui ψ_{omog} è una soluzione qualsiasi dell'equazione libera, ovvero di (4.3.14), ma con $U = 0$. Con la nostra condizione al contorno abbiamo che $\psi_{omog} = \psi_{in}(\mathbf{x}) = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$. Nota che l'equazione (4.3.16) non è un'espressione che ci fornisce la forma di $\psi(\mathbf{x})$, poiché compare ad entrambi i membri, ma ci dà una scrittura alternativa a (4.3.14).

Cerchiamo di risolvere la (4.3.15) e di trovare la funzione di Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Notiamo l'invarianza per traslazione e per cui possiamo scrivere:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.3.17)$$

da cui, ponendo $\mathbf{y} = 0$:

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{x}) = \delta^3(\mathbf{x}). \quad (4.3.18)$$

Dall'invarianza per rotazione dell'equazione differenziale⁶ discende che si possa scegliere:

$$G(\mathbf{x}) = G(r) \quad , \quad r = |\mathbf{x}|. \quad (4.3.19)$$

Non essendoci dipendenza dagli angoli in $G(r)$ la parte angolare del laplaciano, di (4.3.18), non contribuisce e abbiamo da risolvere:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r G(r)) + k^2 G(r) = \delta^3(\mathbf{x}) \quad (4.3.20)$$

se facciamo il cambio $\chi(r) = r G(r)$ e ci mettiamo nel caso in cui $r \neq 0$ e $\delta^3(\mathbf{x}) = 0$ allora abbiamo:

$$\chi'' + k^2 \chi = 0 \quad (4.3.21)$$

di cui due possibili soluzioni sono:

$$\chi_{\pm}(r) = A e^{\pm ikr} \quad (4.3.22)$$

e di conseguenza, tornando a $G(r)$:

$$G_{\pm}(r) = A \frac{e^{\pm ikr}}{r} \quad (4.3.23)$$

⁵Notiamo la correttezza della scrittura (4.3.16) applicando l'operatore di (4.3.14):

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2) \psi(\mathbf{x}) &= \underbrace{(\nabla^2 + k^2) \psi_{omog}(\mathbf{x})}_{=0} + \int d^3y \underbrace{(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_{=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})} U(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}) \\ &= U(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

ovvero la (4.3.14).

⁶Possiamo dire questo poiché sia l'operatore $(\nabla^2 + k^2)$ che $\delta^3(\mathbf{x})$ sono invarianti per rotazioni.

la cui normalizzazione è fissata dalla $\delta^3(\mathbf{x})$ a secondo membro di (4.3.18). Si veda l'Appendice C per dettagli, ma l'identità:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta^3(\mathbf{x}) \quad (4.3.24)$$

implica:

$$G_{\pm}(r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ikr}}{r} \quad (4.3.25)$$

e la scelta del segno che compare è dettata dalle condizioni al contorno.

Ci sarà utile quando parleremo di approssimazione di Born, conoscere anche l'espressione della funzione di Green nello spazio degli impulsi. Infatti, c'è un'altro modo per determinare (4.3.25), ovvero quello di sfruttare la trasformata di Fourier. Conosciamo la definizione della δ di Dirac:

$$\delta^3(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \quad (4.3.26)$$

la cui trasformata è:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \delta^3(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (4.3.27)$$

Se chiamiamo $\tilde{G}(\mathbf{k}')$ la trasformata di $G(r)$, allora vale:

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k' \tilde{G}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \quad (4.3.28)$$

e quindi se applichiamo l'operatore di (4.3.14):

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k' (-k'^2 + k^2) \tilde{G}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \quad (4.3.29)$$

ma ricordando che il membro di destra di (4.3.14), allora dobbiamo eguagliare (4.3.29) con (4.3.26):

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k' (-k'^2 + k^2) \tilde{G}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \quad (4.3.30)$$

$$(-k'^2 + k^2) \tilde{G}(\mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \quad (4.3.31)$$

però attenzione, perché quella che sembrerebbe la soluzione più ovvia, ossia:

$$\tilde{G}(\mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{k^2 - k'^2} \quad (4.3.32)$$

non è in realtà accettabile perché non è una distribuzione, poiché ha due poli in $k' = \pm k$ e quindi non è localmente sommabile. Definiamo al suo posto:

$$\tilde{G}_{\pm}(\mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{k^2 - k'^2 \pm i\varepsilon} \quad (4.3.33)$$

dove è sottointeso il limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ nel senso delle distribuzioni. La (4.3.33) individua due soluzioni distinte (una per segno), che sono distribuzioni per bene che soddisfano l'equazione (4.3.18). Antitrasformando e facendo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ si riottengono le stesse $G_{\pm}(r)$ già trovate; come dimostrato nell'Appendice C.

Torniamo al nostro problema iniziale, ovvero, volevamo scrivere un'equazione integrale (4.3.16), con all'interno quella che abbiamo visto essere:

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \quad (4.3.34)$$

ma anche la soluzione omogenea:

$$\psi_{omog}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (4.3.35)$$

in modo che essa (la (4.3.16)) rappresentasse il processo d'urto che ci interessava, con le nostre condizioni al contorno. Nota che scrivere (4.3.35) vuol dire scegliere un'onda piana entrante di momento $\hbar \mathbf{k}$, con $\mathbf{k}$ è un vettore (d'onda), di modulo k (definito da (4.3.12)), che determina la direzione del fascio incidente.

Vedremo che a G_+ corrisponde un'onda sferica uscente dall'origine e a G_- un'onda entrante.

Se esplicitiamo tutto quello che abbiamo detto, allora l'equazione integrale (4.3.16) diventa:

$$\psi_{\pm}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} U(\mathbf{y}) \psi_{\pm}(\mathbf{y}). \quad (4.3.36)$$

Confermiamo in (4.3.36) che il potenziale $U(\mathbf{y})$ deve tendere a zero abbastanza velocemente per $\mathbf{y} \rightarrow \infty$, affinché l'integrale converga.

Per potenziali a range finito, per cui (4.3.11), se $|\mathbf{x}| \gg r_0$ allora si può considerare $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|$ perché all'integrale contribuisce solo la regione per cui $|\mathbf{y}| \leq r_0$. Valutando il comportamento asintotico per $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$:

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{r^2 + y^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} \quad (4.3.37)$$

$$= r \left(1 + \frac{y^2}{r^2} - 2 \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{r^2} \right)^{1/2} \quad (4.3.38)$$

$$\sim r \left(1 - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \right) \quad (4.3.39)$$

$$= r - \hat{x} \cdot \mathbf{y} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (4.3.40)$$

in cui $\hat{x} = \mathbf{x}/r$. Se scegliamo $G_+(r)$ allora abbiamo:

$$\psi_+(\mathbf{x}) \sim e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3\mathbf{y} e^{-ik\hat{x}\cdot\mathbf{y}} U(\mathbf{y}) \psi_+(\mathbf{y}) \quad , \quad r \rightarrow \infty \quad (4.3.41)$$

il che ci dice che $\psi_+(r)$ è la sovrapposizione di un'onda piana (il fascio incidente) e di un'onda sferica uscente dall'origine (le particelle diffuse), modulata secondo l'angolo di diffusione dal fattore, detto **ampiezza di diffusione**:

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3y e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{y}} U(\mathbf{y}) \psi_+(\mathbf{y}) \quad (4.3.42)$$

in cui abbiamo scritto $\mathbf{k}' = k \hat{x}$ vettore di modulo k e direzione $\hat{x}$. La quantità $\hbar \mathbf{k}'$ rappresenta l'impulso della particella uscente rivelata da un rivelatore posto in $\mathbf{x}$. $f(\theta, \varphi)$ è una quantità che chiaramente conosce la natura del potenziale. La scrittura (4.3.36) la scriviamo in modo compatto come:

$$\psi_{\pm}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta, \varphi). \quad (4.3.43)$$

Se avessimo scelto $G_-(r)$ avremmo trovato:

$$\psi_-(\mathbf{x}) \sim e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \int d^3y e^{-ik\hat{x} \cdot \mathbf{y}} U(\mathbf{y}) \psi_-(\mathbf{y}) \quad , \quad r \rightarrow \infty \quad (4.3.44)$$

cioè un'onda sferica entrante, che non è la situazione fisicamente interessante.

4.3.1 Ampiezza di diffusione e sezione d'urto

Vediamo ora come collegare l'ampiezza di diffusione con la sezione d'urto differenziale utilizzando la corrente di probabilità. Infatti:

$$\sigma(\theta, \varphi) d\Omega = \frac{\text{n. particelle diffuse in } d\Omega/\text{s}}{\text{n. particelle incidenti/s} \times \text{cm}^2} \quad (4.3.45)$$

$$= \frac{\text{flusso uscente nell'area di } d\Omega}{\text{flusso entrante per unità di area}} \quad (4.3.46)$$

ma sapendo che un flusso è una densità di corrente moltiplicata per un'area, allora abbiamo:

$$\sigma(\theta, \varphi) d\Omega = \frac{\mathbf{J}_{out} r^2 d\Omega}{|\mathbf{J}_{in}|^2} \quad (4.3.47)$$

in cui, essendo in Meccanica Quantistica, prendiamo le densità di corrente $\mathbf{J}$ quantistiche.

Possiamo fare, l'importante assunzione, in cui separiamo i termini d'ingresso e di uscita di (4.3.41) e ci associamo le rispettive densità di corrente:

$$\psi_{in} \longrightarrow \mathbf{J}_{in} \quad (4.3.48)$$

$$\psi_{out} \longrightarrow \mathbf{J}_{out} \quad (4.3.49)$$

che però è lecita solo se stiamo ad angoli molto lontani da $\theta = 0$; vedi l'Appendice D per il caso in cui non possiamo separare i termini. Se inseriamo

una costante di normalizzazione, in modo da avere le giuste dimensionalità, abbiamo:

$$\psi_{in} = a e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (4.3.50)$$

abbiamo:

$$\mathbf{J}_{in} = -i \frac{\hbar}{2m} [\psi_{in}^* \nabla \psi_{in} - \psi_{in} \nabla \psi_{in}^*] \quad (4.3.51)$$

$$= |a|^2 \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} \quad (4.3.52)$$

$$= |a|^2 \mathbf{v} \quad (4.3.53)$$

mentre il flusso di particelle diffuse attraverso l'areola $d\mathbf{A}$ di superficie normale $r^2 d\Omega$, usando:

$$\psi_{out} = a \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta, \varphi) \quad (4.3.54)$$

è dato da:⁷

$$\mathbf{J}_{out} d\mathbf{A} = J_{out}^r r^2 d\Omega \quad (4.3.55)$$

$$= -i \frac{\hbar}{2m} \left[\psi_{out}^* \frac{\partial}{\partial r} \psi_{out} - \psi_{out} \frac{\partial}{\partial r} \psi_{out}^* \right] r^2 d\Omega \quad (4.3.56)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m} |a|^2 \left[\frac{e^{-ikr}}{r} f^*(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{e^{ikr}}{r} f(\theta, \varphi) \right] - \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{e^{-ikr}}{r} f^*(\theta, \varphi) \right] \right] r^2 d\Omega \quad (4.3.57)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m} |a|^2 |f(\theta, \varphi)|^2 \frac{1}{r^2} \left[e^{-ikr} (ik) e^{ikr} - e^{ikr} (-ik) e^{-ikr} \right] r^2 d\Omega \quad (4.3.58)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m} |a|^2 |f(\theta, \varphi)|^2 (2ik) d\Omega \quad (4.3.59)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m} |a|^2 |f(\theta, \varphi)|^2 (2ik) d\Omega \quad (4.3.60)$$

$$= \frac{\hbar k}{m} |a|^2 |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega \quad (4.3.61)$$

$$= |\mathbf{J}_{in}| |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega. \quad (4.3.62)$$

Vedi l'Appendice §D per vedere come mai le componenti angolari di $\mathbf{J}_{out}$ siano trascurabili a grandi distanze, ovvero, le distanze in cui noi mettiamo i rivelatori.

Usando (4.3.47) abbiamo quindi:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2 \quad (4.3.63)$$

⁷Puoi vedere nell'Appendice D il calcolo delle componenti θ e φ della corrente $\mathbf{J}_{out}$.

che ci dice che una volta nota $f(\theta, \varphi)$ sappiamo tutto ciò che ci interessa dell'urto.

La (4.3.63) ci da un'espressione per la sezione d'urto totale:

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\Omega |f(\theta, \varphi)|^2. \quad (4.3.64)$$

Vedi l'Appendice §D.2.1 per confermare che la probabilità si conserva, che vale un'equazione di continuità e che si può arrivare con tali relazioni all'importante **teorema ottico**:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}\{f(0)\} \quad (4.3.65)$$

che ci dice che non dobbiamo fare tutti i conti per arrivare alla sezione d'urto totale, ma basta conoscere $f(\theta, \varphi)$ e sapere che cosa fa "in avanti", ovvero per $\theta = 0$.

4.4 Serie ed approssimazione di Born

Notiamo che per calcolare $f(\theta, \varphi)$ secondo la (4.3.42) bisogna aver risolto l'equazione (4.3.36). Possiamo cercare di risolverla, di nuovo, in modo più astratto. Per far ciò ripartiamo dall'inizio. Detta H_0 l'Hamiltoniana di particella libera, e l'hamiltoniana interagente:

$$H = H_0 + V(x) \quad (4.4.1)$$

definiamo:

$$H_0 |E\rangle = E |E\rangle \quad (4.4.2)$$

$$(H_0 + V) |E_+\rangle = E |E_+\rangle \quad (4.4.3)$$

in cui mettiamo già il più perché sappiamo già che dopo l'urto prendiamo un'onda sferica uscente e la funzione di Green G_+ . Possiamo riscrivere l'equazione:

$$(E - H_0) |E_+\rangle = V |E_+\rangle \quad (4.4.4)$$

invertendo l'operatore $E - H_0$ e trattando $V |E_+\rangle$ come se fosse un termine noto possiamo scrivere:⁸

$$|E_+\rangle = |E\rangle + \frac{1}{E - H_0} V |E_+\rangle \quad (4.4.5)$$

in cui il termine $|E\rangle$ è la soluzione dell'equazione omogenea associata; infatti, applicando $E - H_0$ ad entrambi i membri ritroviamo l'equazione di partenza (4.4.4). Facciamo solo attenzione perché quello che abbiamo fatto fino qui

⁸Notane la somiglianza con (4.3.16).

non è tutto lecito; infatti, esiste l'inverso di un operatore solo se esso è limitato, ovvero, solo se i suoi autovalori non sono infiniti, però sappiamo che l'hamiltoniana libera ha uno spettro continuo e quindi infiniti autovalori. Proprio perché abbiamo $E \in \text{Spc}H_0$ abbiamo che esiste $(E - H_0)^{-1}$, ma esso non è limitato⁹. È però ben definito l'operatore $(E - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1}$ con $\varepsilon \rightarrow 0^+$, poiché anche se lo applichiamo a $|E\rangle$ lui non è mai nullo e possiamo invertirlo; notiamo anche che il suo valor medio nello stato $|E'\rangle$ coincide, a parte un fattore costante, con (4.3.33). Scegliamo $+i\varepsilon$ e possiamo indicarlo come:

$$G_+ = \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} \quad (4.4.6)$$

che è l'operatore di Green e permette di riscrivere l'equazione di Schrodinger:

$$|E_+\rangle = |E\rangle + G_+ V |E_+\rangle \quad (4.4.7)$$

che viene chiamata **equazione di Lippman-Schwinger** ed è la versione astratta di (4.3.16) che avevamo già trovato.

Possiamo cercarne l'espressione nello spazio delle configurazioni (proiettando su una sua base):

$$\langle \mathbf{x} | E_+ \rangle = \langle \mathbf{x} | E \rangle + \int d^3 \mathbf{y} \langle \mathbf{x} | G_+ | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y} | V | E_+ \rangle \quad (4.4.8)$$

se indichiamo con:

$$\psi_+(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | E_+ \rangle \quad (4.4.9)$$

$$\psi_{in}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | E \rangle \quad (4.4.10)$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} | G_+ | \mathbf{y} \rangle \quad (4.4.11)$$

$$V(\mathbf{y}) \psi_+(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{y} | V | E_+ \rangle = \int d^3 z \underbrace{\langle \mathbf{y} | V | z \rangle}_{V(\mathbf{z}) \delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{z})} \underbrace{\langle z | E_+ \rangle}_{\psi_+(\mathbf{z})} \quad (4.4.12)$$

$$= \int d^3 z V(\mathbf{z}) \psi_+(\mathbf{z}) \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \quad (4.4.13)$$

riconosciamo da (4.4.7) proprio (4.3.16):

$$\psi_+(\mathbf{x}) = \psi_{in}(\mathbf{x}) + \int d^3 \mathbf{y} G_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{y}) \psi_+(\mathbf{y}). \quad (4.4.14)$$

Possiamo facilmente vederne l'espressione nello spazio degli impulsi:

$$\langle p' | E_+ \rangle = \langle p' | E \rangle + \int d^3 p'' d^3 p''' \langle p' | G_+ | p''' \rangle \langle p''' | V | p'' \rangle \langle p'' | E_+ \rangle \quad (4.4.15)$$

⁹Nello spazio delle distribuzioni nemmeno esiste.

indichiamo:

$$\phi_+(p') = \langle p' | E_+ \rangle \quad (4.4.16)$$

$$\delta(p' - \hbar k) = \langle p' | E \rangle \quad (4.4.17)$$

$$\tilde{G}_+(p', p''') = \langle \mathbf{x} | G_+ | \mathbf{y} \rangle = \frac{\delta(p' - p''')}{E - E' + i\varepsilon} \quad (4.4.18)$$

$$\phi_k(p'') = \langle p'' | E_+ \rangle \quad (4.4.19)$$

così:

$$\begin{aligned} \phi_+(p') &= \delta(p' - \hbar k) + \int d^3 p'' d^3 p''' \frac{\delta(p' - p''')}{E - E' + i\varepsilon} \langle p''' | V | p'' \rangle \phi_k(p'') \\ &= \delta(p' - \hbar k) + \int d^3 p'' \langle p' | V | p'' \rangle \phi_k(p''). \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

$$= \delta(p' - \hbar k) + \int d^3 p'' \langle p' | V | p'' \rangle \phi_k(p''). \quad (4.4.21)$$

Torniamo a (4.4.7) e raccogliamo il termine $|E_+\rangle$:

$$(\mathbb{1} - G_+ V) |E_+\rangle = |E\rangle \implies |E_+\rangle = \frac{1}{\mathbb{1} - G_+ V} |E\rangle \quad (4.4.22)$$

se sviluppiamo la serie geometrica, cosa lecita se ci mettiamo in regime perturbativo, ovvero con V piccolo, otteniamo:

$$|E_+\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (G_+ V)^n |E\rangle \quad (4.4.23)$$

che è nota come **serie di Born** e ci fornisce una ricetta perturbativa per costruire uno stato. Infatti, suggerisce di ottenere approssimazioni successive di ψ_+ , e di conseguenza di $f(\theta, \varphi)$, troncando la serie ad una sua ridotta. All'ordine più basso ($n = 0$) si ha banalmente:

$$|E_+\rangle = |E\rangle \xrightarrow{\text{spazio configurazioni}} \psi_{+0}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (4.4.24)$$

che è il caso libero, ma se consideriamo l'ordine $n = 1$:

$$|E_+\rangle = |E\rangle + G_+ V |E\rangle \quad (4.4.25)$$

e lo proiettiamo nello spazio delle configurazioni:

$$\langle \mathbf{x} | E_+ \rangle = \langle \mathbf{x} | E \rangle + \int d^3 y d^3 z \underbrace{\langle \mathbf{x} | G_+ | \mathbf{y} \rangle}_{G_+(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \underbrace{\langle \mathbf{y} | V | \mathbf{z} \rangle}_{\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{z})} \underbrace{\langle \mathbf{z} | E \rangle}_{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}}} \quad (4.4.26)$$

$$= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \int d^3 y G_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \quad (4.4.27)$$

in cui possiamo individuare la scrittura (4.3.42) in cui abbiamo al posto di $\psi(\mathbf{y})$ la rappresentazione $\psi_{+0}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, ossia la rappresentazione della

funzione d'onda all'ordine $n - 1$, in questo caso 0. Esplicitando G_+ e usando (4.3.13) abbiamo:

$$\psi_{+1}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \int d^3y \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} U(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \quad (4.4.28)$$

che ci dà l'approssimazione di Born. Vediamo in sostanza che per calcolare i vari termini perturbativi basta risolvere iterativamente:

$$\psi_{+(n)}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} U(\mathbf{y}) \psi_{+(n-1)}(\mathbf{y}) \quad (4.4.29)$$

$$\text{con } \psi_{+0}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (4.4.30)$$

Possiamo dare una rappresentazione grafica dei diversi ordini dell'approssimazione di Born; vedi le figure 4.5 e 4.6.

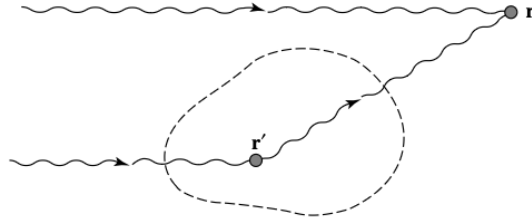


Figura 4.5: Rappresentazione primo ordine dell'approssimazione di Born.

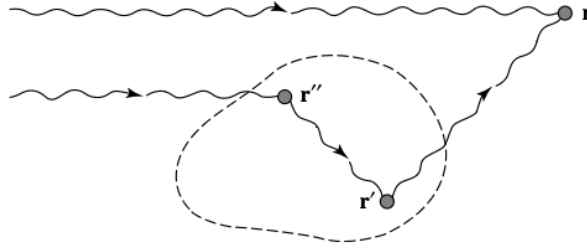


Figura 4.6: Rappresentazione secondo ordine dell'approssimazione di Born.

Possiamo anche riscrivere l'espressione di $f(\theta, \varphi)$ che estrapoliamo da (4.4.28), a grandi distanze, ossia:

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3y e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} U(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \quad (4.4.31)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int d^3y e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{y}} U(\mathbf{y}) \quad (4.4.32)$$

in cui abbiamo $\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{q}$ impulso trasferito:

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3y e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} U(\mathbf{y}) \quad (4.4.33)$$

che non è altro che la forma di una trasformata di Fourier, in particolare è la TF di $U(\mathbf{y})$. Aggiustando le costanti e indicando con $\tilde{V}(\mathbf{q})$ la trasformata, abbiamo:

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m\sqrt{2\pi}}{\hbar^2} \tilde{V}(\mathbf{q}). \quad (4.4.34)$$

In più, siccome vale:

$$\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle = \int d^3x \langle \mathbf{k}' | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | V | \mathbf{k} \rangle \quad (4.4.35)$$

$$= \int d^3x e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \quad (4.4.36)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{V}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \quad (4.4.37)$$

possiamo anche scrivere, equivalentemente a (4.4.34):

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m(2\pi)^2}{\hbar^2} \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle. \quad (4.4.38)$$

4.4.1 Condizioni di validità dell'approssimazione di Born

Perchè l'approssimazione di Born sia buona, $G_+ V$ deve essere "piccolo" affinché la serie (4.4.23) converga rapidamente; quindi, in generale l'approssimazione di Born funzionerà meglio ad alte energie (in modo che l'energia potenziale V sia una piccola perturbazione rispetto all'energia cinetica), purché compatibili con il range di validità dello scattering da potenziale a corto raggio. Per essere più quantitativi imponiamo:

$$|\psi_{out}(0)| \ll |\psi_{inc}(0)| \quad (4.4.39)$$

che non è altro che la condizione che ci esce fuori quando chiediamo che la distorsione:

$$c(k) = \frac{\psi_k^{in}(0) - (\psi_k^{in}(0) + \psi_k^{out}(0))}{\psi_k^{in}(0)} \quad (4.4.40)$$

sia piccola nell'origine:

$$|c(k)| = \frac{|\psi_k^{out}(0)|}{|\psi_k^{in}(0)|} \ll 1. \quad (4.4.41)$$

Visto che $\psi_{in} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ abbiamo:

$$|c(k)| = |\psi_k^{out}(0)| = \left| \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3y \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}}{|\mathbf{y}|} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} V(\mathbf{y}) \right| \ll 1 \quad (4.4.42)$$

per avere un'idea degli ordini di grandezza possiamo prendere $V(\mathbf{y}) = V(r)$ ed integrare in coordinate polari lungo l'asse $\mathbf{k}$:

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int_0^\infty dr r^2 \frac{e^{ikr}}{r} V(r) \int d\Omega e^{ikr \cos \theta} \right| \ll 1 \quad (4.4.43)$$

$$\frac{2m}{\hbar^2 k} \left| \int_0^\infty dr e^{ikr} V(r) \sin(kr) \right| \ll 1 \quad (4.4.44)$$

$$\frac{2m}{\hbar^2 k} \int_0^\infty dr |V(r)| \underbrace{|\sin(kr)|}_{\in[0,1]} \ll 1 \quad (4.4.45)$$

$$\frac{2m}{\hbar^2 k} \int_0^{r_0} dr |V(r)| \ll 1 \quad (4.4.46)$$

in cui ci siamo ricordati che l'integrale va solo fino r_0 poiché $V(r)$ ha range finito. Sapendo però che $|V(r)|$ è maggiorato da V_0 (infatti vale $V(r) < V_0 \forall r < r_0$), allora:

$$\frac{2m V_0 r_0}{\hbar^2 k} \ll 1 \implies p \gg \frac{2m r_0 V_0}{\hbar} \quad (4.4.47)$$

in cui indichiamo con $p = \hbar k$ l'impulso della particella incidente; ciò conferma che l'approssimazione di Born vale ad "alte energie".

Questo è visibile anche utilizzando il principio di indeterminazione:

$$p \sim \frac{\hbar}{r_0} \implies p^2 \gg 2m V_0 \quad (4.4.48)$$

$$\implies \frac{p^2}{2m} \gg V_0. \quad (4.4.49)$$

L'approssimazione di Born può funzionare anche per piccoli impulsi, ma solo per potenziali che soddisfano una condizione molto restrittiva. Per k dell'ordine o minori di $1/r_0$, la maggiorazione $|\sin(kr)| \leq 1$, che abbiamo usato in (4.4.45), non è la migliore; nel dominio di integrazione è meglio usare:

$$kr \ll 1 \implies |\sin(kr)| \leq kr \leq k r_0 \quad (4.4.50)$$

che ci porta a:

$$\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^{r_0} dr r |V(r)| \ll 1 \quad (4.4.51)$$

che se $|V(r)|$ è maggiorato da V_0 è:

$$\frac{m r_0^2}{\hbar^2} V_0 \ll 1 \implies V_0 \ll \frac{\hbar^2}{m r_0^2} \quad (4.4.52)$$

Se tale condizione è soddisfatta, l'approssimazione di Born è sensata anche a basse energie (*in soglia*, come si dice). Si tratta di una condizione molto restrittiva. Infatti, se, ad esempio, un potenziale di questo tipo è attrattivo,

non è in grado di dare origine a stati legati. In uno stato legato si avrebbe, come ordini di grandezza (tralasciando tutti i fattori 2):

$$\Delta x \leq r_0 \implies \Delta p \geq \frac{\hbar}{r_0} \quad (4.4.53)$$

$$\implies p^2 \geq (\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{r_0^2} \quad (4.4.54)$$

per gli stati legati vogliamo:

$$E = \frac{p^2}{2m} - V_0 < 0 \implies V_0 \geq \frac{\hbar^2}{2m r_0^2} \quad (4.4.55)$$

dunque, la condizione per avere stati legati è contraria a quella per l'approssimazione di Born; quindi, per essere sicuri che l'approssimazione di Born funzioni a basse energie bisogna che il potenziale sia così debole da non ammettere stati legati (anche se preso con il segno opportuno per renderlo attrattivo).

Nelle note del professor Sciuto God used very advanced mathematics in constructin the universe. Sciuto è presente nella sezione 4.4 un esempio riassuntivo di tutto ciò che abbiamo visto nel corso delle sezioni e in cui parla del potenziale di Yukawa.

4.5 Sviluppo in onde parziali

Di notevole importanza sono gli studi di urti nel caso di un campo centrale, in cui il potenziale dipende solamente dal modulo r della distanza tra le particelle interagenti (sono i casi maggiormente frequenti), e quindi della forma:

$$U = U(r) \quad (4.5.1)$$

se assumiamo come asse polare (asse z) di un sistema di coordinate sferiche la retta parallela al vettore d'onda $\mathbf{k}$ delle particelle del fascio incidente e passante per il centro diffusore (che possiamo far coincidere con l'origine), allora il problema risulta a simmetria cilindrica rispetto l'asse z e tutte le quantità interessanti sono indipendenti dall'anomalia φ . In particolare, tale risulta la funzione d'onda che descrive un processo di diffusione elastica, il cui comportamento asintotico, per grandi r , assume ora la forma semplificata:

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad , \quad r \rightarrow \infty \quad (4.5.2)$$

in cui:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kz = kr \cos \theta \quad (4.5.3)$$

e dove si indica con $f(\theta, \varphi)$ l'ampiezza di diffusione, che in molti casi è indipendente da φ per ragioni di simmetria. Le funzioni d'onda $\psi(\mathbf{r})$ sono soluzione dell'equazione di Schrödinger:

$$[\Delta + k^2 - U(r)] \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.5.4)$$

che, come noto, ammette un insieme completo di soluzioni elementari:

$$\psi_{lm}(\mathbf{r}) = \varphi_l(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (4.5.5)$$

che sono autofunzioni, oltre che dell'hamiltoniana, anche di L^2 (quadrato del momento angolare) e di L_z (sua terza componente); una arbitraria soluzione della (4.5.4) è quindi certamente esprimibile come sovrapposizione delle soluzioni (4.5.5). Ciò vale, in particolare, anche per la funzione d'onda che descrive il processo di diffusione, definita dal comportamento asintotico (4.5.2); essendo essa indipendente dall'anomalia φ , nel suo sviluppo in serie di funzioni sferiche potranno comparire solo quelle indipendenti da φ , che sono proporzionali ai polinomi di Legendre, dato che:

$$Y_l^0 = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}} P_l(\cos \theta). \quad (4.5.6)$$

Per la funzione d'onda considerata deve quindi valere uno sviluppo in serie di polinomi di Legendre, del tipo:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \varphi_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (4.5.7)$$

in cui le $\varphi_l(r)$ sono le funzioni d'onda radiali, opportune soluzioni dell'equazione di Schrödinger radiale:

$$\varphi_l'' + \frac{2}{r} \varphi_l' + \left[k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \varphi_l = 0 \quad (4.5.8)$$

che in assenza di potenziale si riduce all'equazione libera:

$$\varphi_l'' + \frac{2}{r} \varphi_l' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \varphi_l = 0 \quad (4.5.9)$$

che è l'equazione delle funzioni sferiche di Bessel di argomento kr , che abbiamo visto al corso di *Metodi 2*. Ci limitiamo qui a ricordare che una coppia di sue soluzioni fondamentali è costituita dalle funzioni sferiche di Bessel $j_l(kr)$ e di Neumann $\eta_l(kr)$ che per $kr \rightarrow 0$, hanno i comportamenti:

$$j_l(kr) \sim \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} \quad , \quad r \rightarrow 0 \quad (4.5.10)$$

$$\eta_l(kr) \sim -\frac{(2l-1)!!}{(kr)^{l+1}} \quad , \quad r \rightarrow 0 \quad (4.5.11)$$

mentre per $kr \rightarrow \infty$:

$$j_l(kr) \sim \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l\right) \quad , \quad r \rightarrow \infty \quad (4.5.12)$$

$$\eta_l(kr) \sim -\frac{1}{kr} \cos\left(kr - \frac{\pi}{2}l\right) \quad , \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.5.13)$$

Osserviamo ora che, al limite di potenziale nullo, la funzione d'onda effettiva deve ridursi alla soluzione dell'equazione libera che coincide con l'onda piana incidente:

$$\psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{U \rightarrow 0} \psi_{lib}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (4.5.14)$$

per quest'ultima funzione d'onda, lo sviluppo (4.5.7) è noto. Vedi il capitolo 19.6 di Zwiebach God used very advanced mathematics in constructin the universe. Zwiebach per la derivazione. Quando consideriamo una hamiltoniana libera sappiamo che la soluzione dell'equazione di Schödinger è un'onda piana, che per le cose dette in precedenza, ossia che è possibile trovare un insieme completo di soluzioni, possiamo scrivere come sviluppo in serie:

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} j_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (4.5.15)$$

con coefficienti A_{lm} ovviamente calcolabili. Visto che al membro di sinistra abbiamo un termine di onda piana, che sappiamo avere energia $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$, allora dobbiamo avere anche nel membro di destra un'onda con la stessa energia. In più, siccome a sinistra non abbiamo dipendenza da φ , anche a destra dobbiamo porre $m = 0$ ¹⁰:

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l j_l(kr) Y_l^0(\theta) \quad (4.5.16)$$

con coefficienti a_l determinabili. Possiamo moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per $Y_{l'}^{*0}$ e integrare sull'angolo solido:

$$\int d\Omega Y_{l'}^{*0}(\theta) e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l j_l(kr) \int d\Omega Y_{l'}^{*0} Y_l^0 \quad (4.5.17)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} a_l j_l(kr) \delta_{ll'} \quad (4.5.18)$$

$$= a_{l'} j_{l'}(kr) \quad (4.5.19)$$

¹⁰Si dice che siamo in approssimazione di onda s , ovvero nel caso in cui abbiamo $l = 0$.

possiamo rinominare $l' \rightarrow l$ e scrivere l'armonica Y_l^0 in termini di Y_l^l usando l'operatore di abbassamento (dividendo per l'opportuna costante):

$$a_l j_l(kr) = \frac{1}{\sqrt{(2l)!}} \int d\Omega \left[\left(\frac{\hat{L}_-}{\hbar} \right)^l Y_l^l(\theta, \varphi) \right]^* e^{ikr \cos \theta} \quad (4.5.20)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2l)!}} \int d\Omega Y_l^{*l}(\theta, \varphi) \left(\frac{\hat{L}_+}{\hbar} \right)^l e^{ikr \cos \theta} \quad (4.5.21)$$

in cui abbiamo sfruttato le proprietà di hermiticità dell'operatore $\hat{L}_-$. Ora, dobbiamo sfruttare la rappresentazione differenziale dell'operatore di innalzamento:

$$\left(\frac{\hat{L}_+}{\hbar} \right)^l F(\theta) = (-1)^l e^{il\varphi} (\sin \theta)^l \left(\frac{d}{d(\cos \theta)} \right)^l F(\theta) \quad (4.5.22)$$

che se applicata all'onda piana fornisce:

$$\left(\frac{\hat{L}_+}{\hbar} \right)^l e^{ikr \cos \theta} = (-1)^l e^{il\varphi} (\sin \theta)^l (ikr)^l e^{ikr \cos \theta}. \quad (4.5.23)$$

Possiamo ricordarci la rappresentazione dell'armonica:

$$2^l l! \sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)!}} Y_l^l(\theta, \varphi) = (-1)^l e^{il\varphi} (\sin \theta)^l \quad (4.5.24)$$

e riscrivere (4.5.23) come:

$$\left(\frac{\hat{L}_+}{\hbar} \right)^l e^{ikr \cos \theta} = 2^l l! \sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)!}} Y_l^l(\theta, \varphi) (ikr)^l e^{ikr \cos \theta} \quad (4.5.25)$$

che se inserito in (4.5.21) da:

$$a_l j_l(kr) = \frac{2^l l!}{\sqrt{(2l)!}} \sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)!}} (ikr)^l \int d\Omega Y_l^{*l}(\theta, \varphi) Y_l^l(\theta, \varphi) e^{ikr \cos \theta}. \quad (4.5.26)$$

Il trucco che possiamo usare per calcolare i coefficienti a_l è quello di uguagliare gli andamenti di entrambi i membri per piccoli valori di kr . Per il membro di sinistra possiamo usare (4.5.10); per il termine di destra, abbiamo un fattore $(ikr)^l$ moltiplicato per un integrale sull'angolo solido, possiamo immaginare di sviluppare in serie l'esponenziale $e^{ikr \cos \theta}$ e fermarci al primo termine, in questo modo:

$$\int d\Omega Y_l^{*l}(\theta, \varphi) Y_l^l(\theta, \varphi) e^{ikr \cos \theta} = \int d\Omega Y_l^{*l}(\theta, \varphi) Y_l^l(\theta, \varphi) (1 + \mathcal{O}(kr \cos \theta)) \quad (4.5.27)$$

$$= 1 + \mathcal{O}(kr). \quad (4.5.28)$$

Abbiamo ora:

$$a_l \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} = \frac{2^l l!}{\sqrt{(2l)!}} \sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)!}} (ikr)^l \quad (4.5.29)$$

notando che vale:

$$2^l l! (2l+1)!! = (2l+1)! \quad (4.5.30)$$

possiamo finalmente scrivere:

$$a_l = i^l \sqrt{4\pi} \sqrt{2l+1} \quad (4.5.31)$$

che ci permettono di arrivare a quella che si chiama **formula di Rayleigh**:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}} = e^{ikr \cos \theta} = \sqrt{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} i^l j_l(kr) Y_l^0(\theta) \quad (4.5.32)$$

che ci dà un'espressione per esprimere un'onda piana come sovrapposizione di armoniche sferiche con tutti i possibili valori di l . Ogni termine, ad l fissato, si chiama **onda parziale** e scrivere un andamento tipo (4.5.7) vuol dire fare uno **sviluppo in onde parziali**. Ognuno dei termini che compaiono in (4.5.32) sono soluzione di (4.5.9), e di conseguenza lo è la loro somma. Possiamo anche riscrivere (4.5.32) in termini di polinomi di Legendre, infatti ricordando come sono legati $Y_l^0(\theta)$ e $P_l(\cos \theta)$:

$$Y_l^0(\theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \quad (4.5.33)$$

possiamo scrivere:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta). \quad (4.5.34)$$

L'espressione (4.5.34) è fondamentale perché in analogia con essa saremo in grado di scrivere lo sviluppo (4.5.7) come:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \varphi_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (4.5.35)$$

dove ora con il simbolo $\varphi_l(r)$ indichiamo le soluzioni dell'equazione di Schrödinger radiale. Le $\varphi_l(r)$ sono funzioni reali (se $U(r)$ è reale) e regolari ovunque. In particolare, $\varphi_l(r)$ devono essere funzioni regolari nell'origine e all'infinito. Abbiamo indicato con $j_l(kr)$ le funzioni sferiche di Bessel e con $\eta_l(kr)$ le funzioni sferiche di Neumann, e abbiamo già detto che una loro generica combinazione lineare è una generica soluzione dell'equazione radiale

di Schrödinger nel caso di potenziale nullo (4.5.9). Chiedere che $\varphi_l(r)$ sia regolare per $r \rightarrow 0$ porta a chiedere che:

$$\varphi_l(r) \rightarrow j_l(kr) \rightarrow \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} \quad , \quad r \rightarrow 0 \quad (4.5.36)$$

e che non sia una generica combinazione lineare delle funzioni $j_l(kr)$ e $\eta_l(kr)$. Questo perché per $r \rightarrow 0$ la funzione $\eta_l(kr)$ non è regolare per nessun valore di l .

Piccolo appunto. Come mostra il Cohen God used very advanced mathematics in constructin the universe. Cohen possiamo vedere che nel caso libero, quindi il caso per cui si ha $\varphi_l(r) \rightarrow j_l(kr)$ (vedi poco più sotto per motivazioni), la dipendenza angolare di (4.5.7) è dato dalle armoniche sferiche; se consideriamo il caso libero e vediamo quale sia la probabilità di trovare una particella entro un certo angolo solido nella corona a distanza r ed $r + dr$, allora troviamo che la densità di probabilità è proporzionale a:

$$P(r) = r^2 |\psi(\mathbf{r})|^2 = r^2 j_l^2(kr) |Y_l^m(\theta, \varphi)|^2 dr d\Omega \quad (4.5.37)$$

conoscendo l'andamento di $j_l(kr)$ per $r \rightarrow 0$, ovvero (4.5.10), vediamo che:

$$P(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{r^{2+2l}}{((2l+1)!!)^2} \quad (4.5.38)$$

e si può dimostrare che $P(r) \sim 0$ quando $r < \sqrt{l(l+1)}$, il che sostanzialmente ci dice che i termini interessanti (rilevanti) nella serie (4.5.7) sono quelli a bassi valori di l .

Torniamo a noi. Se consideriamo potenziali con una portata finita a , per cui sia $U(r) = 0$ per $r > a$, o tali che per essi si possa definire una regione di interazione $r < a$ all'esterno della quale il potenziale sia praticamente trascurabile, cioè sia $U(r) \approx 0$ per $r > a$, per l'analisi delle proprietà delle funzioni d'onda radiali $\varphi_l(r)$ è opportuno distinguere tre zone. Nella regione di interazione $r < a$ la conoscenza anche della sola forma di φ_l è subordinata alla esplicitazione di $U(r)$ e nulla può dirsi in generale su di essa se non che deve essere regolare nell'intervallo chiuso $(0, a)$ e quindi, in particolare, nell'origine. In tale regione bisogna risolvere l'equazione di Schrödinger (4.5.8). Nella seconda regione, in cui si considerano valori di r maggiori di a , ma finiti, nell'equazione di Schrödinger radiale (4.5.8) il potenziale è nullo o trascurabile, mentre è ancora sensibile l'effetto del termine centrifugo, dunque si ha l'equazione (4.5.9); la funzione d'onda radiale $\varphi_l(r)$ deve quindi essere rappresentabile, in tale regione, come una soluzione dell'equazione libera, dunque come combinazione generica delle funzioni sferiche di Bessel e Neumann:

$$\varphi_l(r) = \alpha_l j_l(kr) + \beta_l \eta_l(kr) \quad , \quad r \geq a. \quad (4.5.39)$$

La terza regione, finalmente, è quella degli r molto grandi, cioè quella veramente asintotica, in cui sono trascurabili sia il potenziale che il termine centrifugo; in essa $\varphi_l(r)$ deve ubbidire all'equazione asintotica:

$$\varphi_l'' + \frac{2}{r} \varphi_l' + k^2 \varphi_l = 0 \quad (4.5.40)$$

che coincide con l'equazione delle funzioni sferiche di Bessel di ordine zero e argomento kr : ricordando gli andamenti (4.5.12) e (4.5.13), si vede che il comportamento asintotico, per grandi r , della soluzione generale della (4.5.8) può essere certamente scritto sotto la forma:

$$\varphi_l(r) \sim \frac{A_l}{kr} \sin(kr + \gamma_l) \quad (4.5.41)$$

con A_l e γ_l costanti arbitrarie. Però, tenendo presente che la funzione d'onda radiale $\varphi_l(r)$, che descrive il processo di diffusione, deve soddisfare la condizione di regolarità nell'origine, di normalizzazione in modo da ridursi alle funzioni di Bessel $j_l(r)$ in assenza di potenziale, ovvero:

$$\varphi_l(r) \xrightarrow{U \rightarrow 0} j_l(kr) \quad (4.5.42)$$

e che il comportamene asintotico di $j_l(kr)$ per grandi r è dato da (4.5.12), allora possiamo scrivere il comportamento asintotico di $\varphi_l(r)$, per grandi r , in modo più esplicito di (4.5.41):

$$\varphi_l(r) \sim \frac{A_l}{kr} \sin\left(kr - \frac{\pi}{2} l + \delta_l\right). \quad (4.5.43)$$

dove A_l è un opportuno coefficiente che deve ridursi all'unità in assenza di potenziale e δ_l uno sfasamento asintotico della funzione d'onda radiale effettiva rispetto a quella libera, determinato dall'interazione, che deve tendere a zero per $U \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} A_l \rightarrow 0 \\ \delta_l \rightarrow 0 \end{cases}, \quad U \rightarrow 0. \quad (4.5.44)$$

Poiché, come vedremo tra breve, le costanti A_l sono esprimibili tramite gli sfasamenti δ_l , si ha che in essi è contenuto tutto il ricordo dell'interazione; le quantità $\delta_l = \delta_l(k)$ dette appunto *sfasamenti* ovvero *fasi dell'urto*, dipendono dall'energia ovvero dal numero d'onda k e sono completamente determinate dal potenziale; viceversa, la loro conoscenza deve permettere, almeno in linea di principio, di ricostruire il potenziale di interazione.

Una prima osservazione importante, a proposito delle fasi δ_l , è che esse sono necessariamente reali per potenziali reali; infatti, poiché l'equazione differenziale (4.5.8) per la funzione d'onda radiale è una equazione a coefficienti reali (se U è tale e k^2 ed l assumono valori fisici, reali), una sua soluzione $\varphi(r)$ è ovunque reale per r reale, purché definita come tale in un qualche punto

dell'asse reale. Ora, facendo riferimento, per chiarezza, a potenziali che nell'origine siano dominati dal termine centrifugo, l'origine è un punto singolare di tipo fuchsiano dell'equazione (4.5.9), con esponenti caratteristici l e $-l-1$, e pertanto $\varphi(r)$, sua soluzione regolare nell'origine, deve comportarsi come:

$$\varphi_l(r) \sim C_l r^l \quad , \quad r \rightarrow 0 \quad (4.5.45)$$

essa è dunque definita, a meno della costante di normalizzazione C_l , come una funzione reale nell'intorno dell'origine; come tale essa è, sempre a meno della normalizzazione, reale ovunque per r reale; le proprietà di realtà di $\varphi(r)$ per $r \rightarrow 0$ assicurano quindi, in particolare, la realtà della fase δ_l .

Il comportamento asintotico (4.5.43) di $\varphi(r)$ deve, ovviamente, potersi ottenere anche dalla (4.5.39) che dà la forma della funzione d'onda radiale all'esterno della regione di interazione. Utilizzando in (4.5.39) i comportamenti per grandi r delle funzioni sferiche di Bessel e di Neumann, si vede che deve essere:

$$\varphi_l(r) \sim \frac{1}{kr} \left[\alpha_l \sin \left(kr - \frac{\pi}{2} l \right) - \beta_l \cos \left(kr - \frac{\pi}{2} l \right) \right] \quad , \quad r \rightarrow \infty \quad (4.5.46)$$

e affinché essa coincida con la (4.5.43) occorre che le costanti α_l e β_l siano legate tra loro come:

$$\alpha_l = A_l \cos \delta_l \quad , \quad \beta_l = -A_l \sin \delta_l. \quad (4.5.47)$$

Dato che gli sfasamenti, come già accennato, giocano un ruolo essenziale nell'approccio allo studio dei processi d'urto che stiamo presentando, dovendo utilizzare una rappresentazione di $\varphi_l(r)$ nella regione intermedia $r \geq a$, ci serviremo della (4.5.39), scritta sotto la forma:

$$\varphi_l(r) = A_l [\cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l \eta_l(kr)] \quad , \quad r \geq a. \quad (4.5.48)$$

4.5.1 Ampiezza di diffusione e sezione d'urto

Per la definizione dell'ampiezza di diffusione, e quindi delle sezioni d'urto, interessa, in particolare, come discusso in precedenza, il comportamento per grandi r della funzione d'onda che descrive il processo: sostituendo nella (4.5.35) il comportamento (4.5.43) delle funzioni d'onda radiali, vediamo che la forma asintotica dello sviluppo in onde parziali della funzione d'onda può essere scritto come:

$$\psi(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{A_l}{kr} \sin \left(kr - \frac{\pi}{2} l - \delta_l \right) P_l(\cos \theta). \quad (4.5.49)$$

Poiché l'ampiezza di diffusione e le sezioni d'urto sono determinate dalla conoscenza della sola forma asintotica della funzione d'onda, ne segue che tali

quantità devono poter essere espresse in termini di sfasamenti. Misurando le sezioni d'urto si potranno dunque ottenere informazioni sulle fasi e quindi, indirettamente, sul potenziale d'interazione. Per ricavare l'espressione dell'ampiezza di diffusione in termini delle fasi dell'urto è sufficiente confrontare le due distinte rappresentazioni asintotiche (4.5.2) e (4.5.49) di $\psi(\mathbf{r})$. A tal fine, riscriviamo la (4.5.2) introducendo in essa lo sviluppo in onde parziali (4.5.34) per l'onda piana incidente ed in questo, ancora, il comportamento asintotico delle dato dalla prima delle (4.5.12):

$$\psi(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l - \delta_l\right) P_l(\cos \theta) + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (4.5.50)$$

Essendo unico lo sviluppo asintotico di una funzione, i secondi membri delle relazioni (4.5.49) e (4.5.50) devono essere identici; il modo più semplice per uguagliarli è probabilmente quello di leggere i seni che vi compaiono come combinazioni di esponenziali e quindi uguagliare separatamente i coefficienti degli esponenziali e^{-ikr} ed e^{ikr} dato che essi sono funzioni linearmente indipendenti. I coefficienti di e^{-ikr} uguagliati come (4.5.49)=(4.5.49) sono:

$$-\frac{1}{2i} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) \frac{A_l}{kr} e^{-i\delta_l} P_l(\cos \theta) = -\frac{1}{2i} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) \frac{1}{kr} P_l(\cos \theta) \quad (4.5.51)$$

affinché queste due espressioni siano coincidenti, devono essere identici i coefficienti dei singoli polinomi di Legendre, dato che essi sono, a loro volta, linearmente indipendenti; in definitiva l'uguaglianza delle due espressioni implica l'identificazione:

$$A_l = e^{i\delta_l}. \quad (4.5.52)$$

L'uguaglianza dei coefficienti di e^{ikr} è:

$$\frac{1}{2i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{2i\delta_l}}{kr} P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{1}{kr} P_l(\cos \theta) + \frac{1}{r} f(\theta) \quad (4.5.53)$$

e segue che:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[e^{2i\delta_l} - 1 \right] P_l(\cos \theta) \quad (4.5.54)$$

che fornisce l'ampiezza di diffusione tramite le fasi dell'urto. Vale la pena di soffermarsi a considerare il ruolo di quell'uno che compare entro le parentesi quadre nella (4.5.54): è chiaro che esso deriva dall'onda piana incidente e che ci assicura che non c'è diffusione senza bersaglio, cioè che, in assenza di bersaglio, essendo nulle tutte le fasi, l'ampiezza di diffusione si annulla; è notevole, però, il fatto che esso gioca il suo ruolo solo in avanti, come risulta intuitivo se si pensa che i polinomi di Legendre $P_l(\cos \theta)$ sono funzioni oscillanti nell'intervallo fondamentale $(-1, 1)$, che è quello fisicamente accessibile

per $\cos \theta$, e che essi valgono tutti 1 per $\theta = 0$, dando così origine, in avanti, ad una sovrapposizione coerente, che risulta, in realtà, divergente (ma integrabile); vale infatti l'identità formale:¹¹

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) = 4 \delta(1 - \cos \theta). \quad (4.5.55)$$

È poi palese che quell'uno contribuisce solo alla parte immaginaria di $f(\theta)$. Separando nella (4.5.54) le parti reale ed immaginaria, si ha:

$$\operatorname{Re}\{f(\theta)\} = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin(2\delta_l) P_l(\cos \theta). \quad (4.5.56)$$

$$\operatorname{Im}\{f(\theta)\} = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - \cos(2\delta_l)] P_l(\cos \theta) \quad (4.5.57)$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2(\delta_l) P_l(\cos \theta) \quad (4.5.58)$$

e, se consideriamo la diffusione in avanti, è quindi presumibile che, in generale, risulti:

$$\operatorname{Re}\{f(0)\} = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin(2\delta_l) \approx 0 \quad (4.5.59)$$

in quanto mediata a zero dalle oscillazioni delle fasi al variare dell'indice di somma l , mentre:

$$\operatorname{Im}\{f(0)\} = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2(\delta_l) \quad (4.5.60)$$

è certo diversa da zero se il fenomeno della diffusione esiste. È dunque presumibile che nella diffusione in avanti sia la parte immaginaria dell'ampiezza di diffusione a giocare il ruolo più importante.

A fini pratici è opportuno scrivere lo sviluppo (4.5.54) dell'ampiezza di diffusione anche sotto la forma affatto equivalente:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta). \quad (4.5.61)$$

Le quantità:

$$a_l(k) = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_l} - 1) = \frac{1}{k} e^{i\delta_l} \sin \delta_l \quad (4.5.62)$$

¹¹Vedi p. 840 del Rossetti God used very advanced mathematics in constructin the universe.Rossetti.

vengono dette *ampiezze parziali* (del processo di diffusione); esse sono ovviamente nulle in assenza di interazione e ad esse si può fare riferimento diretto, in luogo che agli sfasamenti, per descrivere le caratteristiche di un processo di collisione. In termini di ampiezze parziali, l'analisi in momenti angolari dell'ampiezza di diffusione, data dalla (4.5.54) o, equivalentemente, dalla (4.5.61), si scrive sotto la forma:

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(k) P_l(\cos \theta). \quad (4.5.63)$$

Per capire quale sia il significato delle ampiezze parziali a_l , consideriamo il comportamento asintotico (4.5.7) della funzione d'onda che descrive il processo d'urto studiato e cominciamo con l'osservare che, per l'onda piana incidente, tenendo conto del suo sviluppo in onde parziali (4.5.34), nonché del comportamento (4.5.12) delle funzioni di Bessel $j_l(kr)$, possiamo scrivere la relazione asintotica:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{\sin(kr - \frac{\pi}{2}l)}{kr} P_l(\cos \theta) \quad (4.5.64)$$

$$\equiv \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr-l\pi)}}{r} \right\} P_l(\cos \theta) \quad (4.5.65)$$

che mostra come l'onda piana incidente, analizzata in momenti angolari, coincida, per grandi r , con una sovrapposizione di onde sferiche divergenti dall'origine, proporzionali a e^{ikr}/r , e di onde sferiche convergenti verso di essa, proporzionali a $e^{-i(kr-l\pi)}/r$. Introducendo la (4.5.65) e la (4.5.63) nella (4.5.7), vediamo che il comportamento asintotico della funzione d'onda $\psi(\mathbf{r})$ può essere scritto sotto la forma:

$$\psi(\mathbf{r}) \underset{t \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left\{ (1 + 2ik a_l) \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr-l\pi)}}{r} \right\} P_l(\cos \theta) \quad (4.5.66)$$

che mostra che la funzione d'onda che descrive il processo di diffusione risulta, a sua volta, almeno asintoticamente, una sovrapposizione di onde sferiche uscenti dal centro diffusore e convergenti verso di esso; in assenza di bersaglio tutte le ampiezze parziali a_l sono nulle e lo sviluppo asintotico (4.5.66) coincide con quello libero (4.5.65); la presenza del bersaglio modifica, rispetto al caso libero, solo i coefficienti delle onde uscenti da esso, trasformando il fattore 1 nel fattore $(1 + 2ik a_l)$, mentre le onde convergenti verso il bersaglio rimangono immutate.

Una volta nota la (4.5.63), che fornisce lo sviluppo in ampiezze parziali dell'ampiezza di diffusione, e quindi, grazie alla definizione (4.5.62), la sua espressione in termini di fasi, ottenere quelle delle sezioni d'urto elastiche

differenziale e totale è immediato. La sezione d'urto differenziale di diffusione elastica, $\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2$, è data formalmente dalla relazione:

$$\sigma(\theta) = \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(k) P_l(\cos \theta) \right|^2 \quad (4.5.67)$$

la sezione d'urto elastica totale si ottiene, poi, integrando quest'ultima relazione su tutto l'angolo solido e quindi, tenuto conto della proprietà di ortogonalità dei polinomi di Legendre, espressa dalla relazione:

$$\int_{-1}^1 P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) d(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (4.5.68)$$

risulta:

$$\sigma_{tot} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |a_l(k)|^2 \quad (4.5.69)$$

$$\equiv \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k). \quad (4.5.70)$$

Quando si tratta un problema di scattering, il problema è sempre quello di determinare gli sfasamenti δ_l , sfruttando il fatto che essi compaiono nel comportamento a grandi distanze di $\psi(\mathbf{r})$; una volta in mano i δ_l si possono inserire in (4.5.70) e determinare la sezione d'urto totale.¹²

4.5.2 Teorema ottico

Se paragoniamo l'espressione (4.5.70), che fornisce la sezione d'urto totale di un processo di diffusione elastica, con la (4.5.60), che dà la parte immaginaria dell'ampiezza di diffusione in avanti per lo stesso processo, notiamo subito che queste due quantità risultano proporzionali e che vale l'identità:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}\{f(0)\} \quad (4.5.71)$$

nota come **teorema ottico**. Nota che avevamo ottenuto lo stesso risultato già nella sezione §4.3.1 facendo conti sulle densità di correnti. La sua interpretazione fisica intuitiva è la seguente: perché si manifesti il fenomeno della diffusione dei proiettili contenuti nel fascio incidente, un certo numero di essi, proporzionale alla sezione d'urto totale, deve essere rimosso dal fascio stesso, in modo che l'intensità del fascio al di là della regione di interazione, cioè dietro al bersaglio (per $\theta = 0$), risulti minore dell'intensità che aveva il fascio prima di tale regione. Questo può avvenire solo a causa dell'interferenza tra i due termini che compaiono nell'espressione asintotica della funzione d'onda

¹²Puoi vedere <https://unitesi.unito.it/handle/20.500.14240/162951>.

e, siccome il termine di interferenza deve essere una funzione lineare dell'ampiezza di diffusione in avanti, dobbiamo aspettarci che valga una relazione che lega in modo lineare la sezione d'urto totale alla ampiezza di diffusione in avanti; se poi teniamo conto di quanto già discusso dopo la (4.5.54), che ci ha portato ad ipotizzare che la parte reale dell'ampiezza di diffusione in avanti sia nulla, siamo automaticamente portati a supporre che il termine di interferenza debba essere proporzionale alla sua parte immaginaria, cioè proprio a postulare la validità del teorema ottico.

È notevole, poi, il fatto che il teorema ottico abbia una validità molto più generale di quanto non possa qui apparire; esso vale, infatti, anche per potenziali non centrali e rimane valido in una teoria relativistica, come pure in presenza di fenomeni anelastici, purché con σ_{tot} si intenda la sezione d'urto totale, onnicomprensiva di tutti i processi elastici ed anelastici che possano avvenire a seguito delle collisioni proiettili-bersaglio.

4.5.3 Urto contro una sfera impenetrabile

Come primo, semplice esempio di diffusione in un campo centrale, consideriamo il caso in cui il potenziale sia del tipo “sfera impenetrabile”, cioè il caso in cui sia:

$$U(r) = \begin{cases} \infty & r < a \\ 0 & r > a. \end{cases} \quad (4.5.72)$$

Essendo inaccessibile la regione $r < a$, la funzione d'onda del sistema deve essere quindi identicamente nulla e tali, pertanto, devono essere anche le funzioni d'onda radiali $\varphi(r)$. Nella regione esterna, $r > a$, l'ellesima funzione d'onda radiale ha la forma generale, data dalla (4.5.48). La condizione di continuità $\varphi_l(a) = 0$ fornisce per le fasi la relazione:

$$\tan \delta_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}. \quad (4.5.73)$$

Cominciando a considerare il caso di urti a bassa energia, con $ka \ll 1$, è lecito approssimare $j_l(ka)$ ed $n_l(ka)$ con i loro comportamenti nell'origine, dati da (4.5.10) e (4.5.11), ottenendo per le fasi l'uguaglianza approssimata:

$$\delta_l \approx -\frac{(ka)^{2l+1}}{(2l-1)!!(2l+1)!!}, \quad ka \ll 1. \quad (4.5.74)$$

L'ultima relazione per gli sfasamenti mostra, in particolare, che, almeno a bassa energia, le fasi sono tutte negative, in accordo col fatto che il potenziale considerato è repulsivo; inoltre riproduce, nel caso specifico, il risultato generale che le fasi vanno a zero, per $k \rightarrow 0$, come k^{2l+1} . In soglia, solo il contributo dell'onda s ($l = 0$) gioca un ruolo effettivo e, per l'ampiezza di diffusione, si ha:

$$f(\theta) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{k} e^{i\delta} \sin \delta_0 \sim \frac{\delta_0}{k} = -a. \quad (4.5.75)$$

La sezione d'urto differenziale in soglia è quindi semplicemente:

$$\sigma(\theta) = a^2 \quad (4.5.76)$$

e quella totale:

$$\sigma_{tot} = 4\pi a^2 \quad (4.5.77)$$

e risulta quattro volte la sezione geometrica, cioè quattro volte la sezione d'urto classica; che avevamo ricavato nella sezione §4.2.1. Questo fatto non deve stupire, perché il limite che stiamo considerando, $k \rightarrow 0$, è equivalente al limite per $\lambda = 1/k \rightarrow \infty$, che è esattamente il limite opposto a quello classico. Solo nel limite di energie molto grandi possiamo immaginare di trovarci in una situazione di quasi classicità e quindi di poter paragonare una predizione quantistica con la analoga predizione classica.

Se consideriamo, quindi, urti ad alte energie, sappiamo che saranno molte le onde parziali che danno un apporto concreto alla costruzione dell'ampiezza di diffusione e quindi delle sezioni d'urto. Per vedere come vanno le cose, fissiamo la nostra attenzione sulla sezione d'urto totale, la cui formula che abbiamo ricavato è:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (4.5.78)$$

Per calcolarla dovremmo essere in grado di sommare la serie che compare a secondo membro; utilizzando per le fasi la loro espressione (4.5.73), si ha:

$$\sin^2 \delta_l \equiv \frac{\tan^2 \delta_l}{1 + \tan^2 \delta_l} = \frac{j_l^2(ka)}{j_l^2(ka) + \eta_l^2(ka)} \quad (4.5.79)$$

e quindi una valutazione della somma della serie, nel caso di grandi energie, potrebbe essere fatta in modo abbastanza accurato utilizzando opportune formule che forniscono per le funzioni di Bessel accurati valori approssimati, validi per grandi valori dell'argomento, per i tre casi in cui l'indice è minore, dello stesso ordine e maggiore dell'argomento stesso, ma i calcoli relativi sono tutt'altro che semplici; il risultato che si ottiene è però particolarmente interessante, perché fornisce una sezione d'urto totale doppia di quella geometrica. Il Rossetti continua il suo capitolo facendo i calcoli per sommare la serie ed ottenere la sezione d'urto (4.5.77).

Capitolo 5

Entanglement

I riferimenti per questo capitolo sono, con uguale importanza, il Cohen God used very advanced mathematics in constructin the universe.Cohen e lo Zwiebach God used very advanced mathematics in constructin the universe.Zwiebach. Il Griffiths God used very advanced mathematics in constructin the universe.Griffiths invece lo si può vedere per la parte finale riguardante il paradosso EPR.

Un indice rapido, con i relativi riferimenti, di questa sezione è:

- Definizione di Entanglement. Capitolo XXI.A God used very advanced mathematics in constructin the universe.Cohen.
- Matrice densità di un sottosistema entangled. Capitolo XXI.A God used very advanced mathematics in constructin the universe.Cohen.
- Esempio di due sistemi di spin $1/2$ in stato di singoletto: correlazioni fra le misure di spin. Capitolo XXI.B God used very advanced mathematics in constructin the universe.Cohen.
- Formalismo generale per descrivere stati entangled: decomposizione di Schmidt, rango di Schmidt. Capitolo XXI.C God used very advanced mathematics in constructin the universe.Cohen.
- Esercizio 22.6 God used very advanced mathematics in constructin the universe.Zwiebach.
- Entropia di Von Neumann. Complementi capitolo A.XXI.1 God used very advanced mathematics in constructin the universe.Cohen.
- Monogamia di Entanglement. Complementi capitolo A.XXI.1 God used very advanced mathematics in constructin the universe.Cohen.
- Teletrasporto, base di Bell, clonazione. Capitolo 18.6, 18.7, 18.9 God used very advanced mathematics in constructin the universe.Zwiebach

e 12.4 di God used very advanced mathematics in constructin the universe.Griffiths.

- Paradosso EPR e Disuguaglianza di Bell. Capitolo 12 God used very advanced mathematics in constructin the universe.Griffiths.
- Estensione al caso di più particelle, GHZ. Complementi capitolo B.XXI.1 God used very advanced mathematics in constructin the universe.Cohen.

5.1 Base di Bell, teletrasporto e clonazione

Vediamo in questa sezione cos'è la base di Bell e cosa intendiamo con teletrasporto e clonazione.

5.1.1 Base di Bell

La base di Bell è un'insieme di 4 vettori ortogonali ed entangled nello spazio delle particelle di spin 1/2. Possiamo considerare lo spazio prodotto:

$$V_1 \otimes V_2 \quad (5.1.1)$$

in cui V_1 e V_2 sono spazi complessi bidimensionali per particelle spinoriali di spin 1/2. Per brevità omettiamo i pedici 1 e 2 e il simbolo di prodotto, ma gli stati sulla sinistra apparterranno allo spazio V_1 e quelli di destra a V_2 . Prendiamo lo stato:

$$|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle |+\rangle + |-\rangle |-\rangle \right). \quad (5.1.2)$$

Questo è chiaramente uno stato entangled, poiché la matrice associata è diagonale con elementi uguali a $1/\sqrt{2}$ e determinante non nullo. Lo stato $|\phi_0\rangle$ è comunque ben normalizzato:

$$\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle = 1. \quad (5.1.3)$$

Prediamo $|\phi_0\rangle$ come primo vettore dello spazio $V_1 \otimes V_2$. Ci servono però altri 3 vettori per completare la base dal momento che lo spazio è di dimensione 4. Definiamo i vettori:

$$|\phi_i\rangle = (\mathbb{1} \otimes \sigma_i) |\phi_0\rangle \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.1.4)$$

in cui σ_i sono le matrici di Pauli. Nota che essendo $(\mathbb{1} \otimes \sigma_i)$ un operatore unitario, segue che gli stati $|\phi_i\rangle$ sono normalizzati ad 1. Ovviamente gli stati $|\phi_i\rangle$ sono entangled, poiché se non lo fossero seguirebbe che lo stato $(\mathbb{1} \otimes \sigma_i) |\phi_i\rangle$ non sarebbe entangled, però usando la proprietà delle matrici di Pauli:

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1} \quad (5.1.5)$$

si può vedere che $(\mathbb{1} \otimes \sigma_i) |\phi_i\rangle$ è effettivamente $|\phi_0\rangle$, che è entangled. Dunque concludiamo che $|\phi_i\rangle$ sono entangled. Esplicitando $i = 1, 2, 3$ e l'azione delle matrici di Pauli possiamo vedere che abbiamo:

$$|\phi_0\rangle = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} |\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle |+\rangle + |-\rangle |-\rangle \right) \quad (5.1.6)$$

$$|\phi_1\rangle = \mathbb{1} \otimes \sigma_1 |\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle |-\rangle + |-\rangle |+\rangle \right) \quad (5.1.7)$$

$$|\phi_2\rangle = \mathbb{1} \otimes \sigma_2 |\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle |-\rangle - |-\rangle |+\rangle \right) \quad (5.1.8)$$

$$|\phi_3\rangle = \mathbb{1} \otimes \sigma_3 |\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle |+\rangle - |-\rangle |-\rangle \right) \quad (5.1.9)$$

e questi quattro sono i vettori che chiamiamo **stati di Bell**. Si può dimostrare che sono vettori ortogonali:

$$\langle \phi_0 | \phi_i \rangle = 0. \quad (5.1.10)$$

Per proprietà di hermitianità degli operatori σ_i , ovvero che $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$, e unito al fatto che vale:

$$(S \otimes T)^\dagger = S^\dagger \otimes T^\dagger \quad (5.1.11)$$

possiamo dire che:

$$\langle \phi_i | = \langle \phi_0 | \left(\mathbb{1} \otimes \sigma_i \right). \quad (5.1.12)$$

Possiamo facilmente dimostrare l'ortonormalità della base di Bell:

$$\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \langle \phi_0 | \left(\mathbb{1} \otimes \sigma_i \right) \left(\mathbb{1} \otimes \sigma_j \right) |\phi_0\rangle \quad (5.1.13)$$

$$= \langle \phi_0 | \mathbb{1} \otimes \sigma_i \sigma_j |\phi_0\rangle \quad (5.1.14)$$

$$= \langle \phi_0 | \mathbb{1} \otimes (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k) |\phi_0\rangle \quad (5.1.15)$$

$$= \delta_{ij} \langle \phi_0 | \mathbb{1} \otimes |\phi_0\rangle + i\epsilon_{ijk} \langle \phi_0 | \mathbb{1} \otimes \sigma_k |\phi_0\rangle \quad (5.1.16)$$

$$= \delta_{ij} \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle + i\epsilon_{ijk} \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle \quad (5.1.17)$$

$$= \delta_{ij}. \quad (5.1.18)$$

Ovviamente possiamo invertire la base di Bell e scrivere i vettori non entangled, ossia i vettori di spin up e down, in termini dei vettori $|\phi_i\rangle$. Rimpiazziamo le etichette 1,2 con A, B :

$$|+\rangle_A |+\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi_0\rangle_{AB} + |\phi_3\rangle_{AB} \right) \quad (5.1.19)$$

$$|-\rangle_A |-\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi_0\rangle_{AB} - |\phi_3\rangle_{AB} \right) \quad (5.1.20)$$

$$|+\rangle_A |-\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi_1\rangle_{AB} - i |\phi_2\rangle_{AB} \right) \quad (5.1.21)$$

$$|-\rangle_A |+\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi_1\rangle_{AB} + i |\phi_2\rangle_{AB} \right). \quad (5.1.22)$$

La base di Bell è utilizzata, vista la comodità, quando si devono fare delle misure sofisticate di coppie di particelle entangled. Noi vedremo come esempio di ciò il teletrasporto quantistico.

5.1.2 Teletrasporto quantistico

Ovviamente quando parliamo di teletrasporto quantistico intendiamo un teletrasporto di informazione e non di materia, come vorrebbe la fantascienza. Vedremo in questa sezione come la Meccanica Quantistica permetta il teletrasporto, mentre la fisica classica lo neghi.

Immaginiamo che Alice possieda una particella, che possiamo chiamare C , di spin $1/2$ in un certo stato, che però non conosce esattamente e può scrivere in modo generale come:

$$|\psi\rangle_C = \alpha|+\rangle_C + \beta|-\rangle_C \quad (5.1.23)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. L'obiettivo di Alice è quello di trasportare questo quanto di informazione, che spesso si chiama **quantum bit** o **qubit**, a Bob, che è arbitrariamente lontano. Ricordiamo che la particella C non cambia la sua posizione fisica, ma l'intento di Alice è quello di trasferire l'informazione dello stato $|\psi\rangle_C$ a Bob. Questo processo è possibile solo se i due sperimentatori condividono una coppia entangled di spin $1/2$. Se Bob possiede $|\phi\rangle_B$ quello che vogliamo riuscire a fare è:

$$|\phi\rangle_B \longrightarrow |\psi\rangle_B. \quad (5.1.24)$$

Si potrebbe obiettare e dire che ci sarebbero soluzioni più comode per Alice per mandare a Bob lo stato $|\psi\rangle_C$. Si potrebbe ad esempio imballare in una scatola la particella C e spedirla a Bob, ma è forse un po' banale. Un'altra opzione sarebbe quella di conoscere i coefficienti α e β e comunicarli a Bob in modo che possa riprodurli su un altro generico stato con un apparato tipo Stern-Gerlach; il problema di questo approccio è che avendo solo una particella Alice non è in grado di poter determinare i coefficienti, poiché una qualsiasi misura farebbe collassare la funzione d'onda. L'unico caso in cui è possibile conoscere α e β è quello in cui Alice è in possesso di molte copie dello stato $|\psi\rangle_C$ su cui può effettivamente fare uno studio. L'ultima opzione che si potrebbe avere è quella di fare una copia dello stato di C e spedirla a Bob, però vedremo nella sezione §5.1.3 che non è possibile clonare stati quantistici. Un'immagine del ragionamento che seguiremo per studiare il teletrasporto quantistico è in figura 5.1. Il punto chiave del ragionamento è il fatto che Alice, oltre ad avere la particella C , possiede la particella A entangled con B che è in possesso di Bob. Inoltre i due sperimentatori possiedono un dispositivo che gli permette di fare belle misure di Bell.

Alice prende la coppia AC e compie una misura di Bell grazie alla sua console. Una volta fatta la misura una delle etichette μ si illumina e ciò significa che la coppia di particelle si trova nello stato identificato dal vettore $|\phi_\mu\rangle_{AC}$ della base di Bell. Alice può comunicare a Bob, tranquillamente per telefono, quale delle lucine della console di Bell le si è illuminata, in modo che Bob possa prendere la sua particella B e sottoporla alla stessa misura nella sua console. La console etichettata da μ applica allo stato gli operatori $(\mathbb{1}, \sigma_i)$, o meglio con $\mu = 0$ viene applicato $\mathbb{1}$ e se $\mu = i$ vengono applicate gli operatori σ_i . Facendo ciò lo stato $|\psi\rangle$ viene appiccicato a B .

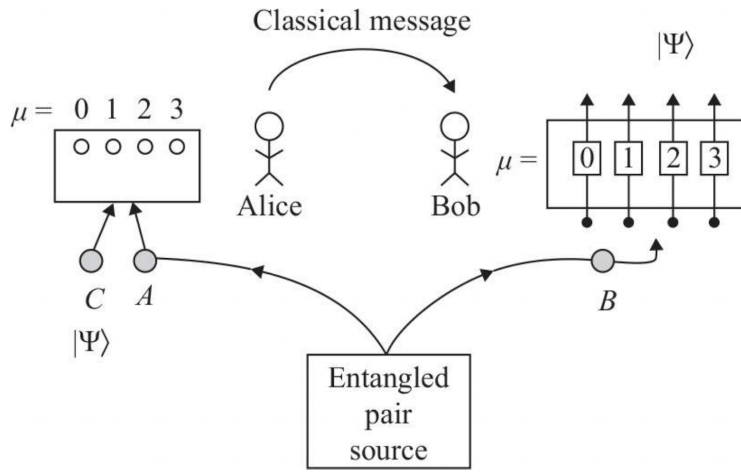


Figura 5.1: Immagine presa dallo Zwiebach God used very advanced mathematics in constructin the universe.Zwiebach. Alice e Bob possiedono entrambe due macchine che gli permettono di fare delle misure di Bell. Alice è in possesso dello stato della particella C , che vuole comunicare a Bob. Alice e Bob condividono due particelle entangled A e B .

Vediamo ciò in modo quantitativo. Prendiamo la coppia AB entangled con stato uguale al primo vettore di Bell:

$$|\phi_0\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_A |+\rangle_B + |-\rangle_A |-\rangle_B \right) \quad (5.1.25)$$

lo stato delle tre particelle sarà quindi:

$$|\phi_0\rangle_{AB} \otimes |\psi\rangle_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_A |+\rangle_B + |-\rangle_A |-\rangle_B \right) \otimes \left(\alpha |+\rangle_C + \beta |-\rangle_C \right) \quad (5.1.26)$$

espandendo i prodotti e riordinando i vettori (nota che possiamo riordinando i vettori senza problemi) in modo da avere la particella A , poi C e per ultima

B :

$$|\phi_0\rangle_{AB} \otimes |\psi\rangle_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha |+\rangle_A |+\rangle_C |+\rangle_B + \beta |+\rangle_A |-\rangle_C |+\rangle_B + \right. \\ \left. + \alpha |-\rangle_A |+\rangle_C |-\rangle_B + \beta |-\rangle_A |-\rangle_C |-\rangle_B \right). \quad (5.1.27)$$

Possiamo riscrivere gli stati AC in termini dei vettori di Bell (5.1.19), (5.1.20), (5.1.21) e (5.1.22):

$$|\phi_0\rangle_{AB} \otimes |\psi\rangle_C = \frac{1}{2} \left(|\phi_0\rangle_{AC} + |\phi_3\rangle_{AC} \right) \alpha |+\rangle_B + \frac{1}{2} \left(|\phi_1\rangle_{AC} - i |\phi_2\rangle_{AC} \right) \beta |+\rangle_B + \\ + \frac{1}{2} \left(|\phi_1\rangle_{AC} + i |\phi_2\rangle_{AC} \right) \alpha |-\rangle_B + \\ + \frac{1}{2} \left(|\phi_0\rangle_{AC} - |\phi_3\rangle_{AC} \right) \beta |-\rangle_B \quad (5.1.28)$$

raccogliendo per i vettori di Bell:

$$|\phi_0\rangle_{AB} \otimes |\psi\rangle_C = \frac{1}{2} |\phi_0\rangle_{AC} \left(\alpha |+\rangle_B + \beta |-\rangle_B \right) + \frac{1}{2} |\phi_1\rangle_{AC} \left(\alpha |-\rangle_B + \beta |+\rangle_B \right) + \\ + \frac{1}{2} |\phi_2\rangle_{AC} \left(i \alpha |-\rangle_B - i \beta |+\rangle_B \right) + \\ + \frac{1}{2} |\phi_3\rangle_{AC} \left(\alpha |+\rangle_B - \beta |-\rangle_B \right). \quad (5.1.29)$$

Possiamo notare che accanto ad ogni vettore della base di Bell sono impresse nello stato di B delle varianti di $|\psi\rangle$. Infatti possiamo scrivere:

$$|\phi_0\rangle_{AB} \otimes |\psi\rangle_C = \frac{1}{2} |\phi_0\rangle_{AC} \otimes |\psi\rangle_B + \frac{1}{2} |\phi_1\rangle_{AC} \otimes \sigma_1 |\psi\rangle_B + \\ + \frac{1}{2} |\phi_2\rangle_{AC} \otimes \sigma_2 |\psi\rangle_B + \frac{1}{2} |\phi_3\rangle_{AC} \otimes \sigma_3 |\psi\rangle_B. \quad (5.1.30)$$

Possiamo riscrivere lo stato in modo compatto come:

$$|\phi_0\rangle_{AB} \otimes |\psi\rangle_C = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 |\phi_\mu\rangle_{AC} \otimes \sigma_\mu |\psi\rangle_B \quad (5.1.31)$$

che è una relazione valida in generale per un sistema di 3 particelle, in cui le prime due A, B sono entangled e il cui stato è "moltiplicato" per una terza C . Fino ad ora non abbiamo fatto ancora nulla con l'apparato sperimentale, abbiamo solamente scritto in modo comodo lo stato delle tre particelle. Ora, se Alice applica allo stato AC la console di Bell e ottiene un certo μ , Bob non deve fare altro che applicare la stessa μ nella sua macchina e ottiene $|\psi\rangle_B$. Questo avviene poiché le particelle A e B sono entangled. Se ad esempio Alice trova con la sua misura $|\phi_0\rangle_{AC}$, allora Bob sa di avere lo stato $|\psi\rangle_B$ e

non deve fare nulla; se Alice ottiene $|\phi_1\rangle_{AC}$, allora Bob ha $\sigma_1 |\psi\rangle_B$ e facendo una misura con la sua macchina con l'etichetta $\mu = 1$, dunque applicando σ_1 , ottiene lo stato:

$$\sigma_1 \sigma_1 |\psi\rangle_B = |\psi\rangle_B \quad (5.1.32)$$

e il teletrasporto è completo. Analogamente funziona per $|\phi_2\rangle_{AC}$ e $|\phi_3\rangle_{AC}$. Notiamo che Alice al termine del processo si ritrova con lo stato $|\phi_\mu\rangle_{AC}$ e ha completamente perso l'informazione sullo stato di partenza $|\psi\rangle_C$ e sui coefficienti α, β . Il processo ha distrutto lo stato originario di C , tramite la misura, e non ha creato alcuna copia di esso. Tutto ciò, come vedremo, è consistente con il teorema di non clonazione.

Nel 2022 il premio Nobel fu dato, tra gli altri, ad Anton Zeilinger per *per esperimenti con fotoni entangled, stabilendo la violazione delle disuguaglianze di Bell e aprendo la strada alla scienza dell'informazione quantistica*. Però Zeilinger non dimostrò solamente la violazione delle disuguaglianze di Bell, ma in altri anni mostrò sperimentalmente che il processo di teletrasporto quantistico era possibile.

5.1.3 Teorema di non clonazione

Abbiamo già detto nella sezione precedente che non è possibile clonare stati quantistici, ma non siamo stati sufficientemente precisi. In realtà la Meccanica Quantistica permette la clonazione di un certo numero di stati in uno spazio finito dimensionale, quello che non permette è clonare un numero arbitrario di stati. Se si fosse in grado di clonare un numero arbitrario di stati, allora la Meccanica Quantistica si romperebbe e permetteremmo l'esistenza di messaggi superluminali (vedi la sezione §5.2). Però il teorema di non clonazione e il teletrasporto quantistico hanno aperto le porte alla **crittografia**, all'**informazione** e alla **computazione quantistica**. Puoi leggere il capitolo (molto breve) §12.4 del Griffiths *God used very advanced mathematics in constructing the universe*. Griffiths per una rapida introduzione. Ampliamo leggermente il discorso del teorema di non clonazione.

Prendiamo uno stato quantistico $|\psi\rangle$ in uno spazio vettoriale V . Teniamo a mente che la clonazione non permette di prendere, ad esempio un elettrone, in un certo stato quantistico e creare un altro elettrone nello stesso stato. Quello che fa il processo di clonazione è prendere due elettroni, etichettati da 1 e 2, prendere lo stato che si vuole clonare dei due e appiccicarlo anche all'altro, senza modificare quello preso come esempio. Come idea puoi pensare ad una fotocopiatrice, che prende un certo foglio, ne crea una copia, ma senza alterare quello originale.

Quello che faremo sarà prendere un certo stato di spin $1/2$:

$$|\psi\rangle = a_+ |+\rangle + a_- |-\rangle \quad (5.1.33)$$

e lo vogliamo clonare in uno stato di una seconda particella, sempre di spin $1/2$, che ha uno stato $|b\rangle$ arbitrario, ma comunque fissato. Ad esempio nella figura 5.2 è immaginato che $|b\rangle$ sia di spin up.

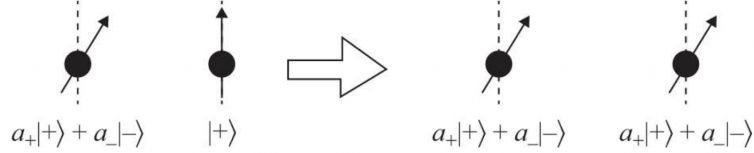


Figura 5.2

Il processo che ci piacerebbe ottenere è:

$$\left(a_+ |+\rangle + a_- |-\rangle \right) \otimes |b\rangle \longrightarrow e^{i\phi} \left(a_+ |+\rangle + a_- |-\rangle \right) \otimes \left(a_+ |+\rangle + a_- |-\rangle \right) \quad (5.1.34)$$

con ϕ una fase arbitraria. Essendo l'evoluzione di un sistema quantistico guidata da un operatore unitario, possiamo richiedere che anche l'azione di clonazione sia data da un qualche operatore U unitario¹ che agisce sullo spazio $V \otimes V$. Presi due stati normalizzati: $|\psi\rangle \in V$ da clonare e $|b\rangle \in V$ bianco, allora dobbiamo avere:

$$U : |\psi\rangle \otimes |b\rangle \longrightarrow e^{i\phi} |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \quad , \quad \langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad , \quad \langle b | b \rangle = 1 \quad (5.1.35)$$

con la fase ϕ che può dipendere da $|\psi\rangle$ e $|b\rangle$. Il processo di non clonazione è riassunto dal teorema:

Teorema 1 *Per uno stato $|b\rangle \in V$ normalizzato arbitrario, ma fissato, non esiste alcun operatore unitario $U \in \mathcal{L}(V \otimes V)$ che implementi una mappa del tipo (5.1.34) per uno stato arbitrario normalizzato $|\psi\rangle \in V$.*

Da questo segue anche un corollario:

Corollario 1 *In uno spazio vettoriale V di dimensione n , il numero massimo di stati che possono essere clonati da un operatore unitario U è n . Tali vettori costituiscono una base ortonormale per V .*

Vediamone la **dimostrazione**. Consideriamo la mappa (5.1.34) e uno stato fissato $|\psi_1\rangle$ da copiare:

$$U : |\psi_1\rangle |b\rangle \longrightarrow e^{i\phi_1} |\psi_1\rangle |\psi_1\rangle \quad (5.1.36)$$

siamo abbastanza sicuri che esista una mappa U unitaria che implementi la trasformazione (5.1.36):

$$U : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V. \quad (5.1.37)$$

¹Se non fosse un'operatore unitario, allora l'output non sarebbe deterministico il che non ci piacerebbe.

Questo lo possiamo dire visto che gli stati a destra e sinistra della trasformazione hanno la stessa norma:

$$|\psi_1\rangle|b\rangle|^2 = \langle\psi_1|\psi_1\rangle\langle b|b\rangle = 1 \quad (5.1.38)$$

$$|e^{i\phi_1}|\psi_1\rangle|^2 = \langle\psi_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1|\psi_1\rangle = 1. \quad (5.1.39)$$

Spieghiamo meglio con un esempio. Se prendiamo lo spazio $W = V \otimes V$ arbitrario, allora possiamo costruire un operatore unitario U che prende un certo vettore unitario $|e_1\rangle$ e lo mappa in un altro vettore unitario $|f_1\rangle$. Successivamente possiamo utilizzare il processo di Gram-Schmidt per estendere $|e_1\rangle$ in una base ortonormale $|e_i\rangle$ con $i = 1, \dots, \dim W$. Analogamente possiamo fare per $|f_i\rangle$ con $i = 1, \dots, \dim W$. La richiesta di unitarietà che facciamo all'operatore è dunque:

$$U = \sum_i |f_i\rangle\langle e_i|. \quad (5.1.40)$$

Similmente se prendiamo $p \leq \dim W$ e consideriamo una base di vettori ortonormali $|e_1\rangle, \dots, |e_p\rangle$ che sono mappati uno a uno in p vettori ortonormali $|f_1\rangle, \dots, |f_p\rangle$, allora c'è un qualche operatore unitario che permette questa mappa, che possiamo costruire completando il set di vettori in una base completa ortonormale.

Possiamo applicare questo esempio al caso quantistico (5.1.36). Abbiamo detto che esiste una mappa unitaria che manda un vettore unitario di $V \otimes V$ in un altro vettore unitario in $V \otimes V$. Potremmo però chiederci se possiamo avere un'operatore unitario che, con qualche modifica, possa anche clonare un secondo stato $|\psi_2\rangle$:

$$\begin{aligned} U : |\psi_1\rangle|b\rangle &\longrightarrow e^{i\phi_1}|\psi_1\rangle|\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle|b\rangle &\longrightarrow e^{i\phi_2}|\psi_2\rangle|\psi_2\rangle. \end{aligned} \quad (5.1.41)$$

Le argomentazioni che abbiamo presentato sopra ci dice che U esiste se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ sono ortogonali tra loro e ortonormali in V . questa cosa implica che due stati di $V \otimes V$ ortonormali a sinistra della freccia della trasformazione vengono mandati in due vettori di $V \otimes V$ a destra che saranno ancora tali. Per cui possiamo clonare, grazie ad U , un set di $\dim V$ vettori ortonormali di V . Ma possiamo fare meglio?

Consideriamo il caso in cui due stati sono clonati (5.1.41) e ricordiamo che un operatore unitario, in generale, preserva i prodotti scalari. Se un tale U esistesse, allora il prodotto interno degli stati da clonare dev'essere uguale al prodotto degli stati clonati:

$$\left(\langle\psi_1|\langle b|\right)\left(|\psi_2\rangle|b\rangle\right) = \left(e^{-i\phi_1}\langle\psi_1|\langle\psi_1|\right)\left(e^{i\phi_2}|\psi_2\rangle|\psi_2\rangle\right) \quad (5.1.42)$$

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle\langle b|b\rangle = e^{-i\phi_1}\langle\psi_1|\langle\psi_1|e^{i\phi_2}|\psi_2\rangle|\psi_2\rangle \quad (5.1.43)$$

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = e^{i(\phi_2-\phi_1)}\langle\psi_1|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|\psi_2\rangle \quad (5.1.44)$$

$$= e^{i(\phi_2-\phi_1)}|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 \quad (5.1.45)$$

una soluzione banale è $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$, come potevamo già prevedere sapendo che due stati clonabili sono ortogonali. L'altra soluzione è:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = e^{i(\phi_2 - \phi_1)} \quad (5.1.46)$$

la quale implica $|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 = 1$. Però la disuguaglianza di Schwartz ci dice che:

$$|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 \leq \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = 1 \quad (5.1.47)$$

e dal momento che la disuguaglianza è saturata abbiamo che $|\psi_2\rangle$ è uguale a $|\psi_1\rangle$ a meno di una fase arbitraria. Per cui $|\psi_2\rangle$ non è un nuovo stato che possiamo clonare. Concludiamo che se abbiamo un set di stati da clonare, un nuovo stato può essere clonato solo se è ortogonale a tutti gli altri stati.

Quindi se abbiamo uno stato da clonare in un certo spazio V , possiamo cominciare a prendere altri vettori clonabili dai vettori ortonormali. Se abbiamo un operatore U che agisce in uno spazio V , allora il massimo numero di vettori clonabili è $\dim V$ e nessuna combinazione lineare di un set ortonormale di vettori può essere più clonato, proprio perché non ortogonale a tutti. Questo completa la nostra dimostrazione.

5.2 Paradosso EPR

Analizziamo in questa sezione uno dei problemi più grandi dell'interpretazione della Meccanica Quantistica, ovvero l'indeterminazione associata alla funzione d'onda. Infatti, abbiamo imparato che la funzione d'onda, o comunque lo stato quantistico, non determina univocamente il risultato di una misura, ma ci dice solamente la distribuzione statistica dei possibili risultati. Per questo motivo nascono tre visioni differenti riguardo l'interpretazione della teoria. In particolare esiste il punto di vista **realista**, che afferma che uno stato fisico "ha realmente" l'attributo discusso già prima di effettuare la misura e l'atto ne rivela solamente la natura; il punto di vista **ortodossa**, quella più popolare, ci dice che in realtà è proprio l'atto della misura a creare² l'attributo dello stato ed è limitato solo da vincoli statistici dati da ψ ; la visione **agnostica** evita completamente la discussione e parla di metafisica.

La visione realista è quella che dice che la Meccanica Quantistica è una teoria incompleta poiché pur conoscendo la funzione d'onda, ovvero tutta l'informazione che la teoria ci può dare del sistema, non si è in grado di determinare tutte le caratteristiche. È proprio questa visione ad introdurre le teorie a variabili nascoste.

²Diciamo *creare* nel senso che prima di una misura tale attributo non è definito, ma non che esiste una qualche magia che agisce sulla natura. Ad esempio uno stato con spin up nella componente z , non ha spin definito nella direzione x e una misura lungo tale direzione ne fissa un valore.

La visione ortodossa forse crea più problemi che soluzioni, infatti se nel processo di misura creiamo un attributo del sistema, allora l'atto in sé nasconde un'importanza non banale. Introduce inoltre il concetto di collasso della funzione d'onda, visto che due misure ripetute devono restituire uno stesso risultato.

Vista questa breve introduzione possiamo passare a parlare del **paradosso EPR**, ovvero il paradosso che Einstein, Podolsky e Rosen hanno pubblicato nel 1935 a Princeton per cercare di dimostrare, dal punto di vista teorico, che la posizione realista della MQ è l'unica sensata. C'è da tenere a mente che il paradosso che ad oggi si studia è noto come *paradosso EPRB*, dove la *B* indica D. Bohm, che semplificò leggermente il problema.

Consideriamo il decadimento di un pione:

$$\pi^0 \longrightarrow e^- + e^+$$

assumendo che il pione fosse a riposo possiamo dire che elettrone e positrone volano in direzioni opposte. Dal momento che π^0 ha spin nullo dobbiamo avere, per la conservazione del momento angolare, che elettrone e positrone abbiano spin opposto. Dunque elettrone e positrone occupano la configurazione di singoletto di spin:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (5.2.1)$$

La Meccanica Quantistica non riesce a dirci quale combinazione avremo - se e^- spin up e e^+ spin down oppure il viceversa - però ci dice che sicuramente le misure saranno correlate e che avremo ciascuna delle due combinazioni metà delle volte (essendo combinazioni equiprobabili). Il fatto critico avviene nel momento in cui lasciamo allontanare le due particelle, in linea di principio ad una distanza infinita, e poi ne misuriamo lo spin. Se misuriamo, ad esempio spin up dell'elettrone, allora sapremo che se qualcuno, a distanza a piacere da noi, misurasse lo spin del positrone troverebbe spin down. Ciò non è particolarmente strano per un realista, poiché le due particelle avevano questa caratteristica già prima che facessimo la misura, ma semplicemente la MQ non era in grado di dircelo. Per l'interpretazione ortodossa invece nel momento in cui facciamo la misura sullo spin dell'elettrone, la funzione d'onda collassa, la particella assume una determinata caratteristica e ci fornisce un particolare risultato, ma tutto ciò è un problema. Infatti, se l'elettrone assume spin up, allora "deve comunicarlo" al positrone che assume spin down. Einstein disse che questa "sinistra azione a distanza" è assurda ed è il motivo per cui la posizione realista è l'unica che permette che la Meccanica Quantistica non rompa la **località** permettendo a delle informazioni di viaggiare a velocità più veloci della luce.

Si potrebbe rispondere che l'informazione, su una misura di una delle due particelle, non viaggia a velocità superluminari, ma a velocità finite e per

questo la località sia salva. Però questo ragionamento fallisce sul versante della conservazione del momento angolare, poiché nel momento in cui si esegue una misura su e^- e parte l'informazione su tale misura, allora se si riuscisse a misurare lo spin di e^+ potremmo avere, nel 50% dei casi, di avere entrambe le particelle con stesso spin.

Ad ogni modo importa poco la posizione che si prenda, gli esperimenti non lasciano dubbi: non ci sono violazioni di nessun tipo, la anti-correlazione degli spin è sempre rispettata. Il collasso della funzione d'onda, qualunque status ontologico si voglia assumere, è istantaneo.

5.2.1 Il teorema di Bell

L'accusa alla Meccanica Quantistica del paradosso EPR non è mai stata quella di essere una teoria sbagliata, ma semplicemente una descrizione incompleta della natura. Infatti la visione realista assume che debba esistere una qualche altra variabile λ che unita alla funzione d'onda ψ dia una descrizione completa del sistema fisico. Chiamiamo λ **variabile nascosta** poiché non ne conosciamo né la natura né il modo di misurarla, per questo λ può essere qualsiasi cosa, un numero, una lista di elementi o ciò che vuole. Nel corso degli anni si sono costruite diverse teorie a variabili nascoste per estendere la Meccanica Quantistica, ma nel 1964 J. S. Bell, durante un anno sabbatico preso dal CERN di Ginevra, dimostrò che *qualsiasi* teoria delle variabili nascoste è incompatibile con la Meccanica Quantistica.

Bell suggerì una generalizzazione del paradosso EPRB. Al posto di fare misure di spin di elettrone e positrone lungo una stessa direzione, Bell propose di permettere qualche libertà in più alle misure. Bell permise ai rivelatori di elettrone e positrone di ruotare indipendentemente; il primo misurava la componente di spin lungo una direzione $\vec{a}$, mentre il secondo lungo $\vec{b}$. Potendo misurare gli spin in direzioni generiche i risultati non erano obbligatoriamente opposti; infatti delle possibili misure, viste in unità di $\hbar/2$, sono scritte nella tabella 5.1.

elettrone	positrone	prodotto
+1	-1	-1
+1	+1	+1
-1	+1	-1
+1	-1	-1
-1	-1	+1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabella 5.1

Bell propose di calcolare il valore medio del prodotto degli spin, per un dato insieme di orientazioni dei rivelatori, che chiama $P(\vec{a}, \vec{b})$. Ovviamente se $\vec{a} = \vec{b}$, ovvero i rivelatori sono paralleli, allora dovremmo ritrovare la situazione di EPR e dunque:

$$P(\vec{a}, \vec{a}) = -1. \quad (5.2.2)$$

Se i rivelatori sono anti-paralleli, dunque $\vec{a} = -\vec{b}$, allora ogni prodotto è $+1$, per cui:

$$P(\vec{a}, -\vec{a}) = +1. \quad (5.2.3)$$

Per orientazioni arbitrarie di $\vec{a}$ e $\vec{b}$ avremo:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (5.2.4)$$

Tale risultato è dimostrabile essere incompatibile con la Meccanica Quantistica.

Supponiamo che lo stato completo del sistema elettrone-positrone è determinato anche da qualche variabile nascosta λ , che non siamo in grado di determinare. Possiamo ragionevolmente pensare che una misura sull'elettrone sia completamente indipendente dall'orientamento $\vec{b}$ del rivelatore del positrone³. Abbiamo quindi che $A(\vec{a}, \lambda)$ determina il risultato della misura dell'elettrone e $B(\vec{b}, \lambda)$ che determina quella del positrone. Tali funzioni possono assumere solo valori ± 1 :

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1 \quad , \quad B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1. \quad (5.2.5)$$

Se i rivelatori sono allineati, allora abbiamo i risultati completamente anti-correlati:

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda) \quad (5.2.6)$$

indipendentemente dal valore di λ . Se calcoliamo la media del prodotto degli spin che Bell cercava otteniamo:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) d\lambda \quad (5.2.7)$$

in cui $\rho(\lambda)$ è una qualche densità di probabilità per la variabile nascosta.⁴ Utilizzando (5.2.6), immaginando di prendere un rivelatore in A allineato

³Che può essere scelto dallo sperimentatore vicino e^+ appena dopo la misura dell' e^- e in modo sufficientemente veloce da non permettere al messaggio subluminaire, che contiene l'informazione dello spin, di raggiungere e^+ . Questa è l'assunzione della località.

⁴Non facciamo nessuna assunzione su $\rho(\lambda)$ apparte il fatto che, oltre ad essere una quantità positiva, si normalizzata ad 1:

$$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1. \quad (5.2.8)$$

con $\vec{b}$, possiamo eliminare B e scrivere:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \int \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) d\lambda \quad (5.2.9)$$

se consideriamo un qualsiasi altro vettore unitario $\vec{c}$, allora possiamo scrivere:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) = - \int \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] d\lambda \quad (5.2.10)$$

possiamo raccogliere il termine $A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda)$, e sfruttando il fatto che $|A(\vec{b}, \lambda)|^2 = 1$, scrivere:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) = - \int \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) d\lambda \quad (5.2.11)$$

utilizzando i valori (5.2.5) possiamo dire che:

$$|A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda)|^2 = 1 \quad (5.2.12)$$

e conseguentemente possiamo dire:

$$\rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \geq 0 \quad (5.2.13)$$

per cui il modulo di (5.2.11) è:

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq \int \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] d\lambda \quad (5.2.14)$$

o più semplicemente:

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \quad (5.2.15)$$

che è la famosa **disuguaglianza di Bell**. La disuguaglianza (5.2.15) vale per una qualsiasi teoria delle variabili nascoste, che abbia le stesse condizioni (5.2.5) e (5.2.6), visto che non abbiamo vincolato nulla delle nostre variabili nascoste o della loro densità ρ . Il punto dell'articolo di Bell è proprio che (5.2.15) è in disaccordo con la MQ poiché se prendiamo $\vec{c}$ un vettore a 45° tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, come in figura 5.3, allora abbiamo i risultati:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad , \quad P(\vec{a}, \vec{c}) = P(\vec{b}, \vec{c}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0.707 \quad (5.2.16)$$

e chiaramente mettendo i valori dentro (5.2.15) abbiamo:

$$0.707 \not\leq 1 - 0.707 = 0.293. \quad (5.2.17)$$

Dunque, il paradosso EPRB era partito per dimostrare che la Meccanica Quantistica fosse una teoria incompleta, ma è finito per dimostrare, grazie

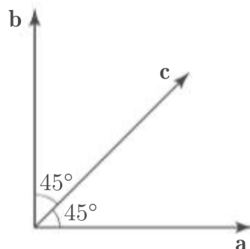


Figura 5.3

a Bell⁵, che nel caso in cui fosse effettivamente vero che esistano delle variabili nascoste, allora non solo la MQ è una teoria incompleta, ma del tutto sbagliata. Allo stesso tempo però, se la MQ è corretta, allora nessuna teoria a variabili nascoste può aiutarci a spiegare la non località che Einstein invocava.

La conferma della correttezza della Meccanica Quantistica chiuse il dibattito tra realisti e ortodossi. Nonostante la posizione realista non fosse più una strada perseguibile ci furono (e ancora ora) alcune teorie delle variabili nascoste *non locali*⁶ prese in considerazione dai fisici. Tali teorie non hanno molto senso di essere apprese.

Il problema però non è del tutto risolto, infatti la posizione ortodossa implica una teoria quantistica non locale. Il collasso istantaneo della funzione d'onda, dal momento in cui ci fu la prova sperimentale della correttezza della MQ, passò dall'essere un artefatto del formalismo teorico della teoria, senza conseguenze rilevabili, che non rendeva la teoria locale ad un problema serio.

Non abbiamo detto perché una teoria non locale non piace ai fisici. Il Griffiths God used very advanced mathematics in constructin the universe. Griffiths fa come esempio un insetto che si muove nei pressi di un proiettore, la cui ombra si muove ad una velocità proporzionale alla distanza da esso. Potendo mettere lo schermo sufficientemente distante possiamo avere un'ombra che si muove a velocità superluminari. Il punto è che un'ombra non trasporta energia o informazione. Se fosse possibile per un effetto *causale* propagarsi più velocemente della luce, allora questo porterebbe a conseguenze inaccettabili. Questo è dimostrato nel libro di Barone God used very

⁵Il Griffiths indica il fatto che la scoperta di Bell fu' una delle scoperte più importanti del XX secolo. Le disuguaglianze di Bell furono ampiamente dimostrate intorno agli anni '60 e '70 del secolo scorso.

⁶È ancora più assurdo che il paradosso che voleva porre il realismo come unica interpretazione possibile affinché venisse rispettata la località, abbiamo portato alla nascita di teorie non locali.

advanced mathematics in constructin the universe. Barone, in cui mostra che affinché il rapporto causa-effetto sia rispettato, allora tutti i segnali causali devono viaggiare a velocità inferiore a quella della luce. Per cui possiamo distinguere due tipi di effetti: quelli causali, che producono reali cambiamenti in qualche proprietà fisica del ricevitore, e quelli eterei, che non trasmettono energia o informazione. A questo punto dovremmo chiederci: *gli effetti superluminari predetti dalla Meccanica Quantistica sono effetti causali oppure sono qualcosa di etereo (come l'ombra dell'insetto) da sfuggire all'obiezione filosofica?*

Nell'esperimento di Bell, una misura sull'elettrone chiaramente influenza una misura sul positrone. Però notiamo che una misura di e^- non *causa* un particolare risultato sulla misura di e^+ . Lo sperimentatore che lavora con l'elettrone non può in nessun modo influenzare la misura e fare in modo che esca un particolare risultato (così come un qualche sperimentatore che si trovi in un certo punto dello schermo su cui è proiettata l'ombra dell'insetto non può influenzare l'ombra). La correlazione dei dati che vengono dalle misure di elettrone e positrone avviene solamente quando i due sperimentatori, che hanno fatto gli esperimenti indipendentemente, vengono confrontate. Però ricorda che le due liste separatamente sono completamente casuali. Tutto questo ragionamento potrebbe sembrare più chiaro, e non apparire come un paradosso, se ad esempio immaginiamo di fare una misura sull'elettrone e successivamente una misura sul positrone. Saremmo tentati di dire che la misura su e^- ha influenzato e^+ , però cambiando sistema di riferimento l'ordine delle misure è invertito, per cui vediamo che la correlazione è simmetrica nella trattazione ed è indifferente dire che l'osservazione dell'elettrone abbia influenzato il positrone o viceversa.

Dunque possiamo concludere che ciò che vediamo in Meccanica Quantistica sono effetti *eterei*, che non trasmettono alcunché e la cui manifestazione è la correlazione tra i dati presi su due sottosistemi differenti separati.

5.3 Il gatto di Schrödinger

È un argomento non affrontato in aula, nonostante l'incredibile popolarità del soggetto. Nel capitolo §12.5 del Griffiths *God used very advanced mathematics in constructin the universe*. Griffiths puoi leggere una piccola trattazione dell'argomento, una discussione del ruolo della misura in Meccanica Quantistica e una spiegazione di che cos'è la **decoerenza quantistica**.

Appendici

Appendice A

Digressione sulla δ di Dirac

Facciamo in quest'appendice una breve digressione/ripasso sulla δ di Dirac utile per la sezione §2.4.

Sappiamo che:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} = \delta(x) \quad (\text{A.0.1})$$

in cui α è la larghezza gaussiana. L'espressione (A.0.1) ci dice che se sviluppiamo il termine $e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}/\sqrt{2\pi\alpha}$ in potenze di α , allora il termine di ordine 0 è la $\delta(x)$. Proviamo a fare lo sviluppo di $e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}/\sqrt{2\pi\alpha}$ e vedere cosa esce al primo termine:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} = \delta(x) + \alpha \frac{d}{d\alpha} \left\{ \frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \right\}_{\alpha=0} \quad (\text{A.0.2})$$

$$= \delta(x) + \alpha \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left\{ \frac{x^2}{2\alpha^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha} \right\} \right]_{\alpha=0} \quad (\text{A.0.3})$$

$$= \delta(x) + \alpha \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{2\sqrt{2\pi\alpha}} \left\{ \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right\} \right]_{\alpha=0} \quad (\text{A.0.4})$$

valutiamo la derivata prima a $\alpha = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} = \delta(x) + \frac{\alpha}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left\{ \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right\}. \quad (\text{A.0.5})$$

Dobbiamo a questo punto notare che:

$$\frac{d}{dx} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \quad (\text{A.0.6})$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left(\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (\text{A.0.7})$$

La relazione (A.0.7) ci permette di riscrivere lo sviluppo (A.0.4) con dentro una derivata seconda in x , il che è utile perché così possiamo scambiare limite e derivata, essendo tutte distribuzioni che permettono di spostare i pezzi a piacimento, e ottenere:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} = \delta(x) + \frac{\alpha}{2} \frac{d^2}{dx^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \quad (\text{A.0.8})$$

in cui si palesa la definizione (A.0.1). Lo sviluppo è dunque:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} = \delta(x) + \frac{\alpha}{2} \delta''(x) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (\text{A.0.9})$$

Appendice B

Dimostrazione valore $\zeta'(0)$

Dimostriamo in questa sezione la relazione:

$$\zeta'(0) = \zeta(0) \log(2\pi) \quad (\text{B.0.1})$$

Utilizzando diverse cose apprese in corsi precedenti e dove non specificato si faccia riferimento agli appunti di Metodi 2. Partiamo da:

$$\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \frac{e^{i\pi s}}{2\pi i} \int_{C_H} dz \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \quad (\text{B.0.2})$$

in cui C_H è il cammino di Hankel, ed è una relazione che abbiamo visto e dimostrato al corso di Metodi 2. Facciamo la derivata e valutiamola per $s = 1$:

$$\left. \frac{d}{ds} \left(\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} \right) \right|_{s=1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_H} \frac{dz}{z} \frac{(e^{-i\pi} z)^s}{e^z - 1} (\log z - i\pi) \Big|_{s=1} \quad (\text{B.0.3})$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_H} \frac{dz}{e^z - 1} (\log z - i\pi) \quad (\text{B.0.4})$$

possiamo stare nella regione in cui ζ converge, in cui $C_H \rightarrow (0, +\infty)$, ma in essa, con $s = 1$, potremmo avere problemi. Spezziamo il cammino C_H in 3 pezzi:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \text{sotto} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \text{sopra} + \oint_{C_{\varepsilon}} \quad (\text{B.0.5})$$

in cui avremo:

sopra: $z \in \mathbb{R}$

sotto: $ze^{2i\pi}$

e ricordando come fare gli integrali di Metodi 2:

$$\left. \frac{d}{ds} \left(\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} \right) \right|_{s=1} = \int_{\varepsilon}^{\infty} dz (\text{sopra} - \text{sotto}) + \oint_{C_{\varepsilon}} dz \quad (\text{B.0.6})$$

il primo dei due termini viene:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} dz \text{ (sopra - sotto)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dz}{e^z - 1} (\log z - i\pi - \log z e^{2i\pi} + i\pi) \quad (\text{B.0.7})$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dz}{e^z - 1} (\log z - \log z - 2\pi i) \quad (\text{B.0.8})$$

$$= \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dz}{e^z - 1} \quad (\text{B.0.9})$$

$$= \int_{\varepsilon}^{\infty} dz \frac{e^{-z}}{1 - e^{-z}} \quad (\text{B.0.10})$$

$$= \log(1 - e^{-z}) \quad (\text{B.0.11})$$

$$\sim \log(\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \quad (\text{B.0.12})$$

$$\sim \log \varepsilon \quad (\text{B.0.13})$$

il secondo termine, parametrizzando:

$$z = \rho e^{i\varphi + i\pi} \quad (\text{B.0.14})$$

viene:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\varepsilon}} \frac{dz}{e^z - 1} (\log z - i\pi) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\varepsilon}} \frac{dz}{e^z - 1} (\log \varepsilon + i\varphi + i\pi - i\pi) \quad (\text{B.0.15})$$

$$= -\frac{\log \varepsilon}{2\pi i} \oint_{C_{\varepsilon}} \frac{dz}{e^z - 1} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\varepsilon}} \frac{dz}{e^z - 1} i\varphi}_{\rightarrow 0 \text{ se } \varepsilon \rightarrow 0} \quad (\text{B.0.16})$$

$$\sim -\log \varepsilon. \quad (\text{B.0.17})$$

Dunque otteniamo:

$$\left. \frac{d}{ds} \left(\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} \right) \right|_{s=1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \text{cost} \quad \text{in } s = 1. \quad (\text{B.0.18})$$

Possiamo ricordare la relazione funzionale della $\zeta(s)$:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \quad (\text{B.0.19})$$

che ci permette di dire:

$$\frac{d}{ds} \left[2(2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \right]_{s=1} = 0 \quad (\text{B.0.20})$$

implementando i conti:

$$\left[\log(2\pi) - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} + \frac{\pi \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)} \right]_{s=1} = 0 \quad (\text{B.0.21})$$

$$\log(2\pi) = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \quad (\text{B.0.22})$$

e possiamo concludere che:

$$\zeta'(0) = \zeta(0) \log(2\pi) \quad (\text{B.0.23})$$

come volevamo.

Appendice C

Funzione di Green

In questa appendice voglio raccogliere un paio di informazioni riguardo le funzioni di Green viste nella sezione §4.3.

C.1 Normalizzazione di una funzione di Green

Nella nostra trattazione indichiamo:

$$O = \nabla^2 + k^2 \quad (\text{C.1.1})$$

l'operatore che compare nella nostra equazione differenziale; e abbiamo l'operatore di Green scritto come:

$$G_{\pm}(r) = A \frac{e^{\pm ikr}}{r} \quad (\text{C.1.2})$$

Possiamo fare il prodotto scalare, usando una funzione di prova:

$$(O G, f) = (G, O f) = A \int dV \frac{e^{ikr}}{r} O f(\mathbf{x}) \quad (\text{C.1.3})$$

$$\equiv A I \quad (\text{C.1.4})$$

in cui abbiamo indicato con I l'integrale che compare. Possiamo calcolare:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{est} S_{\varepsilon}^2 dV \frac{e^{ikr}}{r} O f(\mathbf{x}) \quad (\text{C.1.5})$$

in cui integriamo all'esterno di una sfera, che non comprende l'origine, che raffiguriamo in figura C.1.

Notando che vale:

$$\left(O \frac{e^{ikr}}{r} \right) f = 0 \quad (\text{C.1.6})$$

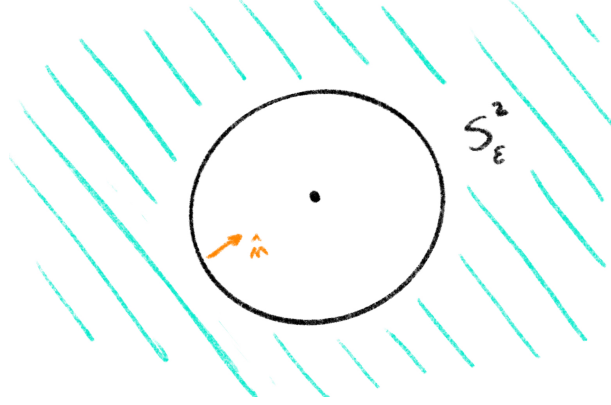


Figura C.1

possiamo tranquillamente scrivere:

$$\frac{e^{ikr}}{r} \mathcal{O} f - \left(\mathcal{O} \frac{e^{ikr}}{r} \right) f = \frac{e^{ikr}}{r} \Delta f - \left(\Delta \frac{e^{ikr}}{r} \right) f \quad (\text{C.1.7})$$

$$= \partial_i \left[\frac{e^{ikr}}{r} \partial^i f - \left(\partial^i \frac{e^{ikr}}{r} \right) f \right] \quad (\text{C.1.8})$$

$$= \partial_i A^i \quad (\text{C.1.9})$$

$$= \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (\text{C.1.10})$$

in cui $\mathbf{A}$ non è la costante di normalizzazione di (C.1.2). Scriviamo quindi:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{est} \int_{S_\varepsilon^2} dV \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (\text{C.1.11})$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^2} ds \mathbf{A} \cdot \hat{n}. \quad (\text{C.1.12})$$

Notiamo che dentro $\mathbf{A}$ abbiamo un termine che si può scrivere come:

$$\vec{\partial} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot \hat{n} = -\partial_r \frac{e^{ikr}}{r} \quad (\text{C.1.13})$$

$$\frac{e^{ikr}}{r^2} i k \frac{e^{ikr}}{r} \quad (\text{C.1.14})$$

per cui, notando che sulla sfera abbiamo $r = \varepsilon$ e $ds = \varepsilon^2 d\Omega$, abbiamo:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^2} ds \left[\frac{e^{ikr}}{r} \nabla f \cdot \hat{n} - \left(\frac{e^{ikr}}{r^2} - ik \frac{e^{ikr}}{r} \right) f \right] \quad (\text{C.1.15})$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_{S_\varepsilon^2} d\Omega \left[\underbrace{\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \nabla f \cdot \hat{n} - \left(\underbrace{\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2}}_{\substack{\varepsilon^2 \varepsilon^{-2} = 1 \\ e^{ik\varepsilon} \rightarrow 0}} - ik \underbrace{\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \right) f \right] \quad (\text{C.1.16})$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^2} d\Omega (-f) \quad (\text{C.1.17})$$

$$= -4\pi f(0) \quad (\text{C.1.18})$$

in cui abbiamo usato il fatto che f sia una funzione di prova, quindi continua, regolare e senza singolarità. Abbiamo quindi trovato la costante di normalizzazione di (C.1.2).

C.2 Funzione di Green nello spazio degli impulsi

Abbiamo visto che:

$$\tilde{G}(\mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{k^2 - k'^2} \quad (\text{C.2.1})$$

ha due poli in $k' = \pm k$ e abbiamo definito:

$$\tilde{G}_\pm(\mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{k^2 - k'^2 \pm i\varepsilon} \quad (\text{C.2.2})$$

che a sua volta ha due poli in:

$$k'^2 = k^2 \pm i\varepsilon \implies k' = \pm \left(k + \frac{i}{2} \varepsilon' \right) \quad (\text{C.2.3})$$

rappresentabili nel piano complesso di k' in figura C.2.

Proviamo a fare la trasformata di Fourier e ad integrare:

$$G_{+\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k' e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \tilde{G}_{+\varepsilon}(\mathbf{k}') \quad (\text{C.2.4})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \frac{1}{k^2 - k'^2 + i\varepsilon} \quad (\text{C.2.5})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \frac{-1}{(k' - k - \frac{i}{2} \varepsilon) (k' + k + \frac{i}{2} \varepsilon)} \quad (\text{C.2.6})$$

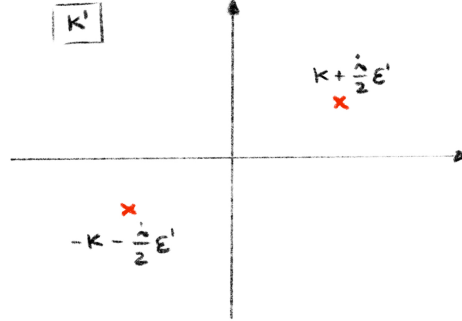


Figura C.2

se passiamo in coordinate polari vediamo:

$$G_{+\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dk' k'^2 \frac{-e^{ik'|\mathbf{x}| \cos \theta}}{(k' - k - \frac{i}{2}\varepsilon)(k' + k + \frac{i}{2}\varepsilon)} \quad (\text{C.2.7})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dk' k'^2 \frac{-e^{k' r \cos \theta}}{(k' - k - \frac{i}{2}\varepsilon)(k' + k + \frac{i}{2}\varepsilon)} \quad (\text{C.2.8})$$

possiamo fare il cambio $x = \cos \theta$, così abbiamo:

$$\int d\theta \sin \theta \longrightarrow \int dx \quad (\text{C.2.9})$$

in questo modo compare l'integrale:

$$\int_0^\pi d(\cos \theta) e^{ik' r \cos \theta} \longrightarrow - \int_{-1}^{+1} dx e^{ik' r x} = - \frac{e^{ik' r x}}{ik' r} \Big|_{-1}^{+1} \quad (\text{C.2.10})$$

$$= \frac{i}{k' r} \left(e^{ik' r} - e^{-ik' r} \right) \quad (\text{C.2.11})$$

e dunque:

$$G_{+\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk' k'^2 \frac{i}{k' r} \frac{e^{ik' r} - e^{-ik' r}}{(k' - k - \frac{i}{2}\varepsilon)(k' + k + \frac{i}{2}\varepsilon)} \quad (\text{C.2.12})$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty dk' k' \frac{e^{ik' r} - e^{-ik' r}}{(k' - k - \frac{i}{2}\varepsilon)(k' + k + \frac{i}{2}\varepsilon)} \quad (\text{C.2.13})$$

se separiamo i due esponenziali e nel secondo facciamo il cambio $k' \leftrightarrow -k'$, allora giungiamo a:

$$G_{+\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dk' k' \frac{e^{ik' r}}{(k' - k - \frac{i}{2}\varepsilon)(k' + k + \frac{i}{2}\varepsilon)} \quad (\text{C.2.14})$$

usiamo il lemma di Jordan chiudendo nel semipiano superiore:

$$G_{+\varepsilon}(\mathbf{x}) = 2\pi i \operatorname{Res} \left\{ \frac{i}{(2\pi)^2 r} k' \frac{e^{ik' r}}{(k' - k - \frac{i}{2} \varepsilon) (k' + k + \frac{i}{2} \varepsilon)} \right\}_{k'=k+\frac{i}{2}\varepsilon} \quad (\text{C.2.15})$$

$$= -\frac{1}{2\pi r} \operatorname{Res} \left\{ k' \frac{e^{ik' r}}{(k' - k - \frac{i}{2} \varepsilon) (k' + k + \frac{i}{2} \varepsilon)} \right\}_{k'=k+\frac{i}{2}\varepsilon} \quad (\text{C.2.16})$$

$$= -\frac{1}{2\pi r} \left(k + \frac{i}{2} \varepsilon \right) \frac{e^{i(k+\frac{i}{2}\varepsilon)r}}{2(k + \frac{i}{2}\varepsilon)} \quad (\text{C.2.17})$$

$$= -\frac{e^{i(k+\frac{i}{2}\varepsilon)r}}{4\pi r}. \quad (\text{C.2.18})$$

Dunque:

$$G_+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_{+\varepsilon}(r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (\text{C.2.19})$$

Appendice D

Densità di correnti

Vediamo in questa Appendice i conti delle correnti di probabilità.

D.1 Componenti angolari di $\mathbf{J}_{out}$

Ricordiamo che valgono:

$$\nabla_r = \frac{\partial}{\partial r} \quad , \quad \nabla_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad , \quad \nabla_\varphi = \frac{1}{r} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (\text{D.1.1})$$

La componente radiale di $\mathbf{J}_{out}$ la abbiamo già calcolata nella sezione §4.3.1.

La componente θ è:

$$(\mathbf{J}_{out})_\theta d\mathbf{A} = -\frac{i\hbar}{2m} |a|^2 \frac{1}{r^2} \left[f^*(\theta, \varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, \varphi) - f(\theta, \varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f^*(\theta, \varphi) \right] r^2 d\Omega \quad (\text{D.1.2})$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m} |a|^2 \frac{1}{r} 2i \operatorname{Im} \left\{ f^*(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, \varphi) \right\} \quad (\text{D.1.3})$$

$$= \frac{\hbar}{m} |a|^2 \frac{1}{r} \operatorname{Im} \left\{ f^*(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, \varphi) \right\} \quad (\text{D.1.4})$$

mentre quella dell'angolo φ :

$$(\mathbf{J}_{out})_\varphi d\mathbf{A} = -\frac{i\hbar}{2m} |a|^2 \frac{1}{r^3} \frac{1}{\sin^3 \theta} 2i \operatorname{Im} \left\{ f^*(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} f(\theta, \varphi) \right\} \quad (\text{D.1.5})$$

$$= \frac{\hbar}{m} |a|^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{r} \operatorname{Im} \left\{ f^*(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} f(\theta, \varphi) \right\}. \quad (\text{D.1.6})$$

Vediamo dalle espressioni (D.1.4) e (D.1.6) che le componenti θ e φ hanno un andamento $1/r$, che nel nostro caso, in cui guardiamo ad r grandi, sono trascurabili rispetto al termine $(\mathbf{J}_{out})_r$. Per questo consideriamo la corrente scatterata solamente nella direzione radiale.

D.2 Caso di angoli piccoli

Abbiamo calcolato nella sezione §4.3.1:

$$\mathbf{J}_{in} = \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} |a|^2 \quad (\text{D.2.1})$$

$$\mathbf{J}_{out}^r = \frac{\hbar k}{m} |a|^2 \frac{1}{r^2} |f(\theta, \varphi)|^2 \quad (\text{D.2.2})$$

in cui abbiamo separato le parti in e out, ma in generale, non separando nulla, dovremmo scrivere:

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{m} \text{Im}\{\psi^* \nabla \psi\} \quad (\text{D.2.3})$$

$$= \frac{\hbar}{m} \text{Im}\{(\psi_{in}^* + \psi_{out}^*) \nabla (\psi_{in} + \psi_{out})\} \quad (\text{D.2.4})$$

facendo i conti completi dovremmo trovare 3 termini all'interno di $\mathbf{J}$, che sono i termini in e out insieme ad un termine di interferenza, che sarebbe il termine in cui da (D.2.4) prendiamo i termini misti:

$$\mathbf{J}_{interf} = \frac{\hbar}{m} \text{Im}\{\psi_{in}^* \nabla \psi_{out} + \psi_{out}^* \nabla \psi_{in}\} \quad (\text{D.2.5})$$

di cui possiamo calcolare la componente radiale:

$$J_{interf}^r = \frac{\hbar}{m} \text{Im}\left\{\psi_{in}^* \frac{\partial}{\partial r} \psi_{out} + \psi_{out}^* \frac{\partial}{\partial r} \psi_{in}\right\} \quad (\text{D.2.6})$$

$$= \frac{\hbar}{m} |a|^2 \text{Im}\left\{e^{-ikr \cos \theta} f(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} + f^*(\theta, \varphi) \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial r} e^{ikr \cos \theta}\right\} \quad (\text{D.2.7})$$

$$= \frac{\hbar}{m} |a|^2 \text{Im}\left\{i \left(f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr(1-\cos \theta)}}{r} + f^*(\theta, \varphi) \frac{\cos \theta e^{ikr(\cos \theta - 1)}}{r}\right)\right\} \quad (\text{D.2.8})$$

$$= \frac{\hbar k}{m r} |a|^2 \text{Im}\left\{i \left(\cos \theta f^*(\theta, \varphi) e^{ikr(\cos \theta - 1)} + f(\theta, \varphi) e^{ikr(1-\cos \theta)}\right)\right\} \quad (\text{D.2.9})$$

in cui nel passaggio (D.2.8) abbiamo trascurato i termini di derivata dei fattori $1/r$, che sono trascurabili. Quello che abbiamo trovato per (D.2.9) però vale per un certo k fissato, ma noi tratteremo sempre dei pacchetti d'onda, che costruiamo integrando su tutti i k possibili; quando integriamo sui k , gli esponenziali oscillano fortissimo (lemma di Riemann) e vanno a zero.

Quindi, ignoriamo il termine J_{interf}^r sempre, a meno del caso in cui non siamo a $\theta = 0$, che corrisponde a mettersi in una situazione tipo quella di figura D.1.



Figura D.1

Quando ci mettiamo con il rivelatore in un punto a distanza angolare piccola rispetto la direzione del fascio incidente, abbiamo:

$$d\Omega : 0 < \varphi < 2\pi \quad (D.2.10)$$

$$0 \leq \theta < \delta\theta \ll \pi/2 \quad / \quad \cos \delta\theta = 1 - \frac{1}{2}\delta\theta^2. \quad (D.2.11)$$

e di conseguenza vale:

$$\cos \theta \sim 1 \quad (D.2.12)$$

$$f(\theta) \sim f(0) \quad (D.2.13)$$

$$e^{ikr(\cos \theta - 1)} \sim e^{ikr(-\frac{1}{2}\delta\theta^2)}. \quad (D.2.14)$$

Vediamo quanto vale il flusso di J_{interf}^r nel caso di simmetria cilindrica:

$$f(\theta, \varphi) = f(\theta). \quad (D.2.15)$$

Il flusso è:

$$\Phi_{interf}^{avanti} = \int r^2 d\Omega J_{interf}^r \quad (D.2.16)$$

$$= \frac{\hbar k r}{m} |a|^2 2\pi \operatorname{Im} \left\{ i f^*(0) \int_{1-\frac{1}{2}\delta\theta^2}^1 dx e^{ikr(x-1)} + i f(0) \int_{1-\frac{1}{2}\delta\theta^2}^1 dx e^{-ikr(x-1)} \right\} \quad (D.2.17)$$

possiamo vedere che all'interno compare l'integrale:

$$\int_a^1 dx e^{ikr(x-1)} = e^{-ikr} \frac{e^{ikrx}}{ikr} \Big|_a^1 \quad (D.2.18)$$

$$= \frac{e^{-ikr}}{ikr} (e^{ikr} - e^{ikra}) \quad (D.2.19)$$

$$= \frac{1}{ikr} (1 - e^{ikr(a-1)}) \quad (D.2.20)$$

$$a = 1 - \frac{1}{2}(\delta\theta)^2 \implies = \frac{1}{ikr} (1 - e^{-ikr(\delta\theta)^2}) \quad (D.2.21)$$

$$\sim \frac{i}{kr} \quad (D.2.22)$$

dunque:

$$\Phi_{interf}^{avanti} = \frac{\hbar k r}{m} |a|^2 2\pi \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{kr} (f^*(0) - f(0)) \right\} \quad (\text{D.2.23})$$

$$= \frac{\hbar k r}{m k r} |a|^2 2\pi \operatorname{Im} \{ f^*(0) - f(0) \} \quad (\text{D.2.24})$$

$$= \frac{\hbar k}{m} |a|^2 \operatorname{Im} \left\{ \frac{2\pi}{k} (-2) \operatorname{Im} \{ f(0) \} \right\} \quad (\text{D.2.25})$$

$$= \frac{\hbar k}{m} |a|^2 \operatorname{Im} \left\{ -\frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} \{ f(0) \} \right\}. \quad (\text{D.2.26})$$

Se supponiamo che $\operatorname{Im} \{ f(0) \} > 0$, allora questo implica che $\Phi_{interf}^{avanti} < 0$, il che significa che abbiamo una diminuzione del flusso totale, il che è logico se ragioniamo in modo classica: partiamo con un fascio di particelle dirette in una certa direzione, incontrano un'ostacolo, controlliamo quante particelle sono passate indisturbate e vediamo che sono meno di quelle che erano partite. Il motivo di $\Phi_{interf}^{avanti} < 0$ è che il potenziale di interazione ci toglie delle particelle dal flusso e lo fa sparandole in altre direzioni.

D.2.1 Equazione di continuità

Noi stiamo considerando un caso stazionario, e dunque un caso in cui la probabilità si conserva e deve valere un'equazione di continuità. Verifichiamo che il flusso entrante in una certa superficie è uguale a quello uscente, ossia:

$$\int_S ds \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (\text{D.2.27})$$

Prendiamo una sfera e per cui:

$$\int d\Omega r^2 \mathbf{J}^r = 0 \quad (\text{D.2.28})$$

$$\int d\Omega r^2 (\mathbf{J}_{in}^r + \mathbf{J}_{out}^r + \mathbf{J}_{interf}^r) = 0. \quad (\text{D.2.29})$$

Dobbiamo proiettare le correnti lungo la direzione radiale. Abbiamo visto in questa stessa appendice il flusso di J_{interf}^r trovando (D.2.26); abbiamo l'espressione radiale della corrente J_{out}^r (D.2.2); e possiamo notare una cosa

importante a cui ci porta $\mathbf{J}_{in}$ (D.2.1), ovvero che la proporzionalità:

$$\int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) J_{in}^r = \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \mathbf{J}_{in} \cdot \hat{r} \quad (D.2.30)$$

$$\propto \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \mathbf{k} \cdot \hat{r} \quad (D.2.31)$$

$$\propto \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) |\mathbf{k}| \cos \theta \quad (D.2.32)$$

$$\propto \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \cos \theta \quad (D.2.33)$$

$$= 0 \quad (D.2.34)$$

ci dice che il flusso di J_{in}^r non dà contributo. Dunque il nostro flusso (D.2.29) è:

$$\int d\Omega r^2 (J_{in}^r + J_{out}^r + J_{interf}^r) = \int d\Omega r^2 J_{out}^r + \frac{\hbar k}{m} |a|^2 \operatorname{Im} \left\{ -\frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}\{f(0)\} \right\} \quad (D.2.35)$$

calcoliamo dunque il flusso di J_{out}^r . Ci ricordiamo (D.2.2) e integriamo:

$$\int d\Omega r^2 J_{out}^r = \int d\Omega r^2 \frac{\hbar k}{m} |a|^2 \frac{1}{r^2} |f(\theta, \varphi)|^2 \quad (D.2.36)$$

$$= \frac{\hbar k}{m} |a|^2 \int d\Omega |f(\theta, \varphi)|^2 \quad (D.2.37)$$

se reinseriamo in (D.2.35):

$$0 = \frac{\hbar k}{m} |a|^2 \int d\Omega |f(\theta, \varphi)|^2 + \frac{\hbar k}{m} |a|^2 \operatorname{Im} \left\{ -\frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}\{f(0)\} \right\} \quad (D.2.38)$$

$$\implies \int d\Omega |f(\theta, \varphi)|^2 = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}\{f(0)\} \quad (D.2.39)$$

che se ricordiamo la relazione (4.3.64) allora possiamo quello noto come **teorema ottico**:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}\{f(0)\}. \quad (D.2.40)$$