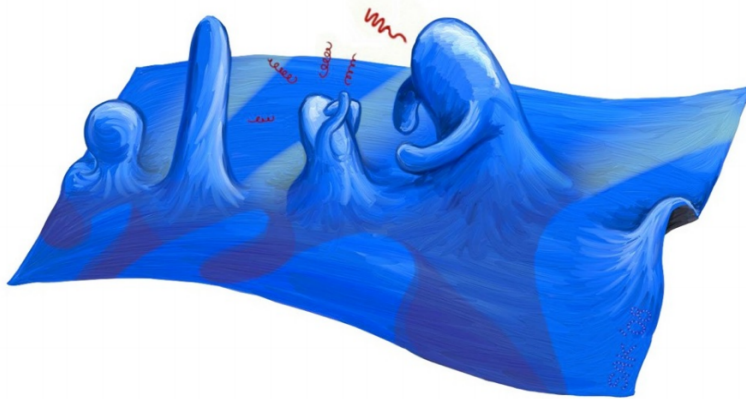


Appunti del corso di:

Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi

Gabriele Cembalo

A.A. 2025-2026



Università degli Studi di Torino
Dipartimento di Fisica
Via Giuria, 1, Torino (TO)

Physical law should have
mathematical beauty.

P. A. M. Dirac

Prefazione

In questo documento intendo raccogliere i miei appunti basati sul materiale del corso “**Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi**”, tenuto dal Prof. M. Boglione e seguito presso *Università degli Studi di Torino* nell’anno accademico 2025-2026. Durante il corso sono stati consigliati diversi libri (elencati in Bibliografia), e cercherò di indicare i riferimenti corrispondenti all’inizio di ogni capitolo.

Questi appunti sono una versione riscritta delle note prese durante le lezioni, quindi la fonte principale è il materiale presentato dal professore. Declino ogni responsabilità e rimando alla mia pagina personale per saperne di più su questi appunti e sul fatto che non hanno natura né accademica né didattica.

Questi appunti vanno chiaramente intesi come note personali, riscritte in maniera ordinata a partire dalle lezioni. Eventuali sviste, errori o imprecisioni sono dovuti ai miei limiti. Inoltre, ho scritto questi appunti principalmente per “spiegare” a me stesso l’argomento, quindi alcune sezioni potrebbero risultare eccessivamente dettagliate o, al contrario, troppo superficiali a seconda del lettore. In ogni caso, spero possano comunque essere utili a qualcuno. Spero anche di essere riuscito a produrre un documento chiaro e ben strutturato.

Una raccolta dei miei appunti è disponibile sulla mia pagina GitHub personale: gCembalo.github.io.

Eventuali errori o refusi possono essere segnalati alla mia email personale: g70362643@gmail.com.

Last update: 03/12/2025

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Si può relativizzare l'equazione di Schrodinger?	2
1.2	Il tempo è una coordinata o un parametro?	6
1.3	L'idea del mare di Dirac	8
1.4	Piano di lavoro	11
2	Richiami di Relatività Speciale	13
2.1	Cosa vuol dire teoria relativistica?	13
2.2	Richiami di Relatività Speciale e algebra tensoriale	14
2.2.1	Proprietà metrica g dall'invarianza della distanza	16
2.2.2	Gli indici	17
2.2.3	Operatori di derivata	17
2.2.4	Quadrivettori e calcolo tensoriale	18
2.2.5	Considerazioni su oggetti simmetrici, antisimmetrici	19
3	Gemme di teoria dei gruppi	21
3.1	Basic facts about Groups and Lie algebras	22
3.1.1	Teoria delle rappresentazioni	23
3.1.2	Gruppi di Lie	26
3.1.3	Operatori di Casimir	31
3.1.4	Alcune definizioni	31
3.2	Alcuni esempi di gruppi di Lie rilevanti in Fisica	34
3.2.1	Gruppo delle fasi $U(1)$	34
3.2.2	Il gruppo $SO(n)$	36
3.2.3	Il gruppo $SU(n)$	40
3.2.4	Gruppo $SU(3)$	46
3.2.5	Altri esempi rilevanti	47
3.3	Definizione astratta dell'algebra di Lie e di gruppi di Lie	48
3.3.1	Definizione astratta dell'algebra di Lie	48
3.3.2	Definizione astratta del gruppo di Lie e gruppo di ricoprimento	49
3.4	Etichette degli stati fisici	51
3.5	Il gruppo di Lorentz	54

3.5.1	Trasformazioni di Lorentz	54
3.5.2	Generatori e algebra del gruppo di Lorentz	59
3.5.3	Rappresentazioni finito e infinito dimensionali	62
3.5.4	Operatori di Casimir del gruppo di Lorentz	64
3.5.5	L'algebra del gruppo di Lorentz fattorizza nel prodotto tensoriale di due sottoalgebre indipendenti	65
3.5.6	Gruppo unimodulare $SL(2, \mathbb{C})$	66
3.5.7	Rappresentazione scalare, spinoriale e vettoriale	70
3.5.8	Teorema di Wigner e regola di superselezione	74
3.6	Il gruppo di Poincaré	76
3.6.1	Algebra del gruppo di Poincaré	78
3.6.2	Casimir del gruppo di Poincaré	80
3.6.3	Interpretazione autovalori degli operatori di Casimir	81
3.6.4	Piccolo gruppo	84
3.7	Schema riassuntivo gruppi	86
4	Campi locali	89
4.1	Teoria locale	90
4.2	Campo classico	90
4.3	Definizione di campo locale	93
4.4	Comportamento dei campi locali per trasformazioni di Poincaré	95
4.4.1	Campo scalare	98
4.4.2	Campo vettoriale	101
4.4.3	Campo spinoriale	104
4.4.4	Altri campi	110
5	Le equazioni di campo	113
5.1	Principio di minima azione ed equazione del moto	115
5.2	Teorema di Noether	117
5.2.1	Simmetria interna	117
5.2.2	Variazione coordinate	119
5.2.3	Caso generale	122
5.3	Equazione per il campo scalare	125
5.3.1	Traslazioni: correnti e cariche conservate	127
5.3.2	Parametri di una trasformazione	127
5.3.3	Trasformazioni di Lorentz: correnti e cariche conservate	128
5.3.4	Dilatazioni	129
5.4	Equazione per il campo spinoriale	130
6	L'equazione di Dirac	135
6.1	Covarianza dell'equazione di Dirac	135
6.2	Comportamento dell'equazione di Dirac per trasformazioni di parità	138
6.3	Connessione equazione di Dirac e di Klein Gordon	139

6.4	Generatori di Lorentz	139
6.5	Forme bilineari di spinori di Dirac	141
6.5.1	Trasformazione dello spinore $\bar{\psi}$	142
6.5.2	Proprietà di trasformazione delle forme bilineari	143
6.6	Correnti di Noether associate all'equazione di Dirac	147
6.7	Soluzioni dell'equazione	148
6.7.1	Normalizzazione spinori	154
6.7.2	Normalizzazione soluzioni	157
6.7.3	Interpretazione soluzioni	157
6.7.4	Proiettori su stati ad energia positiva o negativa	159
6.8	Chiralità ed elicità	160
6.8.1	Autostati e proiettori di chiralità	160
6.8.2	Fermioni chiriali ed equazione di Weyl	161
6.9	Momento angolare e spin	166
6.9.1	Operatore di spin	166
6.9.2	Momento angolare orbitale e spin	168
7	Seconda quantizzazione	171
7.1	Quantizzazione di una teoria di campo	172
7.1.1	Quantizzazione canonica	172
7.2	Campo scalare	174
7.2.1	Hamiltoniana del campo scalare	182
7.2.2	Teorema spin-statistica	188
7.3	Campo scalare carico	189
7.3.1	Simmetrie, teorema di Noether e cariche conservate	192
7.4	Campo spinoriale	194
7.4.1	Teorema spin-statistica	197
7.4.2	Simmetrie, teorema di Noether e cariche conservate	198
7.5	Schema riassuntivo	199
7.6	Significato fisico dell'analisi di Fourier	200
8	Teoria del propagatore in una teoria libera	211
8.1	Propagatore in Meccanica Quantistica	212
8.2	Campo scalare neutro	216
8.2.1	Evoluzione temporale del campo di Klein-Gordon	216
8.2.2	Definizione di propagatore	219
8.2.3	Causalità per il campo scalare neutro	221
8.2.4	Funzione di Green per Klein-Gordon	222
8.2.5	Confronto tra funzione di Green e definizione di propagatore	226
8.2.6	Calcoli espliciti propagatore di Feynmann	227
8.3	Campo scalare carico	231
8.3.1	Definizione di propagatore	231
8.3.2	Causalità per il campo scalare carico	233

8.4	Campo spinoriale	233
8.4.1	Definizione di propagatore	233
8.4.2	Calcoli espliciti propagatore di Feynmann	235
8.5	Sommario risultati del propagatore libero	237
9	Propagatori interagenti e teorie perturbative	239
9.1	Propagatore in Teoria Quantistica dei Campi	239
9.1.1	Propagatore per la teoria di campo interagente	240
9.2	Gell-Mann low theorem	242
9.3	Teorema di Wick	249
10	Teorie di gauge ed Elettromagnetismo	255
10.1	Le equazioni di Maxwell	255
10.2	Teorie di Gauge	259
10.2.1	Perché la teoria di gauge	264
10.2.2	Teorie di gauge in Elettromagnetismo	265
10.2.3	Gradi di libertà della teoria elettromagnetica	267
10.3	Elettromagnetismo massivo	269
10.4	Quantizzazione del campo elettromagnetico	274
10.4.1	Proprietà polarizzazione fotone	277
10.4.2	Propagatore del fotone	279
	Appendici	280
A	Riepilogo risultati	283
B	Unità naturali	289
C	Come si costruisce una teoria?	291
C.1	Principio di minima azione	291
C.2	Legame tra simmetrie di S e le quantità conservate	294
D	Nozioni gruppi	297
D.1	Notazioni	297
D.2	Gruppo $\mathbb{Z}_2$	297
E	Complementi di Relatività Speciale	299
E.1	Legame tra rapidità, massa di riposo ed energia	299
E.2	Generatori del gruppo di Lorentz	300
F	Le matrici γ^μ di Dirac	303
F.1	Giustificazioni fisiche	303
F.2	Definizioni e rappresentazione di Weyl	304
F.3	Proprietà fondamentali	306

F.4	Rappresentazione di Dirac	307
F.5	Forme bilineari degli spinori di Dirac	307
F.5.1	Identità di Fierz	309
G	Spazio di Fock	311
G.1	Particelle distinguibili	311
G.2	Formalismo dei numeri di occupazione	313
G.3	Spazio di Fock	315
G.4	Operatori di creazione e distruzione	316
G.5	Normal Ordering	319
G.5.1	Operatore numero di occupazione	320
G.6	Operatore di campo quantizzato	321
H	Discorsi sull'operatore di campo di Klein-Gordon	325
H.1	Riferimenti dei libri	325
H.2	Normalizzazione stati a tri-impulso fissato	329
I	Rappresentazione di interazione	331
J	Indice file aggiuntivo con i conti	335
K	Elenco di cose da dover ripetere	337

Capitolo 1

Introduzione

In questo corso, come si capisce bene dal titolo, si vuole riuscire a studiare e descrivere la Teoria Quantistica dei Campi, ossia, la teoria che unisce la Meccanica Quantistica e la Relatività Speciale. Il punto di partenza ovvio, o per lo meno il primo a cui si pensa, per costruire tale teoria è la Meccanica Quantistica non relativistica, i cui postulati sono:

- Lo stato di un sistema è rappresentato da un vettore nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.
- Le osservabili fisiche sono rappresentate da operatori hermitiani, i cui autovettori forniscono una base ortonormale di $\mathcal{H}$.
- Il postulato della misura afferma che la misura di un'osservabile da come risultato uno dei suoi autovalori (con una certa probabilità). In più ogni qual volta viene fatta una misura, quindi applichiamo l'operatore allo stato, il sistema collassa nell'autostato corrispondente all'autovalore misurato.

Come già sappiamo, la Meccanica Quantistica è una teoria probabilistica e non deterministica a differenza della Fisica classica. Infatti, sappiamo bene che dire che esiste un sistema in un certo stato vuol dire che ci sono diversi sistemi identici preparati allo stesso modo.

Sappiamo anche che se vogliamo determinare i possibili valori di una certa misura dobbiamo diagonalizzare l'operatore associato. Infatti, diagonalizzando un'operatore troviamo autovalori ed autovettori.

Come ben noto esiste anche il postulato dell'evoluzione temporale, che afferma che un sistema evolve nel tempo seguendo l'equazione di Schrodinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle_t = \hat{H} |\Psi\rangle_t \quad (1.0.1)$$

in cui t è un parametro e non una coordinata e $\hat{H}$ è l'operatore hamiltoniano, definita come:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (1.0.2)$$

nel caso libero.

Nonostante la Meccanica Quantistica (MQ) sia una teoria bellissima e con infinite conferme sperimentali anch'essa ha delle limitazioni. Il più grosso punto critico è che non è una teoria relativistica, il che è un problema poiché studiando sistemi microscopici (che sono quelli trattati dalla MQ) essi, più sono piccoli e più si muovono velocemente. Inoltre, la Meccanica Quantistica non relativistica non può essere utilizzata per studiare sistemi con molte particelle, o detta diversamente, sistemi con molti gradi di libertà ($N \rightarrow \infty$). Ad esempio la MQ non tratta i campi elettrico $\vec{E}$ e magnetico $\vec{B}$. Un'ulteriore limite della MQ è che una volta cominciato a trattare un sistema con un certo numero di particelle, quel numero non può cambiare, infatti, Schrodinger ne descrive l'evoluzione, ma non permette di aggiungere o togliere particelle. Noi sappiamo bene che però in natura l'energia si conserva sempre, ma non il numero di particelle; vedi ad esempio un decadimento nucleare in cui partiamo con un certo numero di certe particelle, succedono cose e finiamo con un numero diverso di particelle diverse.

La Meccanica Quantistica non è dunque la teoria definitiva e ha senso studiare una teoria quantistica di campo (QFT), che sia relativistica, con la quale si riescono a superare le criticità della MQ, ma che ci costringerà (in un qualche senso in modo ragionevole essendo una teoria completamente diversa) a ripensare a tutte le interpretazioni a cui eravamo abituati.

1.1 Si può relativizzare l'equazione di Schrodinger?

Per costruire una teoria quantistica relativistica, forse un po' ingenuamente, si potrebbe sperare di partire dai risultati già noti della Meccanica Quantistica e banalmente relativizzare il tutto. Sarebbe la situazione ideale se funzionasse, ma sfortunatamente non funziona. Vediamo perché si va incontro a errori se si prova a relativizzare l'equazione di Schrodinger. Partiamo da:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) = \hat{H} \Psi(\vec{x}, t) \quad (1.1.1)$$

in cui $\hat{H}$ è l'operatore hamiltoniano del sistema e dunque l'energia totale di esso. In Relatività Speciale (RS) conosciamo l'espressione dell'energia per la particella libera (mass-shell):

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (1.1.2)$$

e in linea di principio potremmo provare a definire:

$$\hat{H} = +\sqrt{\hat{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (1.1.3)$$

che potremmo sviluppare in serie per m piccola, cosa vera per sistemi microscopici, fino ad ottenere:

$$\hat{H} = \sqrt{m^2 c^4 \left(1 + \frac{\hat{p}^2}{m^2 c^4} \right)} \quad (1.1.4)$$

$$\Rightarrow \hat{H} \sim mc^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (1.1.5)$$

in cui riusciamo ad individuare il termine di energia di riposo della RS e un termine cinetico, dunque l'espressione di $\hat{H}$ trovata ha un senso dal punto di vista relativistico. Se inseriamo l'espressione (1.1.5) nell'equazione di Schrodinger otteniamo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) = +\sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4} \Psi(\vec{x}, t). \quad (1.1.6)$$

Ci si rende subito conto che l'espressione (1.1.6) ha alcuni problemi:

- $\hat{H}$ l'abbiamo definita facendo la radice dell'espressione (1.1.2), ma senza considerare il segno negativo che ne deriva e facendo attenzione solo al caso positivo. Infatti, la cosa corretta da fare sarebbe stata prendere:

$$\hat{H} = \pm \sqrt{E^2} = \pm \sqrt{\hat{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (1.1.7)$$

che considera entrambi i segni dell'energia. Il problema però diventa che per le particelle libere non possiamo avere energie < 0 , poiché corrisponderebbero a stati legati. Nota anche che l'esistenza di infinite energie negative implica la non esistenza di uno stato fondamentale e dunque l'instabilità del sistema (si hanno sistemi unbounded below).

- Sotto la radice abbiamo l'operatore $\hat{p}$, che è un problema non sapendo bene come trattare la radice di un operatore. Si potrebbe risolvere questa cosa provando a sviluppare ancora in serie la radice, ma così facendo si otterrebbero un numero infinito di derivate spaziali di $\Psi(\vec{x}, t)$, il che implicherebbe una non località dell'equazione.¹
- Tempo e spazio non sono trattati allo stesso modo, infatti, abbiamo una derivata ∂_t rispetto al tempo, ma laplaciano ∇^2 per lo spazio. In più $\vec{x}$ è interpretata come una coordinata, mentre t è un parametro che scorre indipendentemente dal sistema di riferimento. Sappiamo che in RS spazio e tempo sono sullo stesso piano.

¹Infatti in questo modo l'equazione (1.1.6) non sarebbe più un'equazione differenziale, la quale richiederebbe al suo interno termini del tipo dx infinitesimi. Sviluppando la radice di (1.1.6) si avrebbe che $\vec{\nabla}$ fornisce una traslazione finita visto che lo sviluppo contiene tutti gli ordini.

Questi problemi elencati si potrebbero risolvere prendendo il quadrato dell'espressione (1.1.6), infatti:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\vec{x}, t) = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4 \right) \Psi(\vec{x}, t) \quad (1.1.8)$$

che è quella nota come **Equazione di Klein-Gordon**. Però anche l'equazione (1.1.8), nonostante possa sembrare di aver trovato l'equazione del moto di una teoria relativistica definitiva, nasconde alcune complicazioni. Il problema più grande è che prendendo l'equazione di Klein-Gordon (KG) non è possibile definire una densità di probabilità indipendente dal tempo e di conseguenza si viola la conservazione della probabilità (non potendo esistere una legge di conservazione). In più, facendo il quadrato, si è nascosto sotto il tappeto il problema delle energie negative, ma a questo ci penserà Dirac (vedi §1.3). Nonostante i problemi che contiene l'equazione (1.1.8) è facile verificare che verifica l'invarianza di Lorentz (lo faremo nel corso degli appunti).

L'equazione di Klein-Gordon, utilizzando il D'Alembertiano quadri-dimensionale², diventa:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\vec{x}, t) = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4 \right) \Psi(\vec{x}, t) \quad (1.1.9)$$

$$\underbrace{\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\vec{x}, t) - \hbar^2 \vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{x}, t)}_{\partial^\mu \partial_\mu = \partial^2 \equiv \square} + m^2 c^2 \Psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (1.1.10)$$

$$\square \Psi(\vec{x}, t) + m^2 \frac{c^2}{\hbar^2} \Psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (1.1.11)$$

e possiamo scrivere la forma a cui si fa solitamente riferimento per l'equazione di Klein-Gordon:

$$\left(\square + m^2 \frac{c^2}{\hbar^2} \right) \Psi(\vec{x}, t) = 0. \quad (1.1.12)$$

Nei termini visti nella sezione §2.1, se un osservatore A l'equazione del moto è data da (1.1.12), allora un osservatore B, in un altro SR, scriverà:

$$\left(\square + m^2 \frac{c^2}{\hbar^2} \right) \bar{\Psi}(\vec{x}, t) = 0 \quad (1.1.13)$$

coincidente con quella scritta da A, poiché si ha $\partial^2 = \bar{\partial}^2$ e $\Psi(\vec{x}) = \bar{\Psi}(\vec{x})$ (vedi il capitolo §2). Possiamo affermare che l'equazione (1.1.12) è perfettamente consistente con il principio di relatività, ma che, nonostante sia un'equazione funzionante da questo punto di vista, viola i principi fondativi della Meccanica Quantistica. Infatti, la norma del vettore $|\Psi\rangle_t$ di $\mathcal{H}$ dipende dal

²Vedi nel capitolo §2 come vengono definiti gli operatori di derivata.

tempo, motivo per cui, viola la conservazione della probabilità. Si può notare, che moltiplicando l'equazione di KG per la funzione d'onda Ψ complessa coniugata Ψ^* :

$$\Psi^* \left\{ \left[\square + m^2 \frac{c^2}{\hbar^2} \right] \Psi = 0 \right\} \quad , \quad \Psi \left\{ \left[\square + m^2 \frac{c^2}{\hbar^2} \right] \Psi^* = 0 \right\} \quad (1.1.14)$$

facendo la differenza tra le espressioni:

$$\Psi^* \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi - \Psi \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi^* = 0 \quad (1.1.15)$$

$$\partial^\mu (\Psi^* \partial_\mu \Psi - \Psi \partial_\mu \Psi^*) = 0 \quad (1.1.16)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Psi^* \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \right) - \nabla \cdot (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = 0. \quad (1.1.17)$$

Il termine tra parentesi della derivata temporale di (1.1.17) sarebbe il termine da interpretare come densità di probabilità, che però non è definito positivo, il che non è possibile. Il secondo termine, nelle parentesi di $\vec{\nabla}$, è il termine di corrente di probabilità. Non potendo avere un'equazione di continuità, del tipo:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad , \quad j^\mu = (\rho, \vec{j}) \quad (1.1.18)$$

non è possibile associare all'equazione di Klein-Gordon un'interpretazione probabilistica ed una definizione consistente di densità di probabilità. Quindi, nel momento in cui cerchiamo di costruire una teoria quantistica relativistica e arriviamo all'equazione (1.1.12), allora perdiamo completamente l'interpretazione probabilistica della teoria e il concetto di funzione d'onda.

La presenza di ∂_{tt} , rende a questo punto inconciliabili la teoria quantistica con il principio di relatività, comunque soddisfatto da KG. C'è però un motivo più profondo per cui la trattazione quantistica di un sistema va in conflitto con il principio di relatività, il concetto stesso di tempo! Vedi la sezione §1.2.

Piccolo fatto storico. Storicamente Schrodinger, prima di scrivere la sua equazione per la MQ non relativistica, aveva trovato la (1.1.12) che aveva scartato in breve tempo perché non compatibile con la teoria di Heisenberg e l'interpretazione probabilistica di Born di pochi anni prima.

Il problema di non riuscire a definire una probabilità definita positiva Weinberg Physical law should have mathematical beauty. Weinberg:1995mt dice che è dovuto al fatto che nell'equazione di KG compaia una derivata seconda rispetto al tempo, a differenza di quella di Schrodinger in cui c'è solo una derivata prima e in cui è possibile definire una densità di probabilità (definita positiva) ed un'equazione di continuità.

1.2 Il tempo è una coordinata o un parametro?

Le criticità viste durante il processo per arrivare all'equazione di Klein-Gordon nella sezione §1.1, in modo rapido, sono:

- Contiene delle energie negative.
- È presente la radice di un operatore, che non sappiamo bene che vuol dire.
- Non tratta sullo stesso piano spazio e tempo.

Intorno agli anni 30' del secolo scorso Dirac riesce a trovare un'equazione, ed un'interpretazione ad essa, che non solo risolve il problema delle energie negative, ma permette, scendendo di un ordine delle derivate e salendo di dimensioni, di risolvere il problema fastidioso della radice quadrata. Per cui due problemi sembrano messi apposto. Il terzo, ossia quello di trattare in egual maniera spazio e tempo, lo si può risolvere in due modi differenti.

Dagli assiomi della Meccanica Quantistica sappiamo bene che tutte le osservabili fisiche sono rappresentate da operatori hermitiani, ma sappiamo anche che in MQ il tempo non è né un operatore e benché meno l'autovalore di un qualche operatore. Il tempo in Meccanica Quantistica, così come nella Fisica classica, è semplicemente un parametro che scorre indipendentemente dall'osservatore (SR). Notiamo però che in Meccanica Quantistica il tempo compare sia nello stato $|\Psi\rangle_t$, in cui lo dobbiamo distinguere dalla posizione x che è autovalore dell'operatore posizione $\hat{x}$, e compare anche nell'equazione di Schrodinger, in cui ci viene detto come $|\Psi\rangle_t$ evolve nel tempo. Proprio l'asimmetria di significato tra tempo e spazio rende la Meccanica Quantistica incompatibile con la Relatività Speciale. Come già detto potremmo risolvere il problema in 2 modi:

1. Promuovere il tempo allo stesso livello della posizione e quindi al ruolo di operatore.
2. Declassare la posizione allo stesso ruolo del tempo, ossia, al ruolo di parametro.

La strada 1 è più complicata da percorrere. Si potrebbe utilizzare come autovalore (parametro) il tempo proprio della particella (misurato con un orologio che si muove con essa) e la coordinata temporale t (misurata con un orologio stazionario in un SR inerziale) come operatore. Quello che si fa è definire $\hat{x}^\mu$ in cui $\hat{x}^0 = ct$. Aggiungendo un altro parametro σ all'operatore $\hat{x}^\mu$ potremmo ottenere molte world-lines (linee di mondo) $\hat{x}^\mu(\tau, \sigma)$, ovvero, una famiglia continua di world-line, che costituiscono quello che viene chiamato world-sheet (foglio di mondo). In questo modo $\hat{x}^\mu(\tau, \sigma)$ viene interpretato come una **stringa** che si propaga.

La strada 2 è quella che in questo corso ci permette di arrivare al nostro risultato. Se x diventa un parametro, allora lo si può associare ad un operatore, che possiamo chiamare:

$$\hat{\phi}(x) \quad (1.2.1)$$

chiamato **operatore di campo quantistico**, il quale, nella rappresentazione di Heisenberg, dipende anche dal tempo:

$$\hat{\phi}(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} \hat{\phi}(x, 0) e^{-\frac{i}{\hbar} H t}. \quad (1.2.2)$$

Gli effetti fisici di (1.2.1) li possiamo vedere come al solito, ossia utilizzando opportune sonde (test particle) sensibili ad esso. Il problema che sorge declassando la posizione è che perdiamo l'operatore $\hat{x}$, il quale era fondamentale perché, insieme alla sua variabile canonicamente coniugata p , ci forniva le regole di commutazione fondamentali della nostra teoria, ovvero:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (1.2.3)$$

Ora, siamo apparentemente nei guai, se non fosse che possiamo mettere x dentro il campo quantizzato (1.2.1) e conferire a $\hat{\phi}$ il ruolo di darci i commutatori fondamentali della teoria.

A questo punto, finalmente, abbiamo trovato un oggetto quantisticamente ben definito (o che comunque vedremo essere definito per bene), in cui x e t sono parametri e sullo stesso piano, trattati democraticamente. Sono entrambi parametri continui. L'elemento (1.2.1) è l'elemento base della teoria quantistica dei campi. L'approccio 2 è comodo da seguire perché permette di vedere come la trattazione quantistica di un sistema con un numero non fissato di particelle si riduca ad una trattazione analoga ad una fatta in una teoria di campo. Infatti è opportuno conoscere i concetti (della MQ non relativistica) di Spazio di Fock, numero di occupazione e operatore di campo quantistico che sono descritti nell'Appendice G.

Una piccola nota: si potrebbe pensare che gli approcci 1 e 2 portino a risultati diversi, invece, si vede che la Fisica quantistica relativistica può essere trattata in entrambe le teorie equivalentemente. Le teorie quantistiche e relativistiche sono sempre delle teorie di campo. Si può scegliere di volta in volta il procedimento più conveniente. La Teoria Quantistica dei Campi è tendenzialmente più comoda.

Ripensare al concetto di tempo e analizzare la struttura dell'operatore di campo quantistico dell'Appendice G:

$$\hat{\phi}_\sigma^\dagger(\vec{x}) = \sum_{i,\rho} \langle i|\vec{x} \rangle a_{i\sigma}^\dagger \quad (1.2.4)$$

ci permette di vedere che se vogliamo una teoria quantistica e relativistica, allora dobbiamo abbandonare il concetto di particella singola, ovvero non potremo più avere un sistema che è una particella singola, ma avremo sempre sistemi che descrivono molte (potenzialmente ∞) particelle, il cui numero potrebbe non essere fissato. Perché in (1.2.4), che crea una particella nel punto $\vec{x}$, con spin σ , descritta dalla funzione d'onda $\psi_i(\vec{x})$ (nel senso della MQ non relativistica) compare una somma su ∞ valori di i , ovvero di ∞ funzioni d'onda.

1.3 L'idea del mare di Dirac

Abbiamo visto nella sezione §1.1 come non sia possibile relativizzare l'equazione di Schrodinger in serenità, motivo per cui abbiamo detto che non esiste una teoria quantistica relativistica.

L'unico lato positivo visto è stato che si è riusciti a trovare l'equazione (1.1.12) di Klein-Gordon, che seppur non è un'equazione che soddisfa la Meccanica Quantistica non relativistica, per lo meno soddisfa il postulato della Relatività Speciale. Un problema, che abbiamo completamente ignorato in tutte le sezioni precedenti, è quello delle energie negative e abbiamo solamente accennato al fatto che Dirac riuscì a darne un'interpretazione. Vediamo ora di che si tratta. Storicamente, la prima equazione relativistica che si è riusciti a scrivere per cercare di descrivere sistemi quantistici è stata proprio l'equazione di Klein-Gordon, poco tempo dopo Paul Dirac derivò la sua equazione relativistica che voleva descrivere il moto degli elettroni (poi estesa a tutti i campi fermionici). L'inglese cercò anche di mettere nella sua equazione una sola derivata temporale, a differenza di KG, in modo da cercare di tenere viva l'interpretazione della Meccanica Quantistica. La grande soddisfazione che provava Dirac per la sua equazione derivava principalmente dalla bellezza ed eleganza dell'equazione. Al tempo stesso però, il fisico inglese si continuò, per 2 anni, a domandare come potesse effettivamente interpretare le energie negative, che non solo comparivano nell'equazione di Klein-Gordon, ma anche nella sua.³ Finalmente nel 1930, Dirac pubblicò la sua interpretazione di stati con energie negative. Analizziamo con calma i passi che fece Dirac.

Prima di tutto Dirac cercò di relativizzare l'equazione di Schrodinger in un modo diverso rispetto quello seguito da KG. L'inglese introdusse un indice discreto aggiuntivo alla funzione d'onda (come già detto, lui aveva in mente

³Se vuoi puoi vedere in *L'uomo più strano del mondo* di Graham Farmelo come fu oggetto di scherno, da parte di Pauli nei confronti di Dirac, il fatto che quest'ultimo non riuscisse a spiegare le energie negative della sua bellissima equazione.

un elettrone, ossia una particella di spin $1/2$) scrivendo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_a(x) = (-i\hbar c(\alpha^j)_{ab} \partial_j + mc^2(\beta)_{ab}) \Psi_b(x) \quad (1.3.1)$$

in cui $a = 1, 2$ e α^j, β sono matrici. Se si considera l'hamiltoniana che compare nell'equazione scritta sopra, allora si può dimostrare che anch'essa, come KG, è consistente con la teoria relativistica⁴. Rimangono comunque un paio di problemi, le matrici α^j e β sarebbe bello se fossero le matrici di Pauli, dal momento che per particelle fermioniche con spin $1/2$ sappiamo bene come trattarle, però, per via degli anticommutatori che si devono avere nella teoria, non è così ed α^j e β sono in realtà matrici più grandi delle σ_i di Pauli. Infatti α^j e β sono matrici 4×4 . Se fossero state matrici 2×2 le si sarebbe potute interpretare come matrici di spin, ma avendo due dimensioni in più occorre darne un'interpretazione differente.

Vedremo in seguito che le interpretazioni delle componenti aggiuntive dello spin e degli stati ad energia negativa sono in qualche modo legate.

Le componenti aggiuntive di α^j e β fanno sì che quando si vanno a calcolare gli autovalori dell'hamiltoniana⁵ se ne trovino 4:

$$+E(\vec{p}) \quad , \quad +E(\vec{p}) \quad , \quad -E(\vec{p}) \quad , \quad -E(\vec{p}) \quad (1.3.2)$$

in cui:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (1.3.3)$$

Dunque, nonostante Dirac sia riuscito a risolvere alcuni problemi di KG scrivendo un'equazione con una sola derivata temporale e relativistica, è dovuto salire di dimensioni per riuscirci e comunque non è riuscito a rimuovere il problema delle energie negative.

Parliamo finalmente degli stati ad energia negativa⁶. In Fisica classica non c'è motivo per considerare stati con energie negative, infatti, nessun processo continuo può permettere il passaggio da livelli di energia positiva ($E \geq mc^2$) a quelli di energia negativa ($E \leq -mc^2$) essendo due bande separate da una discontinuità di $2mc^2$. Anche in relatività non è possibile, tramite un cambio di sistema di riferimento, passare da un'energia positiva ad una negativa, poiché la trasformazione di Lorentz dell'energia (boost lungo x con velocità v) è:

$$E' = \gamma(E - vp_x) \quad (1.3.4)$$

⁴Si veda il capitolo §1 di Srednicki Physical law should have mathematical beauty.Srednicki:2007qs.

⁵Si faccia riferimento anche in questo caso al capitolo §1 di Srednicki Physical law should have mathematical beauty.Srednicki:2007qs.

⁶Parte del ragionamento preso dal Barone Physical law should have mathematical beauty.Barone. In particolare le sezioni §2.8, §2.9, §4.8, §4.10 e §4.14.4.

in cui $v < c$, $p_x < p$ che implicano $vp_x < cp \leq E$ e per cui se $E > 0$ in un certo SR, allora anche $E' > 0$.

Nella Fisica quantistica però sappiamo bene che salti discontinui sono possibili e non si possono più ignorare le energie negative. Dirac riuscì ad interpretare tali stati. È un fatto sperimentale che particelle fermioniche obbediscano al principio di esclusione di Pauli, per cui non possiamo averne (ad esempio elettroni) più di una in uno specifico stato quantistico. Dirac si chiese: *e se questi stati ad energia negativa effettivamente esistessero, ma fossero sempre stati occupati?*, se la risposta fosse affermativa, allora un elettrone con energia positiva non potrebbe occupare stati ad $E < 0$ per via del principio di Pauli.

Però sorge subito un dubbio, ossia: *perché non ci si accorge di questo mare di cariche ad energia negativa?* Dirac disse: *ci siamo abituati*. Detto un po' meglio: una distribuzione di carica uniforme produce effetti fisici in base alle condizioni al contorno che imponiamo ad ∞ nelle equazioni di Maxwell e c'è una scelta di ciò che rende una densità di carica uniforme invisibile.

Dirac notò anche un'altra cosa. Se si riuscisse a liberare (eccitare) questi elettroni ad energia negativa e a portarli ad una positiva, allora, questi lascerebbero dietro di sé un buco nel mare di elettroni ad energia negativa. Tale buco apparirebbe come una carica positiva, ad energia positiva e, per via della simmetria dell'equazione di Dirac, anche con la stessa massa dell'elettrone che abbiamo eccitato⁷. Dirac con la sua interpretazione del mare di energie negative propose per la prima volta il concetto di **antiparticella**, in questo caso positroni. La conferma sperimentale della predizione di Dirac arrivò pochi anni dopo, nel 1932, quando nei raggi cosmici fu identificato per la prima volta l' e^+ . Vedremo anche che una visione più moderna del concetto di antiparticella viene dato da Feynmann negli anni successivi.

Nota importante. L'interpretazione del mare di Dirac e di particelle ad energie negative non è applicabile all'equazione di Klein-Gordon, poiché nella sua descrizione Dirac basa tutto sul principio di esclusione di Pauli, che come ben sappiamo riguarda solo le particelle fermioniche e non le particelle generiche, descritte da KG. Questo è uno dei motivi per cui il concetto di mare di particelle è stato superato dall'interpretazione di Feynmann.

⁷Per completezza dobbiamo dire che in realtà Dirac inizialmente disse che le lacune nel mare sarebbero risultati come dei protoni, ma fu dimostrato che in realtà elettroni e buche dovessero avere stessa massa. Questa simmetria tra particelle e antiparticelle la ritroveremo quando parleremo della causalità del propagatore (sezione §8).

1.4 Piano di lavoro

Costruire una teoria di Meccanica Quantistica relativista è di particolare interesse poiché permette la trattazione di sistemi con ∞ gradi di libertà e permette l'utilizzo dell'equivalenza tra massa ed energia. Il prezzo da pagare per costruire questa teoria però è relativamente alto. Questa nuova teoria comporta un aumento considerevole di complessità, il quale implica il non riuscire a trovare soluzioni esatte ad eccezione della teoria libera⁸. In Teoria Quantistica dei Campi si lavora sugli sviluppi perturbativi. Un altro svantaggio della nuova teoria è che si perdono i concetti di funzione d'onda, di stato identificato con un raggio nello spazio $\mathcal{H}$ e di equazione d'onda. La perdita della funzione d'onda, quindi dell'equazione che effettivamente definisce la teoria (l'equazione di Schrodinger), è una perdita più grande di quanto sembri, poiché implica il dover ripensare a tutta l'interpretazione.

Il modo in cui si costruirà la Teoria Quantistica dei Campi sarà diverso da come si è costruita a suo tempo la Meccanica Quantistica non relativistica⁹. La Meccanica Quantistica la abbiamo costruita in modo che la teoria classica fosse al suo interno e di conseguenza un suo limite. Per la Teoria Quantistica dei Campi il ragionamento è più complicato, prima si trova una teoria di campo classica e solo successivamente la si eleva al caso quantistico, ossia si fa il processo noto come seconda quantizzazione, che non è nulla di fantascientifico, ma semplicemente è stata la seconda volta che si è cercata una teoria quantistica e per questo si indica "seconda quantizzazione". Il termine "seconda quantizzazione" è un po' antiquato, ma potrebbe essere che si trovi ancora su qualche testo; originariamente era utilizzato per distinguere la quantizzazione che si fa nella teoria di campo da quella della MQ non relativistica, che per l'appunto si dice "prima quantizzazione".¹⁰

Il vantaggio del procedimento che si seguirà per costruire la Teoria Quantistica dei Campi è che si basa su pochi semplici punti: le invarianti della teoria. Sarà dunque fondamentale la teoria dei gruppi. Vedi il capitolo §3.

La prima invarianza che si vuole inserire nella teoria è, la già citata, invarianza dell'intervallo spazio-temporale tra due punti dello spazio di Minkow-

⁸Si noti che anche in Meccanica Quantistica le soluzioni esatte erano poche, però qualcuna c'era (atomo d'idrogeno, oscillatore armonico e buche di potenziale).

⁹Il modo in cui si costruisce la QFT in aula (e in questi appunti) non è necessariamente il modo in cui la si è costruita storicamente. Il processo scientifico di scrittura di una nuova teoria non è sicuramente lineare come quello seguito nei corsi universitari. C'è un riepilogo storico nel capitolo introduttivo del Weinberg Vol. 1 *Physical law should have mathematical beauty*. Weinberg:1995mt.

¹⁰Nota che questo modo di costruire la teoria è oggetto di discussione. La Relatività Speciale, così come la Meccanica Quantistica, sono state costruite con la fisica classica come limite e sono teorie ben solide (visti i risultati sperimentali). Ci si chiede perché la Teoria Quantistica dei Campi (che comunque ha moltissime conferme sperimentali e la domanda che ci si pone non implica una sua non correttezza dal punto di vista teorico) la si costruisce in modo diverso rendendo lei il limite del caso classico e non il viceversa?

ski in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Quest'invarianza è l'invarianza di Lorentz e introduce il gruppo di Poincaré.

La ricetta per costruire la Teoria Quantistica dei Campi sarà: stabiliremo quali sistemi vogliamo descrivere, decideremo le invarianze che vogliamo nel nostro sistema, costruiremo la lagrangiana L del sistema e utilizzando il teorema di minima azione, passando per il teorema di Noether, determineremo l'equazione del moto.

Capitolo 2

Richiami di Relatività Speciale

2.1 Cosa vuol dire teoria relativistica?

Cominciamo con il rispondere alla domanda:

Cosa vuol dire che una teoria è relativistica?

La risposta immediata è: *è una teoria che rispetta i postulati della Relatività Speciale*. Ricordati che i postulati della Relatività Speciale sono:

- La velocità della luce c è costante (uguale per tutti i sistemi di riferimento inerziali).
- Le leggi fisiche devono essere covarianti per sistemi di riferimento inerziali, ovvero, un fenomeno fisico è lo stesso per ogni sistema di riferimento inerziale.

Vediamo meglio cosa vogliamo dire.

Come metrica dello spazio di Minkowski prendiamo per convenienza:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

Se abbiamo un SR inerziale dato dalle coordinate $x^\mu = (ct, \vec{x})$, allora saranno coordinate di un SR inerziale¹ tutte le coordinate $\bar{x}^\mu$ legate ad x^μ da una trasformazione di Lorentz, ossia una trasformazione del tipo:

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (2.1.2)$$

¹Vedi la sezione 2.2 un ripasso di come alzare o abbassare gli indici.

dove Λ^μ_ν e a^μ sono indipendenti da x e sono rispettivamente la matrice di trasformazione di Lorents e un vettore di traslazione.

Quando diciamo che un fenomeno è lo stesso in ogni SR intendiamo dire che due osservatori A e B, in due SR differenti, ottengono gli stessi risultati per ogni possibile esperimento (e sono in accordo sulle predizioni dei risultati di ogni possibile esperimento). Infatti, se A vede un sistema nel punto x descritto da $\Psi(x)$ e B dice di vedere, nel suo SR, lo stesso sistema nel punto $\bar{x}$ e descritto da $\bar{\Psi}(\bar{x})$, allora deve valere:

$$\Psi(x) = \bar{\Psi}(\bar{x}) \quad (2.1.3)$$

Nota che x e $\bar{x}$ sono diversi perché associati a SR diversi, ma anche le forme funzionali di Ψ e $\bar{\Psi}$ lo sono. Ciò che è uguale sono le funzioni valutate nei punti.

Affinché l'uguaglianza (2.1.3) sia mantenuta su tutto lo spazio-tempo, le due funzioni d'onda devono soddisfare le stesse equazioni del moto. Dunque, le equazioni d'onda che cerchiamo nella nuova teoria quantistica relativistica devono avere la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali, e devono essere quindi invarianti di Lorentz (vedi nella sezione §2.2 cosa implica sulla metrica $g_{\mu\nu}$ richiedere l'invarianza della distanza spazio-temporale ds).

2.2 Richiami di Relatività Speciale e algebra tensoriale

Ricordiamo in questa sezione alcuni pezzi della Relatività Speciale. Potremmo inglobare in questo ripasso anche l'Appendice E.1.

Abbiamo detto che i postulati della Relatività Speciale sono:

1. La velocità della luce c è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
2. Le leggi della Fisica sono invarianti in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Alcuni preferiscono inglobare i due postulati in uno unico:

1. Le leggi della fisica sono invarianti per trasformazioni di Poincaré in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Nota che i postulati qui descritti hanno come diretta conseguenza² che la distanza spazio-temporale tra due eventi (punti nello spazio di Minkowski),

²Questa in realtà sarebbe una quantità invariante per via del fatto che la distanza tra due punti di una qualsiasi varietà è sempre un invariante.

indicata con s^2 , è un invariante di Lorentz, ovvero, non cambia tra sistemi di riferimento inerziali collegabili da trasformazioni di Poincaré.

Ricordiamo che una generica trasformazione di Poincaré è una trasformazione di Lorentz (rappresentata dalla matrice $\Lambda^\mu{}_\nu$) e una traslazione spazio-temporale:

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (2.2.1)$$

questo è il set di trasformazioni lineari che legano (x_i, t) a (x'_i, t') e formano un gruppo, chiamato appunto gruppo di Poincaré. Anche le trasformazioni rappresentate da $\Lambda^\mu{}_\nu$ formano un gruppo, quello di Lorentz.

D'ora in avanti utilizzeremo il sistema di unità naturali, ovvero, porremo $\hbar = c = 1$. Vedi l'Appendice B per dettagli.

Come abbiamo già detto, definiamo x^μ come un quadrivettore che contiene il tempo t nella componente 0 e le tre componenti spaziali sono associate ad $i = 1, 2, 3$:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x}). \quad (2.2.2)$$

Come metrica dello spazio di Minkowski prendiamo per convenienza:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

e conseguente metrica inversa:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.4)$$

Verificabile controllando che $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$. Ricorda che il tensore metrico (o metrica) descrive la geometria di una varietà e da esso è possibile definire il concetto di distanza. In questa notazione definiamo la distanza spazio-temporale come:

$$s^2 = x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_0 x^0 - x_i x^i \quad (2.2.5)$$

e avremo l'invarianza della Relatività Speciale scritta come:

$$s^2 = x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu \quad (2.2.6)$$

in cui abbiamo assunto che: in un sistema di riferimento un segnale di luce è percepito in x_i al tempo t e in un altro sistema di riferimento, lo stesso

segnale di luce, è percepito in x'_i al tempo t' .

Possiamo dire che il gruppo di Lorentz (o quello di Poincaré, visto che quando calcoliamo intervalli essi sono trasparenti a traslazioni spazio - temporali), è quello che ci permette di dire che la nostra teoria è relativistica, poiché è un gruppo formato da tutte le matrici $\Lambda^\mu{}_\nu$ tali da trasformare i quadri-vettori x^μ in modo tale da preservare le distanze; vedremo nella sezione §3.5.1 come classificarle. Più precisamente, le trasformazioni di Lorentz (TL) sono isometrie, cioè trasformazioni che lasciano invariata s^2 (come richiesto dalla Relatività Speciale).

2.2.1 Proprietà metrica g dall'invarianza della distanza

Abbiamo già detto che una generica trasformazione di Poincaré è del tipo (2.2.1) e accennato al fatto che le trasformazioni di Lorentz siano rappresentate dalle matrici $\Lambda^\mu{}_\nu$, ossia, che operano come:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda^\mu{}_0 x^0 + \Lambda^\mu{}_i x^i. \quad (2.2.7)$$

La trasformazione inversa sarebbe:

$$x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu. \quad (2.2.8)$$

L'insieme delle matrici Λ che lasciano invariata la distanza spazio-temporale formano il gruppo di Lorentz omogeneo. Dall'invarianza spazio temporale tra due eventi dello spazio $\mathbb{M}^4$ si ricava un'importante proprietà del tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Deve valere³:

$$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho x^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma \quad (2.2.14)$$

$$= g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma \quad (2.2.15)$$

³Nota che questa cosa potrebbe essere calcolata anche con un procedimento leggermente più esplicito. Chiedendo che l'intervallo tra due punti dello spazio-tempo x^μ e x'^μ in un SR e $\bar{x}^\mu$ ed $\bar{x}'^\mu$ in un altro SR sia sempre la stessa (quindi invariante) porta a:

$$(x - x')^2 = (x - x')^\mu (x - x')_\mu = (x^0 - x'^0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 \quad (2.2.9)$$

$$(\bar{x} - \bar{x}')^2 = (\bar{x} - \bar{x}')^\mu (\bar{x} - \bar{x}')_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu (x - x')^\nu g_{\mu\sigma} (\bar{x} - \bar{x}')^\sigma \quad (2.2.10)$$

$$= g_{\mu\sigma} \Lambda^\mu{}_\nu (x - x')^\nu \Lambda^\sigma{}_\rho (x - x')^\rho = \underbrace{g_{\mu\sigma} \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^\sigma{}_\rho}_{g_{\nu\rho}} (x - x')^\nu (x - x')^\rho \quad (2.2.11)$$

$$= g_{\nu\rho} (x - x')^\nu (x - x')^\rho = (x - x')^\nu (x - x')_\nu. \quad (2.2.12)$$

Nota che il pezzo di a^μ si cancella perché stiamo valutando intervalli, cioè distanze nello spazio-tempo tra due punti, insensibili a traslazioni. Per cui, affinché l'intervallo spazio-temporale (la distanza ds^2) sia un invariante di Lorentz devono valere (scritture equivalenti):

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \quad , \quad g^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu = g^{\rho\sigma}. \quad (2.2.13)$$

le relazioni (2.2.14) e (2.2.15) dovendo essere vere $\forall x^\rho, x^\sigma$ allora portano a:

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \quad (2.2.16)$$

che può essere anche scritta con indici alti:

$$g^{\rho\sigma} = g^{\mu\nu} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu. \quad (2.2.17)$$

In forma matriciale la relazione (2.2.16) è:

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (2.2.18)$$

Nota anche che vale:

$$g^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu. \quad (2.2.19)$$

Le relazioni (2.2.16) e (2.2.17) sono rappresentative dell'invarianza, della Relatività Speciale, rispetto ad una trasformazione di Lorentz. Nota anche che queste relazioni ci dicono che per le trasformazioni di Lorentz la metrica g descrive la trasformazione di similitudine che collega sue rappresentazioni (concetto rivisto nel capitolo §3).

2.2.2 Gli indici

Un piccolo appunto sugli indici. Ricordiamo che un indice alto è un indice di controvarianza, mentre un indice basso è uno di covarianza. Possiamo abbassare o alzare indici facendo agire la metrica su un tensore covariante o controvariante. Infatti vale:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad \implies \quad x^0 = x_0 = ct, \quad x^i = -x_i. \quad (2.2.20)$$

Inoltre, gli indici sommati saranno sempre uno alto ed uno basso; una volta contratti gli indici sono solo più dei numeri e possono essere spostati a piacimento. Per le matrici, ad esempio Λ^μ_ν , un indice a sinistra è un'indice di riga e un indice a destra è un'indice di colonna. Scambiando gli indici a destra e sinistra scambiamo righe e colonne:

$$\Lambda^\mu_\nu = (\Lambda^T)^\mu_\nu \quad (2.2.21)$$

Spesso nella scrittura con gli indici espliciti si omette la T , dal momento che l'informazione è già contenuta nell'ordine e nella posizione degli indici.

2.2.3 Operatori di derivata

Definiamo:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (2.2.22)$$

e tali per cui:

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\nu}. \quad (2.2.23)$$

È anche possibile vedere che la derivata varia come le coordinate x^μ sotto trasformazioni di Lorentz, ovvero:

$$\bar{\partial}^\mu = \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu \quad (2.2.24)$$

infatti si vede che:

$$\bar{\partial}^\rho \bar{x}^\sigma = (\Lambda^\rho_\mu \partial^\mu) (\Lambda^\sigma_\nu x^\nu + a^\sigma) = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu \underbrace{\partial^\mu x^\nu}_{g^{\mu\nu}} = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu g^{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} \quad (2.2.25)$$

e analogamente per le derivate seconde:

$$\partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \quad (2.2.26)$$

$$\bar{\partial}^2 = \bar{\partial}^\mu \bar{\partial}_\mu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \partial^\rho \Lambda^\nu_\sigma \partial^\sigma = \underbrace{g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma}_{g_{\rho\sigma}} \partial^\rho \partial^\sigma = \partial^\rho g_{\rho\sigma} \partial^\sigma = \partial^2 \quad (2.2.27)$$

2.2.4 Quadrivettori e calcolo tensoriale

Definiamo in questa sezione i quadrivettori covarianti e controvarianti e richiamiamo un paio di cose utili riguardanti il calcolo tensoriale.

Formalmente definiamo quadrivettore controvariante (indice alto) gli oggetti che trasformano come il differenziale delle coordinate⁴, ovvero:

$$a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu \quad (2.2.29)$$

da cui possiamo vedere come trasforma un quadrivettore con indici bassi, che chiameremo quadrivettore covariante:

$$a'_\mu = g_{\mu\nu} a'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho a^\rho = \underbrace{g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho g^{\rho\sigma}}_{M_\mu^\sigma} a_\sigma = M_\mu^\sigma a_\sigma. \quad (2.2.30)$$

Si può vedere che la matrice $M = g\Lambda g$ è l'inversa di Λ . Infatti, moltiplicando la relazione (2.2.18) per la metrica si ottiene:

$$\Lambda^T g \Lambda g = gg \implies \Lambda^T M = \mathbb{1} \implies M = \underbrace{(\Lambda^T)^{-1}}_{\Lambda_\mu^\sigma} = (\Lambda^{-1})^T. \quad (2.2.31)$$

⁴Il differenziale delle coordinate, presa (2.2.1), si trasforma come:

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu. \quad (2.2.28)$$

Dunque è possibile scrivere:

$$a'_\mu = \Lambda_\mu^\sigma a_\sigma. \quad (2.2.32)$$

Definiamo un tensore di rango $n = p + q$:

$$T_{\nu_1, \dots, \nu_q}^{\mu_1, \dots, \mu_p} \quad (2.2.33)$$

come quell'oggetto le cui 4^n componenti si trasformano per trasformazioni di Lorentz secondo:

$$T_{\nu_1, \dots, \nu_q}^{\mu_1, \dots, \mu_p} = \Lambda^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_p}_{\alpha_p} \Lambda_{\nu_1}^{\beta_1} \dots \Lambda_{\nu_q}^{\beta_q} T_{\beta_1, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}. \quad (2.2.34)$$

Ad esempio, un tensore di rango 0 è uno scalare, un tensore di rango 1 è un quadrivettore (controvariante o covariante a seconda della posizione dell'indice) e un esempio di un tensore di rango 2 è il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ (che tra l'altro è invariante sotto TL).

Attenzione però che Λ^μ_ν non è un tensore.

Definiamo gli pseudo-tensori come quegli oggetti che cambiano segno per parità. Un esempio di pseudo-tensore completamente antisimmetrico è il simbolo di Levi-Civita (in 4 dimensioni) $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, definito con $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = +1$, con il cambio di segno per ogni permutazione degli indici, e con $\varepsilon = 0$ se due indici sono uguali. Nota che il simbolo $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ha segni opposti. Il simbolo di Levi-Civita si utilizza per definire il determinante di una matrice. Presa M matrice 4×4 , allora vale per definizione:

$$\det\{M\} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M^0_\mu M^1_\nu M^2_\rho M^3_\sigma. \quad (2.2.35)$$

Esiste anche il tensore completamente antisimmetrico tridimensionale $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ definito allo stesso modo di quello 4-dimensionale.

2.2.5 Considerazioni su oggetti simmetrici, antisimmetrici e sui loro prodotti

Facciamo in questa sottosezione alcune considerazioni sugli oggetti simmetrici e antisimmetrici.

Preso un oggetto generico con 2 indici $T^{\mu\nu}$, un'identità che vale sempre è:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \quad (2.2.36)$$

in cui vediamo che la prima parentesi è un pezzo simmetrico per lo scambio $\mu \longleftrightarrow \nu$, mentre la seconda parentesi è antisimmetrica per scambio. Se $T^{\mu\nu}$ è un oggetto antisimmetrico, dunque tale per cui $T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$, allora si scrive:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \quad (2.2.37)$$

ma se $T^{\mu\nu}$ è un oggetto simmetrico, dunque $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, allora si scrive solo:

$$\frac{1}{2} (T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}). \quad (2.2.38)$$

Possiamo vedere che il prodotto di una quantità simmetrica con una anti-simmetrica (e viceversa) è sempre nullo. Infatti, vale:

$$A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = -A^{\nu\mu} S_{\nu\mu} \quad (2.2.39)$$

d'altra parte gli indici sommati sono muti e possiamo rinominarli a piacere, dunque scrivere:

$$-A^{\nu\mu} S_{\nu\mu} = -A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} \quad (2.2.40)$$

che richiede però che:

$$A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = -A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} \quad (2.2.41)$$

che è una condizione verificata solo se:

$$A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = 0. \quad (2.2.42)$$

Capitolo 3

Gemme di teoria dei gruppi

Questo capitolo potrebbe risultare leggermente differente rispetto le lezioni svolte in aula. Ho ritenuto opportuno riorganizzare gli argomenti e aggiungere di nuovi (pochi) per completezza. I riferimenti per questo capitolo sono Physical law should have mathematical beauty.Bastianelli,Gambino,Peskin:1995ev,Ramond:1981pw,Salme,s La fonte più importante, e più intuitiva, è sicuramente il libro di Schwichtenberg Physical law should have mathematical beauty.symmetry.

Altre fonti riguardo le parti della teoria dei gruppi utile alla Fisica sono:

- Jakob Schwichtenberg. *Physics from Symmetry*, Springer (2018).
- S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. 1, cap. II, Cambridge University Press (1995), per una ampia illustrazione del gruppo di Poincaré in Meccanica Quantistica Relativistica.
- M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (2007).
- B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, Springer (2015).
- W. Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific Pub Co Inc. (1985).
- L. Fonda, *Symmetry Principles in Quantum Physics*, M.Dekker (1970).
- D. Tong, *Quantum Field Theory, Lecture notes*.

Può anche essere utile rivedere il capitolo riguardante le simmetrie e le quantità conservate del corso di *Meccanica Quantistica 1*, presente nei miei appunti.

Perché è importante la teoria dei gruppi?

Come possiamo vedere nell'Appendice §C, dove analizziamo il teorema di Noether (ne vedremo l'applicazione al caso della QFT nel capitolo

§5.2), che ci dice che ad ogni simmetria continua corrisponde una quantità conservata, la quale risulta essere il generatore di tale simmetria. La definizione di simmetria è che il nostro sistema rimane invariato sotto certi set di trasformazioni e i gruppi sono i "contenitori" che contengono tali trasformazioni.

Nota che esistono due tipi di simmetrie, ovvero *continue* e *discrete*. Una simmetria continua è una trasformazione per cui il sistema rimane invariato anche per trasformazioni piccolissime; mentre discrete sono trasformazioni che lasciano invariato il sistema per un cambio non su tutti i valori del parametro della trasformazione. Noi per ora ci interesseremo solamente a delle simmetrie continue, lasciando quelle discrete ai noi del futuro e torneremo su di loro solamente più tardi, quando saremo più allenati nella nostra teoria.

Le leggi di invarianza, quindi le simmetrie del nostro sistema fisico, in matematica (e fisica) si trattano con la teoria dei gruppi, ed in particolare le simmetrie continue con la teoria dei gruppi di Lie.¹ Quello che faremo nel corso del capitolo sarà cercare di capire come classificare le simmetrie di un sistema in modo astratto, costruire e trattare un gruppo e poi applicare le nozioni astratte (che ci sembreranno completamente scollegate da ciò che dobbiamo fare) alla teoria quantistica relativistica che vogliamo costruire.

Sarà fondamentale ricordare, o studiare da capo, come sono fatti gli operatori (le matrici) legati a specifiche trasformazioni; ad esempio trasformazioni di Lorentz o Poincaré visto che siamo interessati alla Relatività Speciale. Nella costruzione della nostra nuova teoria saranno quindi cruciali le simmetrie alla base delle trasformazioni di Lorentz, motivo per cui cercheremo degli invarianti per esse.

Vedi l'appendice D per alcune notazioni riguardo la teoria dei gruppi.

3.1 Basic facts about Groups and Lie algebras

Il titolo si rifà al capitolo §15.4 di Peskin, Schroeder Physical law should have mathematical beauty. Peskin:1995ev. In Fisica sono di particolare interesse le proprietà dei gruppi continui. Chiamiamo **gruppo di simmetria** l'insieme delle trasformazioni che lasciano un certo oggetto invariato. Definiamo subito che cos'è un gruppo.

Definizione 1. Un **gruppo** è un insieme di elementi $G = \{g\}$, insieme ad un'operazione binaria $\circ$, che soddisfano certe regole algebriche:

1. (chiusura) $\exists$ una legge di composizione $\circ$ tale che se $g_1, g_2 \in G$ allora

$$g_1 \circ g_2 = g_3 \in G. \quad (3.1.1)$$

¹Storicamente la teoria dei gruppi fu formulata per trattare le simmetrie delle equazioni.

2. (elemento neutro) $\exists I$ elemento identità:

$$\forall g \in G \quad : \quad Ig = gI = g. \quad (3.1.2)$$

3. (elemento inverso) $\exists g^{-1}$ elemento inverso

$$\forall g \in G \quad : \quad gg^{-1} = g^{-1}g = I. \quad (3.1.3)$$

4. Associatività:

$$(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3). \quad (3.1.4)$$

Un gruppo si indica come $(G, \circ)$.

L'operazione binaria la consideriamo come una qualsiasi operazione astratta, che nel caso in cui "rappresentiamo" le nostre trasformazioni con delle matrici, allora $\circ$ è la classica moltiplicazione tra matrici, però se i nostri elementi del gruppo sono altre cose dalle matrici, allora l'operazione $\circ$ può essere altro. Le proprietà che richiediamo a G dopotutto sono delle cose ragionevoli. Chiediamo che se noi agiamo con due trasformazioni successive essa sia ancora una trasformazione di G è come chiedere che se prendiamo un oggetto e facciamo prima una rotazione di 20° e poi una di 70° , questo equivale a farne una di 90° . Chiedere che esista un elemento neutro è richiedere che esista un elemento che corrisponde a non agire sul sistema e lasciarlo invariato. L'esistenza dell'elemento inverso ci garantisce che se noi facciamo una certa trasformazione possiamo sempre tornare al punto iniziale percorrendo la trasformazione inversa. L'associatività ci permette di eseguire trasformazioni sui nostri oggetti nell'ordine che preferiamo, ottenendo lo stesso risultato.

Ad esempio $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo; $(\mathbb{Z}, \cdot)$ non è un gruppo poiché non ammette l'inverso; $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ è un gruppo.

Utilizzare la teoria dei gruppi ci permette di non dover studiare i singoli oggetti, ma le proprietà di simmetria in generale. Vedremo anche che più ci spingiamo in astratto e più sarà facile vedere ciò che ci interessa.

3.1.1 Teoria delle rappresentazioni

Gli elementi di un gruppo sono puramente astratti, o almeno per ora, ma noi siamo interessati alle trasformazioni che questi oggetti astratti inducono sul sistema fisico che stiamo studiando. Questo dunque la nostra attuale trattazione potrebbe risultare leggermente problematico. Infatti sappiamo che alle invarianze del sistema possiamo associare dei gruppi e che ogni gruppo possiede degli elementi che possono essere scritti come l'esponentiale di certi coefficienti e dei generatori del gruppo stesso. Però per classificare o comunque studiare e capire come agisce un gruppo è fondamentale sapere come sono fatti i suoi elementi e dunque i suoi generatori. Cosa che per ora non abbiamo ancora detto come fare. Diamo una definizione.

Definizione 2. Dare una **rappresentazione** di un gruppo G vuol dire: realizzare delle relazioni moltiplicative del gruppo G tramite un corrispondente gruppo di matrici quadrate. Queste matrici sono pensate come operatori che agiscono su uno spazio vettoriale V la cui dimensione è detta **dimensione della rappresentazione**.

Una rappresentazione è una mappa che manda l'elemento g del gruppo in una matrice $n \times n$:

$$g \rightarrow M(g).$$

tale che:

$$M(g_1)M(g_2) = M(g_1 \circ g_2) \quad (3.1.5)$$

$$M(I) = \mathbb{1} \quad (3.1.6)$$

da cui segue che:

$$M(g^{-1})M(g) = M(I) = \mathbb{1} \implies M(g^{-1}) = [M(g)]^{-1}. \quad (3.1.7)$$

Dunque, le rappresentazioni sono delle mappe che ci permettono di associare, ad ogni elemento del gruppo, una trasformazione e quindi, una matrice. Grazie alle rappresentazioni, possiamo agire con ogni elemento del gruppo su elementi di un certo spazio vettoriale; cosa che sappiamo fare bene.

L'associatività è automatica poiché il prodotto tra matrici è associativo. Per questo, tutte le proprietà del gruppo sono realizzate esplicitamente dalle matrici di una rappresentazione. La rappresentazione più semplice e naturale usata per definire un gruppo è detta **rappresentazione definente**² o **fondamentale**. Ovviamente di un gruppo possiamo dare molte rappresentazioni diverse, che possono avere dimensioni diverse (finite o infinite), vedi ad esempio p.20-23 in cui Salmé Physical law should have mathematical beauty. Salmé oltre alla rappresentazione matriciale 3×3 di $SO(3)$ da una rappresentazione infinito dimensionale che descrive una rotazione in uno spazio funzionale. Noi vedremo l'esempio di $SU(2)$, che è più interessante per i nostri fini.

Vediamo un'altra definizione.

Definizione 3. Se esiste una relazione univoca tra gli elementi del gruppo e le matrici che li rappresentano (cosa che non sempre succede visto che si possono avere rappresentazioni matriciali che rappresentano gli stessi elementi), allora la rappresentazione si dice **fedele**.

La rappresentazione fondamentale di un gruppo è la rappresentazione fedele con le dimensioni più piccole possibili e fornisce la dimensione del

²Si potrebbe anche chiamare **rappresentazione vettoriale**.

gruppo. Ad esempio, $SU(2)$, il gruppo di spin, ha dimensione 2 poiché ha rappresentazione fondamentale data da matrici 2×2 .

Abbiamo accennato al fatto che di uno specifico gruppo si possono dare più tipi di rappresentazioni, però esiste una rappresentazione più importante delle altre.

Definizione 4. *La **rappresentazione irriducibile** è una rappresentazione per cui non c'è modo di ridurre la sua dimensione.*

Se la rappresentazione è *riducibile* tutte le matrici possono essere ridotte in forma diagonale a blocchi (attraverso trasformazioni di similitudine³). Una rappresentazione riducibile (D) si può descrivere completamente attraverso le rappresentazioni irriducibili (A, B, C) che ne formano i blocchi. In particolare, si dice che è la somma diretta di tali rappresentazioni irriducibili:

$$D = A \oplus B \oplus C. \quad (3.1.9)$$

Continuiamo a vedere alcune nozioni riguardo la teoria delle rappresentazioni.

Se il gruppo è abeliano la rappresentazione fondamentale è quella delle matrici 1×1 , ossia, i numeri. Per i gruppi non abeliani (quelli non commutativi, ad esempio $SU(2)$) la dimensionalità della rappresentazione fondamentale dev'essere maggiore di 1, ovvero, bisogna avere delle matrici per soddisfare l'algebra e avere una rappresentazione fedele.

Definizione 5. *Una **rappresentazione unitaria** è una rappresentazione in cui le sue matrici sono unitarie, e dunque tali che $UU^\dagger = \mathbb{1}$.*

Sono rappresentazioni particolarmente importanti poiché, se esistono, conservano il prodotto scalare tra i vettori di uno spazio vettoriale complesso (lo spazio di Hilbert).

Definizione 6. *Se $D(g)$ è una rappresentazione dell'elemento $g \in G$, allora $D^*(g)$ è la **rappresentazione complessa coniugata** del gruppo. Se chiamiamo T_i i generatori di G , allora:*

$$D(g) = \exp\{i\alpha_i T^i\} \quad (3.1.10)$$

$$D^*(g) = \exp\{-i\alpha_i T^{*i}\} \quad (3.1.11)$$

³In generale, si definiscono *equivalenti* rappresentazioni collegate da trasformazioni di similitudine: $M(g)$ e $\overline{M}(g)$ sono rappresentazioni equivalenti se:

$$\overline{M}(g) = A M(g) A^{-1} \quad , \quad \forall g \in G \quad (3.1.8)$$

con A matrice indipendente da g . Questa relazione di equivalenza permette di considerare rappresentazioni equivalenti come essenzialmente la stessa rappresentazione. Infatti la trasformazione di similitudine rappresenta semplicemente un cambio di base nello spazio vettoriale V , utilizzando una matrice A non singolare.

per cui $(-iT^{*i})$ sono i generatori della rappresentazione complessa coniugata.

Si può notare, ad esempio in $SU(3)$, che le due rappresentazioni dei generatori T^i e T^{*i} non sono equivalenti⁴, motivo per cui si hanno vettori di base, ovvero autovettori, diversi nelle due rappresentazioni. Invece, per $SU(2)$ le rappresentazioni dei generatori coincidono.

Definizione 7. Date due rappresentazioni $D(g)$ e $D'(g)$ del gruppo G , il prodotto diretto delle due rappresentazioni è la rappresentazione di g che agisce sullo spazio vettoriale ottenuto dal prodotto tensoriale tra i vettori base di $D(g)$ e $D'(g)$:

$$[D(g) v_i] \otimes [D'(g) v'_k] = [D(g) \otimes D'(g)] (v_i \otimes v'_k) \quad (3.1.12)$$

Esempi rilevanti in Fisica sono: l'unificazione delle interazioni deboli (governate da $SU(2)$) ed elettromagnetiche ($U(1)$)

$$SU(2) \otimes U(1)$$

e l'unificazione della forza nucleare forte ($SU(3)$), nucleare debole ed elettromagnetica

$$SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1).$$

La simmetria data da $U(1)$ è quella dell'iper-carica, $SU(2)$ dell'isospin e $SU(3)$ del colore. Ciascun gruppo di simmetria è indipendente dagli altri, dunque possiamo descrivere le singole teorie separatamente, però possiamo anche vedere la teoria unificata che descrive tutte le trasformazioni possibili.

3.1.2 Gruppi di Lie

Una tipologia di gruppi che ci interesserà particolarmente sarà:

Definizione 8. Un **gruppo di Lie** è un gruppo di trasformazioni, continuo e i cui elementi sono funzioni analitiche (continue ed infinitamente derivabili) di un certo numero finito di parametri $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

All'interno di cui stiamo utilizzando la definizione:

Definizione 9. Un gruppo $(G, \circ)$ si dice **continuo** se il numero di elementi è infinito non numerabile.

In realtà, però, per noi è anche fondamentale che un gruppo sia connesso.

Definizione 10. Un gruppo si dice **connesso** se i suoi elementi si possono connettere con continuità all'identità.

⁴Questo vuol dire che $ST_iS^{-1} \neq -T_i^*$.

Un gruppo continuo e connesso è molto importante per noi, poiché è un gruppo i cui elementi sono infinitesimamente vicini all'identità, che è fondamentale perché vuol dire che un generico elemento del gruppo si può scrivere come l'azione ripetuta (infinite volte) di questi elementi infinitesimi. Sono proprio i gruppi di Lie quei gruppi per cui è possibile definire e studiare le trasformazioni infinitesime. Un elemento g del gruppo, infinitesimamente vicino l'identità può essere scritto come:

$$g(\alpha) = 1 + i\alpha_a T^a + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (3.1.13)$$

in cui α^a sono i parametri infinitesimi del gruppo e sono parametri continui (reali o complessi), invece, i T^a sono operatori hermitiani⁵ e vengono chiamati i **generatori** del gruppo di simmetria.

In generale ogni elemento g del gruppo di Lie si può scrivere, in modo economico utilizzando i generatori del gruppo e l'esponenziazione, come:

$$g(\alpha) = e^{i\alpha_a T^a} \quad (3.1.15)$$

in cui α_a e T^a li abbiamo già visti, ma sappiamo bene che quando compare un esponenziale, in una qualche definizione, quello che abbiamo è una definizione data dal suo sviluppo in serie. L'indice a assume valori che vanno da $1, \dots, \dim G$. In (3.1.15) nota sia che il coefficiente $\alpha_a = 0$ definisce l'identità. Definiamo che cos'è la dimensione di un gruppo.

Definizione 11. La *dimensione* di un gruppo è il numero di parametri (generatori) necessari a descrivere completamente un gruppo.

Nota che la dimensione di un gruppo è diversa dalla dimensione dello spazio vettoriale su cui agiscono gli elementi della rappresentazione (questo è un concetto importante).

Però, come troviamo i generatori nella pratica? Abbiamo detto che ogni elemento di un gruppo di Lie può essere scritto come (3.1.15). Abbiamo anche già detto che T^a sono i generatori del gruppo e sono rappresentabili da matrici $n \times n$. La struttura di G , gruppo di Lie, sarà determinata da piccole perturbazioni nell'intorno dell'identità, ovvero, da perturbazioni infinitesime. La rappresentazione di ogni generatore di G la si trova facendo la derivata rispetto al suo corrispondente parametro. Spiego meglio. Quando $\alpha_a \ll 1$ si ha una trasformazione infinitesima:

$$g = 1 + i\alpha_a T^a. \quad (3.1.16)$$

⁵Sono hermitiani solo se il gruppo di Lie è unitario e a parametri reali, infatti:

$$U^\dagger = (\exp\{i\alpha_a T^a\})^\dagger = \exp\{-i\alpha_a T^{a\dagger}\} \equiv U^{-1} = \exp\{-i\alpha_a T\}. \quad (3.1.14)$$

Notiamo che dall'espressione (3.1.16) se si esplicita la somma sull'indice a e si aggiungono tutti i termini $\mathcal{O}(\alpha^2)$, allora si ricostruisce la definizione (3.1.15). Vediamo, inoltre, che l'espressione (3.1.16) è lineare nei parametri α_a , con $a = 0, \dots, n$, per cui possiamo determinare i generatori come:

$$T^a = -i \left. \frac{\partial g}{\partial \alpha_a} \right|_{\alpha=0}. \quad (3.1.17)$$

Nota che l'unità immaginaria introdotta in (3.1.17) è pura convenzione, ma permette di presentare il generatore come matrice hermitiana (i cui autovalli sono reali). Vedi la sottosezione §3.2 per un esempio di calcolo. È inoltre possibile raggiungere qualsiasi elemento di G connesso con l'identità tramite l'applicazione successiva di trasformazioni infinitesime date dai generatori:

$$g = (1 + i\alpha_a T^a)(1 + i\alpha_a T^a)(1 + i\alpha_a T^a) \dots \quad (3.1.18)$$

$$\implies g = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + i \frac{\alpha_a T^a}{k} \right)^k = e^{i\alpha_a T^a}. \quad (3.1.19)$$

È fondamentale per noi in Fisica, avere un gruppo connesso e la relazione (3.1.19) (ovvero la (3.1.15)). Considerato un certo numero di trasformazioni infinitesime siamo in grado di ricostruire una trasformazione finita utilizzando (3.1.19) e possiamo spostarci tra due punti qualsiasi dello spazio con continuità. Deriva da questo l'importanza di connetterci con l'identità, poiché così possiamo rappresentare il nostro gruppo tramite trasformazioni infinitesime.

Quello che facciamo è partire dall'identità e la possiamo modificare per infinitesimi, e infinitesimo per infinitesimo ricostruiamo una trasformazione continua. Quando diciamo infinitesimo per infinitesimo vuol dire esponenziale. Gli operatori che rappresentano la nostra trasformazione possono essere espressi tramite una trasformazione infinitesima in successione ad altre, come abbiamo visto. L'operatore finito che riusciamo ad ottenere lo possiamo sempre scrivere come l'esponenziale dei parametri e generatori del gruppo, ovvero utilizzando la relazione (3.1.15).

Vedi il capitolo §9 degli appunti di Meccanica Quantistica 1, in cui abbiamo visto che il generatore delle traslazioni è l'operatore impulso, ma che queste trasformazioni agiscono sugli stati del sistema tramite l'operatore $\exp\{-i\vec{a} \cdot \vec{p}\}$.

Grazie all'esponenziale, per ottenere le rappresentazioni dei gruppi di Lie connessi basta concentrarsi sulle rappresentazioni dei generatori.

Ricapitolando: determinati i generatori di un gruppo in modo astratto, ci interessa capire come gli elementi di un gruppo agiscano sugli stati fisici. Presi i generatori li possiamo rappresentare con una rappresentazione matriciale, la cui dimensione è la dimensione del gruppo (se la rappresentazione è

fondamentale), e ne si può vedere facilmente l'azione sugli stati fisici. I generatori, come già visto quando li abbiamo introdotti, sono (in MQ) operatori hermitiani sullo spazio di Hilbert.

I generatori T^a generano lo spazio di un gruppo infinitesimo di trasformazioni, per cui, il commutatore di due generatori dev'essere una combinazione lineare di generatori. Le regole di commutazione le possiamo quindi scrivere come:

$$[T^a, T^b] = i f^{ab}_c T^c \quad (3.1.20)$$

in cui f^{ab}_c la chiamiamo **costanti di struttura** di G , poiché codifica la struttura non abeliana del gruppo.

Definizione 12. *L'algebra di Lie di un gruppo (di Lie) è l'insieme delle relazioni di commutazione dei suoi generatori, che ne definisce le costanti di struttura e quindi caratterizza le trasformazioni del gruppo (caratterizzando la sua legge di composizione).*

In generale si indica l'algebra di Lie con i caratteri in stile fraktur. Ad esempio, per il gruppo $SO(1, 3)$ l'algebra la indichiamo con $\mathfrak{so}(1, 3)$.

Presi i generatori possiamo determinare le parentesi di Lie, l'algebra del gruppo, in modo esplicito usando una rappresentazione del gruppo (ne vedremo degli esempi).

È sempre vero che le rappresentazioni di un gruppo G sono rappresentazioni della sua algebra, ma non è sempre vero il contrario, ossia che tutte le rappresentazioni dell'algebra di G sono rappresentazioni del gruppo G . Vedi nella sottosezione §3.2 l'esempio del gruppo $SU(2)$.

Per un gruppo di Lie vale anche⁶ l'identità:

$$[[T^a, T^b], T^c] + [[T^b, T^c], T^a] + [[T^c, T^a], T^b] = 0 \quad (3.1.23)$$

che si traduce in:

$$f^{ab}_d f^{dc}_e + f^{bc}_d f^{da}_e + f^{ca}_d f^{db}_e = 0 \quad (3.1.24)$$

⁶In realtà ci sono anche altre due proprietà che non utilizzeremo molto:

1. Nella rappresentazione fondamentale vale:

$$\text{Tr}\{T^a T^b\} = \frac{1}{2} \gamma^{ab} \quad (3.1.21)$$

in cui γ^{ab} è la metrica di Killing.

2. Vale inoltre:

$$f^{abc} = f^{ab}_d \gamma^{dc} \equiv \text{tensore completamente antisimmetrico.} \quad (3.1.22)$$

chiamata **identità di Jacobi**.

In generale, un'algebra è uno spazio vettoriale lineare dotato di una legge di composizione; l'algebra di Lie è lo spazio vettoriale astratto (vedi la sezione §3.3) i cui elementi sono i generatori, la cui legge di composizione sono le regole di commutazione (anticommutazione o miste, ma non quelle del gruppo!) e si deve verificare l'identità di Jacobi. In più l'algebra non dipende dalla rappresentazione scelta.

Aggiungiamo un'altra proprietà che ci permette di vedere com'è connessa l'operazione di composizione degli elementi del gruppo con l'operazione di composizione dell'algebra di Lie. La **formula di Baker-Campbell-Hausdorff** ci dice che:

$$g \circ h = \underbrace{e^X}_{g \in G} \underbrace{e^Y}_{h \in G} = e^{\underbrace{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X,[X,Y]]-\frac{1}{12}[Y,[X,Y]]+\dots}_{\in G}}. \quad (3.1.25)$$

in cui i puntini indicano i termini successivi, che comunque sono sempre esprimibili tramite commutatori. Questa formula mostra che la conoscenza dell'algebra di Lie è sufficiente per ricostruire il prodotto, in genere non commutativo, del corrispondente gruppo di Lie. Ad esempio, abbiamo X e Y generatori di un certo gruppo G , conosciamo le loro parentesi di Lie $[X, Y]$ e in questo modo possiamo comporre due elementi di G , secondo la legge di composizione del gruppo, e ottenere ancora un elemento di G . Tieni a mente che generalmente la moltiplicazione di due generatori del gruppo non fornisce un'altro elemento del gruppo, però i commutatori lo danno, se il gruppo è chiuso.

Diamo altre due definizioni importanti.

Definizione 13. Il **rango** dell'algebra di Lie è definito come il numero massimo di generatori commutanti tra loro. Dunque, da il numero di generatori che possono essere rappresentati da matrici diagonalizzabili simultaneamente.

Definizione 14. La **rappresentazione aggiunta** è quella in cui i generatori sono le costanti di struttura.

Il vantaggio è che il numero di generatori è uguale alla dimensionalità della rappresentazione aggiunta. Ad esempio, per $SU(2)$ la dimensionalità della rappresentazione aggiunta è 3, i generatori sono per l'appunto σ_i con $i = 1, 2, 3$.

3.1.3 Operatori di Casimir

Trovata l'algebra di un gruppo è possibile trovare un'operatore che commuti con tutti i generatori T_i del gruppo:

$$\exists C / [C, T_i] = 0 \quad \forall i \quad (3.1.26)$$

e l'operatore C è chiamato **operatore di Casimir**. In generale, C non è un'operatore lineare nei generatori. In ogni *rappresentazione irriducibile*⁷ C è un multiplo dell'operatore identità $C = k\mathbb{1}$. Le rappresentazioni irriducibili di un gruppo di Lie possono pertanto essere classificate in base agli autovalori degli operatori di Casimir, dove il numero minimo di operatori di Casimir necessari a specificare completamente tutte le rappresentazioni irriducibili è pari al rango dell'algebra.

Gli operatori di Casimir sono generalmente funzione dei generatori e sono quadratici.

Un'esempio è l'operatore $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ di $SO(3)$, che in Meccanica Quantistica abbiamo utilizzato per completare lo SCOC e rimuovere la degenerazione.

Vedremo l'effettiva utilità degli operatori di Casimir nella sezione §3.4 quando parleremo delle etichette da appiccicare agli stati fisici.

3.1.4 Alcune definizioni

Diamo alcune definizioni generali sui gruppi che non necessariamente saranno essenziali per la teoria che costruiremo, infatti potresti leggere velocemente questa sezione, ma potrebbe capitare che le tireremo in ballo e per completezza è meglio vederle.

C'è un particolare tipo di gruppi che potrebbe essere utile.

Definizione 15. *Un gruppo $(G, \circ)$ si dice **abeliano** se:*

$$\forall a, b \in G \quad : \quad a \circ b = b \circ a. \quad (3.1.27)$$

Un'altra nozione è:

Definizione 16. *L'**ordine** di un gruppo è il numero di elementi che compongono il gruppo.*

L'ordine può essere finito o infinito. Ad esempio, il gruppo delle permutazioni di 3 oggetti S_3 è finito e ha $3! = 6$ elementi. Il gruppo delle matrici 3x3 che rappresentano le rotazioni proprie in $\mathbb{R}^3$, ovvero $SO(3)$, è infinito (non

⁷Questo è enunciato nel lemma di Schur.

solo perché gli assi di rotazione sono infiniti, ma anche perché il parametro del gruppo può variare con continuità tra $[0, 2\pi)$.

È opportuno dare ancora qualche definizione generale sui gruppi e sui gruppi di Lie.

Definizione 17. *Un gruppo si dice **compatto** se i parametri variano in un intervallo chiuso e limitato.*

Ad esempio, le rotazioni formano un gruppo compatto, poiché gli angoli variano nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Definizione 18. *Se un'insieme è **compatto** esiste sempre una successione di elementi che converge ad un qualsiasi elemento dell'insieme:*

$$\forall a \in G, \exists a_n \in G \quad / \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Definizione 19. *Se $H \subset G$, H si dice **sottogruppo** di G se l'insieme dei suoi elementi è gruppo con la stessa operazione di G .*

*Il sottogruppo si dice **invariante** (o normale) se:*

$$\forall g \in G, \forall h \in H, g \circ h \circ g^{-1} \in H \quad (3.1.28)$$

Un esempio di ciò è il gruppo delle rotazioni attorno l'asse z , che è sottogruppo di $SO(3)$. Un altro esempio è lo stesso $SO(3)$ che è sottogruppo di $O(3)$.

Vediamo l'analogo anche per le algebre di Lie:

Definizione 20. *Una **sottoalgebra** di un'algebra A , è un sottoinsieme $B \subseteq A$ che è chiuso rispetto alle operazioni dell'algebra e che contiene gli elementi necessari per essere anch'essa un'algebra. Questo vuol dire:*

- B è un sottospazio vettoriale di A (quindi chiuso per somma e moltiplicazione scalare).
- B è chiuso rispetto alla moltiplicazione definita in A (cioè se $x, y \in B$ allora anche $x \circ y \in B$).

Un esempio semplice è: preso $M_2(\mathbb{R})$, cioè l'insieme delle matrici 2×2 a coefficienti reali, una sua sottoalgebra è l'insieme delle matrici diagonali, poiché è un sottospazio vettoriale (possiamo sommare matrici diagonali e avere ancora matrici diagonali) ed il prodotto di due matrici diagonali è ancora una matrice diagonale.

Definizione 21. Un gruppo G si dice **semplice** se non ha sottogruppi invarianti. Invece, un gruppo è detto **semi-semplice** se non ha sottogruppi invarianti abeliani.

Un esempio è $SO(3)$, che ha come sottogruppo le rotazioni tridimensionali attorno ad un'asse, ma che non è un sottogruppo invariante, dunque, $SO(3)$ è semplice.

Esiste un analogo per le algebre di Lie. Una subalgebra dell'algebra di Lie, A , è chiamata **ideale**, I , se $\forall i \in I, \forall a \in A$ si ha $[i, a] \in I$. Diciamo che un'algebra di Lie è **semplice** se ha solo ideali triviali (ad esempio, l'algebra stessa). Un'algebra è **semi-semplice** se non ha ideali abeliani. Un'algebra semplice è anche semi-semplice, ma non vale il viceversa.

In Fisica i gruppi semi-semplici sono particolarmente importanti. Per i gruppi di Lie semi-semplici, gli operatori di Casimir (vedi sotto) permettono di catalogare le rappresentazioni irriducibili del gruppo. Il *teorema di Racah* nella teoria dei gruppi afferma che: *per un gruppo di Lie semisemplice, il numero di operatori di Casimir indipendenti è uguale al rango del gruppo stesso*. Questi operatori svolgono un ruolo cruciale nella classificazione delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi di Lie, poiché i loro autovalori possono essere utilizzati per etichettare tali rappresentazioni.

In più si può dimostrare che le algebre di Lie semi-semplici sono esprimibili come somma diretta di algebre semplici. A livello di gruppi, un gruppo semi-semplice si potrà esprimere come prodotto diretto di gruppi semplici (vedi la sezione §3.5.5).

Alcune motivazioni fisiche.

Possiamo enunciare, senza dimostrare, un teorema:

Teorema 1. *Le rappresentazioni unitarie dei gruppi compatti sono finito dimensionali.*

Questo teorema si applica a gruppi compatti, quali sono $SO(n)$ ed $SU(n)$. Vedi la sezione §3.2. Il gruppo di Lorentz $SO(1,3)$ e quello di Poincaré $ISO(1,3)$ non sono compatti, per cui il teorema non vale e le loro rappresentazioni unitarie sono infinito-dimensionali. Per la Teoria Quantistica dei Campi sono d'interesse: le rappresentazioni finito-dimensionali non unitarie del gruppo di Lorentz, utilizzate per descrivere i campi quantistici e in generale le osservabili, e le rappresentazioni infinito-dimensionali unitarie del gruppo di Poincaré, che sono realizzate tramite operatori unitari che garantiscono la conservazione della probabilità (dunque realizzate tramite operatori unitari). Ci interessano le trasformazioni unitarie poiché gli stati di un sistema fisico si trasformano secondo esse.

In Teoria Quantistica dei Campi ogni rappresentazione della natura (particelle), in termini di interazioni fondamentali, è rappresentata da una rappresentazione irriducibile di un certo gruppo che scegliamo avere le giuste proprietà per la nostra teoria. Dobbiamo però stare attenti a scegliere gruppi che siano il più generali possibili, in modo da inglobare in esso tutte le possibili rappresentazioni. Infatti nel modello standard utilizziamo $SU(2)$, al posto di $SO(3)$, proprio perché $SU(2)$ è un ricoprimento universale di $SO(3)$.

3.2 Alcuni esempi di gruppi di Lie rilevanti in Fisica

Vediamo in questa sezione alcuni esempi rilevanti in Fisica di gruppi di Lie, che non solo utilizzeremo nella nostra teoria, ma che ci permetteranno di capire meglio la teoria dei gruppi.

In particolare, ci renderemo conto che è molto più comodo per noi utilizzare i generatori per studiare un gruppo, anziché gli elementi dello stesso. Ad esempio, il gruppo delle rotazioni è un gruppo continuo, poiché $SO(3)$ è un gruppo con un numero infinito non numerabile di elementi. Per la Meccanica Quantistica, è subito chiaro, che $SO(3)$ non è un gruppo molto bello, perché sappiamo che lo spazio di Hilbert è uno spazio separabile, che ha ∞ elementi, ma numerabile. Però, se al posto di utilizzare gli ∞ elementi di $SO(3)$, utilizziamo i suoi generatori la situazione migliora. I generatori del gruppo delle rotazioni sono solamente 3: L_x , L_y ed L_z e non infiniti.

3.2.1 Gruppo delle fasi $U(1)$

In generale definiamo $U(n)$ come:

$$U(n) = \{\text{matrici unitarie } nxn\}.$$

Ricorda che unitarie vuol dire tali per cui $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$ e sono necessariamente matrici $\mathbb{C}$.

Noi siamo particolarmente interessati al gruppo:

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} = \{e^{i\alpha} / \alpha \in \mathbb{R}\}$$

in cui la legge di composizione è l'usuale moltiplicazione di numeri complessi. Si vede che tale gruppo è definito tramite la sua rappresentazione fondamentale essendo unidimensionale. Per trasformazioni infinitesime si ha:

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha + \dots \quad (3.2.1)$$

ed il generatore infinitesimo è dato da $T = 1$, pensabile come una matrice 1×1 , il quale produce l'algebra di Lie abeliana del gruppo $U(1)$ data dal

commutatore:

$$[T, T] = 0. \quad (3.2.2)$$

In base alle considerazioni fatte nella sezione §3.1 possiamo pensare all'algebra di Lie (3.2.2) come all'algebra di Lie astratta corrispondente al gruppo $U(1)$, che viene poi rappresentata da matrici diverse nelle diverse rappresentazioni. Possiamo vedere come i numeri complessi descrivano delle rotazioni bidimensionali e siano legati al gruppo $SO(2)$, ovvero al gruppo delle matrici 2x2 reali con determinante 1 (vedi la sezione §3.2.2).

La rappresentazione definente rappresenta un elemento di $U(1)$ con $e^{i\alpha}$ che "ruota" naturalmente un vettore complesso unidimensionale. Definendo il numero complesso $z = x + iy$ lo possiamo scrivere tramite la formula di Eulero:

$$R_\theta = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (3.2.3)$$

e possiamo vedere che le due rappresentazioni (ancora unidimensionali) rispettano l'ortogonalità degli elementi gruppali:

$$z^* z = x^2 + y^2 = 1 \quad (3.2.4)$$

e anche che:

$$R_\theta^* R_\theta = e^{-i\theta T^\dagger} e^{i\theta T} = 1. \quad (3.2.5)$$

Possiamo dare una rappresentazione matriciale di z definendo:

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

che possiamo verificare rispettivamente le usuali regole $\mathbb{1}^2 = \mathbb{1}$, $\mathbb{1}i = i\mathbb{1} = i$ e anche:

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}. \quad (3.2.7)$$

Scrivendo sotto forma matriciale (3.2.3) vediamo:

$$R_\theta = e^{i\theta_z} \quad (3.2.8)$$

$$= \cos \theta_z + i \sin \theta_z \quad (3.2.9)$$

$$= \cos \theta_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta_z \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.10)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z \end{pmatrix} \quad (3.2.11)$$

per cui abbiamo fatto diventare i numeri complessi (z) della matrici 2x2 ad elementi reali che codificano delle rotazioni. Possiamo facilmente verificare che la matrice R_θ appartiene al gruppo $SO(2)$ (Vedi la sezione §3.2.2). In questo senso si può dire che i gruppi $SO(2)$ ed $U(1)$ sono equivalenti dal punto

di vista operativo, descrivono lo stesso gruppo abeliano e matematicamente possiamo dire che tra $SO(2)$ e $U(1)$ esiste un isomorfismo.⁸

Abbiamo quindi visto che è possibile legare le rotazioni bidimensionali (il gruppo $SO(2)$) con i numeri complessi bidimensionali. Una nota importante è che per descrivere una rotazione 2D di $SO(2)$ abbiamo bisogno di solamente 1 parametro, ovvero l'angolo θ , mentre i numeri complessi in due dimensioni sembrano avere due gradi di libertà. Per questo motivo non dobbiamo dimenticarci che l'appartenenza al gruppo $U(1)$ implica la condizione $|z|^2 = 1$, la quale riduce i gradi di libertà ad 1.

Vedremo altri esempi per cui, una volta trovata l'algebra di Lie astratta corrispondente, possiamo scegliere tra una gamma di diverse rappresentazioni di diverse dimensioni. Nella sezione §3.2.2 parleremo di quella del gruppo delle rotazioni.

Il gruppo $U(1)$ è rilevante in Fisica poiché le equazioni di Maxwell sono invarianti per trasformazioni di fase, rappresentate appunto da $U(1)$. In più, il gruppo di simmetria $U(1)$ è usato in Fisica quando ci sono numeri quantici additivi quantizzati. Siccome le rappresentazioni irriducibili del gruppo $U(1)$ sono tutte unidimensionali (complesse), allora tutte queste matrici sono 1×1 e dunque numeri, positivi o negativi, detti *carica*. Quanto analizzato sinora permette anche di interpretare le possibili cariche (generalizzate, ad esempio elettrica, di colore, etc.) delle particelle come associate ad una rappresentazione del gruppo di simmetria. Ad esempio, nel modello standard compare nel gruppo di simmetria della teoria $U(1)$, che è proprio il gruppo di iper-carica.

Ad esempio, nella rappresentazione di carica q , dove l'elemento $e^{i\alpha}$ è rappresentato da $e^{iq\alpha}$, si vede che il generatore infinitesimo è rappresentato da $T = q$ e soddisfa la stessa algebra (3.2.2).

3.2.2 Il gruppo $SO(n)$

Definiamo il gruppo:

$$O(n) = \{\text{matrici ortogonali } nxn \text{ ad elementi reali}\}.$$

Ricorda che ortogonali vuol dire tali per cui $U^T = U^{-1}$ e che $U^T U = U U^T = \mathbb{1}$. Però la parte interessante è un suo sottogruppo, quello per cui il determinante della matrice è 1:

$$SO(n) = \{\text{matrici ortogonali } nxn \text{ ad elementi reali e con } \det = 1\}.$$

⁸Diciamo **isomorfismo** quando abbiamo una mappa uno-a-uno Π che preserva la struttura prodotto:

$$\Pi(g_1)\Pi(g_2) = \Pi(g_1g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbb{C}. \quad (3.2.12)$$

Due gruppi isomorfi sono matematicamente indistinguibili.

Possiamo analizzare, ad esempio, il gruppo $SO(3)$, ossia, il gruppo delle matrici R reali ortogonali 3×3 con determinante uguale ad 1.

Siamo più interessati ad $SO(3)$ piuttosto che ad $O(3)$ (ricorda questa osservazione perché ci tornerà utile nella sezione §3.5.1) perché il gruppo $O(3)$, gruppo delle matrici ortogonali 3×3 con determinate ± 1 , contiene anche l'inversione spaziale I_s (per cui si ha $\det\{I_s\} = -1$), che non può essere connessa con continuità con l'identità⁹, diversamente dalle rotazioni proprie in $SO(3)$ ¹⁰.

Il gruppo $SO(3)$ è quello che rappresenta le rotazioni nello spazio tridimensionale¹¹. $SO(3)$ è un gruppo di Lie compatto, connesso e non abeliano. La matrice R genera le trasformazioni di un vettore tridimensionale:

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{x}' = R\vec{x} \quad (3.2.13)$$

o in notazione indiciale¹²:

$$x^i \longrightarrow x'^i = R^i_j x^j \quad , \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.2.14)$$

Conosciamo bene come scrivere, ad esempio, una rotazione attorno l'asse z (è analogo per rotazioni attorno x o y):

$$R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.15)$$

se consideriamo $\theta_z \ll 1$, allora la matrice R_z diventa:

$$R_z(\theta_z \ll 1) \sim \mathbb{1} + \theta_z \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \quad (3.2.16)$$

in cui possiamo individuare per definizione il generatore. Infatti riconosciamo la relazione che avevamo scritto per un generico elemento del gruppo (3.1.16). La matrice che compare dietro θ_z (parametro) è appunto iT^3 , e di conseguenza:

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.17)$$

⁹Il gruppo $O(3)$ contiene simmetrie discrete.

¹⁰Sarà proprio questo il motivo per cui ci interesserà solo $SO(3)$ quando studieremo il gruppo di Lorentz.

¹¹Nota che ci sono due modi di vedere una rotazione. Quando teniamo fisso il sistema di riferimento, ma ruotiamo il vettore posizione si parla di **trasformazione attiva**, quando teniamo fisso il vettore, ma ruotiamo il sistema di riferimento parliamo di **trasformazione passiva**.

¹²Nota che in questo caso mettere indici alti o bassi è irrilevante, poiché la metrica in $\mathbb{R}^3$ è δ_{ij} .

La i la mettiamo per rendere il generatore hermitiano, così che abbia autovallori reali. Possiamo fare lo stesso procedimento anche per rotazioni attorno l'asse x ed y (le matrici di rotazione attorno ad un'asse si costruiscono ponendo 1 nella riga-colonna dell'asse di rotazione e la matrice 2x2 di sin e cos, così com'è in R_z , nell'altro blocco) e determinare T^1 e T^2 (vedi p.15 di Salmé Physical law should have mathematical beauty. Salme o p. 13 di Bastianelli Physical law should have mathematical beauty. Bastianelli):

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.18)$$

in questo modo, avendo espressioni esplicite dei generatori si può determinare facilmente l'algebra di Lie del gruppo, che risulta essere:

$$[T^i, T^j] = i\varepsilon^{ijk}T^k. \quad (3.2.19)$$

Da (3.2.19) si vede che $SO(3)$ non è abeliano¹³. L'algebra trovata è stata ricavata considerando la rappresentazione definente, ma è anche possibile considerare tale algebra come l'algebra astratta di $SO(3)$ per poter studiare le diverse rappresentazioni irriducibili.

Abbiamo anche già detto che le rappresentazioni irriducibili dell'algebra di Lie corrispondono alle rappresentazioni infinitesime del gruppo e che esponenziandole possiamo ottenere le trasformazioni finite, che forniscono una rappresentazione del gruppo.

Il gruppo $SO(3)$ è rilevante in Fisica perché se rinominiamo $T^i = J^i$ (e ci mettiamo in unità naturali, $\hbar = 1$) allora riconosciamo:

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk}J^k. \quad (3.2.20)$$

che è l'algebra quantistica del momento angolare, il cui studio delle rappresentazioni unitarie irriducibili può essere risolto esplicitamente con i metodi visti in Meccanica Quantistica. La rappresentazione fondamentale di $SO(3)$ è infatti data dalle matrici che operano sugli stati $|l, m\rangle$, autostati del momento angolare, e li mescolano tra loro. Le rappresentazioni irriducibili di $SO(3)$ sono date dalle armoniche sferiche Y_l^m . Ad $|l, m\rangle$ corrispondono le armoniche sferiche Y_l^m , che formano una base della rappresentazione di spin l , che è $2l+1$ dimensionale (infatti i valori possibili di m sono $2l+1$), quindi, la rappresentazione fondamentale (e irriducibile) di $SO(3)$ è data da matrici $(2l+1) \times (2l+1)$ -dimensionali.

Come visto, le rotazioni in $\mathbb{R}^3$ dipendono in modo continuo da 3 parametri, che sono i tre angoli di Eulero, motivo per cui sono un gruppo

¹³Nota però che $SO(2)$ è un gruppo abeliano, vedi p. 12 di Bastianelli Physical law should have mathematical beauty. Bastianelli.

continuo, ma anche compatto dal momento che essi variano nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Notiamo che abbiamo un gruppo connesso, poiché possiamo passare con continuità dalla matrice identità (δ_{ij}) ad una qualsiasi rotazione, visto che la dipendenza dagli angoli è data dalle funzioni analitiche seno e coseno. Chiamiamo gruppo delle rotazioni **proprie** il gruppo delle matrici 3×3 (rotazioni in $\mathbb{R}^3$) poiché sono connesse con continuità all'identità. Le rotazioni in $\mathbb{R}^3$ sono rappresentate da matrici 3×3 , ma appena cominciano ad agire su spazi funzionali la loro rappresentazione può aumentare la sua dimensionalità o assumere una forma differenziale (in questo caso si parla di dimensionalità infinita della rappresentazione).

Il gruppo delle rotazioni proprie si indica con $SO(3)$, come ben sappiamo. L'aggettivo ortogonale ci indica un'importante proprietà delle rotazioni, ossia che *il prodotto scalare tra due vettori non cambia se applichiamo la stessa rotazione ai due vettori* (vedi p.13-14 di Salmé Physical law should have mathematical beauty.Salme). Questo vuol dire che $SO(3)$ preserva il modulo quadro delle lunghezze, come è molto rapido vedere. Prendiamo:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = R_z \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.2.21)$$

che per i vettori riga è:

$$(x'_1 \quad x'_2 \quad x'_3) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) R_z = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.22)$$

facendo il modulo del vettore trasformato (moltiplichiamo vettore riga per colonna):

$$(x'_1 \quad x'_2 \quad x'_3) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = (x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 \quad (3.2.23)$$

$$= (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \quad (3.2.24)$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.2.25)$$

$$= (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.2.26)$$

$$= (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 \quad (3.2.27)$$

come volevasi dimostrare.

Si noti un'ultima cosa. L'algebra (3.2.19) non è valida per $SO(n)$, ma solo per $n = 3$. Per generalizzare si può indicare $T^1 = T^{23}$ (poiché T^1 genera una rotazione nel piano 2-3) e così via $T^2 = T^{31}$, $T^3 = T^{12}$. Gli elementi di matrice, è dimostrabile, possono essere scritti come:

$$(T^1)^i_j = (T^{23})^i_j = -i(\delta^{2i}\delta^3_j - \delta^{3i}\delta^2_j) \quad (3.2.28)$$

e analoghe per T^{31} e T^{12} . Si ottiene quindi:

$$(T^{kl})^i_j = -i(\delta^{ki}\delta^l_j - \delta^{li}\delta^k_j) \quad (3.2.29)$$

che può essere utilizzata per calcolare l'algebra di Lie di $SO(3)$. Si trova:

$$[T^{kl}, T^{ij}] = -i\delta^{li}T^{kj} + i\delta^{ki}T^{lj} + i\delta^{lj}T^{ki} - i\delta^{kj}T^{li}. \quad (3.2.30)$$

Nella forma (3.2.30) è valida per il generico gruppo $SO(n)$ e non solo nel caso $n = 3$. Naturalmente, gli indici assumono valori da 1 ad n . Inoltre, sostituendo la metrica euclidea δ_{ij} con la metrica di Minkowski g_{ij} , appropriata per uno spazio-tempo con n spazi ed m , la relazione (3.2.30) è l'algebra di Lie di $SO(n, m)$.

Possiamo anche vedere che anche per il gruppo $SO(3)$ esiste una cosa analoga all'isomorfismo visto per $SO(2)$ e $U(1)$. Infatti, definendo i quaternioni è possibile legare, in un modo leggermente più complicato rispetto quello tra le rotazioni bidimensionali e le trasformazioni di fase, le rotazioni tridimensionali con numeri complessi 4-dimensionali. Analizziamo meglio il gruppo $SU(2)$ prima di parlare di ciò.

3.2.3 Il gruppo $SU(n)$

È il gruppo definito come:

$$SU(n) = \{\text{matrici complesse unitarie } nxn \text{ con } \det = 1\}.$$

Uno dei gruppi più importanti in Fisica è $SU(2)$, vediamolo nel dettaglio.

Possiamo scrivere matrici che differiscono infinitesimamente dalla matrice unità come segue:

$$g \in SU(2) \quad , \quad g = \mathbb{1} + iT \quad T^i_j \ll 1. \quad (3.2.31)$$

Possiamo vedere che la richiesta che $g^\dagger = 1 - iT^\dagger$ coincida con $g^{-1} = 1 - iT$ (ossia che g siano matrici unitarie), implica che le matrici T siano hermitiane:

$$T = T^\dagger. \quad (3.2.32)$$

Inoltre, la richiesta di $\det\{g\} = 1$ ci fa vedere che:

$$\det\{g\} = 1 + i \operatorname{Tr}\{T\} \implies \operatorname{Tr}\{T\} = 0. \quad (3.2.33)$$

Una base di matrici 2x2 hermitiane a traccia nulla sono date dalle matrici di Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.34)$$

Le matrici di Pauli forniscono la rappresentazione fondamentale di $SU(2)$, che si indica con $D^{1/2}$. L'algebra ha dimensione 3 e rango 1 (cioè i generatori commutano solo con se stessi, vedi la regola di coomutazione (3.2.37), quindi, avremo al massimo un solo generatore che ha una rappresentazione diagonale). Possiamo quindi esprimere un'arbitraria matrice T , che sono i generatori infinitesimi del gruppo, come una combinazione lineare delle σ^a :

$$T = \theta_a \frac{\sigma^a}{2}, \quad a = 1, 2, 3 \quad (3.2.35)$$

in cui la normalizzazione (1/2) è stato scelto per motivi di ricoprimento; faremo tra pochissime righe un discorso di confronto tra $SU(2)$ ed $SO(3)$. La forma generica di un elemento del gruppo $SU(2)$ è:

$$g = \exp\left\{i\theta_a \frac{\sigma^a}{2}\right\} = \exp\{iT\}. \quad (3.2.36)$$

Definiti i generatori infinitesimi è possibile trovare l'algebra di Lie di $SU(2)$:

$$[T^a, T^b] = i\varepsilon^{abc}T^c \quad (3.2.37)$$

che possiamo notare coincidere con l'algebra di Lie (3.2.19) di $SO(3)$ (hanno le stesse costanti di struttura). Questo non è casuale, anzi ci dimostra che localmente sono lo stesso gruppo, anche se globalmente ci sono, ovviamente, differenze. Il fattore 1/2 nei generatori è necessario per vedere questa corrispondenza. In termini di geometria differenziale si dice che $SU(2)$ è un ricoprimento del gruppo $SO(3)$. La differenza tra $SO(3)$ ed $SU(2)$ la si può vedere banalmente nelle rappresentazioni fondamentali, formate rispettivamente da matrici 3x3 e 2x2.

Facciamo una veloce digressione sui *quaternioni*, così da vedere meglio un'ulteriore differenza, vista anche nel corso di Meccanica Quantistica 1 (vedi il capitolo §9), che si vede facendo una rotazione di 2π con rappresentazioni di $SO(3)$ o $SU(2)$.

Sappiamo che una trasformazione finita è ottenuta esponenziando trasformazioni infinitesime, in modo da renderle finite. Una rotazione finita g_3 ,

in $SU(2)$, attorno l'asse z è ottenuta scegliendo $\theta_3 = \theta$ e $\theta_1 = \theta_2 = 0$ in (3.2.35) ed esponenziando:

$$g_3(\theta) = e^{i\theta \frac{\sigma^3}{2}} \quad (3.2.38)$$

$$= 1 + i\theta \frac{\sigma^3}{2} + \frac{1}{2!} \left(i\theta \frac{\sigma^3}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(i\theta \frac{\sigma^3}{2} \right)^3 + \dots \quad (3.2.39)$$

$$= 1 + i \left(\frac{\theta}{2} \right) \sigma^3 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 - i \frac{1}{3!} \left(\frac{\theta}{2} \right)^3 \sigma^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\theta}{2} \right)^4 + \dots \quad (3.2.40)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\theta}{2} \right)^4 + \dots \right) + i\sigma^3 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\theta}{2} \right)^3 + \dots \right) \quad (3.2.41)$$

$$= \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + i\sigma^3 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (3.2.42)$$

scrittura che ci sta sostanzialmente dicendo che se noi proviamo a ruotare di un angolo θ una qualche cosa, agendo con l'elemento $g_3(\theta)$ su tale oggetto, allora non otteniamo una rotazione della quantità voluta, bensì compiamo una rotazione di $\theta/2$. Infatti, vediamo che se prendiamo $\theta = 2\pi$, allora:

$$g_3(2\pi) = -1 \quad (3.2.43)$$

che non coincide con l'identità di $SU(2)$. Nota che in (3.2.40) abbiamo utilizzato le relazioni delle matrici σ_i :

$$(\sigma^i)^{2n} = \mathbb{1}_2 \quad , \quad (\sigma^i)^{2n+1} = \sigma^i. \quad (3.2.44)$$

Questa appena vista è la nota proprietà di rotazione di uno spinore, che essendo un oggetto di $SU(2)$, se viene ruotato di 2π cambia segno.

Facendo la stessa cosa¹⁴ in $SO(3)$ invece si ottiene $g_3(2\pi) = 1$. Dunque, provando a fare una rotazione di un angolo θ , otteniamo effettivamente tale rotazione e non una dimezzata.

La trasformazione identità in $SU(2)$ la si ottiene solo per $\theta = 4\pi$.

Possiamo vedere l'esistenza di un'isomorfismo tra $SU(2)$ ed $SO(3)$ in due modi diversi, ma concettualmente uguali.

Il primo metodo che potremmo vedere è quello in cui mimiamo quello fatto per vedere l'isomorfismo tra $U(1)$ ed $SO(2)$. Fai riferimento al capitolo §3.3.1 del Schwichtenberg Physical law should have mathematical beauty.symmetry. Ovvero potremmo definire una generalizzazione dei numeri

¹⁴Con gli stessi procedimenti ottieni:

$$g_3(\theta_z) = \left(1 - \frac{1}{2!} \theta^2 + \dots \right) \mathbb{1} + iT_3 \left(\theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \dots \right) = \mathbb{1} \cos \theta + iT_3 \sin \theta \quad (3.2.45)$$

in cui però devi usare il fatto che i generatori delle rotazioni tridimensionali (3.2.17) sono tali per cui: $(T^i)^{2n} = \mathbb{1}$ e $(T^i)^{2n+1} = T_i$.

complessi ad una dimensione opportuna per descrivere rotazioni tridimensionali. Per avere numeri complessi che descrivessero rotazioni bidimensionali avevamo bisogno dei comuni numeri complessi in 2 dimensioni, i cui gradi di libertà si riducevano ad 1 dopo l'imposizione di $|z|^2 = 1$. Ora, sappiamo che le rotazioni tridimensionali hanno bisogno di 3 parametri, gradi di libertà. Si può vedere che non esiste una generalizzazione a 3 dimensioni dei numeri complessi, bensì ne esiste una a 4 dimensioni, i cui elementi si chiamano **quaternioni**. Però si potrebbe dire che di numeri complessi così definiti abbiano 4 gradi di libertà, ma così come per quelli bidimensionali dobbiamo imporre che $|z|^2 = 1$, per cui i gradi di libertà diventano solamente 3, che sono il numero corretto per descrivere una rotazione tridimensionale. Il punto del discorso è che scrivendo una rappresentazione matriciale dei quaternioni, in analogia a quando abbiamo definito (3.2.6), troviamo che le condizioni e le caratteristiche che dobbiamo avere sono identiche a quelle degli elementi di $SU(2)$, ovvero:

$$U^\dagger U = \mathbb{1} \quad , \quad \det\{U\} = 1. \quad (3.2.46)$$

Per cui la mappa, per cui mandiamo le componenti reale ed immaginarie in un gruppo di matrici complesse, rappresenta il fatto che ci sia un'identificazione tra i quaternioni ed $SU(2)$.¹⁵ Poi per vedere la connessione tra quaternioni, $SU(2)$ e le rotazioni di $SO(3)$ possiamo fare ragionamenti simili a quelli che fa Gambino Physical law should have mathematical beauty. Gambino nelle sue note.

Definiamo la matrice $X = \vec{\sigma} \cdot \vec{x}$, che sarà una matrice in $GL(2, \mathbb{C})$,¹⁶ con $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ vettore con componenti le matrici di Pauli.

¹⁵Il Schwichtenberg Physical law should have mathematical beauty. symmetry fa notare il fatto che i quaternioni abbiamo 4 parametri ci stia suggerendo la strada per la Relatività. La quarta componente di un quaternone perché non potrebbe essere il tempo, mentre le altre 3 quelle spaziali? Quello che vogliamo fare con le trasformazioni di Lorentz è sostanzialmente delle rotazioni nello spazio 4-dimensionale e abbiamo appena finito di dire che delle rotazioni le possiamo provare a rappresentare tramite generalizzazioni di numeri complessi n-dimensionali. Il fatto è che rotazioni 4D hanno bisogno di 6 parametri e non esistono numeri complessi a 7 dimensioni (che uniti alla condizione di unitarietà riducono i loro gradi di libertà a 6). Però 2 quaternioni messi insieme, di cui ciascuno ha 3 gradi di libertà, forniscono esattamente 6 gradi di libertà. Vedremo nella sezione §3.5.5 come l'unione di due algebre $SU(2)$ possa fornire una rappresentazione del gruppo di Lorentz.

¹⁶Il gruppo $GL(2, \mathbb{C})$ è definito come:

$$GL(2, \mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) / \det(A) \neq 0\}$$

cioè l'insieme di tutte le matrici 2x2 a coefficienti complessi con determinante diverso da zero.

Possiamo calcolare facilmente com'è fatta X :

$$X = x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2.47)$$

$$= \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \quad (3.2.48)$$

possiamo verificare che il modulo quadro del tri-vettore posizione sia dato dal determinante di X :

$$\det X = \det \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = -x_3^2 - (x_1^2 + x_2^2) = -|\vec{x}|^2 \quad (3.2.49)$$

ma anche che X è una matrice hermitiana, ovvero tale per cui $X = X^\dagger$, e a traccia nulla $\text{Tr} X = 0$. A questo punto, se prendessimo una generica matrice unitaria $A \in SU(2)$, quindi per cui $AA^\dagger = \mathbb{1}$, e che realizzi la trasformazione:

$$X \longrightarrow X' = AXA^{-1} \quad (3.2.50)$$

allora, troviamo che X' è ancora una matrice hermitiana, a traccia nulla e tale per cui $\det X' = \det X$. Quindi la trasformazione in questione preserva la norma del vettore $\vec{x}$ e per questo realizza una rotazione nello spazio tridimensionale e si tratta di una rappresentazione di $SO(3)$. Però, siccome A è una matrice bidimensionale complessa di $SU(2)$, la rappresentazione che abbiamo trovato è bidimensionale. Abbiamo in sostanza visto come un elemento di $SU(2)$ generi una rotazione tridimensionale. È facile rendersi conto che se al posto di A , avessimo utilizzato $-A$, il risultato non sarebbe cambiato e per questo possiamo dire che la corrispondenza è $2 : 1$ e si realizza l'isomorfismo:

$$SO(3) = \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2}. \quad (3.2.51)$$

Per il fatto che due rotazioni di $SU(2)$ ne rappresentano una di $SO(3)$ diciamo che $SU(2)$ è il **doppio ricoprimento** di $SO(3)$ (ne parliamo meglio tra poco).

Dunque abbiamo imparato che (localmente) possiamo rappresentare una rotazione tridimensionale sia con $SO(3)$, quindi con una rappresentazione di matrici 3×3 , che con $SU(2)$ e quindi matrici complesse 2×2 . Scegliere di rappresentare gli elementi di $SO(3)$ con elementi di $SU(2)$ ci sarà utile in QFT e noteremo che i gruppi che sono ricoprimenti di altri racchiudono più informazioni al loro interno.

Nota che possiamo scegliere se utilizzare una rappresentazione delle rotazioni 3D piuttosto di un'altra solo perché l'algebra di $SU(2)$ è la stessa di $SO(3)$ (e i cui generatori sono dati dalle matrici di Pauli diviso 2 (3.2.36)).

Facciamo un'ultima osservazione sempre utile per quando parleremo dell'unione di due algebre di $SU(2)$ per rappresentare il gruppo di Lorentz.

Oltre al commutatore dei generatori di $SU(2)$, si può calcolare l'anticommutatore tra due operatori. Possiamo vedere che:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (3.2.52)$$

che evidenzia l'asimmetria dei fermioni. Combinando le regole di commutazione (3.2.37) e di anticommutazione (3.2.52) si può scrivere l'utile relazione, valida per $i \neq j$:

$$\sigma_i \sigma_j = i\sigma_k. \quad (3.2.53)$$

Possiamo vedere che l'operatore di Casimir di $SU(2)$ è:

$$T^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 \quad , \quad T_i = \frac{\sigma_i}{2}. \quad (3.2.54)$$

Delle volte però, occorre lavorare con matrici di dimensione più elevata. Quando abbiamo 1 particella di spin 1/2 ci basta una matrice 2x2, ma quando abbiamo 2 particelle di spin 1/2, allora andiamo in uno spazio a 4 dimensioni, e prendiamo la rappresentazione:

$$D^{1/2} \otimes D^{1/2}. \quad (3.2.55)$$

Siamo in uno spazio a 4 dimensioni perché abbiamo 4 vettori di base:

$$\left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle_2 = \begin{cases} \Psi^{11} = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \Psi^{12} = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \Psi^{21} = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \Psi^{22} = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{cases} \quad (3.2.56)$$

ovvero un tensore a due indici:

$$\Psi^{ij} = \chi^i \chi^j \quad , \quad i, j = 1, 2. \quad (3.2.57)$$

Sullo spazi quadridimensionale operano gli elementi del gruppo prodotto diretto:

$$\exp\{iT_1\} \otimes \exp\{iT_2\} = \exp\{iT\} \quad (3.2.58)$$

grazie alla forma esponenziale e al fatto che T_1 e T_2 commutino. T è dato da $T = T_1 + T_2$. Componendo due spazi di dimensione 2 otteniamo uno spazio quadridimensionale, ma insieme ad una rappresentazione che non è irriducibile (infatti è 4x4). Però, sappiamo che vale (vedi p.32 di Salmé in cui fa le considerazioni sugli stati Ψ^{ij}):

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3 \quad (3.2.59)$$

che vuol dire che la rappresentazione riducibile 4x4 si decompone in due rappresentazioni irriducibili 1x1 e 3x3, i cui vettori di base sono i ben noti vettori di singoletto e tripletto.

Ci sono (p.32-36) in Salmé Physical law should have mathematical beauty. Salmé ulteriori discorsi riguardo il modo per ottenere una rappresentazione irriducibile tramite un metodo grafico e la trattazione (rapida) di un sistema di due o tre fermioni. Salmé tratta anche il caso dei coefficienti di Clebsch-Gordan, che non sono altro che un'applicazione della teoria dei gruppi, infatti, quando si costruiscono i vari coefficienti il procedimento che si fa è studiare la decomposizione del prodotto diretto di due rappresentazioni irriducibili di due gruppi in somma diretta di rappresentazioni irriducibili. Anche nelle pagine 6-10 di Bastianelli Physical law should have mathematical beauty. Bastianelli vengono fatti un po' di discorsi sulle rappresentazioni irriducibili di $SO(n)$ ed $SU(n)$ e sulle decomposizioni in termini di somme dirette.

3.2.4 Gruppo $SU(3)$

In Salmé Physical law should have mathematical beauty. Salmé è anche presente (p. 37-47) l'esempio del gruppo $SU(3)$ ¹⁷, che gode di alcune proprietà in più rispetto $SU(2)$ (rango 2, 2 operatori di Casimir e 2 generatori diagonalizzabili contemporaneamente) ed è fondamentale per l'applicazione alla fisica adronica. Nel modello standard $SU(3)$ darà la simmetria di colore alla teoria. Vedi anche il capitolo §7.8 di Schwichtenberg Physical law should have mathematical beauty. symmetry.

Il gruppo $SU(3)$ è formato dalle matrici 3x3 con determinante unitario:

$$U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1} \quad , \quad \det\{U\} = 1. \quad (3.2.60)$$

Come sappiamo possiamo scrivere un generico elemento del gruppo come:

$$U = e^{iT_A \theta^A} \quad (3.2.61)$$

dove A è sommato fino 8. Così come trovavamo per $SU(2)$ i generatori del gruppo devono essere hermitiani e traceless:

$$T_A^\dagger = T_A \quad , \quad \text{tr}\{T_A\} = 0. \quad (3.2.62)$$

Una base per questi generatori è data dalle 8 matrici¹⁸ 3x3 chiamate **matrici**

¹⁷Che nella rappresentazione fondamentale i generatori assumono la forma delle 8 matrici 3x3 di Gell-Mann λ^a , che generalizzano le matrici di Pauli per $SU(2)$.

¹⁸Si può dimostrare che in generale per il gruppo $SU(N)$ ci sono $N^2 - 1$ generatori.

di Gell-Mann:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.63)$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.64)$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (3.2.65)$$

I generatori del gruppo $SU(3)$ sono collegati con le matrici λ_A dalla relazione:

$$T_A = \frac{1}{2} \lambda_A \quad (3.2.66)$$

in analogia a quanto avevamo trovato in $SU(2)$ con le matrici di Pauli. L'algebra di Lie di $SU(3)$ è:

$$[T_A, T_B] = i f^{ABC} T_C \quad (3.2.67)$$

dove le costanti di struttura (che per $SU(2)$ erano date dal simbolo di Levi-Civita ϵ_{ijk}) sono date da:

$$f^{123} = 1 \quad (3.2.68)$$

$$f^{147} = -f^{156} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = -f^{367} = \frac{1}{2} \quad (3.2.69)$$

$$f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.2.70)$$

e i restanti possono essere trovati notando che le costanti f^{ABC} sono antisimmetriche per permutazioni di due indici. Ad esempio:

$$f^{ABC} = -f^{BAC} = -f^{CBA}. \quad (3.2.71)$$

3.2.5 Altri esempi rilevanti

Gruppo $SO(n, m)$ È il gruppo:

$$SO(n, m) = \{\text{sottogruppo del gruppo di Lorentz con} \\ \det\{g\} = 1 \text{ e geometria Minkowskiana } n, m\}.$$

Gruppo $SL(n, \mathbb{R})$, ma anche $SL(n, \mathbb{C})$. È il gruppo:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{\text{gruppo unimodulare (lascia invariato } x^2 = x^\mu x_\mu) \\ \text{in } n \text{ dimensioni ad elementi reali}\}.$$

Nota che $SL(n, \mathbb{C})$ da una rappresentazione 2-dimensionale di $L_+^\uparrow$. Ne parleremo meglio nella sezione §3.5.6.

3.3 Definizione astratta dell'algebra di Lie e di gruppi di Lie

Vediamo in questa sezione la definizione astratta che si può dare dell'algebra di Lie e di un gruppo di Lie. Ciò ci sarà particolarmente utile quando parleremo del fatto che gruppi diversi possono avere la stessa algebra.

3.3.1 Definizione astratta dell'algebra di Lie

Definizione 22. *Un algebra di Lie è uno spazio vettoriale $\mathfrak{g}$ dotato di un'operazione binaria:*

$$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

*la quale può essere chiamata **parentesi di Lie** ed è bilineare, anticommutativa e soddisfa l'identità di Jacobi.*

Nota che il commutatore di due operatori, lo stesso che avevamo utilizzato per definire l'algebra di Lie nella precedente sezione, soddisfa queste caratteristiche. Però ci sono anche altre operazioni binarie che lo fanno, ad esempio le parentesi di Poisson della meccanica classica.

Il punto chiave di questa definizione è che non facciamo riferimento a nulla di specifico e possiamo generalizzare quello che vogliamo.

In generale, dato un gruppo di Lie si individua una sola algebra, ma non è vero il viceversa. Questa cosa è codificata in un teorema. Data un'algebra possiamo individuare gruppi diversi, in relazione tra loro. Ad esempio, il gruppo $SU(2)$ è omeomorfo¹⁹ al gruppo $SO(3)$. Infatti l'algebra di $SU(2)$, scegliendo le matrici di Pauli come base dei generatori, è:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad (3.3.1)$$

che, nel momento in cui ridefiniamo la base di generatori come $J_i = \sigma_i/2$, diventa:

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k \quad (3.3.2)$$

che è la stessa algebra del gruppo $SO(3)$. L'affermazione *hanno la stessa algebra* la possiamo fare proprio perché abbiamo definito in modo astratto le algebre di Lie, che si basano solamente sulle parentesi di Lie.

L'omeomorfismo $SU(2) \longrightarrow SO(3)$ è del tipo $2 \rightarrow 1$, ma le loro algebre sono (localmente) isomorfe²⁰. Dire che due algebre sono isomorfe ci è particolarmente comodo perché ci permette di poter utilizzare un set di generatori piuttosto che l'altro per descrivere i gruppi.

¹⁹Ovvero, esiste una funzione che associa ad un elemento di un gruppo uno o più elementi di un altro gruppo, preservando la legge di composizione del gruppo.

²⁰Quando l'omeomorfismo è biunivoco, quindi esiste una relazione uno a uno tra gli elementi dei gruppi, allora si chiama *isomorfismo*.

Infatti, usando la definizione astratta di algebra di Lie possiamo avere differenti descrizioni delle trasformazioni di $SU(2)$ e non necessariamente matrici 2×2 , ma possiamo scegliere di rappresentarle tramite matrici 3×3 . La definizione astratta ci permette di connettere diverse rappresentazioni di un certo gruppo di trasformazioni.

3.3.2 Definizione astratta del gruppo di Lie e gruppo di ricoprimento

Come fatto con l'algebra di Lie possiamo dare una definizione astratta anche del gruppo di Lie. Parliamo per esempi. Abbiamo visto che il gruppo $U(1)$ aveva elementi che soddisfavano la condizione:

$$z^*z = (a + ib)^*(a + ib) = a^2 + b^2 \equiv 1 \quad (3.3.3)$$

ma, come sappiamo dalle superiori, questa è l'equazione di un cerchio unitario S^1 . Poi abbiamo anche visto che esiste una mappa 1 a 1 tra $U(1)$ ed $SO(2)$. Per cui se immaginiamo di identificare $U(1)$ con il cerchio unitario, allora possiamo fare la stessa cosa con $SO(2)$. Così al posto di parlare di gruppi, i quali hanno diverse rappresentazioni, possiamo parlare in termini geometrici che in questo caso è il cerchio S^1 . Pensiamo quindi, in termini di gruppi di Lie, alle rotazioni bidimensionali in 2 dimensioni come al cerchio unitario, e se poi vogliamo vediamo tali trasformazioni come rappresentate da matrici 2×2 , quindi del gruppo $SO(2)$, oppure da numeri complessi di $U(1)$.

Questa era la parte facile, ora vediamo $SU(2)$ ed $SO(3)$. Abbiamo accennato al fatto che ci sia una connessione tra gli elementi di $SU(2)$ e i quaternioni $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, i quali devono rispettare la condizione:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \quad (3.3.4)$$

che è la condizione che definisce una tri-sfera S^3 , ovvero, la superficie di una sfera in uno spazio 4-dimensionale. Quindi i quaternioni ci forniscono una mappa tra $SU(2)$ ed S^3 . Per questo motivo vediamo $SU(2)$ come una tri-sfera S^3 .

Possiamo in questo modo dare una definizione più astratta di gruppo di Lie:

Definizione 23. *Un gruppo di Lie, è un gruppo, ma anche una varietà differenziabile. L'operazione di composizione $\circ$ deve indurre una mappa differenziabile della varietà in se stessa.*

Ragionando in termini geometrici ogni gruppo di Lie, è semplicemente connesso (s.c.) ed esiste un solo gruppo s.c. corrispondente ad ogni algebra

di Lie. Questo *unico* gruppo può essere pensato come la *madre* di tutti gli altri gruppi aventi la stessa algebra, poiché ci sono delle mappe che collegano i vari gruppi, ma partendo da quello semplicemente connesso e andando negli altri e non il viceversa.

Ovviamente il termine *gruppo madre* non è molto matematico, per cui utilizziamo il nome **gruppo di ricoprimento**. Vediamo questa cosa sempre con un esempio.

Il concetto di ricoprimento di un gruppo, per l'appunto, ci viene in soccorso soprattutto quando siamo in presenza di gruppi non semplicemente connessi. Un **ricoprimento** (o rivestimento) di un gruppo è un altro gruppo topologico (cioè dotato di una struttura continua) che "copre" il primo in modo localmente identico, ma globalmente diverso. In parole povere il ricoprimento di un gruppo è a sua volta un gruppo, ma globalmente più ricco.²¹ Formalmente diciamo:

Definizione 24. Un **gruppo di ricoprimento** $\tilde{G}$ di un gruppo G è un gruppo topologico insieme ad una mappa continua suriettiva (cioè che copre tutto G):

$$\pi : \tilde{G} \longrightarrow G \quad (3.3.5)$$

con la proprietà che localmente π è un'isomorfismo tra gruppi (cioè, localmente possiamo confondere $\tilde{G}$ con G).

Un **ricoprimento universale** di un gruppo G è il gruppo semplicemente connesso $\tilde{G}$ che copre G in modo continuo. Utilizzeremo questa cosa per costruire rappresentazioni che non si possono definire su G , ad esempio quando vorremo utilizzare gli spinori, non definiti su $SO(3)$. Due esempi fondamentali, che analizzeremo meglio, sono:

- Il gruppo $SU(2)$ è ricoprimento delle rotazioni ordinarie $SO(3)$. Si dice che l'omeomorfismo tra $SU(2)$ ed $SO(3)$ è di tipo $2 \rightarrow 1$, o che $SU(2)$ è un doppio ricoprimento di $SO(3)$, poiché ad ogni rotazione di $SO(3)$ corrispondono due rotazioni di $SU(2)$.
- Il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ delle matrici 2×2 complesse con $\det = 1$ è un ricoprimento universale del gruppo delle trasformazioni di Lorentz proprie ortocrone $SO(1, 3)$. Ogni trasformazione di Lorentz viene da due matrici di $SL(2, \mathbb{C})$.

Un esempio grafico del concetto è raffigurato in figura 3.1.

²¹Dalla Meccanica Quantistica sappiamo che $SU(2)$ descrive le rotazioni degli stati corrispondenti a momenti angolari semi-interi ed interi, mentre $SO(3)$ solo interi. Quando guarderemo le trasformazioni di Lorentz e dovremo scegliere una base per i generatori delle rotazioni, sceglieremo le matrici di Pauli proprio perché in questo modo inglobiamo nella nostra teoria più informazioni.

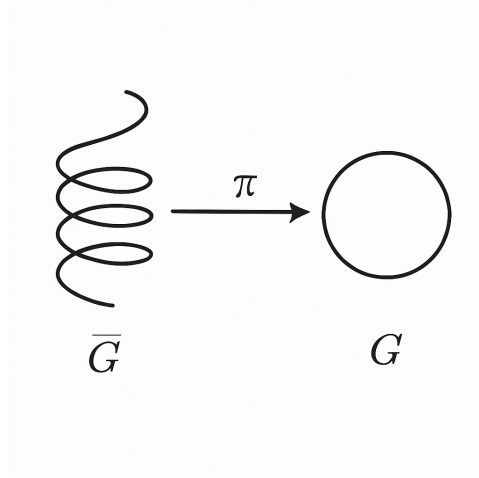


Figura 3.1: Illustrazione grafica di $\tilde{G}$ ricoprimento di G .

Parlando della definizione astratta di un gruppo di Lie, abbiamo detto che $SU(2)$ lo possiamo identificare con $\mathbb{S}^3$, la quale è una varietà semplicemente connessa. Dunque, abbiamo trovato la *madre* dell'algebra:

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k \quad (3.3.6)$$

e possiamo raggiungere tutti gli altri gruppi sfruttando delle mappe che partono da $SU(2)$.

Abbiamo anche detto che tra $SU(2)$ ed $SO(3)$ esiste una mappa che identifica due punti di $SU(2)$ con uno di $SO(3)$. Dunque, possiamo pensare ad $SO(3)$ come alla metà superiore di $\mathbb{S}^3$. Infatti pensando solo ad $SO(3)$, lo possiamo vedere come ad una sfera, ma con i punti antipodali (0 e 2π) identificati. In questo senso possiamo dire che $SU(2)$ è più completo di $SO(3)$ e quando vogliamo descrivere la natura nel suo livello più fondamentale dobbiamo utilizzare i gruppi più ricchi possibili, per questo utilizzeremo $SU(2)$ al posto di $SO(3)$.²²

Nella pratica si sceglie un certo gruppo di simmetria del sistema che si sta studiando, si utilizza una specifica rappresentazione per derivarne l'algebra di Lie e successivamente si prende quella stessa algebra per derivare il ricoprimento universale che la rispetta e che sicuramente comprende il gruppo di simmetria iniziale.

3.4 Etichette degli stati fisici

Vediamo in questa sezione che significato e come associamo le etichette agli stati fisici. Vedi il capitolo §3.6 e §3.9 dello Schwichtenberg Physical law

²²Per descrivere le particelle fisiche vedremo che utilizzeremo le rappresentazioni del gruppo di ricoprimento del gruppo di Poincaré.

should have mathematical beauty. symmetry per discorsi più lunghi.

Prendiamo il gruppo delle rotazioni nello spazio tridimensionale $SO(3)$. Sappiamo bene che i generatori sono gli operatori di momento angolare L^i e, in realtà, sappiamo anche chi è l'operatore di Casimir (ossia colui che commuta con tutti i generatori L^i), cioè:

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2. \quad (3.4.1)$$

In Meccanica Quantistica abbiamo visto che gli operatori di momento angolare non commutano e non possono essere diagonalizzati contemporaneamente. Però viene in soccorso L^2 , poiché quello che abbiamo fatto a suo tempo è stato diagonalizzare L^2 , L_z ed etichettare gli stati fisici del sistema con gli autovalori di L^2 ed L_z (ovvero $\hbar l(l+1)$, $\hbar m$). In altre parole, quindi, le rappresentazioni irriducibili di $SO(3)$ corrisponderanno a quelli con le etichette date dagli autovalori di L^2 ed L_z , cioè dall'operatore di Casimir e da uno dei generatori.

In generale, quello per cui utilizzeremo gli operatori di Casimir sarà proprio questo, completare quello che in Meccanica Quantistica era lo SCOC ed etichettare gli stati fisici.

In generale abbiamo un certo numero di operatori che possono essere diagonalizzati contemporaneamente. Utilizziamo gli autovalori di tali operatori diagonalizzati per etichettare la base dello spazio vettoriale in cui siamo. Gli autovettori associati ci forniscono tale base.

Dal punto di vista formale diciamo che un certo set di generatori diagonalizzati sono chiamati **sottoalgebra di Cartan** e i singoli generatori **generatori di Cartan**. Quello che effettivamente facciamo è utilizzare gli autovalori degli operatori di Cartan come etichette degli stati fisici.

Dunque, abbiamo detto che come etichette utilizziamo sia gli autovalori degli operatori di Casimir che quelli degli operatori diagonalizzati (Cartan). In realtà le due liste di etichette ci danno informazioni completamente diverse, che possiamo capire ragionando in modo astratto. Prendiamo il gruppo $SU(2)$, la cui algebra è:

$$[T^i, T^j] = i\epsilon^{ijk}T^k \quad (3.4.2)$$

e l'operatore di Casimir lo possiamo scrivere:

$$T^2 = T_i T^i = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 \quad (3.4.3)$$

dove non abbiamo specificato nulla su T^i poiché abbiamo imparato che possiamo avere diverse rappresentazioni dell'algebra (in senso astratto) (3.4.2). Nel capitolo §6.1 degli appunti di *Meccanica Quantistica 1* puoi vedere che

quantizzando il momento angolare possiamo avere valori di l , pezzo di autovalore dell'operatore L^2 con valori interi e semi-interi:

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (3.4.4)$$

e conseguente autovalore dell'operatore L^2 :

$$l(l+1) = 0, \frac{3}{4}, 2, \frac{15}{4}, \dots \quad (3.4.5)$$

Ogni valore di l ci indica una dimensionalità degli operatori che rispettano (3.4.2). Togliamoci dall'esempio di MQ1 e generalizziamo $l \rightarrow j$.

In generale la dimensionalità delle rappresentazioni di $SU(2)$ è data da:

$$D = 2j + 1$$

con $j = 0$ abbiamo dimensionalità del gruppo $SU(2)$:

$$D = 1$$

ovvero abbiamo una rappresentazione unidimensionale. Se prendiamo $j = 1/2$:

$$D = 2$$

dunque abbiamo matrici 2x2, che non sono altro che le matrici di Pauli σ_i . Se prendiamo spin $j = 1$ allora la rappresentazione sarà data da matrici 3x3.

Ovviamente in base alla dimensionalità della rappresentazione avremo diversi autovettori che formeranno la nostra base. Ad esempio, prendiamo $j = 1/2$, avremo una base di generatori data dalle matrici σ_i e se scegliamo di diagonalizzare σ_3 , allora avremo autovettori:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.6)$$

con matrice:

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.4.7)$$

che ha autovalori $+1/2$ e $-1/2$, che corrispondono rispettivamente agli spinori up e down (autovettori di σ_3).

In questo senso, se scriviamo lo stato del nostro sistema:

$$|j, j_3\rangle \quad (3.4.8)$$

allora l'autovalore j , che ricordiamo essere autovalore dell'operatore di Casimir, ci indica in quale rappresentazione ci stiamo mettendo e dunque quale base stiamo scegliendo; allo stesso tempo l'autovalore j_3 , che è l'autovalore

dell'operatore diagonalizzato, ci indica quale autovettore di T_3 stiamo scegliendo.

Nel nostro esempio abbiamo lo stato fisico:

$$\left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle \quad (3.4.9)$$

l'autovalore $j = 1/2$ ci dice che abbiamo una rappresentazione di matrici 2×2 , mentre l'autovalore $\pm 1/2$ ci sta dicendo quale tra i due autovettori di σ_3 abbiamo.

Se sei curioso, prendendo $j = 1$, l'operatore di spin lungo la direzione 3 in 3 dimensioni è:

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.4.10)$$

che come ci aspettiamo, da MQ1, ha autovalori $-1, 0, +1$.

In generale utilizziamo quindi gli autovalori degli operatori diagonalizzati e degli operatori di Casimir per etichettare le particelle fisiche. Ad esempio vedremo che per il gruppo di Poincarè gli operatori di Casimir hanno autovalori m (massa) ed s (in qualche modo legato allo spin)

3.5 Il gruppo di Lorentz

Passiamo ora a trattare uno dei gruppi fondamentali per la Fisica, il gruppo di Lorentz. Analizzeremo prima di tutto le trasformazioni di Lorentz ripassando quello visto nella Relatività Speciale, successivamente cercheremo i generatori e l'algebra del gruppo, guarderemo chi sono gli operatori di Casimir, studieremo le rappresentazioni scalare, spinoriale e vettoriale del gruppo e vedremo l'importante fatto che il gruppo di Lorentz fattorizzi nel prodotto di 2 sottoalgebre indipendenti.

3.5.1 Trasformazioni di Lorentz

Cerchiamo di analizzare meglio in questa sezione le trasformazioni di Lorentz, ovvero, i costituenti del gruppo di Lorentz, analizzato meglio in seguito. Utilizzeremo alcuni gruppi già analizzati in precedenza, ma con un'estensione:

$$\begin{array}{ccc} SO(3) & \longleftrightarrow & SU(2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ SO(1, 3) & \longleftrightarrow & SU(2) \otimes SU(2). \end{array}$$

Abbiamo analizzato nella sezione §2.2.1 la proprietà di base della metrica g derivante dall'invarianza della distanza per trasformazioni di Lorentz, però

non sarebbe male capire come siano effettivamente fatte le matrici Λ . Nota che, così come il gruppo delle trasformazioni in 4 dimensioni che preservano le distanze euclidee lo chiamavamo $O(4)$, ora indichiamo il gruppo di Lorentz $O(1, 3)$, indicando la segnatura della metrica all'interno delle parentesi. Sono sicuramente matrici 4x4 vivendo nello spazio di Minkowski, dunque con 16 componenti, ma non tutte indipendenti. La relazione della Relatività Speciale (2.2.16):

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \quad (3.5.1)$$

permette di imporre 10 vincoli, essendo simmetrica nello scambio di ρ e σ , per cui i 3 + 2 + 1 elementi sotto la diagonale devono essere uguali ai 3 + 2 + 1 elementi sopra. Quindi le matrici Λ sono determinate da 16 – 10 = 6 parametri reali indipendenti. Gli elementi indipendenti sono i 3 angoli di Eulero (per le rotazioni) e 3 componenti di velocità (per i boosts).

La relazione (2.2.16) ci è venuta in soccorso e ha rimosso alcune componenti tra tutte le possibili di Λ , ma ha ancora qualcosa da farci vedere. Infatti segue che:

$$\det\{\Lambda^T g \Lambda\} = \det\{g\} \implies \det\{\Lambda^T\} \det\{g\} \det\{\Lambda\} = \det\{g\} \quad (3.5.2)$$

$$(\det\{\Lambda\})^2 = 1 \implies \det\{\Lambda\} = \pm 1. \quad (3.5.3)$$

Chiamiamo:

- Trasformazione di Lorentz **propria** se $\det\{\Lambda\} = +1$.
- Trasformazione di Lorentz **impropria** se $\det\{\Lambda\} = -1$.

La relazione (2.2.16) è piena di informazioni, infatti, se prendiamo l'elemento $\rho = \sigma = 0$ possiamo vedere:

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 = g_{00} \implies (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^i_0)^2 = 1 \quad (3.5.4)$$

$$\implies (\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \implies |\Lambda^0_0| \geq 1 \quad (3.5.5)$$

$$\implies \Lambda^0_0 \geq 1, \quad \Lambda^0_0 \leq -1. \quad (3.5.6)$$

Abbiamo ancora condizioni per classificare le trasformazioni di Lorentz. Chiamiamo:

- Trasformazione di Lorentz **ortocrona** (sono trasformazioni che non invertono l'asse temporale e formano sottogruppo di $O(1, 3)$) se $\Lambda^0_0 \geq +1$.
- Trasformazione di Lorentz **anticrona** se $\Lambda^0_0 \leq -1$.

Possiamo fare uno schema delle 4 classi di trasformazioni di Lorentz che abbiamo visto:

- $L_+^\uparrow$: $\det\{\Lambda\} = +1$, $\Lambda_0^0 \geq +1$: TL proprie ortocrone (rotazioni). Sono trasformazioni continue e connesse con $\mathbb{1}$, poiché è naturale vedere che $\det\{\mathbb{1}\} = 1$ e $\mathbb{1}_0^0 = 1$.
- $L_-^\uparrow$: $\det\{\Lambda\} = -1$, $\Lambda_0^0 \geq +1$: TL improprie ortocrone (inversione spaziale $x^i \rightarrow -x^i$).
- $L_+^\downarrow$: $\det\{\Lambda\} = +1$, $\Lambda_0^0 \leq -1$: TL proprie anticrone (inversione completa $x^\mu \rightarrow -x^\mu$).
- $L_-^\downarrow$: $\det\{\Lambda\} = -1$, $\Lambda_0^0 \leq -1$: TL improprie anticrone (inversione temporale $x^0 \rightarrow -x^0$).

Le trasformazioni che ci interesseranno sono quelle $L_+^\uparrow$ (con $\det = +1$ e $\Lambda_0^0 \geq 1$), ovvero quelle proprie ed ortocrone. Queste trasformazioni sono connesse con continuità all'identità e formano il sottogruppo $SO(1, 3)$ detto **gruppo proprio ortocrono di Lorentz** o **gruppo di Lorentz ristretto**. A volte $SO(1, 3)$ si chiama anche gruppo di Lorentz proprio. Notiamo anche che il gruppo $SO(1, 3)$ non è compatto, poiché 3 dei 6 suoi parametri (quelli legati ai boost) possono variare nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$. Si noti che L_- (sia $L_-^\uparrow$ che $L_-^\downarrow$) non forma un gruppo, poiché il prodotto di due trasformazioni improprie è un TL propria (ricorda che vale $\det\{A\} \det\{B\} = \det\{AB\}$). Anche le trasformazioni anticrone non formano un sottogruppo, mentre quelle ortocrone formano il sottogruppo $L_+^\uparrow$. L'unico sottogruppo connesso è $L_+^\uparrow$.

Nota che le trasformazioni di parità (inversione spaziale) sono incluse in $O(1, 3)$ e non in $SO(1, 3)$. La coniugazione di carica però non è contenuta nel gruppo di Lorentz, ma è legata ad un'operazione di complessa coniugazione ed è rappresentata dalla matrice σ^2 , o in 4 dimensioni dalla matrice di Dirac γ^2 .

Una nota importante da fare è che ogni trasformazione di Lorentz, appartenente ad una delle 4 categorie che abbiamo individuato, si può scrivere come prodotto di una trasformazione ristretta, di $L_+^\uparrow$, e una o entrambe le trasformazioni di inversione spaziale o temporale. Una rappresentazione dell'inversione spaziale e temporale è:

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (3.5.7)$$

In particolare possiamo scrivere il gruppo di Lorentz come:

$$O(1, 3) = \{L_+^\uparrow, L_-^\uparrow, L_+^\downarrow, L_-^\downarrow\} = \{L_+^\uparrow, \Lambda_P L_+^\uparrow, \Lambda_T L_+^\uparrow, \Lambda_P \Lambda_T L_+^\uparrow\} \quad (3.5.8)$$

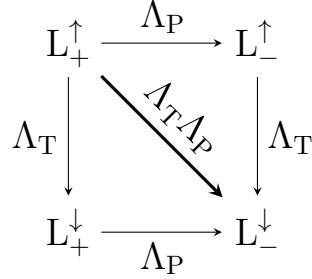


Figura 3.2

schematizzabile come in figura 3.2.

In particolare, ogni trasformazione di Lorentz propria e ortocrona si può scomporre in un prodotto di un boost ed una rotazione. Noi per la nostra teoria ci concentreremo solo su queste, perché sono connesse con $\mathbb{1}$, ma anche perché sono le uniche ad esserlo visto che le altre trasformazioni di $O(1,3)$ non sono semplicemente connesse con quelle di $SO(1,3)$ (abbiamo appena visto che per passare da una all'altra dobbiamo fare una trasformazione discreta). $L_+^\uparrow$ è un gruppo semisemplice (ha solo sottogruppi invarianti non-abeliani) e non compatto (comprendendo i boost). Il gruppo delle rotazioni è sottogruppo di $L_+^\uparrow$, mentre i boost sappiamo bene non formare sottogruppo.

Vediamo ora una possibile rappresentazione delle matrici Λ^μ_ν , analizzando le varie trasformazioni che fanno parte del gruppo di Lorentz $O(1,3)$.

Rotazioni Sono le trasformazioni ortocrone, non coinvolgono la componente temporale, e possono essere proprie o improprie. Le possiamo scrivere come:

$$x'^0 = x^0 \quad (3.5.9)$$

$$x'^i = R^{ij} x_j \quad (3.5.10)$$

in cui R^{ij} è una matrice ortogonale. Possiamo dare una rappresentazione a blocchi della matrice Λ :

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}. \quad (3.5.11)$$

In cui vediamo che $\det\{\Lambda\} = \det\{R\}$, dunque, se $\det\{R\} = +1$, allora abbiamo una trasformazione $L_+^\uparrow$, e se $\det\{R\} = -1$ abbiamo $L_-^\uparrow$.

Le matrici R appartengono al gruppo delle rotazioni $O(3)$, dove la O sta per ortogonali $R^T R = \mathbb{1}$. Abbiamo visto nelle sezioni precedenti che le matrici ortogonali possono avere determinante solo uguale a ± 1 ; se $\det\{R\} = 1$, allora R appartengono $SO(3)$. Quando $R \in SO(3)$, le matrici Λ_R appartengono al gruppo $SO(1,3)$.

Boosts Sono le trasformazioni di velocità lungo una certa direzione (asse). I boost sono trasformazioni di Lorentz proprie e ortocrone, dunque in $L_+^\uparrow$. Un boost lungo l'asse x è rappresentato dalla matrice:

$$\Lambda_{B_x} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5.12)$$

in cui si hanno i soliti parametri di Lorentz:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.5.13)$$

ma come sappiamo, i boost possono anche essere espressi in termini della rapidità η :

$$\eta = \tanh^{-1} \beta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (3.5.14)$$

da cui seguono:

$$\beta = \tanh \eta = \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \cosh \eta \quad (3.5.15)$$

in cui vediamo che siccome $\beta \in [0, 1]$, allora $\eta \geq 0$. La matrice di boost in termini di η diventa:

$$\Lambda_{B_x} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5.16)$$

L'espressione (3.5.16) ci piace perché somiglia ad una rotazione spaziale (3.2.15) lungo un certo asse.

Puoi vedere che effettivamente i boosts hanno questa forma matriciale guardando le mie note di relatività speciale (ripassata al corso di *Relatività Generale*), il capitolo §5.6 del Barone Physical law should have mathematical beauty.Barone o il §3.7.1 del Schwichtenberg Physical law should have mathematical beauty.symmetry.

Come vedremo meglio, i boost non formano un gruppo, a differenza delle rotazioni spaziali, poiché l'algebra dei commutatori non è chiusa, ossia, il commutatore di due boost non è ancora un boost.

Inversione spaziale È la trasformazione di parità. È una trasformazione del tipo:

$$x'^0 = x^0 \quad , \quad x'^i = -x^i \quad (3.5.17)$$

il che rende la matrice rappresentativa della trasformazione, la già vista, (3.5.7), tale per cui:

$$\Lambda^0_0 = 1 \quad , \quad \det\{\Lambda_P\} = -1 \quad (3.5.18)$$

dunque appartenente a $L_-^\uparrow$.

Inversione temporale È una trasformazione del tipo:

$$x'^0 = -x^0 \quad , \quad x'^i = x^i \quad (3.5.19)$$

il che rende la matrice rappresentativa della trasformazione (3.5.7), tale per cui:

$$\Lambda^0_0 = -1 \quad , \quad \det\{\Lambda\} = -1 \quad (3.5.20)$$

dunque, una trasformazione di Lorentz impropria e anticrona, ossia in $L_-^\downarrow$.

Inversione completa Invertiamo tutti gli assi, dunque, è una trasformazione del tipo:

$$x'^0 = -x^0 \quad , \quad x'^i = -x^i \quad (3.5.21)$$

il che rende la matrice rappresentativa della trasformazione -1 e tale per cui:

$$\Lambda^0_0 = -1 \quad , \quad \det\{\Lambda\} = 1 \quad (3.5.22)$$

dunque, una trasformazione di Lorentz propria e anticrona, ossia in $L_+^\downarrow$.

3.5.2 Generatori e algebra del gruppo di Lorentz

Ora però lavoriamo con ciò che abbiamo imparato dalla sezione §3.1 a §3.3. Considerando una trasformazione di Lorentz (TL) infinitesima:

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \quad (3.5.23)$$

con $|\omega^\mu_\nu| \ll 1 \quad \forall \mu, \nu$. Nota che non stiamo facendo nulla di speciale, stiamo prendendo una trasformazione che si discosta poco (ω) dall'identità (δ). Quelli che chiamiamo ω^μ_ν sono i parametri della trasformazione. Dalla condizione (2.2.16) della metrica otteniamo che²³:

$$g_{\mu\nu} (\delta^\mu_\rho + \omega^\mu_\rho) (\delta^\nu_\sigma + \omega^\nu_\sigma) = g_{\rho\sigma} \quad (3.5.24)$$

$$\underbrace{g_{\mu\nu} \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma}_{g_{\rho\sigma}} + \underbrace{\omega^\nu_\rho \delta^\nu_\sigma}_{\omega_{\sigma\rho}} + \underbrace{\omega^\mu_\sigma \delta^\mu_\rho}_{\omega_{\rho\sigma}} = g_{\rho\sigma} \quad (3.5.25)$$

$$g_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} \quad (3.5.26)$$

$$\implies \omega_{\sigma\rho} = -\omega_{\rho\sigma} \quad (3.5.27)$$

²³Trascurando $\mathcal{O}(\omega^2)$.

dunque, i parametri della trasformazione devono essere antisimmetrici. Dunque esistono, come abbiamo già notato, solo 6 parametri indipendenti, che sono 3 angoli di Eulero e 3 parametri dei boost. È possibile riscrivere la TL infinitesima in modo da separare i parametri infinitesimi dai generatori delle TL infinitesime, per farlo però occorre ricordare quello visto per oggetti simmetrici e antisimmetrici nella sezione §2.2.5. Da (3.5.27) abbiamo visto che gli $\omega_{\rho\sigma}$ sono antisimmetrici per scambio $\rho \leftrightarrow \sigma$, quindi, sappiamo che il loro prodotto con una quantità generica è non nullo solo sulla contrazione con la parte antisimmetrica di questa seconda quantità. Nello specifico vediamo²⁴ che il discostamento dall'identità lo scriviamo come:

$$\omega^\mu{}_\nu = \omega_{\rho\nu} g^{\mu\rho} = \omega_{\rho\sigma} g^{\mu\rho} \delta^\sigma{}_\nu = \omega_{\rho\sigma} g^{\mu\rho} g^\sigma{}_\nu \quad (3.5.28)$$

$$= \omega_{\rho\sigma} \cdot \frac{1}{2} (g^{\mu\rho} g^\sigma{}_\nu - g^{\mu\sigma} g^\rho{}_\nu) \quad (3.5.29)$$

in cui la parte tra parentesi è la parte antisimmetrica di $g^{\mu\rho} g^\sigma{}_\nu$, antisimmetrizzata negli indici ρ e σ , che possiamo identificare con $i(M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$. Infatti, se proviamo a riprendere il discorso di provare a separare i parametri $\omega_{\rho\sigma}$ dai generatori infinitesimi troviamo:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + g^{\mu\rho} g^\sigma{}_\nu \omega_{\rho\sigma} = \delta^\mu{}_\nu + \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (g^{\mu\rho} g^\sigma{}_\nu - g^{\mu\sigma} g^\rho{}_\nu) \quad (3.5.30)$$

$$= \delta^\mu{}_\nu + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} (M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \quad (3.5.31)$$

in cui riconosciamo la classica struttura di una trasformazione infinitesima con parametri $\omega_{\rho\sigma}$ e generatori $(M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$.

Dunque, vediamo che i generatori del gruppo di Lorentz sono 6 matrici antisimmetriche, tensori di rango 2, definite da:

$$(M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = -i (g^{\mu\rho} g^\sigma{}_\nu - g^{\mu\sigma} g^\rho{}_\nu). \quad (3.5.32)$$

Nota che gli indici che mettiamo interni sono quelli contratti con il parametro. Fai attenzione che la relazione (3.5.32) ci fornisce una rappresentazione quadridimensionale in componenti.

Trovati i generatori del gruppo, sappiamo scrivere un generico elemento del gruppo, ovvero, una generica trasformazione di Lorentz (in forma esponenziale):

$$\Lambda = e^{\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma}}. \quad (3.5.33)$$

Siamo anche in grado di scrivere una rappresentazione infinito dimensionale dei generatori $M^{\mu\nu}$ (vedi la sezione §3.5.3):

$$M^{\mu\nu} = i (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \quad (3.5.34)$$

²⁴Nota che vale: $g^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu$.

che viene comoda per fare i conti (che ho riportato nel file dedicato) per determinare l'algebra del gruppo:

$$\left[M^{\lambda\tau}, M^{\rho\sigma} \right] = -i \left(g^{\lambda\sigma} M^{\tau\rho} + g^{\tau\rho} M^{\lambda\sigma} - g^{\lambda\rho} M^{\tau\sigma} - g^{\tau\sigma} M^{\lambda\rho} \right) \quad (3.5.35)$$

in cui possiamo notare che $g^{\lambda\rho}$ è la costante di struttura. Nota, inoltre, che l'algebra (3.5.35) è identica all'algebra di $SO(n, m)$ (3.2.30), ma attenzione che gli $M^{\lambda\tau}$ non sono i generatori delle rotazioni $J^{\lambda\tau}$, o per lo meno non lo sono tutti.

L'algebra trovata (3.5.35) è l'algebra del gruppo $SO(1, 3)$, cioè il gruppo delle trasformazioni proprie di Lorentz, ma è possibile determinare l'algebra di Lorentz (3.5.35) per una rappresentazione generica, vedi p.19 di Gambino *Physical law should have mathematical beauty*. Gambino.

Se continuiamo ad indagare la natura e le proprietà delle matrici M è possibile trovare una diretta corrispondenza con i momenti angolari J^i e con i generatori dei boost K^i . Possiamo riscrivere i tensori $M^{\mu\nu}$ come²⁵:

$$J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M^{jk} \quad , \quad K^i = M^{0i} = -M^{i0} \quad (3.5.36)$$

in cui, sapendo che $M^{\mu\nu}$ sono antisimmetrici, si ha $M^{\mu\mu} = 0$. Stiamo sostanzialmente associando le parti spaziali di $M^{\rho\sigma}$ alle J_i e ai K^i le componenti di $M^{\rho\sigma}$ quando abbiamo $\rho = 0$ o $\sigma = 0$. Abbiamo, quindi, i vettori:

$$\vec{J} = \frac{1}{2} (M^{23}, M^{31}, M^{12}) \quad , \quad \vec{K} = (M^{01}, M^{02}, M^{03}) \quad (3.5.37)$$

Possiamo anche esprimere i parametri $\omega_{\mu\nu}$ in termini di angoli di rotazione e rapidità:

$$\vec{\theta} = (\omega^{23}, \omega^{31}, \omega^{12}) \quad , \quad \vec{\eta} = (\omega^{01}, \omega^{02}, \omega^{03}) \quad (3.5.38)$$

Da queste definizioni possiamo vedere che:

$$\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\omega_{0i} M^{0i} + \omega_{i0} M^{i0} + \omega_{ij} M^{ij}) = \vec{\eta} \cdot \vec{K} + \vec{\theta} \cdot \vec{J} \quad (3.5.39)$$

e che una generica TL (3.5.33) si riscrive come:

$$\Lambda = e^{i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} - \vec{\eta} \cdot \vec{K})} \quad (3.5.40)$$

È possibile verificare, vedi l'Appendice E, che i generatori (3.5.36) sono effettivamente i momenti angolari e i boost visti nella sezione §3.5.1. Presi i

²⁵In cui ε_{ijk} è il tensore di Levi-Civita tridimensionale completamente antisimmetrico.

generatori, utilizzando la rappresentazione (3.5.32) del gruppo $SO(1,3)$, è possibile vedere l'algebra²⁶:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \quad , \quad [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k \quad , \quad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k. \quad (3.5.41)$$

Infatti, se vedi in Appendice E come determiniamo esplicitamente gli operatori J^i e K^i , puoi prendere quella rappresentazione matriciale per verificare il commutatore.

Dalla prima delle (3.5.41) abbiamo la conferma definitiva che possiamo vedere i J_i come i generatori del gruppo di $SO(3)$. Come già sappiamo, le rotazioni di $SO(3)$ formano un gruppo compatto avendo i parametri (angoli di Eulero) che variano in un intervallo chiuso e limitato. Possiamo anche dire che componendo rotazioni successive possiamo sempre tornare al punto di partenza, ciò evidenzia la proprietà dei gruppi compatti di avere volume finito.

Notiamo anche che i generatori dei boost non generano un'algebra chiusa, dal momento che il commutatore di due K_i non manda in un altro K_j , bensì in un J_j , altro operatore che non è generatore dei boost. Per questo motivo diciamo che le trasformazioni di velocità non formano un gruppo, e di conseguenza, non sono un sottogruppo del gruppo di Lorentz, a differenza delle rotazioni spaziali di $SO(3)$. Si può anche notare che se si fa un boost lungo una certa direzione, non si può ritornare al punto di partenza continuando a comporre boost lungo la stessa direzione e per questo si dice che i boost hanno volume infinito. Possiamo anche notare che i boost non formano un'insieme compatto, infatti, i parametri non variano su un intervallo limitato di valori. È vero che in Relatività Speciale le velocità sono limitate in $[-c, +c]$, ma nei due casi limite ($v = \pm c$) il parametro $\gamma \rightarrow \infty$ (e $\beta = 1$), quindi, il boost non è definito.

Importante però notare che, se consideriamo tutti i generatori K^i e J^i (non in modo separato), allora otteniamo un'algebra chiusa e di conseguenza un gruppo. Il gruppo che otteniamo è proprio il gruppo di Lorentz $SO(1,3)$ (o $L_+^\uparrow$) delle trasformazioni di Lorentz proprie ed ortocrone, ovvero, con $\det = +1$ e $\Lambda^0_0 = +1$.

3.5.3 Rappresentazioni finito e infinito dimensionali

Nei miei appunti di MQ1 abbiamo visto bene (puoi anche vedere il capitolo §3.7.11 del Schwichtenberg Physical law should have mathematical beauty.symmetry) che un campo vettoriale $A(x)$ trasforma in due modi differenti.

²⁶Nota che si può anche utilizzare la relazione (3.5.35). Possiamo fare riferimento alla sezione 4.1 delle note di Gambino Physical law should have mathematical beauty.Gambino per la dimostrazione dell'algebra del gruppo di Lorentz. Nota anche che dal terzo commutatore possiamo vedere che un boost e una rotazione con uno stesso asse di riferimento commutano, poiché $[J^3, K^3] = 0$ per via del tensore di Levi-Civita.

Trasforma sia le coordinate, indotte da una trasformazione infinito dimensionale, ma trasforma anche le componenti, banalmente riordinandole, tramite una trasformazione finito dimensionale.

Potremmo scrivere nel caso di trasformazioni di Lorentz di un campo ϕ :

$$x^\mu \longrightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (3.5.42)$$

$$\phi(x^\mu) \longrightarrow M(\Lambda)\phi(\Lambda x) \quad (3.5.43)$$

in cui la prima ci indica la legge di trasformazione delle coordinate, mentre la seconda sui campi. Però come detto se abbiamo ϕ a più componenti allora la trasformazione può agire come:

$$\phi_a \longrightarrow M_{ab}\phi_b \quad (3.5.44)$$

e di fatto riorganizza le componenti, ma deve anche restituirci come la dipendenza dalle coordinate viene influenzata dalla trasformazione, quindi abbiamo bisogno anche di una rappresentazione che vive in uno spazio vettoriale infinito dimensionale (lo spazio delle funzioni è a dimensione infinita). Quindi, in senso generale possiamo scrivere tutta la trasformazione come:

$$\phi_a(x) \longrightarrow e^{-i\frac{\omega_{\mu\nu}}{2}M_{inf}^{\mu\nu}} \left(e^{-i\frac{\omega_{\mu\nu}}{2}M_{fin}^{\mu\nu}} \right)_a^b \phi_b(x) \quad (3.5.45)$$

che essendo la rappresentazione finita banalmente una matrice (quindi costante e finito dimensionale) possiamo scrivere:

$$\phi_a(x) \longrightarrow \left(e^{-i\frac{\omega_{\mu\nu}}{2}M^{\mu\nu}} \right)_a^b \phi_b(x) \quad (3.5.46)$$

con:

$$M^{\mu\nu} = M_{fin}^{\mu\nu} + M_{inf}^{\mu\nu} \quad (3.5.47)$$

che viene a volte chiamata **rappresentazione di campo**.

Quindi, in senso generale di ogni operatore ne possiamo dare una rappresentazione che fattorizza la parte infinito dimensionale da quella finito dimensionale. Per $M_{\mu\nu}$ possiamo scrivere:

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + S_{\mu\nu} \quad (3.5.48)$$

in cui individuiamo l'operatore $L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$ di momento angolare e un'altro operatore $S_{\mu\nu}$ hermitiano, con la stessa algebra di $L_{\mu\nu}$ e che commuta con esso, ma che non dipende nè da x^μ nè dalle sue derivate. Vedremo meglio le interpretazioni dei due pezzi nella sezione §4.4.1. È necessario separare i due pezzi finito ed infinito dimensionali nel momento in cui parliamo di trasformazioni che agiscono sulle coordinate; infatti, se abbiamo una trasformazione che scambia solo le componenti di un campo, allora possiamo

darne una rappresentazione finita, come nel caso dello spin, però se abbiamo una trasformazione che agisce sulle coordinate, essa non ammette una rappresentazione finito dimensionale, bensì solo una infinita.

Dunque, dobbiamo scrivere (3.5.48) quando abbiamo boost e rotazioni oltre lo spin, ma va bene (3.5.32) quando abbiamo solo lo spin (poiché è una simmetria interna e scambia solo le componenti).

Dimostriamo in modo più o meno formale (3.5.48) nella sezione §4.4.1 e vediamo l'espressione di $S_{\mu\nu}$ in §4.4.2.

3.5.4 Operatori di Casimir del gruppo di Lorentz

Vediamo chi sono gli operatori di Casimir del gruppo di Lorentz. Se non ricordi perché è importante farlo guarda la sezione §3.1.3.

Gli operatori di Casimir, sicuramente, commutando con i generatori del gruppo, saranno invarianti per trasformazioni di Lorentz, cioè saranno degli scalari. Siccome abbiamo $M^{\mu\nu}$ tensori di rango 2 antisimmetrici, ci sono due scelte ovvie:

$$\frac{1}{2}M^{\mu\nu}M_{\mu\nu} = J^2 - K^2 \quad (3.5.49)$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\mu\nu}M_{\rho\sigma} = \vec{J} \cdot \vec{K} \quad (3.5.50)$$

ovvero la scelta simmetrica e antisimmetrica. Infatti, nel caso di (3.5.49) è un'oggetto completamente simmetrico, mentre per (3.5.50) essendoci il tensore di Levi-Civita, è un oggetto completamente antisimmetrico.

Quindi, in analogia a quello detto per la Meccanica Quantistica, nel caso di $SO(1, 3)$ gli stati potranno essere identificati (etichettati) tramite gli autovalori relativi ai generatori diagonalizzabili del gruppo e ai due operatori (3.5.49) e (3.5.50). Vedremo, nella sezione §3.5.5, che in realtà $SO(1, 3)$ ha un gruppo di ricoprimento e non saranno propriamente (3.5.49) e (3.5.50) gli operatori di Casimir che useremo per etichettare gli stati.

È facile verificare che gli operatori (3.5.49) e (3.5.50) commutano con tutti i generatori. Ad esempio:

$$[J^2 - K^2, J_i] = \underbrace{[J^2, J_i]}_{=0} - [K^2, J_i] \quad (3.5.51)$$

$$= -K_l[K_l, J_i] - [K_l, J_i]K_l \quad (3.5.52)$$

$$= i\varepsilon_{ijk}\{K_l, K_k\} = 0. \quad (3.5.53)$$

3.5.5 L'algebra del gruppo di Lorentz fattorizza nel prodotto tensoriale di due sottoalgebre indipendenti

Quello che vedremo in questa sezione è, che a differenza della Meccanica Quantistica non relativistica in cui lo spin viene inglobato nella teoria a posteriori, l'algebra²⁷ di $SO(1, 3)$ è isomorfa all'algebra del prodotto:

$$SU(2) \otimes SU(2) \quad (3.5.54)$$

il che è molto importante, poiché nel momento in cui costruiremo una teoria invariante per Lorentz, allora avremo già lo spin inglobato in essa. Un'osservazione importante è che l'algebra $SU(2)$ è rappresentata da matrici complesse 2x2, ma noi abbiamo visto che avremo bisogno di matrici 4x4 nella nostra teoria, per cui, non è un caso che sia necessario considerare 2 gruppi $SU(2)$, ovvero, il prodotto (3.5.54).

Il gruppo $SU(2) \otimes SU(2)$ rappresenta il doppio ricoprimento di $SO(1, 3)$ e contiene più informazioni della rappresentazione definente che abbiamo visto quando analizziamo le richieste fisiche che vogliamo sul sistema.

Torniamo al gruppo di Lorentz e vediamo come troviamo questo ricoprimento. L'algebra trovata (3.5.41) si può semplificare molto se, complessifichiamo $\vec{J}$ e $\vec{K}$ e definiamo i generatori:

$$\vec{N} = \frac{1}{2} (\vec{J} + i\vec{K}) \quad , \quad \vec{N}^\dagger = \frac{1}{2} (\vec{J} - i\vec{K}) \quad (3.5.55)$$

che sono rappresentazioni non unitarie, poiché sono l'una il complesso coniugato dell'altra. Parliamo in questo caso di algebra complessificata, e il fatto che ci sia l'unità immaginaria è molto importante perché permette la fattorizzazione in due algebre indipendenti. L'algebra di $SO(1, 3)$ a questo punto diventa:

$$[N_i, N_j^\dagger] = 0 \quad , \quad [N_i, N_j] = i\varepsilon_{ijk} N^k \quad , \quad [N_i^\dagger, N_j^\dagger] = i\varepsilon_{ijk} N^{\dagger k} \quad (3.5.56)$$

è quindi evidente che N_i ed $N_i^\dagger$ soddisfano indipendentemente l'algebra di $SU(2)$, con il vantaggio che le due sotto-algebre sono indipendenti.

Gli operatori di Casimir (3.5.49) e (3.5.50) sono dati da:

$$N_i N^i \quad , \quad N_i^\dagger N^{\dagger i} \quad (3.5.57)$$

con rispettivamente autovalori $n(n+1)$ ed $m(m+1)$.

Dunque, l'algebra del gruppo $L_+^\uparrow$ è localmente isomorfa all'algebra del prodotto 3.5.54. Possiamo classificare tutte le rappresentazioni di $L_+^\uparrow$ partendo dalle rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$, che conosciamo bene dalla

²⁷Attenzione, l'algebra, non il gruppo.

Meccanica Quantistica non relativistica, e componendole (ossia un procedimento analogo a quando abbiamo composto momenti angolari). Vedremo come distinguere le varie rappresentazioni di $SO(1, 3)$ nella sezione §3.5.7.

Abbiamo già parlato del fatto che le rappresentazioni di $SU(2)$ sono etichettate dall'autovalore di J^2 , cioè $j(j+1)$, e hanno dimensionalità $2j+1$. Nel caso di $L_+^\dagger$ utilizzeremo le etichette date dagli autovalori degli operatori di Casimir N^2 ed $N_3^\dagger$, $n(n+1)$ e $m(m+1)$ rispettivamente, che possono assumere valori $n, m = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$.

Le rappresentazioni di $L_+^\dagger$ sono quindi etichettate dalla coppia (n, m) , mentre gli stati di una certa rappresentazione sono etichettati anche dagli autovalori di N_3 ed $N_3^\dagger$.

Nota Le due sottoalgebre di N ed $N^\dagger$ sono indipendenti, ma non lo sono le due rappresentazioni. Infatti, si può pensare ad una trasformazione di parità (che manda $J_i \rightarrow -J_i$ e $K_i \rightarrow -K_i$), oppure di hermitiana coniugazione (che cambia il segno di i e quindi scambia $N \leftrightarrow N^\dagger$). Le rappresentazioni non sono indipendenti proprio perché vediamo che le rappresentazioni del gruppo di Lorentz non sono invarianti per trasformazioni di parità o di hermitiana coniugazione.

Notiamo solo una piccolezza formale. Nella nota 27 abbiamo fatto attenzione al fatto che l'isomorfismo vale al livello delle algebre di $SO(1, 3)$ ed il prodotto (3.5.54), ma non dei gruppi. Infatti, l'isomorfismo vale sotto la condizione che l'algebra di $SU(2) \otimes SU(2)$ sia complessificata (come abbiamo fatto con N ed $N^\dagger$). Infatti, $SU(2) \otimes SU(2)$ non è il gruppo di ricoprimento universale di $SO(1, 3)$, bensì lo è $SL(2, \mathbb{C})$, che abbiamo visto nella sezione §3.5.6. In particolare il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ è un doppio ricoprimento di $SO(1, 3)$. È più corretto dire che il gruppo $SO(1, 3)$ è isomorfo (localmente) a (gruppo quoziente):

$$SO(1, 3) \simeq \frac{SL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2} \quad (3.5.58)$$

in cui $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$. Nota che si ha bisogno che anche $SL(2, \mathbb{C})$ sia definito sui complessi.

3.5.6 Gruppo unimodulare $SL(2, \mathbb{C})$

Prima di addentrarci nel gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ ricordiamo cos'abbiamo imparato da $SO(3)$ ed $SU(2)$.

Abbiamo visto che è possibile dare una rappresentazione di $SO(3)$ (gruppo delle rotazioni) nel gruppo $SU(2)$ (gruppo delle matrici complesse unitarie 2×2 con $\det = 1$).

$SO(3)$ è localmente isomorfo ad $SU(2)$ avendo la stessa algebra. Il gruppo di ricoprimento universale dell'algebra del momento angolare è proprio $SU(2)$, che appunto, contiene $SO(3)$ come sottogruppo. È vantaggioso utilizzare, in Meccanica Quantistica, $SU(2)$ al posto di $SO(3)$, poiché quest'ultimo permette di vedere, tramite le sue rappresentazioni, solo gli spin interi, mentre $SU(2)$ descrive rotazioni di spin sia intero che semi-intero. Alla rotazione R corrisponde la matrice complessa U di $SU(2)$:

$$R = e^{\varphi \hat{n} \cdot \vec{A}} \longleftrightarrow U = e^{-\frac{i}{2} \varphi \hat{n} \cdot \vec{\sigma}}. \quad (3.5.59)$$

Però visto che abbiamo imparato che ad una rotazione di $SO(3)$ corrispondono due rotazioni di $SU(2)$, possiamo dire che $SO(3)$ è localmente isomorfo al gruppo quoziente:

$$\frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2} \quad (3.5.60)$$

in cui compare il gruppo $\mathbb{Z}_2$ (Vedi l'Appendice D) proprio per via della corrispondenza 2-1 dell'isomorfismo.

Possiamo fare discorsi analoghi anche per il gruppo di Lorentz $SO(1, 3)$ seguendo le note di Gambino *Physical law should have mathematical beauty*. Come con $SO(3)$ e $SU(2)$ possiamo costruire un gruppo di ricoprimento universale per $SO(1, 3)$. Infatti, è possibile rappresentare il gruppo di Lorentz mediante matrici complesse 2×2 con $\det = 1$, che costituiscono il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$. Le matrici di $SL(2, \mathbb{C})$ sono quelle che mantengono invariato $x^\mu x_\mu$, ovvero matrici, in analogia a quanto fatto nella sezione §3.2.3, tali per cui:

$$X = x^\mu \sigma_\mu = x^0 \mathbb{1}_{2 \times 2} + \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \quad , \quad \det\{X\} = x_0^2 - \vec{x}^2 = x^\mu x_\mu \quad (3.5.61)$$

in cui abbiamo definito $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$ e possiamo vedere che $X = X^\dagger$. Se prendiamo una generica matrice $A \in SL(2, \mathbb{C})$ e guardiamo la trasformazione che induce su X :

$$X' = A X A^\dagger \quad (3.5.62)$$

possiamo notare che $X' = X'^\dagger$ e che $\det X = \det X'$, per cui X' lascia invariato il modulo quadro del quadrivettore x^μ ed essendo ancora hermitiana la possiamo scrivere come combinazione lineare di matrici hermitiane, ovvero delle σ^μ . Pertanto, alla matrice A corrisponde una trasformazione di Lorentz Λ , che però agisce usando matrici 2×2 hermitiane. In questo senso possiamo dire che il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ fornisce una rappresentazione spinoriale, in quando agisce su vettori di $\mathbb{C}^2$ detti **spinori**, di $SO(1, 3)$, così come succedeva per $SO(3)$ ed $SU(2)$. Esattamente come $SO(3) \rightarrow SU(2)$ permette di descrivere le rappresentazioni spinoriali come rappresentazioni ad un solo valore, ora, $SO(1, 3) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ include l'estensione relativistica delle proprietà spinoriali.

Notiamo, sempre in analogia con quanto fatto §3.2.3, che le matrici A e $-A$ corrispondono alla stessa Λ , per cui il gruppo $SO(1,3)$ in realtà è localmente isomorfo ad:

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}. \quad (3.5.63)$$

Il gruppo $SU(2)$ è sottogruppo di $SL(2, \mathbb{C})$ poiché $SL(2, \mathbb{C})$ è il gruppo delle matrici complesse 2×2 con determinante 1, mentre $SU(2)$ è il gruppo delle matrici complesse 2×2 , con determinante 1 ed unitarie. Rilassando la condizione di unitarietà stiamo prendendo in $SL(2, \mathbb{C})$ più elementi di quanti ne avevamo in $SU(2)$.

Ogni matrice complessa di $SL(2, \mathbb{C})$ fattorizza nel prodotto di una matrice di $SU(2)$ per una matrice hermitiana positiva con $\det = 1$. Ogni matrice di $SL(2, \mathbb{C})$ può essere scritta come e^{iB} , con B matrice 2×2 a traccia nulla²⁸. Poiché le matrici B possono essere combinazioni complesse delle matrici di Pauli si ha:

$$A = e^{i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \pm \vec{\eta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \quad (3.5.65)$$

con $\vec{\theta}$ e $\vec{\eta}$ trivettori reali. Nota che abbiamo messo di nuovo il fattore $1/2$ per tenere traccia del fatto che abbiamo un doppio ricoprimento. Sappiamo bene che $e^{i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}}$ corrisponde ad una rotazione di un angolo θ nella direzione $\hat{\theta}$. Il vettore $\vec{\eta}$ può essere identificato con la rapidità poiché:

$$\vec{K} = \pm i \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad (3.5.66)$$

soddisfa l'algebra dei generatori dei boost (3.5.41). Quindi, nella rappresentazione bidimensionale, una TL con parametri $\vec{\theta}$ e $\vec{\eta}$ viene rappresentata con una matrice data da (3.5.65). Possiamo quindi scegliere, confrontando (3.5.40) e (3.5.65), i generatori di rotazioni e boost:

$$\vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = \pm i \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad (3.5.67)$$

che portano ai generatori:

$$N = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{\sigma}}{2} \mp \frac{\vec{\sigma}}{2} \right), \quad N^\dagger = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{\sigma}}{2} \pm \frac{\vec{\sigma}}{2} \right) \quad (3.5.68)$$

che a seconda del segno $\pm$ che si prende portano a $N = 0$, $N^\dagger = \vec{\sigma}$ oppure a $N = \vec{\sigma}$, $N^\dagger = 0$. La scelta (3.5.68) è quella che genera la struttura *spinoriale* $(0, \frac{1}{2})$ o $(\frac{1}{2}, 0)$ (vedi la sezione §3.5.7).

²⁸Poiché vale:

$$\det \{ e^{iB} \} = e^{i \text{Tr} B} \quad (3.5.64)$$

e sappiamo che il determinante delle matrici di $SL(2, \mathbb{C})$ è 1.

Osservazione. Quello che facciamo in QFT non è poi così diverso da ciò che facciamo in MQ non relativistica. Infatti in MQ, quando costruiamo l'algebra del momento angolare (puoi vedere la sezione §3.6.1 del Schwichtenberg Physical law should have mathematical beauty.symmetry) definiamo gli operatori di innalzamento e abbassamento:

$$J_+ = J_1 + iJ_2 \quad , \quad J_- = J_1 - iJ_2 \quad (3.5.69)$$

con una normalizzazione. Ciò che abbiamo fatto non è altro che *complessificare* l'algebra di $SU(2)$:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k. \quad (3.5.70)$$

Il fatto qua è che in MQ, lavorando solo con $SU(2)$ stiamo *complessificando* i coefficienti e non l'algebra in se. Infatti, anche dopo aver definito gli operatori J_+ e J_- continuiamo ad avere l'algebra di $SU(2)$ nella nostra teoria, semplicemente ci siamo messi nel suo spazio complessificato. In questo senso possiamo dire che l'algebra di $SL(2, \mathbb{C})$, coincide con quella *complessificata* di $SU(2)$:

$$\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (3.5.71)$$

Nel caso della teoria dei campi è leggermente differente. Quando *complessifichiamo* i generatori del gruppo di Lorentz $SO(1, 3)$:

$$\vec{N} = \frac{1}{2} (\vec{J} + i\vec{K}) \quad , \quad \vec{N}^\dagger = \frac{1}{2} (\vec{J} - i\vec{K}) \quad (3.5.72)$$

non otteniamo semplicemente l'algebra di prima (3.5.41), ma troviamo due algebre di $SU(2)$ indipendenti (3.5.56), e quindi che possiamo decomporre l'algebra complessificata come:

$$\mathfrak{so}(1, 3)_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2). \quad (3.5.73)$$

Nota però che ciascuno sia N_i che $N_i^\dagger$ sono una complessificazione di $SU(2)$, per cui in realtà scriviamo, al livello di algebre, che vale:

$$\mathfrak{so}(1, 3)_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (3.5.74)$$

Abbiamo quindi visto che c'è un'isomorfismo locale tra $SL(2, \mathbb{C})$ e $SO(1, 3)$ e anche che il doppio ricoprimento di $SO(1, 3)$ è:

$$SO(1, 3) \simeq \frac{SL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}. \quad (3.5.75)$$

Quindi, nel caso del momento angolare, “complessificare” serve solo per convenienza (operatori di innalzamento e abbassamento), ma non cambia la struttura del gruppo. Nel caso di Lorentz, invece, la complessificazione rivela

una decomposizione²⁹ interna reale dell'algebra in due sottostrutture $SU(2)$ indipendenti.

Come fatto per il momento angolare, le rappresentazioni irriducibili che ci daranno gli stati fisici (particelle) sono quelle del gruppo di ricoprimento delle nostre simmetrie. Quindi cercheremo le rappresentazioni irriducibili di $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ anziché di $SO(1, 3)$. Infatti, come già detto, le etichette dei nostri stati fisici saranno gli autovalori degli operatori di Casimir (3.5.57).

Nel seguito delle note parleremo di rappresentazioni del gruppo di Lorentz, ma in realtà ricorda che ci stiamo sempre riferendo alle rappresentazioni irriducibili del gruppo di ricoprimento universale di $SO(1, 3)$.

3.5.7 Rappresentazione scalare, spinoriale e vettoriale

Una volta fissata l'algebra, che per noi è:

$$[N_i, N_j^\dagger] = 0 \quad , \quad [N_i, N_j] = i\varepsilon_{ijk}N^k \quad , \quad [N_i^\dagger, N_j^\dagger] = i\varepsilon_{ijk}N^{\dagger k} \quad (3.5.76)$$

dobbiamo sceglierne una rappresentazione per effettivamente lavorare. Come già accennato nella sezione §3.5.6 il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ fornisce una rappresentazione spinoriale di $SO(1, 3)$, così come succedeva per $SO(3)$ ed $SU(2)$, e definendo gli operatori $\vec{N}$ e $\vec{N}^\dagger$ possiamo etichettare i sistemi con le coppie di valori (n, m) , autovalori degli operatori.³⁰ Abbiamo anche detto che:

$$n, m = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (3.5.77)$$

Poiché $N^{(\dagger)}$ soddisfano l'algebra di $SU(2)$ e quindi assumono valori interi e semi-interi. Vediamo i diversi casi che si possono avere:

- $(0, 0)$ ossia abbiamo $n = 0$ ed $m = 0$, che vuol dire:

$$\vec{N} = 0 \quad , \quad \vec{N}^\dagger = 0 \quad \implies \quad \vec{J} = 0 \quad , \quad \vec{K} = 0. \quad (3.5.78)$$

Dunque le matrici delle trasformazioni di Lorentz sono:

$$\vec{N} = 0 \quad , \quad \vec{N}^\dagger = 0 \quad \implies \quad e^{iN_i^\dagger} = e^{iN_i} = e^0 = 1 \quad (3.5.79)$$

$$\implies \quad \Lambda = 1 \quad (3.5.80)$$

ovvero, è un'unica matrice 1x1 (numero), che non trasforma nulla.

Questa è la rappresentazione **scalare** ϕ , che è in uno spazio di dimensione 1 (essendoci solo un elemento) e ha parità definita, cioè è scalare o pseudo-scalare. Tieni a mente che dire *scalare* vuol dire che rimane

²⁹Questa decomposizione è non banale e nasce dal fatto che le K_i non sono “rotazioni reali”, ma “boost” — e i segni nei commutatori li fanno combinare in modo diverso.

³⁰Ovviamente l'ordine in cui mettiamo gli autovalori non è rilevante, ma ci serve solamente per tenere a mente a quale operatore appartengono.

invariato per trasformazioni di Lorentz, che è proprio il motivo per cui è interessante.

La rappresentazione $(0,0)$ rappresenta, per quanto ne sappiamo ora, solamente il bosone di Higgs.

- $(\frac{1}{2}, 0)$ ossia $n = \frac{1}{2}$ ed $m = 0$, che vuol dire:

$$N_i^\dagger = 0 \implies J_i = iK_i \quad (3.5.81)$$

$$N_i = \frac{\sigma_i}{2} \implies N_i = \frac{1}{2}(J_i + iN_i) = \frac{\sigma_i}{2} \quad (3.5.82)$$

$$\implies K_i = -i\frac{\sigma_i}{2} \quad (3.5.83)$$

e dunque:

$$\vec{N} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{N}^\dagger = 0, \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2}. \quad (3.5.84)$$

Possiamo vedere che il fattore $-i$ che compare nella rappresentazione della trasformazione di boost K_i è dovuto al fatto di aver complessificato l'algebra. Questa espressione dei generatori non ci stupisce più di tanto poichè lo avevamo già imparato parlando della rappresentazione spinoriale che ottenevamo da $SL(2, \mathbb{C})$.

Questa è la rappresentazione **spinore left-handed** (sinistrorso) ψ_L , poichè è non nulla l'etichetta sulla sinistra. Li chiamiamo spinori perchè è evidente che questa rappresentazione del gruppo di Lorentz è bidimensionale, per cui agisce su oggetti bidimensionali e non i soliti quadri-vettori di Minkowski. La generica trasformazione (elemento del gruppo) di Lorentz (3.5.40), diventa:

$$\xi = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\eta})} \quad (3.5.85)$$

da cui possiamo facilmente vedere che se prendessimo solo una matrice di rotazione essa sarebbe:³¹

$$R_x = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (3.5.86)$$

matrice 2x2, con parametro $\theta/2$ e complessa; invece, per i boost avremmo:

$$K_i = -i\frac{\sigma_i}{2} \implies B_\phi = e^{i\phi_i K_i} = e^{\phi_i \frac{\sigma_i}{2}} \quad (3.5.87)$$

in cui nell'ultimo esponenziale possiamo riconoscere la struttura dei boost in cui utilizziamo i seni e coseni iperbolici (visto che è un esponenziale senza i).

³¹Lo vedi facilmente prendendo $\vec{\eta} = 0$ e sviluppando l'esponenziale, come fatto in (3.2.38).

In termini matriciali scriviamo la matrice di Lorentz:

$$\Lambda_{(\frac{1}{2},0)} = e^{i(\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + \vec{\phi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2})} \longrightarrow \Lambda_a^b \quad (3.5.88)$$

che trasforma uno spinore come:

$$\chi'_L = \Lambda_a^b \chi_b = \left(e^{i(\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + \vec{\phi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2})} \right)_a^b \chi_b \quad (3.5.89)$$

- $(0, \frac{1}{2})$ quindi abbiamo $n = 0$ ed $m = \frac{1}{2}$, che vuol dire:

$$\vec{N} = 0, \quad \vec{N}^\dagger = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad \vec{K} = i\frac{\vec{\sigma}}{2}. \quad (3.5.90)$$

Questa è la rappresentazione **spinore right-handed** (destrorso) ψ_R . La generica trasformazione di Lorentz (3.5.40), diventa:

$$\bar{\xi} = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\eta})}. \quad (3.5.91)$$

Gli spinori ψ_L e ψ_R hanno 2 componenti (up e down), generalmente complesse poiché lo spazio è complesso, e si dicono **spinori di Weyl**, indicati tendenzialmente con χ_L e χ_R (o delle volte anche con ξ e $\bar{\xi}$) e talvolta i loro indici (matriciali) sono indicati con α e $\dot{\alpha}$ (puoi vedere la sezione §3.7.7 del Schwichtenberg Physical law should have mathematical beauty.symmetry per dettagli sulla notazione di Van der Waerden). I termini sinistrorso e destrorso si riferiscono alle proprietà di chiralità (γ^5), che definiremo più avanti. Si può notare che le due rappresentazioni $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ sono inequivalenti, infatti, per passare da una all'altra è necessaria una coniugazione complessa³². Sono inoltre due rappresentazioni non unitarie.

Solitamente si dice che gli spinori sono gli oggetti più fondamentali che si possono trasformare tramite trasformazioni di Lorentz dal momento che la rappresentazione $(0, 0)$ è una rappresentazione banale.

Puoi vedere il capitolo §4.4.3 dedicato alla costruzione della teoria, in cui vediamo le trasformazioni degli spinori (bidimensionali) sotto trasformazioni di Lorentz. In tale capitolo ci accorgeremo che non sono invarianti di Lorentz, dunque non sono particelle osservabili in natura, e per costruire la lagrangiana L avremo bisogno di utilizzare altri oggetti, i quali mescolano le due algebre $SU(2)$. Oggetti di questo tipo sono ad esempio $\psi_R^T \psi_L$ o $\psi_L^T \psi_R$. In particolare, quando ci renderemo conto che gli spinori non sono invarianti per coniugazione di carica e per parità, costruiremo gli *spinori di Dirac*,

³²Rifacendosi a p.23 di Gambino Physical law should have mathematical beauty.Gambino:

$$e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}(\vec{\theta} + i\vec{\eta})} = S \left[e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}(\vec{\theta} - i\vec{\eta})} \right]^* S^{-1} \quad (3.5.92)$$

dove $S = i\sigma_2$. L'identità si verifica usando $\sigma_2 \vec{\sigma}^* \sigma_2 = -\vec{\sigma}$. Attenzione però che non è una trasformazione di similarità e $S = i\sigma_2$. L'identità si verifica sfruttando $\sigma_2 \vec{\sigma}^* \sigma_2 = -\vec{\sigma}$.

che hanno 4 componenti, e gli *spinori di Majorana* nel caso in cui vogliamo evidenziare le proprietà di chiralità.

Avremo a disposizione nella nostra teoria, ovviamente, anche altri valori di n ed m , ma che in realtà non ci interessano molto poiché noi vogliamo studiare particelle elementari e possiamo generare tutte le rappresentazioni interessanti, con un procedimento simile alla composizione dei momenti angolari, a partire da quelle "base" elencate sopra. Infatti, date le rappresentazioni degli spinori left e right, generiamo le altre rappresentazioni moltiplicando le due di base. Ad esempio potremo avere:

- La rappresentazione di uno **spinore di Dirac** a 4 componenti:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (3.5.93)$$

- La rappresentazione con spin 1 e 4 componenti (quadrivettori)

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (3.5.94)$$

come ad esempio il quadripotenziale A^μ . Questi sono i **campi vettoriali**. Diciamo che sono quadrivettori perché stiamo componendo le due rappresentazioni (bidimensionali) $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right)$, che sappiamo essere indipendenti dal commutatore $[N_i, N_j^\dagger] = 0$. Quindi un oggetto di $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sarà composto da 4 componenti, poiché ogni rappresentazione di $SU(2)$ ne fornisce 2.

Nella sezione §3.7.8 del Schwichtenberg Physical law should have mathematical beauty. symmetry puoi vedere che un oggetto $v \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ lo puoi scrivere come un oggetto con due indici v_{ab} , che si trasformano ciascuno con una rappresentazione spinoriale. Ti fa anche vedere però che una trasformazione fatta su un oggetto di questo tipo, che inevitabilmente è bidimensionale, la si può vedere come una trasformazione fatta su un quadrivettore. Per motivi di comodità quindi usiamo oggetti quadridimensionali come A^μ anziché bidimensionali come v_{ab} per indicare rappresentazioni di $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Questa cosa però ci mostra che i quadrivettori sono degli spinori di rango due e per questo motivo non sono oggetti adatti a studiare *tutti* i sistemi fisici ad un livello fondamentale, essendo loro stessi oggetti non fondamentali.

- La composizione di due spinori left-handed:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0) \oplus (1, 0) \quad (3.5.95)$$

che si decompone nella somma diretta di uno scalare $(0, 0)$ ed un tensore di rango 2, $(1, 0)$, antisimmetrico self-duale, ovvero tale che:

$$B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu} \quad , \quad B_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} B_{\rho\sigma} \quad (3.5.96)$$

come ad esempio il tensore di Maxwell $F^{\mu\nu}$ che trasforma come $(0, 1) \oplus (1, 0)$. La rappresentazione $(0, 1)$ corrisponderebbe ad un tensore antiself-duale, ovvero tale:

$$B_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} B_{\rho\sigma}. \quad (3.5.97)$$

Abbiamo quindi visto che le rappresentazioni (irriducibili) del gruppo di Lorentz, le quali ci permettono di rappresentare tutte le particelle elementari in natura. Però notiamo anche che non abbiamo ancora parlato di massa, per cui manca ancora un tassello per avere una completa descrizione delle particelle. In questo momento non siamo ancora in grado di distinguere due particelle che hanno stesso spin, ma masse diverse. Per fare questo ulteriore passo dobbiamo considerare il vero gruppo di simmetria della Relatività Speciale, ovvero il gruppo di Poincaré.

3.5.8 Teorema di Wigner e regola di superselezione

Vediamo in questa sezione un importante teorema che ci fornisce delle basi per la nostra teoria. È opportuno ricordare il teorema 1 e ciò che ne consegue.

In Meccanica Quantistica sappiamo bene che gli stati fisici sono raggi in uno spazio di Hilbert, per cui abbiamo una classe di equivalenza di vettori normalizzati che differiscono solo per un fattore di fase. Abbiamo anche che ad ogni simmetria del sistema corrisponde una trasformazione degli stati che preserva l'interpretazione probabilistica della teoria. Vale:

$$P(\Psi \rightarrow \Psi_1) = |\langle \Psi | \Psi_1 \rangle|^2 = P(\Psi' \rightarrow \Psi'_1) = |\langle \Psi' | \Psi'_1 \rangle|^2 \quad (3.5.98)$$

ovvero, la probabilità che lo stato Ψ transisca in Ψ_1 è uguale anche dopo la trasformazione che manda $\Psi \rightarrow \Psi'$ e $\Psi_1 \rightarrow \Psi'_1$. Wigner ha dimostrato che, per trasformazioni che appartengono ad un gruppo continuo e che sono connesse con l'identità, le trasformazioni $\Psi \rightarrow \Psi'$ devono essere unitarie e lineari. In simboli possiamo scrivere, quello che va sotto il nome di **teorema di Wigner**:

$$\text{se } |\Psi'\rangle = U |\Psi\rangle \text{ con } UU^\dagger = \mathbb{1} \quad (3.5.99)$$

$$\langle \Psi' | \Psi'_1 \rangle = \langle \Psi | U^\dagger U | \Psi_1 \rangle = \langle \Psi | \Psi_1 \rangle \quad (3.5.100)$$

ciò è alla base delle trasformazioni unitarie in Meccanica Quantistica. Dunque, in presenza di una simmetria continua gli stati fisici non possono trasformarsi secondo rappresentazioni non unitarie del gruppo di simmetria. Allora,

gli stati quanto-relativistici non possono trasformarsi secondo rappresentazioni finite del gruppo di Lorentz, in quanto esse non sono unitarie. Nonostante ciò, però, non ci dimentichiamo completamente delle rappresentazioni finite poiché sono comunque importanti perché le quantità (osservabili) fisiche (come quadrimpulso, campo EM, campi spinoriali, etc.) si trasformano per TL secondo rappresentazioni finite del gruppo di Lorentz.

Un altro modo di vedere il teorema di Wigner è:

Un teoria quantistica formulata su uno spazio di Hilbert mantiene invariate le probabilità in ogni sistema di riferimento inerziale, se e solo se la corrispondenza tra stati in differenti sistemi inerziali si realizza attraverso trasformazioni unitarie del gruppo di Poincaré.

Se una rappresentazione è unitaria, allora non è finito dimensionale. Vediamo ad esempio $\vec{J}$ e $\vec{K}$ che sono terne hermitiane, i cui autostati sono stati fisici ed infinito dimensionali. Per questo la rappresentazione è infinito dimensionale.

Invece, una rappresentazione finito dimensionale non è unitaria. Vediamo ad esempio $\vec{N}$ ed $\vec{N}^\dagger$ che sono anch'esse terne hermitiane. Le osservabili si trasformano per TL secondo rappresentazioni finito dimensionali.

Parliamo anche della seconda parte del titolo della sezione, la regola di superselezione. Abbiamo visto nella sezione §3.2 che uno spinore cambia segno con una rotazione di 2π attorno un qualsiasi asse. La stessa cosa accade per gli stati spinoriali. Il fatto è che questa rotazione non dovrebbe produrre effetti misurabili. Ciò si traduce nel chiedere che tutte le osservabili fisiche, cui corrispondono elementi di matrice di operatori hermitiani $\langle B|O|A\rangle$, devono essere invarianti per rotazioni di 2π , che sono a loro volta rappresentate da un operatore unitario $R_{2\pi}$. Deve quindi valere:

$$\langle B|O|A\rangle = \langle R_{2\pi}B|O|R_{2\pi}A\rangle = \langle B|R_{2\pi}^\dagger O R_{2\pi}|A\rangle \quad (3.5.101)$$

$$\implies O = R_{2\pi}^\dagger O R_{2\pi} \quad (3.5.102)$$

che implica che tutte le osservabili fisiche O devono trasformarsi secondo rappresentazioni tensoriali (spin intero) del gruppo di Lorentz. Di conseguenza, O ha elementi non nulli solo tra stati fisici $|A\rangle$ e $|B\rangle$ che si comportano allo stesso modo per rotazioni di 2π , dunque devono essere entrambi spinori o entrambi tensori. Questa si chiama **regola di superselezione**.

Facciamo un esempio. Prendiamo $|\Psi_I\rangle$ uno stato di spin intero e $|\Psi_S\rangle$ uno stato di spin semi-intero, allora:

$$\langle \Psi_S|O|\Psi_I\rangle = \underbrace{\langle \Psi_S|R_{2\pi}^\dagger}_{\langle \Psi_S|} O \underbrace{R_{2\pi}|\Psi_I\rangle}_{-|\Psi_I\rangle} = -\langle \Psi_S|O|\Psi_I\rangle = 0. \quad (3.5.103)$$

Tipiche osservabili che trattiamo sono i trivettori $\vec{J}$ (momento angolare) ed $\vec{S}$ (spin), oppure quadrivettori come il quadri-impulso p^μ . La regola di superselezione implica (o riflette) pure l'impossibilità di preparare stati quantistici che siano sovrapposizioni lineari di stati spinoriali e tensoriali.

Una breve osservazione prima di passare al secondo colosso del capitolo. Se avessimo fatto tutti i nostri discorsi lavorando in uno spazio euclideo, in cui il tempo lo avremmo sostituito con $\sqrt{-1}t$, avremmo avuto per tutto il tempo in mano la metrica $-\delta_{\mu\nu}$ al posto di quella minkowskiana $g_{\mu\nu}$, ma avremmo ottenuto gli stessi risultati. La differenza sta nel fatto che saremmo arrivati ad un'algebra $SO(4)$, ossia delle rotazioni in 4 dimensioni.

Nello spazio minkowskiano abbiamo trovato, invece, l'algebra di $SU(2) \otimes SU(2)$ attraverso due combinazioni hermitiane dei generatori $(J_i \pm iK_i)$. I due $SU(2)$ sono completamente indipendenti tra loro (vedi il commutatore tra N_i ed $N_i^\dagger$), poiché non possono essere scambiati³³ uno con l'altro da un'operazione di hermitiana coniugazione. I due $SU(2)$ però sono collegati da trasformazioni di parità, infatti abbiamo visto che possiamo scambiarli con una trasformazione di quel tipo; ciò perde d'interesse nello spazio euclideo in cui tutte le direzioni sono equivalenti.

3.6 Il gruppo di Poincaré

Come abbiamo già notato nel primo capitolo non vogliamo richiedere che la nostra teoria sia invariante solo per trasformazioni del gruppo di Lorentz, ma vogliamo anche includere nelle invarianze anche le traslazioni³⁴, cioè trasformazioni del tipo:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (3.6.2)$$

in cui a^μ è un quadrivettore indipendente da x . Vogliamo, quindi, l'invarianza per rotazioni e boost, identificati dalle matrici $\Lambda^\mu{}_\nu$ come visto per il gruppo di Lorentz, e per traslazioni. Infatti la distanza spazio-temporale rimane

³³Facciamo sempre attenzione a non scambiare le proprietà dei generatori con quelle dell'algebra (o sottoalgebra) del gruppo.

³⁴Formalmente il gruppo di Poincaré $ISO(1, 3)$ è il prodotto semidiretto:

$$ISO(1, 3) = \mathbb{R}^4 \rtimes SO(1, 3). \quad (3.6.1)$$

Un gruppo prodotto semidiretto tra due gruppi N ed H , $G = N \rtimes H$, è costruito da due sottogruppi invarianti (vedi la definizione 19) e un'azione di H su N che ne deforma la struttura del prodotto. La differenza con il prodotto diretto è che in $G = N \times H$ non c'è interazione tra i due gruppi e i vari elementi commutano tra loro, invece, in $G = N \rtimes H$ solo N è normale, H agisce su N con un'azione di gruppo e l'operazione di gruppo è "twistata" da questa azione. Nel nostro caso di interesse, $ISO(1, 3) = \mathbb{R}^4 \rtimes SO(1, 3)$, sappiamo bene che l'azione delle rotazioni (in $SO(1, 3)$) non commuta con le traslazioni e applicare una rotazione ad un quadrivettore di traslazione restituisce sempre una traslazione, ma con un contributo rotazionale di momento angolare.

invariata non solo per trasformazioni di Lorentz, ma anche per traslazioni.³⁵ Quindi chiediamo l'invarianza per trasformazioni:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (3.6.3)$$

che sono trasformazioni a 10 parametri (6 dai dal gruppo di Lorentz, i cui generatori abbiamo visto essere $\vec{J}$ e $\vec{K}$, e gli altri 4 parametri che sono dati dalle traslazioni spatio-temporali). Il gruppo che formano trasformazioni del tipo (3.6.3) sappiamo già qual è, poiché come già accennato, il **gruppo di Poincaré** (o gruppo di Lorentz inhomogeneo) è formato dell'"unione" del gruppo delle rotazioni e dei boost nello spazio quadridimensionale di Minkowski (il gruppo di Lorentz) con le traslazioni quadridimensionali. Possiamo vedere che il gruppo di Poincaré non è un gruppo compatto per via della presenza di boost e traslazioni, che prese singolarmente non formano un gruppo compatto, bensì un gruppo abeliano (al contrario delle sole rotazioni che formano un gruppo compatto e non abeliano). Indichiamo le trasformazioni (3.6.3) di Poincaré con TP e il gruppo con $ISO(1,3)$, ovvero, come gruppo speciale ortogonale inhomogeneo.

È possibile vedere subito che le trasformazioni di Poincaré non commutano con le trasformazioni di Lorentz. Considerando 2 TP successive con parametri (Λ_1, a_1) e (Λ_2, a_2) si vede che:

$$x^\mu \longrightarrow \Lambda_1^\mu{}_\nu x^\nu + a_1^\mu \longrightarrow \Lambda_2^\mu{}_\rho \Lambda_1^\rho{}_\nu x^\nu + \Lambda_1^\mu{}_\rho a_1^\rho + a_2^\mu \quad (3.6.4)$$

si vede quindi che il parametro di traslazione a_1 viene ruotato, per cui, i generatori delle rotazioni non commutano con quelli delle traslazioni.

Occorre però notare che le trasformazioni di Lorentz omogenee $\{\Lambda, 0\}$ e le traslazioni spatio-temporali $\{1, a\}$ formano sottogruppo, e mentre il secondo è abeliano (visto che le traslazioni commutano) il primo non lo è.

Il gruppo di Poincaré ricopre un ruolo fondamentale nella classificazione degli stati di singola particella in Meccanica Quantistica relativistica. Infatti, alcune delle rappresentazioni irriducibili unitarie (trivialmente unidimensionali o necessariamente infinito dimensionali, poiché il gruppo è non compatto) sono utilizzate per rappresentare quello che si è osservato in natura, ossia, particelle massive con spin intero o semintero (rappresentazioni infinito dimensionali), particelle con massa nulla ed elicità h (rappresentazioni unidimensionali).

Nella teoria che costruiremo una particella è rappresentata da una rappresentazione irriducibile del gruppo di Poincaré. Come succedeva in Meccanica Quantistica.

³⁵L'assioma della Relatività Speciale di costanza della velocità rimane comunque valido, visto che la misura di velocità in qualche punto x^μ in un certo sistema di riferimento rimane uguale anche se la misuriamo in un punto shiftato $x^\mu + a^\mu$.

3.6.1 Algebra del gruppo di Poincaré

In questa sottosezione cercheremo di capire qual è l'algebra del gruppo di Poincaré. Prima di fare ciò però dobbiamo capire com'è fatto il gruppo delle traslazioni.

Sappiamo dalla Meccanica Quantistica che il generatore delle traslazioni è l'operatore impulso³⁶, nel nostro caso quadri-impulso, nello spazio delle configurazioni definito come³⁷:

$$P_\rho = -i\partial_\rho. \quad (3.6.7)$$

Infatti, l'operatore di derivata genera proprio il coefficiente nello sviluppo in serie della traslazione infinitesima:

$$\delta x^\mu = i\varepsilon^\rho P_\rho x^\mu \equiv \varepsilon^\mu \quad (3.6.8)$$

in cui ε^μ sono i parametri della trasformazione, e ciò è il motivo per cui scriviamo per una generica trasformazione:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \quad (3.6.9)$$

ed un generico elemento del gruppo, che è chiuso, delle traslazioni lo scriviamo come:

$$U_t(\varepsilon) = e^{-i\varepsilon^\mu P_\mu} = e^{-i(\varepsilon^0 P_0 - \vec{\varepsilon} \cdot \vec{P})}. \quad (3.6.10)$$

Non ci siamo fatti troppi problemi e abbiamo esteso $\vec{p}$ allo spazio di Minkowski, dandogli una componente 0. Sappiamo, sempre dalla Meccanica Quantistica, che la traslazione temporale è rappresentata dall'operatore di evoluzione temporale (in cui compare $\hat{H}$):

$$e^{iH\Delta t} = e^{iP^0\Delta t} \quad ; \quad P^0 \equiv H \quad , \quad \varepsilon^0 = \Delta t. \quad (3.6.11)$$

Quindi concludiamo che:

$$P^\mu = (P^0, \vec{P}) \equiv -i\partial_\mu \quad (3.6.12)$$

³⁶Lo vediamo prendendo una trasformazione generica (troncando Taylor al primo ordine):

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon^\rho \partial_\rho x^\mu \quad (3.6.5)$$

sappiamo dalla (3.6.7) che $P_\rho = -i\partial_\rho$, quindi:

$$x'^\mu = x^\mu + i\varepsilon^\rho P_\rho x^\mu \quad (3.6.6)$$

e possiamo dire che P_ρ è il generatore delle traslazioni.

³⁷Nota che ha una rappresentazione infinito dimensionale poiché come ben sappiamo ciò è caratteristico di trasformazioni che non agiscono sulle componenti, bensì solo sulle coordinate.

sono i **generatori del gruppo delle traslazioni**, la cui algebra è:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \quad (3.6.13)$$

che riflette la natura abeliana del gruppo delle traslazioni.

Cerchiamo a questo punto l'algebra del gruppo di Poincaré.³⁸ Dalla Meccanica Quantistica sappiamo che gli impulsi non commutano con i generatori del gruppo di Lorentz³⁹ ($M_{\mu\nu}$):

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu) \quad (3.6.14)$$

ed in particolare:

$$[P^i, P^j] = 0 \quad [P^i, H] = 0 \quad [J^i, H] = 0 \quad (3.6.15)$$

$$[K^i, P^j] = i\delta^{ij}H \quad [K^i, H] = -iP^i \quad [K^i, K^j] = -i\varepsilon^{ijk}J^k \quad (3.6.16)$$

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk}J^k \quad [J^i, P^j] = i\varepsilon^{ijk}P^k \quad [J^i, K^j] = i\varepsilon^{ijk}K^k. \quad (3.6.17)$$

Notiamo che i primi commutatori (3.6.15) evidenziano il fatto che traslazioni e rotazioni sono costanti del moto (ci mostrano che chiaramente traslazioni e rotazioni spaziali non sono influenzate da traslazioni temporali), mentre dalla seconda delle (3.6.16) vediamo che i generatori dei boost, K^i , non commutano con H . È evidente che i 10 generatori (impulso e del gruppo di Lorentz) formino un'algebra chiusa, con sottoalgebre delle rotazioni e traslazioni. Notiamo anche che le traslazioni formano un gruppo non compatto. L'ultima riga (3.6.17) certifica il fatto che $\vec{J}$, $\vec{K}$ e $\vec{P}$ sono trivettori. Notiamo anche dai primi due commutatori della seconda riga (3.6.16), che esprimono la variazione delle componenti di P^μ per boost, che P^μ si comporta, ovviamente, come un quadrivettore, cioè la componente temporale acquista un termine proporzionale all'impulso lungo la direzione del boost e viceversa, mentre le componenti trasversali non vengono modificate.

Dalla classificazione di Wigner, che abbiamo visto nella sezione §3.5.8, le rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré sono infinito dimensionali (poiché P^μ è continuo). La non compattezza del gruppo di Lorentz e del gruppo delle traslazioni, infatti, di porta a dire (in modo equivalente alla frase appena conclusa) che le rappresentazioni irriducibili finito-dimensionali non sono unitarie. Per le applicazioni fisiche a noi interesseranno le rappresentazioni irriducibili unitarie, dunque, per forza (Wigner ci dice così) infinito-dimensionali.

³⁸Possiamo fare riferimento alla sezione 5.1 delle note di Gambino Physical law should have mathematical beauty. Gambino per la dimostrazione dell'algebra del gruppo di Poincaré.

³⁹Abbiamo anche visto in (3.6.4) che le TP non commutano con le TL.

Una breve osservazione. Dalla teoria dei gruppi, ed in particolare dalla teoria delle rappresentazioni, sappiamo che possiamo avere rappresentazioni diverse per uno stesso gruppo. P^μ con la rappresentazione differenziale (3.6.12) ha lo svantaggio che è di dimensione infinita, ma il vantaggio di essere unitaria. Se invece dessimo a P^μ una rappresentazione matriciale 4×4 avremmo una rappresentazione finita, ma con lo svantaggio di non essere unitaria.

Di solito si utilizzano rappresentazioni unitarie per gli stati, in modo da conservare la norma nel tempo (e per poter utilizzare l'operatore di evoluzione temporale U), invece, per le osservabili (gli operatori) conviene utilizzare le rappresentazioni finite, in modo da saperli scrivere.

Vediamo che il gruppo $ISO(1, 3)$ ha ancora rango 2 poichè tra i generatori J^i , K^i , P^i e P^0 possiamo solo sceglierne 2 che commutino tra loro. Si verifica facilmente guardando per un secondo l'algebra.

3.6.2 Casimir del gruppo di Poincaré

Visti chi sono i generatori e qual è l'algebra del gruppo possiamo cominciare a pensare chi sono gli operatori di Casimir del gruppo di Poincaré. In gruppi non semisemplici, come $ISO(1, 3)$ (poiché contiene le traslazioni, che sono un gruppo abeliano), gli operatori di Casimir esistono, ma non li possiamo trovare utilizzando solo il rango, ovvero sfruttando il teorema di Racah, dobbiamo costruirli esplicitamente usando l'algebra di Lie e cosa più importante sono legati a quantità fisiche conservate nelle rappresentazioni irriducibili.

Un primo operatore di Casimir può essere trovato notando che la "lunghezza" del vettore P^μ dev'essere invariante per trasformazioni del gruppo di Poincaré per definizione, quindi, è un operatore di Casimir:

$$P^2 = P_\mu P^\mu. \quad (3.6.18)$$

Il secondo Casimir è il quadrato dell'operatore che viene chiamato **operatore di Pauli-Lubanski**, che è un operatore completamente antisimmetrico, definito come:

$$W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma} \quad (3.6.19)$$

per il quale valgono:

$$W \cdot P = 0 \quad , \quad [W^\mu, P^\nu] = 0. \quad (3.6.20)$$

In cui sia il prodotto scalare che il commutatore di W^μ e P^ν sono nulli per simmetria e per colpa della presenza di $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$; questi vincoli comportano che solo 3 componenti di W^μ siano indipendenti.

Inoltre, W^μ si trasforma come un quadrivettore, così come P^μ . In particolare si ottiene:

$$W^0 = \vec{P} \cdot \vec{J} \quad (3.6.21)$$

$$\vec{W} = P^0 \vec{J} - \vec{P} \times \vec{K} \quad (3.6.22)$$

con $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ se consideriamo anche rotazioni intrinseche e quindi ricordiamo la definizione di $M^{\mu\nu}$ (3.5.48).

Il secondo operatore di Casimir abbiamo detto essere W^2 . È facile verificare che P^2 e W^2 commutano con tutti i generatori del gruppo di Poincaré.

Come abbiamo già detto, le rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré sono infinito dimensionali, sono state classificate da Wigner⁴⁰ in termini degli operatori di Casimir.

È interessante trovare gli operatori di Casimir del gruppo di Poincaré poiché li utilizziamo per etichettare non degli stati fisici quantistici generici, ma li utilizziamo proprio per etichettare le particelle elementari.

3.6.3 Interpretazione autovalori degli operatori di Casimir

Nella sezione §3.6.2 abbiamo definito un operatore di Casimir come il quadrato dell'operatore di Pauli-Lubanski (3.6.19), ma non ci siamo molto preoccupati del senso di quella definizione, ci siamo semplicemente fidati dei due fisici che gli hanno dato il nome. Proviamo in questa sezione a capire meglio l'interpretazione fisica che si può dare al vettore (3.6.19), come esso sia legato allo spin e quale etichette ci danno gli operatori di Casimir.

Notiamo che il primo operatore di Casimir è:

$$P^\mu P_\mu = P^0 P_0 - \vec{P} \cdot \vec{P} = E^2 - |\vec{P}|^2 \equiv m^2 \quad (3.6.23)$$

che non è altro che la relazione di mass-shell, per cui, se abbiamo detto che gli stati fisici saranno etichettati dagli autovalori degli operatori di Casimir, allora i nostri stati saranno etichettati, per quello che riguarda P^2 , da m . Gli stati che considereremo avranno massa definita.

Saremmo molto tentati, forse forzati dalla Meccanica Quantistica, dall'interpretare l'operatore W^μ semplicemente come lo spin. Però ciò non è possibile, poiché l'intuizione di spin come momento angolare è persa nel momento in cui introduciamo i boost, che sono presenti perché inseriti in $M_{\rho\sigma}$.

Quindi, possiamo fare un'affermazione abbastanza traumatica se ragioniamo in termini di Meccanica Quantistica non relativistica, ossia che, lo

⁴⁰La scoperta delle rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré è in realtà dovuta a E. Majorana.

spin non è più un operatore di Casimir del gruppo di Poincaré.

Notiamo che se con il gruppo di Lorentz non avevamo in nessun modo introdotto la massa, ma solamente lo spin, ora la massa è autovalore di un operatore di Casimir del gruppo di Poincaré. Dunque, utilizziamo la massa come etichetta per i nostri stati, insieme all'informazione del vettore W^μ , che sarà comunque legato allo spin. Per questo motivo le rappresentazioni irriducibili del gruppo $ISO(1, 3)$ identificano completamente (tutte) le caratteristiche delle particelle fondamentali. Grazie a queste etichette possiamo distinguere particelle con spin uguale, poiché abbiamo come informazione anche m .

Per capire come interpretare W^μ dobbiamo distinguere un paio di situazioni, ma vedremo comunque che lo spin in qualche modo rientrerà nella conversazione. Continueremo il discorso anche nella sezione §3.6.4.

Prendiamo una **particella massiva**, con massa m , e mettiamoci nel suo sistema di riferimento di riposo, in cui:

$$P^\mu = (m, \vec{0}) \implies \begin{cases} W^i = -\frac{1}{2}m\varepsilon^{0ijk}M_{jk} = -mJ^i \\ W^0 = 0 \end{cases} \quad (3.6.24)$$

abbiamo utilizzato le definizioni (3.5.36), in cui ricordiamo che J^i è il generatore di una rotazione in 3 dimensioni. Però, identifichiamo J^i con lo spin S^i , poiché possiamo notare che J^i non può essere il momento angolare orbitale essendo $\vec{L} = 0$ nel SR di riposo.

Dunque, vediamo da (3.6.24) che il vettore di Pauli-Lubanski, per una particella massiva nel suo sistema di riferimento di riposo, è identificato con il vettore di spin. Sappiamo bene che l'operatore di Casimir, colui che ci fornisce con i suoi autovalori le etichette degli stati fisici, è W^2 , ma sappiamo anche che gli autovalori di S^2 sono $s(s+1)$ (abbiamo per questo $2s+1$ gradi di libertà), quindi scriviamo:

$$W^i = -mS^i \implies W^2 = W^\mu W_\mu = W_0^2 - W_i^2 = -m^2s(s+1). \quad (3.6.25)$$

Concludiamo dunque che per una particella massiva W^2 è la generalizzazione dello spin introdotto in Meccanica Quantistica non relativistica, in cui s assume valori discreti $0, \frac{1}{2}, 1, \dots$.

Questa rappresentazione è etichettata dalla massa m e dallo spin s . Come facciamo in MQ, diversi stati fisici all'interno della rappresentazione saranno etichettati dagli autovalori di S^3 , ovvero $2s+1$ termini $\{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$, e dagli autovalori continui di P_i . Le particelle massive con massa m , spin s , terza componente s^3 e tri-impulso P^i hanno $2s+1$ gradi di libertà.

Ora, analizziamo il caso di **particella massless**. Abbiamo:

$$P^\mu P_\mu = 0 \quad (3.6.26)$$

quindi, gli autovalori dell'operatore di Casimir P^2 sono nulli, e avendo la definizione (3.6.19) di W^μ , allora anche:

$$P^\mu W_\mu = 0 \quad , \quad W^\mu W_\mu = 0. \quad (3.6.27)$$

Complessivamente abbiamo le condizioni:

$$\begin{cases} P^\mu P_\mu = 0 \\ P^\mu W_\mu = 0 \\ W^\mu W_\mu = 0 \end{cases} \quad (3.6.28)$$

(la prima uguaglianza la abbiamo poiché $P^2 = 0$, mentre le altre due perché stiamo contraendo 2 P^μ) e l'unico modo che abbiamo per soddisfare queste 3 condizioni è che P^μ e W^μ siano proporzionali:

$$P^\mu = \alpha W^\mu \quad \implies \quad \begin{cases} W_\mu P^\mu = \alpha W_\mu W^\mu = 0 \\ P_\mu P^\mu = \alpha P_\mu W^\mu = 0 \end{cases} \quad (3.6.29)$$

per questo scriviamo:

$$W_\mu = h P_\mu \quad (3.6.30)$$

in cui chiamiamo il parametro h **elicità** e descrive il numero di componenti indipendenti di uno stato massless. Non potendo più definire un sistema di riposo, e di conseguenza lo spin, prendiamo h .

Se guardiamo l'azione di W^μ su uno stato fisico di massa zero abbiamo:

$$W^\mu |p\rangle = h P^\mu |p\rangle. \quad (3.6.31)$$

Guardando un sistema di riferimento non di riposo, in cui $P^\mu = (0, P^i)$, si può vedere che:

$$h = \frac{\vec{J} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \quad (3.6.32)$$

ossia, che l'elicità è la proiezione dello spin sul vettore impulso. Ciò ci fa vedere quello raffigurato in figura 3.3. La relazione 3.6.32 la possiamo vedere (vedi il file di conti se non è chiaro) abbastanza facilmente. Assumiamo che gli autovalori $P^x = P^y = 0$ e quindi necessariamente che $P^z = \pm P^0 \neq 0$, in questo modo abbiamo:

$$W^0 = \vec{P} \cdot \vec{J} = P^z J^z \quad , \quad W^3 = P^0 J^3 \quad (3.6.33)$$

e dunque:

$$W^0 |p, h\rangle = \vec{J} \cdot \vec{P} |p, h\rangle = \pm W^3 |p, h\rangle = \pm P^0 J^3 |p, h\rangle = \pm P^0 h |p, h\rangle \quad (3.6.34)$$

da cui vediamo:

$$\vec{J} \cdot \hat{P} |p, h\rangle = h |p, h\rangle \quad (3.6.35)$$

ovvero quello visto in (3.6.32). Quindi h può assumere solamente 2 valori, che noi normalizziamo a ± 1 ; per questo abbiamo che le particelle mass-less hanno solo 2 gradi di libertà. In questo modo spieghiamo anche la normalizzazione del fotone.



Figura 3.3: Raffigurazione del tri-impulso e dello spin.

Facciamo qualche osservazione prima di concludere. A causa della presenza del tensore completamente antisimmetrico $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ nella definizione di W^μ , quest'ultimo si comporta come uno pseudo-vettore⁴¹: cambia segno sotto trasformazioni di parità. Di conseguenza, anche l'elicità h cambia segno per parità ($h \rightarrow -h$), perché sotto parità l'impulso $\vec{P}$ cambia segno, mentre lo spin $\vec{J}$ no.

Inoltre, per stati massless con spin $s \neq 0$, la rappresentazione irriducibile dell'algebra di Poincaré ammette solo due gradi di libertà fisici, corrispondenti a elicità $\pm s$, ossia a spin allineato o antiallineato rispetto all'impulso P . Attenzione però, perché per le particelle mass-less parlare di spin è un po' complicato, infatti non esistendo un sistema di riferimento di riposo (poiché in ogni sistema di riferimento hanno sempre velocità $v = c$), non è possibile definire lo spin s ; ciò che definiamo (e guardiamo) è l'elicità h . Ad ogni modo non ogni valore di spin è possibile, infatti, solo alcuni valori di s si presentano nei modelli fisici (vedi ad esempio il fotone, il gravitone, etc.). Ad esempio, il fotone ha spin 1 e due stati di elicità, il gravitone ha spin 2 e due stati di elicità, i neutrini hanno elicità $\pm 1/2$.

3.6.4 Piccolo gruppo

Possiamo addentrarci nell'ultima sezione del capitolo e possiamo parlare di quello che va sotto il nome di piccolo gruppo. Il **piccolo gruppo**, o *gruppo di Wigner*, è il gruppo delle trasformazioni che mantengono invariato il quadrimpulso P^μ di una particella. Il piccolo gruppo G_P è un sottogruppo di

⁴¹Il fatto che W^μ sia completamente antisimmetrico è dato dalla presenza di J^μ , mentre $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ fornisce solo la struttura pseudo-tensoriale.

$SO(1, 3)$ e gli elementi trasformano come:

$$\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu = P^\mu \quad (3.6.36)$$

e sono anche indicate come *rotazioni di Wigner*. Il piccolo gruppo è importante per la Fisica perché, in generale, per classificare le particelle si guardano i due operatori di Casimir (vedi §3.6.2) e come si trasformano gli stati sotto trasformazioni del piccolo gruppo. Quindi, il piccolo gruppo determina i gradi di libertà interni della particella, ovvero spin per le particelle massive ed elicità per quelle massless.

Nel caso di una particella massiva si ha:

- Le componenti di P^μ commutano tra loro, per cui gli autovalori formano una base dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ della particella libera, che potremmo indicare con $|p, \xi\rangle$, in cui ξ rappresenta tutti gli altri numeri quantici (etichette), se necessari, per specificare la particella (come spin, etc.).
- Esiste sempre una trasformazione di Lorentz che porta nel sistema di riferimento di riposo, in cui si ha:

$$P^\mu = (m, \vec{0}) \equiv k^\mu. \quad (3.6.37)$$

- Tutte le rotazioni spaziali lasciano invariato k^μ , dunque, il piccolo gruppo nel caso massivo è $SO(3)$.
- Tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni sono unitarie. Il che ci piace perché Wigner ci insegna che per conoscere l'effetto di una trasformazione di Poincaré basta conoscere queste rappresentazioni unitarie irriducibili. Puoi vedere negli appunti di Gambino *Physical law should have mathematical beauty*. Gambino come agiscono queste trasformazioni e come lo spin $SU(2)$ emerga in modo naturale, senza dover ricorrere alle rappresentazioni irriducibili proiettive del gruppo delle rotazioni.

Nel caso di una particella massless si ha:

- * Anche in questo caso le componenti di P^μ commutano tra loro, per cui gli stati $|p, \xi\rangle$ formano una base dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.
- * Non è possibile andare nel sistema di riferimento di riposo e si sceglie allora un 4-impulso "standard":

$$P^\mu = (E, 0, 0, E) \equiv k^\mu, \quad (3.6.38)$$

corrispondente a una particella che si muove lungo l'asse z .

- * Le trasformazioni di Lorentz che lasciano invariato k^μ formano il gruppo $ISO(2)$, composto da rotazioni nel piano trasverso ($SO(2)$) e traslazioni ($\mathbb{R}^2$): questo è il piccolo gruppo per una particella massless.
- * Tuttavia, le rappresentazioni irriducibili unitarie di $ISO(2)$ sono infinite-dimensionali a meno che le traslazioni agiscano trivialmente. In fisica delle particelle, si considerano solo tali rappresentazioni: ciò riduce il piccolo gruppo effettivo a $SO(2)$.
- * Le rappresentazioni irriducibili unitarie di $SO(2)$ sono etichettate da un numero intero o semintero, che corrisponde all'elicità h della particella. Questo implica che una particella massless con spin s ha solo due stati fisici: $h = \pm s$.

Concludendo, tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo di Poincaré si possono classificare secondo gli autovalori degli operatori di Casimir, dunque, in termini di m , s o h :

- $P^2 = P^\mu P_\mu = m^2 > 0$, $W^2 = m^2 s(s+1)$: gli stati sono etichettati come $|m, s\rangle$ con $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ e rappresentano particelle di massa m e spin s .
- $P^2 = P^\mu P_\mu = 0$, $W^2 = 0$ e con $W^\mu = \pm s P^\mu$: gli stati sono etichettati come $|h\rangle$ con $h = \pm s$ con $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ e rappresentano particelle di massa nulla ed elicità h .
- $P^2 = P^\mu P_\mu = 0$, $W^2 = k^2 > 0$: gli stati rappresentano particelle di massa nulla, con stati di polarizzazione che variano in modo continuo, s continuo, e non sembrano avere applicazioni in QFT (almeno a livello perturbativo), per cui sono stati non realizzabili in natura.
- $P^2 = P^\mu P_\mu = m^2 < 0$, rappresentano particelle, ad esempio i tachioni, superluminari con $v > c$, dunque non realizzabili in natura (inconsistenti con le interpretazioni fisiche usuali).
- $P^2 = P^\mu P_\mu = 0$, $W^2 = 0$: rappresentano il caso banale (scalare), ovvero il vuoto quantistico, quindi lo stato con nessuna particella.

3.7 Schema riassuntivo gruppi

Dopo questo lungo capitolo molto astratto sulla teoria dei gruppi e prima di passare nuovamente alla Fisica, vediamo in figura (3.4) un breve diagramma riassuntivo del gruppo di Poincaré e dei gruppi visti. Ricordiamo i vari componenti:

- $SO(3)$: gruppo delle rotazioni spaziali in 3 dimensioni. I generatori dipendono da 3 parametri, è un gruppo compatto e chiuso, in più è il sottogruppo del gruppo di Lorentz $SO(1,3)$.

Il gruppo $O(3)$ è il gruppo delle rotazioni spaziali in 3 dimensioni, non necessariamente proprie, ovvero con $\det = \pm 1$.

- Boost: non formano un gruppo, poiché l'algebra non è chiusa.
- $SO(1,3)$: gruppo delle trasformazioni proprie di Lorentz. È sottogruppo del gruppo $O(1,3)$ ed è formato da trasformazioni di $L_+^\uparrow$ (proprie ed ortocrone), ossia da: Rotazioni + Boost. Le trasformazioni di $SO(1,3)$ formano un gruppo chiuso, ma non compatto.
- $O(1,3)$: gruppo di Lorentz. Il 3 e l'1 indicano quanti elementi positivi e negativi ci sono nella metrica.
- Traslazioni: sono trasformazioni che formano un gruppo abeliano, non compatto.
- $ISO(1,3)$: gruppo di Poincaré, formato da: $SO(1,3) +$ Traslazioni. È un gruppo non compatto per via della non compattezza delle traslazioni e dei boost.

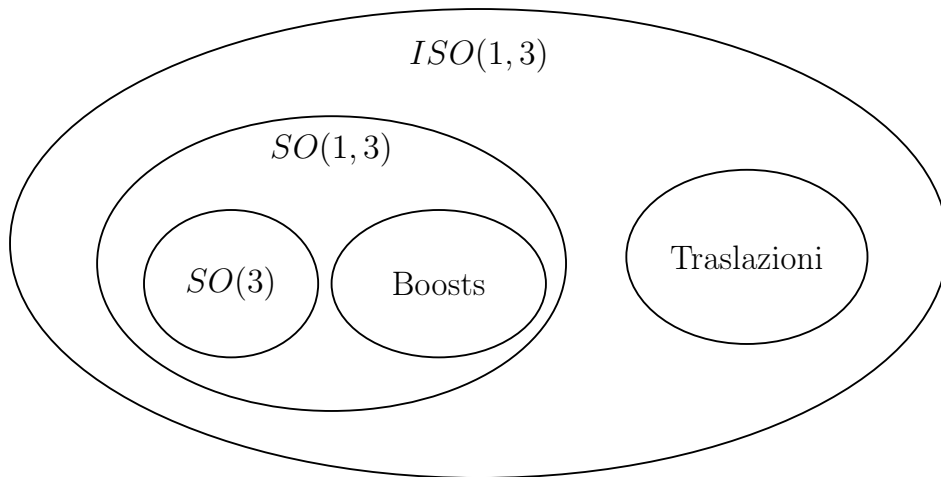


Figura 3.4: Schema riassuntivo gruppi.

Quello che faremo è costruire una teoria proprio sul gruppo $ISO(1,3)$. Ciò vuol dire che costruiremo una teoria basata sulle leggi di invarianza del sistema, ossia, costruiremo una teoria, in questo caso, relativistica.

Costruiremo un'azione invariante per tutte le trasformazioni che rispettano tutte le leggi di invarianza della Relatività Speciale, cioè, tutte le trasformazioni del gruppo di Poincaré.

Potremo descrivere il sistema quantistico-relativistico tramite una rappresentazione irriducibile del gruppo di Poincaré, poiché nel gruppo ci sono

i suoi generatori, tra cui H che descrive la dinamica del sistema (in Fisica classica tramite l'equazione di Hamilton-Jacobi e in Meccanica Quantistica con l'equazione di Schrodinger).

Capitolo 4

Campo locale e il suo comportamento sotto trasformazioni del gruppo di Poincaré

Abbiamo detto nel capitolo §1 introduttivo che il nostro scopo è quello di creare una teoria quantistica che possa trattare sistemi con ∞ gradi di libertà e che sia relativistica. Abbiamo anche detto che possiamo inserire la Relatività Speciale nella teoria passando per la teoria dei gruppi, ed in particolare, utilizzando l'invarianza della teoria per trasformazioni del gruppo di Poincaré.

Per alzare i gradi di libertà dei sistemi, abbiamo detto, che partiremo da un campo classico e che lo renderemo quantistico tramite la seconda quantizzazione, ma questo salto lo faremo solo nel capitolo §7. Non ci siamo dilungati molto sul concetto di campo, poiché ben noto dalla Fisica classica. In termini matematici, un campo è una funzione dipendente da un certo numero di variabili. In termini fisici, un campo, ad esempio il campo gravitazionale, è un oggetto che possiamo pensare come ad una funzione di spazio e tempo che pervade tutto lo spazio circostante e ne cambia le caratteristiche (ad esempio ne cambia la geometria). Sappiamo, inoltre, che possiamo vedere l'azione di questo campo mettendo un oggetto (test), sensibile al campo, nella sua regione di azione e studiandone il comportamento.

Attenzione però, i campi classici (gravitazionale, elettrico, etc.) sono funzioni di spazio e tempo, ma quello che noi costruiremo nella nostra teoria quantistica relativistica, sarà il corrispettivo della funzione d'onda della Meccanica Quantistica. La funzione d'onda della MQ non relativistica perde completamente di significato nel momento in cui relativizziamo la teoria. Il nuovo campo, dunque, rappresenterà il sistema e non sarà più una semplice

funzione di tempo e spazio, ma un operatore¹. Le funzioni d'onda le ritroviamo come pesi degli operatori di creazione e distruzione quando creiamo l'operatore di campo quantistico (vedi l'Appendice G).

Il concetto di campo e la sua quantizzazione li analizzeremo nel capitolo §7, mentre ora capiamo perchè vogliamo scrivere una teoria locale, com'è definito un campo in senso locale e come i diversi tipi di campi che possiamo avere si trasformino sotto le trasformazioni del gruppo di Poincaré. Il riferimento per questo capitolo è Physical law should have mathematical beauty.Ramond:1981pw.

4.1 Teoria locale

Facciamo un'osservazione ancora prima di iniziare. La località nella nostra teoria non è importante, ma fondamentale. Una teoria locale garantisce le trasformazioni finite, ossia, garantisce che una serie di trasformazioni infinitesime si traduca in una finita. Ricordiamo che che non ci andava bene nel capitolo §1 il fatto che sviluppando la radice dell'hamiltoniana comparivano infinite derivate e rendevano la teoria non locale. Per questo motivo non scriveremo mai termini del tipo:

$$L = \int d^3x d^3y \phi(\vec{x})\phi(\vec{y}) \quad (4.1.1)$$

in cui i campi $\phi(\vec{x}, t)$ e $\phi(\vec{y}, t)$ sono legati in punti $\vec{x} \neq \vec{y}$. Questo ci garantisce di avere lagrangiane locali e dunque teorie locali. Una lagrangiana del tipo (4.1.1) permette a $\phi(x)$ e $\phi(y)$ di interagire in modo istantaneo nello spazio-tempo e quindi di rompere la località. La località implica che le interazioni avvengano solo in punti coincidenti nello spazio-tempo. Vedi i discorsi sulla località nella sezione §8.2.3.

Uno dei motivi per cui si utilizza una teoria di campo per la Fisica Classica è quello di implementare la località.

4.2 Campo classico

Prima di addentrarci nella definizione di campo in Teoria Quantistica dei Campi, parlando di lagrangiane, azioni, minimizzazioni e cose complicate, proviamo a capire come possiamo descrivere una Teoria di Campo Classica, che descrive un sistema classico con infiniti gradi di libertà. Sembra una sezione completamente inutile e una perdita di tempo, e forse per certi versi lo è (e io l'ho sicuramente pensato all'inizio), ma in realtà è lo strumento migliore che abbiamo per avere in mente un'immagine (seppur pittorica)

¹Ricorda il discorso sui ruoli di tempo e spazio nella teoria.

di che cosa possa effettivamente essere un campo. Quindi, analizziamo un campo classico solo per riuscire ad avere un'immagine nella nostra testa di quello che poi diventerà un campo quantistico. Per fare ciò ci aiutiamo con la sezione §1.8 di M. Kaku Physical law should have mathematical beauty. Kaku:1993ym.

Il processo che rende le coordinate q^i e p^i delle quantità quantizzate lo chiamiamo *prima quantizzazione*, invece, il processo che permette di quantizzare i campi, rendendoli degli operatori quantistici, è detta *seconda quantizzazione*.

Vogliamo passare da 3 gradi di libertà a ∞ gradi di libertà. Consideriamo un sistema classico, ad esempio possiamo prendere un sistema di N masse m , tutte attaccate tra loro tramite delle molle. Il sistema lo possiamo vedere nella figura 4.1.



Figura 4.1: Sistema di masse m collegate tramite molle

La lagrangiana di un sistema di questo tipo sarà, prendendo x_r la coordinata che descrive la posizione delle masse:

$$L = \sum_{r=1}^N \left[\frac{1}{2} m_r (\dot{x}_r^2) - \frac{1}{2} k (x_r - x_{r+1})^2 \right] \quad (4.2.1)$$

in cui k è la costante elastica delle molle. Ora, partendo dal nostro sistema discretizzato, immaginiamo di estendere al continuo (ovvero andare ad ∞ gradi di libertà) il sistema, il che vuol dire immaginare che le masse siano sempre più vicine tra loro, in modo che x_r possa variare con continuità. Se pensiamo che a coppie le masse siano separate da una distanza ε , allora per fare il limite al continuo possiamo fare $\varepsilon \rightarrow 0$, o equivalentemente $N \rightarrow \infty$. I due limiti sono equivalenti perché se mandiamo ad infinito il numero di masse è la stessa cosa che chiedere che esse siano infinitesimamente vicine. Riscriviamo in modo comodo la lagrangiana:

$$L(x_r, \dot{x}_r) = \sum_{r=1}^N \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{m_r}{\varepsilon} (\dot{x}_r^2) - k \frac{(x_r - x_{r+1})^2}{\varepsilon} \right] \quad (4.2.2)$$

le cui quantità, quando facciamo il limite $\varepsilon \rightarrow 0$, diventano:

$$\varepsilon \longrightarrow dx \quad (4.2.3)$$

$$x_r \longrightarrow \phi(x, t) \quad (4.2.4)$$

$$\dot{x}_r \longrightarrow \dot{\phi}(x) \quad (4.2.5)$$

$$\frac{m}{\varepsilon} \longrightarrow \mu \quad (4.2.6)$$

$$k\varepsilon \longrightarrow Y \quad (4.2.7)$$

$$\frac{(x_r - x_{r+1})^2}{\varepsilon^2} \longrightarrow \left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right)^2 \quad (4.2.8)$$

in cui interpretiamo il campo ϕ come estensione al continuo della variabile cinematica x_r , ovvero passiamo da un insieme discreto di punti ad una funzione continua ($\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$) e in questo moto il campo rappresenta una perturbazione che pervade tutto lo spazio e indica lo spostamento della particella nella posizione x al tempo t . Abbiamo indicato con μ la densità lineare di massa e con Y il modulo di Young. Possiamo guardare la figura 4.2 per un'immagine pittorica rappresentativa di un campo classico.

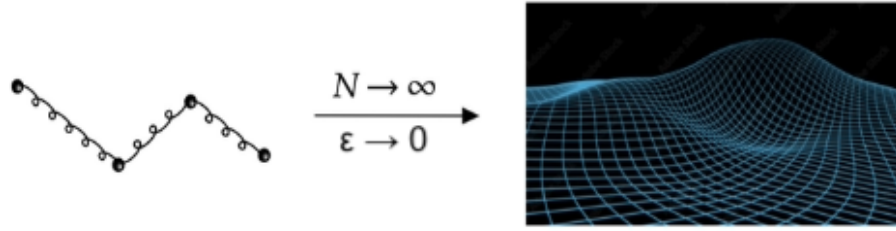


Figura 4.2: Immagine pittorica di un campo classico.

Se a questo punto ci mettessimo a scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange della lagrangiana:

$$L(\phi(x), \dot{\phi}(x)) = \int dx \left[\mu \dot{\phi}^2(x) - Y \left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4.2.9)$$

troveremmo:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\mu}{Y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.2.10)$$

che ci è familiare, poiché non è altro che l'equazione delle onde unidimensionale per un sistema che si muove a velocità $\sqrt{Y/\mu}$. Questo fatto è molto importante perché (4.2.10) ci dice che ϕ è un'onda.

Noi quando faremo Teoria Quantistica dei Campi scriveremo delle lagrangiane del tipo:

$$L(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (4.2.11)$$

in cui indichiamo:

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad (4.2.12)$$

cosa necessaria dal momento che dobbiamo lavorare nello spazio di Minkowski quadridimensionale. Utilizzeremo la densità lagrangiana $\mathcal{L}$, che è quella che fa partire il tutto perché permette di calcolare:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (4.2.13)$$

e successivamente:

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int dt L. \quad (4.2.14)$$

A onor del vero, ci riferiamo alla seconda quantizzazione quando prendiamo un campo classico $\phi(\vec{x}, t)$ e lo quantizziamo, ovvero, lo eleviamo al ruolo di operatore $\hat{\phi}(x^\mu)$ e diciamo come opera, il che equivale a definirne l'algebra. Analizzeremo tutto meglio e in modo più formale nel corso delle note.

4.3 Definizione di campo locale

Nella meccanica classica del punto materiale, un sistema è descritto da un set di coordinate $\{q_i\}$ e dalla lagrangiana $L(\{q_i, \dot{q}_i\})$, dipendente dalle coordinate e dalle rispettive velocità. Inoltre conosciamo il principio di minima azione:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L[q_i(t), \dot{q}_i(t)] \quad (4.3.1)$$

che ci permette di ottenere le equazioni del moto:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (4.3.2)$$

Il principio di minima azione ci dice che la particella (il nostro sistema) preferisce il cammino (la traiettoria data dalle equazioni del moto) con energia minima.

Quando scriviamo una teoria di campo il ruolo delle coordinate generalizzate $\{q_i\}$ è assunto dal campo $\phi(\vec{x}, t)$, in cui l'indice discreto i viene rimpiazzato dal vettore posizione $\vec{x}$, con x che varia con continuità. Al posto delle equazioni del moto avremo le equazioni di campo. Ricordiamo però che la posizione x non è più un'operatore, bensì solo più un'etichetta, o meglio, un parametro che etichetta il campo ϕ . In questo modo x assume lo stesso ruolo di t ed ogni campo sarà etichettato dai valori di $\vec{x}$ e t . Ovviamente, in un singolo punto $(\vec{x}, t)$ ci possono essere più campi diversi, per questo utilizzeremo un'indice aggiuntivo per distinguerli $\phi_a(\vec{x}, t)$. Ogni campo si

estende (descrive) su un numero infinito di valori delle coordinate. I campi ϕ_a vengono associati ad una lagrangiana che ne determina l'evoluzione temporale.

La teoria che studieremo noi sarà una teoria di campo locale, per cui la dinamica del sistema non collega punti diversi dello spazio istantaneamente. In altre parole, rispetteremo sempre i principi della Relatività Speciale (e di conseguenza la causalità). Definiremo² una densità lagrangiana $\mathcal{L}(x^\mu)$ che dipende da $\vec{x}$ e t attraverso i campi ϕ_a e $\dot{\phi}_a$:

$$\mathcal{L}(x^\mu) = \mathcal{L}(\phi_a(x^\mu), \partial_\mu \phi_a(x^\mu)) \quad (4.3.3)$$

per cui avremo:

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(x^\mu) \quad , \quad S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a(x^\mu), \partial_\mu \phi_a(x^\mu)). \quad (4.3.4)$$

Nelle teorie di campo locali, i campi, in qualsiasi regione spaziale finita R , comunicano con lo spazio esterno ad R solo attraverso il loro comportamento sulla superficie σ di R , ossia il bordo, e dunque le sue condizioni al contorno (vuole sostanzialmente dire che non ci sono buchi o singolarità). È proprio in questo modo che impediamo la violazione della causalità, ad esempio impediamo che una particella venga distrutta prima di essere creata. Per questo motivo possiamo dire che per specificare i campi ovunque all'interno di R , ovvero in ogni x^μ dello spazio e del tempo in R , sarà sufficiente specificare il valore dei campi in ogni punto interno ad R negli istanti t_1 e t_2 , ed il valore dei campi in ogni punto della superficie σ negli istanti $t \in [t_1, t_2]$.

Le regioni di cui parliamo sono rappresentate in figura 4.3. R è l'area interna al rettangolo e σ il perimetro dello stesso.

Date queste condizioni, la lagrangiana ed il principio di minima azione specificheranno l'evoluzione temporale dei campi $\forall t$ tale per cui $t_1 < t < t_2$ all'interno di R , tramite le equazioni del moto (di campo).

Dunque, un campo locale crea una perturbazione in tutto lo spazio, ma quando è definito all'interno di una certa regione e noi lo conosciamo su tutto il bordo, allora, possiamo prevedere la sua azione anche al di fuori di tale regione grazie alle equazioni del moto e alle condizioni al contorno (di bordo).

Notiamo una cosa riguardo le equazioni del moto. Nella meccanica classica del punto materiale le equazioni del moto sono equazioni differenziali, una per ogni coordinata spaziale, in cui compare la derivata totale rispetto al tempo. Per una teoria di campo locale abbiamo 1 equazione differenziale

²Sicuramente la costruiremo in modo che sia invariante per trasformazioni del gruppo di Poincaré, in modo che ci conduca ad una teoria relativistica, ma avremo anche altre linee guida da seguire per rendere la nostra teoria fisica. Accenniamo a tali regole quando verso la fine parliamo di teorie interagenti (vedi la sezione §9) e discutiamo di che cosa dobbiamo fare per avere teorie rinormalizzabili. Ad ogni modo non sarà oggetto del corso la rinormalizzabilità della teoria.

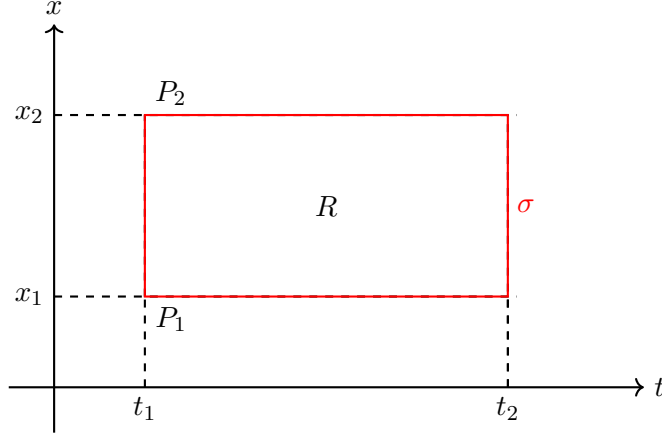


Figura 4.3: Rappresentazione regioni di un campo locale. Vedi Stermán Physical law should have mathematical beauty. Stermán:1993hfp.

$\forall \phi_a$, in cui compare sia la derivata rispetto al tempo che le derivate rispetto le 3 coordinate spaziali. Le equazioni del moto indicano l'evoluzione del sistema da t_1 a t_2 all'interno di R e nella figura 4.3 è come se ci permettessero di muoverci con il segmento $\overline{P_1 P_2}$ da t_1 a t_2 , coprendo tutta R .

4.4 Comportamento dei campi locali per trasformazioni di Poincaré

Vediamo in questa sezione come si comportano i campi locali (scalari, spinoriali o vettoriali) per trasformazioni del gruppo di Poincaré. Ciò ci sarà utile quando cercheremo le equazioni del moto.

Consideriamo una funzione f del punto $P(x^\mu)$ dello spazio tempo. In un sistema di riferimento inerziale in cui P si trova in x^μ , la funzione sarà $f(x^\mu)$, in un altro sistema di riferimento inerziale, in cui P si trova in x'^μ , la funzione sarà $f(x'^\mu)$. Dobbiamo capire, non solo come cambiano le coordinate, cosa che in realtà sappiamo già dalle trasformazioni dei sistemi di riferimento, ma dobbiamo studiare attentamente come cambi la forma funzionale del campo quando ci spostiamo in diversi sistemi di riferimento. Per trasformazioni infinitesime³ dei sistemi di riferimento, del gruppo di Poincaré ad esempio:

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (4.4.1)$$

³Useremo sempre trasformazioni infinitesime poiché consideriamo gruppi continui. Le trasformazioni discrete le vedremo in un capitolo a parte.

la variazione totale sul campo f sarà:

$$\Delta f = f'(x') - f(x) = f'(x + \delta x) - f(x) \quad (4.4.2)$$

$$= f'(x) - f(x) + \partial_\mu f'(x) \delta x^\mu + \mathcal{O}[(\delta x)^2] \quad (4.4.3)$$

all'ordine più basso, per $\partial_\mu f'(x)$, possiamo approssimare la derivata come:

$$\partial_\mu f'(x) \sim \partial_\mu f \quad (4.4.4)$$

in cui notiamo che la differenza tra $\partial_\mu f'$ e $\partial_\mu f$ è di ordine δx ,⁴ quindi tale che:

$$\partial_\mu f' \delta x^\mu = \partial_\mu f \delta x^\mu + \mathcal{O}[(\delta x)^2]. \quad (4.4.7)$$

Se facciamo (4.4.4), allora abbiamo:

$$\Delta f = \delta f + \partial_\mu f \delta x^\mu \quad (4.4.8)$$

in cui indichiamo con $\delta f = f'(x) - f(x)$. Individuiamo in (4.4.8) il primo termine come la variazione di f dovuta al cambiamento della forma funzionale di f , mentre il secondo come un termine di trasporto, che tiene conto della variazione di f dovuta alla variazione di x . Vediamo dunque che la variazione totale Δ è data dalla variazione della forma funzionale δ , più la variazione di f indotta dalla variazione delle coordinate $\delta x^\mu \partial_\mu$. In forma operatoriale possiamo scrivere la (4.4.8) come:

$$\Delta = \delta + \delta x^\mu \partial_\mu \quad (4.4.9)$$

Spiegando leggermente meglio (perchè io non avevo capito). Nell'operatore (4.4.9) abbiamo i termini:

- Δf ci indica la variazione totale del campo, ovvero quanto esso varia se ci spostiamo nel punto x' . A volte la si può chiamare *variazione comoviente di f* . È la calcoliamo come:

$$\Delta f = f'(x') - f(x). \quad (4.4.10)$$

- δf è la variazione intrinseca del campo f e ci dice quanto cambia f in uno stesso punto x :

$$\delta f = f'(x) - f(x). \quad (4.4.11)$$

⁴Lo vediamo perché da (4.4.1) abbiamo la variazione $f' = f + \delta f$, in cui δf è una differenza. Se differenziamo la variazione della forma funzionale otteniamo:

$$\partial_\mu f' = \partial_\mu (f + \delta f) = \partial_\mu f + \delta (\partial_\mu f) \quad (4.4.5)$$

in cui però abbiamo $\delta (\partial_\mu f)$ che è ancora una differenza, che è piccola se δx^μ è piccolo. Se moltiplichiamo (4.4.5) per δx^μ allora possiamo vedere:

$$\partial_\mu f' \delta x^\mu = \partial_\mu f \delta x^\mu + \delta (\partial_\mu f) \delta x^\mu \quad (4.4.6)$$

in cui il secondo termine della somma è di ordine $(\delta x)^2$, dunque trascurabile.

- $\delta x^\mu \partial_\mu f$ è il termine di trasporto che ci dice la variazione indotta su f da quella sulle coordinate.

Potremmo per questo scrivere:

$$\begin{array}{l} \text{Variazione fisica} \\ \text{(comovente)} \end{array} = \text{Variazione al punto fisso} + \begin{array}{l} \text{Spostamento dovuto al} \\ \text{cambio di coordinate} \end{array} .$$

Avendo tre termini, in base al tipo di trasformazione che facciamo, potremmo ricadere in situazioni in cui alcuni si annullino. Se consideriamo una trasformazione puramente geometrica, quindi una trasformazione delle coordinate, allora il campo fisico non cambia⁵ e abbiamo:

$$\Delta f = f'(x') - f(x) = 0 \quad \implies \quad \delta f = -\delta x^\mu \partial_\mu f. \quad (4.4.13)$$

Se invece consideriamo solo una simmetria interna, quindi variamo il campo $f \rightarrow f + a$ di una certa quantità, allora abbiamo che le coordinate restano invariate, quindi:

$$\delta x^\mu = 0 \quad \implies \quad \Delta f = \delta f. \quad (4.4.14)$$

Ci sarà utile ricordare nel prossimo capitolo che queste considerazioni valgono anche per la (densità) lagrangiana e l'azione. In particolare vale la relazione:

$$\Delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{L} + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \quad (4.4.15)$$

⁵Facendo $x \rightarrow x + a$ fisicamente, il punto dello spazio-tempo è lo stesso, ma le sue coordinate sono cambiate. Allora la stessa configurazione fisica del campo deve soddisfare:

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (4.4.12)$$

perché il valore fisico del campo in quel punto non dipende dal nome delle coordinate che usiamo per etichettarlo. Stiamo solo cambiando “etichette” ai punti.

e, per rimanere generici⁶:

$$\Delta S = \int d^4x \Delta \mathcal{L} + \int \delta(d^4x) \mathcal{L}. \quad (4.4.19)$$

Il piano di lavoro per questa sezione, ricordandoci sempre della definizione di campo locale $\phi(x)$ che abbiamo, sarà quella di studiare i tipi di campi utili per formulare le teorie a cui siamo interessati, ovvero campi scalari, spinoriali e vettoriali. Successivamente, studiamo come gli specifici campi si trasformano per trasformazioni di Lorentz e Poincaré, e in base alle proprietà di trasformazione impariamo a scrivere degli invarianti, in termini dei campi che abbiamo a disposizione. In particolare, scriveremo delle combinazioni di campi che siano invarianti di Lorentz e con delle altre proprietà ben definite. Gli invarianti che troveremo saranno utilizzati per costruire l'azione (successivamente alla lagrangiana) della teoria a cui siamo interessati.

4.4.1 Campo scalare

Un campo scalare, che indichiamo con ϕ e come abbiamo visto nella sezione §3.5.7, corrisponde alla rappresentazione, data da $SU(2) \otimes SU(2)$, $(0, 0)$ fatta da matrici 1×1 , cioè scalari.

Sappiamo che ϕ è una funzione di x^μ che ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali legati tra loro da una trasformazione di Lorentz, essendo un'invariante di Lorentz:

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (4.4.20)$$

il che comporta:

$$\Delta \phi = \delta \phi + \delta x^\mu \partial_\mu \phi = 0 \implies \delta \phi = -\delta x^\mu \partial_\mu \phi. \quad (4.4.21)$$

⁶Non ho trovato il modo (forse la voglia) di scriverlo in un punto più consono, ma ricordati di questa nota quando vedrai il teorema di Noether se sarai confuso. In generale, ricorda anche che potremmo confondere le definizioni di ΔS e δS poiché è facile dimostrare (ci sono i conti nel file aggiuntivo) che essi differiscono solo per un termine di superficie, che non ci interessa. Infatti in generale possiamo scrivere:

$$\delta S = S'[x] - S[x] = \int d^4x (\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)) = \int d^4x \delta \mathcal{L} \quad (4.4.16)$$

e nel caso in cui abbiamo $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu$ (con F^μ generica), allora abbiamo:

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu F^\mu \quad (4.4.17)$$

e di conseguenza, imponendo delle condizioni di bordo, la situazione:

$$\delta S = 0 \quad (4.4.18)$$

dunque l'invarianza dell'azione è una simmetria del sistema. Per questo diciamo che nel caso in cui $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu$ allora abbiamo una simmetria. Dunque diciamo che, essendo un termine di bordo la differenza, δS e ΔS li possiamo confondere.

Ci possiamo chiedere come trasformi un campo scalare per trasformazioni di Poincaré. Cominciamo a vedere le *traslazioni spazio-temporali*. Consideriamo traslazioni infinitesime:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu} \quad (4.4.22)$$

in cui abbiamo scritto la relazione (4.4.1) con $\delta x^{\mu} = \varepsilon^{\mu}$ quadriettore. La relazione (4.4.21) diventa:

$$\Delta\phi = \delta\phi + \varepsilon^{\mu}\partial_{\mu}\phi = 0 \quad (4.4.23)$$

che diventa:

$$\delta\phi = -\varepsilon^{\mu}\partial_{\mu}\phi = -i\varepsilon^{\mu}P_{\mu}\phi \quad (4.4.24)$$

in cui abbiamo inserito al posto della derivata ∂_{μ} l'operatore impulso (come abbiamo imparato dalla teoria dei gruppi). Vediamo che $\delta \rightarrow -\varepsilon^{\mu}\partial_{\mu}$ è un'operatore differenziale. Abbiamo quindi che una traslazione spazio-temporale delle coordinate x^{μ} , induce sul campo scalare una trasformazione $\delta\phi$, generata dall'operatore impulso P_{μ} . Se scriviamo la trasformazione utilizzando l'operatore ∂_{μ} stiamo utilizzando una rappresentazione infinito dimensionale, mentre quando prendiamo P_{μ} abbiamo una rappresentazione finito dimensionale, dal momento che P_{μ} è un quadriettore dello spazio di Minkowski.

Noi abbiamo considerato una traslazione infinitesima, ma per una traslazione finita possiamo scrivere:

$$\phi' = (1 - \varepsilon^{\mu}\partial_{\mu} + \dots)\phi \implies \phi' = e^{-i\varepsilon^{\mu}P_{\mu}}\phi \quad (4.4.25)$$

dove individuiamo l'operatore di traslazione (nello spazio-tempo):

$$e^{-i\varepsilon^{\mu}P_{\mu}}. \quad (4.4.26)$$

Quello che abbiamo visto, può sembrare banale, ma non lo è. La relazione (4.4.25), così come tutte le altre che vedremo, ci permette di vedere come cambia il nostro campo, che ricordiamo descrivere l'evoluzione spazio-temporale del nostro sistema, per trasformazione di coordinate.

Ora, analizziamo come trasforma un campo scalare per trasformazioni di Lorentz del gruppo $SO(1,3)$. Per quello appreso per le traslazioni spazio-temporali possiamo aspettarci accada una cosa analoga, ma al posto di ritrovarci con l'operatore P_{μ} troveremo l'operatore $M_{\mu\nu}$, generatore del gruppo.

Come prima avremo:

$$\phi'(x') = \phi(x) \implies \Delta\phi = \delta\phi + \delta x^{\mu}\partial_{\mu}\phi = 0 \quad (4.4.27)$$

da cui vediamo:

$$\delta\phi = -\delta x^{\mu}\partial_{\mu}\phi \quad (4.4.28)$$

in cui possiamo scrivere:

$$\delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\rho} x_\rho \quad (4.4.29)$$

con $\varepsilon^{\mu\rho}$ che sono i parametri completamente antisimmetrici delle trasformazioni di Lorentz (che nella sezione §3.5 avevamo chiamato $\omega^{\mu\rho}$), e riottenere:

$$\delta\phi = -\varepsilon^{\mu\rho} x_\rho \partial_\mu \phi \quad (4.4.30)$$

e possiamo di nuovo trovare $\delta \rightarrow -\varepsilon^{\mu\rho} x_\rho \partial_\mu$ essere un'operatore differenziale. Ora, con che operatore identifichiamo l'operatore differenziale che opera sul campo scalare ϕ ? Ricordando quello detto a riguardo degli oggetti simmetrici o antisimmetrici nella sezione §2.2.5 e il fatto che ε sono parametri completamente antisimmetrici, possiamo esplicitare nella scrittura di δ la parte antisimmetrica di $x_\rho \partial_\mu$:

$$\delta = -\varepsilon^{\mu\rho} x_\rho \partial_\mu \implies -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\rho} (x_\rho \partial_\mu - x_\mu \partial_\rho) \quad (4.4.31)$$

in cui ci viene facile identificare gli operatori $M_{\rho\mu} = -i(x_\mu \partial_\rho - x_\rho \partial_\mu)$ generatori delle trasformazioni di Lorentz, che contiene egli operatori di momento angolare $(\mu, \rho \rightarrow i, j)$ e dei boost $(\mu, \rho \rightarrow i, 0)$. Quindi, per trasformazioni di Lorentz infinitesime possiamo scrivere:

$$\delta\phi = -\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\rho} M_{\rho\mu} \phi \quad (4.4.32)$$

in cui, appunto, $M_{\mu\rho}$ sono gli operatori differenziali i cui indici sono opportunamente contratti con i parametri $\varepsilon^{\mu\rho}$ per formare un operatore globalmente "scalare di Lorentz". Per una trasformazione finita avremo:

$$\phi' = e^{-\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\rho} M_{\mu\rho}} \phi. \quad (4.4.33)$$

Talvolta l'operatore differenziale $e^{-\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\rho} M_{\mu\rho}}$ viene anche indicato con Λ (senza indici!). Quindi, possiamo concludere che una trasformazione di Lorentz sulle coordinate x^μ induce sul campo scalare una trasformazione (tramite un operatore differenziale) generata dai generatori $M_{\rho\sigma}$ delle trasformazioni di Lorentz.

Altri esempi di campi scalari a cui possiamo applicare quello che abbiamo imparato in questa sottosezione sono:

$$\phi^n, \sin \phi, \cos \phi, (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi), \partial_\mu(\partial^\mu \phi), \dots \quad (4.4.34)$$

Notiamo solo che la combinazione $x^\mu \partial_\mu \phi$ è Lorentz invariante, ma non Poincaré invariante, poiché la derivata ∂_μ è trasparente alle traslazioni, ma non x^μ . Infatti, tale termine non va bene come invariante da inserire nella lagrangiana.

Notiamo in conclusione una cosa importante. Sappiamo che all'interno di $M_{\mu\rho}$ manca il termine $S_{\mu\rho}$, di spin, e c'è solo il termine di momento angolare orbitale $L_{\mu\rho}$ (oltre i boost), legato alla trasformazione delle coordinate. Questa mancanza che troviamo ha senso perché il campo scalare è un oggetto di spin 0 (ricordiamo che ha rappresentazione $(0,0)$). Il termine di spin $S_{\mu\rho}$ torna in gioco quando consideriamo un campo che ha almeno un'indice, come ad esempio un campo vettoriale come $\partial_\mu\phi$. Possiamo vedere da:

$$\phi' = \phi - \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \phi \quad (4.4.35)$$

che il generatore della trasformazione è $ix_\nu \partial_\mu \phi$, che però è moltiplicato per il parametro $\varepsilon^{\mu\nu}$ completamente antisimmetrico. Dunque, $\varepsilon^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \phi$ è non nullo solamente se moltiplichiamo $\varepsilon^{\mu\nu}$ per la parte antisimmetrica di $x_\nu \partial_\mu$. Allora abbiamo:

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} (x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) \quad (4.4.36)$$

e quindi il generatore della trasformazione (ricordando la definizione (3.5.48) e rimuovendo $S_{\mu\nu}$) che è:

$$M_{\mu\nu} \equiv L_{\mu\nu} = -\frac{i}{2} (x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) \quad (4.4.37)$$

che non è altro che la generalizzazione del momento angolare. $L_{\mu\nu}$ ha quattro componenti, 3 ricostruiscono i momenti angolari L_i , mentre la quarta restituisce i boosts.

4.4.2 Campo vettoriale

Consideriamo ora, un campo vettoriale, ovvero un campo con almeno un'indice, come ad esempio:

$$\partial_\mu \phi \quad (4.4.38)$$

con ϕ campo scalare. È un campo con spin 1. Ci chiediamo come si trasforma questo campo per trasformazioni di Lorentz. Abbiamo, dalla definizione (4.4.9):

$$\Delta \partial_\mu \phi = \delta \partial_\mu \phi + \delta x^\rho \partial_\rho \partial_\mu \phi \quad (4.4.39)$$

che possiamo riscrivere come:

$$\Delta \partial_\mu \phi = [\Delta, \partial_\mu] \phi + \partial_\mu \Delta \phi \quad (4.4.40)$$

che diventa, guardando solo l'operatore e ricordando che $\Delta \phi = 0$ visto che ϕ è uno scalare:

$$\Delta \partial_\mu = [\Delta, \partial_\mu] \quad (4.4.41)$$

che è una relazione valida solo per campi scalari e non in termini generali. Possiamo espandere i conti della (4.4.41) ricordando la (4.4.9):

$$[\Delta, \partial_\mu] = [\delta, \partial_\mu] + [\delta x^\nu \partial_\nu, \partial_\mu] \quad (4.4.42)$$

in cui vediamo che il primo commutatore è nullo dal momento che δ è lineare (essendo una semplice differenza) e vale $\delta\partial_\mu\phi = \partial_\mu\delta\phi$ (essendo ∂_μ lineare). Continuando i conti troviamo:

$$[\Delta, \partial_\mu] = [\delta x^\nu \partial_\nu, \partial_\mu] = [\varepsilon^{\nu\rho} x_\rho \partial_\nu, \partial_\mu] \quad (4.4.43)$$

in cui abbiamo esplicitato il coefficiente della trasformazione di Lorentz ε . Immaginiamo di applicare⁷ il commutatore (4.4.43) al campo ϕ , che avevamo rimosso nel passaggio per arrivare a (4.4.41). Utilizziamo la definizione di commutatore:

$$\Delta\partial_\mu\phi = [\Delta, \partial_\mu]\phi = [\varepsilon^{\nu\rho} x_\rho \partial_\nu, \partial_\mu]\phi \quad (4.4.44)$$

$$= \varepsilon^{\nu\rho} x_\rho \partial_\nu (\partial_\mu\phi) - \varepsilon^{\nu\rho} \partial_\mu (x_\rho \partial_\nu\phi) \quad (4.4.45)$$

$$= \varepsilon^{\nu\rho} x_\rho \partial_\nu (\partial_\mu\phi) - \varepsilon^{\nu\rho} (\partial_\mu x_\rho) (\partial_\nu\phi) - \varepsilon^{\nu\rho} x_\rho \partial_\mu \partial_\nu\phi \quad (4.4.46)$$

in cui possiamo notare che il primo e il terzo termine si annullano per via del fatto che ε è completamente antisimmetrico e $\partial_\mu\partial_\nu$ è simmetrico. Vediamo anche che nel pezzo che rimane abbiamo $\partial_\mu x^\rho = \delta_\mu^\rho$ che fa scomparire tutta la dipendenza da x^μ e dalle sue derivate. Dunque:

$$\Delta\partial_\mu\phi = -\varepsilon^{\nu\rho} \delta_{\mu\rho} (\partial_\nu\phi) = -\varepsilon^\nu{}_\mu (\partial_\nu\phi) = +\varepsilon_\mu{}^\nu (\partial_\nu\phi) \quad (4.4.47)$$

abbiamo cambiato segno essendo ε completamente antisimmetrico. Ora, ricordando che (4.4.39) vediamo:

$$\Delta\partial_\mu\phi = \delta(\partial_\mu\phi) + \delta x^\rho \partial_\rho \partial_\mu\phi = +\varepsilon_\mu{}^\nu (\partial_\nu\phi) \quad (4.4.48)$$

$$\implies \delta(\partial_\mu\phi) = \varepsilon_\mu{}^\nu (\partial_\nu\phi) - \varepsilon^{\rho\sigma} x_\sigma \partial_\rho (\partial_\mu\phi) \quad (4.4.49)$$

in cui possiamo già vedere che il secondo termine, che dipendendo da x e ∂_μ , conterrà momenti angolari orbitali e boost, mentre il primo termine, non dipendendo da x e ∂_μ , conterrà il puro spin. Possiamo fare dei conti più espliciti, riscrivendo $\varepsilon_\mu{}^\nu$ in qualche modo come $\varepsilon^{\rho\sigma}$ così da poterlo raccogliere:

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \varepsilon^{\rho\sigma} g_{\rho\mu} g^\nu{}_\sigma (\partial_\nu\phi) - \varepsilon^{\rho\sigma} x_\sigma \partial_\rho (\partial_\mu\phi) \quad (4.4.50)$$

dove possiamo antisimmetrizzare sia $g_{\rho\mu} g^\nu{}_\sigma$ (nota che esce un'operatore che ha una forma molto simile a $M_{\mu\rho}$, ma senza la dipendenza da x^μ o ∂^μ) che $x_\sigma \partial_\rho (\partial_\mu\phi)$:

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\sigma} [(g_{\rho\mu} g^\nu{}_\sigma - g_{\sigma\mu} g^\nu{}_\rho) (\partial_\nu\phi) - (x_\sigma \partial_\rho - x_\rho \partial_\sigma) (\partial_\mu\phi)] \quad (4.4.51)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\sigma} [(-i(S_{\rho\sigma})_\mu{}^\nu) (\partial_\nu\phi) - (-iL_{\sigma\rho}) (\partial_\mu\phi)] \quad (4.4.52)$$

$$= -\frac{i}{2} \varepsilon^{\rho\sigma} (S_{\rho\sigma})_\mu{}^\nu (\partial_\nu\phi) - \frac{i}{2} \varepsilon^{\rho\sigma} L_{\rho\sigma} (\partial_\mu\phi) \quad (4.4.53)$$

⁷Ricorda che ha senso parlare del commutatore, ma solo quando lo applichiamo a qualcosa e facciamo agire le derivate che ci sono all'interno su qualcosa.

dove abbiamo indicato con $L_{\rho\sigma}$ il generatore che racchiude i momenti angolari orbitali ed i boost nello spazio-tempo, mentre con $S_{\rho\sigma}$ il generatore che comprende i momenti di spin (generatore che soddisfa la stessa algebra dei momenti angolari, ma non dipende nè da x^μ nè da ∂_μ). Ricorda che nell'insieme dei generatori di Lorentz (gli $M_{\rho\sigma}$ che avevamo visto) ci sono tutti gli operatori che obbediscono a relazioni di commutazione di tipo momento angolare, quindi ci sono sia operatori tipo $L_{\rho\sigma}$, che riguardano trasformazioni dello spazio tempo, ma anche operatori tipo $S_{\rho\sigma}$, che con lo spazio tempo non ci hanno nulla a che fare non dipendendo nè da x^μ nè dalle sue derivate. Quest'ultima osservazione è molto importante perché rende la Teoria Quantistica dei Campi molto più ricca della Meccanica Quantistica, poiché ora lo spin non dobbiamo inglobarlo a posteriori nella teoria, ma è già presente vista tutta la fatica che facciamo nel costruire la teoria tramite la teoria delle rappresentazioni e la teoria dei gruppi.

È proprio la proprietà di trasformare sia con una parte finita che con una infinita a farci dire che il campo $\partial_\mu\phi$ è un campo vettoriale (dotato di spin) e non uno scalare (con spin nullo). Nel campo scalare non avevamo delle componenti da rimescolare, per cui era naturale non ritrovare la parte finito dimensionale della trasformazione.

Da (4.4.51) possiamo vedere bene un fatto della teoria dei gruppi per cui possiamo scrivere un operatore come prodotto diretto (scriviamo come somma) di una parte finito dimensionale e una parte infinito dimensionale (ne abbiamo parlato nella sezione §3.5.3). Infatti, abbiamo la parte finito dimensionale $S_{\rho\sigma}$ che mescola solamente le componenti del campo non dipendendo da x^μ o ∂^μ , e una parte infinito dimensionale $L_{\rho\sigma}$ che fa trasformazioni non banali (per via della presenza di x^μ e ∂^μ);⁸ in questo caso $L_{\rho\sigma}$ fa rotazioni e boost. Se vuoi vedi gli appunti di *Meccanica Quantistica 1* dove ne avevamo già parlato.

Il campo vettoriale, che in modo generico possiamo indicare con A^μ , trasforma secondo la rappresentazione $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, e nella sezione §3.7.8 del Schwichtenberg *Physical law should have mathematical beauty*. symmetry abbiamo visto che esiste anche un'altra rappresentazione del campo come matrice hermitiana 2x2 (ricordiamo la sezione §3.5.7):

$$A^\mu \longrightarrow A = \begin{pmatrix} A^0 + A^3 & A^1 + iA^2 \\ A^1 - iA^2 & A^0 - A^3 \end{pmatrix}. \quad (4.4.54)$$

Le trasformazioni di Lorentz sono quelle che preservano il fatto che $A = A^\dagger$

⁸Le trasformazioni che mescolano le componenti di un campo sono collegate a simmetrie interne (ad esempio per il campo spinoriale rappresentano la simmetria di spin), che non cambiano la dipendenza dalle coordinate; le trasformazioni in una rappresentazione infinita cambiano la dipendenza del campo dalle coordinate e rappresentano simmetrie di tipo spazio-temporale.

e lasciano $\det(A)$ invariante. Ad esempio, sono invarianti le combinazioni:

$$A_\mu(x)A^\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)\partial^\nu A^\mu(x), \partial_\mu A^\mu(x), \dots \quad (4.4.55)$$

e si possono avere sia campi vettoriali che pseudo-vettoriali (assiali) essendo la parità definita.

4.4.3 Campo spinoriale

Vediamo in questa sezione le leggi di trasformazione degli spinori, ma lo faremo un po' maluccio e saremo giustificati dal fatto che nella nostra teoria dei campi non si utilizzeranno spinori bidimensionali, poiché vedremo che hanno proprietà che non ci piacciono, bensì useremo gli spinori a 4 componenti.

I campi spinoriali vengono anche chiamati campi di materia, in evidenza del fatto che rappresentano particelle massive, a differenza dei campi vettoriali, che ad esempio possono rappresentare particelle massless come i fotoni. Le rappresentazioni spinoriali, come visto nella sezione §3.5.7, del gruppo di Lorentz:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad , \quad \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (4.4.56)$$

sono realizzate attraverso spinori a 2 componenti complesse che chiamiamo ψ_L e ψ_R (che sono collegati tramite trasformazioni di parità e complessa coniugazione, il che rende gli spinori oggetti non banali da trattare e ci permette di creare oggetti bilineari che comprendano sia il settore left che il settore right e non solo uno dei due). Le proprietà di trasformazione sono:

$$\psi_L(x) \longrightarrow \psi'_L(x') = \Lambda_L \psi_L(x) \quad \text{per} \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (4.4.57)$$

$$\psi_R(x) \longrightarrow \psi'_R(x') = \Lambda_R \psi_R(x) \quad \text{per} \quad \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (4.4.58)$$

con $\Lambda_{L,R}$ matrici complesse 2x2 che rappresentano appunto la trasformazione indotta sugli spinori dalla trasformazione delle coordinate; ci aspettiamo, parlando di spinori bidimensionali, che esse siano collegate in qualche modo alle matrici di Pauli.

Quando la trasformazione è una rotazione, sappiamo dalla rappresentazione spinoriale di $SU(2)$, essere:

$$\Lambda_{L,R} = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\omega}} \quad (4.4.59)$$

dove σ_i sono le matrici di Pauli, per cui vale:

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k. \quad (4.4.60)$$

Vediamo che le matrici Λ_L e Λ_R sono uguali poiché nei generatori (3.5.55) del gruppo $SO(1,3)$ gli operatori delle rotazioni J_i compaiono con lo stesso segno. Non sarà più così con i boost.

Per i boost possiamo utilizzare una rappresentazione analoga a quella delle rotazioni:

$$\vec{K} = \pm \frac{i}{2} \vec{\sigma} \quad (4.4.61)$$

che soddisfa tutte le relazioni di commutazione del caso (ricorda il capitolo §3), dunque:

$$\Lambda_L = e^{\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\eta}} \quad (4.4.62)$$

$$\Lambda_R = e^{-\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\eta}} \quad (4.4.63)$$

e abbiamo in generale per una trasformazione di Lorentz:

$$\Lambda_L = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\omega} - i\vec{\eta})} \quad (4.4.64)$$

$$\Lambda_R = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\omega} + i\vec{\eta})} \quad (4.4.65)$$

di cui dobbiamo ricordare che Λ_L e Λ_R sono legate da una trasformazione di parità e complessa coniugazione. Queste matrici forniscono una rappresentazione del gruppo di Lorentz, che comprende rotazioni e boost, tramite matrici di Pauli. Le proprietà importanti da ricordare delle nostre matrici di trasformazione, ereditate dalle matrici di σ e dimostrate nel file aggiuntivo di conti, sono⁹:

$$\Lambda_L^{-1} = \Lambda_R^\dagger \quad (4.4.66)$$

$$\sigma^2 \Lambda_L \sigma^2 = \Lambda_R^* \quad (4.4.67)$$

$$\Lambda_{L,R}^T = \sigma^2 \Lambda_{L,R}^{-1} \sigma^2 \quad (4.4.68)$$

$$\Lambda_L^T \sigma^2 \Lambda_L = \sigma^2 \quad (4.4.69)$$

ma anche che: dato uno spinore ψ_L che trasforma come $(\frac{1}{2}, 0)$ è possibile costruire lo spinore $\sigma^2 \psi_L^*$ che si trasforma come $(0, \frac{1}{2})$:

$$\sigma^2 \psi_L^* \xrightarrow{\text{T.L.}} \sigma^2 \Lambda_L^* \psi_L^* = \underbrace{\sigma^2 \Lambda_L^* \sigma^2}_{\Lambda_R} \sigma^2 \psi_L^* = \Lambda_R \sigma^2 \psi_L^* \quad (4.4.70)$$

ovvero, $\sigma^2 \psi_L^*$ trasforma con Λ_R , cioè come uno spinore R . Per vedere questa trasformazione abbiamo utilizzato la proprietà (4.4.60). Questo ci dice che esiste una trasformazione che ci fa passare da R ad L e viceversa.

⁹Nota che con σ^2 si indica la matrice di Pauli numero 2 e non un quadrato. Utilizziamo in particolare la σ^2 in quanto è l'unica a coefficienti complessi e che permette effettivamente di fare una complessa coniugazione.

Un'altra cosa che possiamo vedere è che dalla composizione di due spinori left $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (\frac{1}{2}, 0)$ si può ottenere uno scalare, poiché:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0) \oplus (1, 0) \quad (4.4.71)$$

infatti da (4.4.69), ricaviamo che dati due spinori χ_L e χ_R vale:

$$\chi_L^T \sigma^2 \psi_L \xrightarrow{\text{T.L.}} \chi_L^T \Lambda_L^T \sigma^2 \Lambda_L \psi_L = \chi_L^T \underbrace{\Lambda_L^T \sigma^2 \Lambda_L}_{\sigma^2} \psi_L = \chi_L^T \sigma^2 \psi_L \quad (4.4.72)$$

ovvero, troviamo $\chi_L^T \sigma^2 \psi_L$ è un invariante per trasformazioni di Lorentz, e dunque è uno scalare, cioè un'invariante. Quando invece prendiamo $\chi_L = \sigma^2 \psi_R^*$, allora l'invariante diventa:

$$-i \psi_R^\dagger \psi_L \quad (4.4.73)$$

e stessa cosa vale per $\psi_L^\dagger \psi_R$ (definizione dei fattori i non chiara).

Notiamo solo che tutti gli invarianti visti non sono reali, infatti ad esempio passando da L ad R otteniamo il complesso coniugato (motivo per cui mettiamo le i).

Un problema che riscontriamo è che non è possibile scrivere un'invariante di Lorentz usando spinori solo di tipo L , che appartiene a $(\frac{1}{2}, 0)$, oppure solo di tipo R , che appartiene a $(0, \frac{1}{2})$. Infatti gli spinori bilineari che possiamo scrivere sono una combinazione left e right. Cerchiamo ora di fare un ragionamento per capire come arriviamo a spinori bilineari di quel tipo.

Il modo più semplice è quello di prendere ψ_L , da cui possiamo costruirne uno R , e poi moltiplicarlo con ψ_R . Prendendo $\psi_L^\dagger \psi_L$ abbiamo invarianza sotto rotazioni spaziali (essendo rappresentato da un operatore unitario):

$$\psi_L^\dagger \psi_L \longrightarrow \psi_L^\dagger e^{-\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\omega}} e^{\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\omega}} \psi_L = \psi_L^\dagger \psi_L \quad (4.4.74)$$

ma così non è per i boost:

$$\psi_L^\dagger \psi_L \longrightarrow \psi_L^\dagger e^{\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\eta}} e^{\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\eta}} \psi_L = \psi_L^\dagger e^{\vec{\sigma} \cdot \vec{\eta}} \psi_L = \psi_L^\dagger \psi_L + \vec{\eta} \cdot \psi_L^\dagger \vec{\sigma} \psi_L + \mathcal{O}(\eta^2). \quad (4.4.75)$$

Però vediamo comparire la nuova quantità $\psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L$, che per una rotazione:

$$\psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L \longrightarrow \psi_L^\dagger e^{-\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\omega}} \sigma^i e^{\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\omega}} \psi_L = \psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L - \frac{1}{2} \omega^j \psi_L^\dagger \{\sigma^i, \sigma^j\} \psi_L \quad (4.4.76)$$

$$= \psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L - \omega^i \psi_L^\dagger \psi_L \quad (4.4.77)$$

dunque si trasforma come un trivettore (cambio segno); per una trasformazione di boost diventa:

$$\psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L \longrightarrow \psi_L^\dagger e^{-\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \eta} \sigma^i e^{\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \eta} \psi_L = \psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L + \frac{1}{2} \eta^j \psi_L^\dagger \{ \sigma^i, \sigma^j \} \psi_L + \mathcal{O}(\eta^2) \quad (4.4.78)$$

$$= \psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L + \eta^i \psi_L^\dagger \psi_L + \mathcal{O}(\eta^2) \quad (4.4.79)$$

in cui ci siamo ricordati che $\{ \sigma^i, \sigma^j \} = 2\delta^{ij}$. Abbiamo quindi imparato che $\psi_L^\dagger \psi_L$ e $\psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L$ per rotazioni trasformano in:

$$\delta \left(\psi_L^\dagger \psi_L \right) = \psi_L^\dagger \psi_L \quad (4.4.80)$$

$$\delta \left(\psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L \right) = -\psi_L^\dagger \psi_L \quad (4.4.81)$$

e per trasformazioni di boost:

$$\delta \left(\psi_L^\dagger \psi_L \right) = \eta^i \psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L \quad (4.4.82)$$

$$\delta \left(\psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L \right) = \eta^i \psi_L^\dagger \psi_L. \quad (4.4.83)$$

Quindi se vogliamo costruire un quadrivettore possiamo scrivere:

$$i\psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L = i \left(\psi_L^\dagger \psi_L, \psi_L^\dagger \vec{\sigma} \psi_L \right) \quad (4.4.84)$$

in cui identifichiamo $\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i) = (\mathbb{1}, \sigma^i)$.

Ovviamente esiste anche l'analogo per gli spinori right, in cui dobbiamo solo cambiare un segno:

$$i\psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_R = i \left(\psi_R^\dagger \psi_R, -\psi_R^\dagger \vec{\sigma} \psi_R \right). \quad (4.4.85)$$

Il problema a questo punto non è avere oggetti di dimensione "sbagliata" - ci siamo costruiti quadrivettori - ma non abbiamo degli invarianti di Lorentz. Dobbiamo combinare (4.4.84) o (4.4.85) con un altro quadrivettore (contraendo così gli indici) in modo da avere invarianti. Il quadrivettore più semplice che ci possa venire in mente è l'operatore di derivata ∂_μ (che ha anche la bella proprietà di essere invariante per traslazioni). Ovviamente dobbiamo tenere conto che ∂_μ agisce sui campi, quindi possiamo farlo agire sia su $\psi_{L,R}^\dagger$ che su $\psi_{L,R}$.

Alcuni esempi di invarianti bilineari dei campi spinoriali sono:

$$\partial_\mu \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R, \psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_R, \partial_\mu \psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L, \psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L, \frac{1}{2} \psi_L^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_L. \quad (4.4.86)$$

in cui $\overleftrightarrow{\partial}_\mu = \overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu$. Nota che stiamo implicitamente combinando parte left e right visto che dentro la σ^μ c'è la σ^2 e dunque $\sigma^\mu \psi_R$, ad esempio, in

realtà è uno spinore left.

Inoltre, siccome questi spinori sono legati da trasformazioni di parità (hanno parità opposta), gli indici possono solo essere composti combinando ψ_L e ψ_R , cioè combinando le due rappresentazioni $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$. Capiamo meglio ciò. Con trasformazioni di parità, ovvero invertendo il segno delle coordinate spaziali abbiamo¹⁰:

$$\begin{aligned} J_i & \xrightarrow{P} J_i \\ K_i & \xrightarrow{P} -K_i \\ N_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) & \xrightarrow{P} N_i^\dagger = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \\ N_i^\dagger = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) & \xrightarrow{P} N_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) \end{aligned}$$

e dunque abbiamo le trasformazioni:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}, 0\right) & \xrightarrow{P} \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \left(0, \frac{1}{2}\right) & \xrightarrow{P} \left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

quindi passiamo da uno stato left ad uno right con una trasformazione che non appartiene ad $SO(1, 3)$, bensì ad $O(1, 3)$. Abbiamo anche:

$$\Lambda_L^{boost} \xleftarrow{P} \Lambda_R^{boost}.$$

Se vogliamo costruire uno spinore che abbia proprietà di parità ben definite, allora dobbiamo assemblare le rappresentazioni left e right, e lo facciamo nel modo più semplice possibile, costruendo quello che si chiama **spinore di Dirac**. Infatti, partendo da ψ_L e ψ_R possiamo costruire uno spinore a 4 componenti, appunto lo spinore di Dirac, come:

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (4.4.88)$$

e ci permette di passare ad una rappresentazione quadridimensionale data dalla somma diretta:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (4.4.89)$$

¹⁰Basta vedere le trasformazioni $\Lambda_P J_i \Lambda_P^T$ e $\Lambda_P K_i \Lambda_P^T$. Se vuoi ci sono i conti nel file dedicato. Nota che l'inversione temporale fornisce:

$$J_i \xrightarrow{T} J_i \quad , \quad K_i \xrightarrow{T} -K_i. \quad (4.4.87)$$

ovvero dei due spinori left e right di Weyl¹¹. Lo spinore di Dirac è importante perchè le sue proprietà di trasformazione di parità sono ben definite, infatti:

$$\psi \xrightarrow{P} \psi^P = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \gamma_0 \psi \quad (4.4.91)$$

dove abbiamo introdotto una nuova matrice 4x4, che chiamiamo γ_0 . Nel caso volessimo "eliminare" una sola delle due componenti L o R e tenere solo l'altra, cioè, se volessimo proiettare (cioè tirar fuori) una delle due componenti, dovremmo introdurre un'ulteriore matrice 4x4 che abbiamo tutti zeri a parte il blocco o in alto a destra oppure in basso a sinistra (a seconda di chi vogliamo proiettare). Per arrivare a ciò introduciamo i proiettori:

$$\frac{1}{2} (\mathbb{1} \pm \gamma_5) \quad (4.4.92)$$

dove definiamo:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (4.4.93)$$

Possiamo riscrivere gli invarianti che abbiamo trovato in termini di spinori di Dirac. Per esempio:¹²

$$\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R = \psi^\dagger \gamma^0 \psi \equiv \bar{\psi} \psi \quad (4.4.95)$$

in cui definiamo:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (4.4.96)$$

o anche:

$$\frac{1}{2} \left(\psi_L^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_L + \psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_R \right) \equiv \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi \quad (4.4.97)$$

dove definiamo altre 3 nuove matrici 4x4, oltre alla γ^0 già vista:

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.98)$$

¹¹Nota che questa è una rappresentazione riducibile del gruppo di Lorentz. Caso diverso invece è $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Infatti possiamo scrivere la trasformazione di ψ come:

$$\psi \longrightarrow \psi' = \Lambda_{(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})} \psi = \begin{pmatrix} \Lambda_{(\frac{1}{2}, 0)} & 0 \\ 0 & \Lambda_{(0, \frac{1}{2})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (4.4.90)$$

¹²Qua devi solo vedere il prodotto dei due quadrivettori. Infatti:

$$\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R = \begin{pmatrix} \psi_R^\dagger & \psi_L^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \psi^\dagger \gamma^0 \psi \quad (4.4.94)$$

in cui abbiamo messo la γ^0 per poter rigirare nell'ordine L, R lo spinore $\psi^\dagger$.

che sono una specie di estensione quadridimensionale delle matrici di Pauli. Puoi guardare l'Appendice F per una trattazione completa delle matrici di Dirac. Notiamo che quando scriviamo γ^μ , l'indice μ è un indice di quadrivettore e sono matrici che rispettano l'algebra di Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (4.4.99)$$

Non siamo stati molto precisi, ma valgono le seguenti definizioni:

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \quad , \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \quad (4.4.100)$$

in cui la matrice $\bar{\sigma}^\mu$ è la matrice in cui le componenti spaziali sono cambiate di segno rispetto la matrice σ^μ .

Possiamo anche costruire uno spinore di Dirac, chiamato **spinore coniugato di carica**, sfruttando il fatto che $\psi_L \sim \sigma^2 \psi_R^*$, come:

$$\psi^c \equiv \begin{pmatrix} \sigma^2 \psi_R^* \\ -\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix} \quad (4.4.101)$$

e notiamo che $(\psi^c)^c = \psi$. Matematicamente, si usa l'operazione di coniugazione di carica, che trasforma una particella nella sua antiparticella. Possiamo fare di più, poiché siccome $\sigma^2 \psi_L^*$ trasforma come ψ_R , allora possiamo costruire uno spinore che è auto-coniugato di carica:

$$\psi^M \equiv \begin{pmatrix} \psi_L \\ -\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix} \quad (4.4.102)$$

che chiamiamo **spinore di Majorana**. Il termine autoconiugato di carica vuol dire che vale $(\psi_M)^C = \psi_M$, che fisicamente vuol dire che una particella uguale alla propria antiparticella. Lo spinore (4.4.102) è l'equivalente di uno spinore di Weyl, ma in 4 dimensioni. Gli spinori di Weyl e di Majorana hanno la metà dei gradi di libertà rispetto agli spinori di Dirac, ma non andremo più a fondo di così nell'interpretazione per ora.

4.4.4 Altri campi

Il libro di Ramond Physical law should have mathematical beauty. Ramond:1981pw lo fa sicuramente meglio, ma possiamo costruire campi di spin superiore tramite composizioni, opportune in base alle proprietà che vogliamo avere, delle rappresentazioni più semplici che abbiamo già analizzato. Ad esempio possiamo costruire un campo di spin 3/2 componendo:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{3}{2}, 0\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (4.4.103)$$

oppure un campo di spin 2 come:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (4.4.104)$$

Sappiamo bene che le particelle elementari sono classificate in base al loro spin, che corrisponde a specifiche rappresentazioni del gruppo di Lorentz. Quello che ci interessa è costruire e studiare bene le rappresentazioni rappresentanti i sistemi, le particelle, più semplici, quindi i campi scalari, di spin 0, i campi vettoriali, che ci servono ad esempio per il fotone, e i campi spinoriali, che rappresentano ad esempio particelle di Dirac di spin 1/2 come l'elettrone, e solo successivamente, nel caso ci dovessero servire, le componiamo per avere dei campi di spin più alto. Siamo, in qualche misura fortunati, poiché in natura le particelle elementari hanno spin 0, 1/2 o al massimo 1 per cui possiamo preoccuparci maggiormente delle rappresentazioni più basse. Spin maggiori di 1 riguardano particelle bosoniche o fermioniche che siano, ma non sicuramente particelle elementari (unica eccezione forse il gravitone).

Capitolo 5

Le equazioni di campo

In questo capitolo approfondiremo in modo più formale ciò che è presente in Appendice C riguardo azione e quantità conservate. In Appendice C vediamo gli stessi concetti di questo capitolo, ma rispetto la Fisica Classica, infatti ritroviamo le equazioni di Newton e vediamo come esempio la conservazione del momento angolare sotto rotazioni.

Abbiamo visto nel capitolo §4 come si trasformano i vari tipi di campi per trasformazioni di Poincaré e come formare degli invarianti per trasformazioni di quel tipo. Ora, assembliamo tali invarianti per creare delle azioni che descrivono le teorie fisiche che ci interessano (dunque che rispettino gli assiomi della Relatività Speciale). Vedremo che la richiesta di invarianza sotto trasformazioni di Poincaré non è sufficiente a determinare una sola azione, ma ne troveremo una classe intera. Dovremo costruire ad hoc altre richieste per arrivare ad una definizione univoca di azione per una certa teoria. Per questo capitolo si può fare riferimento a Physical law should have mathematical beauty. Kaku:1993ym, Ramond:1981pw.

Ricordiamo le definizioni e le cose importanti degli oggetti che dovremo utilizzare in questo capitolo. L'**azione**, che è un funzionale, è definito¹ come:

$$S \equiv \int dt L(t) \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (5.0.1)$$

in cui $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ ed $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi})$ è la **densità lagrangiana** funzione dei campi e delle loro derivate. La funzione $\mathcal{L}$ dipende soltanto da x^μ (o meglio dai campi $\phi(x^\mu)$) nelle teorie locali. Le teorie non locali sono estremamente complesse e le tratteremo comunque con $\mathcal{L}$ locali. La densità

¹Il dominio di integrazione può essere finito nello spazio poiché ad esempio abbiamo campi definiti solo nella regione delimitata dai due punti spatio-temporali τ_1 e τ_2 ; però il dominio può anche essere infinito, ma in questo caso con delle condizioni al contorno.

di lagrangiana è tale per cui:

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial_\mu \phi(x^\mu)). \quad (5.0.2)$$

L'azione è reale, così che in questo modo la probabilità è conservata. Ad esempio, in una teoria classica un potenziale complesso dà origine a fenomeni di assorbimento in cui particelle materiali spariscono nel nulla. Una teoria di questo tipo per noi non è accettabile.

La località consente di garantire la causalità, mentre il fatto che S sia reale garantisce che la probabilità si conservi.

L'azione dà origine ad equazioni del moto che contengono derivate di ordine massimo 2; derivate di ordine più alto generano violazioni di causalità. Avremo per questo nella nostra teoria al massimo $\partial_\mu \partial^\mu$ che agisce su un campo. Siccome $\partial_\mu \partial^\mu$ può essere identificato con P^2 , che abbiamo visto in §3 essere un operatore di Casimir del gruppo di Poincaré, e che P^2 corrisponde al quadrato dell'energia di una particella libera, allora se abbiamo solo un termine $\partial_\mu \partial^\mu \phi$ stiamo parlando di una teoria di campo libera (e le equazioni del moto si restringono ad una rappresentazione di particella libera) e possiamo identificare in tale termine il contributo cinetico.

In più, avremo bisogno che l'azione sia invariante per trasformazioni di Poincaré, poiché vogliamo costruire una teoria relativistica. L'azione dovrà essere sottoposta ad altre condizioni di invarianza, ad esempio, teorie di gauge coinvolgono altri gradi di libertà, come: carica elettrica, carica debole, carica di colore, etc. ma le vedremo in seguito.

Se lavoriamo in unità naturali l'azione S è adimensionale e conseguentemente la lagrangiana $\mathcal{L}$ ha dimensionalità:

$$[\mathcal{L}] = L^{-4}. \quad (5.0.3)$$

Punto fondamentale nel processo che vogliamo seguire è il principio di minima azione, che ci permette di arrivare alle equazioni del moto. Possiamo vedere il principio di minima azione come l'applicazione del rasoio di Occam alla natura, ovvero la natura sceglie per i suoi costituenti le equazioni del moto più semplici possibili, che minimizzano l'energia.

Noteremo che ci saranno altre simmetrie che salteranno fuori, oltre quelle per le trasformazioni di Poincaré, che garantiranno la conservazione di alcune cariche, come ad esempio la carica elettrica, carica di colore o isospin.

Vediamo in termini generici (senza specificare che tipo di campo abbiamo) il principio di minima azione, come arrivare alle equazioni del moto e come trovare le quantità conservate. Successivamente applicheremo tutto ai nostri campi.

5.1 Principio di minima azione ed equazione del moto

Prendiamo un campo locale $\phi(x)$ (scalare, spinoriale e vettoriale che sia) e scriviamo:

$$S(\tau_1, \tau_2, [\phi]) \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (5.1.1)$$

consideriamo una simmetria interna, ossia una simmetria che non coinvolge le coordinate spazio-temporali. In questo modo abbiamo che la variazione che abbiamo visto in (4.4.9) non coinvolge la variazione delle coordinate e possiamo osservare più facilmente che una variazione del campo $\delta\phi$ provoca una variazione di $\mathcal{L}$ e conseguentemente in S . Scriviamo:

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \delta \mathcal{L} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta(\partial_\mu \phi) \right] \quad (5.1.2)$$

in cui possiamo scrivere $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$, poiché in questo caso x non varia, ma lo fa solo ϕ (nella sua forma funzionale) e per cui la derivata della differenza $(\phi - \phi') = \delta\phi$ è uguale alla differenza delle derivate, cioè $\partial_\mu(\phi - \phi') = \delta\partial_\mu \phi$. I due termini in (5.1.2) ci mostrano rispettivamente come varia $\mathcal{L}$ per una variazione del campo ϕ e come varia $\mathcal{L}$ per una variazione di $\partial_\mu \phi$. Inserita l'osservazione riguardo la differenza delle derivate in (5.1.2) abbiamo:

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial_\mu \right] \delta\phi(x) \quad (5.1.3)$$

in cui possiamo vedere la seconda derivata essere:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial_\mu (\delta\phi) = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta\phi \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \right] \delta\phi \quad (5.1.4)$$

che sostituita porta a:

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \right] \delta\phi + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta\phi(x) \right]. \quad (5.1.5)$$

Il secondo termine di (5.1.5) è un termine di superficie (nota che c'è una quadri-divergenza), che in effetti si può scrivere come integrale di superficie:

$$\oint_{\sigma} d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta\phi \quad (5.1.6)$$

dove σ_μ è la superficie delimitata dal volume quadridimensionale su cui stiamo integrando. Questo termine di superficie va a 0 se richiediamo che $\delta\phi$ sia zero ai bordi di σ . Annullando il termine di superficie in (5.1.5) il principio di minima azione, o meglio la condizione che S sia invariante per la trasformazione infinitesima $\delta\phi$ del campo, ci fornisce l'equazione del moto:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (5.1.7)$$

che è l'**equazione di Eulero-Lagrange** (classica). Nel caso in cui avessimo più campi, $\varphi_a(x)$, allora abbiamo 1 equazione per ogni campo φ_a . È importante ricordare che le equazioni (5.1.7) valgono solamente quando le variazioni $\delta\phi$ sono nulle ai bordi e il termine di superficie è nullo, ma soprattutto che l'avere derivate doppie, e non di ordine più alto, è fondamentale poiché, come sappiamo dalla fisica classica, derivate di ordine più alto portano a soluzioni non causali della teoria. Nella teoria che costruiremo, la richiesta di avere al più una derivata doppia in S , si riverserà sull'avere al massimo due operatori ∂_μ nella lagrangiana. Un'altra conseguenza dell'annullarsi del termine di superficie è che le stesse equazioni del moto si ottengono da una qualsiasi lagrangiana che differisca da quella di partenza $\mathcal{L}$, per la derivata totale di una funzione arbitraria Λ^μ :

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu \quad (5.1.8)$$

ed $\mathcal{L}'$ induce una variazione su S che dipende solamente dalle condizioni ai bordi imposte su $\delta\phi$ e $\delta\partial_\mu\phi$. In Meccanica Classica la trasformazione:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' \quad (5.1.9)$$

è detta **trasformazione canonica**. Anche l'aggiunta di un'eventuale costante arbitraria $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' + K$ non cambia la natura del sistema. Però attenzione perché seppur non cambia le equazioni del moto cambia le correnti di Noether.

Fin'ora abbiamo considerato solo una trasformazione del campo ϕ che induce una variazione $\phi \rightarrow \phi' + \delta\phi$ che agisce solo sulla forma funzionale del campo, ma lascia invariate le coordinate spazio-temporali. Potremmo avere anche casi più generali di questo. Però questo tipo di trasformazioni (simmetrie interne), e le variazioni che inducono su $\mathcal{L}$, S e di conseguenza sull'applicazione del principio di minima azione e sulle equazioni del moto, sono estremamente interessanti ed importanti. Tieni a mente che se la lagrangiana è invariante di Lorentz, dunque non cambia per trasformazioni di $SO(1, 3)$, allora le equazioni del moto rimangono invariate; sarà proprio questa la linea che seguiremo nella nostra teoria. Vedremo nel seguito del capitolo come l'invarianza di S per una trasformazione di Poincaré sulle coordinate spazio-temporali ci porterà alla formulazione di una legge di conservazione (ricorda che una quantità conservata nel tempo è tale per cui $\frac{dQ}{dt} = 0$).

Per il momento continuiamo a concentrarci su una trasformazione che coinvolga la sola forma funzionale del campo ϕ (quindi per cui $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi$) e dimostriamo nella prossima sezione il teorema di Noether in questo caso.

Attenzione, tutto quello detto non vale se si vuole descrivere anche l'interazione gravitazionale.

5.2 Teorema di Noether

Vediamo in questa sezione l'applicazione del teorema di Noether in diversi casi. Prima vediamo delle trasformazioni che inducono una simmetria interna, successivamente il caso di una simmetria per una trasformazione che vari le coordinate spazio-temporali e per finire il caso più generale possibile, ovvero, il caso di una trasformazione che vari sia la forma funzionale del campo che le coordinate spazio-temporali.

Uno dei maggiori punti di forza del formalismo che stiamo utilizzando, ossia l'utilizzo delle simmetrie (e invarianze) dell'azione, è che permette di derivare delle leggi di conservazione. Possiamo ricordare dal corso di Meccanica Quantistica 1 che le simmetrie dell'hamiltoniana portano a delle leggi di conservazione, e di conseguenza a delle quantità conservate. Ad esempio, avevamo visto che un'hamiltoniana indipendente dal tempo portava alla conservazione dell'energia, un'hamiltoniana invariante per traslazioni portava alla conservazione dell'impulso e un'hamiltoniana centrale, dunque invariante per rotazioni, portava alla conservazione del momento angolare.

Il teorema di Noether formula la corrispondenza tra simmetrie e quantità conservate in termini matematici all'interno di una teoria di campo.

5.2.1 Simmetria interna

Supponiamo che S sia invariante per una trasformazione di simmetria interna, cioè una trasformazione che altera la forma funzionale dei campi ϕ^α , ma che non implichi una variazione delle coordinate spazio-temporali². Una trasformazione del tipo:

$$\phi^\alpha \longrightarrow \phi^\alpha + \varepsilon^\alpha \quad (5.2.1)$$

con $\delta\phi^\alpha = \varepsilon^\alpha$ parametro piccolo. Come conseguenza alla variazione del campo, l'azione subisce una variazione δS , ovviamente calcolabile. Possiamo provare a ragionare al contrario rispetto quanto fatto per ottenere le equazioni del moto; ossia, assumiamo che valgano le equazioni del moto e vediamo che conseguenze comporta una variazione dell'azione sul termine di superficie. Calcoliamo:

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \delta\phi^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi^\alpha]} \delta[\partial_\mu \phi^\alpha] \right) \quad (5.2.2)$$

$$= \int d^4x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi^\alpha]} \delta\phi^\alpha \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi^\alpha]} \right) \delta\phi^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \delta\phi^\alpha \right] \quad (5.2.3)$$

²Le simmetrie interne saranno molto importanti quando parleremo di teorie di Gauge di alcune simmetrie che le particelle hanno (carica elettrica, carica debole, carica di colore etc.).

in cui vediamo che gli ultimi due termini ricostruiscono l'equazione del moto, per possiamo imporre di essere *on-shell*, dunque in una situazione in cui valgono le equazioni di Eulero-Lagrange³ e mettere a zero i due termini. Conseguentemente abbiamo:

$$\delta S = \int d^4x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta \phi \right) \right] \quad (5.2.4)$$

possiamo interpretare la quantità:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta \phi \quad (5.2.5)$$

come una **corrente**, che se l'azione è invariante (il che vuol dire $\delta S = 0$) sotto la trasformazione (5.2.1), allora la corrente J^μ è conservata, e possiamo scrivere un'equazione di conservazione (o continuità):

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (5.2.6)$$

Inoltre, possiamo definire una **carica** conservata⁴ data dall'integrale sulle 3 coordinate spaziali della componente temporale⁵ di J^μ :

$$Q_\alpha \equiv \int d^3x J^0. \quad (5.2.7)$$

La carica Q_α è conservata poiché se integriamo su un volume tridimensionale infinito l'equazione di continuità (5.2.6) abbiamo:

$$0 = \int d^3x \partial_\mu J^\mu \quad (5.2.8)$$

$$= \int d^3x \partial_0 J^0 + \int d^3x \partial_i J^i \quad (5.2.9)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x J^0 + \int ds_i J^i \quad (5.2.10)$$

$$= \frac{dQ}{dt} + \text{termine di superficie} \quad (5.2.11)$$

³Qua devi tenere a mente una differenza: le equazioni del moto della teoria le troviamo applicando il teorema di minima azione, per cui diciamo che $\delta S = 0$ per qualsiasi variazione dei campi ϕ (che si annullano ai bordi), ma quando analizziamo il teorema di Noether stiamo imponendo la condizione $\delta S = 0$ per un diverso motivo. Infatti, se facciamo una trasformazione, per cui sappiamo che il sistema è invariante, questo vuol dire che $\delta S = 0$ (almeno fino ad un termine di superficie). Il punto è che troviamo una quantità conservata (la corrente di Noether) solamente nel caso in cui, osservando la variazione δS per una trasformazione di simmetria, ci mettiamo nella situazione *on-shell*, quindi in quella per cui valgono le equazioni del moto.

⁴Gli analoghi in Meccanica Quantistica sono: la corrente J^μ è quella che chiamavamo corrente di probabilità, mentre la quantità che si conservava era la densità di corrente di probabilità, che chiamavamo ρ .

⁵Se interpretiamo J^0 come una densità la definizione (5.2.7) sembra più naturale.

e se il termine di superficie va a 0 all'infinito abbastanza rapidamente, allora abbiamo:

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (5.2.12)$$

ossia, Q è una quantità conservata nel tempo.

Una nota importante è che nel caso avessimo più di un campo, allora ci sarebbe una corrente ed una carica associata ad ogni campo.

Il teorema di Noether ci dice esattamente quello visto in questo primo punto, ovvero: una simmetria di S (quindi in questo caso un'invarianza per una trasformazione interna), induce ad una corrente conservata e ad una legge di continuità (5.2.6), che a sua volta porta ad una legge di conservazione (5.2.12).

Field displacement Facciamo riferimento al capitolo §4 del Schwichtenberg Physical law should have mathematical beauty.symmetry. Vediamo ora un caso particolare delle simmetrie interne, ovvero il caso in cui abbiamo un displacement del nostro campo:

$$\phi \longrightarrow \phi - i\varepsilon \quad (5.2.13)$$

sempre con ε quantità piccola. Possiamo vedere che i generatori della trasformazione sono:

$$-i \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (5.2.14)$$

poiché vale:

$$\phi' = e^{-i\varepsilon \frac{\partial}{\partial \phi}} \phi = \left(1 - i\varepsilon \frac{\partial}{\partial \phi} + \dots\right) \phi \sim \phi - i\varepsilon. \quad (5.2.15)$$

Però vediamo che (5.2.5) porta alla quantità conservata:

$$Q \equiv \Pi = \int d^3x J_0 = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\dot{\phi}]} = -i \int d^3x \pi \varepsilon \quad (5.2.16)$$

in cui π è la densità del momento coniugato, dipendenti da x , mentre Π la quantità che si conserva. Dunque, impariamo che per un displacement del campo la quantità che si conserva è il momento coniugato π .

5.2.2 Variazione coordinate

Supponiamo ora che S sia invariante per una trasformazione che vari le coordinate spazio-temporali. Prendiamo ad esempio una traslazione, ovvero una trasformazione del tipo:

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + a^\mu \quad (5.2.17)$$

con $\delta x^\mu = a^\mu$ termine costante e non dipendente da x^μ . Abbiamo a^0 traslazione temporale e a^i traslazione spaziale. Conseguentemente alla traslazione abbiamo:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x + a) \quad (5.2.18)$$

che se consideriamo una traslazione infinitesima, con a^μ piccolo, è:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x + a) = \phi(x) + \delta\phi \quad (5.2.19)$$

e possiamo calcolare la variazione della forma funzionale del campo (sviluppando in serie $\phi(x + a)$):

$$\delta\phi = \phi(x + a) - \phi(x) \sim \phi(x) + a^\mu \partial_\mu \phi(x) - \phi(x) = a^\mu \partial_\mu \phi(x). \quad (5.2.20)$$

Dunque, in seguito ad una variazione $\delta x^\mu = a^\mu$ i campi variano come:

$$\delta\phi = a^\mu \partial_\mu \phi \quad (5.2.21)$$

e conseguentemente a $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \delta\phi = \partial_\mu a^\nu \partial_\nu \phi$:

$$\delta(\partial_\mu \phi) = a^\nu \partial_\nu (\partial_\mu \phi). \quad (5.2.22)$$

Ora, diversamente dal caso di simmetria interna in cui guardavamo solo la variazione indotta dai campi, dobbiamo tener conto che una trasformazione delle coordinate x^μ induce una variazione anche nella lagrangiana e successivamente nell'azione. Nota che la lagrangiana è un funzionale scalare, per cui se non facciamo una trasformazione dei campi, quindi siamo nella situazione $\phi'(x') = \phi(x)$ ossia $\Delta\phi = 0$, allora anche per la lagrangiana $\mathcal{L}$ vale lo stesso e possiamo scrivere la variazione indotta in forma analoga⁶ a quella che abbiamo trovato per ϕ :

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu \quad (5.2.23)$$

$$= a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \quad (5.2.24)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta[\partial_\mu \phi] \quad (5.2.25)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} a^\nu \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} a^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi \quad (5.2.26)$$

$$= a^\nu \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial_\nu \phi \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \right) \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial_\nu \phi \right] \quad (5.2.27)$$

$$= a^\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial_\nu \phi \right) \quad (5.2.28)$$

⁶Ho riportato una dimostrazione (presa dall'Iliopoulos Physical law should have mathematical beauty.Iliopoulos) del teorema di Noether nel file di conti.

in cui abbiamo annullato due termini grazie alle equazioni del moto. Abbiamo trovato:

$$a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = a^\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial_\nu \phi \right) \quad (5.2.29)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \left[\mathcal{L} \delta^\mu_\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial_\nu \phi \right] a^\nu = 0 \quad (5.2.30)$$

in cui abbiamo scritto $a^\mu = \delta^\mu_\nu a^\nu$, con $\delta^\mu_\nu = g^\mu_\nu$. L'equazione (5.2.30) è una legge di conservazione per un tensore, di rango 2, detto **tensore energia-impulso** (stress-tensor o tensore canonico), definito come⁷:

$$-T^\mu_\nu = \mathcal{L} g^\mu_\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial_\nu \phi \quad (5.2.31)$$

che fa diventare la legge di conservazione:

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0. \quad (5.2.32)$$

Il tensore T^μ_ν lo chiamiamo energia-impulso perché sappiamo, dallo studio del gruppo di Poincaré che i generatori del gruppo sono gli impulsi P^μ e ci aspettiamo che le traslazioni siano legate a P^0 energia del sistema e P^i tri-impulso.

Ora, se integrassimo la componente temporale di T^μ_ν su un volume tri-dimensionale infinito otterremmo la carica che si conserva in questo caso. Ci aspettiamo che le quantità conservate siano proprio energia ed impulso. Infatti, sappiamo che il quadri-impulso P^μ è definito come $P^\mu = (E, P^i)$ e possiamo definire:

$$P^\mu \equiv \int d^3x (T^\mu_0) \quad (5.2.33)$$

in questo modo il teorema di Noether ci garantisce:

$$\frac{dP^\mu}{dt} = 0 \quad (5.2.34)$$

cioè che l'energia (totale del sistema) e l'impulso sono costanti del moto se l'azione è invariante per traslazioni spazio-temporali.

Facciamo attenzione al fatto che le cariche conservate associate alle traslazioni nello spazio sono le tre componenti dell'impulso fisico del campo ϕ :

$$P^i = \int d^3x T^i_0 \quad (5.2.35)$$

da non confondere con l'impulso canonicamente coniugato a ϕ , solitamente indicato con $\pi(x)$ nella formulazione hamiltoniana della Teoria Quantistica

⁷La scelta del segno negativo ci sarà chiara in futuro, per ora giustifichiamola dicendo che in questo modo è una quantità definita positiva.

dei Campi.

Se immaginiamo di fare una traslazione della componente temporale, allora la carica conservata è l'hamiltoniana H :

$$H = \int d^3x T^0_0 = \int d^3x \mathcal{H} \quad (5.2.36)$$

perché, come avremo modo di vedere, vale:

$$\pi(x^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x^\mu)} \quad , \quad \mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}. \quad (5.2.37)$$

Già da questi due casi che abbiamo visto che le cariche di Noether, cioè le quantità conservate, sono i generatori delle trasformazioni sotto le quali l'azione è invariante. Infatti nel caso visto sopra, le componenti del quadri-impulso generano le traslazioni nello spazio-tempo.

Un discorso analogo a questo delle traslazioni spazio-temporali, anche se avremmo qualche difficoltà in più legata alla necessità di definire il tensore risultante come tensore simmetrico, lo si può fare anche nel caso in cui si consideri una trasformazione di Lorentz. Per esempio, se S è invariante per rotazioni, allora la quantità conservata è il momento angolare. Nel caso generico in cui S è invariante per trasformazioni di Lorentz le cariche conservate sono le componenti del momento angolare e dei generatori dei boost. Vedi la parte 2 della sezione §5.3.

5.2.3 Caso generale

Vediamo il teorema di Noether nel caso più generale possibile. Consideriamo una trasformazione che agisce sia sui campi che sulle coordinate spazio-temporali. Nel capitolo §4 abbiamo visto che una trasformazione infinitesima induce:

$$\begin{cases} x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \\ \phi'(x') = \phi(x) + \Delta\phi(x) \end{cases} \quad , \quad \Delta\phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) \quad (5.2.38)$$

notando che in $\Delta\phi(x)$ è inclusa sia la variazione della forma funzionale di ϕ (che va da $\phi \rightarrow \phi'$) sia l'effetto della trasformazione sulle coordinate ($x^\mu \rightarrow x'^\mu$). Come abbiamo visto, la variazione totale $\Delta\phi$ è data da:

$$\Delta\phi(x) = \phi(x + \delta x) - \phi(x) = \underbrace{\phi'(x) - \phi(x)}_{\delta\phi} + \partial_\mu \phi' \delta x \quad (5.2.39)$$

$$\sim \delta\phi(x) + \partial_\mu \phi(x) \delta x^\mu \quad (5.2.40)$$

dove abbiamo usato che $\partial_\mu \phi' \sim \partial_\mu \phi$ all'ordine $\mathcal{O}(\delta x)$. Dunque la variazione totale è:

$$\Delta\phi(x) = \delta\phi(x) + \partial_\mu \phi(x) \delta x \quad (5.2.41)$$

con i soliti due termini, di variazione della forma funzionale e di variazione indotta dalla trasformazione delle coordinate spazio-temporali. La lagrangiana subirà anch'essa una variazione:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta[\partial_\mu\phi] + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu \quad (5.2.42)$$

in cui abbiamo $\partial_\mu\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}$ e possiamo individuare i termini:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta[\partial_\mu\phi] \quad , \quad \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu \quad (5.2.43)$$

dove il secondo è la variazione indotta dalla trasformazione di x^μ sulla lagrangiana, esattamente come il caso generale. La variazione dell'azione sarà:

$$\Delta S = \int d^4x \Delta\mathcal{L} + \int (\delta d^4x) \mathcal{L}. \quad (5.2.44)$$

Però, possiamo scrivere un po' meglio queste ultime cose. Ricordando che vale $\delta\partial_\mu\phi = \partial_\mu\delta\phi$ e usando la regola di derivazione del prodotto, la quantità $\Delta\mathcal{L}$ diventa:

$$\Delta\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]} \right) \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]} \delta\phi \right) + (\partial_\mu\mathcal{L})\delta x^\mu \quad (5.2.45)$$

dove la prima parentesi è nulla per le equazioni del moto. Per $\delta(d^4x)$ abbiamo:

$$d^4x' = |J(x)|d^4x = \left| \det \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| d^4x \quad (5.2.46)$$

in cui possiamo vedere lo Jacobiano essere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial(x^\mu + \delta x^\mu)}{\partial x^\nu} = g^\mu{}_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu \\ &= \begin{vmatrix} 1 + \partial_0 \delta x^0 & \partial_1 \delta x^0 & \partial_2 \delta x^0 & \partial_3 \delta x^0 \\ \partial_0 \delta x^1 & 1 + \partial_1 \delta x^1 & \partial_2 \delta x^1 & \partial_3 \delta x^1 \\ \partial_0 \delta x^2 & \partial_1 \delta x^2 & 1 + \partial_2 \delta x^2 & \partial_3 \delta x^2 \\ \partial_0 \delta x^3 & \partial_1 \delta x^3 & \partial_2 \delta x^3 & 1 + \partial_3 \delta x^3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (5.2.47)$$

in cui vediamo che i termini lineari in δx sono $\partial_\mu \delta x^\mu$. Possiamo calcolare il determinante Jacobiano, ricordando che vale $\det(e^X) = e^{\text{Tr}X}$ e sviluppando il logaritmo che comparirà considerando δx^μ infinitesimo:

$$\det\{g^\mu{}_\nu + \partial_\mu \delta x^\mu\} = \exp\{\text{Tr}\{\ln(g^\mu{}_\nu + \partial_\mu \delta x^\mu)\}\} \quad (5.2.48)$$

$$\sim \exp\{\text{Tr}\{\partial_\nu \delta x^\nu\}\} \quad (5.2.49)$$

$$\sim 1 + \partial_\mu \delta x^\mu \quad (5.2.50)$$

dunque troviamo che:

$$\delta(d^4x) = d^4x' - d^4x = (|\det\{\partial_\nu x'^\mu\}| - 1) d^4x \cong \partial_\mu \delta x^\mu d^4x. \quad (5.2.51)$$

Mettendo insieme tutte le cose che abbiamo imparato possiamo scrivere la variazione dell'azione:

$$\Delta S = \int d^4x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta \phi \right) + \underbrace{(\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu}_{\partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu)} \right] \quad (5.2.52)$$

$$= \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right). \quad (5.2.53)$$

Il teorema di Noether ci dice in questo caso che: se l'azione è invariante per le trasformazioni che hanno indotto la variazione $\delta \phi$ sui campi e la variazione δx sulle coordinate, allora la quantità:

$$J^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \quad (5.2.54)$$

che si può interpretare come una *corrente*, che è conservata, cioè rispetta l'equazione di continuità:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (5.2.55)$$

Naturalmente se ci mettiamo nel caso in cui abbiamo una simmetria interna, in cui $\delta x^\mu = 0$, ritroviamo il risultato (5.2.6).

Possiamo riscrivere l'espressione della corrente (5.2.54) in funzione della variazione totale del campo $\Delta \phi$, anziché $\delta \phi$. Ricordiamo (5.2.41) e otteniamo una corrente:

$$J^\mu = \left(\mathcal{L} g^\mu{}_\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \partial_\nu \phi \right) \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \Delta \phi \quad (5.2.56)$$

$$= -T^\mu{}_\nu \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \Delta \phi \quad (5.2.57)$$

dove individuiamo $T^\mu{}_\nu$ *tensore energia-impulso* (o *tensore canonico*)⁸.

Possiamo dimostrare che anche in questo caso, ad ogni corrente (5.2.57) J_a^μ è associata una carica, costante nel tempo, conservata:

$$Q_a \equiv \int d^3x J_a^0(\vec{x}, t) \quad (5.2.58)$$

in cui l'integrale è fatto su un volume infinito. Vediamo infatti che integrando (5.2.55), e fissando opportunamente le condizioni sul bordo in modo che i campi vadano a 0 all'infinito abbastanza rapidamente, abbiamo:

$$0 = \int d^3x \partial_\mu J_a^\mu = \int d^3x \left(\frac{\partial}{\partial t} J_a^0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_a \right) \quad (5.2.59)$$

$$= \int d^3x \frac{\partial}{\partial t} J_a^0 - \underbrace{\int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_a}_{\rightarrow 0} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x J_a^0(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} Q_a \quad (5.2.60)$$

⁸Ricorda che T^0_0 è l'energia del sistema, infatti abbiamo $H = -\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$, ovvero l'hamiltoniana.

dunque che:

$$\frac{\partial Q_a}{\partial t} = 0 \quad (5.2.61)$$

ossia, che Q_a è costante nel tempo. Quindi anche in questo caso, del tutto generale, ad ogni simmetria corrisponde una carica conservata.

A proposito dell'osservazione che abbiamo fatto dopo aver derivato l'equazione di Eulero-Lagrange (5.1.7) riguardo la trasformazione canonica:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu \quad (5.2.62)$$

possiamo aggiungere un paio di cose. Infatti, nonostante la trasformazione canonica non sembri cambiare la descrizione del sistema, ossia le equazioni del moto, ciò che cambia sono le correnti di una quantità proporzionale a $\delta \Lambda^\mu$, e le quantità conservate. Anche le correnti J_a^μ non sono univocamente definite, infatti si può sempre aggiungere un quadrivettore conservato tipo $\partial_\rho t_a^{\rho\mu}$. Il fatto che ci sia questa ambiguità che possiamo utilizzare è molto importante poiché le correnti e le cariche che si conservano, per via del teorema di Noether, devono essere quantità fisiche sensate e noi potremo renderle tali, nei casi in cui non lo sono, senza modificare le equazioni del moto, ma aggiustando la lagrangiana e l'azione tramite una trasformazione canonica. Per quel che ci riguarda è anche importante che le correnti J^μ abbiano le corrette proprietà di simmetria che ci aspettiamo dalla teoria.

Quello che faremo nelle prossime due sezioni sarà costruire una lagrangiana, e un'azione, che sia invariante per trasformazioni di Poincaré, in questo modo avremo che la teoria che troveremo sia già una teoria che rispetti gli assiomi della Relatività Speciale. Ovviamente potremo costruire più invarianti di quelli che vedremo, ma solo pochi saranno effettivamente rilevanti e significativi dal punto di vista fisico. Sarà importante per noi richiedere che l'azione S sia una quantità reale, poiché solo in questo modo riusciremo ad avere una teoria di campo in cui la probabilità sia conservata.

5.3 Equazione per il campo scalare

In questa sezione, e nella prossima, non facciamo altro che applicare quello detto nel corso del capitolo, dunque, cominciamo a prendere i vari campi, di cui abbiamo analizzato le trasformazioni nel capitolo §4, ci costruiamo un'azione e ne deriviamo le equazioni del moto, ossia le equazioni di campo. Cominceremo con i campi scalari ϕ per poi passare ai campi spinoriali ψ .

I campi vettoriali li lasciamo ai noi del futuro poiché sono leggermente più complessi da trattare e li vedremo nel capitolo §10 legato allo studio della QED.

La forma più generale per una densità di lagrangiana $\mathcal{L}$, invariante sotto trasformazioni di Lorentz, che contiene solo un campo scalare $\phi(x)$, è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - V[\phi(x)] \quad (5.3.1)$$

in cui abbiamo un termine cinetico ed uno potenziale, che è una funzione scalare del campo $\phi(x)$ e non delle sue derivate. Il termine cinetico lo scegliamo con l'ordine più basso possibile di derivate, visto che la natura segue il principio del rasoio di Occam. Possiamo anche vedere che il termine cinetico presenta un'invarianza più forte rispetto $V(\phi(x))$, cioè appartiene ad un gruppo più restrittivo, grazie al fatto che è una derivata. Infatti, il termine $\partial_\mu \phi(x)$ è invariante non solo per trasformazioni del gruppo di Poincaré, ma anche per qualsiasi traslazione globale del campo, ossia trasformazioni del tipo $\phi \rightarrow \phi' = \phi + a$, e anche per trasformazioni discrete, come ad esempio trasformazioni di parità $\phi \rightarrow -\phi$. Inoltre, riguardo le dimensioni possiamo dire che: sapendo che l'azione $S = \int d^4x \mathcal{L}$ dev'essere un numero reale, allora dobbiamo avere, in 4 dimensioni, la densità lagrangiana tale per cui $[\mathcal{L}] = L^{-4}$ e di conseguenza il campo scalare ϕ con dimensione L^{-1} , ricordando che $[\partial_\mu] = L^{-1}$.

Sul potenziale $V[\phi(x)]$ non ci sono restrizioni in una teoria classica, ma ovviamente ci sono casi di maggior interesse rispetto altri, alcuni di essi sono:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (5.3.2)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (5.3.3)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + \frac{m^4}{\lambda} \left[\cos \frac{\sqrt{\lambda} \phi}{m} - 1 \right] \quad (5.3.4)$$

in cui la lagrangiana (5.3.2) descrive una *particella libera di massa m* , che possiamo notare essere invariante per una trasformazione di parità; la lagrangiana (5.3.3), che va bene in 4 dimensioni e in cui λ è adimensionale, descrive una *teoria self-interagente* e la lagrangiana (5.3.4), che va bene solo in 2 dimensioni, descrive una teoria di tipo *sine-Gordon*. Il fatto che m sia un parametro interpretabile come massa è giustificato dalle sue dimensioni (in unità naturali).

Possiamo prendere la lagrangiana generica per il campo scalare (5.3.1) ed inserirla nelle equazioni del moto (5.1.7), il che ci permette di ottenere:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \quad (5.3.5)$$

che nel caso particolare della particella libera, in cui $V = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$, diventa:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad (5.3.6)$$

che non è altro che:

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (5.3.7)$$

che è l'**equazione di Klein-Gordon**. Vediamo a questo punto l'applicazione del teorema di Noether e dunque chi sono le correnti e le quantità conservate per le diverse trasformazioni.

5.3.1 Traslazioni: correnti e cariche conservate

Vediamo, come primo caso, le traslazioni infinitesime nello spazio-tempo che non influiscono sulla forma funzionale del campo, quindi tali per cui $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu$ e $\Delta\phi = 0$. In questo caso la corrente di Noether (5.2.31) è il tensore energia-impulso:

$$J_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \quad (5.3.8)$$

che è un tensore di rango 2, simmetrico per scambio $\mu \leftrightarrow \nu$. In particolare vediamo che:

$$T_{00} = -\mathcal{L} + \partial_0\phi\partial_0\phi = \frac{1}{2}\partial_0\phi\partial_0\phi + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\phi\vec{\nabla}\phi + V(\phi) = \mathcal{H} \quad (5.3.9)$$

in cui $\mathcal{H}$ è la *densità di energia* e notiamo che T_{00} è una quantità definita positiva solo se $V(\phi) > 0$.

Lo stato fondamentale del campo è quello per cui T_{00} è il minimo possibile, quindi si raggiunge nel caso di campo statico (cioè quando $\partial_\mu\phi_c = 0 \forall \mu$) e coincide con il minimo del potenziale $V(\phi_c) = 0$.

La carica conservata è data da:

$$P_\mu = \int d^3x J_{\mu 0} = \int d^3x (-g_{\mu 0}\mathcal{L} + \partial_0\phi\partial_\mu\phi). \quad (5.3.10)$$

Notiamo anche che il teorema di Noether ci permette di superare il problema legato alle energie negative che trovavamo quando cercavamo di estendere l'equazione di Schrodinger al caso relativistico. L'equazione che ottenevamo (1.1.12) era formalmente identica all'equazione (5.3.7), ma la sua interpretazione come equazione d'onda era completamente fallimentare. Il problema che riscontravamo era che non veniva conservata la probabilità, ma ora siamo al sicuro perché c'è il teorema di Noether che ci protegge e ci garantisce che una quantità conservata c'è.

5.3.2 Parametri di una trasformazione

Questo breve discorso sui parametri della trasformazione lo si sarebbe potuto fare prima, ma un po' buttato per aria non avendo ancora necessità di essere utilizzato. Per avere delle espressioni di correnti e cariche belle, dobbiamo in qualche modo eliminare il parametro, un'operazione simile a quando facevamo trasformazioni in Teoria dei Gruppi nel capitolo §3 e riscrivevamo le cose

per riuscire a raccogliere i parametri e individuare i generatori. Per scrivere le correnti di Noether e le cariche conservate in forma più fruibile, e in una forma più generalizzabile anche a trasformazioni finite, è conveniente esprimere δx^μ e $\delta\phi$ in funzione dei parametri infinitesimi della trasformazione:

$$\delta x^\rho = \frac{\partial x^\rho}{\partial \omega^a} \delta \omega^a \quad (5.3.11)$$

$$\Delta\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \omega^a} \delta \omega^a \quad (5.3.12)$$

dove a enumera i parametri della trasformazione ω^a . Per pure traslazioni, in cui abbiamo $\Delta\phi = 0$ e i parametri ε^μ , le relazioni (5.3.11) e (5.3.12) diventano:

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu \implies \frac{\partial x^\mu}{\partial \omega^\rho} \rightarrow \frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial \varepsilon^\rho} = g^\mu{}_\rho. \quad (5.3.13)$$

Notiamo che prendendo la corrente (5.2.57) generica che trovavamo, questa operazione di riscrittura introduce un'indice in più nell'oggetto di partenza. Ricordando che $g^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$, ci rendiamo effettivamente conto che, nel caso delle traslazioni, la corrente J^μ da quadrivettore diventa un tensore di rango 2, che sappiamo essere, non a caso (visto che vale $\varepsilon^\mu \rightarrow \partial^\mu = iP^\mu$), il tensore energia-impulso.

Nota che facendo questo la corrente (5.2.57):

$$J^\mu = -T^\mu{}_\nu \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \Delta\phi \quad (5.3.14)$$

$$= -T^\mu{}_\nu \frac{\partial(\delta x^\nu)}{\partial \omega^a} \delta \omega^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial \omega^a} \delta \omega^a \quad (5.3.15)$$

$$= \left[-T^\mu{}_\nu \frac{\partial(\delta x^\nu)}{\partial \omega^a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial \omega^a} \right] \delta \omega^a \quad (5.3.16)$$

che se facciamo un passo indietro e riguardiamo la variazione dell'azione:

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (5.3.17)$$

allora ci rendiamo conto che la variazione $\delta \omega^a$ la possiamo eliminare e ci rimane una scrittura più pulita.

5.3.3 Trasformazioni di Lorentz: correnti e cariche conservate

Guardiamo ora il caso, leggermente più complicato, delle trasformazioni di Lorentz. Consideriamo trasformazioni che influiscono solo sulle coordinate spazio-temporali, ma che lasciano invariata la forma di ϕ , e per cui abbiamo $\Delta\phi = 0$ e $\delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu$. In questo secondo caso la corrente conservata diventa un oggetto con 3 indici. Infatti, come nel caso precedente, dobbiamo scrivere

δx^μ in funzione del parametro infinitesimo della trasformazione $\varepsilon^{\mu\nu}$, per dare una forma più pratica alla corrente di Noether. In questo caso il parametro della trasformazione ha due indici e sono completamente antisimmetrici (quindi $\varepsilon^{\mu\nu} = 0$ se $\mu = \nu$ e in generale $\varepsilon^{\mu\nu} + \varepsilon^{\nu\mu} = 0$) per cui:

$$\delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu \quad , \quad \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega^{\rho\sigma}} = \frac{\delta x^\mu}{\delta \varepsilon^{\rho\sigma}} \quad (5.3.18)$$

ci fornisce⁹:

$$\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial \varepsilon^{\rho\sigma}} = \frac{\partial(\varepsilon^{\mu\nu} x_\nu)}{\partial \varepsilon^{\rho\sigma}} \quad (5.3.19)$$

$$= \frac{\partial(g^\mu{}_\rho g^\nu{}_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma} x_\nu)}{\partial \varepsilon^{\rho\sigma}} \quad (5.3.20)$$

$$= \frac{\partial \left[\varepsilon^{\rho\sigma} \frac{1}{2} (g^\mu{}_\rho g^\nu{}_\sigma x_\nu - g^\mu{}_\sigma g^\nu{}_\rho x_\nu) \right]}{\partial \varepsilon^{\rho\sigma}} \quad (5.3.21)$$

$$= \frac{1}{2} (g^\mu{}_\rho x_\sigma - g^\mu{}_\sigma x_\rho) . \quad (5.3.22)$$

La corrente di Noether $J_{\mu\nu\rho}$ si scrive:

$$J_{\mu\rho\sigma} = -T_{\mu\nu} \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega^{\rho\sigma}} \quad (5.3.23)$$

$$= -T_{\mu\nu} \frac{1}{2} (g^\nu{}_\rho x_\sigma - g^\nu{}_\sigma x_\rho) \quad (5.3.24)$$

$$= (-g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) (g^\nu{}_\rho x_\sigma - g^\nu{}_\sigma x_\rho) \quad (5.3.25)$$

$$= T_{\mu\rho} x_\sigma - T_{\mu\sigma} x_\rho \quad (5.3.26)$$

dove ritroviamo i termini (5.3.8) e le cariche conservate sono, visto che l'azione è invariante per trasformazioni di Poincaré, i generatori del gruppo di Lorentz:

$$M_{\nu\rho} = \int d^3x J_{0\nu\rho} = \int d^3x (T_{0\nu} x_\rho - T_{0\rho} x_\nu) . \quad (5.3.27)$$

5.3.4 Dilatazioni

Un'altro importante esempio di applicazione del teorema di Noether, per trasformazioni che non sono necessariamente simmetrie di S (cioè che non la lasciano invariata) è dato dalle trasformazioni di dilatazione, che sono trasformazioni del tipo:

$$\delta x^\mu = \alpha x^\mu \quad , \quad \delta \phi = -\alpha \phi \quad (5.3.28)$$

e in cui si vede che il termine cinetico è invariante, ma il termine di massa no poiché contiene un parametro dimensionale. Noi non tratteremo questo tipo di trasformazioni, ma è presente nelle pagine 31 e 32 del Ramond Physical law should have mathematical beauty. Ramond:1981pw.

⁹Nota l'antisimmetrizzazione dell'oggetto $\varepsilon^{\mu\nu} = g^\mu{}_\rho g^\nu{}_\sigma \varepsilon^{\rho\sigma}$ negli indici ρ e σ .

5.4 Equazione per il campo spinoriale

Continuiamo, e terminiamo, il capitolo analizzando l'equazione di campo, le correnti di Noether e le cariche conservate nel caso di un campo spinoriale, come quelli analizzati nel capitolo §4.4.3.

Per scrivere l'azione di una campo spinoriale partiamo dagli invarianti:

$$\mathcal{L}_L = \frac{1}{2} \psi_L^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_L \quad , \quad \mathcal{L}_R = \frac{1}{2} \psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_R \quad (5.4.1)$$

che possiamo notare $\mathcal{L}_L^* = \mathcal{L}_L$ e $\mathcal{L}_R^* = \mathcal{L}_R$. Nota che la scrittura $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ è una notazione compattata, che può essere utilizzata qualche volta, e che significa che la derivata agisce in entrambe le direzioni, ovvero vuol dire, ad esempio:

$$\psi_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_2 = \psi_1 (\partial_\mu \psi_2) - (\partial_\mu \psi_1) \psi_2.$$

Ricordiamo che un'invariante per i campi spinoriali lo scrivevamo, nel capitolo §4.4.3, sempre utilizzando una matrice σ^μ , dunque con un indice di Lorentz; per questo motivo nel termine cinetico metteremo solo un termine di derivata ∂_μ che contrae l'altro indice già presente. Il fatto che $\mathcal{L}$ contenga solo derivate prime lo ritroveremo anche nell'equazione del moto, che conterrà solo derivate prime. Possiamo scrivere più convenientemente il termine cinetico in termini dello spinore di Dirac definito da (4.4.88):

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}^{\text{cin}} = \mathcal{L}_L^{\text{cin}} + \mathcal{L}_R^{\text{cin}} = \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \quad (5.4.2)$$

o equivalentemente:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}^{\text{cin}} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi. \quad (5.4.3)$$

La somma in (5.4.2) la scriviamo generalizzando la scrittura:

$$\mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R = \frac{1}{2} \left[\psi_L^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_L + \psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_R \right] \equiv \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi \quad (5.4.4)$$

e la rimozione del fattore $1/2$ a seguito della sostituzione $\overleftrightarrow{\partial}_\mu \rightarrow \partial_\mu$ (intendendo implicitamente $\partial_\mu = \vec{\partial}_\mu$, ovvero la derivata che agisce a destra come al solito) è dovuto al fatto che si può vedere:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi = \frac{1}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right] \quad (5.4.5)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \right] \quad (5.4.6)$$

$$= \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \quad (5.4.7)$$

ovvero che i due termini $\bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi$ e $\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$ differiscono, apparte del fattore $1/2$, di una derivata totale dei campi, che quando $\mathcal{L}$ viene integrata in

d^4x restituisce un termine di bordo che si annulla se imponiamo l'opportuna condizione al bordo dei campi.

L'invariante (5.4.2) è il più semplice che possiamo costruire includendo la derivata del campo spinoriale, e sarà lui che costruirà il nostro termine cinetico. Il termine (5.4.2) è invariante per trasformazioni conformi¹⁰, così come lo era il termine cinetico della $\mathcal{L}$ di Klein-Gordon.

Un'altra invarianza di (5.4.2) è per shift (traslazioni) costanti nei campi ψ :

$$\psi \longrightarrow \psi + \alpha \quad (5.4.8)$$

con α indipendente da x^μ .

Il termine cinetico (5.4.2) ha però un'invarianza molto importante, ovvero, l'*invarianza di fase* (globali, ossia che non dipendono da x). Infatti, essendo i campi ψ_L e ψ_R (e di conseguenza ψ definito come (4.4.88)) complessi, allora $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ è un'invariante per trasformazioni:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi \quad \text{fase costante} \quad (5.4.9)$$

$$\psi \rightarrow e^{i\beta\gamma^5}\psi \quad \text{chiriale} \quad (5.4.10)$$

con α, β indipendenti da x^μ . Le correnti di Noether corrispondenti alle trasformazioni di fase e chiriali sono:

$$j^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = i\psi_L^\dagger\sigma^\mu\psi_L + i\psi_R^\dagger\bar{\sigma}^\mu\psi_R \quad (5.4.11)$$

$$j_5^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi = i\psi_L^\dagger\sigma^\mu\psi_L - i\psi_R^\dagger\bar{\sigma}^\mu\psi_R \quad (5.4.12)$$

possiamo notare che il fattore i è il risultato della "rimozione" dell'elemento infinitesimo della trasformazione:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha}\psi \sim (1 + i\alpha + \dots)\psi \implies \delta\psi = i\alpha\psi \implies \delta \rightarrow i. \quad (5.4.13)$$

Infatti dovremmo avere:

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi + \mathcal{L}\delta x^\mu = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\psi)}[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi](i\alpha\psi) \quad (5.4.14)$$

$$= i\alpha\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (5.4.15)$$

ma possiamo rimuovere il parametro facendo:

$$J'^\mu = \frac{\partial J^\mu}{\partial\alpha} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (5.4.16)$$

e ridefinendo $J'^\mu \equiv J^\mu$. Questa, come vedremo sarà la *corrente elettrica* e corrisponderà ad una quantità conservata che è la *densità di carica*.

¹⁰Trasformazioni conformi sono trasformazioni che preservano gli angoli (come ad esempio le trasformazioni di scala) e variano la metrica in modo locale, del tipo $g^{\mu\nu} \rightarrow \Omega(x)g^{\mu\nu}$, e contengono le trasformazioni di Poincaré e le dilatazioni.

Le cariche conservate saranno ovviamente date da:

$$Q = i \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi = i \int d^3x \left(\psi_L^\dagger \psi_L + \psi_R^\dagger \psi_R \right) \quad (5.4.17)$$

$$Q = i \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^5 \psi = i \int d^3x \left(\psi_L^\dagger \psi_L - \psi_R^\dagger \psi_R \right). \quad (5.4.18)$$

Ovviamente, si possono costruire anche i termini di massa¹¹ per la $\mathcal{L}$ di Dirac, costruendo altri invarianti molto semplici, che sono termini quadratici nei campi ψ_R e ψ_L senza derivate. Scriviamo:

$$\mathcal{L}_D^m = im \bar{\psi} \psi = im \psi^\dagger \gamma^0 \psi \quad (5.4.19)$$

che si potrebbe anche riscrivere come:

$$\mathcal{L}_D^m = im \left(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L \right) \quad (5.4.20)$$

e in cui notiamo che la i è essenziale al fine di rendere il termine reale (ricordiamo che $\psi_R = \sigma^2 \psi_L^*$). Ovviamente c'è anche un'altro termine analogo, ma legato a γ^5 :

$$\mathcal{L}_{D5}^m = m \bar{\psi} \gamma^5 \psi = -m \left(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L \right). \quad (5.4.21)$$

I due termini (5.4.19) e (5.4.21) sono invarianti per trasformazione di fase globale (5.4.9), per cui vale:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger e^{i\alpha} \gamma^0 = e^{-i\alpha} \bar{\psi}. \quad (5.4.22)$$

Attenzione però che $\mathcal{L}_D^m$ (5.4.19) non è invariante per trasformazioni chiriali (5.4.10) per cui si ha:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger e^{-i\beta \gamma^5} \gamma^0 \neq \psi^\dagger \gamma^0 e^{-i\beta \gamma^5} \implies \bar{\psi} = \bar{\psi} e^{i\beta \gamma^5} \quad (5.4.23)$$

poiché γ^0 non commuta con γ^5 , bensì anti-commuta, ossia $\{\gamma^0, \gamma^5\} = 0$. Da cui si vede che il termine nella lagrangiana non è invariante:

$$\bar{\psi} \psi \longrightarrow \bar{\psi} e^{2i\beta \gamma^5} \psi. \quad (5.4.24)$$

Facciamo attenzione che non è impossibile costruire termini quadratici senza derivate e che siano invarianti chiriali, il problema è che la loro struttura è più involuta. Puoi vedere pagina 36 del Ramond Physical law should have mathematical beauty. Ramond:1981pw. Noi non utilizzeremo il termine chiriale nella nostra teoria. Il termine simmetrico per chiralità viene utilizzato per i sistemi a massa nulla, che sono un caso particolare poiché utilizzando il termine chiriale $\mathcal{L}_{D5}$ si giunge ad un'equazione del moto disaccoppiata per

¹¹Diciamo di massa per via delle discussioni dimensionali che si possono fare.

i termini left e right. Questa si chiama equazione di Weyl e si può dire che sia proprio la massa m che accoppia le parti left e right di uno spinore.

Ovviamente, potremmo continuare a creare nuovi invarianti che contengano più di due campi spinoriali. I termini che potremmo fare, però, avrebbero dimensioni diverse da L^{-4} , sarebbero da L^{-6} in su, e di conseguenza ci costringerebbero ad introdurre delle costanti dimensionali per ristabilire le giuste dimensioni di $\mathcal{L}$, e questo potrebbe portare a dei problemi di interpretazione dei risultati.

Ad esempio, anche termini del tipo $\partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \psi$ sarebbero leciti, ma come avremo modo di vedere, essi violano la connessione di spin e statistica (teorie di gauge).

Possiamo concludere il capitolo determinando l'equazione del moto utilizzando l'equazione di Eulero-Lagrange. Abbiamo la lagrangiana di Dirac:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + im \bar{\psi} \psi \quad (5.4.25)$$

riscrivibile anche come¹²:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (5.4.26)$$

e facendo variare ψ e $\bar{\psi}$ indipendentemente, le equazioni di Eulero-Lagrange (5.1.7) ci danno l'equazione del moto:

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (5.4.27)$$

che è l'**equazione di Dirac**, che rappresenta l'equazione del moto che descrive la dinamica di una particella massiva, di massa m , di spin 1/2, elettricamente carica e libera; libera poiché non abbiamo inserito un termine di interazione all'interno di $\mathcal{L}_D$. Faremo teoria interagente alla fine del corso e nel corso di Fondamenti.

Tieni a mente che i campi ψ e $\bar{\psi}$ sono campi indipendenti, per cui possiamo prendere la lagrangiana e variare indipendentemente sia ψ che $\bar{\psi}$. L'equazione (5.4.27) esce fuori anche se utilizziamo Eulero-Lagrange con i campi $\bar{\psi}$ (o $\psi^\dagger$), però, ci esce fuori l'equazione hermitiana-coniugata, del tutto equivalente:

$$-i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m \bar{\psi} = 0 \quad (5.4.28)$$

nel caso applicassimo Eulero-Lagrange ai campi $\psi \partial_\mu \psi$. Nota che questa equazione ci uscirebbe se avessimo scelto per convenzione:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}^{\text{cin}} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu \psi. \quad (5.4.29)$$

¹²Raccogliendo una i che moltiplica tutto e che poi possiamo rimuovere poiché la lagrangiana $\mathcal{L}$ è invariante per rinormalizzazioni.

ovvero avessimo scritto la relazione (5.4.7) scegliendo la derivata $\overleftarrow{\partial}_\mu$ anziché l'usuale $\overrightarrow{\partial}_\mu$.

Note. Tieni a mente che non c'è nulla di sbagliato in termini del tipo $\partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \psi$, ma semplicemente non si utilizzano perché non portano a delle teorie soddisfacenti, nel senso che violano il teorema di spin-statistica.

Capitolo 6

L'equazione di Dirac

Abbiamo derivato nel capitolo precedente le equazioni di campo per campi scalari (5.3.7) e campi spinoriali (5.4.27). Vediamo ora, non solo l'interpretazione che possiamo dare dell'equazione di Dirac (5.4.27), ma tutte le proprietà e caratteristiche che essa ha. L'equazione spinoriale è particolarmente importante poiché rappresenta particelle fermioniche massive, che sono quelle con cui si ha maggiormente a che fare. Nel capitolo utilizzeremo molto le matrici di Dirac γ^μ , per alcune proprietà nella rappresentazione più conveniente da utilizzare possiamo vedere l'Appendice F, che in qualche modo sarà fondamentale per i nostri studi. Il riferimento per questo capitolo è il Peskin e Schroeder Physical law should have mathematical beauty. Peskin:1995ev.

Fai attenzione che utilizzeremo nel corso del capitolo sia la rappresentazione, delle matrici γ^μ , sia di Weyl che di Dirac. In generale se non stiamo guardando nulla di legato alla chiralità o elicità stiamo utilizzando la rappresentazione di Dirac.

6.1 Covarianza dell'equazione di Dirac

Riproponiamo l'equazione di Dirac per comodità:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0. \quad (6.1.1)$$

L'equazione (6.1.1), come tutte le leggi della Fisica, dev'essere indipendente dal sistema di riferimento in cui il sistema viene osservato, per cui vogliamo che sia un'equazione covariante. Possiamo mostrare che l'equazione (6.1.1) è invariante per trasformazioni di Lorentz (TL), ovvero che, l'equazione ha le stesse invarianze della lagrangiana. Gli spinori $\psi(x)$, nella rappresentazione quadridimensionale dell'algebra di Dirac, sono:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (6.1.2)$$

che utilizziamo sono rappresentazioni di spin 1/2 del gruppo di Lorentz, ricordiamo la sezione §3.5. Per studiare come si comporta l'equazione di Dirac sotto TL cominciamo a vedere come si comporti uno spinore ψ . Per trasformazioni di Lorentz gli spinori (6.1.2) si trasformano come:

$$\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \psi'(x') = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}}\psi(x) \quad (6.1.3)$$

dove $M^{\rho\sigma}$ sono i generatori del gruppo di Lorentz, scritti nella forma generale (rappresentazione finita + infinita):

$$M_{\rho\sigma} = i(x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho) + iS_{\rho\sigma} \quad (6.1.4)$$

e possiamo definire:

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}}. \quad (6.1.5)$$

così che:

$$\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \psi' = S(\Lambda)\psi. \quad (6.1.6)$$

dove possiamo interpretare S come una matrice 4x4 che opera una trasformazione di Lorentz sugli spinori, ed essendo gli spinori di Dirac (6.1.2) ottenuti da due spinori di $SU(2)$ (ricordiamo che $\psi_L \in [(\frac{1}{2}, 0)]$ e $\psi_R \in [(0, \frac{1}{2})]$), allora S dovrà essere in qualche modo ottenuta, e quindi legata, alle matrici di Pauli (che ricordiamo essere i generatori di $SU(2)$). Infatti abbiamo:

$$M^{0i} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix}, \quad M^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad (6.1.7)$$

in cui M^{0i} sono i generatori dei boost, matrici non hermitiane il che rende la rappresentazione non unitaria¹ (ciò è legato anche al fatto che il gruppo non sia compatto), mentre M^{ij} sono i generatori delle rotazioni e sono semplicemente le matrici di Pauli replicate due volte. Ricordiamo che, nel caso specifico in cui prendiamo la rappresentazione irriducibile di $SU(2)$ abbiamo:

$$\psi'_L = \Lambda_L \psi_L = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\omega} - i\vec{v})} \psi_L \quad (6.1.8)$$

$$\psi'_R = \Lambda_R \psi_R = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\omega} + i\vec{v})} \psi_R. \quad (6.1.9)$$

Vediamo come si comporta l'equazione di Dirac (6.1.1) sotto una generica trasformazione di Lorentz $S(\Lambda)$ (ricorda che per le matrici γ^μ sono invarianti di Lorentz):

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \xrightarrow{\text{T.L.}} (i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0 \quad (6.1.10)$$

$$(i\gamma^\mu\Lambda_\mu{}^\nu\partial_\nu - m)S(\Lambda)\psi(x) = 0 \quad (6.1.11)$$

¹Per cui non possiamo dire che $S^{-1}(\Lambda) = S^\dagger(\Lambda)$.

in cui abbiamo utilizzato il fatto che $\partial'_\mu = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu$, ossia che le derivate trasformano con la matrice Λ^{-1} . Possiamo scrivere anche che $\Lambda_\mu^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu$, e moltiplicare a sinistra per $S^{-1}(\Lambda)$, in questo modo la trasformazione di Lorentz porti a:

$$S^{-1}(\Lambda) (i\gamma^\mu (\Lambda^\nu_\mu)^{-1} \partial_\nu - m) S(\Lambda) \psi(x) = 0 \quad (6.1.12)$$

$$(iS^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) (\Lambda^\nu_\mu)^{-1} \partial_\nu - m) \psi(x) = 0. \quad (6.1.13)$$

Notiamo che possiamo far filtrare dentro $S(\Lambda)$ e scambiare posto con la derivata ∂_μ poichè la matrice vive in uno spazio governato dall'algebra di Clifford, in cui ci stanno gli spinori quadri-dimensionali, (motivo per cui quando incontriamo γ^μ ci fermiamo) e non gli interessa cosa fanno gli operatori che operano nello spazio delle coordinate (∂_μ), commutando con essi. Vediamo infatti che:

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = \gamma^0 \partial_0 \psi + \gamma^1 \partial_1 \psi + \gamma^2 \partial_2 \psi + \gamma^3 \partial_3 \psi \quad (6.1.14)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \partial_0 \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \partial_1 \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} + \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \partial_2 \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \partial_3 \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

e vediamo che le derivate agiscono sulle componenti dello spinore, mentre le matrici γ^μ riorganizzano le sue componenti. Diciamo questo ed è evidente che agiscono su spazi diversi.

Dall'equazione (6.1.13) possiamo vedere che affinché l'equazione di Dirac sia invariante sotto trasformazioni di Lorentz deve valere la condizione:

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho \quad (6.1.16)$$

che è una condizione analoga a quella trovata per la Relatività Speciale (2.2.18), che però ora è una relazione che vale per l'operatore che trasforma il campo. Nota però che non essendo un operatore unitario $S(\Lambda)$ la relazione (6.1.16) non è una vera e propria legge di trasformazione delle matrici γ^μ . Tieni a mente che $\Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho$ danno una combinazione lineare di Λ^μ_ρ moltiplicata per le componenti di γ^ρ , proprio come quando scrivevamo:

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1 + \gamma^2 \partial_2 + \gamma^3 \partial_3. \quad (6.1.17)$$

Grazie a (6.1.16) abbiamo:

$$(i\gamma^\rho \underbrace{\Lambda^\mu_\rho (\Lambda^\nu_\mu)^{-1}}_{\delta^\nu_\rho} \partial_\nu - m) \psi(x) = 0 \quad (6.1.18)$$

$$(i\gamma^\rho \delta^\nu_\rho \partial_\nu - m) \psi(x) = 0 \quad (6.1.19)$$

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - m) \psi(x) = 0 \quad (6.1.20)$$

ossia l'equazione (6.1.1).

6.2 Comportamento dell'equazione di Dirac per trasformazioni di parità

Le particelle e i sistemi, descritti da (6.1.1), che studiamo in Fisica ci dicono, oltre al fatto che sono invarianti di Lorentz, anche che sono invarianti per trasformazioni di parità. Vediamo in questa sezione il comportamento dell'equazione di Dirac per trasformazioni di parità, ovvero tramite inversioni spaziali, che trasformano x^μ come:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = (x^0, -\vec{x}). \quad (6.2.1)$$

Vediamo come si trasforma il campo spinoriale ψ in seguito all'inversione spaziale. Scriviamo genericamente:

$$\psi \xrightarrow{\text{P.}} \psi'(x') = S_p \psi(x) \quad (6.2.2)$$

e la trasformazione dell'equazione di Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \xrightarrow{\text{P.}} (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - m) S_p \psi(x) = 0 \quad (6.2.3)$$

che se moltiplichiamo a sinistra per la trasformazione S_p^{-1} otteniamo:

$$(iS_p^{-1} \gamma^0 S_p \partial_0 - iS_p^{-1} \gamma^i S_p \partial_i - m) \psi(x) = 0. \quad (6.2.4)$$

Possiamo vedere che l'equazione di Dirac è invariante per inversione spaziale solo se valgono:

$$S_p^{-1} \gamma^0 S_p = \gamma^0, \quad S_p^{-1} \gamma^i S_p = -\gamma^i \quad (6.2.5)$$

che possiamo anche scrivere come:

$$S_p = \eta_p \gamma^0 \quad (6.2.6)$$

in cui η_p è una costante complessa.

Ricordiamo che nella costruzione degli spinori avevamo chiesto che avessero delle proprietà ben definite per trasformazione di parità. Possiamo facilmente vedere che $\psi^\dagger \psi$ è invariante per inversione spaziale a patto che $|\eta_p| = 1$, ossia che η_p sia una pura fase $e^{i\varphi}$ con $\varphi \in \mathbb{R}$. Infatti, abbiamo:

$$\psi^\dagger(t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x}) \xrightarrow{\text{P.}} \psi'^\dagger(t, \vec{x}') \psi'(t, \vec{x}') \quad (6.2.7)$$

$$= [\eta_p \gamma^0 \psi(t, \vec{x})]^\dagger [\eta_p \gamma^0 \psi(t, \vec{x})] \quad (6.2.8)$$

$$= |\eta_p|^2 \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi \quad (6.2.9)$$

$$= |\eta_p|^2 \psi^\dagger \psi \quad (6.2.10)$$

che è esattamente $\psi^\dagger \psi$ solo se $|\eta_p| = 1$. Il fattore di fase η_p dipende dalla natura del campo fermionico ψ di spin $1/2$ ed è chiamato **parità intrinseca**.

Si vede anche, per via della presenza di γ^0 , che non ha influenza, anche $\bar{\psi}\psi$ è un'invariante per parità. Allo stesso modo vedi che $\bar{\psi}\gamma^i\psi$ non è invariante (per colpa di (6.2.5)).

6.3 Connessione equazione di Dirac e di Klein Gordon

Dimostriamo in questa sezione che l'equazione di Dirac (6.1.2) implica l'equazione di Klein-Gordon (5.3.7) e in questo senso possiamo dire che ogni componente di ψ sia un campo scalare. Moltiplichiamo l'equazione (6.1.1) per la sua complessa coniugata (del termine tra parentesi):

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (6.3.1)$$

il che è una somma per differenza:

$$(\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi = 0 \quad (6.3.2)$$

possiamo riscrivere:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu \quad (6.3.3)$$

poiché $\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu$ è completamente simmetrico e possiamo riscriverlo simmetrizzato. Ricordando l'algebra di Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ otteniamo:

$$\left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu + m^2\right)\psi = 0 \quad (6.3.4)$$

$$(g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi = 0 \quad (6.3.5)$$

ossia l'equazione di Klein-Gordon (5.3.7). Però l'equazione di Dirac sappiamo riguardare uno spinore a 4 componenti, e il fatto che l'equazione (6.1.1) sia collegata con l'equazione di Klein-Gordon (5.3.7) ci dice che ognuna delle 4 componenti di ψ è un campo scalare descritto da (5.3.7), poiché scompare γ^μ (che aveva il ruolo di riordinare le componenti dello spinore) e rimane solo ∂_μ che agisce sulle coordinate delle componenti degli spinori $\psi(x)$, quindi abbiamo 4 equazioni separate per le 4 componenti.

6.4 Generatori di Lorentz

Nel capitolo §6 noi ci riferivamo ad una generica matrice rappresentativa delle trasformazioni di Lorentz con $S(\Lambda)$. Ovviamente, quando ci mettiamo a lavorare e a fare conti espliciti dobbiamo scrivere in qualche modo

la matrice $S(\Lambda)$. Nel capitolo §6 la matrice $S(\Lambda)$ l'abbiamo scritta, con la relazione (6.1.5), tramite l'esponezializzazione dei generatori del gruppo di Lorentz, che ricordiamo di aver chiamato, nel modo più generico possibile, come $M^{\mu\nu}$. Abbiamo già visto alcune rappresentazioni utilizzabili per scrivere $S(\Lambda)$, infatti, finora abbiamo scritto gli $S(\Lambda)$ rifacendoci alle matrici di Pauli σ_k , i generatori di $SU(2)$, cioè utilizzando "composizioni" di matrici 2×2 . Ricordiamo, infatti, che i generatori $M^{\mu\nu}$ nella rappresentazione $SU(2) \otimes SU(2)$ vengono rappresentati tramite le matrici di Pauli (ricorda la relazione (3.5.65)). Però, quando ci mettiamo a studiare sistemi descritti dall'equazione di Dirac sappiamo bene che ci troviamo in mano oggetti che vivono in uno spazio governato dall'algebra di Clifford, che considera la rappresentazione la cui algebra ha base formata dalle matrici 4×4 γ^μ , per questo motivo siamo interessati a dare una rappresentazione delle trasformazioni di Lorentz $S(\Lambda)$ in termini delle matrici γ^μ . Possiamo introdurre le seguenti matrici 4×4 ²:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (6.4.2)$$

che ci servono perché le matrici $\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}$ sono i generatori del gruppo di Lorentz scritti in una rappresentazione quadridimensionale che vive nello spazio di Dirac. Notiamo che i $\sigma^{\mu\nu}$ sono 6 matrici, vista l'antisimmetria.

Quindi se possiamo scrivere:

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} \quad (6.4.3)$$

se la sostituiamo nell'esponezializzazione dei generatori del gruppo otteniamo:

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}. \quad (6.4.4)$$

L'equazione (6.4.4) da una rappresentazione esplicita della matrice $S(\Lambda)$, che induce una trasformazione di Lorentz sul campo spinoriale di Dirac, in termini delle matrici γ di Dirac. L'espressione (6.4.2) possiamo controllarla e scriverne effettivamente un'espressione matriciale, infatti, anche ricordando le espressioni viste (6.1.7), vediamo (utilizzando la rappresentazione di

²Fai attenzione che il Peskin Physical law should have mathematical beauty. Peskin:1995ev definisce tale operatore come:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (6.4.1)$$

ovviamente essendo un fattore numerico ciò non cambia la fisica, ma in alcune relazioni prese per buone, ad esempio la (6.7.20), escono diverse di un fattore 2 se ti metti a fare effettivamente i conti con le convenzioni scritte in queste note.

Dirac):

$$\sigma^{0i} = \frac{i}{2} [\gamma^0, \gamma^i] = -i \begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix} = 2M^{0i} \quad (6.4.5)$$

$$\sigma^{ij} = \frac{i}{2} [\gamma^i, \gamma^j] = \varepsilon^{ijk} \begin{bmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{bmatrix} = \varepsilon^{ijk} \Sigma^k = 2M^{ij} \quad (6.4.6)$$

in cui abbiamo definito la matrice Σ , che spesso nei libri viene chiamata *matrice di spin*:

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (6.4.7)$$

è chiaro che questa rappresentazione (6.4.6), di Dirac, del gruppo di Lorentz è *riducibile*. Se ad esempio utilizzassimo la rappresentazione di chiralità la non riducibilità non sarebbe visibile in modo immediato. Questa non irriducibilità in realtà ci piace molto perché possiamo considerare ogni blocco separatamente e scrivere i noti spinori di Dirac:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (6.4.8)$$

in cui ogni componente è uno spinore di Weyl.

6.5 Forme bilineari di spinori di Dirac

Per questa sezione è fondamentale aver prima visto la sezione §F.5 nell'Appendice F. In tale appendice vediamo quali sono le matrici, che chiamiamo solitamente Γ^a e che formano una base, che ci permettono di scrivere combinazioni (forme bilineari), del tipo $\bar{\psi}\Gamma^a\psi$, con ben definite proprietà di trasformazione sotto il gruppo di Lorentz. Le matrici che abbiamo visto sono:

$\mathbb{1}$	(1 matrice)	scalare
γ^μ	(4 matrice)	vettore
$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	(6 matrici antisimm.)	tensore di rango 2
$\gamma^\mu \gamma^5$	(4 matrici)	pseudo-vettore
γ^5	(1 matrice)	pseudo-scalare

e il set completo di forme bilineari è di conseguenza:

$\bar{\psi}\psi$	(1)	scalare
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	(4)	vettore (o vettore polare)
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	(6)	tensore di rango 2
$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	(4)	pseudo-vettore (o vettore assiale)
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	(1)	pseudo-scalare.

Però, detta così sembra un po' un atto di fede, dobbiamo effettivamente verificare che le quantità, $\bar{\psi}\Gamma^a\psi$ che abbiamo elencato sopra, siano effettivamente oggetti con proprietà di trasformazione ben definiti. Prima di vedere le proprietà di trasformazione delle forme bilineari che abbiamo scritto è necessario capire come trasformi lo spinore $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ sotto trasformazioni di Lorentz.

6.5.1 Trasformazione dello spinore $\bar{\psi}$

Il motivo per cui avevamo introdotto la matrice γ^0 e di conseguenza lo spinore $\bar{\psi}$, era che ci eravamo accorti che la quantità $\psi^\dagger\psi$ non fosse un'invariante per trasformazioni di Lorentz. Infatti, utilizzando le cose imparate nella sezione §6.4 nell'Appendice F possiamo notare come $\psi^\dagger\psi$ si trasformi per trasformazioni di Lorentz. Abbiamo:

$$\psi^\dagger\psi \longrightarrow \psi'^\dagger\psi' = \psi^\dagger S^\dagger(\Lambda)S(\Lambda)\psi \quad (6.5.1)$$

se le matrici dei boost fossero unitarie (delle rotazioni lo sono) $S^\dagger S$ allora sarebbe uguale a $\mathbb{1}$, però sappiamo bene che $S(\Lambda)$ non è unitaria poiché i generatori M^{0i} non sono hermitiani.

Già nel capitolo §4 non ci siamo disperati e abbiamo comunque creato uno spinore $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ tale per cui $\bar{\psi}\psi$ fosse un'invariante. Infatti, preso $\bar{\psi}$ abbiamo che lui si trasforma come:

$$\bar{\psi} \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}' = (\psi^\dagger\gamma^0)' = (\psi^\dagger)'\gamma^0 = \psi^\dagger S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 \quad (6.5.2)$$

$$= \bar{\psi}\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 \quad (6.5.3)$$

ora, per semplicità consideriamo una trasformazione infinitesima (riguarda la relazione (6.4.4) nella sezione §6.4) del tipo:

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \sim \mathbb{1} - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \quad (6.5.4)$$

dove gli $\omega_{\mu\nu}$ sono oggetti completamente antisimmetrici e per cui vale $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Prendendo questa rappresentazione della $S(\Lambda)$ (facendone il complesso coniugato) abbiamo che $\bar{\psi}$ si trasforma come:

$$\bar{\psi} \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}' = \bar{\psi}\gamma^0 \left(\mathbb{1} + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})^\dagger \right) \gamma^0 \quad (6.5.5)$$

$$\bar{\psi} \left((\gamma^0)^2 + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\gamma^0(\sigma^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 \right) \quad (6.5.6)$$

$$\bar{\psi} \left(\mathbb{1} + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\gamma^0(\sigma^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 \right) \quad (6.5.7)$$

in cui abbiamo il termine:

$$\gamma^0(\sigma^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 = -\frac{i}{2}\gamma^0[(\gamma^\nu)^\dagger, (\gamma^\mu)^\dagger]\gamma^0 \quad (6.5.8)$$

$$= -\frac{i}{2}\gamma^0[\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0, \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0]\gamma^0 \quad (6.5.9)$$

$$- \frac{i}{2}\gamma^0(\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 + \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0)\gamma^0 \quad (6.5.10)$$

$$= -\frac{i}{2}(\gamma^0)^2[\gamma^\nu, \gamma^\mu](\gamma^0)^2 \quad (6.5.11)$$

$$= -\sigma^{\nu\mu} \quad (6.5.12)$$

$$= \sigma^{\mu\nu} \quad (6.5.13)$$

dove abbiamo utilizzato la definizione (6.4.2), le proprietà di hermeticità e commutazione delle γ^μ e il fatto che $\sigma^{\mu\nu}$ sia completamente antisimmetrica. Utilizzando quello imparato, la relazione (6.5.13), nella trasformazione (6.5.7) abbiamo finalmente:

$$\bar{\psi} \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}' = \bar{\psi} \left(\mathbb{1} + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \right) \quad (6.5.14)$$

che per una trasformazione finita è:

$$\bar{\psi} \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} = \bar{\psi} S^{-1}(\Lambda) \quad (6.5.15)$$

che ci dice che $\bar{\psi}$ si trasforma, sotto trasformazioni di Lorentz, con $S^{-1}(\Lambda)$. Ci saremmo potuti aspettare che in (6.5.3) il termine $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$ sarebbe diventato $S^{-1}(\Lambda)$, poiché è l'unico modo per cui $\bar{\psi}\psi$ sia un invariante di Lorentz, ricordando che $\psi \rightarrow S(\Lambda)\psi$. La relazione importante da ricordare è:

$$S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0. \quad (6.5.16)$$

6.5.2 Proprietà di trasformazione delle forme bilineari

In questa sottosezione vediamo quali siano effettivamente le proprietà di trasformazione, sotto trasformazioni di Lorentz, degli oggetti indicati all'inizio della sezione §6.5.

Cominciamo a prendere $\bar{\psi}\psi$. Imparato come trasforma $\bar{\psi}$ possiamo facilmente vedere che $\bar{\psi}\psi$ è un'invariante di Lorentz:

$$\bar{\psi}\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \psi^\dagger S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 S(\Lambda) \psi \quad (6.5.17)$$

che, utilizzando quello visto poco fa³:

$$\bar{\psi} \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi} S^{-1}(\Lambda). \quad (6.5.18)$$

porta a:

$$\bar{\psi}\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi} \underbrace{S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)}_{=\mathbb{1}} \psi = \bar{\psi}\psi \quad (6.5.19)$$

ovvero, abbiamo visto che $\bar{\psi}\psi$ è invariante sotto trasformazioni di Lorentz, cosa che dopotutto avevamo già visto studiando le proprietà delle rappresentazioni spinoriali di $SU(2)$ con gli spinori di Weyl.

In modo analogo, preso $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, si può vedere che è un vettore di Lorentz. Infatti si ha:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' \quad (6.5.20)$$

$$\psi^\dagger\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi \quad (6.5.21)$$

$$\bar{\psi} S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi \quad (6.5.22)$$

$$\text{ricordando 6.1.16} \quad (6.5.23)$$

$$\bar{\psi}\gamma^\rho\Lambda^\mu_\rho\psi \quad (6.5.24)$$

$$\bar{\psi}\gamma^\rho(\Lambda^{-1})^\mu_\rho\psi \quad (6.5.25)$$

$$(\Lambda^\mu_\rho)\bar{\psi}\gamma^\rho\psi \quad (6.5.26)$$

che è la tipica trasformazione di un quadrivettore di Lorentz, che appunto si trasforma con la matrice Λ^μ_ρ . Sarà importante l'aver notato questa cosa poiché $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ è una corrente di Noether.

Notiamo anche, che $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ si tratta di un quadrivettore polare, nel senso che, per trasformazioni di parità si ha:

$$\bar{\psi}\gamma^0\psi \xrightarrow{\text{P.}} \bar{\psi}\gamma^0\psi \quad (6.5.27)$$

$$\bar{\psi}\gamma^i\psi \xrightarrow{\text{P.}} -\bar{\psi}\gamma^i\psi \quad (6.5.28)$$

che è la normale relazione di parità per i vettori polari, in cui la componente temporale resta invariata e cambiano di segno tutte le componenti spaziali.

L'oggetto $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ si trasforma come:

$$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}'\frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi' \quad (6.5.29)$$

$$\frac{i}{2}\bar{\psi}S^{-1}(\Lambda)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)S(\Lambda)\psi \quad (6.5.30)$$

³Nel caso delle rotazioni abbiamo $M^{ij} = (M^{ij})^\dagger$ e γ^0 ed M^{ij} commutano (potremmo verificarlo con i calcoli espliciti conoscendo le espressioni matriciali di entrambi), con i boost però, $M^{0j} = -(M^{0j})^\dagger$, e γ^0 anticommuta (anche in questo caso sarebbe verificabile) con M^{0j} , il che rimuove il segno negativo che usciva dall'hermitiano di M^{0j}

abbiamo due termini del tipo $S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu S(\Lambda)$, ma sappiamo che ciascuna matrice γ^μ si trasforma come un vettore per trasformazioni di Lorentz, per cui vale:

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (6.5.31)$$

abbiamo dunque:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^\nu S(\Lambda) = S^{-1}\gamma^\mu S S^{-1}\gamma^\nu S = \Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho \Lambda^\nu_\sigma \gamma^\sigma = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \gamma^\rho \gamma^\sigma \quad (6.5.32)$$

dunque:

$$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \frac{i}{2}\bar{\psi}(\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \gamma^\rho \gamma^\sigma - \Lambda^\nu_\rho \Lambda^\mu_\sigma \gamma^\rho \gamma^\sigma)\psi \quad (6.5.33)$$

$$\frac{i}{2}\bar{\psi}\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma (\gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\rho)\psi \quad (6.5.34)$$

$$\frac{i}{2}\bar{\psi}\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]\psi \quad (6.5.35)$$

$$\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \bar{\psi}\sigma^{\rho\sigma}\psi \quad (6.5.36)$$

che è la legge di trasformazione di un tensore di rango 2.

Possiamo vedere che l'oggetto $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ è uno pseudo-vettore. Cominciamo a vedere che per trasformazioni di Lorentz si trasforma come un vettore. Abbiamo:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \xrightarrow{\text{P.}} \bar{\psi}'\gamma^\mu\gamma^5\psi' \quad (6.5.37)$$

$$\bar{\psi}S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\gamma^5 S(\Lambda)\psi \quad (6.5.38)$$

$$\bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu S S^{-1}\gamma^5 S\psi \quad (6.5.39)$$

$$\bar{\psi}\Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \gamma^5 \psi \quad (6.5.40)$$

$$\text{ricordiamo che } \{\sigma^{\mu\nu}, \gamma^5\} = 0 \quad (6.5.41)$$

$$\Lambda^\mu_\nu \bar{\psi}\gamma^\nu \gamma^5 \psi \quad (6.5.42)$$

ovvero che $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ è un vettore di Lorentz. Vediamo ora cosa otteniamo per trasformazione di parità:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \xrightarrow{\text{P.}} \bar{\psi}'\gamma^\mu\gamma^5\psi' \quad (6.5.43)$$

$$\bar{\psi}S_p^{-1}\gamma^\mu\gamma^5 S_p\psi \quad (6.5.44)$$

$$\bar{\psi}\eta_p^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \eta_p \gamma^0 \psi \quad (6.5.45)$$

$$\bar{\psi}\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^0 \psi \quad (6.5.46)$$

$$\text{ricordiamo che } \{\gamma^0, \gamma^5\} = 0 \quad (6.5.47)$$

$$- \bar{\psi}\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^5 \psi \quad (6.5.48)$$

e a questo punto dobbiamo distinguere i due casi. Se abbiamo $\mu = 0$, allora:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \xrightarrow{\text{P.}} -\bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi \quad (6.5.49)$$

se invece $\mu = i$, allora, per via di $\{\gamma^0, \gamma^i\} = 0$:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \xrightarrow{\text{P.}} \bar{\psi}\gamma^i\gamma^5\psi. \quad (6.5.50)$$

Questo è il tipico comportamento di un vettore (ovviamente intendiamo quadri-vettore, cioè tensore di rango 1) assiale, o pseudovettore, ossia un oggetto che sotto trasformazione di parità cambia di segno nella componente temporale, ma non in quelle spaziali.

Possiamo vedere che l'ultimo elemento che ci resta da studiare, ossia $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ si trasforma come:

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}'\gamma^5\psi' \quad (6.5.51)$$

$$\bar{\psi}S^{-1}(\Lambda)\gamma^5S(\Lambda)\psi \quad (6.5.52)$$

per le trasformazioni di Lorentz proprie (quelle connesse con l'identità) abbiamo:

$$\bar{\psi}'\gamma^5\psi' = \bar{\psi}e^{+\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\gamma^5e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\psi \quad (6.5.53)$$

che, siccome $[\gamma^\mu, \gamma^5] = 0$ e quindi $[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^5] = 0$, porta a:

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi \xrightarrow{\text{T.L.}} \bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (6.5.54)$$

ossia che $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ è un'invariante di Lorentz. Però, possiamo notare che è uno *pseudo*-scalare vedendo che cosa succede con trasformazioni di parità. Infatti, tenendo conto che $S_p = \eta_p\gamma^0$, con η_p parità intrinseca, allora abbiamo:

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi \xrightarrow{\text{P.}} \bar{\psi}'\gamma^5\psi' \quad (6.5.55)$$

$$\psi^\dagger\gamma^0\eta_p^\dagger\gamma^0\gamma^5\eta_p\gamma^0\psi \quad (6.5.56)$$

$$\psi^\dagger\gamma^5\gamma^0\psi \quad (6.5.57)$$

$$\text{ricordiamo } \{\gamma^0, \gamma^5\} = 0 \quad (6.5.58)$$

$$-\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (6.5.59)$$

che ci dimostra il fatto che $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ è uno pseudoscalare.

6.6 Correnti di Noether associate all'equazione di Dirac

Ovviamente non è stato fatto a caso tutto il discorso della sezione §6.5, infatti, utilizziamo le forme bilineari viste o per inserirle nella lagrangiana $\mathcal{L}_D$, che però può contenere solo invarianti di Lorentz, oppure li utilizziamo per "costruire" le correnti di Noether. Date le matrici vettore γ^μ e il pseudovettore $\gamma^\mu\gamma^5$ possiamo formare due correnti:

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad , \quad j_5^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x). \quad (6.6.1)$$

che sono le correnti di Noether che corrispondono alle trasformazioni di fase e di chiralità:

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha}\psi(x) \quad : \quad j^\mu \quad (6.6.2)$$

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x) \quad : \quad j_5^\mu \quad (6.6.3)$$

in cui (6.6.2) è la **trasformazione di simmetria** della lagrangiana $\mathcal{L}_D$ di Dirac e j^μ è la corrente associata che si conserva sempre; invece, (6.6.3) è la **trasformazione chirale** che è una simmetria del termine cinetico di $\mathcal{L}_D$, ma non del termine di massa $\mathcal{L}_D^m$; per questo, j_5^μ è la corrente conservata solo nel caso di $m = 0$.

Possiamo controllare anche che effettivamente siano quantità conservate, ovvero che rispettino un'equazione di continuità, se ψ è soluzione dell'equazione di Dirac. Prendiamo la prima delle (6.6.1):

$$\partial_\mu j^\mu = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \quad (6.6.4)$$

se assumiamo che ψ e $\bar{\psi}$ soddisfino l'equazione di Dirac, ossia che valgano:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad , \quad \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) = 0 \quad (6.6.5)$$

allora abbiamo:

$$\partial_\mu j^\mu = (im\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(-im)\psi = 0 \quad (6.6.6)$$

e dunque, $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ è sempre conservata se ψ è soluzione di Dirac. Quando accoppieremo il campo di Dirac, fermioni carichi, con il campo elettromagnetico, vedremo che j^0 sarà proprio la densità di carica elettrica e j^i la corrente di carica elettrica.

Possiamo vedere facilmente anche la conservazione di j_5^μ , la seconda di (6.6.1):

$$\partial_\mu j_5^\mu = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^5 \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \partial_\mu \psi \quad (6.6.7)$$

anche in questo caso, assumendo la validità di (6.6.5) e ricordando $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ (il che ci dice che scambiare γ^μ con γ^5 induce un segno meno), allora abbiamo:

$$\partial_\mu j_5^\mu = im\bar{\psi}\gamma^5\psi + im\bar{\psi}\gamma^5\psi = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad (6.6.8)$$

infatti, la corrente j_5^μ è detta **corrente assiale** ed è conservata solo se la massa è nulla; cosa non troppo sorprendente sapendo che γ^5 è collegata alla chiralità e alla trattazione di sistemi mass-less. Infatti diciamo che non possiamo avere termini quadratici dei campi spinoriali, senza derivate, che siano invarianti per trasformazioni di chiralità.

È interessante anche notare che:

$$j_L^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \psi \quad , \quad j_R^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \psi \quad (6.6.9)$$

nel caso di $m = 0$, sono due correnti che si conservano separatamente, corrispondono alle correnti di fermioni sinistrorsi e destrorsi e non si mescolano mai.

Vedremo nel capitolo §10 che richiedere l'invarianza dell'intera lagrangiana (cinetico + massa), ad esempio per trasformazioni di fase, ci porterà a dover introdurre altri campi, in quel caso sarà il campo elettromagnetico A^μ . Ciò è una cosa generale.

6.7 Soluzioni dell'equazione

I riferimenti per questa sezione sono Physical law should have mathematical beauty. Kaku:1993ym, Peskin:1995ev e sarà necessario nel corso del capitolo aver appreso e ripassato le nozioni discusse nelle sezioni §3.5.5 e §3.5.6. Analizziamo in questa sezione le soluzioni dell'equazione di Dirac (6.1.1), che ci interessano poiché, ricordiamo che ogni sistema fisico è una realizzazione di una rappresentazione del gruppo di Lorentz, i campi spinoriali rappresentano particelle fermioniche. Ovviamente cercheremo le soluzioni per campo libero, non avendo incluso nell'equazione alcuna interazione. Ci aspettiamo, inoltre, che l'equazione (6.1.1) ammetta soluzioni che siano combinazioni lineari di onde piane⁴. Abbiamo anche visto che il campo ψ ha una struttura spinoriale a 4 componenti, per cui in generale possiamo scrivere:

$$\psi_s(x) = \begin{cases} u_s(\vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} \\ v_s(\vec{p}) e^{+ip^\mu x_\mu} \end{cases} \quad (6.7.1)$$

in cui $p^\mu = (E, \vec{p})$ è il quadrimpulso (associato al sistema) della Relatività Speciale e per cui vale $p^2 = E^2 - |\vec{p}|^2$. Notiamo che anche $u_s(p)$ e $v_s(p)$ sono spinori a 4 componenti (sono loro che mantengono la natura spinoriale di ψ) e il loro indice s è un indice a 2 valori, legato allo spin associato

⁴Possiamo dirlo dal fatto che non ci sia un termine potenziale, ma soprattutto dalla forma dell'equazione differenziale perché infatti ci dice che la derivata del campo, moltiplicata per una matrice, $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi$ dev'essere uguale al campo stesso moltiplicato per una costante m . Per questo diciamo che le soluzioni sono esponenziali complessi.

allo spinore. Una generica soluzione dell'equazione (6.1.1) sarà dato da una generica combinazione lineare di (6.7.1) (così come avevamo per le onde). Vediamo che sono legati al tri-impulso, poiché abbiamo la relazione di mass-shell che lega $p^0 = E$ a $\vec{p}$, per cui abbiamo che l'energia è legata a $\vec{p}$. Noi considereremo sempre casi con $p^0 = E > 0$ e per cui consideriamo sia $e^{-ip^\mu x_\mu}$ sia $e^{+ip^\mu x_\mu}$ (il segno "-" dell'energia lo mettiamo fuori).

Se proviamo ad inserire la (6.7.1) nell'equazione di Dirac, usando la notazione di Feynmann descritta nella sezione §F.1 dell'Appendice F, troviamo:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) u_s(p) e^{-ip_\mu x^\mu} = 0 \implies (\gamma^\mu p_\mu - m) u_s(p) e^{-ip_\mu x^\mu} = 0 \quad (6.7.2)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) v_s(p) e^{+ip_\mu x^\mu} = 0 \implies (-\gamma^\mu p_\mu - m) v_s(p) e^{+ip_\mu x^\mu} = 0 \quad (6.7.3)$$

visto che la derivata ∂_μ agisce solo sull'esponenziale e non sugli spinori, dipendenti da p . Abbiamo dunque:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u_s(p) = 0 \implies (\not{p} - m) u_s(p) = 0 \quad (6.7.4)$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m) v_s(p) = 0 \implies (\not{p} + m) v_s(p) = 0 \quad (6.7.5)$$

che sono due condizioni che $u_s(p)$ e $v_s(p)$ devono soddisfare.

Possiamo cercare la forma generale degli spinori $u(\vec{p})$ e $v(\vec{p})$. Un caso rilevante, è il caso in cui ci mettiamo nel sistema di riferimento di riposo⁵. In tale sistema abbiamo:

$$p^\mu = (m, \vec{0}) = (p^0, \vec{0}) \quad (6.7.6)$$

in cui indichiamo con m la massa di riposo⁶, che non in unità naturali sarebbe mc^2 . Qui scegliamo come base per gli spinori u_s e v_s i quadrivettori:

$$u_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.7.7)$$

$$v_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.7.8)$$

Definiamo la base in questo modo perché suggerito da chi già sa come si formerà la teoria e con queste definizioni ci saranno dei risultati che assumeranno una forma più carina.

⁵Nota che possiamo farlo poiché stiamo considerando campi le cui eccitazioni sono particelle fermioniche massive.

⁶Per una particella in movimento avremmo $p^0 = E = \gamma mc^2$.

Notiamo che per formare gli spinori u_s e v_s abbiamo semplicemente utilizzato come base un'estensione a 4 dimensioni dei due spinori, che avevamo indicato con $\chi^\uparrow$ e $\chi^\downarrow$, della Meccanica Quantistica.⁷ Anche il fatto che l'indice s possa assumere soltanto due valori è perfettamente consistente con il fatto che ψ descriva un sistema di spin $1/2$, con due possibili stati fisici, uno "up" e uno "down". Facciamo solo attenzione al fatto che ψ può essere scritto come $u_s(p)e^{-ip^\mu x_\mu}$ oppure come $v_s(p)e^{+ip^\mu x_\mu}$, e in ciascuno dei due casi devono esistere (lo abbiamo appena visto definendo $u_{1,2}$ e $v_{1,2}$) i due possibili stati up e down, e dunque 4 stati possibili. Il fatto che ci sembri di aver raddoppiato le condizioni sullo spin, rispetto la MQ, è dato dal fatto che non stiamo studiando sistemi scalari, bensì spinoriali, ed è proprio la presenza dello spin ad includere nelle soluzioni dell'equazione di Dirac non solo i campi con energia positiva (con due stati di spin), ma anche quelli ad energia negativa (con altri due stati di spin). Ci sono entrambi i segni dell'energia perché abbiamo la relazione di mass-shell inglobata nella teoria, poiché è portata dentro dal gruppo di Lorentz.

Notiamo ancora una cosa importante. Se prima interpretavamo il termine $e^{-ip^\mu x_\mu}$ come un'onda entrante e $e^{+ip^\mu x_\mu}$ come un'onda uscente, ora li interpretiamo come $e^{-ip^\mu x_\mu}$ il termine di particella con energia positiva (ad esempio) e $e^{+ip^\mu x_\mu}$ come il termine di particella ad energia negativa. Entrambe le soluzioni (energia positiva e negativa) sono già di base inglobate nella teoria per via del fatto che costruiamo le equazioni di campo basandoci sulle invarianze del gruppo di Poincaré, e dunque della Relatività Speciale. In più esse ci sono sempre entrambe e non posso eliminarle, proprio perché la relazione di mass-shell le considera entrambe e noi con la rappresentazione spinoriale del gruppo di Lorentz siamo in una rappresentazione irriducibile. Quindi, quando facciamo una teoria quantistica e relativistica ci sono, per costruzione, fin dall'inizio sia le particelle che le antiparticelle.

Ovviamente non vogliamo vivere sempre nel sistema di riferimento di riposo, ma la Fisica che ci piace avviene in sistemi di riferimento generici. Operiamo un boost su $u_s(0)$ e $v_s(0)$ in modo da portarli dal sistema di riferimento di riposo ad uno generico, in cui l'impulso del sistema è $p^\mu = (E, \vec{p})$. Occorre però ricordare come possiamo rappresentare una trasformazione di boost. Possiamo dare una rappresentazione matriciale di $S(\Lambda)$ in una direzione generica $\vec{n}$. Per farlo, conviene utilizzare la rappresentazione del gruppo di Lorentz $SO(3, 1)$ data da $SL(2, \mathbb{C})$, che appunto fornisce una rappresentazione bidimensionale e spinoriale. La rappresentazione che fornisce $SL(2, \mathbb{C})$ è data da matrici 2x2 della forma:

$$S(\Lambda) = e^{i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \pm i\vec{\eta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \quad (6.7.10)$$

⁷Ricordiamoci che erano:

$$\chi^\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.7.9)$$

in cui ci sono sia le rotazioni che i boost. Abbiamo il vettore $\vec{\eta} = |\vec{\eta}|\hat{n} = \eta \hat{n}$. Nel nostro caso siamo interessati ad un boost, per cui utilizziamo solamente i generatori associati, ossia $\pm \vec{\eta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}$, e abbiamo:

$$S(\Lambda) \longrightarrow e^{\pm \vec{\eta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \quad (6.7.11)$$

$$e^{\pm \frac{\vec{\eta}}{2} \cdot \vec{\sigma}} \quad (6.7.12)$$

$$= \mathbb{1} + \left(\pm \frac{\vec{\eta}}{2} \cdot \vec{\sigma} \right) + \frac{1}{2} \left(\pm \frac{\vec{\eta}}{2} \cdot \vec{\sigma} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\pm \frac{\vec{\eta}}{2} \cdot \vec{\sigma} \right)^3 + \dots \quad (6.7.13)$$

$$= \mathbb{1} \cosh \frac{\eta}{2} \pm \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sinh \frac{\eta}{2} \quad (6.7.14)$$

in cui il primo termine ($\mathbb{1} \cosh \frac{\eta}{2}$) è un termine diagonale che raccoglie tutte le potenze pari in cui $(\sigma^i)^{2n} = \mathbb{1} \quad \forall i$, mentre il secondo è un termine off-diagonale e raccoglie tutte le potenze dispari in cui $(\sigma^i)^{2n+1} = \sigma^i \quad \forall i$. Passando alla rappresentazione di $SO(3,1)$ data dalle matrici γ^μ (vedi l'Appendice F), in cui i generatori dei boost sono dati da $\frac{1}{2}\sigma^{0i}$ il ragionamento è lo stesso. Infatti, in tale rappresentazione abbiamo:

$$M^{0i} = K^i = \frac{1}{2}\sigma^{0i} = -\frac{i}{2} \begin{vmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^i] \quad (6.7.15)$$

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\omega_{0i}\sigma^i} \quad (6.7.16)$$

in cui i parametri ω_{0i} possono essere scritti in forma esplicita tramite la rapidità:

$$\vec{\eta} = (\omega^{01}, \omega^{02}, \omega^{03}) \quad (6.7.17)$$

e ricordiamo che η è la quantità additiva per boost successivi. Ad esempio, per un boost lungo la direzione z abbiamo:

$$K^3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.7.18)$$

e conseguentemente:

$$S(\Lambda) = e^{\pm \eta_{03} \cdot K^3} = \mathbb{1} \cosh \frac{\eta_{03}}{2} - i K^3 \sinh \frac{\eta_{03}}{2}. \quad (6.7.19)$$

Torniamo al risultato che abbiamo trovato per una direzione generica (6.7.14) e scriviamolo esplicitamente in forma matriciale (puoi vedere i conti espliciti e un'appunto sulla convenzione nel file di conti):

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \cosh \frac{\eta}{2} & \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sinh \frac{\eta}{2} \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sinh \frac{\eta}{2} & \mathbb{1} \cosh \frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \quad (6.7.20)$$

dai legami tra rapidità e massa di riposo ed energia di un sistema visti nell'Appendice E, ossia:

$$\cosh \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \quad , \quad \sinh \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \quad (6.7.21)$$

possiamo riscrivere la matrice $S(\Lambda)$ come:

$$S(\Lambda) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (6.7.22)$$

$$= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{E+m} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (6.7.23)$$

in cui abbiamo usato:

$$\sqrt{\frac{E-m}{E+m}} = \frac{|\vec{p}|}{E+m} \quad , \quad |\vec{p}| \cdot \hat{n}. \quad (6.7.24)$$

Ora, applichiamo il boost (6.7.23) agli spinori di base nel sistema di riferimento di riposo, così da portarli in un sistema di riferimento generico, in cui il loro impulso è p . Indichiamo:

$$\chi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \chi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.7.25)$$

$$\phi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \phi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.7.26)$$

Applicando $S(\Lambda)$ agli spinori $u_s(0)$ e $v_s(0)$ otteniamo:

$$u_s(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi^s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^s \end{pmatrix} \quad (6.7.27)$$

$$v_s(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \phi^s \\ \phi^s \end{pmatrix} \quad (6.7.28)$$

in cui attenzione, abbiamo fissato la normalizzazione di $u_s(p)$ e $v_s(p)$ senza un pezzo $1/\sqrt{2m}$, per convenzione, che in base alle relazioni viste in precedenza saremmo portati a dire esserci. Si veda la sezione §6.7.1 per motivazioni.

Possiamo "facilmente" verificare che $u_s(p)$ e $v_s(p)$ soddisfano le relazioni:

$$(\not{p} - m)u_s(p) = 0 \quad (6.7.29)$$

$$(\not{p} + m)v_s(p) = 0. \quad (6.7.30)$$

Per verificarlo dobbiamo ricordare che:

$$E - m - \frac{|\vec{p}|^2}{E+m} = 0 \quad (6.7.31)$$

e notare che:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \sigma^1 p^1 + \sigma^2 p^2 + \sigma^3 p^3 = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \quad (6.7.32)$$

e di conseguenza:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \begin{pmatrix} p_z^2 + (p_x - ip_y)(p_x + ip_y) & (p_x + ip_y)p_z - p_z(p_x + ip_y) \\ p_z(p_x + ip_y) - (p_x - ip_y)p_z & (p_x + ip_y)(p_x - ip_y) + p_z^2 \end{pmatrix} \quad (6.7.33)$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{p}^2 & 0 \\ 0 & \vec{p}^2 \end{pmatrix} \quad (6.7.34)$$

$$= \mathbb{1} \cdot \vec{p}^2. \quad (6.7.35)$$

Utilizzando (6.7.31) e (6.7.35) possiamo vedere che (dimenticando il fattore $\sqrt{E+m}$ che sarebbe davanti a tutto):

$$(\not{p} - m) u_s = (E\gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - m\mathbb{1}) \begin{pmatrix} \chi^s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^s \end{pmatrix} \quad (6.7.36)$$

$$= \left[E \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} - \vec{p} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \chi^s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^s \end{pmatrix} \quad (6.7.37)$$

$$= \begin{pmatrix} E - m & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^s \end{pmatrix} \quad (6.7.38)$$

$$= \begin{pmatrix} \left[E - m - \frac{\vec{p}^2}{E+m} \right] \chi^s \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \left(1 - \frac{E+m}{E+m} \right) \chi^s \end{pmatrix} \quad (6.7.39)$$

$$= 0. \quad (6.7.40)$$

Analogamente si dimostra che:

$$(\not{p} + m) v_s(p) = 0. \quad (6.7.41)$$

Appunto importante è che noi abbiamo utilizzato la rappresentazione di Dirac per le matrici γ^μ , ma ovviamente si giunge allo stesso risultato anche utilizzando la rappresentazione di Weyl.

Notiamo anche che (6.7.27) e (6.7.28) sono ancora soluzioni dell'equazione di Dirac, anche se moltiplicate per una fase globale $e^{i\alpha}$.

Prima di parlare di normalizzazioni vediamo che avremmo potuto utilizzare un piccolo trucco per arrivare ad un'espressione di $u_s(p)$ (e $v_s(p)$) in un generico sistema di riferimento⁸. Infatti, valendo l'identità:

$$(\not{p} - m)(\not{p} + m) = 0 \quad (6.7.42)$$

⁸Questa cosa potrebbe tornare utile soprattutto allo scritto del corso di *Fondamenti di Teoria Quantistica dei Campi*.

dimostrabile semplicemente:

$$(\not{p} - m)(\not{p} + m) = \not{p}\not{p} - m^2 \quad (6.7.43)$$

$$= \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu - m^2 \quad (6.7.44)$$

$$= \gamma^\mu \gamma^\nu \underbrace{p_\mu p_\nu}_{\text{simmetrico}} - m^2 \quad (6.7.45)$$

$$= \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\mu p_\nu - m^2 \quad (6.7.46)$$

$$= p_\mu p_\nu \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} - m^2 \quad (6.7.47)$$

$$= p^2 - m^2 = 0 \quad (6.7.48)$$

otteniamo:

$$(\not{p} - m) \underbrace{(\not{p} + m)u_s(0)} = 0 \quad , \quad s = 1, 2 \quad (6.7.49)$$

e ricordando che:

$$(\not{p} - m)u_s(p) = 0 \quad (6.7.50)$$

possiamo porre:

$$u_s(p) = C(\not{p} + m)u_s(0) \quad (6.7.51)$$

così che:

$$u_s(p) = C \begin{pmatrix} E + m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E + m \end{pmatrix} u_s(0) \quad , \quad E = p^0 > 0 \quad (6.7.52)$$

che con l'opportuna scelta:

$$C = \frac{1}{\sqrt{E + m}} \quad (6.7.53)$$

porta allo stesso risultato visto prima, ossia (6.7.27).

6.7.1 Normalizzazione spinori

Possiamo fissare la normalizzazione degli spinori $u_s(p)$ e $v_s(p)$ richiedendo che:

$$u_s^\dagger(p)u_{s'}(p) = 2E\delta_{ss'} \quad (6.7.54)$$

$$v_s^\dagger(p)v_{s'}(p) = 2E\delta_{ss'} \quad (6.7.55)$$

che possiamo effettivamente verificare esplicitamente (ricordando che $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^\dagger$):

$$u_s^\dagger(p)u_{s'}(p) = (E+m) \begin{pmatrix} \chi_s^\dagger & \chi_s^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{s'} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_{s'} \end{pmatrix} \quad (6.7.56)$$

$$= (E+m) \left[\chi_s^\dagger \chi_{s'} + \chi_s^\dagger \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{(E+m)^2} \chi_{s'} \right] \quad (6.7.57)$$

$$= (E+m) \delta_{ss'} \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{(E+m)^2} \right) \quad (6.7.58)$$

$$= (E+m) \frac{E^2 + m^2 + 2mE + \vec{p}^2}{(E+m)^2} \delta_{ss'} \quad (6.7.59)$$

$$\text{ricordiamo } \vec{p}^2 = E^2 - m^2 \quad (6.7.60)$$

$$= \frac{2E(E+m)}{(E+m)} \delta_{ss'} \quad (6.7.61)$$

$$= 2E \delta_{ss'} \quad (6.7.62)$$

e analogamente per $v_s^\dagger(p)v_{s'}(p)$. Possiamo notare che, la densità di probabilità, ossia $\psi^\dagger\psi$, non è un'invariante di Lorentz, ma si trasforma come la componente 0 di un quadrivettore (j^μ), in accordo con il fatto che $\psi^\dagger\psi d^3x$ sia lo stesso in ogni sistema di riferimento inerziale; ciò che accade è che se il volume V subisce una contrazione relativistica, allora $\psi^\dagger\psi$ si dilata e compensa la variazione di V . Ne riparleremo quando tratteremo la normalizzazione delle soluzioni dell'equazione di Dirac.

A questo punto possiamo definire gli spinori aggiunti $\bar{u}_s$ e $\bar{v}_s$ come:

$$\bar{u}_s(p) = u_s^\dagger(p)\gamma^0 \quad (6.7.63)$$

$$\bar{v}_s(p) = v_s^\dagger(p)\gamma^0 \quad (6.7.64)$$

per cui valgono:

$$\bar{u}_s(p) (\not{p} - m) = 0 \quad (6.7.65)$$

$$\bar{v}_s(p) (\not{p} + m) = 0 \quad (6.7.66)$$

come si può provare prendendo le relazioni hermitiano-coniugate di:

$$(\not{p} - m) u_s(p) = 0 \quad (6.7.67)$$

$$(\not{p} + m) v_s(p) = 0 \quad (6.7.68)$$

infatti:

$$(\not{p} - m) u_s(p) \implies u_s^\dagger \left((\gamma^\mu)^\dagger p_\mu - m \right) = 0 \quad (6.7.69)$$

$$\text{ricordiamo } (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (6.7.70)$$

$$\left[u_s^\dagger (\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 p_\mu - m) = 0 \right] \gamma^0 \quad (6.7.71)$$

$$u_s^\dagger \gamma^0 \not{p} \gamma^0 - u_s^\dagger m \gamma^0 = 0 \quad (6.7.72)$$

$$\bar{u}_s (\not{p} - m) = 0 \quad (6.7.73)$$

e analogamente per $\bar{v}_s$.

Come per $u_s^\dagger$ e $v_s^\dagger$ possiamo vedere che le condizioni di normalizzazione per $\bar{u}_s u_s$ e $\bar{v}_s v_s$:

$$\bar{u}_s(p) u_{s'}(p) = 2m \delta_{ss'} \quad (6.7.74)$$

$$\bar{v}_s(p) v_{s'}(p) = -2m \delta_{ss'} \quad (6.7.75)$$

che possiamo notare essere una condizione di normalizzazione Lorentz invariante, poiché coinvolge $\bar{\psi}$ e ψ . Vediamo:

$$\bar{u}_s(p) u_{s'}(p) = (E + m) \left(\chi_s^\dagger, \chi_s^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{s'} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi_{s'} \end{pmatrix} \quad (6.7.76)$$

$$= (E + m) \left(\chi_s^\dagger, -\chi_s^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \right) \begin{pmatrix} \chi_{s'} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi_{s'} \end{pmatrix} \quad (6.7.77)$$

$$= (E + m) \left(\chi_s^\dagger \chi_{s'} - \chi_s^\dagger \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{(E + m)^2} \chi_{s'} \right) \quad (6.7.78)$$

$$= \delta_{ss'} (E + m) \left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{(E + m)^2} \right) \quad (6.7.79)$$

$$\text{usiamo ancora } E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 \quad (6.7.80)$$

$$= \delta_{ss'} (E + m) \frac{E^2 + 2mE + m^2 + m^2 - E^2}{(E + m)^2} \quad (6.7.81)$$

$$= \delta_{ss'} \frac{2m(E + m)}{(E + m)} \quad (6.7.82)$$

$$= 2m \delta_{ss'} \quad (6.7.83)$$

e analogamente per $\bar{v}_s v_{s'}$. Nota che il $2m$ esce fuori perché avevamo rimosso $\sqrt{2m}$ nella normalizzazione delle soluzioni (6.7.27) e (6.7.28), ma è semplice convenzione.

È facile dimostrare la relazione di ortogonalità tra gli spinori u_s e v_s , ossia vedere che vale la relazione:

$$\bar{u}_s(p) v_{s'}(p) = \bar{v}_s(p) u_{s'}(p) = 0. \quad (6.7.84)$$

Limite non relativistico Possiamo notare che nel limite in cui $|\vec{p}| \ll m$, il rapporto $\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m}$ è molto piccolo, quindi lo spinore $u_s(p)$ avrà le componenti superiori (χ_s) largamente dominanti, che vengono chiamate grandi componenti. Per lo spinore $v_s(p)$, nella stessa situazione, le componenti dominanti sono quelle inferiori (ϕ_s). Dunque nel limite non relativistico ritroviamo le nozioni di Meccanica Quantistica non relativistica che già conosceavamo.

6.7.2 Normalizzazione soluzioni

Avendo visto quali sono le condizioni di normalizzazione degli spinori, possiamo vedere quali sione effettivamente le condizioni sulle soluzioni. Consideriamo le soluzioni ad energia positiva, di tipo u_s :

$$\psi_p^{(s)}(x) = N u_s(p) e^{-ip^\mu x_\mu} \quad (6.7.85)$$

la costante di normalizzazione N è fissabile richiedendo che in un volume infinito si abbia:

$$\int d^3x \psi_p^{(s)\dagger}(x) \psi_{p'}^{(s')}(x) = \delta_{ss'} \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \quad (6.7.86)$$

da cui ricaviamo:

$$\int d^3x \psi_p^{(s)\dagger}(x) \psi_{p'}^{(s')}(x) = |N|^2 u_s^\dagger(\vec{p}) u_{s'}(\vec{p}') \int d^3x e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}} \quad (6.7.87)$$

$$= |N|^2 2E \delta_{ss'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \quad (6.7.88)$$

e dunque:

$$|N| = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}}. \quad (6.7.89)$$

Una prova analoga vale per le soluzioni di tipo v_s .

Come già accennato, la normalizzazione che abbiamo imposto è giustificata dal fatto che, come abbiamo già visto, $\psi^\dagger \psi$ non è un'invariante di Lorentz, ma varia sotto trasformazioni di Lorentz come la componente temporale di un quadrivettore, avendo $dV \psi^\dagger \psi$, se il volume V si dilata, allora $\psi^\dagger \psi$ si contrae per compensare la variazione di V , in modo da mantenere invariante $dV \psi^\dagger \psi$ per ogni sistema di riferimento inerziale (in moto relativo rispetto all'altro). Se il volume V va ad infinito, allora $\psi^\dagger \psi$ si contrae in modo da garantire che l'integrale su tutto lo spazio sia una delta di Dirac.

6.7.3 Interpretazione soluzioni

Vediamo in questa sottosezione come interpretiamo le soluzioni (6.7.1) dell'equazione di Dirac. Potremmo ripetere cose già accennate nella sezione §6.7.

Facciamo solo attenzione che non possiamo ancora parlare in modo lecito di particelle o antiparticelle, potremo farlo solo quando avremo quantizzato

il campo, poiché siamo ancora in presenza di un campo classico. Però, quello che stiamo facendo noi è: imporre le simmetrie del sistema e dire che gli stati fisici sono dati da una qualsiasi delle rappresentazioni irriducibili del gruppo di simmetria del sistema, nel nostro caso, del gruppo di Poincaré. Quella che facciamo noi è una procedura molto potente e generale, talmente potente che è valida a priori, sia che siamo in presenza di un campo classico che di uno quantistico.

Ad ogni modo, le soluzioni di tipo $\psi = u_{1,2}e^{-ip^\mu x_\mu}$ rappresentano, in modo relativistico, un campo libero di spin $1/2$, quadrimpulso p^μ , massa m ed energia E . Infatti, $e^{-ip^\mu x_\mu} = e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$ è la tipica forma di un'onda piana che si propaga nella direzione $\vec{x}$ in avanti nel tempo. Le due proiezioni di spin del campo sono date dagli spinori bidimensionali che abbiamo chiamato χ_1 e χ_2 , rispettivamente up e down.

In modo analogo, le soluzioni di tipo $\psi = v_{1,2}e^{+ip^\mu x_\mu}$ hanno le stesse caratteristiche delle precedenti, ma segno opposto per tutte le componenti di p^μ , vuol dire che abbiamo $p^\mu \rightarrow -p^\mu$ e lo stesso vale per le componenti dello spin. Avendo $-p^\mu$ l'onda si propaga in direzione $-\vec{x}$ e $-t$, cioè evolve indietro nel tempo. L'evoluzione indietro nel tempo avviene a meno che non si assuma $E < 0$. Dirac interpretò queste soluzioni ad energia negativa come campi che rappresentavano antiparticelle, cioè oggetti con la stessa energia, impulso e spin delle soluzioni $u_{1,2}e^{-ip^\mu x_\mu}$, ma con carica opposta. La prova sperimentale di questa interpretazione arrivò nel 1932 da Anderson, che scoprì il positrone, 4 anni dopo la congettura di Dirac. Facciamo però attenzione che il fatto che parliamo di particella (energia positiva) e antiparticella (energia negativa) questo non è legato al fatto che uno spinore sia left o right sono due discorsi completamente differenti, faremo maggiore chiarezza su parti left e right di uno spinore nella sezione §6.8.2.

Notiamo che in Meccanica Quantistica, o banalmente in Meccanica Classica, potevamo rimuovere una delle due soluzioni che trovavamo da equazioni di secondo grado, banalmente imponendo delle condizioni iniziali. Ad esempio, nelle buche di potenziale risolvendo l'equazione di Schrodinger trovavamo degli esponenziali entranti o uscenti, ma potevamo eliminare una delle due soluzioni semplicemente dicendo di non avere l'onda riflessa; oppure, anche nello studio del moto uniformemente accelerato avevamo equazioni di secondo grado nel tempo, ma eliminavamo le soluzioni con $t < 0$ banalmente chiedendo che il tempo scorresse in avanti. Ora, che stiamo costruendo la Teoria Quantistica dei Campi, non possiamo eliminare le soluzioni negative che vengono da $E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$ imponendo a mano dall'esterno delle condizioni, l'unica cosa che imponiamo sono le invarianti e le simmetrie del sistema, ma tutto ciò che ne consegue ce lo dobbiamo tenere.

Notiamo anche che nel formalismo relativistico lo spin è già compreso nella teoria senza che noi dobbiamo fare nulla; nella Meccanica Quantistica non relativistica non era così, infatti, lo avevamo dovuto aggiungere ad hoc a posteriori in modo da spiegare la degenerazione che incontravamo studiando

alcuni fenomeni, come Stern-Gerlach o l'effetto Zeeman anomalo.

6.7.4 Proiettori su stati ad energia positiva o negativa

Abbiamo visto che le quantità $\bar{u}_s(p)u_{s'}(p)$ e $\bar{v}_s(p)v_{s'}(p)$ sono numeri, vedi le relazioni (6.7.74) e (6.7.75). Però, non ci siamo chiesti quale tipo di informazione fisica possa essere contenuta in questi prodotti. Notiamo che $u_{s'}(p)\bar{u}_s(p)$ e $v_{s'}(p)\bar{v}_s(p)$ sono matrici 4x4 e ci diamo degli indici α e β . Definiamo gli operatori:

$$[\Lambda_+(\vec{p})]_{\alpha\beta} = \sum_{s=1,2} \frac{u_\alpha^s(\vec{p})\bar{u}_\beta^s(\vec{p})}{2m} \quad (6.7.90)$$

$$[\Lambda_-(\vec{p})]_{\alpha\beta} = - \sum_{s=1,2} \frac{v_\alpha^s(\vec{p})\bar{v}_\beta^s(\vec{p})}{2m}. \quad (6.7.91)$$

Applicando (6.7.90) allo spinore $u_{s'}(p)$ otteniamo:

$$\Lambda_+(\vec{p})u^{s'}(\vec{p}) = \sum_{s,\beta} \frac{u_\alpha^s(\vec{p})\bar{u}_\beta^s(\vec{p})u_\beta^{s'}(\vec{p})}{2m} \quad (6.7.92)$$

$$= \sum_s \frac{u_\alpha^s(\vec{p})2m\delta_{ss'}}{2m} \quad (6.7.93)$$

$$= u^{s'}(\vec{p}) \quad (6.7.94)$$

mentre se lo applichiamo a $v^{s'}(p)$ otteniamo:

$$\Lambda_+(\vec{p})v^{s'}(\vec{p}) = 0 \quad (6.7.95)$$

per via dell'ortogonalità di u e v . Inoltre possiamo vedere i proiettori sono idempotenti, ossia sono tali che:

$$[\Lambda_+(\vec{p})]^2 = \frac{1}{4m^2} \sum_{s,\rho} u_\alpha^s(\vec{p})\bar{u}_\rho^s(\vec{p}) \sum_{s'} u_\rho^{s'}(\vec{p})\bar{u}_\beta^{s'}(\vec{p}) \quad (6.7.96)$$

$$= \frac{1}{4m^2} \sum_{s,s',\rho} u_\alpha^s(\vec{p}) \underbrace{\bar{u}_\rho^s(\vec{p})u_\rho^{s'}(\vec{p})}_{2m\delta_{ss'}} \bar{u}_\beta^{s'}(\vec{p}) \quad (6.7.97)$$

$$= \frac{1}{2m} \sum_s u_\alpha^s(\vec{p})\bar{u}_\beta^{s'}(\vec{p}) \quad (6.7.98)$$

$$= \Lambda_+(\vec{p}) \quad (6.7.99)$$

e diciamo che Λ_+ è un proiettore su stati ad energia positiva. Notiamo che vale:

$$(\not{p} - m) \Lambda_+(\vec{p}) = 0 \quad (6.7.100)$$

come conseguenza di (6.7.29). Se ricordiamo il trucchetto (6.7.42) possiamo rappresentare $\Lambda_+(\vec{p})$ come:

$$\Lambda_+(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m} \quad (6.7.101)$$

che chiaramente soddisfa tutte le proprietà di cui sopra.

Per la definizione (6.7.91) possiamo fare gli stessi discorsi di Λ_+ , ma in questo caso l'operatore $\Lambda_-(\vec{p})$ proietta su stati ad energia negativa, o meglio su stati di tipo v_s . In questo caso possiamo rappresentarlo come:

$$\Lambda_-(\vec{p}) = \frac{-\not{p} + m}{2m} \quad (6.7.102)$$

Notiamo anche che valgono le seguenti proprietà. La relazione di completezza:

$$\Lambda_+(\vec{p}) + \Lambda_-(\vec{p}) = \mathbb{1} \quad (6.7.103)$$

che si può facilmente vedere da:

$$\Lambda_+(\vec{p}) + \Lambda_-(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m} + \frac{-\not{p} + m}{2m} = \mathbb{1} \quad (6.7.104)$$

e la relazione di ortogonalità:

$$\Lambda_+(\vec{p})\Lambda_-(\vec{p}) = \Lambda_-(\vec{p})\Lambda_+(\vec{p}) = 0 \quad (6.7.105)$$

visibile da:

$$\frac{(\not{p} + m)(-\not{p} + m)}{4m^2} = \frac{-\not{p}\not{p} + m^2}{4m^2} \stackrel{\not{p}\not{p}=m^2}{=} \frac{-m^2 + m^2}{4m^2} = 0 \quad (6.7.106)$$

6.8 Chiralità ed elicità

In questa sezione parleremo della chiralità e dell'elicità, del loro ruolo nello studio dell'equazione di Dirac e il loro collegamento con la massa delle particelle.

6.8.1 Autostati e proiettori di chiralità

Utilizziamo per questa sezione la rappresentazione di Weyl:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (6.8.1)$$

Nella sezione §4.4.3 avevamo definito i proiettori:

$$P_R = \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}, \quad P_L = \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2} \quad (6.8.2)$$

che ci consentono di "estrarre" le componenti left e right dello spinore:

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} \quad (6.8.3)$$

e che possiamo notare essere collegati come:

$$P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R \quad (6.8.4)$$

poiché per via del fatto che $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ si ha:

$$P_L \gamma^\mu = \frac{1 - \gamma^5}{2} \gamma^\mu = \frac{\gamma^\mu - \gamma^5 \gamma^\mu}{2} = \frac{\gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5}{2} = \gamma^\mu \frac{1 + \gamma^5}{2} = \gamma^\mu P_R \quad (6.8.5)$$

Abbiamo infatti:

$$\psi_L \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.8.6)$$

$$\psi_R \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_R \end{pmatrix}. \quad (6.8.7)$$

$P_{L,R}$ sono proiettori nel senso che vale $P_{L,R}^2 = P_{L,R}$ e inoltre $P_L + P_R = 1$ con $P_L P_R = P_R P_L = 0$.

La distinzione tra spinori left e right è valida in qualsiasi rappresentazione, come abbiamo visto nell'Appendice F, e in analogia a ψ possiamo definire gli spinori u_L e u_R tramite i proiettori:

$$u_L(\vec{p}) = P_L u(\vec{p}) \quad (6.8.8)$$

$$u_R(\vec{p}) = P_R u(\vec{p}) \quad (6.8.9)$$

da cui possiamo ottenere:

$$\bar{u}_L(\vec{p}) = u_L^\dagger \gamma^0 = \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} u \right)^\dagger \gamma^0 = u^\dagger \frac{1 - \gamma^5}{2} \gamma^0 \quad (6.8.10)$$

$$= u^\dagger \gamma^0 \frac{1 + \gamma^5}{2} = \bar{u}(\vec{p}) P_R \quad (6.8.11)$$

quindi:

$$\bar{u}_L(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}) P_R \quad (6.8.12)$$

$$\bar{u}_R(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}) P_L \quad (6.8.13)$$

6.8.2 Fermioni chiriali ed equazione di Weyl

Studiamo in questa sezione come si riducono le equazioni di Dirac se scriviamo lo spinore ψ nelle sue parti left e right e analizziamo che equazioni abbiamo nel caso massless. Analizziamo il significato e il legame tra chiralità

ed elicità. Potrebbe risultare utile aver ripassato la sezione §3.6.3. Potrebbe sembrare uno studio abbastanza inutile quello di particelle fermioniche, di spin $1/2$, e massless, dal momento che in natura ce ne sono poche, però, come vedremo, lo studio di sistemi di questo tipo è particolarmente rilevante perché è una situazione in cui ci si ritrova nel limite di altissime energie, in cui $E \gg m$ e la massa m è irrilevante.

Un fenomeno è detto **chiriale** quando *non* è identico alla sua immagine speculare, indotta da una trasformazione di parità. Sappiamo bene che nella rappresentazione di Weyl, o rappresentazione chiriale, lo spinore di Dirac ψ è dato da due componenti ψ_L left e ψ_R right che trasformano in modo differente sotto trasformazioni di Lorentz (lo abbiamo visto nella sezione §6.1), e a proposito ricordiamo che ψ_L e ψ_R sono legati attraverso una relazione di complessa coniugazione. Possiamo riscrivere l'equazione di Dirac in termini di ψ_L e ψ_R (utilizziamo la rappresentazione di Weyl per le γ):

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (6.8.14)$$

$$\begin{pmatrix} -m\mathbb{1} & i(\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \\ i(\partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) & -m\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} = 0 \quad (6.8.15)$$

da cui otteniamo:

$$\begin{cases} i(\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi_R(x) - m\psi_L(x) = 0 \\ i(\partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi_L(x) - m\psi_R(x) = 0 \end{cases} \quad (6.8.16)$$

che ci sta in qualche maniera dicendo che la massa "mescola" le componenti left e right nell'equazione di Dirac.

Solo se facciamo il limite $m \rightarrow 0$, ossia guardiamo il caso mass-less, ψ_L e ψ_R si disaccoppiano e otteniamo le equazioni:

$$\begin{cases} i(\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi_R(x) = 0 \\ i(\partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi_L(x) = 0 \end{cases} \quad (6.8.17)$$

che vengono solitamente chiamate **equazioni di Weyl** per particelle a massa nulla. Le equazioni (6.8.17) sono molto importanti poiché permettono di vedere il fatto che l'equazione di Dirac ci sta dicendo che in natura esistono solo due tipi di particelle massless, un tipo sinistrorso e uno destrorso. Possiamo riscrivere l'equazione (6.8.17) ricordando che per particelle libere, che sono autostati dell'impulso, possiamo porre:

$$\psi(x) = \psi(\vec{p})e^{ip^\mu x_\mu} = \psi(\vec{p})e^{-iEt + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \quad (6.8.18)$$

e se la loro massa è nulla anche:

$$E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 \implies E = |\vec{p}| \quad (6.8.19)$$

così che le equazioni (6.8.17) diventano:

$$(E \mp \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi_{R,L}(\vec{p}) = 0 \quad (6.8.20)$$

che scrivendo $E = |\vec{p}|$ e $\vec{p} = |\vec{p}|\hat{p}$, con $\hat{p}$ direzione del moto, diventano:

$$\begin{cases} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \psi_L = -\psi_L \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \psi_R = \psi_R. \end{cases} \quad (6.8.21)$$

Se chiamiamo **operatore di elicità**⁹ l'operatore:

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (6.8.22)$$

allora la riscrittura delle equazioni di Weyl in termini di esso (6.8.21) ci permettono di vedere che una particella destrorsa ha elicità positiva e una particella sinistrorsa ha elicità negativa. Facciamo solo attenzione che le stesse relazioni (6.8.21) per antiparticelle hanno segni scambiati:

$$\begin{cases} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \phi_R = -\phi_R \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \phi_L = \phi_L. \end{cases} \quad (6.8.23)$$

Le equazioni di Weyl (6.8.21) sono molto importanti, esse ci dicono che per particelle libere *massless*, gli spinori ψ_L e ψ_R sono autostati dell'operatore di elicità, ed il loro spin è completamente allineato, o antiallineato, lungo la direzione del moto. È molto importante ricordare che questa interpretazione è valida solo ed esclusivamente per particelle a massa nulla, poiché per $m = 0$ lo spin non è ben definito, a differenza del caso $m \neq 0$.

Possiamo vedere che nel caso $m = 0$ i concetti di chiralità ed elicità coincidono. Infatti, se prendiamo $m = 0$ e indichiamo con ψ_+ una generica soluzione dell'equazione di Dirac, per esempio di tipo u o v , allora l'equazione

⁹Vedi il seguito del capitolo per capire come esso può essere generalizzato anche in 4 dimensioni.

di Dirac (6.1.1) diventa (nota che puoi identificare $i\partial_\mu = p_\mu$):

$$\not{p}\psi_+ = 0 \implies (\gamma^0 E - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}) \psi_+ = 0 \quad (6.8.24)$$

$$\implies \gamma^0 (\gamma^0 |\vec{p}| - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}) \psi_+ = 0 \quad (6.8.25)$$

$$\implies (\mathbb{1} - \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) \psi_+ = 0 \quad (6.8.26)$$

$$\implies \left(\mathbb{1} - \gamma^5 \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \right) \psi_+ = 0 \quad (6.8.27)$$

$$\implies \gamma^5 \left(\mathbb{1} - \gamma^5 \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \right) \psi_+ = 0 \quad (6.8.28)$$

$$\implies \left(\gamma^5 - \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \right) \psi_+ = 0 \quad (6.8.29)$$

$$\implies \gamma^5 = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (6.8.30)$$

in cui in (6.8.27) abbiamo inserito $\gamma^5 \gamma^5 = \mathbb{1}$ e identificato $\vec{\Sigma} = \gamma^5 \gamma^0 \vec{\gamma}$. Il conto ci mostra, sempre con $\vec{\Sigma}$ definita da (6.4.7), che, nel caso $m = 0$, la chiralità (γ^5) e l'elicità:

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (6.8.31)$$

generalizzata in 4 dimensioni coincidono, anche se sono concettualmente diverse. Notiamo solo che, come già accennato, $\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}$ generalizza a 4 dimensioni il prodotto $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$.

Facciamo ora delle osservazioni riguardo chiralità ed elicità nei casi di $m = 0$ ed $m \neq 0$.

L'elicità non è un'invariante di Lorentz, infatti ci dice solo se lo spin e l'impulso della particella sono allineati o antiallineati, e per questo essa dipende dal sistema di riferimenti in cui è misurata. Infatti una particella di massa m (per stati massless è diverso) può essere boostata in un sistema di riferimento, differente da quello iniziale, in cui lo spin non cambia, ma l'impulso fa $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ e di conseguenza in cui l'elicità è cambiata di segno. Possiamo vedere esplicitamente questa cosa facendo una trasformazione di parità. Infatti, per parità lo spin (rappresentato dalla matrici σ o se vogliamo Σ) non cambia segno, però l'impulso sì, dunque, quando facciamo una trasformazione di questo tipo quello che abbiamo è:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \longrightarrow -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \quad (6.8.32)$$

quindi l'elicità cambia di segno e se prima una particella era destrorsa, quindi l'autovalore dell'elicità era $+1$, quindi spin ed impulso allineati, dopo una trasformazione di parità, l'autovalore dell'elicità ha cambiato segno, lo spin

sarà antiparallelo all'impulso, e la particella sarà sinistrorsa. Questa cosa è visibile nella figura 6.1. Un'altro piccolo appunto: la trasformazione $\psi_{L,R} \xrightarrow{P} \psi_{R,L}$ è uno dei motivi per cui abbiamo bisogno di uno spinore a quattro componenti per l'equazione di Dirac. Infatti, per via della trasformazione possiamo dire che abbiamo le stesse proprietà per una certa particella se sottoposta a trasformazioni di parità.

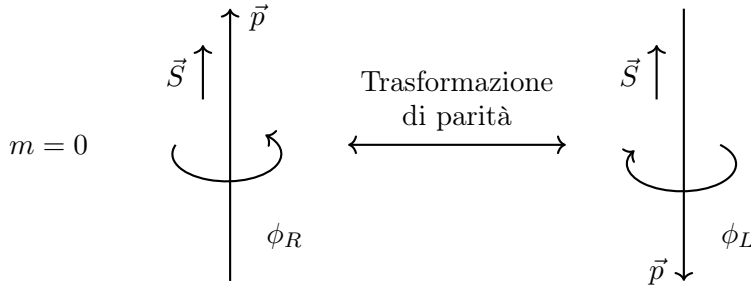


Figura 6.1: Trasformazione di parità di una particella massless

A differenza, la chiralità è un'invariante di Lorentz e ψ_L e ψ_R sono autostati di γ^5 in qualsiasi sistema di riferimento. Infatti la matrice γ^5 commuta con tutti i generatori di Lorentz $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ (ricordiamoci che γ^5 anticommuta con tutte le γ^μ).

Quindi in conclusione, nel caso di particelle massive, $m \neq 0$, gli autostati di chiralità, cioè gli autostati di γ^5 (che se utilizziamo la rappresentazione di Weyl è diagonale), ψ_L e ϕ_R non sono autostati di elicità.¹⁰

Però attenzione, perché se è vero che per stati massivi l'elicità non è un'invariante relativistica, per una particella relativistica l'elicità, non lo spin, è una costante del moto. Si può dimostrare infatti che $[H, \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}] = 0$ ricordando che Σ è la matrice che in (6.4.7) avevamo definito come la matrice di spin. In altre parole, se una particella relativistica, o massless, ha una certa elicità in un istante t , essa rimarrà nello stesso stato di elicità a qualsiasi t' successivo.

Per concludere la sezione facciamo un attimo delle precisazioni e delle attenzioni. Tutto il discorso sulle interpretazioni che diamo delle energie positive e negative non è collegato con il fatto che abbiamo parte left e parte right di una particella. Quando abbiamo cominciato a vedere come si separasse l'equazione di Dirac se spezzavamo lo spinore ψ in parte left e right noi stavamo comunque parlando di una singola particella e i due stati left e right sono due stati possibili di una singola particella. Le interpretazioni che diamo delle soluzioni di Dirac sono una parte di particella e una parte

¹⁰Ad eccezione del limite ad altissime energie, $E \gg m$, in cui la massa m può essere trascurata.

di antiparticella rispettivamente ad energia positiva e negativa, ma questo tipo di interpretazione non centra assolutamente nulla con il fatto che un sistema sia rappresentato da uno spinore left piuttosto che uno right. Come avremo modo di vedere in corsi successivi, un elettrone è descritto da una sovrapposizione di stato left e uno right, ossia il suo stato oscilla tra parte left e parte right. Un altro modo che abbiamo di accorgerci che left e right non centrano con particella e antiparticella è che i proiettori su stati ad energia positiva (6.7.90) o negativa (6.7.91) sono ben diversi dalle definizioni che abbiamo dato dei proiettori left (6.8.2). In particolare i proiettori sulle energie positive o negative non dipendono per nulla dalla chiralità γ^5 , che è una proprietà fondamentale che diventa fondamentale quando $m = 0$ e separiamo l'equazione di Dirac in parte left e right. Per particelle massless, come ad esempio il neutrino, abbiamo un comportamento differente rispetto le particelle massive, come l'elettrone, e non vediamo un'oscillazione tra parte left e right bensì, le particelle con $m = 0$ si trovano solamente in uno dei due stati e le due parti (left e right) non sono mescolate.

Notiamo solo che anche se abbiamo particelle con $m \neq 0$ possiamo comunque proiettare il loro stato, che mescola ψ_L e ψ_R , su parte left e parte right, ma troveremo che queste particelle non sono descritte da autostati dell'operatore di elicità.

6.9 Momento angolare e spin

Vediamo in questa sezione, con le sue sottosezioni, alcune cose da ricordare e da tenere con noi riguardo lo spin e il momento angolare.

6.9.1 Operatore di spin

Avevamo recuperato il concetto di spin nella sezione §3.6.3 parlando dell'operatore di Pauli-Lubanski¹¹:

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} \quad (6.9.1)$$

in cui P_ν è il quadrimpulso e $M_{\rho\sigma}$ sono i generatori del gruppo di Lorentz. Tramite (6.9.1) avevamo definito l'operatore di Casimir:

$$W^2 = -m^2 s(s+1) \quad (6.9.2)$$

del gruppo delle trasformazioni di Lorentz. Infatti, per una particella massiva, che sappiamo poter mettere in un sistema di riferimento di riposo in cui $P^\mu = (m, \vec{0})$, il vettore (6.9.1) diventa:

$$W^i = -\frac{1}{2}m\varepsilon^{0ijk}M_{jk}. \quad (6.9.3)$$

¹¹Ricordiamo anche che il segno meno è solo una convenzione, avremmo anche potuto mettere un +.

Noi a suo tempo avevamo individuato $\varepsilon^{0ijk} M_{jk}$ con l'operatore $2S^i$ di spin poiché soddisfavano la stessa algebra di momento angolare, ma $\varepsilon^{0ijk} M_{jk}$ non sarebbe potuto essere un momento angolare orbitale poiché nel sistema di riposo $\vec{L} = 0$. Avevamo scritto quindi:

$$W^i = -mS^i \quad (6.9.4)$$

e l'operatore di Casimir:

$$W^2 = -ms(s+1) \quad (6.9.5)$$

che ci permette di etichettare con i suoi autovalori gli stati fisici di spin della particella. Avevamo anche visto che gli stati fisici di una particella massiva sono etichettati da 3 autovalori, la massa m (corrispondente a l'operatore di Casimir P^2), lo spin $s(s+1)$ (corrispondente a W^2) e la terza componente dello spin S^3 che può assumere valori $-s, \dots, s$. Per questo avevamo detto che la particella massiva ha $2s+1$ gradi di libertà.

Però, a questo punto della nostra teoria ci siamo messi nello spazio delle matrici γ e vogliamo scrivere l'operatore W^μ in termini di esse. Ricordiamo che:

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (6.9.6)$$

e che vale:

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (6.9.7)$$

da cui possiamo ricavare che¹²:

$$\gamma^5\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}. \quad (6.9.8)$$

Grazie a (6.9.8) riusciamo a riscrivere il vettore (6.9.1), nel caso generico, come:

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} \quad (6.9.9)$$

$$= -\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu\sigma_{\rho\sigma} \quad (6.9.10)$$

$$= \frac{i}{2}P_\nu\gamma^5\sigma^{\mu\nu} \quad (6.9.11)$$

dunque abbiamo l'operatore di Pauli-Lubanski:

$$W^\mu = \frac{i}{2}\gamma^5\sigma^{\mu\nu}P_\nu. \quad (6.9.12)$$

¹²È difficile da dimostrare in generale, ma la si può verificare per due valori specifici di μ e ν , ad esempio per $\mu = 0$ e $\nu = 1$ così che $\gamma^5\sigma^{01} = -\gamma^2\gamma^3$.

Nel sistema di riferimento di riposo, dove $P^\mu = (m, \vec{0})$, l'operatore (6.9.12) diventa:

$$W^\mu(m, \vec{0}) = \frac{i}{2} \gamma^5 \sigma^{\mu 0} m = -\frac{1}{4} \gamma^5 m [\gamma^\mu, \gamma^0] \quad (6.9.13)$$

dunque:

$$\begin{cases} W^0(m, \vec{0}) = 0 \\ W^i(m, \vec{0}) = -\frac{1}{2} m \gamma^5 \gamma^i \gamma^0 = -m S^i \end{cases} \quad (6.9.14)$$

come fatto per (6.9.4) identifichiamo:

$$\gamma^5 \gamma^i \gamma^0 = -\Sigma^i \quad (6.9.15)$$

che vuol dire identificare $\gamma^5 \gamma^i \gamma^0$ con lo spin. Definiamo quindi l'**operatore di spin**:

$$\vec{\Sigma} = \frac{2}{m} \vec{W} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (6.9.16)$$

come avevamo già visto (6.4.7). Notiamo che l'operatore (6.9.16) si ottiene replicando le matrici di Pauli e le estende in 4 dimensioni; inoltre ha questa forma sia nella rappresentazione di Weyl che di Dirac.

Notiamo che se consideriamo una particella massless, lo spin non è un numero quantico ben definito e non possiamo utilizzare la relazione (6.9.16), però possiamo ricorrere all'elicità h , come visto nella sezione §3.6.3, definita dalla relazione:

$$W_\mu = h P_\mu \implies h = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \vec{\Sigma} \cdot \hat{p} \quad (6.9.17)$$

ossia, come la proiezione dello spin Σ sulla direzione dell'impulso $\hat{p}$.

6.9.2 Momento angolare orbitale e spin

Ricordiamo alcune cose già dette nel capitolo §3 riguardo il momento angolare orbitale e lo spin, in generale dei generatori del gruppo di Lorentz e come tutto sia collegato alla matrice di spin Σ .

Ricordiamoci che la forma più generale dei generatori delle trasformazioni di Lorentz è:

$$M_{\rho\sigma} = i(x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho) + S_{\rho\sigma} \quad (6.9.18)$$

in cui identifichiamo il termine dipendente da coordinate e derivate come il momento angolare $L_{\rho\sigma}$ ¹³ e il secondo termine $S_{\rho\sigma}$ come lo spin.

¹³Ricordiamoci che per ρ, σ indici spaziali, allora $L_{\rho\sigma}$ è proprio l'operatore di momento angolare orbitale.

Però, ora sappiamo che lo spin del campo fermionico viene identificato con il generatore $\sigma^{\mu\nu}$. Per trasformazioni infinitesime possiamo scrivere:

$$\psi'(x') = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \right) \psi(x) \quad (6.9.19)$$

e possiamo identificare l'operatore di momento angolare totale con:

$$J_{\text{tot}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} + i (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu). \quad (6.9.20)$$

Concentriamoci sulla parte spaziale di (6.9.20). Sappiamo che per $\mu = \nu = i$ il termine $i (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$ è il momento angolare orbitale L^i . Per quanto riguarda la parte di spin ricordiamoci che vale:

$$S^i = \frac{1}{4} \varepsilon_{ijk} \sigma^{jk} = \frac{i}{8} \varepsilon_{ijk} [\gamma^j, \gamma^k] = \frac{i}{4} \varepsilon_{ijk} \gamma^j \gamma^k \quad (6.9.21)$$

che coincide con:

$$S^i = \frac{1}{2} \Sigma^i = \frac{1}{2} \gamma^5 \gamma^0 \gamma^i. \quad (6.9.22)$$

Riscriviamo quindi (6.9.20) come:

$$\vec{J}_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \vec{\Sigma} + \vec{L} \quad (6.9.23)$$

in accordo con l'algebra del momento angolare.

Capitolo 7

Seconda quantizzazione

Non l'ho mai fatto, ma vorrei iniziare questo capitolo con una citazione:

The career of a young theoretical
physicist consists of treating the
harmonic oscillator in ever
increasing levels of abstraction.

Sidney Coleman

Vediamo in questo capitolo il processo che dobbiamo fare per passare da una teoria classica, con campi classici, alla teoria di campi quantistici e relativistici che tanto stiamo inseguendo. Come vedremo, sarà un passaggio che a parole sembra banale e solo concettuale, ma nella pratica ci metteremo un po'. Può essere utile ricordare quanto detto nella sezione §4.2 in cui vediamo l'idea dietro un campo classico. Nel corso del capitolo il primo tipo di campo di cui parleremo è il campo scalare scarico, motivo per cui alcuni concetti li introdurremo, e dunque spiegheremo più in dettaglio, con esso e li applicheremo velocemente ai campi che tratteremo in seguito; questo è il motivo per cui la sezione del campo scalare è più ampia delle altre. Successivamente vedremo campi scalari carichi e campi spinoriali. Parleremo per ultimo anche dell'interpretazione che daremo dei risultati introducendo formalmente, finalmente, i concetti di particella ed antiparticella tramite l'interpretazione di Feynmann¹. Nota importante: la sezione di interpretazione §7.6 può essere letta come prima sezione o come ultima, non contenendo nessun conto. Ho anche scritto una sezione riassuntiva dei risultati delle varie sezioni.

¹In realtà l'interpretazione che studieremo è stata data anche dal fisico svizzero Ernst Stueckelberg a cui spesso non si dà molto merito e che ha contribuito anche in altri modi alla Teoria Quantistica dei Campi; infatti, ha anche dato una sua formulazione di quelli che chiamiamo *diagrammi di Feynmann*, ha formulato un analogo della *teoria di Yukawa* che considera particelle messaggere, ha anche "scoperto" il gruppo di rinormalizzazione e la conservazione del numero barionico.

I riferimenti per questo capitolo sono il Peskin e Schroeder Physical law should have mathematical beauty.Peskin:1995ev, lo Srednicki Physical law should have mathematical beauty.Srednicki:2007qs, ma anche il Lancaster e Blundell Physical law should have mathematical beauty.Lancaster:2014pza per discorsi più qualitativi, discorsivi e di interpretazione.

7.1 Quantizzazione di una teoria di campo

Tramite i capitoli §4 e §5 abbiamo sviluppato tutti gli strumenti necessari per costruire i funzionali di azione S in termini di invarianti per trasformazioni di Poincaré, così da assicurarci la consistenza con i principi della Relatività Speciale. Però tutto ciò che abbiamo detto e dimostrato ci ha fatto fare un passo indietro rispetto la Meccanica Quantistica, infatti, abbiamo sviluppato tutto secondo una teoria di campo classica, ovviamente non applicata alla descrizione di una singola particella (un singolo punto materiale), ma piuttosto ad un campo e dunque ad un sistema esteso. Però tutto va secondo i piani, ora dobbiamo solo rendere tutti i nostri oggetti quantistici.

Il metodo formalmente più elegante è la *quantizzazione attraverso il path-integral*, che vedremo nel corso di "Fondamenti di Teoria Quantistica dei Campi". Il metodo degli integrali di cammino ha il vantaggio di essere basato su principi molto semplici ed intuitivi, ma comporta lo svantaggio che i calcoli sono molto complicati. La sua potenza è che si può applicare a teorie di campo interagenti. L'integrazione funzionale è una cosa matematicamente molto delicata, che a rigore non esiste nello spazio Minkowskiano (ricordiamoci che per fare i conti facevamo sempre la rotazione di Wick).

Noi utilizzeremo un metodo più diretto, forse meno elegante, basato su principi primi detto **quantizzazione canonica**. È il metodo che ricalca i passaggi che storicamente sono stati fatti per arrivare alla Teoria Quantistica dei Campi, e mette in luce in modo esplicito la natura di questo procedimento. Il problema che si porta dietro è che è un processo molto semplice e funziona molto bene per campi scalari e spinoriali liberi, ma diventa lungo e complesso per lagrangiane interagenti o più complesse.

Riassunto, *quantizzare* vuol dire: interpretare i campi, che rappresentano le variabili canoniche estese al continuo, come degli operatori; fissare opportunamente le relazioni di commutazione; e risolvere la teoria trovando autovalori e autovettori dell'hamiltoniana.

7.1.1 Quantizzazione canonica

In Meccanica Quantistica la quantizzazione canonica è l'operazione che ci permette di passare dal formalismo lagrangiano a quello hamiltoniano, proprio come in Meccanica Classica partivamo dalle coordinate generalizzate q^i

e passavamo ai momenti coniugati p_i . In Meccanica Classica avevamo:

$$[q^i, q^j] = [p_i, p_j] = 0 \quad , \quad [q^i, p_j] = i\delta_{ij} \quad (7.1.1)$$

nella teoria di campo imporremo ai campi e ai loro momenti coniugati delle relazioni di commutazione (o anticommutazione) analoghe a queste, a simboleggiare anche il passaggio $q^i \rightarrow \phi(x^\mu)$ e $p_i \rightarrow \pi(x^\mu)$.

La quantizzazione canonica è anche chiamata *seconda quantizzazione*, riferendosi alla prima quantizzazione come all'operazione che si è fatta in Meccanica Quantistica elevando $E \rightarrow \partial_t$ e $p \rightarrow \partial_x$ al ruolo di operatori. I passi che dobbiamo seguire per svolgere la quantizzazione canonica sono:

1. Scrivere una lagrangiana $\mathcal{L}$ in funzione degli invarianti di Lorentz costruiti tramite i campi che ci interessano. Questa è la parte creativa del processo perché possiamo sbizzarrirci facendo questa cosa, dal momento che esistono diverse combinazioni per creare invarianti, tutte sono possibili, ma non tutte porteranno a risultati interessanti o sensati fisicamente.
2. Partendo da $\mathcal{L}$ e dai campi calcoliamo la densità di impulso π e di hamiltoniana $\mathcal{H}$.²
3. Promuoviamo i campi e i loro impulsi coniugati al ruolo di operatori. Dovremo dunque imporre le appropriate condizioni di commutazione tra i campi ϕ e i momenti π , in modo da renderli operativamente quantistici.
4. Sviluppiamo i campi in funzione di operatori di creazione e distruzione, tramite un'analisi dei modi normali di oscillazione e le trasformate di Fourier. Questi operatori creano e distruggono particelle e ci permettono di utilizzare il formalismo dei numeri di occupazione e di lavorare nello spazio di Fock³.
5. Risolvere la teoria, il che vuol dire diagonalizzare l'hamiltoniana $\mathcal{H}$, trovando autovalori e autovettori, con la precisazione del normal ordering che ci consente di eliminare gli infiniti che si vengono a creare.

²Nota che scrivere la teoria con il formalismo hamiltoniano è comodo, ma meno bello dal punto di vista visivo perché ci nasconde le invarianze che abbiamo. Nella lagrangiana abbiamo gli invarianti a vista, in $\mathcal{H}$ no.

³Per motivi di tempo e anche di brevità non riporto tutta la trattazione relativa agli operatori a e $a^\dagger$ e allo spazio di Fock, ma farò come la maggior parte della letteratura e mi limiterò a introdurre solamente gli oggetti e le relazioni utili ai miei fini. Lo spazio di Fock permette di "riorganizzare" lo spazio di Hilbert e di trattare sistemi di particelle identiche con un nuovo formalismo, trattando la funzione d'onda, nel senso della MQ, come un campo. Io ho scritto nell'Appendice G un breve riassunto delle cose chiave che ci serviranno nel capitolo, ma una trattazione più soddisfacente può essere trovata nelle *note del corso di Meccanica Quantistica 2* del Prof. Sciuto. Se avete seguito il corso di IFIF sarà sufficiente rivedere gli appunti.

L'obbiettivo di una qualsiasi teoria quantistica è risolvere lo spettro dell'hamiltoniana. Nella teoria di campo che stiamo costruendo questo non sarà sempre possibile, anche ostacolati dal fatto che sono presenti infiniti gradi di libertà. Però, esistono alcune teorie semplificate in cui riusciamo a diagonalizzare $\hat{H}$ che sono le teorie libere, guarda caso quelle che analizzeremo nel corso del capitolo. Le teorie di campo libere sono "facili" perché le lagrangiane che scriviamo tipicamente sono quadratiche nei campi e le equazioni del moto di conseguenza sono lineari.

7.2 Campo scalare

Per fare la quantizzazione canonica di un campo scalare ϕ di Klein-Gordon dobbiamo spostarci dalla formulazione lagrangiana, in cui abbiamo $\mathcal{L}$ manifestamente Lorentz invariante, alla formulazione hamiltoniana, in cui saremo costretti a perdere l'invarianza. La lagrangiana del campo scalare è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (7.2.1)$$

e a partire dal campo $\phi(x)$ costruiamo il suo canonico coniugato. Dobbiamo ricordarci che il campo $\phi(x)$ è l'estensione al continuo della variabile cinematica x di un sistema discreto, e se prima avevamo $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$ ora, data $\mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial_\mu \phi(x^\mu))$, possiamo costruire $\pi(x^\mu)$ il campo canonicamente coniugato a $\phi(x^\mu)$ come:

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\vec{x}, t)} \quad (7.2.2)$$

che possiamo anche interpretare come densità di impulso associato al campo ϕ . Facendo la derivata rispetto $\dot{\phi}$ stiamo rompendo l'invarianza di Lorentz, poiché non stiamo più tenendo spazio e tempo sullo stesso piano, ma ne stiamo preferendo una rispetto l'altra, infatti $\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$. Presa la lagrangiana (7.2.1) possiamo riscriverla come:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (7.2.3)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_0 \phi \partial^0 \phi + \partial_i \phi \partial^i \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (7.2.4)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (7.2.5)$$

che ci fa ottenere:

$$\pi(\vec{x}, t) = \dot{\phi}(\vec{x}, t). \quad (7.2.6)$$

Calcolato $\pi(x^\mu)$ possiamo scrivere l'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right]. \quad (7.2.7)$$

La transizione da Meccanica Classica a Meccanica Quantistica avviene formalmente elevando i campi al ruolo di operatori⁴ e postulando le opportune relazioni di commutazione tra il campo ϕ e il suo momento coniugato π , che vuol dire specificare il loro comportamento. Postuliamo:

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t) \right] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (7.2.8)$$

dove abbiamo preso i campi a tempi uguali, posizioni diverse e abbiamo ommesso di scrivere nel termine di destra un $\hbar$ poiché stiamo lavorando in unità naturali. Abbiamo scritto la (7.2.8) in analogia al caso discreto in cui $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$, ma ora avendo i campi ϕ e π che descrivono sistemi continui; abbiamo normalizzato il commutatore alla δ di Dirac. Ovviamente, dobbiamo definire anche le regole di commutazione:

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{y}, t) \right] = 0 \quad (7.2.9)$$

$$\left[\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t) \right] = 0. \quad (7.2.10)$$

I commutatori (7.2.9) e (7.2.10) garantiscono la causalità, o meglio garantiscono che la misura di ϕ nel punto $\vec{x}$ all'istante t sia completamente indipendente dalla misura di ϕ nel punto $\vec{y}$, con $\vec{y} \neq \vec{x}$, nello stesso istante t . Quando diciamo misure intendiamo misure in senso quantistico. Viene rispettata la causalità poiché se $t_x = t_y$ allora $(x^\mu - y^\mu)^2 < 0$, cioè è un intervallo di tipo spazio. Le misure a tempi diversi sono legate al concetto di commutatore (vedi i prossimi capitoli).

Facciamo una piccola precisazione facendo riferimento al capitolo §5 del Schwichtenberg Physical law should have mathematical beauty.symmetry. In realtà per quanto possa sembrare buttata a caso la regola di commutazione (7.2.8), non solo discende dalla generalizzazione del commutatore fondamentale della Meccanica Quantistica, ma anche da ciò che abbiamo imparato nella sezione §5.2.1 riguardo i displacement di un campo. Ricordiamo di aver visto che la trasformazione $\phi \rightarrow \phi - i\varepsilon$, generata da $-i\frac{\partial}{\partial\phi}$ implicava che la densità di momento coniugato $\pi = J^0$ si conservasse.

Noether ebbe un'idea incredibile che ci ha guidato verso la QFT. Infatti, essendo nei problemi di Fisica sempre guidati dalle quantità conservate, e dunque grazie a Noether abbiamo imparato a ricercare delle simmetrie, proprio Emmy ci dice che possiamo provare ad identificare tali quantità conservate con i generatori della trasformazione stessa. Non è altro che ciò che già abbiamo imparato a fare identificando $\hat{p}_i = -i\partial_i$ o $\hat{E} = i\partial_0$.

Possiamo dunque fare l'identificazione:

$$\pi(x) \longrightarrow -i\frac{\partial}{\partial\phi(x)} \quad (7.2.11)$$

⁴Che agiscono nello spazio di Fock, in cui la base degli autostati è formata da stati di un numero definito di particelle.

e possiamo calcolare il commutatore di π con il nostro campo ϕ servendoci di un oggetto ausiliario ψ (non è il campo spinoriale):

$$[\phi(x), \pi(y)]\psi = \left[\phi(x), -i \frac{\partial}{\partial \phi(y)} \right] \psi \quad (7.2.12)$$

$$= -i\phi(x) \frac{\partial}{\partial \phi(y)} \psi + i \frac{\partial}{\partial \phi(y)} [\phi(x)\psi] \quad (7.2.13)$$

$$= -i\phi(x) \frac{\partial}{\partial \phi(y)} \psi + i \frac{\partial \phi(x)}{\partial \phi(y)} \psi + i\phi(x) \frac{\partial}{\partial \phi(y)} \psi \quad (7.2.14)$$

$$= i\delta(x-y)\psi \quad (7.2.15)$$

e abbiamo quindi trovato:

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta(x-y) \quad (7.2.16)$$

ovvero il commutatore (7.2.8).

Ora, diamo una rappresentazione esplicita ai campi operatoriali in termini di trasformate di Fourier, ovvero, in termini di uno sviluppo in onde piane. Ma perché? Ci sono moltissimi modi di rispettare le regole di commutazione (7.2.9) e (7.2.10), ma è più comodo cercare un'espressione di $\phi(x^\mu)$ e $\pi(x^\mu)$ in termini di trasformata di Fourier e sovrapposizione di onde piane perché l'oscillatore armonico è soluzione dell'equazione di Klein-Gordon⁵ e possiamo scrivere una generica soluzione di essa $\phi(x)$ come sovrapposizione infinita di oscillatori, questo è anche uno dei motivi per cui compariranno gli operatori di creazione $a^\dagger$ e di distruzione a .

In realtà il motivo per cui si scrive l'operatore di campo $\hat{\phi}$ proprio nel modo che troveremo mi è sembrato leggermente oscuro al mio primo approccio, ma sicuramente è un limite mio. I modi in cui ho cercato di rispondermi, prendendo spunto dalle varie fonti sono spiegati nell'Appendice H. Nel seguito della sezione cerco di seguire il discorso fatto dalla professoressa aggiustando il tiro sulle cose che non capivo.

Ci sarà utile per la nostra trattazione riprendere dalla Relatività Speciale il quadrivettore numero d'onda:

$$k^\mu = (k^0, \vec{k}) \quad (7.2.17)$$

in cui $E = \hbar k^0 = k^0 = \omega_k$ e $\vec{p} = \hbar \vec{k} = \vec{k}$ in unità naturali. Ricordiamo anche che:

$$k_\mu x^\mu = \omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (7.2.18)$$

⁵Lo si può vedere a pagina 22 delle note di Tong Physical law should have mathematical beauty.Tong.

che è un binomio di propagazione di un'onda, ed è Lorentz invariante. Abbiamo anche che nello spazio degli impulsi⁶:

$$\partial_\mu^2 + m^2 \longrightarrow k^2 - m^2. \quad (7.2.19)$$

La relazione di mass-shell risulta:

$$E^2 - m^2 = \vec{p}^2 \implies k^2 - m^2 = 0. \quad (7.2.20)$$

Per scrivere un'espressione del campo quantizzato possiamo ragionare con le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon (5.3.7), che avendo soluzioni onde piane, essendo un'equazione di teoria libera, ci permette di poter dire che il campo sarà una combinazione di onde piane, o meglio, sarà uno sviluppo di Fourier. Sviluppare con Fourier vuol dire che stiamo integrando nello spazio di k , ovviamente k^μ , e quindi con una misura di integrazione Lorentz invariante d^4k . Ovviamente dobbiamo considerare anche altri aspetti. Innanzitutto, consideriamo delle normalizzazioni davanti i termini di onda piana, che non saranno altro che i coefficienti dello sviluppo di Fourier, che avranno ruolo di operatore. Saranno proprio i coefficienti, che chiamiamo $\hat{A}$ e $\hat{A}^\dagger$, che daranno la natura operatoriale a ϕ . Poi, dobbiamo ricordarci che la nostra teoria vogliamo che sia non solo quantistica, ma anche relativistica e quindi vogliamo che valga la relazione di mass-shell (7.2.20), di cui possiamo garantire la validità scrivendo $\delta(k^2 - m^2)$ (che assicura proprio che una particella di massa m assuma solo i valori di k^μ tali per cui $k^2 = m^2$, oltre al fatto che sia soddisfatta l'equazione di Klein-Gordon). Notiamo che la condizione di mass-shell nello spazio dei quadri-momenti corrisponde ad un'iperboloide⁷, come possiamo notare dalla figura 7.1.

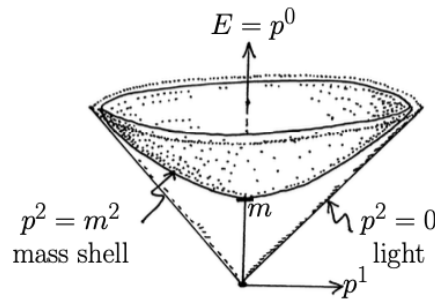


Figura 7.1: Iperboloide del mass-shell $k^2 = m^2$ nello spazio dei quadri-momenti.

⁶O anche meglio $\partial_\mu^2 + m^2 \rightarrow m^2 - k^2$ poiché facciamo $k_\mu = -i\partial_\mu$.

⁷Per discorsi riguardante la causalità e la relazione di mass-shell puoi leggere la sezione 2.4 di Peskin e Schroeder Physical law should have mathematical beauty. Peskin:1995ev.

Sarebbe anche carino che il campo contenga grandezze che fisicamente siano sensate, ci serve per questo richiedere che l'energia sia positiva⁸ e lo facciamo tramite il termine $\theta(k^0)$. Mettiamo anche la normalizzazione $1/(2\pi)$ della trasformata di Fourier, che ovviamente sarà alla terza visto che integriamo su uno spazio tridimensionale.⁹ Scriviamo il campo:¹⁰

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) \left[\hat{A}(k) e^{-ik^\mu x_\mu} + \hat{A}^\dagger(k) e^{ik^\mu x_\mu} \right]. \quad (7.2.21)$$

Ovviamente possiamo scrivere un po' meglio il campo (7.2.21), possiamo infatti analizzare meglio la delta e la theta, ma possiamo anche definire meglio gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{A}^\dagger$.

Abbiamo detto poco sopra che ci assicuriamo che valga la relazione di mass-shell (7.2.20) scrivendo $\delta(k^2 - m^2)$ e che l'energia sia positiva con $\theta(k^0)$, dunque, la misura di integrazione che abbiamo in $\hat{\phi}$ è:

$$d^4k \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) \quad (7.2.22)$$

che è Lorentz invariante. Possiamo a questo punto utilizzare $\delta(k^2 - m^2)$ per integrare su una delle 4 componenti di d^4k e scegliamo k^0 . Per poter fare il conto è necessario ricordare la relazione:

$$\delta(f(k)) = \sum_a \frac{\delta(k - a)}{|f'(a)|} \quad , \quad f(a) = 0 \quad (7.2.23)$$

possiamo vedere che gli zeri di $k^2 - m^2$ sono:

$$k^2 - m^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2 - m^2 = 0 \quad \implies \quad k^0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad (7.2.24)$$

e dunque scriviamo:

$$\delta(k^2 - m^2) = \frac{\delta(k^0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2})}{2k^0} + \frac{\delta(k^0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2})}{2k^0} \quad (7.2.25)$$

⁸Abbiamo fatto tutto il corso dicendo che esistono anche le soluzioni ad energia negativa e che le interpretiamo come antiparticelle, come mai ora le eliminiamo da campo? La risposta è che non le stiamo eliminando. È vero che interpretiamo gli stati ad energia negativa come antiparticelle, ma sistemando opportunamente i segni tra energia, carica elettrica ed impulso noi vediamo anche l'antimateria come sistemi ad energia positiva. Vedi il proseguio del capitolo per capire meglio. È necessario che $E > 0$ perché stiamo trattando una teoria libera, ma soprattutto ancora classica, e non vogliamo energie non fisiche.

⁹Noi inseriamo il $(2\pi)^3$ a questo punto della trattazione, ma potremmo anche evitarlo, non mettere nulla e fare finta di nulla. Troveremmo, se usassimo l'approccio gnotto, un fattore $(2\pi)^{3/2}$ di normalizzazione per gli operatori $\hat{A}^{(\dagger)}$ quando andiamo a studiare gli stati ad impulso definito. Dunque, in qualche modo la normalizzazione, prima o dopo, sbucherebbe.

¹⁰Noi scriviamo $\hat{\phi}(x)$ intendendo $x = x^\mu = (t, \vec{x})$. Si potrebbe seguire il procedimento fatto nel Lancaster e Blundell Physical law should have mathematical beauty. Lancaster:2014pza al capitolo 11.1 in cui definisce prima $\hat{\phi}(\vec{x})$, per vedere meglio l'analisi con gli oscillatori armonici, e poi facendo agire gli operatori di evoluzione temporale (nella rappresentazione di Heisenberg) trova $\hat{\phi}(t, \vec{x})$.

che se utilizziamo anche la $\theta(k^0)$, che manda a 0 il termine corrispondente alla soluzione negativa, è:

$$\delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) = \frac{\delta(k^0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2})}{2k^0} \quad (7.2.26)$$

in cui possiamo indicare:

$$k^0 = \omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (7.2.27)$$

Utilizzando (7.2.26) per integrare su k^0 abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \frac{\delta(k^0 - \omega_k)}{2k^0} = \frac{1}{2\omega_k}. \quad (7.2.28)$$

Dunque, ci rimane la misura di integrazione:

$$\frac{d^3k}{2k^0} = \frac{d^3k}{2\omega_k} \quad (7.2.29)$$

e il campo è:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[\hat{A}(k) e^{-ik^\mu x_\mu} + \hat{A}^\dagger(k) e^{ik^\mu x_\mu} \right]. \quad (7.2.30)$$

Ora, ci resta da capire chi effettivamente siano gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{A}^\dagger$ che compaiono in (7.2.30). Uno dei modi che abbiamo è quello di guardare le relazioni di commutazione tra il campo e il suo coniugato. Abbiamo:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[\hat{A}(k) e^{-ik^\mu x_\mu} + \hat{A}^\dagger(k) e^{ik^\mu x_\mu} \right] \quad (7.2.31)$$

$$\hat{\pi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} i\omega_k \left[-\hat{A}(k) e^{-ik^\mu x_\mu} + \hat{A}^\dagger(k) e^{ik^\mu x_\mu} \right] \quad (7.2.32)$$

e controlliamo le relazioni (7.2.8), (7.2.9) e (7.2.10). Notiamo che per comodità possiamo scrivere (cambiando la variabile di integrazione nel secondo termine dei campi):

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[\hat{A}(k) + \hat{A}^\dagger(-k) \right] e^{-ik^\mu x_\mu} \quad (7.2.33)$$

$$\hat{\pi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} i\omega_k \left[-\hat{A}(k) + \hat{A}^\dagger(-k) \right] e^{-ik^\mu x_\mu} \quad (7.2.34)$$

così vediamo:

$$\left[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y) \right] = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{i\omega_{k'}}{2\omega_k} \left[\hat{A}(k) + \hat{A}^\dagger(-k), -\hat{A}(k') + \hat{A}^\dagger(-k') \right] e^{-i(k^\mu x_\mu + k'^\mu y_\mu)} \quad (7.2.35)$$

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{i\omega_{k'}}{2\omega_k} \left\{ - [\hat{A}(k), \hat{A}(k')] + [\hat{A}(k), \hat{A}^\dagger(-k')] - \right. \\ \left. - [\hat{A}^\dagger(-k), \hat{A}(k')] + [\hat{A}^\dagger(-k), \hat{A}^\dagger(-k')] \right\} e^{-i(k^\mu x_\mu + k'^\mu y_\mu)}. \end{aligned} \quad (7.2.36)$$

Il commutatore è (7.2.8), a meno di fattori numerici, solo se valgono:

$$[\hat{A}(k), \hat{A}(k')] = 0 \quad (7.2.37)$$

$$[\hat{A}(k), \hat{A}^\dagger(k')] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (7.2.38)$$

$$[\hat{A}^\dagger(k), \hat{A}^\dagger(k')] = 0 \quad (7.2.39)$$

come possiamo effettivamente verificare, ma ricordando prima che $[A, B] = -[B, A]$:

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{i\omega_{k'}}{2\omega_k} \left\{ 0 + [\hat{A}(k), \hat{A}^\dagger(-k')] + \right. \\ \left. + [\hat{A}(k'), \hat{A}^\dagger(-k)] + 0 \right\} e^{-i(k^\mu x_\mu + k'^\mu y_\mu)} \end{aligned} \quad (7.2.40)$$

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{i\omega_{k'}}{2\omega_k} [\delta^3(\vec{k} + \vec{k}') + \delta^3(\vec{k}' + \vec{k})] e^{-i(k^\mu x_\mu + k'^\mu y_\mu)} \quad (7.2.41)$$

grazie alla simmetria della δ scriviamo (notando che l'applicazione della δ toglie un'integrazione d^3k' e cambia un segno nell'esponentiale):

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{i\omega_{k'}}{2\omega_k} 2\delta^3(\vec{k} + \vec{k}') e^{-i(k^\mu x_\mu + k'^\mu y_\mu)} \quad (7.2.42)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^6} \frac{i\omega_k}{\omega_k} e^{-ik^\mu(x_\mu - y_\mu)} \quad (7.2.43)$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ik^\mu(x_\mu - y_\mu)} \quad (7.2.44)$$

ricodandoci la definizione della δ :

$$\delta^3(\vec{z}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{z}} \quad (7.2.45)$$

e il fatto che il commutatore tra i campi è preso a tempi uguali, ossia $x_0 = y_0 = t$ (quindi nel prodotto scalare $k^\mu(x_\mu - y_\mu)$ perdiamo la componente k^0), allora vediamo che:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] = \frac{i}{(2\pi)^3} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (7.2.46)$$

che è esattamente il commutatore (7.2.8) che volevamo apparte quel fattore $(2\pi)^3$, ma ciò non è un problema perché possiamo buttarlo dentro la definizione di $\hat{A}$ e $\hat{A}^\dagger$.

Ma quindi, chi sono $\hat{A}$ e $\hat{A}^\dagger$? Come anticipato, la loro identità la possiamo identificare nei commutatori (7.2.37), (7.2.38) e (7.2.39), che è facile rendersi conto essere identici a quelli soddisfatti dagli operatori di creazione $\hat{a}_k^\dagger$ e distruzione $\hat{a}_k$ descritti nell'Appendice G.4. Possiamo cominciare a scrivere:

$$\hat{A}(\vec{k}) \propto (2\pi)^{3/2} \hat{a}_k \quad (7.2.47)$$

$$\hat{A}^\dagger(\vec{k}) \propto (2\pi)^{3/2} \hat{a}_k^\dagger \quad (7.2.48)$$

tenendo conto della normalizzazione che ci siamo resi conto debba esserci. Però non è finita, perché quando nell'Appendice G abbiamo parlato di $\hat{a}_k^\dagger$ e $\hat{a}_k$ li abbiamo descritti come operatori che creavano e distruggevano particelle ad impulso fissato (in questo caso), quindi ci piacerebbe che gli stati $|k\rangle$ ad quadri-impulso ($k \equiv k^\mu$) fissato siano ben normalizzati. Richiediamo che (ricordando qual è la misura Lorentz invariante che abbiamo visto prima):

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} |k\rangle \langle k| = \mathbb{1} \quad (7.2.49)$$

che a sua volta richiede che anche lo spazio degli stati a quadri-impulso definito sia Lorentz invariante. Se la norma degli stati a tri-impulso fissato è¹¹:

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (7.2.50)$$

allora per gli stati a quadri-impulso fissato dobbiamo avere¹²:

$$|k\rangle = (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k} |\vec{k}\rangle \quad (7.2.51)$$

affinché valga (7.2.49). Sapendo che:

$$\hat{a}_k^\dagger |0\rangle = |\vec{k}\rangle \quad (7.2.52)$$

allora vediamo che anche $\hat{a}_k^\dagger$ dev'essere opportunamente normalizzato (in parallelo anche $\hat{a}_k$) e possiamo finalmente scrivere le relazioni che definiscono gli operatori $\hat{A}(k)$ e $\hat{A}^\dagger(k)$:

$$\hat{A}(\vec{k}) = (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k} \hat{a}_k \quad (7.2.53)$$

$$\hat{A}^\dagger(\vec{k}) = (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k} \hat{a}_k^\dagger. \quad (7.2.54)$$

¹¹Puoi vedere l'Appendice H.2 per dimostrare che non è Lorentz invariante.

¹²È una relazione dimostrabile in modo molto rapido.

Definiti così abbiamo le relazioni di commutazione tra gli operatori¹³:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = 0 \quad (7.2.55)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (7.2.56)$$

$$[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0. \quad (7.2.57)$$

Possiamo scrivere, indicando $kx \equiv k^\mu x_\mu$, l'operatore di campo e il suo momento coniugato:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} [\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx}] \quad (7.2.58)$$

$$\hat{\pi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} i\omega_k [-\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx}]. \quad (7.2.59)$$

Possiamo anche invertire la trasformata di Fourier (e trovare le frequenze di Fourier in questa analisi) e scrivere $\hat{a}_k$ e $\hat{a}_k^\dagger$ in termini dei campi:

$$\hat{a}_k = i \int d^3x \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \quad (7.2.60)$$

$$\hat{a}_k^\dagger = -i \int d^3x \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \quad (7.2.61)$$

$$(7.2.62)$$

in cui abbiamo $A \overleftrightarrow{\partial} B = A\partial B - (\partial A)B$.

7.2.1 Hamiltoniana del campo scalare

Abbiamo appena terminato di vedere che il campo è una sovrapposizione di fattori oscillanti, e di conseguenza interpretiamo $\hat{\phi}(x)$ come un'onda che si propaga nello spazio e nel tempo. Cerchiamo ora un'espressione dell'hamiltoniana, aspettandoci che sia analoga a quella di una somma continua di oscillatori armonici, poiché il nostro campo è una somma continua di fattori oscillanti. Non dovrebbe troppo sorprendere questa aspettativa dal momento che nell'espressione di $\hat{\phi}(x)$ abbiamo visto comparire gli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ dell'oscillatore armonico. Ricordiamo l'interpretazione di campo che avevamo dato nella sezione §4.2, ovvero quella di infiniti oscillatori armonici, molle, tutti collegati tra loro. Ovviamente, assoceremo al campo delle particelle (si

¹³Nell'Appendice G abbiamo descritto gli operatori di creazione e distruzione con la regola di commutazione $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$. Quando passiamo dalla Meccanica Classica, con uno spazio discreto, alla teoria dei campi (anche classica), le nostre variabili cinematiche diventano variabili continue e la regola di commutazione si modifica e diventa $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$, quindi con una delta di Dirac al posto di una delta di Kronecker.

veda la sezione §7.6) e ciascuna particella corrisponderà ad un'eccitazione del campo $\hat{\phi}(x)$, il quale, contenendo tutti i possibili modi di oscillazione (è una somma continua), contiene già dall'inizio tutte le particelle possibili (in questo caso saranno particelle scalari di spin 0). Per l'oscillatore armonico i vari stati erano classificati in base all'eccitazione del sistema e i vari livelli energetici li potevamo raggiungere agendo con $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, che in quel caso ci permettevano di "scalare" la scala energetica; ora, i vari livelli eccitati dell'oscillatore corrispondono a particelle (create o distrutte) e sono sempre $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ che ci permettono di averle nel nostro sistema piuttosto che no.

Vedremo come interpretare le varie eccitazioni e i vari modi di oscillazione in una sezione dedicata.

Abbiamo già ottenuto i seguenti risultati:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2 \right] \quad (7.2.63)$$

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right] \quad (7.2.64)$$

$$\hat{\pi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} i\omega_k \left[-\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right] \quad (7.2.65)$$

e possiamo calcolare l'hamiltoniana:

$$\hat{H} = \int d^3x \mathcal{H}. \quad (7.2.66)$$

Implementiamo i conti¹⁴:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} \int d^3x \left[\pi^2 + \partial_i \phi \partial^i \phi + m^2 \phi^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} \left[-(\omega_k \omega_{k'} + \vec{k} \cdot \vec{k}') (a_k e^{-ikx} - a_k^\dagger e^{ikx}) \times \right. \\ &\quad \times (a_{k'} e^{-ik'x} - a_{k'}^\dagger e^{ik'x}) + m^2 (a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx}) (a_{k'} e^{-ik'x} + a_{k'}^\dagger e^{ik'x}) \left. \right] \end{aligned} \quad (7.2.69)$$

possiamo integrare prima sulla d^3x e sfruttare la definizione della δ :

$$\int d^3x e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}) \quad (7.2.70)$$

¹⁴Notando che vale:

$$\vec{\nabla}\phi = \partial_i \phi \partial^i \phi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} (i\vec{k}) \left[\hat{a}_k e^{-ikx} - \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right]. \quad (7.2.67)$$

così:

$$\begin{aligned} \hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k d^3k'}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} & \left[\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \left(\omega_k \omega_{k'} + \vec{k} \cdot \vec{k}' + m^2 \right) \times \right. \\ & \times \left(a_k^\dagger a_{k'} e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} + a_k a_{k'}^\dagger e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} \right) - \\ & \left. - \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') \left(\omega_k \omega_{k'} + \vec{k} \cdot \vec{k}' - m^2 \right) \left(a_k^\dagger a_{k'}^\dagger e^{i(\omega_k + \omega_{k'})t} + a_k a_{k'} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.2.71)$$

ora, utilizziamo le funzioni $\delta^3(\vec{k} \pm \vec{k}')$ per fare l'integrale su d^3k' :

$$\begin{aligned} \hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} & \left[\left(\omega_k^2 + \vec{k}^2 + m^2 \right) \left(a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger \right) + \right. \\ & \left. + \left(-\omega_k^2 + \vec{k}^2 + m^2 \right) \left(a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_{-k} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.2.72)$$

ci dobbiamo ricordare la relazione di mass-shell:

$$\omega_k^2 = \vec{k}^2 + m^2 \quad (7.2.73)$$

così da semplificare un termine e ottenere:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} 2\omega_k^2 \left(a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger \right) \quad (7.2.74)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger \right) \quad (7.2.75)$$

possiamo utilizzare la relazione di commutazione (7.2.56), che avendo già $\vec{k} = \vec{k}'$ sarà semplicemente $\delta(0)$. Abbiamo quindi in conclusione:

$$\hat{H} = \int d^3k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \delta(0) \right) \omega_k \quad (7.2.76)$$

che ha la forma analoga all'hamiltoniana dell'oscillatore armonico.¹⁵ Notiamo anche un fatto importante, ossia che il termine $\delta(0)$ da un contributo divergenere all'energia, ma a noi questo non disturba più di tanto poiché osservando sempre delle differenze di energia eliminiamo la divergenza con uno shift (infinito) del valore dell'energia di punto zero. Il termine $\delta(0)$ ci saremmo potuti aspettare sarebbe uscito, perché 7.2.76 non è altro che una somma continua di oscillatori armonici, quindi se sommiamo gli operatori $a^\dagger a$ otteniamo una somma continua sui valori di $\vec{k}$ e $a_k^\dagger a_k$, ma quando sommiamo in modo continuo le energie dello stato fondamentale $\frac{\omega_k}{2}$ otteniamo

¹⁵Che ricordiamo essere:

$$H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \omega. \quad (7.2.77)$$

il pezzo con la $\delta(0)$. Torneremo, dopo aver calcolato il momento coniugato, su questo discorso degli infiniti dell'energia.

Sappiamo che l'hamiltoniana è la componente 0 del tensore energia impulso (vedi la sezione §5.2) e per questo possiamo considerare le altre 3 componenti di $T^\mu{}_\nu$ e con un calcolo perfettamente analogo possiamo trovare l'impulso canonicamente coniugato. Il teorema di Noether, applicato al campo scalare, ci dice che l'impulso, o meglio le 3 componenti dell'impulso, sono le cariche conservate associate alle traslazioni spaziali:

$$P^i = \int d^3x T^i{}_0 \quad (7.2.78)$$

con $T^\mu{}_\nu$ tensore energia-impulso:

$$-T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu \quad (7.2.79)$$

$$= \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \delta^\mu{}_\nu \quad (7.2.80)$$

dunque:

$$\vec{P} = - \int d^3x \partial^0 \phi \partial_i \phi = - \int d^3x \pi \vec{\nabla} \phi = - \int d^3x \pi \partial_i \phi \quad (7.2.81)$$

alzando l'indice della ∂ :

$$P^i = \int d^3x \pi \partial^i \phi \quad (7.2.82)$$

$$\begin{aligned} &= \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i\omega_k}{\sqrt{2\omega_k}} \left(-a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx} \right) \times \\ &\quad \times \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{ik'^i}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \left(-a_{k'} e^{-ik'x} + a_{k'}^\dagger e^{ik'x} \right) \end{aligned} \quad (7.2.83)$$

$$\begin{aligned} &= - \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} \omega_k k'^i \int d^3x \left[a_k a_{k'} e^{-ix(k+k')} + a_k^\dagger a_{k'}^\dagger e^{ix(k+k')} - \right. \\ &\quad \left. - a_k a_{k'}^\dagger e^{-ix(k-k')} - a_k^\dagger a_{k'} e^{ix(k-k')} \right] \end{aligned} \quad (7.2.84)$$

possiamo integrare in d^3x e usare la definizione della δ :

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} \omega_k k'^i (2\pi)^3 \left[-\delta^3(\vec{k} + \vec{k}') e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t} a_k a_{k'} + \right. \\ &\quad \left. - \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') e^{+i(\omega_k + \omega_{k'})t} a_k^\dagger a_{k'}^\dagger + \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} a_k a_{k'}^\dagger + \right. \\ &\quad \left. + \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') e^{+i(\omega_k - \omega_{k'})t} a_k^\dagger a_{k'} \right] \end{aligned} \quad (7.2.85)$$

utilizziamo le δ^3 e integriamo in d^3k' :

$$= \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \omega_k k^i \left[-e^{-2i\omega_k t} a_k a_{-k} - e^{+2i\omega_k t} a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k \right] \quad (7.2.86)$$

$$= - \int \frac{d^3k}{2} k^i \left[e^{2i\omega_k t} a_k a_{-k} + e^{+2i\omega_k t} a_k^\dagger a_{-k}^\dagger \right] + \int \frac{d^3k}{2} k^i \left[a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k \right] \quad (7.2.87)$$

ora, l'integrando del primo pezzo è dispari in $\vec{k}$ è quindi l'integrale va a zero. Ci rimane quindi, usando di nuovo la regola di commutazione (7.2.56):

$$P^i = \int d^3k k^i \left[a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \delta^3(0) \right]. \quad (7.2.88)$$

Anche ora con (7.2.88) abbiamo il problema del contributo divergente all'energia. Ovviamente, anche in questo caso questo termine corrisponde alla somma continua su tutti i modi normali delle energie associate a ciascuno stato fondamentale, che è consistente con l'interpretazione di campo inteso come somma di infiniti oscillatori armonici (estesi al continuo).

La presenza di infiniti in una teoria è sempre inquietante e porta a dubitare molto, anche se sappiamo che in questo caso si tratta di una quantità non osservabile. Notiamo che nei casi esaminati, il termine divergente (che eliminiamo facendo uno shift infinito dell'energia di punto zero) derivava dal commutatore (7.2.56), ed è quindi legato all'ordinamento degli operatori di creazione e distruzione che compaiono all'interno delle espressioni di $\hat{\phi}$, $\hat{\pi}$ e $\hat{H}$. Operativamente possiamo eliminare questo termine indesiderato dando una prescrizione sull'ordine in cui mettere gli operatori, sto parlando del **normal ordering** o ordinamento temporale. Parliamo del normal ordering nella sezione §G.5 dell'Appendice G, ma sostanzialmente si tratta della prescrizione che ci dice di mettere tutti gli operatori di distruzione sulla destra (così nel caso in cui agiscano sullo stato di vuoto $|0\rangle$ danno 0) e tutti gli operatori di creazione a sinistra. Il normal ordering ci permette di eliminare tutti i contributi privi di significato da un prodotto di operatori di campo quantizzati.

Completiamo il processo di quantizzazione canonica interpretando $\hat{H}$ secondo il normal ordering, quindi da:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k \left[a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k \right] \quad (7.2.89)$$

facciamo:

$$: \hat{H} : = \int d^3k \omega_k a_k^\dagger a_k = \int d^3x \omega_k \hat{n}_k \quad (7.2.90)$$

in cui l'operatore $\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ è l'**operatore numero** che conta quante particelle, o meglio quante eccitazioni, corrispondenti ad un certo modo normale

k ci sono in un generico stato. In modo analogo troviamo l'operatore impulso canonicamente coniugato normal ordered:

$$P^i = \int \frac{d^3k}{2} k^i \left[a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k \right] \quad (7.2.91)$$

$$: P^i : = \int d^3k k^i a_k^\dagger a_k = \int d^3k k^i \hat{n}_k. \quad (7.2.92)$$

Determinata l'hamiltoniana (normal ordered, quindi senza infiniti) possiamo concentrarci sullo spettro dei suoi autovalori. Ovviamente stiamo trattando una teoria libera e lo spettro di H è quello dato dall'impulso, quindi gli autovettori di $\hat{H}$ sono gli stati $|k\rangle$ ad impulso fissato (poiché l'hamiltoniana è libera e i suoi autostati sono anche autostati dell'impulso).

Ripassiamo brevemente quello visto nella sezione §G.4 dell'Appendice G riguardo stati ad impulso fissato. Abbiamo definito lo stato di vuoto $|0\rangle$ come uno stato non occupato da alcuna particella, o da alcuna eccitazione del campo di Klein-Gordon (e nel senso dell'oscillatore armonico della MQ lo stato di energia minima). Vale la condizione:

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0. \quad (7.2.93)$$

Definiamo lo stato di un particella con impulso k fissato come:

$$\hat{a}_k^\dagger |0\rangle = |\vec{k}\rangle \quad (7.2.94)$$

e uno stato ad n particelle, ciascuno con impulso k_i , sarà dato da:

$$\hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \dots \hat{a}_{k_n}^\dagger |0\rangle = |\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n\rangle \quad (7.2.95)$$

e l'insieme degli stati ad $1, 2, \dots, n$ particelle forma lo spazio di Fock. Teniamo anche a mente che la quantizzazione canonica quantizza stati a molte particelle, il cui numero non è generalmente fissato, mentre la *prima* quantizzazione si riferisce ad una dinamica di una particella singola che, con fatica, può essere esteso a più particelle, infatti, il motivo per cui introduciamo il formalismo dei numeri di occupazione (vedi l'Appendice G) è proprio per risolvere le difficoltà che incontriamo quando vogliamo descrivere sistemi quantistici a molte particelle identiche, che come facilmente visibile, se le particelle sono più di 2 o 3 il tutto diventa estremamente lungo e complicato. È anche utile per comodità futura capire la sezione §G.5.1 dell'Appendice G in cui analizziamo l'operatore numero che conta le particelle che popolano un certo stato (o sistema); per renderlo "attuale" rispetto i discorsi che stiamo facendo, riguardo stati ad impulso k fissato, basta sostituire la nozione di stato generico i , di cui si parla nell'Appendice, con la nozione di stato generico con impulso k .

Abbiamo quasi finito la sezione riguardante il campo scalare $\hat{\phi}$, di cui daremo un'interpretazione nella sezione §7.6. Vediamo per concludere cosa succede quando applichiamo il campo $\hat{\phi}$ sullo stato di vuoto $|0\rangle$. Vediamo:

$$\hat{\phi}(x)|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right] |0\rangle \quad (7.2.96)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{ikx} |\vec{k}\rangle \quad (7.2.97)$$

dunque, $\hat{\phi}(x)$ quando agisce su $|0\rangle$ crea una sovrapposizione lineare, continua, di stati di singola particella ad impulso (ora stiamo guardando quadri-impulso) definito nel punto $\vec{x}$. Se nella sovrapposizione selezioniamo uno specifico stato $|k'\rangle$ possiamo calcolare l'ampiezza, opportunamente normalizzata. Dobbiamo usare la relazione (7.2.51):

$$\langle k'| = (2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{k'}} \langle \vec{k}'| \quad (7.2.98)$$

e vediamo:

$$\langle k'|\hat{\phi}(x)|0\rangle = \int d^3k e^{ikx} \langle \vec{k}'|\vec{k}\rangle \quad (7.2.99)$$

$$= \int d^3k e^{ikx} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (7.2.100)$$

$$= e^{ik'x} \quad (7.2.101)$$

dunque, $e^{ik'x}$ ci da' il peso del modo k' -esimo all'interno dello stato creato dall'operatore $\hat{\phi}(x)$ fatto agire sul vuoto $|0\rangle$. Dunque, in base ai discorsi che abbiamo fatto nella sezione §G.6 nell'Appendice G, è evidente che l'operatore $\hat{\phi}$ è legato alla funzione d'onda intesa come nella MQ non relativistica, dal momento che la funzione d'onda $e^{ik'x}$ (soluzione dell'equazione di Klein-Gordon nel senso della MQ) è esattamente il peso di ciascun operatore di creazione (o di distruzione, facendo un discorso analogo) presente nella sovrapposizione di $\hat{\phi}$.

7.2.2 Teorema spin-statistica

Notiamo una cosa importante. Questo formalismo di quantizzazione, che abbiamo utilizzato, ci permette anche di stabilire la statistica rispettata dalle particelle. Infatti, se consideriamo uno stato con 2 particelle con diverso impulso k e k' dato da:

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'}^\dagger |0\rangle. \quad (7.2.102)$$

Per via del commutatore:

$$[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0 \quad (7.2.103)$$

allora (per discorsi analoghi a quelli che abbiamo fatto nella sezione §G.4 dell'Appendice G parlando di bosoni e fermioni) lo stato (7.2.102) è perfettamente identico a:

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k^\dagger |0\rangle. \quad (7.2.104)$$

cioè allo stato in cui le due particelle sono scambiate.

Inoltre, ogni singolo "modo normale" k può contenere un numero arbitrario di particelle (vuol dire che non siamo vincolati dal principio di esclusione di Pauli):

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k^\dagger \dots \hat{a}_k^\dagger |0\rangle \quad (7.2.105)$$

e per questo il campo di Klein-Gordon descrive **bosoni**, cioè particelle, di spin intero, che obbediscono alla **statistica di Bose-Einstein**.

7.3 Campo scalare carico

I riferimenti per questa sezione sono il Kaku Physical law should have mathematical beauty.Kaku:1993ym e il capitolo §7, §11, §12 del Lancaster e Blundell Physical law should have mathematical beauty.Lancaster:2014pza.

Possiamo generalizzare i discorsi fatti nella sezione §7.2 pensando che ci sia più di un campo scalare. I campi che tratteremo in questa sezione li chiameremo carichi, ma attenzione perché stiamo ancora trattando campi scalari, dunque con carica elettrica nulla, e quando ci riferiamo alla carica intendiamo dire carica generalizzata nel senso del teorema di Noether. Immaginiamo di prendere due campi $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ reali ed indipendenti, ossia tali per cui:

$$[\phi_1, \phi_2] = 0. \quad (7.3.1)$$

Presi i due campi possiamo definire:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x)) \quad (7.3.2)$$

$$\phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) - i\phi_2(x)) \quad (7.3.3)$$

che possiamo verificare essere indipendenti, ossia commutanti, grazie al fatto che anche ϕ_1 e ϕ_2 lo siano:

$$[\phi, \phi^\dagger] = 0. \quad (7.3.4)$$

I due nuovi campi che abbiamo definito possono essere rappresentati sul piano di Arnald-Gauss, con il campi ϕ_1 sull'asse reale e ϕ_2 sull'asse immaginario, come mostrato in figura 7.2.

La lagrangiana in questo caso sarà:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (7.3.5)$$

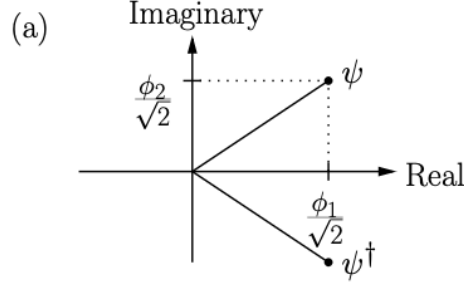


Figura 7.2: Rappresentazione dei campi complessi nel piano di Argand-Gauss.

e la teoria che ne deriva viene chiamata anche *teoria di campo scalare complessa* (o carica). In questa teoria anziché parlare dei 2 campi ϕ_1 e ϕ_2 , immaginiamo di fonderli e di trattarne solamente uno, ossia ϕ (e poi $\phi^\dagger$). Il vantaggio di passare dalla trattazione di due campi ad uno è che il nuovo campo ϕ ora ha 2 gradi di libertà e la lagrangiana possiede la simmetria $U(1)$, ma ne parleremo meglio dopo.¹⁶

Avremo nella nostra teoria due momenti coniugati, uno per ciascuno di ϕ e $\phi^\dagger$:

$$\pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger \quad (7.3.6)$$

$$\pi_{\phi^\dagger} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi} \quad (7.3.7)$$

e l'hamiltoniana sarà la somma dei contributi relativi ai due campi¹⁷:

$$\mathcal{H} = \pi_\phi \dot{\phi} + \pi_{\phi^\dagger} \dot{\phi}^\dagger - \mathcal{L} \quad (7.3.8)$$

$$= \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} + \dot{\phi} \dot{\phi}^\dagger - \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} + \vec{\nabla} \phi^\dagger \vec{\nabla} \phi + m^2 \phi^\dagger \phi \quad (7.3.9)$$

$$= \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} + \vec{\nabla} \phi^\dagger \vec{\nabla} \phi + m^2 \phi^\dagger \phi \quad (7.3.10)$$

in cui abbiamo usato il commutatore (7.3.4).

¹⁶Notiamo solo un paio di cose. Il fatto che ϕ abbia due gradi di libertà anziché uno, come i campi ϕ_i , lo rende un campo più complesso, nel senso che possiamo assegnare un'etichetta a questi gradi di libertà, e trattare campi più ricchi di quelli scalari. Notando che $\mathcal{L}$ gode della simmetria $U(1)$, che ricordiamo è anche chiamato gruppi delle trasformazioni di carica, allora possiamo arbitrariamente chiamare il grado di libertà intrinseco di ϕ *carica* (nel senso di Noether) e trattare una teoria di campo carica, in cui esisteranno particelle di tipo a e particelle di tipo b con *carica* opposta ad a . Quando vogliamo fare una teoria di campo carica (quindi con gradi di libertà aggiuntivi) dobbiamo sempre avere, o in qualche modo rendere, i campi complessi.

¹⁷Ricordandoci che in Meccanica Quantistica abbiamo imparato che l'hamiltoniana è additiva.

Possiamo promuovere i campi al ruolo di operatori e fissiamo le regole di commutazione:

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}_{\phi}(\vec{y}, t) \right] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (7.3.11)$$

$$\left[\hat{\phi}^{\dagger}(\vec{x}, t), \hat{\pi}_{\phi^{\dagger}}(\vec{y}, t) \right] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (7.3.12)$$

e tutti gli altri commutatori (a tempi uguali) sono nulli. Grazie ai lunghissimi discorsi che abbiamo fatto nella sezione §7.2 riguardo i fattori di normalizzazione possiamo scrivere:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{b}_k^{\dagger} e^{ikx} \right] \quad (7.3.13)$$

$$\hat{\phi}^{\dagger}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}_k^{\dagger} e^{+ikx} + \hat{b}_k e^{-ikx} \right] \quad (7.3.14)$$

in cui gli operatori $\hat{a}$ e $\hat{b}$ sono di natura diversa. Nel caso scalare avevamo trovato che l'operatore (7.2.58) era un operatore hermitiano; ora, nel caso di campo complesso non c'è motivo per cui ϕ e $\phi^{\dagger}$ siano hermitiani. Però, per definizione sono l'uno l'hermitiano coniugato dell'altro.

Possiamo prendere le definizioni (7.3.13) e (7.3.14), imporre che siano indipendenti, quindi che commutino, e verificare che gli operatori $\hat{a}$ e $\hat{b}$ soddisfino le relazioni di commutazione:

$$\left[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^{\dagger} \right] = \left[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^{\dagger} \right] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (7.3.15)$$

e tutti gli altri loro commutatori sono nulli.

Con un conto del tutto analogo a quello fatto nella sezione §7.2 e con l'applicazione del normal ordering possiamo ottenere l'hamiltoniana:

$$: \hat{H} : = \int d^3k \omega_k \left(\hat{a}_k^{\dagger} \hat{a}_k + \hat{b}_k^{\dagger} \hat{b}_k \right) \quad (7.3.16)$$

$$= \int d^3k \omega_k \left(\hat{n}_k^a + \hat{n}_k^b \right) \quad (7.3.17)$$

con $\hat{n}_k^a$ ed $\hat{n}_k^b$ che contano, rispettivamente, il numero di particelle a e b . Notiamo la simmetria di $\hat{H}$ per scambio $a \longleftrightarrow b$, il che ci dice che l'hamiltoniana non distingue tra i due tipi di operatori e possiamo dire che i due tipi di particelle hanno la stessa energia ω_k .

In più notiamo che, avendo un'algebra di oscillatore armonico (7.3.15), l'hamiltoniana giustamente è formata dalla somma di due hamiltoniane di oscillatore armonico. Ciò che abbiamo imparato è che, nonostante il campo contenga al suo interno sempre sia il contributo di particella a che di anti-particella b , le regole di commutazione ci dicono che tali particelle convivono tranquillamente ed in modo indipendente.

7.3.1 Simmetrie, teorema di Noether e cariche conservate

Abbiamo accennato prima al fatto che il campo scalare complesso abbia una simmetria interna di tipo $U(1)$, infatti per questo la lagrangiana è invariante per trasformazioni:

$$\phi \longrightarrow e^{i\alpha} \phi \quad (7.3.18)$$

$$\phi^\dagger \longrightarrow e^{-i\alpha} \phi^\dagger \quad (7.3.19)$$

che possono essere rappresentate nel piano di Arnald-Gauss come delle rotazioni, come mostrato in figura 7.3.

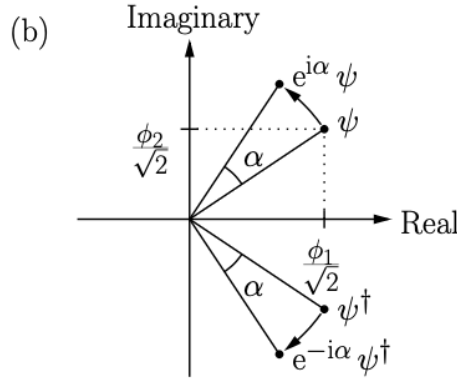


Figura 7.3: Rappresentazione dei campi complessi nel piano di Arnald-Gauss sotto una trasformazione del gruppo $U(1)$.

Facciamo un'osservazione rapida. Il fatto che la lagrangiana sia invariante per trasformazioni di $U(1)$ è la stessa cosa che dire che l'invarianza la si ha per rotazioni nel piano di $\phi_1 - \phi_2$ che sono invece rappresentate dal gruppo $SO(2)$ (ricorda che $SO(2)$ è il gruppo delle rotazioni bidimensionali). Sono la stessa cosa perché il gruppo $U(1)$ è un gruppo unidimensionale di trasformazioni unitarie che è isomorfo al gruppo $SO(2)$, il che li rende dal punto di vista matematico, e fondamentale, uguali.

La lagrangiana è anche invariante per trasformazioni infinitesime (sempre di $U(1)$):

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi + i\alpha\phi \quad \implies \quad \Delta\phi = i\phi \quad (7.3.20)$$

$$\phi^\dagger \longrightarrow \phi'^\dagger = \phi^\dagger - i\alpha\phi^\dagger \quad \implies \quad \Delta\phi^\dagger = -i\phi^\dagger. \quad (7.3.21)$$

La corrente di Noether, utilizzando la relazione (5.2.5) valida quando abbiamo una simmetria interna, è:

$$\hat{j}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} \Delta\phi^\dagger \quad (7.3.22)$$

$$= i(\partial^\mu \phi^\dagger)\phi - i(\partial^\mu \phi)\phi^\dagger. \quad (7.3.23)$$

La carica conservata è di conseguenza:

$$\hat{Q} = \int d^3x \hat{j}^0 \quad (7.3.24)$$

$$= i \int d^3x \left[(\partial^0 \phi^\dagger) \phi - (\partial^0 \phi) \phi^\dagger \right] \quad (7.3.25)$$

utilizzando le espressioni (7.3.13) e (7.3.14) e facendo il normal ordering:

$$: \hat{Q} : = \int d^3k \left(\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k - \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) \quad (7.3.26)$$

$$= \int d^3k \left(\hat{n}_k^b - \hat{n}_k^a \right). \quad (7.3.27)$$

Quindi la carica conservata sarà data dal numero di particelle b (che interpreteremo come antiparticelle) meno il numero di particelle a (particelle). Questa quantità è proporzionale alla carica totale del sistema. Tutto questo garantisce la conservazione della carica all'interno del sistema, perché? Le particelle, che associamo ad $\hat{a}$ hanno un certo segno della carica di Noether, per conservare la carica totale del sistema, abbiamo bisogno di un'altro tipo di eccitazione (le antiparticelle) del campo che abbia segno della carica di Noether opposta in modo che cancelli il contributo di particella. Discende da ciò che se assumessimo la non esistenza dell'antimateria allora la carica di Noether non sarebbe conservata.

Notiamo che, nonostante particelle e antiparticelle contribuiscano con segno opposto alla carica di Noether, essi contribuiscono con lo stesso segno all'energia totale (7.3.17).

È naturale, anche se lo analizzeremo meglio in §7.6, interpretare i "quanti" corrispondenti agli operatori di tipo $\hat{a}$ e $\hat{b}$, come l'uno l'antiparticella dell'altro. Noi possiamo associare (per pura convenzione) ad $\hat{a}$ il ruolo di particella e a $\hat{b}$ quello di antiparticella. In particolare vediamo dall'espressioni (7.3.13) e (7.3.14) che l'azione del campo $\hat{\phi}$ è di distruggere una particella (per la presenza di $\hat{a}$) e di creare un'antiparticella (per via di $\hat{b}^\dagger$) nello stesso punto $\vec{x}$. Ovviamente, $\hat{\phi}^\dagger$ farà l'opposto, ovvero crea una particella e distrugge un'antiparticella. Ripeto, motivazioni più dettagliate le vediamo in §7.6, per ora fidati.

Come accennato all'inizio della sezione, quando parliamo di carica non ci riferiamo alla carica elettrica, infatti, finché non parleremo del campo di Dirac e dell'interazione con il campo elettromagnetico non possiamo parlare di carica elettrica, ma solamente di carica abeliana.

Interpretare $\hat{Q}$, quantità conservata, come una carica abeliana (simile in qualche modo alla carica elettrica) non è cosa da poco conto. Infatti, il fatto che $\hat{Q}$ sia la differenza tra due quantità e quindi possa, potenzialmente, essere negativa, creò problemi e confusione quando si provò ad interpretare l'equazione di Klein-Gordon come l'estensione relativistica dell'equazione d'onda

di Schrodinger. Per questo $\hat{Q}$ non può essere interpretata come densità di probabilità e la consideriamo una carica abeliana.

Per convenzione associamo una carica positiva alle particelle scalari (tipo a) e carica negativa alle antiparticelle scalari (tipo b). Infatti, se vuoi i segni in (7.3.27) possono essere cambiati e avere $\hat{Q} \propto \hat{n}_k^a - \hat{n}_k^b$; questo si fa cambiando convenzione in $\hat{j}^\mu$, vedi il capitolo §12.2 del Lancaster e Blundell *Physical law should have mathematical beauty*. Lancaster:2014pza.

In base a tutto ciò che abbiamo detto, gli operatori tipo b introducono una nuova forma di materia nella teoria, l'**antimateria**.

7.4 Campo spinoriale

Consideriamo ora un campo spinoriale di spin 1/2 e seguiamo la stessa strategia utilizzata per il campo scalare e scalare carico.

In questo caso la lagrangiana è data da:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (7.4.1)$$

con $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ e in cui $\bar{\psi}$ e ψ sono indipendenti, proprio come $\phi^\dagger$ e ϕ lo erano per il campo carico.

I momenti coniugati sono:

$$\pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi} \gamma^0 = i\psi^\dagger \quad (7.4.2)$$

$$\pi_{\bar{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0. \quad (7.4.3)$$

L'hamiltoniana corrispondente è:

$$\mathcal{H} = \pi_\psi \dot{\psi} - \mathcal{L} \quad (7.4.4)$$

$$= i\psi^\dagger \partial_0 \psi - i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \partial_0 \psi - i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi + m\psi^\dagger \gamma^0 \psi \quad (7.4.5)$$

$$= \bar{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi \quad (7.4.6)$$

espressione che possiamo ulteriormente semplificare utilizzando l'equazione di Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \implies (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - m) \psi = 0 \quad (7.4.7)$$

$$\implies i\gamma^i \partial_i \psi = m\psi - i\gamma^0 \partial_0 \psi \quad (7.4.8)$$

il che ci permette di avere l'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \bar{\psi} (+i\gamma^0 \partial_0 - m + m) \psi \quad (7.4.9)$$

$$= i\bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi \quad (7.4.10)$$

$$= i\psi^\dagger \dot{\psi}. \quad (7.4.11)$$

A questo punto, come sappiamo, dobbiamo elevare al ruolo di operatore i nostri campi ed imporre le opportune regole di commutazione, o meglio, di anticommutazione. Infatti, dobbiamo stare attenti e non dobbiamo cadere in inganno e semplicemente seguire ciò che abbiamo fatto per i campi scalari. L'equazione di Dirac descrive campi fermionici, per i quali ci aspettiamo regole di anticommutazione, poiché abbiamo imparato dalla trattazione quantistica delle particelle identiche (vedi l'Appendice G) che i fermioni hanno funzione d'onda antisimmetriche per scambio di particelle. Imponiamo che a tempi uguali si abbia:

$$\left\{ \psi_s(\vec{x}, t), \psi_{s'}^\dagger(\vec{y}, t) \right\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ss'} \quad (7.4.12)$$

$$\left\{ \psi_s(\vec{x}, t), \psi_{s'}(\vec{y}, t) \right\} = \left\{ \psi_s^\dagger(\vec{x}, t), \psi_{s'}^\dagger(\vec{y}, t) \right\} = 0. \quad (7.4.13)$$

Per via delle cose imparate nelle sezioni precedenti possiamo fare un'analisi di Fourier dei campi fermionici:

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left(u_s(\vec{p}) \hat{a}_s(\vec{p}) e^{-ipx} + v_s(\vec{p}) \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) e^{+ipx} \right) \quad (7.4.14)$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left(\bar{u}_s(\vec{p}) \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) e^{+ipx} + \bar{v}_s(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) e^{-ipx} \right) \quad (7.4.15)$$

dove abbiamo inserito: il prodotto $px \equiv p^\mu x_\mu$; gli spinori¹⁸ $u_s(\vec{p})$ e $v_s(\vec{p})$ che conferiscono la natura spinoriale a $\hat{\psi}$; gli operatori $\hat{a}_s^{(\dagger)}(\vec{p})$ e $\hat{b}_s^{(\dagger)}(\vec{p})$ che conferiscono la natura operatoriale a $\hat{\psi}$ e che rispettivamente creano/distruggono particelle e antiparticelle (per seguire la convenzione iniziata nella sezione §7.3). È dimostrabile che gli operatori $\hat{a}_s(\vec{p})$ e $\hat{b}_s(\vec{p})$ rispettino le regole di anticommutazione:

$$\left\{ \hat{a}_s(\vec{p}), \hat{a}_r^\dagger(\vec{p}') \right\} = \left\{ \hat{b}_s(\vec{p}), \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}') \right\} = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{sr} \quad (7.4.16)$$

con tutti gli altri anticommutatori nulli.

Possiamo ora scriverci l'hamiltoniana $\mathcal{H}$ in funzione degli operatori $\hat{a}_s(\vec{p})$ e $\hat{b}_s(\vec{p})$ facendo praticamente gli stessi conti della sezione §7.2. Vediamo:

$$\hat{H} = \int d^3x \mathcal{H} \quad (7.4.17)$$

$$= \int d^3x i \bar{\psi} \dot{\psi} \quad (7.4.18)$$

¹⁸Nota che li abbiamo messi poiché nel caso dell'equazione di Dirac abbiamo visto che la soluzione è del tipo (6.7.1), in analogia con il fatto che nell'equazione di Klein-Gordon avevamo messo solamente gli esponenziali $e^{\pm i k x}$, che erano soluzioni di quell'equazione differenziale.

$$\begin{aligned}
&= \int d^3x \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s,r=1}^2 \left(u_s^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_s^\dagger e^{+ipx} + v_s^\dagger(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) e^{-ipx} \right) \times \\
&\quad \times \gamma^0 E_{p'} \left(u_r(\vec{p}') \hat{a}_r(\vec{p}') e^{-ip'x} - v_r(\vec{p}') \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}') e^{+ip'x} \right) \quad (7.4.19)
\end{aligned}$$

ora, se integriamo su d^3x , sfruttiamo la definizione della δ di Dirac e poi utilizziamo le $\delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$ per integrare su d^3p' , otteniamo:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3p \left(u_s^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) u_r(\vec{p}) \hat{a}_r(\vec{p}) - v_s^\dagger(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) v_r(\vec{p}) \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}) \right) \quad (7.4.20)$$

ricordandoci che u e v sono ortogonali, utilizzando le relazioni di normalizzazione:

$$\begin{cases} u_s^\dagger(\vec{p}) u_r(\vec{p}) = 2E_p \delta_{sr} \\ v_s^\dagger(\vec{p}) v_r(\vec{p}) = 2E_p \delta_{sr} \end{cases} \quad (7.4.21)$$

e facendo il normal ordering (così ci liberiamo del termine costante che ci porta ad un infinito) otteniamo:

$$: \hat{H} : = \int d^3p \sum_{s=1}^2 E_p \left(\hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_s(\vec{p}) + \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) \right) \quad (7.4.22)$$

$$= \int d^3p \sum_{s=1}^2 E_p \left(\hat{n}_{sp}^a + \hat{n}_{sp}^b \right) \quad (7.4.23)$$

in cui facciamo attenzione al fatto che ci sia un segno più tra i due termini di $\hat{H}$; questo ci dice che sia $\hat{a}_s^\dagger(\vec{p})$ che $\hat{b}_s^\dagger(\vec{p})$ creano particelle/antiparticelle ad energia positiva, il che non è banale perché ci porta ad avere di conseguenza energia $\hat{H}$ definita positiva. Il segno $+$ è dovuto alla scelta di regole di anticommutazione anziché di commutazione, che avrebbero portato ad un segno negativo.¹⁹

L'operatore impulso associato al campo è dato da:

$$: \vec{P} : = \int d^3x \psi^\dagger \left(-i\vec{\nabla} \right) \psi \quad (7.4.24)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \vec{p} \left(\hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_s(\vec{p}) + \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) \right) \quad (7.4.25)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \vec{p} \left(\hat{n}_{sp}^a + \hat{n}_{sp}^b \right) \quad (7.4.26)$$

¹⁹Puoi a questo proposito vedere l'inizio del capitolo 3.5 del Peskin e Schroeder Physical law should have mathematical beauty. Peskin:1995ev in cui c'è una sezione intitolata *How Not to Quantize the Dirac Field: A Lesson in Spin and Statistics* che mostra come si arrivi, imponendo delle relazioni di commutazione, ad un'espressione dell'hamiltoniana in cui si ha $\hat{H} \propto E_p \left(\hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_s(\vec{p}) - \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) \right)$ e quindi ad una situazione in cui è possibile creare molte più particelle $\hat{b}^\dagger$ e scendere sempre di più nello spettro energetico, non avendo un'energia definita positiva.

Nel senso visto nelle sezioni precedenti, e nella sezione §G.4 dell'Appendice G, intesi gli operatori $\hat{a}_s(\vec{p})$ e $\hat{b}_s(\vec{p})$ come di distruzione (o creazione) di stati a spin s ed impulso $\vec{p}$ definito e definito lo stato di vuoto $|0\rangle$ come:

$$\hat{a}_s(\vec{p})|0\rangle = \hat{b}_s(\vec{p})|0\rangle = 0 \quad (7.4.27)$$

allora, definiamo uno stato fermionico (particella) e anti-fermionico (antifer-mionico) a spin e tri-impulso definito come:

$$|\vec{p}, s\rangle_a = \hat{a}_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle \quad (7.4.28)$$

$$|\vec{p}, s\rangle_b = \hat{b}_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle \quad (7.4.29)$$

la cui normalizzazione è fissata come:

$$\langle \vec{p}, s | \vec{p}', r \rangle = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{sr} \quad (7.4.30)$$

$$\langle p, s | p', r \rangle = 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{sr}. \quad (7.4.31)$$

7.4.1 Teorema spin-statistica

Come nel caso del campo scalare, imporre ben precise regole di anticommutazione tra i campi ψ e $\psi^\dagger$ richiede ben precise regole di anticommutazione tra gli operatori di creazione e distruzione:

$$\{\hat{a}_s(\vec{p}), \hat{a}_r^\dagger(\vec{p}')\} = \{\hat{b}_s(\vec{p}), \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}')\} = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{sr} \quad (7.4.32)$$

$$\{\hat{a}_s(\vec{p}), \hat{a}_r(\vec{p}')\} = \{\hat{a}_s^\dagger(\vec{p}), \hat{a}_r^\dagger(\vec{p}')\} = 0 \quad \forall s, r \quad (7.4.33)$$

$$\{\hat{b}_s(\vec{p}), \hat{b}_r(\vec{p}')\} = \{\hat{b}_s^\dagger(\vec{p}), \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}')\} = 0 \quad \forall s, r \quad (7.4.34)$$

da cui ricaviamo che, per via degli anticommutatori $\{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\} = \{\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger\} = 0$, abbiamo:

$$\left(\hat{a}_s^\dagger(\vec{p})\right)^2 = \left(\hat{b}_s^\dagger(\vec{p})\right)^2 = 0 \quad (7.4.35)$$

e cioè che gli stati possono contenere una sola particella a definito spin, tri-impulso ed energia. Questo non è altro che il principio di esclusione di Pauli. Infatti vediamo che partendo dal vuoto $|0\rangle$, creiamo una particella con quadri-impulso p^μ e spin s definiti:

$$\hat{a}_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle \quad (7.4.36)$$

se aggiungiamo una seconda particella con stesso p^μ e spin s , allora otteniamo 0:

$$\hat{a}_s^\dagger(\vec{p})\hat{a}_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle. \quad (7.4.37)$$

In più vediamo che, per via delle regole di anticommutazione abbiamo:

$$\hat{a}_s^\dagger(\vec{p})\hat{a}_{s'}^\dagger(\vec{p}')|0\rangle \neq \hat{a}_{s'}^\dagger(\vec{p}')\hat{a}_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle \quad (7.4.38)$$

e differiscono per un segno.

Quindi, le regole di anticommutazione implicano che le eccitazioni del campo ψ (e di $\psi^\dagger$) siano particelle (e antiparticelle), di spin semi-intero, che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac.

Un generico stato a molte particelle ed antiparticelle è dato da:

$$\prod_{i=1}^N \hat{a}_{\alpha_i}^\dagger(\vec{p}_i) \prod_{j=1}^M \hat{b}_{\beta_j}^\dagger(\vec{p}_j) |0\rangle. \quad (7.4.39)$$

7.4.2 Simmetrie, teorema di Noether e cariche conservate

La lagrangiana di Dirac presenta una simmetria per trasformazioni globale $U(1)$:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi \quad (7.4.40)$$

con α costante reale ed indipendente da x . La corrente di Noether corrispondente a questa simmetria è data da:

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (7.4.41)$$

la cui carica associata è:

$$:Q: = \int d^3p \sum_s \left(\hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_s(\vec{p}) - \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) \right) \quad (7.4.42)$$

$$= \int d^3p \sum_s \left(\hat{n}_{sp}^a - \hat{n}_{sp}^b \right) \quad (7.4.43)$$

vediamo la forte somiglianza con la carica conservata per il campo scalare carico (7.3.27). In questo caso la carica conservata è la carica totale, ovvero, il numero di particelle " - " il numero di antiparticelle. Quando accoppieremo il campo di Dirac con il campo elettromagnetico potremo confermare il fatto che la carica (7.4.43) sia effettivamente la carica elettrica (in unità naturali).²⁰

Possiamo anche calcolare il tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$ e il momento angolare associati al campo fermionico:

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi \quad (7.4.44)$$

$$M^{\lambda\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\lambda \underbrace{\left(x^\mu\partial^\nu - n^\nu\partial^\mu - \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu} \right)}_{M^{\mu\nu}=L^{\mu\nu}+S^{\mu\nu}} \psi. \quad (7.4.45)$$

²⁰Infatti, in QED utilizzeremo il campo spinoriale ψ per descrivere elettroni e positroni. Le particelle create da $\hat{a}_s(\vec{p})$ sono elettroni di tri-impulso $\vec{p}$, energia $E_p > 0$, spin $s = \frac{1}{2}$, terza componente di spin data da $u_s(p)$ e carica $Q = +1$ (sarebbe $Q = 1 \cdot e$ se non fossimo in unità di carica e). Le antiparticelle create da $\hat{b}_s(\vec{p})$ sono positroni di tri-impulso $\vec{p}$, energia $E_p > 0$, spin $s = \frac{1}{2}$, terza componente di spin data da $v_s(p)$ (cioè opposta a quella di e^-) e carica $Q = -1$ (quindi $Q = -e$).

La carica conservata associata al tensore di momento angolare è:

$$Q_j = \int d^3x M^{0\mu\nu} \quad (7.4.46)$$

$$= \int d^3x i\psi^\dagger \left(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \right) \psi \quad (7.4.47)$$

rispetto a quello calcolabile con la teoria scalare ora abbiamo il termine di spin non banale, proporzionale a $\frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu}$, che ancora una volta ci conferma che siamo in presenza di particelle di spin $\frac{1}{2}$.

Sostituendo l'espressione di ψ e $\psi^\dagger$ in termini di $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, $\hat{b}$ e $\hat{b}^\dagger$ è possibile esprimere il momento angolare totale nel sistema di riferimento di riposo:

$$\begin{aligned} \hat{J}_z = \int d^3 \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_{p'}}} e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \sum_{r,r'} \left(\hat{a}_{r'}^\dagger(\vec{p}') u_{r'}^\dagger(\vec{p}') + \hat{b}_{r'}^\dagger(\vec{p}') v_{r'}^\dagger(\vec{p}') \right) \times \\ \times \frac{\Sigma_3}{2} \left(\hat{a}_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) + \hat{b}_r(\vec{p}) v_r(\vec{p}) \right) \end{aligned} \quad (7.4.48)$$

$$\hat{J}_z \hat{a}_s^\dagger(\vec{0}) |0\rangle = \frac{1}{2m} \left(\sum_r u_s^\dagger(\vec{0}) \frac{\Sigma_3}{2} u_r(\vec{0}) \right) \hat{a}_r^\dagger(\vec{0}) |0\rangle \quad (7.4.49)$$

da cui si ricava:

$$\hat{J}_z \hat{a}_s^\dagger(\vec{0}) |0\rangle = \pm \frac{1}{2} \hat{a}_s^\dagger(\vec{0}) |0\rangle \quad (7.4.50)$$

$$\hat{J}_z \hat{b}_s^\dagger(\vec{0}) |0\rangle = \mp \frac{1}{2} \hat{b}_s^\dagger(\vec{0}) |0\rangle \quad (7.4.51)$$

che conferma che le particelle, o antiparticelle, associate al campo di Dirac hanno spin $\frac{1}{2}$ e terza componenti di spin opposta tra loro (ad esempio $\pm \frac{1}{2}$ per un fermione e $\mp \frac{1}{2}$ per antifermione). Si veda meglio pagina 60-62 del Peskin e Schroeder Physical law should have mathematical beauty. Peskin:1995ev.

7.5 Schema riassuntivo

Riassumiamo brevemente tutti i risultati visti in questo capitolo, in modo da evidenziare i punti chiave in vista dell'interpretazione che ne potremo dare nella sezione §7.6.

Campo scalare

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right] \quad (7.5.1)$$

$$: \hat{H} : = \int d^3x \omega_k \hat{n}_k. \quad (7.5.2)$$

Campo scalare carico

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{b}_k^\dagger e^{ikx} \right] \quad (7.5.3)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}_k^\dagger e^{+ikx} + \hat{b}_k e^{-ikx} \right] \quad (7.5.4)$$

$$:\hat{H}: = \int d^3k \omega_k \left(\hat{n}_k^a + \hat{n}_k^b \right) \quad (7.5.5)$$

$$:\hat{Q}: = \int d^3k \left(\hat{n}_k^b - \hat{n}_k^a \right) \quad (7.5.6)$$

Campo spinoriale

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left(u_s(\vec{p}) \hat{a}_s(\vec{p}) e^{-ipx} + v_s(\vec{p}) \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) e^{+ipx} \right) \quad (7.5.7)$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left(\bar{u}_s(\vec{p}) \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) e^{+ipx} + \bar{v}_s(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) e^{-ipx} \right) \quad (7.5.8)$$

$$:\hat{H}: = \int d^3p \sum_{s=1}^2 E_p \left(\hat{n}_{sp}^a + \hat{n}_{sp}^b \right) \quad (7.5.9)$$

$$:Q: = \int d^3p \sum_s \left(\hat{n}_{sp}^a - \hat{n}_{sp}^b \right) \quad (7.5.10)$$

7.6 Significato fisico dell'analisi di Fourier

Ora che abbiamo quantizzato il campo siamo autorizzati a parlare di particelle. Sfruttiamo il riassunto dei risultati elencati nella sezione §7.5 per darne un'interpretazione. I riferimenti per questa sezione sono il Lancaster e Blundell Physical law should have mathematical beauty.Lancaster:2014pza e il Barone Physical law should have mathematical beauty.Barone. L'analisi di Fourier dei campi la possiamo scrivere come:²¹

$$\hat{\phi}(x) = \sum_k \left(\text{Termine } e^{-ikx} \right) + \sum_k \left(\text{Termine } e^{ikx} \right). \quad (7.6.1)$$

Ricordiamoci che sia l'equazione di Klein-Gordon che quella di Dirac ammettono soluzioni ad energia sia positiva che negativa. Se vediamo $\phi(x)$ come una funzione d'onda quantistica (cosa che in realtà non è) possiamo interpretare²² il termine e^{ikx} come il contributo delle energie negative. Infatti, sappiamo che la soluzione dell'equazione di Schrodinger libera

²¹Scriviamo $\hat{\phi}(x)$, ma vale anche per i campi spinoriali.

²²Vedi il capitolo 3 di Srednicki Physical law should have mathematical beauty.Srednicki:2007qs.

è $\phi \propto e^{-i(E(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$ in cui $E(\vec{k})$ è l'energia della particella; se prendiamo $e^{ikx} = e^{i(k^0 t - i\vec{k} \cdot \vec{x})} = e^{i(E(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$ allora abbiamo un segno meno da associare all'energia, che quindi diventa negativa. Il termine e^{-ikx} invece è un termine che associamo alle energie positive.

Però, noi nell'espressione primordiale (7.2.21) del campo $\hat{\phi}$ avevamo messo una $\theta(k^0)$ che ci selezionava solamente le energie (e masse, per via del mass-shell) positive. Dobbiamo risolvere questa contraddizione e dare un'interpretazione non solo alle soluzioni ad energie negative, ma anche, di conseguenza, al termine e^{+ikx} .

Per raggiungere il nostro scopo possiamo seguire la strada tracciata da Feynmann²³, che in un certo senso è più corretta (sempre che possa ritenersi un'interpretazione più corretta di un'altra) della visione del mare di Dirac visto nel capitolo §1. Prima guarderemo le equazioni poi adotteremo un'approccio più pittorico.

Cominciamo con il ricordarci che: date le equazioni di una teoria i segni che adottiamo all'interno di essa sono pura convenzione.

Conosciamo già dalla Relatività Speciale le equazioni del moto di una particella carica in moto in un campo elettromagnetico, ossia:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = q F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (7.6.2)$$

in cui τ è il tempo proprio, q la carica della particelle (assunta come positiva) ed $F^\mu{}_\nu$ il tensore di campo elettromagnetico. Possiamo immaginare di invertire il segno del tempo proprio (guardiamo un film al contrario):

$$\tau \longrightarrow -\tau \quad (7.6.3)$$

il che è lecito dopotutto. Facendo questo cambio vediamo che abbiamo:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -q F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (7.6.4)$$

in cui ovviamente il segno $-$ esce dalla derivata prima, dal momento che la derivata seconda si compensa da sola. Scrivo l'equazione sul foglio e me ne dimentico per qualche mese; nel momento in cui riprendo in mano i vecchi appunti e vedo l'equazione (7.6.4) mi sono scordato da dove sbuca quel segno meno, ma è del tutto lecito il fatto che io ora lo associ alla carica elettrica q e pensi il tempo che scorra in avanti e con segno positivo. Quindi, in questo senso, vedere una carica elettrica q positiva che si muove indietro nel tempo (il che ci sembra in qualche modo innaturale, o per lo meno strano), possiamo vedere una carica $-q$ negativa che invece si muove avanti nel tempo (cosa che ci rende più sereni).

²³Come già detto, in realtà anche il fisico svizzero Ernst Stueckelberg sviluppò in parallelo un'interpretazione molto simile.

Per l'equazione di Klein-Gordon possiamo fare un ragionamento analogo. Prendiamo il termine che associamo alle energie negative:

$$e^{ipx} = e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (7.6.5)$$

e immaginiamo di fare anche in questo caso il cambio:

$$t \longrightarrow -t \quad (7.6.6)$$

che però, in analogia con quanto detto sopra, possiamo associare all'energia E e quindi considerare energie $-E$ negative. Ovviamente, dobbiamo ricordarci di avere una teoria relativistica, quindi non possiamo cambiare segno solo al tempo, ma dobbiamo fare in realtà il cambio:

$$x^\mu \longrightarrow -x^\mu. \quad (7.6.7)$$

Facendo il cambio (7.6.7) possiamo vedere che la velocità $\frac{dx^\mu}{dt}$ non cambia di segno per via del fatto che sia posizione che tempo cambiano di segno. Grazie a (7.6.7) il nostro esponenziale associato alle energie negative ora è:

$$e^{ipx} = e^{i(-Et + \vec{p} \cdot \vec{x})} = e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (7.6.8)$$

in cui possiamo associare i cambi di segno che ci sono stati uno all'energia e l'altro all'impulso della particella, avendo quindi:

$$E \longrightarrow -E, \quad \vec{p} \longrightarrow -\vec{p}. \quad (7.6.9)$$

Però non è ancora molto chiaro tutto sto discorso, anche perché con il cambio (7.6.7) l'altro esponenziale e^{-ipx} è diventato e^{ipx} . Quindi, forse non abbiamo risolto il problema del segno nell'esponenziale, però, abbiamo capito che i due esponenziali della soluzione di Klein-Gordon appartengono a due gruppi distinti.

Guardiamo un'altra cosa. Prendiamo dal Lancaster e Blundell Physical law should have mathematical beauty. Lancaster:2014pza l'espressione per la corrente di Noether elettromagnetica per una carica positiva, con energia positiva:

$$J_{EM}^\mu = (+q)2|N|^2 p^\mu = (+q)2|N|^2(E, \vec{p}) \quad (7.6.10)$$

che per una carica positiva, ma ad energia negativa è:

$$J_{EM}^\mu = (+q)2|N|^2 p^\mu = (+q)2|N|^2(-E, \vec{p}). \quad (7.6.11)$$

Ora, per avere quantità fisicamente osservabili dobbiamo avere energie positive, quindi possiamo immaginare di raccogliere un segno meno dal quadri-impulso:

$$J_{EM}^\mu = (-q)2|N|^2 p^\mu = (+q)2|N|^2(E, -\vec{p}) \quad (7.6.12)$$

in questo modo ci è chiaro che se associamo il segno negativo alla carica elettrica q , possiamo vedere che le soluzioni ad energia negativa le possiamo vedere come particelle, che chiamiamo **antiparticelle**, ad energia positiva, ma con carica elettrica e tri-impulso cambiati di segno.

Bene, ora abbiamo capito che le energie negative le possiamo vedere come positive e associate a delle particelle con carica elettrica e tri-impulso cambiato di segno, però non è molto limpido sto discorso. Continuiamo a ragionare. Nella sezione §G.4 dell'Appendice G abbiamo parlato degli operatori di creazione e distruzione $\hat{a}_p^\dagger$ e $\hat{a}_p$, che appunto creavano e distruggevano particelle ad impulso definito (nel caso di campi spinoriali anche a spin fissato); ora, nei campi che abbiamo studiato sono presenti sia $\hat{a}_p^\dagger$ e $\hat{a}_p$ che altri operatori $\hat{b}_p^\dagger$ e $\hat{b}_p$, che abbiamo appurato essere associati a termini (gli esponenziali) corrispondenti ad energie negative, quindi sono operatori di natura diversa da $\hat{a}_p^\dagger$ e $\hat{a}_p$ e possiamo dire che creano e distruggono antiparticelle ad impulso fissato. Però, nei campi $\hat{\phi}$ e $\hat{\psi}$ che ruolo hanno questi operatori di creazione e distruzione? Ovviamente come dice il nome hanno il compito di creare e distruggere particelle e antiparticelle ad impulso (e spin) definito. Per verificarlo basta applicare i campi allo stato di vuoto $|0\rangle$. Però perché i campi $\hat{\phi}$ e $\hat{\psi}$ distruggono particelle e creano antiparticelle e non il contrario?²⁴ La risposta rapida è che possiamo ragionare per analogia con gli operatori $\hat{a}$ e $\hat{b}$. Infatti, abbiamo detto che gli operatori senza croce distruggono particelle e quelli hermitiani coniugati le creano, quindi è logico che $\hat{\phi}$ e $\hat{\psi}$ distruggano particelle e che $\hat{\phi}^\dagger$ e $\hat{\psi}^\dagger$ le creino. Però perché per le antiparticelle fanno il contrario? Rispondiamo a questo sfruttando diagrammi di Feynmann presi brutalmente dal Lancaster e Blundell Physical law should have mathematical beauty.Lancaster:2014pza. Immaginiamo i sistemi come delle palle che possano assorbire ed emettere dei quanti, ossia particelle e antiparticelle. Possiamo rappresentare un sistema ad energia $\mathcal{E}$, carica Q ed impulso $\vec{q}$ come una palla, tipo quella in figura 7.4.

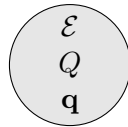


Figura 7.4: Rappresentazione pittorica del sistema ad energia $\mathcal{E}$, carica Q e tri-impulso $\mathbf{q}$.

Se il termine e^{-ikx} è interpretato come una particella entrante nel sistema, quindi come un'onda progressiva che arriva da $-\infty$ e si sposta verso $x \rightarrow +\infty$, allora e^{ikx} sarà un'antiparticella che esce dal sistema, ossia un'onda che si sposta da $x = +\infty$ verso $x = -\infty$. Con il termine "entrante" ci

²⁴Notiamo che parlare di antiparticelle con il campo scalare è un po' forzato non essendo campi con carica elettrica, e per cui *ogni particella è l'antiparticella di se stessa*, possiamo fare riferimento ai campi scalari carichi per questo.

riferiamo, nel senso dei diagrammi di Feynmann, ad una particella (associata a e^{-ikx}) che arriva nel sistema e viene assorbita (quindi annichilita grazie a $\hat{a}$), come possiamo vedere nella figura 7.5 in cui viene assorbita una particella di energia E , carica e e impulso $\vec{p}$.



Figura 7.5: Raffigurazione assorbimento di una particella di energia E , carica e e tri-impulso $\mathbf{p}$.

Ovviamente una particella uscente dal sistema sarebbe raffigurabile come in figura 7.6, in cui il sistema emette (quindi crea grazie a $\hat{a}^\dagger$ presente in $\hat{\psi}^\dagger$) una particella di energia E , carica e e impulso $\vec{p}$.

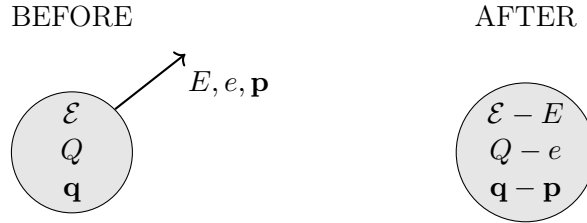


Figura 7.6: Raffigurazione emissione di una particella di energia E , carica e e tri-impulso $\mathbf{p}$.

Quando invece diciamo che al termine e^{+ikx} associamo un'antiparticella "uscente" significa che essa viene creata (grazie a $\hat{b}^\dagger$ presente in $\hat{\psi}$) nel sistema e poi ne esce al di fuori. Questa situazione la possiamo vedere nella figura 7.7.

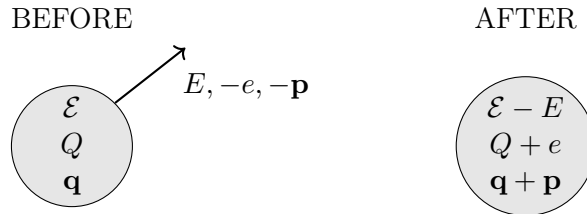


Figura 7.7: Raffigurazione emissione di un'antiparticella di energia E , carica $-e$ e tri-impulso $-\mathbf{p}$.

Notiamo però che l'assorbimento di una particella ad energia negativa equivale ad emettere una particella ad energia positiva, ma con carica ed impulso cambiato di segno, che interpretiamo come antiparticella. Quest'ultima analogia la possiamo vedere nelle figure 7.7 e 7.8.



Figura 7.8: Raffigurazione assorbimento di un'antiparticella di energia $-E$, carica e e tri-impulso $\mathbf{p}$.

In questo senso troviamo anche consistenza con gli operatori che sono associati ai termini e^{-ikx} ed e^{+ikx} , infatti abbiamo rispettivamente $\hat{a}_k^\dagger$ che crea una particella (entrante nel sistema) e $\hat{b}_k$ che distrugge un'antiparticella. Un altro modo di vederlo è che in realtà il campo $\hat{\phi}$ distrugge sia le particelle che le antiparticelle, rappresenta quindi le figure 7.5 e 7.8, ma per via del fatto che tra le due energie $E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, che derivavano dall'equazione di mass-shell, hanno senso fisico solo quelle positive, allora interpretiamo l'annichilazione delle particelle ad energia negativa come la creazione di antiparticelle ad energia positiva, carica elettrica e tri-impulso cambiati di segno, dunque in conclusione otteniamo che il campo $\hat{\phi}$ rappresenta le figure 7.5 e 7.7.

Alla luce di ciò possiamo scrivere in senso del tutto generale:²⁵

$$\hat{\phi}(x) = \sum_k \begin{pmatrix} e^{-ikx} \\ \text{particella entrante} \\ \text{ad energia positiva} \\ \text{annichilita} \end{pmatrix} + \sum_k \begin{pmatrix} e^{+ikx} \\ \text{antiparticella uscente} \\ \text{ad energia positiva} \\ \text{creata} \end{pmatrix}. \quad (7.6.13)$$

Dunque, il campo è sviluppato in termini di operatori di creazione e distruzione di particelle (e antiparticelle), ciascuno dei quali è associato ad una frequenza di Fourier associata all'onda piana e^{-ikx} o e^{+ikx} .

Le particelle, e antiparticelle, sono le eccitazioni, a frequenza definita, del campo. Proprio perché le particelle e antiparticelle sono create e annichilate, il sistema, una volta quantizzato, non corrisponde ad un numero fissato di particelle. Come già accenno in una sezione precedente, assoceremo al campo particelle e antiparticelle, ciascuna corrisponderà ad un'eccitazione del campo, il quale, contenendo tutti i possibili modi di oscillazione (è una

²⁵ Anche in questo caso vale anche per il campo spinoriale.

somma continua), contiene già dall'inizio tutte le particelle possibili (nel caso di $\hat{\phi}$ saranno particelle scalari di spin 0, mentre per $\hat{\psi}$ sono particelle fermioniche di spin 1/2). Un'ultima cosa da ricordare per completezza della sezione è l'analogia del campo con l'oscillatore armonico. Per l'oscillatore armonico i vari stati erano classificati in base all'eccitazione del sistema e i vari livelli energetici li potevamo raggiungere agendo con $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, che in quel caso ci permettevano di "scalare" la scala energetica; ora, i vari livelli eccitati dell'oscillatore corrispondono a particelle (create o distrutte) e sono sempre $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, così come $\hat{b}$ e $\hat{b}^\dagger$, che ci permettono di averle nel nostro sistema piuttosto che no.

Però attenzione, potremmo chiederci se il fatto che cambiando il segno del tempo e questo corrisponde a cambiare segno dell'energia sia casuale. Per questa risposta facciamo riferimento alle sezioni §2.8, §2.9 e §4.14.4 del Barone Physical law should have mathematical beauty. Barone.

In particolare, nella sezione §2.8 possiamo vedere quando viene rispettata la causalità tra due eventi nello spazio tempo. Infatti, se prendiamo due eventi in un certo sistema di riferimento K , ad esempio l'emissione di un segnale in (t_a, x_a, y_a, z_a) e l'arrivo dello stesso segnale in (t_b, x_b, y_b, z_b) , e assumiamo che il segnale si propaghi solo lungo x , con velocità u costante, allora abbiamo:

$$x_b - x_a = u(t_b - t_a). \quad (7.6.14)$$

Supponiamo che l'evento B avvenga dopo l'evento A . Prendiamo un secondo sistema di riferimento K' in moto rispetto K con velocità v costante lungo x e vediamo che dalle trasformazioni di Lorentz abbiamo:

$$\Delta t' = \gamma \left(1 - \frac{vu}{c^2} \right) \Delta t \quad (7.6.15)$$

che ci dice che se la velocità del segnale u e del moto relativo tra i due sistemi di riferimento v sono minori della velocità della luce c , allora $\Delta t'$ ha lo stesso segno di Δt e l'ordine degli eventi è preservato. Se u dovesse essere maggiore di c , allora potremmo trovare un sistema di riferimento in cui l'ordine degli eventi non è preservato e dunque un sistema di riferimento in cui la causa succede all'effetto, perderemmo dunque la causalità della teoria. È quindi una conseguenza alla richiesta che la causalità sia sempre rispettata che qualunque segnale, e quindi particella, si muova sempre a velocità inferiori a quella della luce.

Nella sezione §2.9 invece fa un breve riassunto di quali sono i vari tipi di intervalli che si possono avere. Riporto un breve riassunto (in base alla nostra metrica):

- $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2$ dove $r = (x, y, z)$.
- $\Delta s^2 > 0$ intervallo di tipo *tempo*.

- $\Delta s^2 = 0$ intervallo di tipo *luce*.
- $\Delta s^2 < 0$ intervallo di tipo *spazio*.

Ricordiamo anche che per via del fatto che gli intervalli sono invarianti, anche la loro classificazione lo è. Dunque se un intervallo è di un certo tipo in un sistema di riferimento inerziale, allora lo sarà anche in tutti gli altri. Teniamo bene a mente che due intervalli sono connessi causalmente solo se separati da intervalli di tipo tempo o luce.

Nella sezione §4.14.4 comincia la parte che ci interessa di più, ma in cui non ci preoccupiamo di dimostrare i teoremi, ma ci concentreremo solo sulle interpretazioni. Prendiamo, sempre per semplicità, una particella soggetta ad una perturbazione nel punto $(t_1, \vec{x}_1)$ e successivamente nel punto $(t_2, \vec{x}_2)$, in cui $t_2 > t_1$. È possibile calcolare, secondo la formulazione degli integrali di cammino della Meccanica Quantistica non relativistica, l'ampiezza di probabilità di transizione dalla perturbazione 1 alla 2:

$$\langle \vec{x}_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_2 - t_1)} | \vec{x}_1 \rangle = A(t_1, \vec{x}_1, t_2, \vec{x}_2) \quad (7.6.16)$$

$$\sim \int \frac{d^3 p}{2E} \exp\{-i(E(t_2 - t_1) - \vec{p} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1))\}. \quad (7.6.17)$$

A questo punto è cruciale un teorema dell'analisi di Fourier, che ci dice che: Data una funzione $F(\omega)$ limitata, al quadrato integrabile e nulla per $\omega < 0$, allora la sua trasformata di Fourier:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} F(\omega) \quad (7.6.18)$$

non può annullarsi solo in un intervallo finito di t , a meno di non essere identicamente nulla. La parte fondamentale per noi è che $F(\omega) = 0$ per $\omega < 0$, poichè in questo modo $f(t)$ diventa un'integrale a sole frequenze positive. Riprendendo l'integrale (7.6.17), cambiano la variabile di integrazione da p ad E e ricordando che dobbiamo imporre che le energie siano positive affinché abbiano senso fisicamente, allora possiamo applicare il teorema visto sopra e concludere che (7.6.17) è non nulla al di fuori del cono luce del punto 1, in cui abbiamo:

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 < 0 \quad (7.6.19)$$

ovvero intervalli di tipo spazio. Dalle motivazioni viste poco fa sappiamo che per la Relatività Speciale due eventi sono causalmente connessi solo se sono separati da intervalli di tipo tempo o luce, ma quello trovato con (7.6.17) sembra contraddire ciò e quindi rendere l'ordine temporale di due eventi

dipendente dal sistema di riferimento.²⁶ Effettivamente è così, avendo due eventi separati da un'intervallo spaziale, allora possiamo trovare un altro sistema di riferimento inerziale in cui la successione temporale degli eventi 1 e 2 sia invertita. Consideriamo un sistema di riferimento K' in cui l'evento 2 accada prima dell'evento 1, dunque con $t'_2 < t'_1$. La rappresentazione dei due sistemi di riferimento è in figura 7.9.

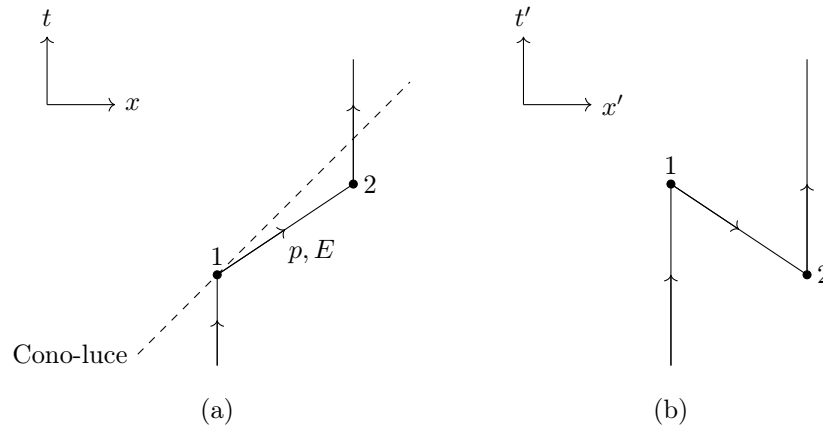


Figura 7.9: Rappresentazione diagrammatica di un processo in cui una particella è soggetta a due perturbazioni successive (1 e 2). Il sistema di riferimento (a) gli eventi sono ordinati con $t_1 < t_2$, mentre in (b) con $t'_2 < t'_1$.

Possiamo osservare che nella figura (b) nel punto $\vec{x}'_2$ vengono create due particelle, una che si muove avanti nel tempo (la linea verticale), mentre l'altra indietro nel tempo andando da $\vec{x}'_1$ a $\vec{x}'_2$ (la linea inclinata che collega 1 e 2). Seguendo il diagramma temporale (che come vedremo sarà come un diagramma di Feynmann) dal basso verso l'alto, com'è il verso dell'asse temporale, osserviamo: partiamo con una particella che si muove avanti nel tempo (la linea verticale), avviene l'evento 2 e si creano due particelle che si muovono una avanti nel tempo e una indietro, successivamente avviene l'evento 1 in cui la particella con cui siamo partiti si annichilisce con una di quelle create in 2 e ci rimane soltanto una particella che si muove nel verso positivo di t' (ossia la linea verticale che parte da 2). Il punto di questo discorso è che la particella che viaggia indietro nel tempo può essere

²⁶Infatti, intervalli di tipo spazio, per la RS, collegano due eventi non causalmente connessi, però, come abbiamo appena visto con (7.6.17) per la MQ due eventi sono causalmente connessi anche se sono collegati da intervalli di tipo spazio, ciò è reso possibile dalla non località della teoria quantistica. Infatti in Meccanica Quantistica nulla vieta che una particella "virtuale" contribuisca all'ampiezza anche in regioni di tipo spazio, sebbene con un'ampiezza molto piccola e in modo che non violi la causalità macroscopica. Tali contributi sono possibili ma esponenzialmente soppressi. Questo significa che il formalismo quantistico relativistico permette che ci siano contributi "virtuali" alla propagazione di una particella anche in regioni non connesse causalmente nel senso classico.

interpretata come un'*antiparticella* che si sposta avanti nel tempo da $\vec{x}'_2$ a $\vec{x}'_1$. Per via dell'invarianza della massa e della conservazione della carica in processi di assorbimento ed emissione possiamo, in generale, associare ad ogni particella una corrispettiva antiparticella, con massa identica, ma carica elettrica opposta. Quindi, dalla coesistenza della MQ e della RS e dalla richiesta che esistano solo stati ad energia positiva emerge che sono possibili processi di creazione e annichilazione di coppie, e si deve quindi concludere che sia necessaria l'esistenza delle antiparticelle.

Capitolo 8

Teoria del propagatore in una teoria libera

Disclaimer. Ci sono diverse convenzioni seguite per definire e calcolare le funzioni di Green per le teorie di campo, per questo potrei aver fatto confusione e ci potrebbero essere delle i che non tornano. Ad ogni modo, appartene alle i volanti, tutto il resto è corretto (sempre entro i miei limiti).

Ora che abbiamo quantizzato i campi (con spin 0 e $1/2$) ad un istante t fissato ed interpretato i risultati ottenuti in termini di particelle relativistiche, siamo interessati a studiarne l'evoluzione temporale, il che ci porterà ad introdurre la nozione di propagatore (che abbiamo già visto ad MQ2). L'espressione esplicita del propagatore per il campo scalare e spinoriale è uno dei risultati più importanti a cui arriveremo in questo corso e sarà alla base delle regole di Feynmann per il calcolo della sezioni d'urto dei processi di scattering tra particelle relativistiche.

In generale ci sono due modi per studiare l'evoluzione spazio-temporale di un sistema:

- L'uso di un'equazione differenziale, che da un'indicazione dell'evoluzione per intervalli infinitesimi.
- L'utilizzo dell'ampiezza di transizione, in cui non guardiamo l'evoluzione passo passo, ma abbiamo un'informazione più globale.

In elettromagnetismo sappiamo che un sistema lo possiamo studiare tramite:

- Equazioni di Maxwell.
- Principio di Huygens-Fresnel.

In Meccanica Quantistica il corrispettivo è:

- Equazione di Schrodinger.

- Utilizzo del propagatore K .

In MQ relativistica l'utilizzo del propagatore è cruciale, anche perché non abbiamo la possibilità di utilizzare l'equazione di Schrodinger. Nella QFT, in particolare nelle teorie interagenti (in teorie libere l'equazione differenziale è ancora utilizzabile), risolvere l'equazione differenziale è molto complicato per cui K diventa l'unica via percorribile. Il propagatore K ci permette di scrivere un principio di Huygens-Fresnel generalizzato al caso quantistico relativistico, ossia è un modo che ci fa studiare l'evoluzione dei fronti d'onda pensandoli come inviluppo delle onde generate da ciascun punto del fronte d'onda precedente. Quindi, vorremmo scrivere le funzioni d'onda, in realtà i campi, come inviluppo degli stessi, ma a tempi precedenti.

Utilizzeremo per lo studio dell'evoluzione, per motivi di convenienza, la rappresentazione di Heisenberg per gli operatori di campo quantistici.

La sezione è organizzata in modo da vedere la definizione di propagatore prima in Meccanica Quantistica, poi cominciamo a parlare di operatori di campo e vediamo come essi evolvono nello spazio-tempo definendo i vari propagatori nei 3 diversi casi (campo scalare neutro, scalare carico e spinoriale), ma sempre liberi. Sarà presente al termine della sezione un riepilogo di risultati.

I riferimenti per questa sezione sono i capitolo §16 e §17 del Lancaster e Blundell *Physical law should have mathematical beauty*. Lancaster:2014pza e Peskin e Schroeder *Physical law should have mathematical beauty*. Peskin:1995ev. Può essere anche utile rivedere gli appunti relativi al propagatore fatti al corso di MQ2.

8.1 Propagatore in Meccanica Quantistica

Come sappiamo bene dalla Meccanica Quantistica il propagatore è strettamente legato alla funzione di Green dell'equazione che stabilisce l'evoluzione spazio-temporale del sistema. In MQ2 avevamo visto che il propagatore (sempre inteso come ampiezza di probabilità che una particella, che si trova in $\vec{x}_i$ a t_i , evolva nel tempo propagandosi nel punto $\vec{x}_f$ al tempo t_f) è la funzione di Green dell'operatore di Schrodinger:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H\right) \quad (8.1.1)$$

cioè:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H\right) G(x - y) = \delta^4(x - y). \quad (8.1.2)$$

Nel caso della MQ non relativistica trovavamo una forma del propagatore:

$$K(1, 2) = \langle \vec{x}_f | \hat{U}(t_1, t_2) | \vec{x}_i \rangle \quad (8.1.3)$$

$$= \langle \vec{x}_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_2 - t_1)} | \vec{x}_i \rangle \quad (8.1.4)$$

$$= \langle \vec{x}_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_2 - t_1)} \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n | \vec{x}_i \rangle \quad (8.1.5)$$

$$= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_2 - t_1)} \langle \vec{x}_f | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \vec{x}_i \rangle \quad (8.1.6)$$

$$= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_2 - t_1)} \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) \psi_n(\vec{x}_f) \quad (8.1.7)$$

che se imponiamo che il tempo scorra in avanti, otteniamo la funzione di Green ritardata:

$$G_+(x_i, t_i; x_f, t_f) \equiv K(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i) = \theta(t_f - t_i) \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_2 - t_1)} \quad (8.1.8)$$

scritta in termini degli autostati stazionari dell'hamiltoniana. Ovviamente ci sono scritte del propagatore $K(1, 2)$ più o meno convenienti per fare i conti e verificare (8.1.2), possiamo trovarne una in cui togliamo di mezzo il tempo e inseriamo l'energia. Prendiamo il propagatore $K(t_f, \vec{x}_f; t_i, \vec{x}_i)$, mettiamo $t_i = 0$ e $t_f = t$ per semplicità e facciamo una trasformata di Fourier¹:

$$K(E, \vec{x}_f, \vec{x}_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iEt} K(t, \vec{x}_f; 0, \vec{x}_i) \quad (8.1.9)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iEt} \theta(t) \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \quad (8.1.10)$$

$$= \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) \int_0^{+\infty} dt e^{it(E - E_n)} \quad (8.1.11)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) \int_0^{+\infty} dt e^{it(E - E_n + i\epsilon)} \quad (8.1.12)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) \frac{1}{i(E - E_n + i\epsilon)} e^{it(E - E_n + i\epsilon)} \Big|_0^{+\infty} \quad (8.1.13)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) \frac{i}{E - E_n + i\epsilon} \quad (8.1.14)$$

in cui al punto (8.1.11) avendo un'integrale non convergente, avendo una divergenza sul cammino di integrazione per $E = E_n$ e oscillando a $t \rightarrow \infty$,

¹Come x e p in MQ non relativistica sono legati da una trasformata di Fourier, anche t ed E lo sono.

bisognava regolarizzarlo, per questo si è utilizzata la tecnica del *damping factor*, il che consiste nel traslare i poli dell'integrando verso il basso moltiplicando il tutto per un fattore $e^{-\epsilon t}$ (ovviamente mandando $\epsilon \rightarrow 0^+$ nel conto). Il termine $+i\epsilon$ a denominatore di (8.1.14) è fondamentale, non solo perché regolarizza l'integrale rimuovendo la singolarità, ma anche perché garantisce la causalità. L'azione dei damping factor può essere vista nella figura 8.1.

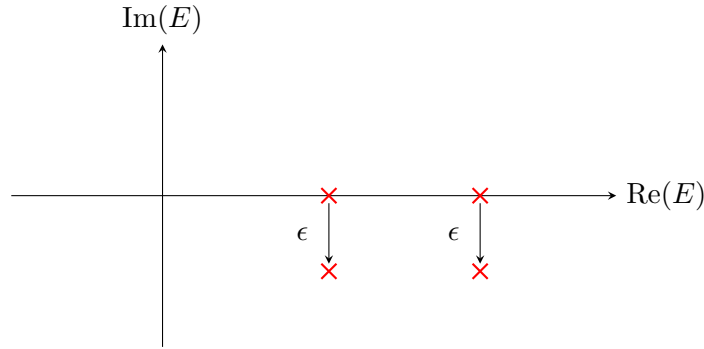


Figura 8.1: Traslazione dei poli nel piano complesso dell'energia tramite il metodo dei damping factor

L'espressione che abbiamo trovato:

$$K(E, \vec{x}_f, \vec{x}_i) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i) \frac{i}{E - E_n + i\epsilon} \quad (8.1.15)$$

spesso si chiama anche **propagatore di Feynmann** e ci insegna molte cose riguardo l'utilità del propagatore. Quello che stiamo per dire si vede se mandiamo $\epsilon \rightarrow 0^+$. Innanzitutto vediamo che le singolarità del propagatore sono gli autostati dell'hamiltoniana $E = E_n$, per cui se abbiamo per le mani $K(E, x)$ e non conosciamo lo spettro energetico del sistema possiamo facilmente trovarlo. In secondo luogo possiamo vedere che i residui del propagatore sono proporzionali a $i \sum_n \psi_n(\vec{x}_f) \psi_n^\dagger(\vec{x}_i)$, ossia alle funzioni d'onda, il che ci dice che possiamo fare tranquillamente Meccanica Quantistica utilizzando il propagatore, dal momento che contiene più informazioni della singola funzione d'onda essendo essa contenuta in $K(1, 2)$.

Ricordandoci il significato fisico del propagatore, ossia, che è quell'oggetto che ci dice l'ampiezza di probabilità che il sistema quantistico transisca dallo stato iniziale a $(\vec{x}_i, t_i)$ a quello finale a $(\vec{x}_f, t_f)$, allora possiamo raffigurarlo graficamente con un disegno che è quello in figura 8.2, e di cui studieremo meglio le varie parti quando parleremo dei diagrammi di Feynmann e degli sviluppi perturbativi nel corso di *Fondamenti di Teoria Quantistica dei Campi*.

Prima di passare alla QFT parliamo ancora del propagatore in MQ, ma nello spazio degli impulsi. Possiamo scrivere il propagatore, indicando con q

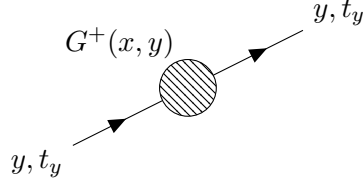


Figura 8.2

il tri-impulso iniziale nella posizione y al tempo t_y e p il tri-impulso finale in x a t_x , come:

$$G^+(p, t_x; q, t_y) = \theta(t_x - t_y) \langle p | U(t_x - t_y) | q \rangle \quad (8.1.16)$$

$$= \theta(t_x - t_y) \langle p | e^{-iH(t_x - t_y)} | q \rangle \quad (8.1.17)$$

$$= \theta(t_x - t_y) e^{-iE_q(t_x - t_y)} \langle p | q \rangle \quad (8.1.18)$$

$$= \theta(t_x - t_y) \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) e^{-iE_q(t_x - t_y)} \quad (8.1.19)$$

in cui notiamo che $\delta(\vec{p} - \vec{q})$ non rappresenta altro che la conservazione del tri-impulso.² C'è di più, perché la conservazione dell'impulso implica la conservazione dell'energia, visto che se utilizziamo la delta, allora otteniamo $E_q \rightarrow E_p$. Questa cosa è molto importante e va tenuta a mente:

Il propagatore libero, in Meccanica Quantistica non relativistica (ma anche in QFT) garantisce la conservazione del tri-impulso e dell'energia (quindi del quadri-impulso), dunque se lo rappresentiamo come una linea che congiunge due vertici (x, t_x) e (y, t_y) , che sono punti dello spazio tempo, allora questo ci dice che il sistema conserva $\vec{p}$ ed E nella propagazione (libera) da un vertice all'altro.

Come abbiamo fatto con il propagatore $K(x, t)$ andando ad ottenere $K(x, E)$, possiamo fare la stessa cosa ora. Facciamo una trasformata di

²Molti libri omettono questa delta nelle relazioni dell'impulso semplicemente dando per scontato la conservazione dell'impulso e per semplicità di scrittura.

Fourier tra t ed E (mettendo $q = 0$ e $t_y = 0$ per semplicità):

$$G^+(\vec{p}, E) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iEt} G^+(p, t, 0) \quad (8.1.20)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iEt} \theta(t) \delta^3(\vec{p}) e^{-iE_p t} \quad (8.1.21)$$

$$= \delta^3(\vec{p}) \int_0^{+\infty} dt e^{it(E-E_p+i\epsilon)} \quad (8.1.22)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta^3(\vec{p}) \frac{-i}{E - E_p + i\epsilon} e^{i(E-E_p+i\epsilon)t} \Big|_0^{+\infty} \quad (8.1.23)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta^3(\vec{p}) \frac{i}{E - E_p + i\epsilon} \quad (8.1.24)$$

che è un'espressione di notevole importanza poiché già relativistica.

Sommario propagatori in Meccanica Quantistica

Riepiloghiamo tutte le espressioni che abbiamo trovato per il propagatore valide in Meccanica Quantistica indicando con $\vec{x}$, t_x e $\vec{q}$ posizione, tempo e tri-impulso iniziali, mentre con $\vec{y}$, t_y e $\vec{p}$ posizione, tempo e tri-impulso finali:

$$G^+(\vec{x}, t_x, \vec{y}, t_y) = \theta(t_y - t_x) \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_y - t_x)} \psi_n^\dagger(\vec{x}) \psi_n(\vec{y}) \quad (8.1.25)$$

$$G^+(\vec{x}, \vec{y}, E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_n \psi_n(\vec{y}) \psi_n^\dagger(\vec{x}) \frac{i}{E - E_n + i\epsilon} \quad (8.1.26)$$

$$G^+(\vec{q}, t_x, \vec{p}, t_y) = \theta(t_x - t_y) \delta(\vec{p} - \vec{q}) e^{-iE_q(t_x - t_y)} \quad (8.1.27)$$

$$G^+(\vec{q}, \vec{p}, E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta(\vec{p} - \vec{q}) \frac{i}{E - E_p + i\epsilon} \quad (8.1.28)$$

8.2 Campo scalare neutro

Vediamo in questa sezione tutto ciò che riguarda l'evoluzione temporale e spazio-temporale del campo scalare neutro. Come già successo capiterà che la sezione sul campo scalare sarà leggermente più lunga rispetto le altre poiché verranno introdotti certi concetti per la prima volta.

8.2.1 Evoluzione temporale del campo di Klein-Gordon

La rappresentazione di Heisenberg ci permette di scrivere l'evoluzione temporale come (in unità naturali):

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = e^{iHt} \hat{\phi}(\vec{x}) e^{-iHt} \quad (8.2.1)$$

$$\hat{\pi}(\vec{x}, t) = e^{iHt} \hat{\pi}(\vec{x}) e^{-iHt} \quad (8.2.2)$$

e sappiamo che l'equazione del moto degli operatori è data, in generale per l'operatore $\hat{Q}$ da:

$$i \frac{d}{dt} \hat{Q}(t) = [\hat{Q}(t), \hat{H}]. \quad (8.2.3)$$

Da qui in poi eviteremo di scrivere i cappelletti sopra gli operatori per semplicità.

Possiamo vedere quali siano le equazioni del moto degli operatori di campo $\hat{\phi}$ e $\hat{\pi}$. Vediamo:

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = [\phi, H] \quad (8.2.4)$$

$$= \left[\phi(\vec{x}, t), \int d^3 x' \frac{1}{2} \left\{ \pi^2(\vec{x}', t) + \left(\vec{\nabla} \phi(\vec{x}', t) + m^2 \phi^2(\vec{x}', t) \right) \right\} \right] \quad (8.2.5)$$

sviluppiamo i commutatori:

$$= \frac{1}{2} \int d^3 x' \left\{ [\phi(\vec{x}), \pi^2(\vec{x}')] + \underbrace{[\phi(\vec{x}), (\vec{\nabla} \phi(\vec{x}'))^2]}_{=0} + m^2 \underbrace{[\phi(\vec{x}), \phi^2(\vec{x}')]_{=0}} \right\} \quad (8.2.6)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3 x' \left\{ [\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] \pi(\vec{x}', t) + \pi(\vec{x}', t) [\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] \right\} \quad (8.2.7)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3 x' 2i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \pi(\vec{x}', t) \quad (8.2.8)$$

$$= i \pi(\vec{x}, t) \quad (8.2.9)$$

dunque confermiamo ancora che $\pi = \dot{\phi}$. Per il campo coniugato abbiamo:

$$i \frac{\partial \pi}{\partial t} = [\pi, H] \quad (8.2.10)$$

$$= \left[\pi(\vec{x}, t), \int d^3 x' \frac{1}{2} \left[\pi^2(\vec{x}', t) + \left(\vec{\nabla} \phi(\vec{x}', t) + m^2 \phi^2(\vec{x}', t) \right) \right] \right] \quad (8.2.11)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3 x' \left\{ \underbrace{[\pi(\vec{x}), \pi^2(\vec{x}')]_{=0}} + \left[\pi(\vec{x}), \underbrace{(\vec{\nabla} \phi(\vec{x}'))^2}_{=\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi} \right] + m^2 [\pi(\vec{x}), \phi^2(\vec{x}')] \right\} \quad (8.2.12)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3x' \left\{ \vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}') \left[\pi(\vec{x}), \vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}') \right] + \left[\pi(\vec{x}), \vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}') \right] \vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}') - \right. \\ \left. - 2im^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \phi(\vec{x}') \right\} \quad (8.2.13)$$

possiamo sfruttare il fatto che la derivata $\vec{\nabla}_{x'}$ è fatta rispetto x' ed è lineare, quindi possiamo scrivere:

$$\left[\pi(\vec{x}), \vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}') \right] = \vec{\nabla}_{x'} \left[\pi(\vec{x}), \phi(\vec{x}') \right] \quad (8.2.14)$$

così abbiamo:

$$= \frac{1}{2} \int d^3x' \left\{ 2 \vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}') \vec{\nabla}_{x'} \left[\pi(\vec{x}), \phi(\vec{x}') \right] - 2im^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \phi(\vec{x}') \right\} \quad (8.2.15)$$

integrando per parti il primo termine e usando la δ per il secondo:

$$= \underbrace{\vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')}_{=0} \Big|_{V \text{ infinito}} + \int d^3x' \left\{ \left(\vec{\nabla}_{x'} \right)^2 \phi(\vec{x}') i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') - \right. \\ \left. - im^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \phi(\vec{x}') \right\} \quad (8.2.16)$$

$$= +i \left(\vec{\nabla}^2 - m^2 \right) \phi(\vec{x}). \quad (8.2.17)$$

Abbiamo trovato dunque:

$$i \frac{\partial \pi}{\partial t} = i \left(\vec{\nabla}^2 - m^2 \right) \phi(\vec{x}) \quad (8.2.18)$$

che ricordando che $\pi = \dot{\phi}$ non è altro che l'equazione di Klein-Gordon.

Possiamo anche vedere l'evoluzione temporale degli operatori di creazione e distruzione:

$$e^{iHt} \hat{a}(\vec{k}) e^{-iHt} = \hat{a}(\vec{k}) e^{-iE_k t} \quad (8.2.19)$$

$$e^{iHt} \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-iHt} = \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{+iE_k t} \quad (8.2.20)$$

che sostituite dentro l'espressione dei campi $\hat{\phi}(\vec{x})$ e $\hat{\pi}(\vec{x})$ ci forniscono le già note espressioni dei campi dipendenti dal tempo:

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_k}} \left(\hat{a}(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} \right) \Big|_{k^0=E_k>0} \quad (8.2.21)$$

$$\hat{\pi}(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}(\vec{x}, t) = \dot{\hat{\phi}}(\vec{x}, t). \quad (8.2.22)$$

Però ovviamente studiare solo l'evoluzione temporale dei campi non è congeniale con una teoria relativistica in cui dovremmo trattare spazio e tempo allo stesso modo. Potremmo fare un calcolo analogo considerando una traslazione spaziale invece che temporale. Per le traslazioni spaziali il generatore è $\vec{P}$ e abbiamo:

$$e^{-i\vec{P}\cdot\vec{x}}\hat{a}(\vec{k})e^{+i\vec{P}\cdot\vec{x}} = \hat{a}(\vec{k})e^{i\vec{P}\cdot\vec{x}} \quad (8.2.23)$$

$$e^{-i\vec{P}\cdot\vec{x}}\hat{a}^\dagger(\vec{k})e^{+i\vec{P}\cdot\vec{x}} = \hat{a}^\dagger(\vec{k})e^{-i\vec{P}\cdot\vec{x}} \quad (8.2.24)$$

da cui otteniamo la corretta relazione tra $\hat{\phi}(x^\mu)$ e $\hat{\phi}(0)$:

$$\hat{\phi}(x^\mu) = e^{i(Ht - \vec{P}\cdot\vec{x})}\hat{\phi}(0)e^{-i(Ht - \vec{P}\cdot\vec{x})} = e^{iP^\mu x_\mu}\hat{\phi}(0)e^{-iP^\mu x_\mu} \quad (8.2.25)$$

in cui abbiamo indicato con $\vec{P}$ l'impulso associato al campo, mentre con $\vec{k}$ è l'impulso associato al singolo modo normale del campo, ossia alla singola frequenza di Fourier.

8.2.2 Definizione di propagatore

Possiamo definire³, viste le cose imparate fino qui, l'*ampiezza di probabilità che una particella si propaghi da x a y* (intendiamo con particella un'eccitazione del campo scalare neutro):

$$\Delta(x - y) = \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle \quad (8.2.26)$$

$$= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k} \sqrt{2E_{k'}}} \langle \vec{k} | e^{-ikx} e^{+ik'y} | \vec{k}' \rangle \quad (8.2.27)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik(x-y)}}{2E_k} \quad (8.2.28)$$

in cui abbiamo usato la definizione vista del campo scalare neutro (7.2.58) e la definizione di operatore di creazione di particella ad impulso fissato $\hat{a}^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle = | \vec{k} \rangle$. Notiamo anche che $\Delta(x - y)$ è un'invariante di Lorentz.

Però che cosa fa effettivamente $\Delta(x - y)$? Presa la definizione (7.2.58) e la sua espressione di evoluzione temporale (8.2.1) ci sarà semplice vederlo. Stiamo parlando di campi scalari scarichi, quindi per ora parlare di particelle o antiparticelle è la stessa cosa. Abbiamo:

$$\Delta(x - y) = \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle \quad (8.2.29)$$

$$= \langle 0 | e^{i\hat{H}t_x} \hat{\phi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t_x} e^{i\hat{H}t_y} \hat{\phi}(\vec{y}) e^{-i\hat{H}t_y} | 0 \rangle \quad (8.2.30)$$

$$= \langle 0 | e^{i\hat{H}t_x} \hat{\phi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}(t_x - t_y)} \hat{\phi}(\vec{y}) e^{-i\hat{H}t_y} | 0 \rangle \quad (8.2.31)$$

vediamo cosa vuol dire andando da destra verso sinistra:

³Alcuni libri lo definiscono come $\Delta(x - y)$.

- $e^{-i\hat{H}t_y} |0\rangle$ fa evolvere lo stato di vuoto fino al tempo $t_y = y^0$.
- $\hat{\phi}(\vec{y})e^{-i\hat{H}t_y} |0\rangle$ al tempo y^0 crea una particella nel punto $\vec{y}$ di impulso fissato.
- $e^{-i\hat{H}(t_x-t_y)}$ fa evolvere la particella creata in $\vec{y}$ dal tempo y^0 al tempo $t_x = x^0$.
- $e^{i\hat{H}t_x}\hat{\phi}(\vec{x})$ distrugge la particella di impulso fissato nel punto $\vec{x}$, sempre al tempo x^0 . Ci rendiamo conto che è necessario che $y^0 < x^0$ affinché sia rispettata la causalità e che la particella sia assorbita (distrutta) dopo essere stata creata. Se $y^0 > x^0$ allora il principio di causalità è violato.
- $\langle 0|$ ci permette di "chiudere il panino" e vedere quale sia l'ampiezza di probabilità del processo, ossia, la probabilità che partiamo da uno stato di vuoto, creiamo una particella "test" al tempo y^0 e in $\vec{y}$, la facciamo evolvere fino a x^0 e la distruggiamo in $\vec{x}$, dopodiché ci chiediamo quale sia la probabilità che non sia successo nulla e ci troviamo ancora nello stato di vuoto.

Quello che abbiamo detto è circa quello che facciamo con una particella test in presenza di un campo elettrico ad esempio. Prendiamo la particella test, la buttiamo in una certa regione, la osserviamo mentre si muove, la tolgo e dopo mi chiedo quale sia la probabilità che il sistema sia rimasto nello stesso stato di partenza.

Però facciamo un'attimo attenzione. Preso $\Delta(x-y)$ abbiamo detto che dobbiamo stare attenti all'ordine temporale, per questo motivo definiamo il **prodotto temporalmente ordinato** che garantisce che soltanto l'ordine causale venga considerato nei prodotti come:

$$T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) = \theta(x^0 - y^0)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) + \theta(y^0 - x^0)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) \quad (8.2.32)$$

e notiamo che il contributo che aggiungiamo (rispetto al pezzo iniziale) è il termine di antiparticella, poichè abbiamo detto che fisicamente le antiparticelle le vediamo come particelle che si muovono indietro nel tempo. Questa informazione la abbiamo anche nella rappresentazione grafica del propagatore, vedi la figura 8.5. Possiamo definire il propagatore di Feynmann come:

$$i\Delta_F(x-y) = \langle 0| T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) |0\rangle. \quad (8.2.33)$$

Dotati della presa di coscienza (8.2.33) e ricordando (8.2.28) allora possiamo dare una rappresentazione esplicita del propagatore libero nel caso di teoria libera:

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2E_k)} \left[\theta(x^0 - y^0)e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0)e^{+ik(x-y)} \right]. \quad (8.2.34)$$

Inoltre, possiamo calcolare⁴ $\Delta(x-y)$ in due casi opposti, ma ugualmente semplici:

- se abbiamo $(x-y)^2 > 0$, quindi un'intervallo di tipo tempo, come ad esempio se $x^0 = y^0 = t$ e $(\vec{x} - \vec{y}) = 0$, allora possiamo vedere che:

$$\Delta(x-y) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-imt} \quad (8.2.35)$$

quindi, la propagazione può avvenire nel cono luce.

- Se abbiamo $(x-y)^2 < 0$, quindi un'intervallo di tipo spazio, come ad esempio se $x^0 = y^0 = 0$ e $(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{r}$, allora con conti leggermente più complicati:

$$\Delta(x-y) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{-mr} \quad (8.2.36)$$

quindi, la propagazione fuori dal cono luce corrisponde ad un'ampiezza che va a zero esponenzialmente, ma non è nulla. Vedi i discorsi finali della sezione §7.6. Ma la relazione (8.2.36) ci dice che stiamo rompendo la causalità con la nostra nuova teoria oppure stiamo solo guardando nella direzione sbagliata? Approfondiamo nella sezione §8.2.3.

8.2.3 Causalità per il campo scalare neutro

Vedi la sezione §2.4 del Peskin Physical law should have mathematical beauty. Peskin:1995ev, in cui parla di causalità.

Ricordiamoci che per la Relatività Speciale due eventi sono connessi causalmente solo se connessi tramite intervalli di tipo tempo o luce e non per intervalli di tipo spazio. Quello detto alla fine della sezione precedente potrebbe far pensare che siamo in presenza di una teoria in cui rompiamo il principio di causalità, ma in realtà non è così, perché la non località della teoria quantistica rende possibile una connessione causale anche per intervalli di tipo spazio. Per controllare che il principio di causalità sia rispettato nella propagazione dei quanti associati al campo scalare, dobbiamo capire non tanto se essi possono propagarsi al di fuori del cono-luce (cioè su distanze tipo spazio, con $(x-y)^2 < 0$), ma piuttosto se una misura compiuta in un punto x possa avere effetto su una misura effettuata in un punto y separato da una distanza tipo spazio (ci poniamo una domanda coerente con una visione quantistica). Dobbiamo quindi calcolare il commutatore:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] \quad (8.2.37)$$

a tempi diversi. Se il commutatore va a zero, allora una misura non può avere effetto sull'altra ed esse sono indipendenti. Naturalmente sappiamo

⁴Vedi il file di conti.

già che il commutatore va a zero a tempi uguali, ma ora facciamo il calcolo in generale:

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k} \sqrt{2E_{k'}}} & \left[\left(\hat{a}(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} \right) , \right. \\ & \left. \left(\hat{a}(\vec{k}') e^{-ik'y} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}') e^{+ik'y} \right) \right] \end{aligned} \quad (8.2.38)$$

sopravvivono solamente due termini per cui:

$$[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad , \quad [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] = -\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (8.2.39)$$

e dunque:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \left(e^{-ik(x-y)} - e^{+ik(x-y)} \right) \quad (8.2.40)$$

$$= \Delta(x-y) - \Delta(y-x). \quad (8.2.41)$$

Notiamo che sia $\Delta(x-y)$ sia $\Delta(y-x)$ sono invarianti di Lorentz. Nel caso in cui abbiamo distanze di tipo spazio, quindi con $(x-y)^2 < 0$, possiamo fare una trasformazione di Lorentz continua⁵ su $\Delta(x-y)$, grazie al fatto che i due propagatori siano Lorentz invarianti individualmente, tale per cui $(x-y) \rightarrow -(x-y)$. In questo modo $\Delta(x-y)$ e $\Delta(y-x)$ diventano uguali e si cancellano dando un commutatore nullo. Questo ci dice che al di fuori del cono-luce (in cui $(x-y)^2 < 0$) il commutatore è nullo e il principio di causalità è rispettato anche se la teoria della Relatività Speciale ci direbbe di no.

Per trasformazioni di tipo tempo (quindi per cui $(x-y)^2 > 0$) non esiste alcuna trasformazione di Lorentz continua che possa fare $(x-y) \rightarrow -(x-y)$. In questo caso il commutatore è proporzionale a $e^{-imt} - e^{+imt}$ per il caso $(\vec{x} - \vec{y}) = 0$. La propagazione, quindi, può avvenire nel cono luce senza violare la causalità.

Concludiamo per questo che misure nella teoria di Klein-Gordon non possono influenzarsi se avvengono al di fuori del cono luce.

8.2.4 Funzione di Green per Klein-Gordon

Ricodando quello visto nella sezione §8.1 guardiamo ora il caso di campo scalare, facendo lo stesso discorso. Partiamo dall'equazione di Klein-Gordon a cui aggiungiamo una sorgente $J(x)$ classica, che agisce per un breve intervallo e su corto range:

$$(\square + m^2) \hat{\phi}(x) = J(x) \quad (8.2.42)$$

⁵Abbiamo parlato di trasformazioni di Lorentz sui diversi intervalli alla fine della sezione §7.6.

e dalla teoria delle funzioni di Green sappiamo che questa equazione differenziale può essere facilmente risolta nel caso in cui riuscissimo a conoscere una funzione G tale per cui:

$$(\square + m^2) G(x - y) = -\delta^4(x - y). \quad (8.2.43)$$

In questo caso la soluzione $\hat{\phi}(x)$ sarà data da:

$$\hat{\phi}(x) = \phi_0(x) + \int d^4y G(x - y) J(y) \quad (8.2.44)$$

come si può dimostrare applicando $(\square + m^2)$ ad entrambi i membri. Abbiamo indicato con $\phi_0(x)$ la soluzione dell'equazione omogenea, cioè dell'equazione di Klein-Gordon nel caso senza sorgente. Nota che scrivendo la soluzione (8.2.44) non abbiamo fatto nulla, se non aver sostituito ad un'equazione differenziale un'equazione integrale.

Risolviamo l'equazione:

$$(\square + m^2) G(x - y) = -\delta^4(x - y) \quad (8.2.45)$$

considerando la trasformata di Fourier del primo e secondo membro. Al primo membro definiamo:

$$G(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \tilde{G}(k) \quad (8.2.46)$$

in cui $\tilde{G}(k)$ è l'antitrasformata di Fourier di $G(x - y)$. Al secondo membro abbiamo che la funzione $\delta^4(x - y)$ è la trasformata di Fourier di una costante:

$$\delta^4(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \cdot 1. \quad (8.2.47)$$

Abbiamo quindi:

$$(\square_x + m^2) G(x - y) = \delta^4(x - y) \quad (8.2.48)$$

$$(\square_x + m^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \tilde{G}(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \cdot 1 \quad (8.2.49)$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-k^2 + m^2) e^{-ik(x-y)} \tilde{G}(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \cdot 1 \quad (8.2.50)$$

$$- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} (k^2 - m^2) \tilde{G}(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \cdot 1 \quad (8.2.51)$$

$$\implies (k^2 - m^2) \tilde{G}(k) = +1 \quad (8.2.52)$$

troviamo dunque:

$$\tilde{G}(k) = \frac{+1}{k^2 - m^2} \quad (8.2.53)$$

in cui:

$$k^2 = k^{0^2} - \vec{k}^2 \quad (8.2.54)$$

che ci permette di vedere i poli di $\tilde{G}(k)$, ossia:

$$k^2 - m^2 = 0 \implies k^{0^2} = \vec{k}^2 + m^2 \quad (8.2.55)$$

$$k^0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad (8.2.56)$$

che si trovano sul cammino di integrazione, avendo l'integrale d^4k sull'asse reale. Noi questi poli (la relazione di mass-shell) li sposteremo con la prescrizione di Feynmann (nota che ci sono 4 modi per spostare le singolarità, ma Feynmann ci dice che solo uno è quello fisicamente corretto in modo da rispettare la causalità⁶):

$$k^2 - m^2 \longrightarrow k^2 - m^2 + i\epsilon \quad (8.2.57)$$

con $\epsilon > 0$. Il fatto che solo uno dei 4 modi possibili di spostare le singolarità vada bene, ci dice che il fattore ϵ non è solamente un trucchetto matematico, ma ha anche un significato fisico. Trovata (8.2.53) possiamo trovare la funzione di Green $G(x-y)$ facendone l'antitrasformata di Fourier. Integriamo sulla sola componente k^0 e, come già detto, spostando leggermente i poli, uno in alto ed uno in basso. Scriviamo⁷:

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.2.60)$$

$$= \frac{1}{2k^0} \left(\frac{1}{k^0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} + i\eta} + \frac{1}{k^0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\eta} \right) \quad (8.2.61)$$

e abbiamo quindi singolarità come quelle rappresentate in figura 8.3.

Per via del lemma di Jordan il cammino di integrazione andrà chiuso nel semipiano superiore nel caso $(t_x - t_y) > 0$, mentre andrà chiuso nel semipiano inferiore se $(t_x - t_y) < 0$. Facciamo i conti con il *teorema dei residui*:

$$G(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \tilde{G}(k) \quad (8.2.62)$$

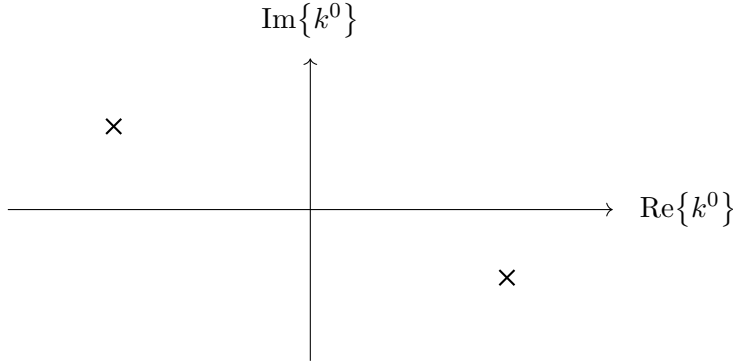
⁶Questa scelta si può evitare facendo i conti espliciti come nella sezione §8.2.6

⁷Utilizzando i fratti semplici, infatti:

$$\frac{1}{2k^0} \left(\frac{1}{k^0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} + i\eta} + \frac{1}{k^0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\eta} \right) = \frac{1}{2k^0} \frac{2k^0}{k^{0^2} - (\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\eta)^2} \quad (8.2.58)$$

$$\xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{k^{0^2} - \vec{k}^2 - m^2 + 2i\eta\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.2.59)$$

che è esattamente l'espressione di $\tilde{G}(k)$ con ϵ riscalato in modo da dare il termine $2i\eta\sqrt{\dots}$.

**Figura 8.3:** Singolarità di $\tilde{G}(k)$.

$$\begin{aligned}
&= \theta(t_x - t_y) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{1}{2k^0} \frac{1}{k^0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} + i\eta} + \\
&\quad + \theta(t_y - t_x) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{+ik(x-y)} \frac{1}{2k^0} \frac{1}{k^0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\eta} \quad (8.2.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(2\pi)i\theta(t_x - t_y) \text{Res} \left\{ \frac{1}{2k^0} \frac{1}{k^0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} + i\eta} \right\}_{k^0 = -\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} + i\eta} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4 2E_k} e^{-ik(x-y)} - \\
&- i(2\pi)\theta(t_y - t_x) \text{Res} \left\{ \frac{1}{2k^0} \frac{1}{k^0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\eta} \right\}_{k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\eta} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4 2E_k} e^{-ik(x-y)} \quad (8.2.64)
\end{aligned}$$

$$= -i\theta(t_x - t_y) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E_k} e^{-ik(x-y)} - i\theta(t_y - t_x) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E_k} e^{-ik(x-y)} \quad (8.2.65)$$

in cui: il fattore $2\pi i$ viene dal teorema di Cauchy e il segno meno viene dal fatto che proviamo a prendere il cammino in senso orario. Possiamo riscrivere l'espressione anche come:

$$G(x - y) = -i\theta(t_x - t_y)\Delta(x - y) - i\theta(t_y - t_x)\Delta(y - x). \quad (8.2.66)$$

Dunque possiamo dire che particelle con energia positiva si muovono in avanti nel tempo, mentre particelle con energia negativa si muovono indietro nel tempo, e ciò è coerente con tutto ciò che abbiamo detto con l'interpretazione di particella e antiparticella, anche se con il campo neutro non ha molto senso parlare di cariche.

L'espressione che identifichiamo con il propagatore di Feynmann è:

$$G(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}. \quad (8.2.67)$$

Prima di passare oltre notiamo che in MQ non relativistica, o in meccanica classica, le condizioni al contorno ci costringerebbero a scegliere solo uno dei due pezzi che abbiamo trovato in $G(x - y)$.

8.2.5 Confronto tra funzione di Green e definizione di propagatore

Cerchiamo ora di trovare un collegamento tra la funzione di Green (8.2.65) e la definizione di propagatore di Feynmann che avevamo visto (8.2.33).

Abbiamo che il propagatore di Feynmann è la funzione di Green dell'equazione del moto solamente nel caso libero, ma quando tratteremo teorie interagenti questo non sarà più vero.

Se prendiamo il commutatore $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$ esso è un numero e possiamo dire che:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = \langle 0 | [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] | 0 \rangle \quad (8.2.68)$$

che è un'oggetto semplice da maneggiare poiché sappiamo già come gli operatori di scala agiscono sullo stato di vuoto. Supponiamo $x^0 > y^0$ e vediamo:

$$\langle 0 | [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2E_k} \left(e^{-ik(x-y)} - e^{+ik(x-y)} \right) \quad (8.2.69)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ \frac{1}{2E_k} e^{-ik(x-y)} \Big|_{k^0=E_k} + \frac{1}{-2E_k} e^{-ik(x-y)} \Big|_{k^0=-E_k} \right\} \quad (8.2.70)$$

e possiamo vedere che questa espressione è, a meno di un fattore $-i$, esattamente la funzione di Green (8.2.65). Definiamo quindi il propagatore del campo scalare neutro come:⁸

$$i\Delta_F(x - y) = \langle 0 | T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) | 0 \rangle \quad (8.2.71)$$

in cui, come già detto, T indica il prodotto temporalmente ordinato, ossia mettiamo gli operatori più vecchi a destra e i più giovani a sinistra:

$$T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) = \begin{cases} \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) & \text{se } x^0 > y^0 \\ \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) & \text{se } y^0 > x^0 \end{cases} \quad (8.2.72)$$

mentre il fattore i è messo per convenzione, ma non è detto che in tutti i testi ci sia.

⁸Nota che avendo ancora campi scalari, dunque scarichi, vale $T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) = [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$.

8.2.6 Calcoli espliciti propagatore di Feynmann

Nelle sezioni precedenti siamo stati molto rapidi a fare le nostre considerazioni e i nostri conti, ma ora facciamo un passo indietro e vediamo bene tutti i conti espliciti, seppur lunghetti, per arrivare all'espressione del propagatore di Feynmann. Precedentemente abbiamo detto che esisteva una prescrizione (quella di Feynmann) che era l'unica possibile per giungere ad un risultato fisicamente sensato, ora, proviamo a rimuovere il "fattore umano" della scelta specifica della prescrizione e cerchiamo di arrivare al medesimo risultato, ma solamente facendoci trascinare dalla matematica. Sarà fondamentale per questa sezione conoscere la rappresentazione integrale della funzione θ di Heaviside.

Partiamo dalla rappresentazione più generica del propagatore, ossia, quello in cui compaiono le due θ che impongono la causalità, ovvero la forma (8.2.34), ma in cui poniamo per comodità:

$$z^\mu = x^\mu - y^\mu. \quad (8.2.73)$$

Possiamo fare due cose: o lasciamo la θ separata nei conti e poi *dall'esterno* cambiamo i segni e togliamo i pezzi che non vanno bene; oppure, scriviamo la θ in un modo uniforme e la buttiamo dentro il conto.

Per scrivere la θ in una forma integrale possiamo sfruttare quello che sappiamo dall'analisi complessa. Possiamo costruirci un'integrale con una funzione integranda con un polo, che possiamo mettere o nel semipiano superiore o in quello inferiore. Dobbiamo anche fare attenzione a costruire la funzione in modo che se chiudiamo sopra l'integrale faccia 1, ma se chiudiamo sotto faccia 0. In questo discorso chiudiamo sopra o sotto in base al lemma di Jordan che ci dice che in base al segno dell'esponentiale (in cui noi metteremo $x^0 - y^0$) chiudiamo sopra piuttosto che sotto. Definiamo:

$$\theta(z^0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{e^{i\tau z^0}}{\tau - i\epsilon} \quad (8.2.74)$$

e questa è la **rappresentazione integrale della θ di Heaviside**.⁹

⁹Possiamo verificare che effettivamente sia la θ . Quando $z^0 < 0$ dobbiamo chiudere sotto, ma essendo la singolarità in $\tau = i\epsilon$, all'interno della curva nel semipiano inferiore non c'è nulla e Cauchy ci dice che l'integrale fa 0. Quando $z^0 > 0$ chiudiamo sopra, circondiamo la singolarità $\tau = i\epsilon$ e possiamo utilizzare il teorema dei residui:

$$\theta(z^0 > 0) = 2\pi i \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Res} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{i\tau z^0}}{\tau - i\epsilon} \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\lim_{\tau \rightarrow i\epsilon} e^{i\tau z^0} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e^{-\epsilon z^0} = 1. \quad (8.2.75)$$

Dunque l'integrale dà:

$$\theta(z^0) = \begin{cases} 0 & z^0 < 0 \\ 1 & z^0 > 0. \end{cases} \quad (8.2.76)$$

Riscriviamo il propagatore utilizzando la misura invariante (in 4 dimensioni) che avevamo trovato nella costruzione dell'operatore di campo:

$$i\Delta_F(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) [\theta(z^0) e^{-ipz} + \theta(-z^0) e^{ipz}]. \quad (8.2.77)$$

Inseriamo la rappresentazione (8.2.74) all'interno del propagatore:

$$i\Delta_F(z) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4p \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) \left\{ \frac{e^{-i(pz - \tau z^0)}}{\tau - i\epsilon} + \frac{e^{+i(pz - \tau z^0)}}{\tau - i\epsilon} \right\} \quad (8.2.78)$$

come imparato a Metodi2 dobbiamo cambiare i segni negli esponenziali. Quindi nel secondo termine facciamo il cambio:

$$p^\mu \longrightarrow -p^\mu \quad , \quad \tau \longrightarrow -\tau \quad (8.2.79)$$

in modo che:

$$\frac{e^{+i(pz - \tau z^0)}}{\tau - i\epsilon} \longrightarrow \frac{e^{-i(pz - \tau z^0)}}{-\tau - i\epsilon} = \frac{e^{-i(p^0 z^0 - \vec{p} \cdot \vec{z} - \tau z^0)}}{-\tau - i\epsilon} = \frac{e^{-ip'z}}{-\tau - i\epsilon} \quad (8.2.80)$$

$$\theta(p^0) \longrightarrow \theta(-p^0) \quad (8.2.81)$$

in cui abbiamo definito:

$$p'^0 = p^0 - \tau \quad , \quad \vec{p}' = \vec{p} \quad (8.2.82)$$

$$\implies p'^2 - m^2 \neq 0 \quad (8.2.83)$$

$$\text{poniamo } p'^2 + m^2 = \omega_{p'}^2. \quad (8.2.84)$$

Con il cambio di variabili scelto e le quantità definite possiamo vedere che abbiamo:

$$\delta(p^2 - m^2) = \delta(p'^2 - m^2) \quad (8.2.85)$$

$$= \delta((p'^0 + \tau)^2 - \omega_{p'}^2) \quad (8.2.86)$$

$$= \frac{\delta(p'^0 + \tau + \omega_{p'})}{2\omega_{p'}} + \frac{\delta(p'^0 + \tau - \omega_{p'})}{2\omega_{p'}} \quad (8.2.87)$$

in cui abbiamo utilizzato la proprietà della δ e dei suoi zeri. Naturalmente abbiamo anche:

$$\theta(p^0) = \theta(p'^0 + \tau) \quad , \quad \theta(-p^0) = \theta(-p'^0 - \tau). \quad (8.2.88)$$

Sostituendo tutto otteniamo:

$$i\Delta_F(z) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4p' \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-ip'z} \left\{ \frac{\delta(p'^0 + \tau + \omega_{p'})}{2\omega_{p'}} + \frac{\delta(p'^0 + \tau - \omega_{p'})}{2\omega_{p'}} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\theta(p'^0 + \tau)}{\tau - i\epsilon} + \frac{\theta(-p'^0 - \tau)}{-\tau - i\epsilon} \right\} \quad (8.2.89)$$

in cui sopravviveranno solamente due dei quattro prodotti a causa dell'incompatibilità delle funzioni δ e θ (notando anche che $\omega_{p'} > 0$). Quelli che sopravvivono sono:

$$\frac{\delta(p'^0 + \tau + \omega_{p'})}{2\omega_{p'}} \frac{\theta(-p'^0 - \tau)}{-\tau - i\epsilon} \quad , \quad \frac{\delta(p'^0 + \tau - \omega_{p'})}{2\omega_{p'}} \frac{\theta(p'^0 + \tau)}{\tau - i\epsilon}. \quad (8.2.90)$$

Cancellando i termini incompatibili possiamo integrare su τ sfruttando le δ :

$$i\Delta_F(z) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4 p' \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-ip'z} \left\{ \frac{\delta(p'^0 + \tau + \omega_{p'})}{2\omega_{p'}} \frac{\theta(-p'^0 - \tau)}{-\tau - i\epsilon} + \frac{\delta(p'^0 + \tau - \omega_{p'})}{2\omega_{p'}} \frac{\theta(p'^0 + \tau)}{\tau - i\epsilon} \right\} \quad (8.2.91)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4 p' e^{-ip'z} \frac{1}{2\omega_{p'}} \left\{ \frac{1}{p'^0 + \omega_{p'} - i\epsilon} + \frac{1}{-p'^0 + \omega_{p'} - i\epsilon} \right\} \quad (8.2.92)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4 p' e^{-ip'z} \frac{1}{2\omega_{p'}} \left\{ \frac{2\omega_{p'} - 2i\epsilon}{(\omega_{p'} - i\epsilon)^2 - (p'^0)^2} \right\} \quad (8.2.93)$$

ricordandoci che stiamo considerando il limite $\epsilon \rightarrow 0^+$ possiamo dire che del termine a numeratore possiamo trascurare $2i\epsilon$, mentre a denominatore possiamo trascurare $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ e riscaliamo $-2\omega_{p'}\epsilon \rightarrow -\epsilon$. Tenendo conto di:

$$\omega_{p'}^2 - p_0'^2 = \vec{p}^2 + m^2 - p_0'^2 \quad (8.2.94)$$

$$= \vec{p}'^2 + m^2 - p_0'^2 \quad (8.2.95)$$

$$= m^2 - p'^2 \quad (8.2.96)$$

abbiamo quindi:

$$i\Delta_F(z) \sim \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4 p' e^{-ip'z} \frac{1}{2\omega_{p'}} \left\{ \frac{2\omega_{p'}}{\omega_{p'}^2 - \epsilon^2 - 2\omega_{p'}i\epsilon - (p'^0)^2} \right\} \quad (8.2.97)$$

$$\stackrel{\sim}{\text{riscaliamo}} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p' e^{-ip'z} \left\{ \frac{-i}{m^2 - p'^2 - i\epsilon} \right\} \quad (8.2.98)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p' \left\{ \frac{ie^{-ip'z}}{p'^2 - m^2 + i\epsilon} \right\} \quad (8.2.99)$$

e sostituendo, solo alla fine, p' con p (che arrivati a questo punto è una variabile di integrazione, per cui muta) abbiamo ottenuto:

$$i\Delta_F(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{ie^{-ipz}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.2.100)$$

in cui possiamo notare che il termine $i\epsilon$ origina dalla rappresentazione integrale della $\theta(x^0 - y^0)$, che definisce il prodotto cronologico, e non da una nostra specifica scelta. È proprio la presenza di $+i\epsilon$ che garantisce la causalità. Chiamiamo **propagatore di Feynmann** (nello spazio delle coordinate) il propagatore di causale (8.2.100).

Il propagatore (8.2.100) è scritto nello spazio delle coordinate, da cui potremmo intuire la sua forma nello spazio dei momenti. Infatti, vedendo $\Delta_F(x - y)$ come la trasformata di Fourier del propagatore nello spazio di p , allora ci rendiamo subito conto che nello spazio dei momenti il propagatore è un termine di polo puro:

$$\tilde{\Delta}_F(p') = \int d^4z e^{ip'z} \Delta_F(z) = \frac{i}{p'^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (8.2.101)$$

Nota che potremmo prendere la scrittura (8.2.100) e farne ancora l'integrale su una delle 4 componenti di p . Scegliamo di integrare su p^0 . In (8.2.100) vediamo che abbiamo poli in:

$$p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} - i\epsilon = \omega_p - i\epsilon \quad (8.2.102)$$

$$p^0 = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} + i\epsilon = -\omega_p + i\epsilon \quad (8.2.103)$$

che possiamo raffigurare nella figura 8.4.

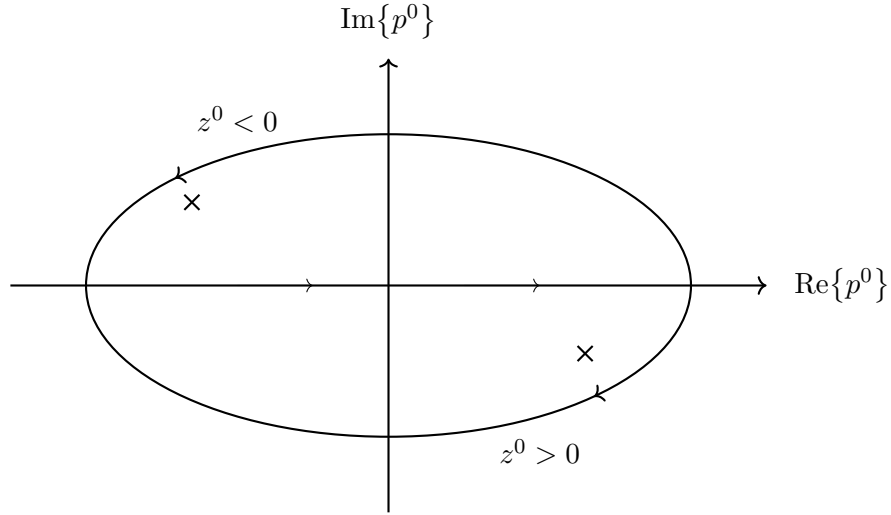


Figura 8.4: Singolarità di $\Delta_F(z)$.

Per $z^0 > 0$ ($x^0 > y^0$) chiudiamo sotto e l'integrale è dato dal residuo del polo in $p^0 = \omega_p - i\epsilon$. Per $z^0 < 0$ ($x^0 < y^0$) chiudiamo sopra e l'integrale è dato dal residuo del polo in $p^0 = -\omega_p + i\epsilon$. Il risultato che troviamo è identico a quello già trovato (8.2.65).

Possiamo, infine, verificare che $\Delta_F(z)$ è proprio una funzione di Green dell'operatore di Klein-Gordon. Infatti:

$$(\square_x + m^2) \Delta_F(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-p^2 + m^2) e^{-ip(x-y)} \quad (8.2.104)$$

a questo punto il termine $+i\epsilon$, che protegge i poli, diventa superfluo poiché $(p^2 - m^2)$ a numeratore e denominatore si semplificano e lasciano solo l'esponenziale, che per definizione da una δ^4 dello spazio. Quindi:

$$(\square_x + m^2) \Delta_F(x - y) = -\delta^4(x - y) \quad (8.2.105)$$

che conferma il fatto che $\Delta_F(x - y)$ è una¹⁰ funzione di Green dell'operatore di KG. La prescrizione di ordinamento temporale in questo caso ha fissato le condizioni al contorno in modo che i campi di annullino a $t = \pm\infty$.

8.3 Campo scalare carico

Vediamo ora il caso leggermente più interessante di campo scalare carico, ossia riprendiamo i campi complessi:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_k}} \left(\hat{a}(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{b}^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} \right) \quad (8.3.1)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_k}} \left(\hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} + \hat{b}(\vec{k}) e^{-ikx} \right) \quad (8.3.2)$$

in cui $\hat{a}^{(\dagger)}$ e $\hat{b}^{(\dagger)}$ rispettivamente creano e distruggono particelle e antiparticelle.

8.3.1 Definizione di propagatore

In questo caso il propagatore è definito come il valore di aspettazione sul vuoto temporalmente ordinato di:

$$\Delta(x - y) = \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | 0 \rangle. \quad (8.3.3)$$

In analogia a quanto fatto per il campo neutro possiamo analizzare il significato del propagatore (8.3.3). Possiamo esplicitare il prodotto temporalmente ordinato:

$$\Delta(x - y) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \hat{\phi}^\dagger(y) \hat{\phi}(x) | 0 \rangle \quad (8.3.4)$$

e considerare i due casi separatamente. Vediamo che:

¹⁰Ricordiamoci che ci sono più funzioni di Green, a seconda delle condizioni al contorno.

- Se $x^0 < y^0$ allora abbiamo:

$$\Delta(x - y) = \langle 0 | \hat{\phi}^\dagger(y) \hat{\phi}(x) | 0 \rangle \quad (8.3.5)$$

e sempre partendo da destra vediamo che, per via delle relazioni:

$$\hat{a}(\vec{k}) | 0 \rangle \quad , \quad \hat{b}^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle = |\vec{k}\rangle \quad (8.3.6)$$

abbiamo che $\hat{\phi}(x) | 0 \rangle$ crea un'antiparticella nel punto $\vec{x}$ nell'istante x^0 , successivamente, facendo agire $\hat{\phi}^\dagger(y) | k \rangle_b$ (dobbiamo ricordarci che $\hat{\phi}^\dagger(y)$ contiene $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{b}$) distrugge l'antiparticella¹¹ all'istante y^0 e nel punto $\vec{y}$. Il processo è causale solo se $x^0 < y^0$.

- Nel caso $y^0 < x^0$ abbiamo:

$$\Delta(x - y) = \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | 0 \rangle \quad (8.3.7)$$

dunque: $\hat{\phi}^\dagger(y) | 0 \rangle$ crea una particella nell'istante y^0 nel punto $\vec{y}$, successivamente, $\hat{\phi}(x) | k \rangle_a$ annichila la particella nell'istante x^0 nel punto $\vec{x}$. In questo caso il processo è causale solo se $y^0 < x^0$.

Naturalmente i due processi non sono separati, ma per la Meccanica Quantistica sono entrambi contemplati e le relative ampiezze devono essere sommate. Per questo motivo la definizione di propagatore è (8.3.4), che possiamo rappresentare tramite diagrammi visibili in figura 8.5.

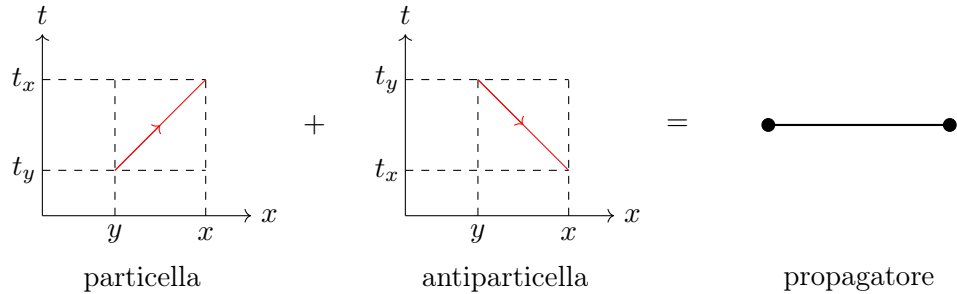


Figura 8.5: Rappresentazione propagatore di campo scalare carico.

In questo caso definiamo il propagatore di Feynmann come:

$$i\Delta_F(x - y) = \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | 0 \rangle \quad (8.3.8)$$

con:

$$\tilde{\Delta}_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.3.9)$$

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.3.10)$$

¹¹In realtà crea anche una particella di impulso fissato, ma poi non essendoci altri operatori rimane $\langle 0 | k \rangle_a$ che è nullo.

e dove:

$$(\square_x + m^2) \Delta_F(x - y) = -\delta^4(x - y) \quad (8.3.11)$$

ossia, il propagatore è la funzione di Green dell'operatore di Klein-Gordon, fissata dalle condizioni al contorno date dal prodotto time-ordered T (che garantiscono la causalità).

8.3.2 Causalità per il campo scalare carico

È più interessante il problema della causalità quando viene studiato per campi in cui ci sono sia i contributi di particelle che di antiparticelle. Infatti, nel caso di campo scalare complesso, le eccitazioni dei campi $\hat{\phi}$ e $\hat{\phi}^\dagger$ corrispondono a particella (di tipo a) e antiparticella (di tipo b), che sono distinte tra loro a differenza del campo neutro. Quando viene quantizzato, il campo $\hat{\phi}(x)$ è associato alla creazione di particelle con carica positiva (di tipo b) e alla distruzione di particelle di carica negativa (di tipo a). Per $\hat{\phi}^\dagger(y)$ vale il discorso opposto. Il commutatore $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)]$ riceverà contributi non nulli, che dovranno cancellarsi tra loro al di fuori del cono-luce, per preservare il principio di causalità. Questi contributi saranno del tipo $\Delta(x - y)$ e $\Delta(y - x)$, in cui però è coinvolta anche la carica della particella corrispondente. Il primo termine rappresenta la propagazione di una particella di carica negativa da y ad x , mentre il secondo di una particella di carica positiva da x ad y . Ovviamente affinché la cancellazione avvenga bisogna che particella e antiparticella esistano, abbiano carica opposta e la stessa massa (devono anche avere propagatori uguali, in modo che $\Delta(x - y) - \Delta(y - x) = 0$). Dunque concludiamo che: in una teoria di campo, il principio di causalità richiede che ogni particella abbia la sua corrispondente antiparticella, con la stessa massa, ma carica opposta (più in generale con numeri quantici opposti). Ricordiamo che nel caso del campo reale particella e antiparticella coincidono.

8.4 Campo spinoriale

Vediamo finalmente il caso dei campi $\hat{\psi}$ di Dirac. In questo caso dovremo stare solo attenti ad applicare le corrette regole di anticommutazione e delle matrici γ . Per questa sezione puoi vedere il capitolo del Peskin e Schroeder *Physical law should have mathematical beauty*. Peskin:1995ev.

8.4.1 Definizione di propagatore

Anche per questo tipo di campi cominciamo dall'equazione di Dirac a cui ci aggiungiamo una sorgente classica $J(x)$:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = J(x) \quad (8.4.1)$$

definiamo il propagandosi di Feynmann $S_F(x-y)$ tale per cui:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) S_F(x-y) = \delta^4(x-y) \quad (8.4.2)$$

che se riusciamo a trovarne una forma esplicita ci permette di scrivere la soluzione dell'equazione di Dirac (usando la teoria delle funzioni di Green) come:

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \int d^4y S_F(x-y) J(y) \quad (8.4.3)$$

in cui $\psi_0(x)$ è la soluzione omogenea di Dirac. Come già fatto per il campo scalare, per trovare un'espressione per $S_F(x-y)$ ricorriamo alla trasformata di Fourier:

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.4.4)$$

che soddisfa la relazione:

$$S_F(x-y) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta_F(x-y) \quad (8.4.5)$$

in cui $\Delta_F(x-y)$ è il propagatore del campo scalare carico. La relazione (8.4.5) è facilmente spiegabile se si ricorda che l'equazione di Klein-Gordon si trova come il quadrato dell'equazione di Dirac.

A questo punto possiamo procedere ad integrare su p^0 . L'integrazione si svolge in modo identico a quella fatta per il campo scalare (il denominatore è lo stesso), ma questa volta a numeratore abbiamo $\not{p} + m$.

Se ci ricordiamo quanto imparato nel capitolo §6, in particolare le relazioni (6.7.29) e (6.7.30), possiamo vedere che calcolando i valori di aspettazione sul vuoto del prodotto T -ordered dei campi $\hat{\psi}$ e $\hat{\bar{\psi}}$:

$$\begin{cases} \langle 0 | \hat{\psi}_a(x) \hat{\bar{\psi}}_b(x') | 0 \rangle & t > t' \\ - \langle 0 | \hat{\bar{\psi}}_b(x') \hat{\psi}_a(x) | 0 \rangle & t' > t. \end{cases} \quad (8.4.6)$$

troviamo:

$$\begin{aligned} S_F(x-x')_{ab} = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_k \left[\underbrace{u_a^s(\vec{p}) \bar{u}_b^s(\vec{p})}_{\hat{\Lambda}_+(\vec{p})} e^{-ip(\vec{x}-\vec{x}')} \theta(t-t') + \right. \\ \left. + \underbrace{v_a^s(\vec{p}) \bar{v}_b^s(\vec{p})}_{\hat{\Lambda}_-(\vec{p})} e^{-ip(\vec{x}'-\vec{x})} \theta(t'-t) \right] \quad (8.4.7) \end{aligned}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[(i\not{\partial}_x + m)_{ab} e^{-ip(x-x')} - (i\not{\partial}_x + m)_{ab} e^{-ip(x'-x)} \right]. \quad (8.4.8)$$

La definizione sembra un po' ambigua. Quando facciamo $\bar{\psi}\psi$ stiamo facendo la moltiplicazione di un vettore riga per uno colonna e otteniamo uno

scalare, invece, quando facciamo $\psi\bar{\psi}$ facciamo vettore colonna per vettore riga e otteniamo una matrice 4x4, ossia un'operatore. In realtà, non c'è nessuna incongruenza tra i due prodotti, perché come succede nell'equazione di Dirac con il termine m che è in realtà $m\mathbb{1}$, anche qua dobbiamo intendere il prodotto $\bar{\psi}\psi$ come $\bar{\psi}\psi\mathbb{1}$, mentre $\psi\bar{\psi}$ è già di per sé una matrice.

Comunque, giungiamo al risultato finale:

$$iS_F(x-y)_{ab} = \langle 0 | T \hat{\psi}_a(x) \hat{\bar{\psi}}_b(x') | 0 \rangle. \quad (8.4.9)$$

che ovviamente si espande come:

$$iS_F(x-y) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) | 0 \rangle - \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \hat{\bar{\psi}}(y) \hat{\psi}(x) | 0 \rangle \quad (8.4.10)$$

in cui il segno negativo tra i due prodotti T-ordinati viene dall'algebra anticommutativa che per scambio di due operatori fa cambiare segno.

8.4.2 Calcoli espliciti propagatore di Feynmann

Vediamo i calcoli espliciti che dimostrano che $S_F(x-y)$ è la funzione di Green dell'equazione di Dirac:

$$(i\partial_x - m) [S_F(x-y)\gamma^0] = -i \langle 0 | (i\partial_x - m) \left[\hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(y) \theta(x^0 - y^0) - \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(x) \theta(y^0 - x^0) \right] | 0 \rangle \quad (8.4.11)$$

aggiungiamo e sottraiamo il termine $\hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(y) \theta(y^0 - x^0)$, con cui ricostruiamo l'anticommutatore $\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(y)\}$. Quindi:

$$(i\partial_x - m) [S_F(x-y)\gamma^0] = -i \langle 0 | (i\partial_x - m) \left[\hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(y) - \theta(y^0 - x^0) \{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(y)\} \right] | 0 \rangle \quad (8.4.12)$$

in cui possiamo riconoscere nel primo termine l'equazione di Dirac, per cui il primo pezzo è nullo, e otteniamo così:

$$(i\partial_x - m) [S_F(x-y)\gamma^0] = i \langle 0 | (i\partial_x - m) \left[\theta(y^0 - x^0) \{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(y)\} \right] | 0 \rangle. \quad (8.4.13)$$

A questo punto possiamo utilizzare un'importante relazione che lega il commutatore del campo scalare neutro (talvolta denominato funzione di Pauli-Jordan, $\Delta_C(x-y)$ tale che $i\Delta_C(x-y) \equiv [\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y)]$) con l'anticommutatore dei campi spinoriali $\hat{\psi}$ e $\hat{\psi}^\dagger$, ossia:

$$(i\partial_x - m) [i\Delta_C(x-y)] \gamma^0 = \{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(y)\}. \quad (8.4.14)$$

La proprietà (8.4.14) si dimostra facilmente tenendo conto che:

$$i\Delta_C(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \left\{ e^{-ip(x-y)} - e^{+ip(x-y)} \right\} \quad (8.4.15)$$

$$\left\{ \hat{\psi}_a(x), \hat{\psi}_b^\dagger(y) \right\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \left\{ (\not{p} + m)e^{-ip(x-y)} + (\not{p} - m)e^{+ip(x-y)} \right\} \gamma^0. \quad (8.4.16)$$

Torniamo a noi e sostituiamo la proprietà (8.4.14) in (8.4.13):

$$(i\not{\partial}_x - m) [S_F(x-y)\gamma^0] = i \langle 0 | (i\not{\partial}_x - m) [\theta(y^0 - x^0) (i\not{\partial}_x + m) [i\Delta_C(x-y)] \gamma^0] | 0 \rangle \quad (8.4.17)$$

$$= -\langle 0 | [i\not{\partial}_x \theta(y^0 - x^0)] [(i\not{\partial}_x + m) \Delta_C(x-y) \gamma^0] \gamma^0 | 0 \rangle + \\ + \langle 0 | [\theta(y^0 - x^0) (i\not{\partial}_x - m)] [(i\not{\partial}_x + m) \Delta_C(x-y) \gamma^0] \gamma^0 | 0 \rangle \quad (8.4.18)$$

possiamo notare che, dal momento che $p^2 = m^2$, abbiamo:

$$(i\not{\partial}_x - m) (i\not{\partial}_x + m) \Delta_C(x-y) = (-p^2 + m^2) \Delta_C(x-y) = 0 \quad (8.4.19)$$

e anche:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu) \theta(y^0 - x^0) = (i\gamma^0 \partial_0) \theta(y^0 - x^0) = -i\gamma^0 \delta(y^0 - x^0) \quad (8.4.20)$$

abbiamo per questi motivi:

$$(i\not{\partial}_x - m) [S_F(x-y)\gamma^0] = -\langle 0 | [-i\gamma^0 \delta(y^0 - x^0) (i\not{\partial}_x + m) \Delta_C(x-y) \gamma^0] | 0 \rangle \quad (8.4.21)$$

in cui la $\delta(x^0 - y^0)$ impone che tutto sia calcolato a tempi uguali, cioè a $x^0 = y^0$. A tempi uguali abbiamo che vale:

$$\partial_x \Delta_C(x-y) \Big|_{x^0=y^0} = \left[\partial_0 \Delta_C + \partial_i \Delta_C \right]_{x^0=y^0} = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) + 0 \quad (8.4.22)$$

e che $\Delta_C(x-y) \Big|_{x^0=y^0} = 0$. Dunque, il risultato finale è:

$$(i\not{\partial}_x - m) [S_F(x-y)\gamma^0] = \delta^4(x-y) \quad (8.4.23)$$

che conferma che $S_F(x-y)\gamma^0$ è la funzione di Green dell'operatore di Dirac, così come $\Delta_F(x-y)$ lo era per l'operatore di Klein-Gordon.

L'espressione esplicita del propagatore di Dirac possiamo ipotizzare essere:

$$S_F(x-y) = (i\not{\partial} + m) \Delta_F(x-y) \quad (8.4.24)$$

verificabile applicando l'operatore di Dirac $(\not{\partial} - m)$ ad entrambi i membri:

$$(\not{\partial} - m)S_F(x - y) = (\not{\partial} - m)(\not{\partial} + m)\Delta_F(z) \quad (8.4.25)$$

$$\implies \delta^4(x - y) = -(\square + m^2)\Delta_F(x - y) \quad (8.4.26)$$

che è certamente corretta perché $\Delta_F(x - y)$ è funzione di Green di $(\square + m^2)$.

Questo conferma l'ipotesi (8.4.24), che possiamo riscrivere, ricordando (8.2.100), come:

$$S_F(x - y) = (i\not{\partial} + m) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ipz}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.4.27)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipz} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (8.4.28)$$

Il propagatore della particella fermionica di spin 1/2 nello spazio degli impulsi sarà:

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.4.29)$$

simile a quello di particella scalare, poiché hanno lo stesso denominatore, ma con diverso numeratore, più complesso, che evidenzia la maggior complessità del campo spinoriale.

8.5 Sommario risultati del propagatore libero

Riassumiamo per comodità tutti i risultati ottenuti per il propagatore di una teoria libera.

Campo scalare neutro e carico

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3(2E_p)} \left[\theta(x^0 - y^0) e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{+ip(x-y)} \right] \quad (8.5.1)$$

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.5.2)$$

$$\tilde{\Delta}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (8.5.3)$$

Campo spinoriale

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.5.4)$$

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (8.5.5)$$

Capitolo 9

Propagatori interagenti e teorie perturbative

Vediamo in questo capitolo la teoria del propagatore nel caso di una teoria interagente. Facciamo riferimento al capitolo §4.2 del Peskin e Schroeder *Physical law should have mathematical beauty*.Peskin:1995ev.

9.1 Propagatore in Teoria Quantistica dei Campi

Lo spazio di Fock visto nell'Appendice G, insieme agli operatori di campo, ci permettono di descrivere la realtà a partire dallo stato di vuoto, in cui, agendo con gli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ possiamo creare e distruggere particella creando eccitazioni del campo stesso. Ovviamente possiamo creare e distruggere anche antiparticelle. Il problema che sorge quando passiamo dalla MQ alla QFT è che prima potevamo descrivere l'evoluzione delle particelle utilizzando la funzione d'onda, ma ora che le funzioni d'onda non sono più utilizzabili abbiamo bisogno di altri oggetti che contengano le informazioni sulle eccitazioni del sistema. Questi oggetti sono ampiezze di probabilità, denotate dalla lettera G e chiamati propagatori. Abbiamo visto che G è direttamente collegato con le funzioni di Green della teoria. I propagatori descrivono il destino delle particelle in una teoria di campo.

Le teorie libere, in cui $V = 0$, sono le più semplici da trattare e per esse utilizziamo la quantizzazione canonica, che ci permette di descrivere il sistema in termini di vuoto, ad esempio creiamo una particella di impulso fissato come:

$$\hat{a}(\vec{p}) |0\rangle = |\vec{p}\rangle. \quad (9.1.1)$$

Per le teorie interagenti, in cui V non è nullo, il tutto è leggermente più complicato poiché contengono termini in più, altamente non banali, che provengono dalla presenza di V e non permettono l'utilizzo della quantizzazione canonica. Per queste teorie, come vedremo, dovremo utilizzare gli integrali di cammino. In queste teorie lo stato fondamentale non è lo stato di vuoto

$|0\rangle$, ma uno stato composito $|\Omega\rangle$. Però, a differenza di quanto succedeva con la teoria libera, in cui agendo con $\hat{a}^\dagger$ sul vuoto creavamo uno stato di singola particella con impulso fissato $\vec{p}$, ora, matematicamente funziona uguale:

$$\hat{a}(\vec{p}) |\Omega\rangle = |\vec{p}\rangle \quad (9.1.2)$$

ma sta volta lo stato $|\vec{p}\rangle$ non è di singola particella, ma è generalmente una sovrapposizione di (infiniti) autostati dell'impulso, ossia una sovrapposizione di molte particelle, i cui impulsi sommano a $\vec{p}$.

Vista la difficoltà delle teorie interagenti, ricorriamo a metodi perturbativi proprio come facevamo in Meccanica Quantistica.

9.1.1 Propagatore per la teoria di campo interagente

Per costruire il propagatore nel caso interagente facciamo praticamente la stessa cosa che abbiamo fatto per il caso libero.

Consideriamo un campo generico, che scriviamo con $\hat{\phi}$, ma che non è per forza scalare. Prendiamo lo stato fondamentale $|\Omega\rangle$, introduciamo una particella-test nel punto $\vec{y}$ all'istante t_y (y^0), la facciamo evolvere nel tempo ed interagire con il sistema (causando l'eccitazione del sistema e turbandolo anche in modo particolarmente complesso), al tempo t_x (x^0) quando la particella si trova in $\vec{x}$ la rimuoviamo e per finire ci possiamo chiedere quale sia l'ampiezza di probabilità che dopo aver fatto questo esperimento il sistema sia rimasto nello stato di partenza $|\Omega\rangle$. Scriviamo il propagatore come:

$$G^+(x, y) = \theta(x^0 - y^0) \langle \Omega | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | \Omega \rangle. \quad (9.1.3)$$

Naturalmente questa ampiezza di probabilità dipenderà dai complicati dettagli dell'interazione V . Ovviamente come abbiamo detto per il caso libero dobbiamo considerare anche il contributo di antiparticella e considerare dunque il prodotto T-ordinato. La definizione corretta, che considera sia il contributo di particelle che di antiparticelle, e che va sotto il nome di **propagatore di Feynmann** è:

$$G(x, y) = \langle \Omega | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | \Omega \rangle \quad (9.1.4)$$

$$= \theta(x^0 - y^0) \langle \Omega | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | \Omega \rangle \pm \theta(y^0 - x^0) \langle \Omega | \hat{\phi}^\dagger(y) \hat{\phi}(x) | \Omega \rangle \quad (9.1.5)$$

in cui il segno $+$ sarà per i bosoni e il $-$ per i fermioni. Il segno T è il simbolo di ordinamento temporale (di Wick) e garantisce la causalità, ossia, garantisce che particelle e antiparticelle siano prima create e poi distrutte, ma mai il viceversa.

Infatti, ciascun termine del propagatore di Feynmann rappresenta uno dei due contributi. Il primo vale per $x^0 > y^0$ e rappresenta la creazione

e la successiva distruzione di una particella, poiché $\hat{\phi}^\dagger \propto \hat{a}^\dagger e^{+ipx} + \hat{b} e^{-ipx}$ e quindi agendo su $|\Omega\rangle$ crea una particella di stato $|p\rangle$ mentre $\hat{b}|\Omega\rangle = 0$, successivamente agiamo con $\hat{\phi}$ su $|p\rangle$, ma essendo $\hat{\phi} \propto \hat{a} e^{+ipx} + \hat{b}^\dagger e^{-ipx}$ avremo la distruzione della particella, ma anche la creazione di un'antiparticella $|p\rangle_b$ che però chiudendo il panino con $\langle\Omega|$ dà 0 essendo ortogonali.

Seguendo lo stesso ragionamento vediamo che nel caso $y^0 > x^0$, quindi vedendo come agisce $\hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}$ sullo stato fondamentale, il propagatore corrisponde alla creazione e distruzione di un'antiparticella.

Spesso ci troveremo a lavorare con teorie che non coinvolgono solamente 2 particelle, ma molte, in generale n . Facciamo un attimo chiarezza sulla notazione.

Quando lavoriamo con una singola particella parliamo di *single particle propagator* oppure *two point Green's function* e indichiamo:

$$G^{(2)}(x, y) = \langle\Omega| T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) |\Omega\rangle. \quad (9.1.6)$$

Il numero due sta a significare che abbiamo una singola particella che viene prima creata e poi annichilita, e due è la somma di "gambe" che entrano nel sistema (la palla) e che escono. Possiamo anche avere più punti (vertici) per il nostro propagatore. Ad esempio se abbiamo:

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle\Omega| T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}^\dagger(x_3) \hat{\phi}^\dagger(x_4) |\Omega\rangle \quad (9.1.7)$$

parliamo di *four point propagator*, e se vediamo la figura 9.1 possiamo vedere che corrisponde ad una situazione in cui 2 particelle entrano nella regione di interazione e due escono.

Possiamo scrivere in generale l' *n-point propagator*:

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle\Omega| T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \dots \hat{\phi}^\dagger(x_n) |\Omega\rangle. \quad (9.1.8)$$

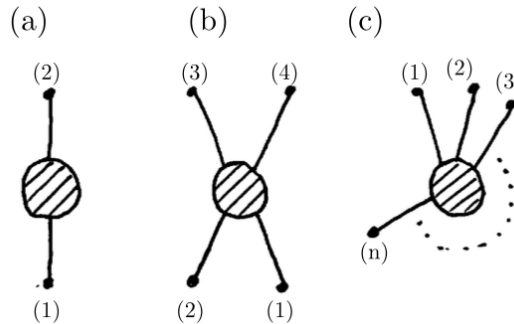


Figura 9.1: Rappresentazione propagatori ad n punti.

9.2 Gell-Mann low theorem

Vediamo in questa sezione un teorema molto importante per determinare il propagatore in una teoria interagente. In particolare vedremo come legare il propagatore libero con quello interagente, in modo da poter effettivamente fare i conti. Potrei aver dimenticato, molti, cappellini agli operatori, quindi ricordiamo che le hamiltoniane e gli operatori di evoluzione temporale hanno ruolo operatoriale. Il riferimento è il capitolo §4.2 del Peskin e Schroeder *Physical law should have mathematical beauty*. Peskin:1995ev.

Quando la teoria che studiamo è una teoria interagente, abbiamo visto che il propagatore è definito come valore di aspettazione sullo stato fondamentale $|\Omega\rangle$, ricorda la definizione (9.1.4), che *non* coincide con lo stato di vuoto $|0\rangle$. Ricordiamo anche che: il propagatore che abbiamo visto è la funzione di Green a due punti $G^{(2)}$, rappresenta l'ampiezza di probabilità che una particella (eccitazione del campo) si propaghi da y^μ a x^μ dello spazio-tempo e ci permette di studiare l'evoluzione spazio-temporale del sistema; e che essendo $|\Omega\rangle$ lo stato fondamentale, allora è definito da:

$$H |\Omega\rangle = E_0 |0\rangle. \quad (9.2.1)$$

Il punto di questa sezione è che il propagatore, in teoria interagente, non può essere calcolato esattamente (come fatto per la teoria libera), ma solo in modo approssimato utilizzando la teoria perturbativa. Per fare questo tipo di conti dovremo avere un'hamiltoniana del tipo:

$$H = H_0 + H' \quad (9.2.2)$$

con H_0 hamiltoniana di teoria libera (non interagente), che sappiamo risolvere esattamente, e H' perturbazione che dev'essere piccola rispetto H_0 e breve nel tempo.

L'obiettivo che ci poniamo a questo punto è quello di esprimere il propagatore della teoria interagente:

$$\langle \Omega | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] | \Omega \rangle \quad (9.2.3)$$

in funzione dello stato di vuoto $|0\rangle$ e dei campi $\hat{\phi}$ scritti in rappresentazione di interazione, dunque che evolvono alla Heisenberg con H_0 . È utile rivedere l'Appendice I. Dobbiamo quindi:

1. Trovare la relazione che lega lo stato fondamentale $|\Omega\rangle$ della teoria interagente, con $|0\rangle$, lo stato di vuoto, nonché lo stato fondamentale della teoria libera, quindi l'autostato di H_0 corrispondente all'energia più bassa dello spettro ($E = 0$).
2. Esprimere i campi $\hat{\phi}$ in funzione dei corrispondenti operatori di campo $\hat{\phi}_I$, scritti in rappresentazione di interazione.

Cominciamo ad analizzare e a studiare il punto 2. Ricordando l'evoluzione temporale degli operatori in rappresentazione di interazione (quindi gli operatori evolvono con H_0 e li indichiamo con il pedice I) possiamo scrivere:

$$\hat{\phi}_I(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{\phi}(t_0, \vec{x}) e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} \quad (9.2.4)$$

che invertendola ci da:

$$\hat{\phi}(t_0, \vec{x}) = e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{\phi}_I(t, \vec{x}) e^{+i\hat{H}_0(t-t_0)} \quad (9.2.5)$$

in cui $\hat{\phi}(t_0, \vec{x})$ è l'operatore di campo ad un'istante t_0 fissato. Ovviamente però a noi non interessa il campo $\hat{\phi}(t_0, \vec{x})$, bensì siamo interessati ad un'espressione per il campo $\hat{\phi}(t, \vec{x})$, che possiamo ottenere facendo evolvere $\hat{\phi}(t_0, \vec{x})$ da t_0 fino t :

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = e^{iH(t-t_0)} \hat{\phi}(t_0, \vec{x}) e^{-iH(t-t_0)} \quad (9.2.6)$$

$$= e^{iH(t-t_0)} e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{\phi}_I(t, \vec{x}) \underbrace{e^{+i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}}_{\hat{U}_I(t, t_0)} \quad (9.2.7)$$

$$= \hat{U}_I^\dagger(t, t_0) \hat{\phi}_I(t, \vec{x}) \hat{U}_I(t, t_0) \quad (9.2.8)$$

avendo definito l'operatore di evoluzione temporale nella rappresentazione di interazione come:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = e^{+i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}. \quad (9.2.9)$$

L'espressione (9.2.8) ci permette di esprimere il campo (completo e generico) $\hat{\phi}(x^\mu)$ in funzione di $\hat{\phi}_I$, per il quale conosciamo l'espressione in termini di operatori di scala $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ (visto che evolve secondo H_0 e quindi che sappiamo diagonalizzare).

Siamo quindi riusciti ad ottenere il punto 2, ma parliamo un'attimo della definizione dell'operatore di evoluzione temporale. Ovviamente la condizione di unitarietà:

$$\hat{U}_I(t_0, t_0) = \mathbb{1} \quad (9.2.10)$$

è soddisfatta, ma anche l'evoluzione temporale è quella che ci si aspetta nella rappresentazione di interazione, come si può verificare facendo la derivata temporale:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_I(t, t_0) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} (\hat{H} - \hat{H}_0) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad (9.2.11)$$

$$= e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{H}' \underbrace{e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} \times e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}}_{\mathbb{1}} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad (9.2.12)$$

$$= \underbrace{e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{H}' e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}}_{\equiv \hat{H}_I(t)} \times \underbrace{e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}(t-t_0)}}_{\equiv \hat{U}_I(t, t_0)} \quad (9.2.13)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_I(t, t_0) = \hat{H}_I(t) \hat{U}_I(t, t_0). \quad (9.2.14)$$

Notiamo anche che se $\hat{H}_I(t)$ fosse un numero e non un'operatore, oltretutto dipendente dal tempo, allora la soluzione all'equazione differenziale (9.2.14) sarebbe semplicemente:

$$\hat{U}_I(t, t_0) = e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} \quad (9.2.15)$$

come ben sappiamo. Però come abbiamo visto dobbiamo essere cauti vista la natura operatoriale di $\hat{H}_I$, infatti la notazione esponenziale di $\hat{U}_I(t, t_0)$ è solamente simbolica e la utilizziamo per sottointendere che essa esprime l'intero sviluppo in serie (che ha senso solo se H_I è piccolo e dunque se H' lo è). Inoltre, la dipendenza dal tempo di $\hat{H}_I(t)$ non è banale, il che è il motivo per cui possiamo dire che $\hat{H}_I(t_1)$ non commuta con $\hat{H}_I(t_2)$, e nei termini dello sviluppo in serie (di ordine maggiore di 2) dobbiamo stare attenti all'ordinamento dei prodotti. Nei propagatori, per rispettare la causalità, abbiamo bisogno che i tempi siano ordinati da destra a sinistra in modo crescente, motivo per cui modifichiamo leggermente la definizione esponenziale di $\hat{U}_I(t, t_0)$ e scriviamo¹:

$$\hat{U}_I(t, t_0) \equiv T \left[\exp \left\{ -i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_I(t') \right\} \right] \quad (9.2.16)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{1} + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T[\hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2)] + \\ &+ \frac{(-i)^3}{3!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 T[\hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2) \hat{H}_I(t_3)] + \dots \end{aligned} \quad (9.2.17)$$

proprio grazie all'ordinamento temporale, che ci rende l'integrale simmetrico, possiamo scrivere:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \quad (9.2.18)$$

come puoi vedere nella figura 9.2.

In questo modo abbiamo:

$$U_I(t, t_0) \equiv T \left[\exp \left\{ -i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_I(t') \right\} \right] \quad (9.2.19)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{1} + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_2 dt_3 T[\hat{H}_I(t_2) \hat{H}_I(t_3)] + \dots \end{aligned} \quad (9.2.20)$$

¹Nota che nell'integrale che scrive il Peskin vale $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \dots$

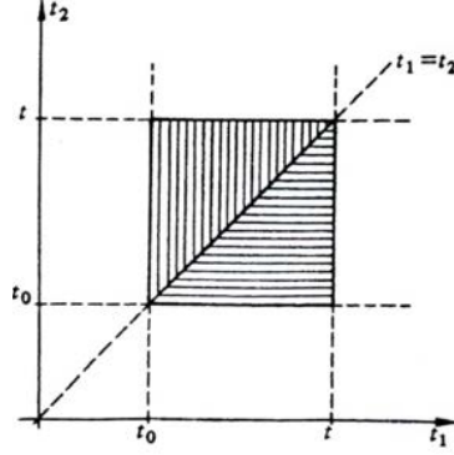


Figura 9.2: Rappresentazione geometrica dal Rossetti, *Rudimenti di Meccanica Quantistica*, appendice 9.

che è detto **sviluppo di Dyson** (sviluppo perturbativo).²

Concentriamoci ora sul punto 1 e quindi nel cercare una relazione tra $|\Omega\rangle$ e $|0\rangle$. Abbiamo già detto che $|0\rangle$ è lo stato fondamentale dell'hamiltoniana libera H_0 , ossia l'autostato corrispondente all'energia minima, dunque a $E = 0$, e per cui vale:

$$\hat{H}_0 |0\rangle = 0. \quad (9.2.22)$$

Chiamiamo $\{|n\rangle\}$ gli autostati di H (intesa come somma di parte libera e di interazione), essi formano un set completo per cui vale:

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbb{1}. \quad (9.2.23)$$

Lo stato $|\Omega\rangle$ è lo stato fondamentale della teoria interagente, è autostato di H e corrisponde all'energia (minima della teoria interagente) E_0 :

$$\hat{H} |\Omega\rangle = E_0 |\Omega\rangle \quad E_0 = \langle \Omega | \hat{H} | \Omega \rangle. \quad (9.2.24)$$

Partiamo dallo stato $|\Omega\rangle$, che sarà una sovrapposizione lineare di (infiniti) autostati di H_0 (e dell'impulso), uno dei quali sarà $|0\rangle$. Dal momento che $\hat{H}'$ è piccola,³ lo stato $|\Omega\rangle$ avrà sicuramente un overlap con $|0\rangle$, e quindi siamo

²Nota che il termine $\hat{H}_I$, se ad esempio prendiamo $\lambda \hat{\phi}^4$ come teoria interagente, non è altro che:

$$\hat{H}_I = \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \hat{\phi}(x)^4. \quad (9.2.21)$$

³Nel caso in cui $\hat{H}'$ fosse grande, potremmo capitare in una situazione in cui il termine di interazione è dominante e lo stato fondamentale $|\Omega\rangle$ è completamente diverso dallo stato di vuoto $|0\rangle$.

sereni nel dire che:

$$\langle \Omega | 0 \rangle \neq 0. \quad (9.2.25)$$

Possiamo partire da $|0\rangle$, e farlo evolvere nel tempo con H ottenendo la serie:

$$e^{-iHT} |0\rangle = e^{-iHT} \sum_n |n\rangle \langle n|0\rangle = \sum_n e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle \quad (9.2.26)$$

$$\implies e^{-iHT} |0\rangle = \sum_n e^{-iE_n T} \langle n|0\rangle |n\rangle \quad (9.2.27)$$

sfruttando proprio l'overlap tra $|\Omega\rangle$ e $|0\rangle$, possiamo separare la serie nel suo termine ad energia più basso, ovvero E_0 corrispondente a $|n=0\rangle = |\Omega\rangle$, e tutti gli altri:

$$e^{-iHT} |0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle \quad (9.2.28)$$

che possiamo notare, siccome $E_0 < E_n \forall n \geq 1$, se mandiamo $T \rightarrow \infty$, in una direzione immaginaria generica, allora possiamo trascurare tutti i termini con $n \neq 0$, diventando dominante E_0 . Nota che non mandiamo T ad infinito casualmente, ma lo facciamo con un piccolo *tilt* immaginario (andiamo ad infinito in una direzione obliqua), che non ci farà divergere alcuni integrali. Invertendo la relazione (9.2.28) troviamo:

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0 T} \langle \Omega|0\rangle \right)^{-1} e^{-iHT} |0\rangle. \quad (9.2.29)$$

Però, dal momento in cui stiamo facendo il limite per T molto grande, se lo shiftassimo di una quantità t_0 finita, non altereremmo il risultato:

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle \right)^{-1} e^{-iH(T+t_0)} |0\rangle. \quad (9.2.30)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle \right)^{-1} \underbrace{e^{-iH(t_0-(-T))} e^{+iH_0(t_0-(-T))}}_{\hat{U}_I(t_0, -T)} |0\rangle \quad (9.2.31)$$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle \right)^{-1} \hat{U}_I(t_0, -T) |0\rangle \quad (9.2.32)$$

in cui nel passaggio (9.2.31) abbiamo aggiunto l'esponenziale $e^{+iH_0(t_0-(-T))}$, in modo lecito, poiché tanto $e^{+iH_0(t_0-(-T))} |0\rangle \sim \mathbb{1} |0\rangle$ nel limite di grandi T visto che $\hat{H}_0 |0\rangle = |0\rangle$. Nota anche che avevamo definito $\hat{U}_I$ con gli esponenziali scambiati, ma siamo tranquilli nel dire che $[H, H_0] = 0$ poiché stiamo nel limite $T \rightarrow \infty$ e quindi con le interazioni trascurabili (in $\hat{H}_I$ dunque c'è praticamente solo $\hat{H}_0$).

L'equazione (9.2.32) ci dice che possiamo ottenere $|\Omega\rangle$ semplicemente evolvendo lo stato di vuoto $|0\rangle$ da un tempo $-T$ molto grande, fino al

tempo t_0 (finito) tramite l'operatore di evoluzione temporale $\hat{U}_I(t_0, -T)$ e normalizzando con un certo fattore. In modo analogo possiamo scrivere:

$$\langle \Omega | = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | \hat{U}_I(T, t_0) \left(e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0 | \Omega \rangle \right)^{-1} \quad (9.2.33)$$

facendo attenzione al fatto che in questo caso l'evoluzione porta $|0\rangle$ da t_0 a T (quindi fare attenzione ai segni del tempo).

Possiamo finalmente mettere insieme tutti e due i risultati ottenuti e scrivere il propagatore:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-iE_0 2T} \right)^{-1} \times \\ &\quad \times \langle 0 | \hat{U}_I(T, t_0) \left[\hat{U}_I(x^0, t_0) \right]^\dagger \hat{\phi}_I(x) \hat{U}_I(x^0, t_0) \times \\ &\quad \times \left[\hat{U}_I(y^0, t_0) \right]^\dagger \hat{\phi}_I(y) \hat{U}_I(y^0, t_0) \hat{U}_I(t_0, -T) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (9.2.34)$$

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left(|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-iE_0 2T} \right)^{-1} \times \\ &\quad \times \langle 0 | \hat{U}_I(T, x^0) \hat{\phi}_I(x) \hat{U}_I(x^0, y^0) \hat{\phi}_I(y) \hat{U}_I(y^0, -T) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (9.2.35)$$

Il fattore di normalizzazione si può riscrivere, sfruttando il fatto che gli autostati di $\hat{H}$ (e $|\Omega\rangle$ in particolare) sono ortonormali (usa l'equazione (9.2.32) insieme a (9.2.33)):

$$1 = \langle \Omega | \Omega \rangle = \left(|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-iE_0 2T} \right)^{-1} \langle 0 | \hat{U}_I(T, t_0) \hat{U}_I(t_0, -T) | 0 \rangle \quad (9.2.36)$$

ricaviamo essere:

$$\left(|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-iE_0 2T} \right)^{-1} = \frac{1}{\langle 0 | \hat{U}_I(T, t_0) \hat{U}_I(t_0, -T) | 0 \rangle}. \quad (9.2.37)$$

Possiamo quindi scrivere (9.2.35) come:

$$\langle \Omega | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | \hat{U}_I(T, x^0) \hat{\phi}_I(x) \hat{U}_I(x^0, y^0) \hat{\phi}_I(y) \hat{U}_I(y^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{U}_I(T, -T) | 0 \rangle} \quad (9.2.38)$$

in cui possiamo notare che i campi in ambo i membri sono temporalmente ordinati, rispettando l'assunzione $y^0 < x^0$. Per generalizzare a qualsiasi x^0 ed y^0 possiamo considerare il prodotto temporalmente ordinato (quindi includere il contributo $x^0 > y^0$) e scrivere:

$$\langle \Omega | T[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)] | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left[\hat{\phi}_I(x) \hat{\phi}_I(y) e^{-i \int_{-T}^{+T} dt \hat{H}_I(t)} \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left[e^{-i \int_{-T}^{+T} dt \hat{H}_I(t)} \right] | 0 \rangle} \quad (9.2.39)$$

che va sotto il nome di **Gell-Mann Low theorem** o *reduction formula*.

Il teorema (9.2.39) può anche essere riscritto in modo elegante utilizzando la matrice di scattering $\hat{S}$. La matrice $\hat{S}$ viene fuori quando studiamo delle ampiezze di scattering di un dato processo. Il modo solito di procedere, come impareremo nel corso di *Fondamenti di Teoria Quantistica dei Campi*, è quello di considerare il limite adiabatico del processo, ossia: quando siamo in presenza di un'hamiltoniana del tipo (9.2.2) consideriamo i due stati iniziale e finale dello scattering talmente lontani nel tempo che non vedono l'interazione e che sono governati solo da H_0 (motivo per cui non evolvono nel tempo):

$$|\psi\rangle_{\text{in}}^{\text{non int}} = |p_1 p_2\rangle_{\text{in}} \quad (9.2.40)$$

$$|\psi\rangle_{\text{out}}^{\text{non int}} = |q_1 q_2\rangle_{\text{out}} \quad (9.2.41)$$

in cui (9.2.40) sono gli autostati di H_0 a $t = -\infty$ e (9.2.41) gli autostati a $t = +\infty$. Possiamo a questo punto definire l'ampiezza di scattering del processo come:

$$\mathcal{A} = \langle q_1, q_2 | \hat{S} | p_1 p_2 \rangle_{\text{in}}^{\text{non int}} \quad (9.2.42)$$

in cui consideriamo gli stati iniziali e finali molto lontani dall'interazione, quindi liberi, e mettiamo tutta l'informazione sull'hamiltoniana del mondo reale H in $\hat{S}$. Dunque, $\hat{S}$ gioca il ruolo di un operatore di evoluzione temporale (poiché contiene l'informazione dell'interazione) e ci dice come evolve il sistema da un certo stato *in* in uno *out*.

Il legame tra $\hat{S}$ e l'operatore $\hat{U}$ lo si può vedere facilmente sfruttando l'equivalenza delle diverse rappresentazioni:

$$\mathcal{A} = \langle q_1, q_2 | \hat{S} | p_1 p_2 \rangle_{\text{in}}^{\text{non int}} \quad (9.2.43)$$

$$= \langle \phi | \hat{S} | \psi \rangle_{\text{real world}}^{\text{in}} \quad (9.2.44)$$

$$= \langle \phi | \psi \rangle_{\text{real world}}^{\text{in}} \quad (9.2.45)$$

$$= \langle \phi_I(0) | \psi_I(0) \rangle \quad (9.2.46)$$

$$= \langle \phi_I(+\infty) | \hat{U}_I(+\infty, 0) \hat{U}_I(0, -\infty) | \psi_I(-\infty) \rangle \quad (9.2.47)$$

$$= \langle \phi_I(+\infty) | \hat{U}_I(+\infty, -\infty) | \psi_I(-\infty) \rangle \quad (9.2.48)$$

$$= \langle \phi | \hat{U}_I(+\infty, -\infty) | \psi \rangle_{\text{real world}}^{\text{in}} \quad (9.2.49)$$

dunque abbiamo:

$$\hat{S} = \hat{U}_I(t, -t) \quad , \quad \text{con } t \rightarrow +\infty \quad (9.2.50)$$

ossia, $\hat{S}$ è l'operatore di evoluzione temporale, nella rappresentazione di interazione, che lega gli istanti $t = -\infty$ e $t = +\infty$.

Nel teorema di Gell-Mann-Low possiamo quindi inserire:

$$\hat{S} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} T \left[\exp \left\{ -i \int_{-T}^{+T} dt \hat{H}_I(t) \right\} \right] \quad (9.2.51)$$

con cui assume la forma:

$$\langle \Omega | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T[\hat{\phi}_I(x)\hat{\phi}_I(y)\hat{S}] | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle}. \quad (9.2.52)$$

Nota che possiamo spostare a piacimento gli operatori sia perché c'è il prodotto T-ordinato che ci garantisce comunque la causalità, ma anche perché siamo nel limite di T grande e il termine di hamiltoniana dominante è $\hat{H}_0$.

9.3 Teorema di Wick

Vediamo ora uno dei teoremi fondamentali che ci permettono di fare effettivamente i calcoli e di arrivare ai diagrammi di Feynmann (vedi il corso di *Fondamenti* o il file di *Complementi*). Lo vedremo meglio in seguito, ma dal momento che gli stati iniziali e finali di un processo di scattering, nella rappresentazione di interazione e nel limite adiabatico, sono autostati di H_0 , possono essere costruiti agendo con gli operatori di creazione e distruzione sullo stato di vuoto $|0\rangle$. Allora, per calcolare le ampiezze di scattering $\langle \phi | \psi \rangle_{\text{non int}}^{\text{out}}$ ci aspettiamo di dover calcolare, in generale, oggetti del tipo:

$$\langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}\hat{C} \dots \hat{Z}] | 0 \rangle \quad (9.3.1)$$

che non sono altro che gli oggetti che compaiono nell'espressione del teorema di Gell-Mann Low (9.2.39); dobbiamo calcolare oggetti che sono valori di aspettazione sul vuoto del prodotto temporalmente ordinato di una catena di n operatori $(\hat{A}\hat{B}\hat{C} \dots \hat{Z})$, che non saranno altro che operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, contenuti all'interno dei campi liberi ϕ . Siamo certi di questo poiché in $\hat{S}$ è contenuta l'interazione $\hat{\mathcal{H}}_I$, che è data dal prodotto di campi, che possiamo individuare dai diagrammi di Feynmann.

Conti tipo (9.3.1) per un numero $n = 2$ di campi si riducono ad un propagatore di Feynmann, nel caso $n > 2$ sono estremamente complicati, ma il teorema di Wick ci viene in aiuto mettendo in relazione il VEV (vacuum expectation value) del prodotto T-ordinato con quello del prodotto normal ordered, il quale è più semplice da trattare in quanto è sempre nullo.⁴

Prima di enunciare il teorema dobbiamo capire di cosa si occupa e che oggetti utilizza. Per prima cosa rendiamoci conto che possiamo espandere

⁴Ricorda che l'ordinamento normale pone gli operatori di annichilazione a destra e gli operatori di creazione a sinistra, e quindi questo VEV è identicamente zero poiché $\hat{a}|0\rangle = 0$.

un qualsiasi operatore di campo nella sua parte di creazione e di distruzione:

$$\hat{\phi}_I(x) = \hat{\phi}_I^-(x) + \hat{\phi}_I^+(x) \quad , \quad \hat{\phi}_I^- |0\rangle = 0 \quad \langle 0| \hat{\phi}_I^+ = 0 \quad (9.3.2)$$

in cui:

$$\hat{\phi}_I^+(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_k}} \hat{a}_k^\dagger e^{+ikx} \quad (9.3.3)$$

$$\hat{\phi}_I^-(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_k}} \hat{a}_k e^{-ikx} \quad (9.3.4)$$

Il teorema di Wick utilizza delle quantità che chiamiamo contrazioni, per capire cosa sono facciamo un esempio. D'ora in avanti facciamo cadere l'indice I di interazione per semplicità. Prendiamo due operatori di campo e facciamone il prodotto:

$$\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) = \left(\hat{\phi}^+(x) + \hat{\phi}^-(x)\right) \left(\hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^-(y)\right) \quad (9.3.5)$$

$$= \hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^-(x)\hat{\phi}^-(y) + \hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}^-(y) + \hat{\phi}^-(x)\hat{\phi}^+(y) \quad (9.3.6)$$

e possiamo anche calcolare il prodotto normal-ordered dei due operatori:

$$N[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] = \hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^+(y)\hat{\phi}^-(x) + \hat{\phi}^-(x)\hat{\phi}^-(y) + \hat{\phi}^-(x)\hat{\phi}^+(y). \quad (9.3.7)$$

Possiamo facilmente notare che l'unica differenza tra (9.3.6) e (9.3.7) è solo l'ordine degli ultimi due operatori nella somma, per questo motivo la loro differenza da:

$$\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) - N[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] = [\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y)]. \quad (9.3.8)$$

Però, presi due campi $\hat{\phi}(x)$ e $\hat{\phi}(y)$, noi possiamo sempre scriverci il loro prodotto T-ordinato:

$$T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] = \begin{cases} \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) & x^0 > y^0 \\ \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (9.3.9)$$

e possiamo notare la quantità:

$$T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] - N[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] = \begin{cases} [\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y)] & x^0 > y^0 \\ [\hat{\phi}^-(y), \hat{\phi}^+(x)] & x^0 < y^0. \end{cases} \quad (9.3.10)$$

Il punto del discorso è che il valore di aspettazione sul vuoto di (9.3.10) si riduce semplicemente al valore di aspettazione del prodotto T-ordinato, visto

che il VEV di un prodotto normal-ordered è nullo, dunque, possiamo scrivere in modo del tutto generale (e soprattutto giustificato):

$$\begin{aligned} \langle 0 | \left(T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] - N[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] \right) | 0 \rangle &= \langle 0 | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] | 0 \rangle \\ &= \begin{cases} \langle 0 | [\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y)] | 0 \rangle & x^0 > y^0 \\ \langle 0 | [\hat{\phi}^-(y), \hat{\phi}^+(x)] | 0 \rangle & x^0 < y^0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.3.11)$$

Possiamo definire, in modo generico, la quantità (9.3.10) come una **contrazione**, che indichiamo con:

$$\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} = T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] - N[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] \quad (9.3.12)$$

che è semplicemente un numero (in realtà un c-numero), dal momento che con la relazione (9.3.10) abbiamo visto essere semplicemente un commutatore, che avendo a che fare solo con operatori di creazione e distruzione è al più una δ di Kroneker⁵. Possiamo scrivere (dal momento che il VEV del prodotto N-ordinato è nullo):

$$\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} = \overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \langle 0 | 0 \rangle = \langle 0 | \overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} | 0 \rangle = \langle 0 | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] | 0 \rangle. \quad (9.3.13)$$

Utilizzando la relazione (9.3.12) possiamo scrivere:

$$T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] = N[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] + \overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \quad (9.3.14)$$

$$= N[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) + \overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}] \quad (9.3.15)$$

che è una versione a due operatori del teorema di Wick. Possiamo enunciare:

Teorema 2 (di Wick). *Vale, per una generica stringa di operatori, la relazione:*

$$\begin{aligned} T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\dots\hat{\phi}(x_n)] &= N\left[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\dots\hat{\phi}(x_n) + \right. \\ &\quad \left. + \text{tutte le possibili} \right. \\ &\quad \left. \text{contrazioni di } \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\dots\hat{\phi}(x_n) \right]. \end{aligned} \quad (9.3.16)$$

Dimostriamo (puoi vedere anche le note di *Fondamenti*) per induzione il teorema di Wick nel caso generico di n campi. Supponiamo che il teorema di

⁵Abbiamo a che fare solo con $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ (o quelli di antiparticella) perché in una teoria libera abbiamo ϕ solo in funzione di essi, ma anche in una interagente quando facciamo il limite adiabatico (andiamo a istanti di tempo molto distanti dalla regione di interazione) siamo comunque in presenza di campi non interagenti, quindi solo con operatori di creazione e distruzione.

Wick valga per n campi e dimostriamo che valga per $n+1$, con n arbitrario. Supponiamo $x_{n+1}^0 < n_i^0 \forall i$ e scriviamo per questo:

$$T[\phi(x_1) \dots \phi(x_n + 1)] = T[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] \phi(x_{n+1}) \quad (9.3.17)$$

$$\begin{aligned} &= N[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] \phi(x_{n+1}) + \\ &\quad + \sum_{\text{perm}} \langle 0 | T[\phi(x_1) \phi(x_2)] | 0 \rangle \cdot N[\phi(x_3) \dots \phi(x_n)] \cdot \phi(x_{n+1}) \end{aligned} \quad (9.3.18)$$

fin'ora abbiamo lasciato $\phi(x_{n+1})$ fuori dai prodotti N -ordinati, ma vogliamo operare in modo da portarlo all'interno. Scriviamo (9.3.2) sempre con (9.3.3) e (9.3.4). Un prodotto N -ordinato avrà sempre i campi di tipo ϕ^- a destra e i ϕ^+ a sinistra:

$$N[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] = \sum_{A,B} \prod_{i \in A} \prod_{j \in B} \phi^+(x_i) \phi^-(x_j) \quad (9.3.19)$$

dove A e B rappresentano le partizioni dell'insieme di $1, 2, \dots, n$ elementi. Con questa notazione possiamo scrivere:

$$N[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] \phi(x_{n+1}) = \left[\sum_{A,B} \prod_{i \in A} \prod_{j \in B} \phi^+(x_i) \phi^-(x_j) \right] (\phi^+(x_{n+1}) + \phi^-(x_n + 1)) \quad (9.3.20)$$

in cui $\phi^-(x_{n+1})$ è già nella posizione corretta per essere portato all'interno del prodotto N -ordinato, ma $\phi^+(x_{n+1})$ deve migrare verso sinistra. Ogni volta che ϕ^+ viene commutato con uno dei campi ϕ^- genera un termine aggiuntivo dovuto al commutatore $[\phi^-, \phi^+]$, che è la contrazione definita sopra, la quale è un c-numero.

Ad esempio vediamo:

$$\phi^-(x) \phi^+(y) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(4\omega_k \omega_{k'})^{1/2}} \underbrace{\hat{a}_k \hat{a}_{k'}^\dagger}_{\hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_k + \delta^3(k-k')} e^{-ikx} e^{+ik'x} \quad (9.3.21)$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(4\omega_k \omega_{k'})^{1/2}} \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_k e^{-ikx} e^{+ik'x} + \\ &\quad + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(4\omega_k \omega_{k'})^{1/2}} \delta^3(k - k') e^{-ikx} e^{+ik'x} \end{aligned} \quad (9.3.22)$$

$$= \phi^+(y) \phi^-(x) + c - \text{numero}. \quad (9.3.23)$$

Se ora prendiamo il valore di aspettazione sul vuoto:

$$\langle 0 | \phi^-(x) \phi^+(y) | 0 \rangle = \underbrace{\langle 0 | \phi^+(y) \phi^-(x) | 0 \rangle}_{=0} + c - \text{numero} \langle 0 | 0 \rangle \quad (9.3.24)$$

combinando le ultime due relazioni otteniamo:

$$\phi^-(x)\phi^+(y) = \phi^+(y)\phi^-(x) + \langle 0 | \phi^-(x)\phi^+(y) | 0 \rangle \quad (9.3.25)$$

ossia che ad ogni permutazione del campo $\phi^+(x_{n+1})$ con un campo $\phi^-(x_j)$ si genera un termine $\langle 0 | \phi^-(x_j)\phi^+(x_{n+1}) | 0 \rangle$.

Tornando alla nostra espressione di partenza abbiamo:

$$\begin{aligned} N[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] \phi(x_{n+1}) &= \sum_{A,B} \prod_{i \in A} \prod_{j \in B} \left(\phi^+(x_i) \phi^-(x_j) \phi^-(x_{n+1}) \right) + \\ &+ \sum_{A,B} \prod_{i \in A} \prod_{j \in B} \left(\phi^+(x_i) \phi^+(x_{n+1}) \phi^-(x_j) \right) + \\ &+ \sum_{\substack{k \in B \\ j \in B \\ j \neq k}} \phi^+(x_j) \langle 0 | \phi^-(x_k) \phi^+(x_{n+1}) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (9.3.26)$$

in questa espressione i primi due termini del secondo membro provengono dal corretto riposizionamento di $\phi^+(x_{n+1})$ all'interno del prodotto N -ordinato, e ricostruiscono $N[\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_{n+1})]$. Il terzo addendo rappresenta la somma di tutti i contributi ottenuti nello scambio di posizione di $\phi^+(x_{n+1})$ con gli operatori $\phi^-(x_n)$ necessari per far migrare $\phi^+(x_{n+1})$ sulla sinistra. Tali termini sono tutte le possibili contrazioni dei campi $\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)$ a due a due, in tutti i modi possibili.

Dunque, il teorema di Wick, ora generalizzato ad un numero arbitrario di operatori di campo, si può scrivere come (9.3.16).

Nota. Dalla relazione (9.3.16) vediamo che se facciamo il valore di aspettazione sul vuoto del prodotto T-ordinato, allora sopravvivono solo i termini con tutti i campo contratti (in tutti i modi possibili), poiché altrimenti avremmo i valori di aspettazione di una cosa tipo:

$$N[\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4}] = \overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2} N[\hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4] \quad (9.3.27)$$

e come sappiamo il valore di aspettazione di un prodotto normal-ordered da zero. Conseguenza di ciò è che sono non nulli solamente i VEV dei prodotti T-ordinati di un numero pari di operatori.

Proviamo a vedere l'applicazione del teorema di Wick per 4 campi, in cui per brevità scriviamo $\phi(x_i) = \hat{\phi}_i$:

$$\begin{aligned} T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] &= N[\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4}] + N[\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4}] + N[\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4}] + N[\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4}] + \\ &+ N[\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4}] + N[\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4}] + N[\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4}] + N[\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4}] + \\ &+ N[\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4}] + N[\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4}] \end{aligned} \quad (9.3.28)$$

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle =$$

Figura 9.3

calcoliamo il valore di aspettazione sul vuoto:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4] | 0 \rangle &= \langle 0 | N [\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2} \overbrace{\hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4}] | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | N [\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_3} \overbrace{\hat{\phi}_2 \hat{\phi}_4}] | 0 \rangle + \langle 0 | N [\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_4} \overbrace{\hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3}] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (9.3.29)$$

utilizzando la definizione di contrazione (9.3.12):

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4] | 0 \rangle &= \langle 0 | T [\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4] | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | T [\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4}] | 0 \rangle + \langle 0 | T [\overbrace{\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4}] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (9.3.30)$$

che possiamo anche riscrivere, utilizzando il teorema di Wick, come:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4] | 0 \rangle &= \langle 0 | T [\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2] | 0 \rangle \langle 0 | T [\hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4] | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | T [\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_3] | 0 \rangle \langle 0 | T [\hat{\phi}_2 \hat{\phi}_4] | 0 \rangle + \langle 0 | T [\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_4] | 0 \rangle \langle 0 | T [\hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (9.3.31)$$

che, ricordando le definizioni di propagatore di Feynmann per campo scalare (8.2.33), diventa:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_3) \hat{\phi}(x_4)] | 0 \rangle &= \Delta_F(x_1 - x_2) \Delta_F(x_3 - x_4) + \\ &+ \Delta_F(x_1 - x_3) \Delta_F(x_2 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_4) \Delta_F(x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (9.3.32)$$

in cui vediamo bene che tutto il formalismo che stiamo analizzando tramite il teorema costruisce in automatico un qualcosa di quantistico, poiché dando come risultati dei propagatori, ci sta semplicemente dicendo che il nostro sistema si propaga in tutti i modi possibili, essendo una combinazione lineare di tutti i possibili propagatori.

All'oggetto visto in quest'ultimo esempio possiamo dare una rappresentazione grafica, tramite i diagrammi di Feynmann, come in figura 9.3. Vedrai meglio questa cosa nel corso di *Fondamenti di Teoria Quantistica dei Campi*.

Capitolo 10

Teorie di gauge ed Elettromagnetismo

In questo capitolo vedremo come formulare l'elettrodinamica quantistica, ripassando le equazioni di Maxwell, passando per le teorie di gauge, tratteremo la teoria elettromagnetica massiva e massless quantizzando anch'esse, come fatto per i campi scalari e spinoriali e finiremo il capitolo trovando il propagatore per il campo fotonico. I riferimenti per questo capitolo sono il capitolo §4 del Peskin e Schroeder *Physical law should have mathematical beauty*.Peskin:1995ev, i capitoli §13, 14 del Lancaster e Blundell *Physical law should have mathematical beauty*.Lancaster:2014pza sono stati seguiti durante le lezioni in aula, ma anche il capitolo §7 del Schwichtenberg *Physical law should have mathematical beauty*.symmetry è un riferimento molto valido.

10.1 Le equazioni di Maxwell

Richiamiamo brevemente le equazioni di Maxwell, che sono le equazioni classiche che descrivono il campo A_μ , ossia un campo vettoriale (spin 1) a massa nulla. Le equazioni sono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (10.1.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \quad (10.1.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (10.1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (10.1.4)$$

in cui $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono campo elettrico e magnetico, che sono due trivettori che descrivono il campo elettromagnetico in termini di 6 gradi di libertà (3 componenti ciascuno). Come ben sappiamo le equazioni di Maxwell ci dicono: la

quantità ρ , che compare in (10.1.1), è la sorgente del campo elettrico, ossia la densità di carica elettrica; la quantità $\vec{j}$ è la corrente elettrica e l'equazione (10.1.2) rappresenta il flusso di cariche; l'equazione (10.1.3) ci dice che non ci sono sorgenti di campo magnetico e l'equazione (10.1.4) ci dice che non esiste una corrente magnetica. In EM classico abbiamo anche visto che la corrente elettrica rispetta l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (10.1.5)$$

Però con il corso di Fisica3 e la Relatività Speciale sappiamo che grazie al fatto che il rotore del gradiente e la divergenza del rotore sono nulle entrambe, allora possiamo scrivere l'EM in modo covariante e sostituire a $\vec{E}$ e $\vec{B}$ (6 componenti indipendenti) le 4 componenti di un quadrivettore¹ $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ tale per cui:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \implies E^i = -\partial^i A^0 - \partial^0 A^i \quad (10.1.6)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \implies B^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j A_k \quad (10.1.7)$$

$$(10.1.8)$$

quindi si ha $A^\mu = (A^0, \vec{A}) = (\phi, \vec{A})$, con ϕ potenziale scalare e $\vec{A}$ potenziale vettore. Facendo questo scriviamo appunto l'elettromagnetismo in una forma covariante utilizzando le quantità:

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}) \quad , \quad j^\mu = (\rho, \vec{j}) \quad (10.1.9)$$

e per cui abbiamo l'equazione di continuità:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (10.1.10)$$

e le equazioni di Maxwell non omogenee (10.1.1) e (10.1.4) diventano:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (10.1.11)$$

in cui definiamo il *tensore elettromagnetico*:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (10.1.12)$$

che assume la forma:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & +B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.1.13)$$

¹Dal punto di vista di Lorentz esso è un vettore.

Il tensore (10.1.12) è un tensore di rango 2, per cui sotto trasformazioni di Lorentz si trasforma come:

$$F^{\mu\nu} \xrightarrow{\text{T.L.}} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \quad (10.1.14)$$

secondo la rappresentazione $(1,0) \oplus (0,1)$ del gruppo di Lorentz, in quanto $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico. Possiamo anche notare l'identità:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu [\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho] = 0 \implies \partial_\mu [\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}] = 0 \quad (10.1.15)$$

che ci permette di definire il *tensore duale*:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (10.1.16)$$

rappresentato come:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} (\vec{E} \rightarrow \vec{B}; \vec{B} \rightarrow -\vec{E}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.1.17)$$

il quale ci permette di scrivere:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (10.1.18)$$

che è equivalente a scrivere le equazioni di Maxwell omogenee (10.1.3) e (10.1.4).

Ovviamente il processo descritto nel capitolo §4 vale anche per l'elettromagnetismo. Possiamo scrivere la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad (10.1.19)$$

e applicare le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = 0. \quad (10.1.20)$$

In questo caso abbiamo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} = 0 \quad (10.1.21)$$

e anche (ricordando l'antisimmetria del tensore):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \quad (10.1.22)$$

$$= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \frac{\partial (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \quad (10.1.23)$$

$$= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) \quad (10.1.24)$$

$$= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} F^{\nu\mu} \quad (10.1.25)$$

$$= -F^{\mu\nu}. \quad (10.1.26)$$

Dunque l'equazione di Eulero-Lagrange diventa:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (10.1.27)$$

cioè le equazioni di Maxwell nel vuoto (10.1.1) e (10.1.2).

Notiamo ancora una piccola cosa. Le equazioni di Maxwell non descrivono campi di materia, bensì campi mass-less, che sono quelli che chiamiamo A^μ ; per questo motivo le sorgenti sono "aggiunte" a mano dall'esterno e non sono contenute nella teoria per costruzione. Aggiungiamo le cariche all'elettromagnetismo solo nel momento in cui alla lagrangiana (10.1.19) aggiungiamo un termine che descriva delle particelle cariche, scalari o di Dirac che siano.

Inoltre, utilizzando il teorema di Noether possiamo calcolare il tensore energia-impulso:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)} \partial_\nu A^\lambda - \mathcal{L} g^\mu{}_\nu \quad (10.1.28)$$

$$= -F^{\mu\nu} \partial_\nu A_\lambda + \frac{1}{4} g^\mu{}_\nu F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (10.1.29)$$

Vediamo bene che non è un tensore simmetrico (scambiando gli indici ν, λ il primo termine non è simmetrico), come dovrebbe, e questo implica che non c'è un momento angolare conservato. Inoltre non è gauge invariante poiché non è scritto in termini del solo campo $F^{\mu\nu}$ (vedi la prossima sezione per vedere cosa vuol dire).

Però, il tensore energia-impulso non è una quantità misurabile (osservabile) e possiamo modificarlo con un termine aggiuntivo (corrisponde in Meccanica Analitica a fare una trasformazione canonica):

$$T^\mu{}_\nu \longrightarrow T^\mu{}_\nu + \partial_\lambda (F^{\mu\lambda} A_\nu) \quad (10.1.30)$$

$$= T^\mu{}_\nu + \underbrace{\left(\partial_\lambda F^{\mu\lambda} \right)}_{=0 \text{ per Maxwell}} A_\nu + F^{\mu\lambda} \partial_\lambda A_\nu \quad (10.1.31)$$

$$= F^{\mu\rho} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} g^\mu{}_\nu F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (10.1.32)$$

e questo nuovo tensore, così definito, è simmetrico, invariante di Lorentz e invariante di gauge.

Inoltre, le cariche conservate associate al tensore energia-impulso sono:

$$T^{00} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (10.1.33)$$

$$T^{0i} = (\vec{E} \times \vec{B})^i \quad (10.1.34)$$

dove: (10.1.33) è la densità di energia totale del sistema (dunque sarà l'hamiltoniana), associata al campo, e (10.1.34) è il vettore di Pointing, a cui è legato il trasporto di energia.

10.2 Teorie di Gauge

Vediamo in questa sezione che cosa si intende con gauge, che cosa sono le trasformazioni di Gauge e come esse entrino in gioco nella nostra teoria dell'Elettromagnetismo.

La lagrangiana del campo elettromagnetico (disaccoppiata dalle sorgenti) abbiamo detto essere:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (10.2.1)$$

Possiamo notare che la teoria è invariante per trasformazioni locali del tipo:

$$\begin{cases} A^0 \longrightarrow A^0 + \frac{\partial\chi}{\partial t} \\ \vec{A} \longrightarrow \vec{A} - \vec{\nabla}\chi \end{cases} \implies A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu\chi \quad (10.2.2)$$

dunque il quadripotenziale A^μ è definito a meno del quadri-gradiente di una funzione scalare $\chi(x)$ arbitraria. Infatti vediamo:

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow \partial^\mu(A^\nu + \partial^\nu\chi) - \partial^\nu(A^\mu + \partial^\mu\chi) \quad (10.2.3)$$

$$= (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \underbrace{\partial^\mu\partial^\nu\chi - \partial^\nu\partial^\mu\chi}_{\text{sim.}} \quad (10.2.4)$$

$$= F^{\mu\nu}. \quad (10.2.5)$$

Trasformazioni di questo tipo, ossia che permettono il passaggio nella nostra teoria di campo tra diverse configurazioni dei campi che diano le stesse osservabili fisiche, si chiamano **trasformazioni di gauge** e l'invarianza associata si chiama **invarianza di gauge**. Ovviamente, non esiste una singola trasformazione di gauge possibile per i campi, ma diverse, e noi ne possiamo scegliere una specifica, che ci risultare comoda in determinate situazioni; questo si chiama *gauge fixing*. Notiamo la cosa importante che l'invarianza di gauge non è una simmetria del sistema, quindi le particelle non si portano dietro un'etichetta "gauge" che ci permette di trasformarle, ma l'invarianza è semplicemente data dal fatto che non siamo in grado di dare un'unica descrizione del sistema. Siamo tranquilli nel dire che non sono simmetrie del sistema poiché non comportano quantità conservate nel senso del teorema di Noether. Possiamo fare un semplice schema di quello che abbiamo detto:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Simmetria} & & \text{Trasformazioni} & & \text{Gauge} \\ \text{di gauge} & \longleftrightarrow & \text{di gauge} & \longleftrightarrow & \text{fixing.} \end{array}$$

Ad esempio: nella teoria elettrica classica avevamo il potenziale elettrico V definito a meno di una costante, che fissavamo, ossia sceglievamo un certo gauge, in modo che il potenziale all'infinito fosse nullo; in Meccanica Quantistica potevamo scegliere quale fosse lo zero delle fasi che mettavamo davanti le funzioni d'onda, e questa scelta (di gauge) non importava perché tanto

sapevamo che le osservabili erano invarianti per trasformazioni di fase; ora in Elettromagnetismo abbiamo appena visto che il quadripotenziale è definito a meno di un quadri-gradiente di una funzione scalare, dunque possiamo scegliere un particolare gauge, quindi una particolare χ , che ci modifica la forma di A^μ senza cambiare la Fisica.

Però, dobbiamo stare attenti alle differenze di trasformazioni di gauge *locali* e *globali*. Infatti, i tre esempi che abbiamo visto, in realtà sono delle invarianze di gauge diverse. Possiamo ragionare sul fatto se le specifiche scelte che facciamo influenzino solo il nostro laboratorio (locali) o se invece l'intero universo (globali). Se noi scegliamo lo zero del potenziale elettrico in uno specifico punto del globo, esso sicuramente non cambierà se noi ci mettiamo a viaggiare e cambiamo pianeta, tanto fissato il riferimento quello è invariante nello spazio. Invece, quando noi scegliamo una specifica forma di $A^\mu(x)$ lo facciamo tramite una funzione scalare $\chi(x)$ che varia di punto in punto. Detto questo, chiamiamo **trasformazioni di gauge globali** trasformazioni del tipo:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \quad (10.2.6)$$

con α indipendente da x . Queste trasformazioni, oltre a notare che questa in particolare è una trasformazione del gruppo $U(1)$, deformano il campo nello stesso modo in tutti i punti dello spaziotempo. Teorie di campo scalari e spinoriali sono invarianti per trasformazioni di gauge globali.

Allo stesso tempo chiamiamo **trasformazioni di gauge locali** trasformazioni del tipo:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \quad (10.2.7)$$

in cui ora α dipende da x . Per queste trasformazioni il campo è trasformato in modo diverso in ogni punto dello spaziotempo. Nessuna teoria di campo è invariante per queste trasformazioni (considerate singolarmente). Vedremo tra poco che per avere una teoria di gauge invariante per trasformazioni locali dobbiamo combinare un campo di materia insieme ad un'altro campo, che chiamiamo di gauge.

Possiamo verificare brevemente che non abbiamo teorie di campo invarianti per trasformazioni locali. Infatti, abbiamo visto la lagrangiana del campo elettromagnetico libero (10.2.1), per rendere le cose interessanti dobbiamo accoppiare il campo A^μ con le cariche, di Dirac o scalari che siano, e lo possiamo fare aggiungendo termini di massa o cinetici ad $\mathcal{L}$. Ci rendiamo subito conto che se facciamo una trasformazione di gauge locale, tipo una trasformazione di fase locale (10.2.7), i termini di massa, del tipo $m\bar{\psi}\psi$ o $m\phi^\dagger\phi$, sono invarianti di gauge poiché le fasi si cancellano, anche se α dipende da x . Così non è per i termini che contengono derivate (in questo conto intendiamo un campo scalare, in cui abbiamo le derivate sia di ψ che di $\psi^\dagger$, ma nota che il caso spinoriale è analogo, ma senza le derivate di $\psi^\dagger$ che non

compaiono nella lagrangiana), che non sono mai invarianti, infatti:

$$\partial_\mu \psi(x) \longrightarrow \partial_\mu (\psi(x) e^{i\alpha(x)}) \quad (10.2.8)$$

$$= e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x) + [i\partial_\mu \alpha(x)] e^{i\alpha(x)} \psi(x) \quad (10.2.9)$$

$$= e^{i\alpha(x)} [\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha(x)] \psi(x) \quad (10.2.10)$$

$$\partial_\mu \psi^\dagger(x) \longrightarrow e^{-i\alpha(x)} [\partial_\mu - i\partial_\mu \alpha(x)] \psi^\dagger(x) \quad (10.2.11)$$

per cui il termine cinetico diventa:

$$(\partial_\mu \psi^\dagger)(\partial^\mu \psi) - i(\partial^\mu \alpha) \psi^\dagger (\partial_\mu \psi) + i(\partial^\mu \psi^\dagger) (\partial_\mu \alpha) \psi + (\partial^\mu \alpha) (\partial_\mu \alpha) \psi^\dagger \psi \quad (10.2.12)$$

che è chiaramente diverso da $\partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi$. Per questo motivo diciamo che tra le teorie che abbiamo studiato fin'ora nessuna teoria è invariante per trasformazioni di gauge locali.

Ricorda che stiamo ancora parlando in senso generale, tra un attimo vedremo come l'EM centri in tutto questo. Abbiamo detto che quando facciamo trasformazioni di gauge locali, senza ancora aver fatto un gauge fixing, abbiamo simmetria della lagrangiana, ma solo se essa è nella sua forma di teoria libera, ossia (10.2.1); quando accoppiamo il campo elettromagnetico (nel nostro caso, ma in realtà è valido in generale quando accoppiamo il campo associato alla $\mathcal{L}$ libera in esame) aggiungendo termini di massa la situazione non cambia, ma aggiungendo termini cinetici, quindi termini con derivate, abbiamo visto (vedi la relazione (10.2.12)) che l'invarianza di gauge di $\mathcal{L}$ si rompe. Facciamo un esempio concreto, prendiamo la lagrangiana di Dirac, facciamo una trasformazione di fase locale sul campo ψ :

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)} \psi(x) \quad (10.2.13)$$

e ci chiediamo come trasformi $\mathcal{L}_D$:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi &\longrightarrow e^{-i\alpha(x)} \bar{\psi} \left[i\gamma^\mu (\partial_\mu \psi) e^{i\alpha(x)} + i\gamma^\mu (i\partial_\mu \alpha) \psi e^{i\alpha(x)} - m\psi e^{i\alpha(x)} \right] \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - (\partial_\mu \alpha) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \end{aligned} \quad (10.2.14)$$

chiaramente vediamo che $\mathcal{L}_D$ non è invariante, ma c'è un pezzetto in più, dipendente da quella funzione scalare $\alpha(x)$, che da fastidio. Però, possiamo creare una teoria invariante per trasformazioni locali sfruttando bene la simmetria di gauge di un altro campo. Infatti, sappiamo bene che il campo vettoriale A^μ è invariante per trasformazioni del tipo:

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi(x) \quad (10.2.15)$$

e sfruttando bene questa invarianza, e dunque scegliendo opportunamente χ , possiamo rendere una teoria, che comprenda sia i campi ψ che i campi A^μ , invariante per trasformazioni di gauge locali.

Infatti, in generale non è gratis assicurarsi l'invarianza di gauge per trasformazioni locali, ma sarà una condizione valida solo se ammettiamo la presenza di un altro campo oltre ai campi di materia (ϕ o ψ) che ci piace tanto usare (nelle teorie di Klein-Gordon o di Dirac). Dobbiamo quindi aggiungere alla teoria il campo di radiazione (A^μ), che entra a far parte della lagrangiana e quindi si accoppia (interagirà) con i campi ϕ o ψ .

Però dobbiamo capire come possiamo inserire un campo ausiliario A^μ , vettoriale, che si trasformi contestualmente, e simultaneamente, a ψ in modo da cancellare opportunamente il termine in più in (10.2.14). Notiamo che il termine che vogliamo rimuovere è proporzionale a $\partial_\mu \alpha(x)$. Possiamo prendere la trasformazione di gauge:

$$\begin{cases} \psi(x) & \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \\ A^\mu(x) & \longrightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu \alpha(x) \end{cases} \quad (10.2.16)$$

e in questo modo ridefiniamo:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - q\gamma^\mu A_\mu)\psi \quad (10.2.17)$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \quad (10.2.18)$$

in cui abbiamo definito:

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x) \quad (10.2.19)$$

che chiamiamo **derivata covariante**, dopo aver messo un termine:

$$\mathcal{L}_{gauge} = q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \quad (10.2.20)$$

in cui compare una γ^μ poiché ci serve che la lagrangiana sia invariante di Lorentz. È semplice vedere che per la trasformazione (10.2.16) si trasforma come:

$$q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \longrightarrow q \left(e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}(x) \right) \gamma^\mu \left(A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu \alpha(x) \right) \left(e^{i\alpha(x)}\psi(x) \right) \quad (10.2.21)$$

$$= q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu\psi - \bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \alpha(x)\psi. \quad (10.2.22)$$

È facile verificare che (10.2.18) è invariante per (10.2.16):

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \longrightarrow \bar{\psi}'(i\gamma^\mu D'_\mu - m)\psi' \quad (10.2.23)$$

$$= e^{-i\alpha}\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A'_\mu - m)e^{i\alpha}\psi \quad (10.2.24)$$

$$= e^{-i\alpha}\bar{\psi}(-\gamma^\mu \partial_\mu \alpha - q\gamma^\mu A'_\mu - m)e^{i\alpha}\psi + \quad (10.2.25)$$

$$+ e^{-i\alpha}\bar{\psi}(i\gamma^\mu e^{i\alpha}\partial_\mu \psi)$$

$$= e^{-i\alpha}\bar{\psi}(-\gamma^\mu \partial_\mu \alpha - q\gamma^\mu A_\mu + \gamma^\mu \partial_\mu \alpha - \quad (10.2.26)$$

$$- m)e^{i\alpha}\psi + e^{-i\alpha}\bar{\psi}(i\gamma^\mu e^{i\alpha}\partial_\mu \psi)$$

$$= e^{-i\alpha}\bar{\psi}(-q\gamma^\mu A_\mu - m)e^{i\alpha}\psi + \quad (10.2.27)$$

$$+ e^{-i\alpha}\bar{\psi}(i\gamma^\mu e^{i\alpha}\partial_\mu \psi)$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi \quad (10.2.28)$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi. \quad (10.2.29)$$

La quantità q è una costante, è la **costante di accoppiamento** e ci dà l'intensità con cui il campo A^μ interagisce con l'altro campo della teoria (in questo esempio che abbiamo visto ψ). Noi sceglieremo in QED la costante di accoppiamento essere proprio la carica elettromagnetica associata ai campi ψ , perché è una quantità conservata in senso stretto (in modo assoluto), come ci garantisce il teorema di Noether. L'interazione elettromagnetica avviene tra cariche q e non mescola settori di carica diversa.

Una teoria in cui il campo vettoriale A^μ è introdotto per generare un'invarianza (di fase) locale è detta **teoria di gauge** e il campo A^μ è detto **campo di gauge**.

Per scrupolo verifichiamo anche che con la definizione (10.2.19) il termine cinetico diventa invariante per trasformazioni (10.2.16):

$$D_\mu \psi \longrightarrow D'_\mu \psi' = \left[\partial_\mu + iqA_\mu - i\partial\alpha(x) \right] (e^{i\alpha(x)}\psi(x)) \quad (10.2.30)$$

$$= i(\partial_\mu \alpha)e^{i\alpha}\psi + e^{i\alpha}\partial_\mu \psi + iqA_\mu e^{i\alpha}\psi - i(\partial_\mu \alpha)e^{i\alpha}\psi \quad (10.2.31)$$

$$= e^{i\alpha}\partial_\mu \psi + e^{i\alpha}(iqA_\mu)\psi \quad (10.2.32)$$

$$= e^{i\alpha}(\partial_\mu + iqA_\mu)\psi \quad (10.2.33)$$

$$= e^{i\alpha}D_\mu \psi \quad (10.2.34)$$

da cui:

$$D_\mu^\dagger \psi^\dagger D_\mu \psi \longrightarrow e^{-i\alpha}D_\mu^\dagger \psi^\dagger e^{i\alpha}D_\mu \psi \quad (10.2.35)$$

$$= D_\mu^\dagger \psi^\dagger D_\mu \psi \quad (10.2.36)$$

quindi sì, la derivata covariante ha ristabilito l'invarianza purché A^μ trasformi contemporaneamente come detto in (10.2.16).

Dunque concludiamo che per osservare gli effetti dell'Elettromagnetismo, A^μ dev'essere accoppiato ad un campo di materia; infatti utilizzando la lagrangiana (10.1.19) ottenevamo le equazioni di Maxwell omogenee e non quelle con le sorgenti, mentre se prendiamo la lagrangiana dell'**elettrodinamica quantistica** (che rispetta ancora una simmetria $U(1)$ locale):

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{gauge} \quad (10.2.37)$$

$$= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - q \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \quad (10.2.38)$$

e cerchiamo le equazioni del moto per il campo A^μ otteniamo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\nu A_\mu]} = 0 \implies \partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) + g \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = 0 \quad (10.2.39)$$

che se notiamo che il termine $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ è proprio la corrente di Noether, associata ai campi spinoriali, che si conserva per simmetrie locali, allora ci porta a:

$$\partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = J^\mu \quad (10.2.40)$$

ovvero le equazioni di Maxwell non omogenee, ossia quelle in cui sono presenti le sorgenti del campo.

La prescrizione per ottenere la teoria di interazione tra il campo elettromagnetico minimale e la materia è quella più semplice possibile, è detto **accoppiamento minimale** e prevede semplicemente la sostituzione (all'interno di $\mathcal{L}$) di ∂_μ con la derivata covariante D_μ (come facciamo in Relatività Generale). La parola *minimale* c'è perché è la scelta che prevede il minor numero possibile di campi aggiuntivi rispetto la teoria libera (infatti aggiungiamo solo un campo A^μ).

10.2.1 Perché la teoria di gauge

Elenchiamo un attimo alcuni dei motivi per cui l'invarianza di gauge è importantissima:

- L'invarianza di gauge ci fornisce una guida nel calcolo delle proprietà fisiche della teoria in esame.
- Quando studieremo il processo di rinormalizzazione (quindi rimuoveremo le divergenze in ogni ordine degli sviluppi perturbativi) allora ci renderemo conto che essi dipendono in modo cruciale dall'invarianza di gauge.
- L'unitarietà della teoria (che ci assicura che non ci siano "ghost" nella teoria, cioè stati a norma negativa) dipende in modo cruciale dall'invarianza di gauge (i modi vibrazionali longitudinali del campo di Maxwell

corrispondono a stati a norma negativa ed essi vengono eliminati scegliendo un gauge appropriato, ossia il gauge di Coulomb ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$). Notiamo però che c'è un caso particolare, ovvero la quantizzazione di Gupta-Bleuler, in cui noi chiediamo di non rompere mai l'invarianza di Lorentz, e ci riusciamo, ma all'alto pezzo di ottenere i "ghost" nella teoria che si propagano e che dovremo rimuovere a mano.

- La prova che la teoria rimane Lorentz invariante anche dopo aver fissato un gauge *non* Lorentz invariante richiede l'utilizzo della simmetria di gauge, come vedremo.

10.2.2 Teorie di gauge in Elettromagnetismo

Torniamo al nostro amato Elettromagnetismo e all'invarianza che avevamo trovato per il nostro campo:

$$A^\mu(x) \longrightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x) \quad (10.2.41)$$

notiamo facilmente che se applichiamo più trasformazioni di gauge in successione, troviamo che esse formano gruppo, sotto la semplice legge additiva:

$$\chi_3 = \chi_1 + \chi_2 \quad (10.2.42)$$

che è la legge tipica del gruppo $U(1)$.

Abbiamo visto che per trasformazioni di gauge il tensore $F^{\mu\nu}$ è invariante, ma se $F^{\mu\nu}$ è invariante, nel senso che $\delta F^{\mu\nu} = 0$, allora lo è anche la lagrangiana (attenzione, è invariante quella libera, ossia (10.2.1)), sempre nel senso $\delta \mathcal{L} = 0$. L'invarianza di gauge delle equazioni di Maxwell e di $\mathcal{L}$ implica che ci sia una rindondanza nella nostra teoria, nel senso che: è vero che abbiamo già ridotto i gradi di libertà da 6, quando usavamo $\vec{E}$ e $\vec{B}$, a 4, ora che utilizziamo A^μ , però avendo ancora l'invarianza di gauge possiamo utilizzarla in modo furbo, o conveniente, per ridurre ulteriormente i gradi di libertà fino a due. Con il gauge fixing passiamo da avere una classe di soluzioni ad una sola soluzione, con due gradi di libertà.

Infatti, se prendiamo l'equazione di Maxwell non omogenea:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (10.2.43)$$

ricaviamo:

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = j^\nu \implies \square A^\nu - \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = j^\nu \quad (10.2.44)$$

$$\implies \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu \quad (10.2.45)$$

e siccome la funzione $\chi(x)$ è una funzione scalare arbitraria, la possiamo fissare:

$$\chi(x) \quad / \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (10.2.46)$$

che corrisponde a mettersi nel particolare gauge chiamato **gauge di Lorenz**², ci piace perché è Lorentz invariante e in cui le equazioni di Maxwell diventano:

$$\begin{cases} \square A^\mu = j^\mu & \text{in presenza di sorgenti} \\ \square A^\mu = 0 & \text{nel vuoto.} \end{cases} \quad (10.2.47)$$

Ovviamente esistono anche altri gauge significativi che vengono utilizzati per rimuovere l'ambiguità di A^μ , dato che le sue 4 componenti sono tutte fisicamente rilevanti, e alcuni esempi sono:

$$A^0 = 0 \quad \text{gauge temporale} \quad (10.2.48)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{gauge di Coulomb.} \quad (10.2.49)$$

Capito cosa vuol dire gauge fixing, possiamo fare un passo indietro e ripensare all'invarianza di gauge:

$$A^\mu(x) \longrightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x) \quad (10.2.50)$$

e possiamo renderci conto non essere tanto diversa dell'espressione della trasformazione di gauge (10.2.16) che abbiamo utilizzato per arrivare a $\mathcal{L}_{QED}$. Infatti basta porre:

$$\partial^\mu \chi(x) = -\frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x) \quad (10.2.51)$$

e le due espressioni coincidono. Conseguentemente, fare il gauge fixing ora si traduce nello scegliere una condizione non più su $\chi(x)$, ma su $\alpha(x)$.

Nel capitolo precedente non abbiamo visto molta fisica, ma solamente abbiamo visto dove la richiesta di invarianza locale ci portasse. Vediamo brevemente l'accoppiamento minimale del campo scalare (con il campo fermionico è identico) con il campo di gauge A^μ e vediamo l'applicazione del **principio di gauge**:

Il campo di gauge A^μ introdotto per garantire l'invarianza per trasformazioni locali, determina la forma dell'accoppiamento, o meglio delle sue interazioni con il campo di materia.

Prendiamo la lagrangiana del campo scalare carico e ci aggiungiamo la lagrangiana di Maxwell:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{EM} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (10.2.52)$$

²Non è un errore nel nome, il nome si riferisce a Ludvig Lorenz e non a Hendrik Lorentz, a cui siamo abituati.

utilizziamo la prescrizione di accoppiamento minimale (dunque $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$):

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (10.2.53)$$

$$= (\partial_\mu \phi^\dagger - iq A_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi + iq A^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (10.2.54)$$

$$= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \underbrace{iq A_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + iq \partial_\mu \phi^\dagger A^\mu \phi + q^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi}_{\text{termini di accoppiamento}} \quad (10.2.55)$$

gli ultimi tre termini (sottolineati) sono quelli che determinano come il campo ϕ di materia si accoppia con il campo di gauge A^μ , sono termini chiamati per l'appunto di **accoppiamento**, e la costante di accoppiamento è la carica elettrica. Notiamo che la forma della lagrangiana è del tipo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{KG} + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{int}. \quad (10.2.56)$$

Ovviamente, il nostro grande interesse è quello di costruire una teoria di gauge che accoppi il campo elettromagnetico con i fermioni di Dirac (gli elettroni). Per questo nella sezione precedente abbiamo scritto:

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{EM} \quad (10.2.57)$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (10.2.58)$$

essa è per costruzione (per come abbiamo definito D_μ e il tesore $F_{\mu\nu}$) invariante per trasformazioni di gauge. Utilizzando la prescrizione di accoppiamento minimale troviamo una scrittura analoga a (10.2.55) anche per i campi ψ .

In questo corso non utilizzeremo quello imparato per costruire una teoria invariante per trasformazioni locali, ci concentreremo solo sull'Elettromagnetismo, e costruiremo una teoria quantistica dell'elettromagnetismo. Quello scritto nella sezione appena conclusa sarà utile quando svilupperemo formalmente la QED (la cui lagrangiana è proprio (10.2.58)), i cui quanti saranno $e^\pm$ (e non i fotoni come nella teoria che vedremo noi), nei corsi successivi e vedremo i suoi diagrammi di Feynmann. Quello che vorremo fare sarà mantenere la simmetria per trasformazioni di $U(1)$ della teoria di Dirac, anche quando consideriamo una teoria interagente, tra $e^\pm$ e fotoni, che si perde in modo immediato (10.2.14). Il principio di gauge ci permetterà di mantenere l'invarianza di $U(1)$ nella teoria.

10.2.3 Gradi di libertà della teoria elettromagnetica

Vediamo in questa rapida sezione perché siamo sicuri nel dire che i fotoni, e il loro campo associato, hanno solo due gradi di libertà e quindi solo due

stati di polarizzazione possibili.

Abbiamo visto qual è il *gauge di Lorenz*, che ci fa scegliere $\chi(x)$ in modo che si abbia:

$$\chi(x) \quad / \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (10.2.59)$$

il che si traduce nel scegliere:

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (10.2.60)$$

$$\partial_\mu A^\mu \longrightarrow \partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \chi \quad (10.2.61)$$

e possiamo ottenere $\partial_\mu A'^\mu = 0$ selezionando:

$$\partial^2 \chi = -\partial_\mu A^\mu. \quad (10.2.62)$$

Messi in questo gauge abbiamo visto che le equazioni di Maxwell, in assenza di cariche, diventano:

$$\partial^2 A'^\mu = 0 \quad (10.2.63)$$

le cui soluzioni sono proprio onde piane, normalizzate con dei quadrivettori che chiamiamo $\epsilon^\mu(p)$:

$$A^\mu = \epsilon^\mu(p) e^{-ipx} \quad (10.2.64)$$

con sempre valida $E_p = |\vec{p}|$. Come vedremo nella sezione §10.3, la condizione (10.2.59) è a vista identica alla condizione (10.3.3) che esce fuori dall'equazione di Proca in modo naturale; la differenza tra le due scritture è che (10.2.59) è una condizione scelta nel gauge fixing, mentre (10.2.59) è intrinseca nella teoria. Ad ogni modo però hanno entrambe il risultato di ridurre i gradi di libertà da 4 a 3 del campo elettromagnetico.

Però, possiamo fare ancora una cosa, perché l' A'^μ che abbiamo definito, non è ancora unico, infatti possiamo definire:

$$A'_\mu \longrightarrow A''_\mu = A'_\mu - \partial_\mu \xi \quad (10.2.65)$$

con la condizione $\partial^2 \xi = 0$, e le equazioni di Maxwell non cambiano. Notiamo che sia A'^μ che A''^μ sono scritti nel gauge di Lorenz.

Però, affinché A''^μ sia unico dobbiamo scegliere:

$$\partial_0 \xi = A'_0 \quad (10.2.66)$$

il che implica $A''_0 = 0$. Con quest'ulteriore passaggio, la condizione di Lorenz si riduce a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'' = 0 \quad (10.2.67)$$

che insieme a $A''^0 = 0$ è noto come *gauge di Coulomb* e che riduce ancora di 1 i gradi di libertà del campo.

Quindi in conclusione, siamo partiti con A^μ che ha 4 componenti, ma ci siamo resi conto che eliminando le rindondanze ci rendiamo conto che solamente 2 (indipendenti) hanno significato fisico.

Detto questo, perché diciamo che i due gradi di libertà che rimangono sono ortogonali alla direzione del moto?

Partiamo dall'equazione del moto (di Maxwell) $\partial^2 A^\mu = 0$, conosciamo la condizione $A^0 = 0$, dunque le soluzioni sono onde piane del tipo:

$$\vec{A} = \vec{\epsilon} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}. \quad (10.2.68)$$

Inserendo le soluzioni dentro la condizione di gauge di Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, otteniamo la condizione:

$$\vec{p} \cdot \vec{A} = \vec{p} \cdot \vec{\epsilon} = 0 \quad (10.2.69)$$

la quale ci dice che la direzione di propagazione dell'onda (data da $\vec{p}$) è perpendicolare alla polarizzazione (identificata con $\vec{\epsilon}$).

Ad esempio, se abbiamo propagazione lungo l'asse z con impulso $q^\mu = (|\vec{q}|, 0, 0, |\vec{q}|)$, allora possiamo avere:

$$\vec{\epsilon}_1(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\epsilon}_2(q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.2.70)$$

che corrispondono ad una polarizzazione lineare. Potremmo anche scegliere una polarizzazione circolare e avere:

$$\vec{\epsilon}_R^*(q) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\epsilon}_L^*(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.2.71)$$

10.3 Elettromagnetismo massivo

Prima di addentrarci nella teoria del campo elettromagnetico, che è massless, i cui quanti sono i fotoni, studiamo il caso di una teoria, simile all'EM³, ma con un campo vettoriale massivo, che rappresenta un fotone, ma dotato di massa. Questa teoria va sotto il nome di **teoria di Proca** e sarà utile per poi il campo mass-less. Sappiamo già dal capitolo §3 che il vettore di Pauli-Lubanski, nel caso massivo, aveva le componenti spaziali legate allo spin della particella, quindi nella teoria che stiamo per affrontare ci aspettiamo che le nostre particelle abbiano spin ben definito. Caso diverso sarà il caso mass-less in cui ci aspettiamo solo due gradi di libertà legati all'elicità.

Seguiamo la procedura di quantizzazione canonica, prendendo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \quad (10.3.1)$$

³Facciamo attenzione che parliamo di EM massivo, fotoni, campi elettrici etc. ma la teoria che sviluppiamo non è l'Elettromagnetismo a cui siamo abituati.

in cui abbiamo aggiunto, oltre la lagrangiana EM (10.2.1), un termine di massa tipo Klein-Gordon. Le equazioni di Eulero-Lagrange ci danno:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \quad (10.3.2)$$

che va sotto il nome di **equazione di Proca**. Notiamo anche che, scritta così l'equazione di Proca non è gauge invariante, poiché come ben sappiamo l'invarianza di gauge non è compatibile con $m \neq 0$ (a meno che non costruiamo una teoria di gauge, ma per il momento lasciamo stare). Se prendiamo la divergenza dell'equazione trovata abbiamo:

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 \partial_\nu A^\nu = 0 \implies \partial_\nu A^\nu = 0 \quad (10.3.3)$$

in cui abbiamo messo $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ poiché $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico, mentre $\partial_\nu \partial_\mu$ è simmetrico. La relazione (10.3.3) è una condizione aggiuntiva che discende direttamente dall'equazione di Proca e che possiamo utilizzare per riscrivere (10.3.2):

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu) - \partial_\mu (\partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0 \implies \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu) - \underbrace{\partial^\nu (\partial_\mu A^\mu)}_{=0} + m^2 A^\nu = 0 \quad (10.3.4)$$

$$\implies (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) A^\nu = 0 \quad (10.3.5)$$

$$\implies (\square + m^2) A^\nu = 0 \quad (10.3.6)$$

che ha la stessa forma dell'equazione di Klein-Gordon per ciascuna componente di A^ν .

Facciamo attenzione che la condizione (10.3.3) non è una condizione di gauge fixing (nonostante ha la stessa forma del gauge di Lorenz per il campo mass-less), ma segue dall'equazione (10.3.2), dunque, ci permette di dare una condizione sulle componenti di A^μ e avere che non tutte sono indipendenti, ma solamente 3 su 4. Solitamente fissiamo A^0 in funzione delle altre. Quindi A^μ , nel caso massivo, descrive una particella con 3 gradi di libertà, ovvero una particella con spin 1 (rispettano Klein-Gordon).

Determiniamo i momenti coniugati:

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = F^{00} = 0 \quad (10.3.7)$$

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = -F^{0i} = E^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i. \quad (10.3.8)$$

in cui vediamo $\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \dot{\vec{A}}$. Notiamo anche che vale:

$$(10.3.2) \implies \partial_\mu F^{\mu 0} + m^2 A^0 = 0 \quad (10.3.9)$$

$$\implies A^0 = -\frac{1}{m^2} (\partial_i F^{i0}) \quad (10.3.10)$$

$$\implies A^0 = -\frac{1}{m^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}. \quad (10.3.11)$$

Possiamo anche determinare l'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \pi^i \dot{A}_i - \mathcal{L} \quad (10.3.12)$$

$$= -\vec{E} \cdot \dot{\vec{A}} - \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \frac{m^2}{2}[(A^0)^2 - \vec{A}^2] \quad (10.3.13)$$

$$= -\vec{E} \cdot (-\vec{\nabla} A^0 - \vec{E}) - \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \frac{m^2}{2} \left[\frac{1}{m^4} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2 - \vec{A}^2 \right] \quad (10.3.14)$$

$$= \vec{E} \cdot \vec{\nabla} A^0 + \vec{E}^2 - \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \frac{1}{2m^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2 + \frac{m^2}{2} \vec{A}^2 \quad (10.3.15)$$

$$= \left[\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} A^0)}_{\rightarrow 0} - A^0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \right] + \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) - \frac{1}{2m^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2 + \frac{m^2}{2} \vec{A}^2 \quad (10.3.16)$$

$$= \frac{1}{m^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2 + \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) - \frac{1}{2m^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2 + \frac{m^2}{2} \vec{A}^2 \quad (10.3.17)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\vec{E}^2 + \vec{B}^2 + m^2 \vec{A}^2 + \frac{1}{m^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})^2 \right] \quad (10.3.18)$$

in cui abbiamo utilizzato la condizione, imposta da noi, che tutti i campi vadano a 0 all' ∞ . Dall'espressione di $\mathcal{H}$ ci rendiamo conto che l'Elettromagnetismo mass-less non è semplicemente il limite $m \rightarrow 0$ del caso massivo poiché porterebbe ad energie divergenti, ma qualcosa di più complesso. Questa cosa potevamo già inturla dal fatto che le simmetrie delle due teorie erano diverse (la teoria massiva non è invariante di gauge e abbiamo anche studiato il teorema di Wigner che fa differenza per i due casi).

Il passo successivo della quantizzazione è promuovere i campi al ruolo di operatore e imporre le regole di commutazione a tempi uguali:

$$[A^\mu(t, \vec{x}), A^\nu(t, \vec{y})] = 0 \quad , \quad [\pi^i(t, \vec{x}), \pi^j(t, \vec{y})] = 0 \quad (10.3.19)$$

$$[\pi^i(t, \vec{x}), A^0(t, \vec{y})] = 0 \quad , \quad [\pi^i(t, \vec{x}), A^j(t, \vec{y})] = -i\delta^{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (10.3.20)$$

notando che avendo $\pi^0 = 0$ allora possiamo dire che A^0 commuta con tutto ed è dunque un c-numero (non necessariamente nullo). Attenzione che stiamo dicendo che A^0 non è un operatore, ma non che è una costante, infatti A^0 è una funzione (scalare)⁴.

Come già detto, la condizione $\partial_\mu A^\mu = 0$ ci dice che solo 3 sono le componenti di A^μ indipendenti, poiché, nello spazio degli impulsi esso diventa:

$$p_\mu A^\mu = 0 \quad (10.3.21)$$

e cioè:

$$\partial_0 A^0 = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (10.3.22)$$

⁴Anche perché se no la condizione (10.3.22) che abbiamo scritto non avrebbe senso.

che fissa una condizione su A^0 (scegliamo di fissare A^0 in modo arbitrario, avremmo potuto benissimo fissare un'altra delle 3 componenti), la quale a sua volta elimina 1 grado di libertà e li fa passare da 4 a 3. Questa condizione e il fatto di ritrovarsi con solo 3 gradi di libertà indipendenti giustifica il risultato (10.3.18) di $\mathcal{H}$, in cui non compariva A^0 . I tre gradi di libertà li vediamo come 3 possibili stati di polarizzazione indipendenti. Il vettore di polarizzazione di una particella contiene l'informazione sul suo momento angolare di spin, e abbiamo trovato che particelle vettoriali hanno spin 1 e tre gradi di libertà dati dai 3 valori della sua terza componente $S_z = \pm 1, 0$.

A questo punto del processo di quantizzazione dovremmo sviluppare con Fourier il campo. Dobbiamo quindi introdurre gli operatori di creazione e distruzione $\hat{a}^\dagger(\vec{p})$ e $\hat{a}(\vec{p})$ e associarli alle onde piane e^{-ipx} e e^{ipx} , come per gli altri campi⁵. I fattori di normalizzazione possiamo riciclarli dai conti per il campo scalare e darli per noti. Però avremo anche bisogno di oggetti che conferiscano una natura quadrivettoriale al campo (proprio come u e v davano natura spinoriale a $\hat{\psi}$). Gli oggetti che utilizzeremo per il campo $\hat{A}^\mu$ saranno i **vettori di polarizzazione**, che avranno un indice μ di Lorentz, che dà una natura quadrivettoriale (quindi è un oggetto che vive nello spazio di Minkowski), avranno un quadri-impulso p associato che rispetta la relazione di mass-shell e avranno un'etichetta, che chiamiamo λ , che indica lo stato di polarizzazione e che potrà assumere valori $\lambda = 1, 2, 3$.^{6 7} Indichiamo il vettore di polarizzazione come:

$$\epsilon_\lambda^\mu(p). \quad (10.3.24)$$

Possiamo scegliere una base, in un modo che ci viene comodo, per cui lo facciamo come abbiamo fatto per u e v , ossia ci mettiamo nel sistema di riposo, fissiamo i vettori, e poi in un secondo momento facciamo un boost e ci poniamo in un sistema di riferimento in cui $\vec{p} \neq 0$. Prendiamo:

$$\epsilon_1(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_3(m, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.3.25)$$

⁵Notiamo che non distinguiamo particelle e antiparticelle poiché sappiamo che il campo Elettromagnetismo è neutro e non porta carica. Infatti anche nella lagrangiana (10.3.1) non avevamo inserito $A_\mu^\dagger$, ma solamente A^μ .

⁶Ad ogni stato di polarizzazione, quindi ad ogni valore di λ , ci associamo uno dei tre gradi di libertà (spin) che abbiamo nella teoria. Convenzionalmente prendiamo $\lambda = 1$ quando $S_z = -1$, $\lambda = 2$ se $S_z = 0$ e $\lambda = 3$ quando $S_z = +1$.

⁷Notiamo che lo stato di polarizzazione 0 non c'è, poiché nel sistema di riferimento di riposo della particella il campo è ortogonale alla direzione 0 (la scelta della componente 0, piuttosto che 2 è completamente arbitraria) e non esiste il vettore:

$$\epsilon_0^\mu(m, \vec{p}) = (1, 0, 0, 0) \quad (10.3.23)$$

nella base dei vettori di polarizzazione.

che possiamo verificare essere ortonormali (per costruzione):

$$\epsilon_\lambda^*(p) \cdot \epsilon_{\lambda'}(p) = g_{\mu\nu} \epsilon_\lambda^{\mu*} \epsilon_{\lambda'}^\nu = -\delta_{\lambda\lambda'} \quad (10.3.26)$$

e dove vale la relazione:

$$p^\mu \epsilon_{\mu\lambda}(p) = 0 \quad \forall \lambda \quad (10.3.27)$$

che ci dice come la polarizzazione del campo sia legata all'impulso p^μ , ovvero, la direzione di polarizzazione è sempre ortogonale alla direzione di $\vec{p}$. Questo discende da (10.3.21).

Ovviamente, come detto, scelta la base (10.3.25) possiamo fare un boost e spostarci in un sistema di riferimento in cui abbiamo $\vec{p} \neq 0$. Ad esempio, potremmo prendere una particella con impulso solo lungo z , con $p_z = |\vec{p}|$, dunque con $p^\mu = (E_p, 0, 0, |\vec{p}|)$, allora avremmo la matrice di boost:

$$\Lambda^\mu{}_\nu(p) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} E_p & 0 & 0 & |\vec{p}| \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ |\vec{p}| & 0 & 0 & E_p \end{pmatrix} \quad (10.3.28)$$

la quale porta ai vettori:

$$\epsilon_1(E_p, 0, 0, |\vec{p}|) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2(E_p, 0, 0, |\vec{p}|) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_3(E_p, 0, 0, |\vec{p}|) = \begin{pmatrix} |\vec{p}|/m \\ 0 \\ 0 \\ E_p/m \end{pmatrix}. \quad (10.3.29)$$

Definiti i vettori $\epsilon_\lambda^\mu(p)$ possiamo scrivere lo sviluppo di Fourier del campo $\hat{A}^\mu$, promosso ad operatore:

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^3 \left[\epsilon_\lambda^\mu(p) \hat{a}_\lambda(\vec{p}) e^{-ipx} + \epsilon_\lambda^{\mu*}(p) \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right] \quad (10.3.30)$$

in cui mettiamo degli operatori di creazione e distruzione per ogni indice λ e teniamo sempre a mente la condizione (10.3.27).

L'ultimo passo è quello di diagonalizzare l'hamiltoniana:⁸

$$: \hat{H} : = \int d^3p E_p \sum_{\lambda=1}^3 \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_\lambda(\vec{p}) \quad (10.3.31)$$

che ci fa vedere che l'energia totale del sistema è la somma dell'energia di tutte le particelle in tutti i possibili stati di polarizzazione.

⁸Il Lancaster e Blundell definiscono il calcolo un po' tedioso (vedi capitolo §13.2).

10.4 Quantizzazione del campo elettromagnetico

Vediamo finalmente il caso che ci interessa, ossia la quantizzazione del campo elettromagnetico A^μ mass-less. Desideriamo sviluppare una teoria per i fotoni, che possiamo pensare di descrivere con un campo vettoriale A^μ . (i cappellini sopra gli operatori sono stati ignorati, ma arrivato a questo punto dovresti aver capito quando un campo ha ruolo operatoriale o no).

Procediamo con la quantizzazione canonica come al solito. Abbiamo la lagrangiana dell'Elettromagnetismo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \quad (10.4.1)$$

con al solito:

$$F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad , \quad \begin{cases} E^i = F^{i0} = -F^{0i} \\ B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk} \end{cases} \quad (10.4.2)$$

e ricordando anche:

$$A^\mu = (\varphi, \vec{A}) \quad , \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad , \quad \begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \end{cases} \quad (10.4.3)$$

Definiamo, come fatto per il caso massivo, i momenti coniugati:

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_0)} = F^{00} = 0 \quad (10.4.4)$$

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_i)} = -F^{0i} = E^i. \quad (10.4.5)$$

Abbiamo già visto nel caso massivo che una lagrangiana (10.4.1) sembra descrivere un campo con 4 gradi di libertà; ma abbiamo anche imparato che, con $m \neq 0$, i gradi di libertà (polarizzazione) scendono a 3: due stati di polarizzazione ortogonali alla direzione del moto e uno longitudinale. Nel caso della luce, però già sappiamo che gli stati di polarizzazione saranno solamente 2 (vedi la sezione §10.4.1), quelli trasversi. Infatti, lo spin non è un buon numero quantico per il fotone, che è appunto mass-less. Però, come vedremo, il fatto che solo 2 componenti di A^μ saranno fisiche, sarà un problema che incontreremo nel processo di quantizzazione, ma vedremo anche come fare.

Possiamo promuovere ad operatori i campi ed imporre le regole di commutazione a tempi uguali:

$$[A^\mu(t, \vec{x}), A^\nu(t, \vec{y})] = 0 \quad , \quad [\Pi^i(t, \vec{x}), \Pi^j(t, \vec{y})] = 0 \quad (10.4.6)$$

$$[\Pi^i(t, \vec{x}), A^0(t, \vec{y})] = 0 \quad , \quad [\Pi^i(t, \vec{x}), A^j(t, \vec{y})] = -i\delta^{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (10.4.7)$$

in cui, anche in questo caso, avendo $\Pi^0 = 0$, l'unico altro commutatore che poteva essere non nullo, cioè $[\Pi^0(t, \vec{x}), A^0(t, \vec{y})]$ è nullo. Per questo possiamo dire che A^0 commuta con tutti gli altri campi e per ciò è un c-numero.

Fissare le regole di commutazione (10.4.6) e (10.4.7), dobbiamo verificare che siano consistenti con la teoria di Maxwell. Sappiamo che in assenza di cariche, che è la situazione in cui siamo avendo preso la lagrangiana (10.4.1), vale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0. \quad (10.4.8)$$

Deriviamo rispetto a x_i il commutatore $[\Pi^i, A^j]$ (notando che A^j dipende da y^i e non x^i):

$$\frac{\partial}{\partial x^i} [\Pi^i(t, \vec{x}), A^j(t, \vec{y})] = [\partial_i \Pi^i(t, \vec{x}), A^j(t, \vec{y})] \quad (10.4.9)$$

$$= \left[\underbrace{\partial_i E^i(t, \vec{x})}_{=0}, A^j(t, \vec{y}) \right] \quad (10.4.10)$$

$$= 0. \quad (10.4.11)$$

Ora, deriviamo rispetto a x^i anche il secondo membro di $[\Pi^i(t, \vec{x}), A^j(t, \vec{y})]$, ossia $-i\delta^{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$:

$$-i\frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \delta^{ij} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k k^j e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \neq 0. \quad (10.4.12)$$

Dunque, tra (10.4.11) e (10.4.12) abbiamo trovato un'inconsistenza, poiché il primo membro si annulla e il secondo no. Questa incongruenza è dovuta al fatto che stiamo tenendo tutte e 4 le componenti di A^μ , mentre abbiamo già osservato che solo due sono fisiche. Dobbiamo trovare il modo di disfarcene delle componenti rindondanti (dobbiamo proiettarle via) e ridefinire il commutatore in modo consistente. Vorremmo avere nel commutatore $[\Pi^i, A^j]$ una δ^2 anziché una δ^3 .

Introduciamo una δ "trasversale" (eliminando la componente longitudinale) definita come:

$$\delta_T^{ij}(\vec{x} - \vec{y}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\vec{k}|^2} \right) \quad (10.4.13)$$

in cui la quantità $\left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\vec{k}|^2} \right)$ è il proiettore sulle componenti trasverse⁹. Se

⁹Puoi vedere (consigliato) il capitolo 13.3 del Lancaster e Blundell *Physical law should have mathematical beauty*. Lancaster:2014pza, in cui definisce bene i proiettori longitudinali e trasversali (in 3 dimensioni):

$$P_L^{ij} = \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2}, \quad P_T^{ij} = \delta^{\mu\nu} - \frac{p^i p^j}{|\vec{p}|^2}. \quad (10.4.14)$$

ora deriviamo (10.4.13) rispetto x^i abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \delta_T^{ij}(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} i k_i \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\vec{k}|^2} \right) \right\} \quad (10.4.15)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ i e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \left(k^j - \frac{k^i k^j k_i}{|\vec{k}|^2} \right) \right\} \quad (10.4.16)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ i e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} (k^j - k^j) \right\} \quad (10.4.17)$$

$$= 0. \quad (10.4.18)$$

Possiamo quindi sostituire $\delta^{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ con (10.4.13) e postulare:

$$[\Pi^i(t, \vec{x}), A^j(t, \vec{y})] = -i \delta_T^{ij}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (10.4.19)$$

in questa definizione c'è perfetta simmetria tra $\vec{x}$ e $\vec{y}$, quindi anche la derivata rispetto y^i di ambo i membri deve dare 0 e resitituire:

$$[\Pi^i(t, \vec{x}), \partial_i A^j(t, \vec{y})] = 0. \quad (10.4.20)$$

Quindi, guardando (10.4.20), non abbiamo solo la condizione che A^0 è un c-numero, ma anche $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ lo è, poiché commuta con tutti i campi.

Quest'ultima osservazione elimina 2 gradi di libertà, lasciandone solo 2, che sono gli unici con significato fisico. Possiamo quindi dire che non ci sono fotoni scalari (non c'è A^0) e ci sono solo 2 stati di polarizzazione trasversali alla direzione del moto (non c'è una polarizzazione longitudinale).

Ci potremmo ritenere soddisfatti dei risultati ottenuti, se non fosse che quello che abbiamo definito ci rovina la covarianza a vista. Potremmo giocarci ancora una carta. Possiamo ricordare che il campo A^μ gode di una simmetria di gauge:

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x) \quad (10.4.21)$$

con $\chi(x)$ funzione arbitraria. Potremmo sfruttare la simmetria e definire:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \int_0^t d\tau A_0(\tau, \vec{x}) \quad (10.4.22)$$

in modo che si abbia $A'_0(x) = 0$. Prendiamo poi:

$$\vec{A}'' = \vec{A}' - \vec{\nabla} \chi \quad (10.4.23)$$

e assumiamo che valga:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'' = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}' - \vec{\nabla} \chi) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' - \Delta \chi = 0. \quad (10.4.24)$$

In questo modo abbiamo un nuovo campo $A'_\mu(x)$, che descrive la stessa fisica di A^μ e soddisfa le stesse equazioni (e stessa $\mathcal{L}$), tale per cui:

$$\begin{cases} A'_0 = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \Delta\chi. \end{cases} \quad (10.4.25)$$

Le condizioni (10.4.25) si chiamano **gauge di radiazione**.

Dette tutte queste cose, possiamo procedere allo sviluppo di Fourier del campo elettromagnetico, con gli operatori di creazione $\hat{a}^\dagger$ e di distruzione $\hat{a}$:

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=1}^2 \left(\epsilon_\lambda^\mu(k) \hat{a}_\lambda(\vec{k}) e^{-ikx} + \epsilon_\lambda^{\mu*}(k) \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} \right) \quad (10.4.26)$$

in cui notiamo che $\lambda = 1, 2$. I quanti del campo Elettromagnetismo, cioè le sue eccitazioni, sono i fotoni, particelle bosoniche di spin 1, a massa nulla e che possono avere 2 stati di polarizzazione trasversa. In base alle regole di commutazione (10.4.6), (10.4.7) e (10.4.19) gli operatori $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$ devono rispettare:

$$[\hat{a}_\lambda(\vec{k}), \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (10.4.27)$$

L'hamiltoniana diagonalizzata risulta essere:

$$: \hat{H} : = \int d^3k \sum_{\lambda=1}^2 E_k \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_\lambda(\vec{k}) \quad (10.4.28)$$

dove, visto che $m = 0$, vale:

$$E_k = |\vec{k}|. \quad (10.4.29)$$

In analogia con l'hamiltoniana possiamo calcolare l'operatore impulso $\vec{P}$ associato al campo EM:

$$: \vec{P} : = \int d^3x (: \vec{E} \times \vec{B} :) = \int d^3k \vec{k} \sum_{\lambda=1}^2 \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_\lambda(\vec{k}). \quad (10.4.30)$$

10.4.1 Proprietà polarizzazione fotone

La prima cosa che possiamo vedere è che, dall'espressione del campo A^μ (10.4.26), i fotoni si presentano in 2 tipologie:

$$\hat{a}_1^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \quad (10.4.31)$$

$$\hat{a}_2^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \quad (10.4.32)$$

che corrisponde alle 2 possibili polarizzazioni trasverse del campo Elettromagnetico.

Possiamo trovare due proprietà sui vettori di polarizzazione $\epsilon_\lambda^\mu(k)$ facendo la divergenza (di cui noi conosciamo già il risultato (10.3.3)) del campo $\hat{A}^\mu(x)$, usando il suo sviluppo in serie di Fourier:

$$\partial_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=1}^2 \left(\epsilon_\lambda^\mu(k) \hat{a}_\lambda(\vec{k}) e^{-ikx} + \epsilon_\lambda^{\mu*}(k) \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} \right) = 0 \quad (10.4.33)$$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{-ik_\mu}{\sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=1}^2 \left(\epsilon_\lambda^\mu(k) \hat{a}_\lambda(\vec{k}) e^{-ikx} - \epsilon_\lambda^{\mu*}(k) \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} \right) = 0 \quad (10.4.34)$$

sapendo che A^0 è un c-numero (quindi $\partial_\mu A^0 = 0$) possiamo dire che $\partial_\mu A^\mu = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ e quindi:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i}{\sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=1}^2 \left(\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda \hat{a}_\lambda e^{-ikx} - \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda^* \hat{a}_\lambda^\dagger e^{+ikx} \right) = 0 \quad (10.4.35)$$

da cui ricaviamo:

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda = 0 \quad (10.4.36)$$

$$\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (10.4.37)$$

In particolare, la relazione (10.4.36) ci dice che la polarizzazione è sempre trasversa alla direzione di propagazione; la relazione (10.4.37) invece ci dice che i vettori di polarizzazione corrispondenti a $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ sono ortonormali.

In più, possiamo fare un'esempio delle espressioni che assumerebbero i vettori di polarizzazione in caso specifico. Consideriamo un fotone che si propaga lungo la direzione z con impulso $k^\mu = (|\vec{k}|, 0, 0, |\vec{k}|)$, che se lavoriamo nella base in cui la polarizzazione è circolare possiamo prendere:

$$\epsilon_{\lambda=R}^*(k) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0) \quad \longrightarrow \quad S_z = +1 \quad (10.4.38)$$

$$\epsilon_{\lambda=L}^*(k) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \quad \longrightarrow \quad S_z = -1 \quad (10.4.39)$$

e non ci sono fotoni con $S_z = 0$, perché questi corrisponderebbero ad uno stato di polarizzazione non fisico. Stati con S_z corrisponderebbero a $\epsilon_{\lambda=3}^* = (0, 0, 0, 1)$ che è un quadri-vettore parallelo alla direzione del moto. Ovviamente con l'autovalore S_z intendiamo l'operatore di elicità (descritto nella sezione §6.8.2), che nel caso mass-less ci fornisce un'informazione sullo spin.

10.4.2 Propagatore del fotone

In analogia al propagatore di particella scalare e di fermione di Dirac, il propagatore del fotone è definito come:

$$i\Delta_F^{\text{Tr}}(x-y)_{\mu\nu} = \langle 0 | T[A_\mu(x)A_\nu(y)] | 0 \rangle. \quad (10.4.40)$$

Il calcolo di questo nuovo propagatore è del tutto analogo a quello già visto per la particella scalare, con le differenze che ora ci troveremo a denominatore il termine $(k^2 + i\epsilon)$ visto che abbiamo $m = 0$, e a numeratore un termine generato dalla presenza dei vettori di polarizzazione che danno la corretta struttura vettoriale ad A^μ (proprio come nel caso fermionico avevamo $(\not{p} + m)$). Abbiamo:

$$i\Delta_F^{\text{Tr}}(x-y)_{\mu\nu} = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^\lambda(k) \epsilon_\nu^{\lambda*}(k). \quad (10.4.41)$$

L'espressione (10.4.41) non è Lorentz invariante perché i vettori di polarizzazione sono solo trasversi¹⁰ Questo però non è un problema perché il propagatore, di per sé, non è un'osservabile, però, nei prossimi corsi, dovremo controllare che, una volta messo nei diagrammi di Feynmann, dia luogo a sezioni d'urto Lorentz invarianti (vedi le identità di Ward).

¹⁰Manca tra i vettori di base $\epsilon^0 \propto (1, 0, 0, 0)$.

Appendici

Appendice A

Riepilogo risultati

Elenco in questa appendice tutti i risultati trovati durante il corso.

Teoria dei gruppi

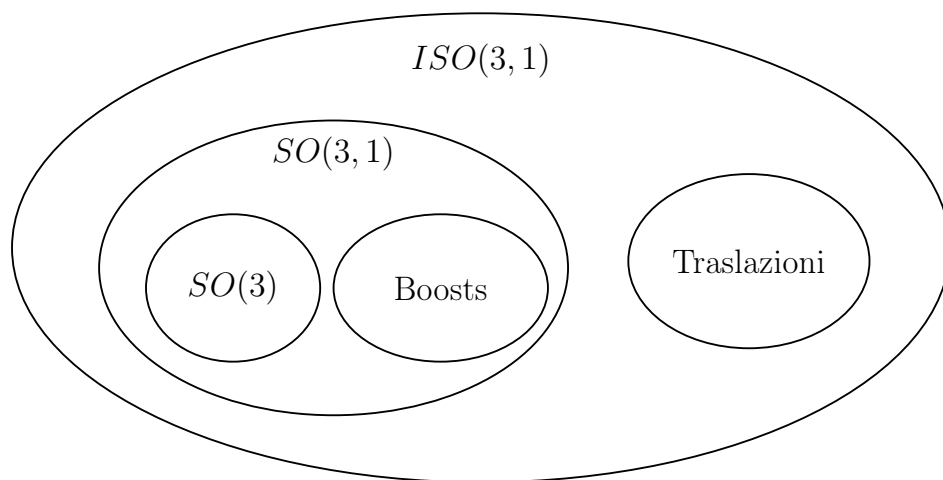


Figura A.1: Schema riassuntivo gruppi.

Meccanica Analitica

$$\begin{aligned}
S(\tau_1, \tau_2, [\phi]) &\equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) && \text{Azione} \\
\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0 && \text{Equazione di Eulero-Lagrange} \\
j^\mu &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu && \text{Corrente di Noether} \\
&= -T^\mu{}_\nu \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \phi]} \Delta \phi \\
Q_a &\equiv \int d^3x j_a^0(\vec{x}, t) && \text{Carica di Noether} \\
: \hat{H} : &&& \text{Hamiltoniana normal-ordered.}
\end{aligned}$$

Operatori di creazione e distruzione

$$\begin{aligned}
[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] &= 0 \\
[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] &= [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\
[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] &= 0 \\
\{\hat{a}_s(\vec{p}), \hat{a}_r^\dagger(\vec{p}')\} &= \{\hat{b}_s(\vec{p}), \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}')\} = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{sr} \\
\{\hat{a}_s(\vec{p}), \hat{a}_r(\vec{p}')\} &= \{\hat{a}_s^\dagger(\vec{p}), \hat{a}_r^\dagger(\vec{p}')\} = 0 \quad \forall s, r \\
\{\hat{b}_s(\vec{p}), \hat{b}_r(\vec{p}')\} &= \{\hat{b}_s^\dagger(\vec{p}), \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}')\} = 0 \quad \forall s, r.
\end{aligned}$$

Campo Scalare neutro

$$\begin{aligned}
(\square + m^2) \phi &= 0 \\
\hat{\phi}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right] \\
\hat{\Pi}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} i\omega_k \left[-\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx} \right] \\
\left\{ \begin{array}{l} [\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{y}, t)] = 0 \\ [\hat{\Pi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{y}, t)] = 0 \end{array} \right. \\
: \hat{H} : &= \int d^3k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k = \int d^3x \omega_k \hat{n}_k \\
: P^i : &= \int d^3k k^i \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k = \int d^3k k^i \hat{n}_k.
\end{aligned}$$

Campo scalare carico

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{b}_k^\dagger e^{ikx} \right] \\
\hat{\phi}^\dagger(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} \left[\hat{a}_k^\dagger e^{+ikx} + \hat{b}_k e^{-ikx} \right] \\
\begin{cases} \left[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_\phi(\vec{y}, t) \right] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \left[\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_{\phi^\dagger}(\vec{y}, t) \right] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \text{Altri} = 0 \end{cases} \\
: \hat{H} : &= \int d^3k \omega_k \left(\hat{n}_k^a + \hat{n}_k^b \right) \\
: \hat{Q} : &= \int d^3k \left(\hat{n}_k^b - \hat{n}_k^a \right).
\end{aligned}$$

Campo Spinoriale

$$\begin{aligned}
(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi &= 0 \\
\begin{cases} i \left(\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \psi_R(x) = 0 \\ i \left(\partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \psi_L(x) = 0 \end{cases} & \quad \text{Equazioni di Weyl} \\
h = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} & \quad \text{Operatore di elicità} \\
\vec{\Sigma} = \frac{2}{m} \vec{W} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} & \quad \text{Operatore di spin} \\
\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left(u_s(\vec{p}) \hat{a}_s(\vec{p}) e^{-ipx} + v_s(\vec{p}) \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right) \\
\hat{\bar{\psi}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left(\bar{u}_s(\vec{p}) \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) e^{+ipx} + \bar{v}_s(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) e^{-ipx} \right) \\
\begin{cases} \left\{ \psi_s(\vec{x}, t), \psi_{s'}^\dagger(\vec{y}, t) \right\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ss'} \\ \left\{ \psi_s(\vec{x}, t), \psi_{s'}(\vec{y}, t) \right\} = \left\{ \psi_s^\dagger(\vec{x}, t), \psi_{s'}^\dagger(\vec{y}, t) \right\} = 0 \end{cases} \\
: \hat{H} : = \int d^3p \sum_{s=1}^2 E_p \left(\hat{n}_{sp}^a + \hat{n}_{sp}^b \right) \\
: \vec{P} : = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \vec{p} \left(\hat{n}_{sp}^a + \hat{n}_{sp}^b \right) \\
: Q : = \int d^3p \sum_s \left(\hat{n}_{sp}^a - \hat{n}_{sp}^b \right).
\end{aligned}$$

Campo vettoriale

Elettromagnetismo massivo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \\
(\square + m^2)A^\nu &= 0 \\
\begin{cases} \Pi^0 = 0 \\ \Pi^i = -F^{0i} = E^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \end{cases} \\
\hat{A}^\mu(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^3 \left[\epsilon_\lambda^\mu(p) \hat{a}_\lambda(\vec{p}) e^{-ipx} + \epsilon_\lambda^{\mu*}(p) \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right] \\
p_\mu \epsilon_\lambda^\mu(p) &= 0 \quad \text{Condizione polarizzazione} \\
: \hat{H} : &= \int d^3p E_p \sum_{\lambda=1}^3 \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_\lambda(\vec{p}).
\end{aligned}$$

Elettromagnetismo mass-less

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \\
\begin{cases} \Pi^0 = 0 \\ \Pi^i = -F^{0i} = E^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \end{cases} \\
\hat{A}^\mu(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_k}} \sum_{\lambda=1}^2 \left(\epsilon_\lambda^\mu(k) \hat{a}_\lambda(\vec{k}) e^{-ikx} + \epsilon_\lambda^{\mu*}(k) \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} \right) \\
[A^\mu(t, \vec{x}), A^\nu(t, \vec{y})] &= 0 \\
[\Pi^i(t, \vec{x}), \Pi^j(t, \vec{y})] &= 0 \\
[\Pi^i(t, \vec{x}), A^0(t, \vec{y})] &= 0 \\
[\Pi^i(t, \vec{x}), A^j(t, \vec{y})] &= -i\delta_T^{ij}(\vec{x} - \vec{y}) \\
[\hat{a}_\lambda(\vec{k}), \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}')] &= \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\
: \hat{H} : &= \int d^3k \sum_{\lambda=1}^2 E_k \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_\lambda(\vec{k}) \\
: \vec{P} : &= \int d^3x (: \vec{E} \times \vec{B} :) = \int d^3k \vec{k} \sum_{\lambda=1}^2 \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_\lambda(\vec{k}) \\
i\Delta_F^{\text{Tr}}(x-y)_{\mu\nu} &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^\lambda(k) \epsilon_\nu^{\lambda*}(k).
\end{aligned}$$

Propagatori liberi

Campo scalare neutro e carico

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3(2E_p)} \left[\theta(x^0 - y^0) e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{+ip(x-y)} \right]$$

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\tilde{\Delta}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Campo spinoriale

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}.$$

Teoria perturbativa

Propagatore:

$$G(x, y) = \langle \Omega | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^\dagger(y) | \Omega \rangle$$

Ampiezza di transizione:

$$\mathcal{A} = \text{non int}_{\text{out}} \langle q_1, q_2 | \hat{S} | p_1 p_2 \rangle_{\text{in}}^{\text{non int}}$$

Matrice di scattering:

$$\hat{S} = \hat{U}_I(t, -t) \quad , \quad \text{con } t \rightarrow +\infty$$

Sviluppo di Dyson:

$$\hat{S} = T \left[\exp \left\{ -i \int d^4x \hat{\mathcal{H}}_I(x) \right\} \right]$$

Teorema di Wick:

$$T[\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \dots \hat{\phi}_n] = N \left[\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \dots \hat{\phi}_n + \text{tutte le possibili contrazioni di } \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \dots \hat{\phi}_n \right]$$

Teorema di Gell-Mann Low:

$$\langle \Omega | T[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)] | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | \hat{\phi}_I(x) \hat{\phi}_I(y) T \left[e^{-i \int_{-T}^{+T} dt \hat{H}_I(t)} \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left[e^{-i \int_{-T}^{+T} dt \hat{H}_I(t)} \right] | 0 \rangle}.$$

Appendice B

Unità naturali

Studiamo in questa sezione cosa si intende con unità naturali. In Fisica è molto comune utilizzare le *God givens units*, ossia, le cosiddette unità naturali. I tipi indipendenti di grandezze sono la lunghezza $[L]$, il tempo $[T]$, la massa $[M]$ e - se consideriamo anche la termodinamica e la meccanica statistica - la temperatura $[T]$. In natura esistono delle costanti dimensionali universali, quali la velocità della luce c , la costante di Plank ridotta $\hbar$, la costante gravitazionale di Newton G_N e la costante di Boltzmann k . Usualmente vengono definite come unità naturali quelle in cui si pone:

$$\hbar = c = 1 \quad (\text{B.0.1})$$

e di conseguenza quando si modificano le quantità (in unità standard):

$$\begin{cases} \hbar = 6.66 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s} \\ c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ \hbar c \sim 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \end{cases} \implies \begin{cases} \hbar = 1 \\ c = 1 \\ \hbar c = 1. \end{cases}$$

Dire che la velocità della luce è una grandezza unitaria adimensionale implica che le unità di lunghezza e tempo sono equivalenti:

$$[L] = [T] \quad (\text{B.0.2})$$

di conseguenza anche:¹

$$[E] = [\vec{p}] = [M] \quad (\text{B.0.4})$$

Per una forza F si ha:

$$[F] = [EL^{-1}] = [ML^{-1}] \quad (\text{B.0.5})$$

¹Come conseguenza della relazione tra massa ed energia della Relatività Speciale:

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (\text{B.0.3})$$

per cui una quantità, tipo $\hbar$, che ha le dimensioni di un'azione, ovvero $[ET]$, in unità naturali è:

$$[\hbar] = [ET] = [ML] = 1 \implies [M] = [L^{-1}]. \quad (\text{B.0.6})$$

Dalle relazioni viste tra le grandezze si ha solo una di esse realmente indipendente. Scegliendo la lunghezza come indipendente vale:

$$[L] = [T] \quad , \quad [E] = [\vec{p}] = [M] = [L^{-1}] \quad , \quad [F] = [L^{-2}]. \quad (\text{B.0.7})$$

Tipicamente, in QFT, le sezioni d'urto sono espresse in unità naturali, ma ciò non è molto comodo da utilizzare nel mondo fisico, poiché a noi servono unità standard. In generale (non solo per le sezioni d'urto), ricordando quali siano le unità di misura di $\hbar$ e c è possibile passare dall'espressione di una grandezza in unità naturali in una sua espressione in unità del S.I. moltiplicando opportune potenze di $\hbar$ e c . Si ha:

$$[\hbar] = ML^2T^{-1} \quad ; \quad [c] = LT^{-1}.$$

Vediamo un esempio. Prendiamo la sezione d'urto di Thomson in unità naturali e rendiamola in unità standard. Abbiamo il processo:

$$\gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^-$$

con l' e^- libero e la sezione d'urto:

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi \frac{\alpha^2}{m_e^2} \quad (\text{B.0.8})$$

che riscriviamo come:

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi \frac{\alpha^2}{m_e^2} \hbar^x c^y \quad (\text{B.0.9})$$

di cui analizzando le dimensioni:

$$\begin{aligned} L^2 &= M^{-2} (ML^2T^{-1})^x (LT^{-1})^y \\ L^2 &= M^{x-2} L^{2x+y} T^{-x-y}. \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} L : 2 = 2x + y \\ M : 0 = x - 2 \\ T : 0 = -x - y \end{cases} \implies \begin{cases} x = -y \\ x = 2 \\ y = -2. \end{cases}$$

Dunque la sezione d'urto è:

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi \frac{\alpha^2}{m_e^2} \left(\frac{\hbar}{c} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{(m_e c)^2} (\hbar c)^2 \sim 64 \text{ fm}^2 = 64 \cdot 10^{-2} \text{ b}. \quad (\text{B.0.10})$$

Appendice C

Come si costruisce una teoria?

Abbiamo già accennato al fatto che costruiremo la teoria quantistica relativistica partendo dalle invarianze del sistema e sviluppando tutto a partire da quello. Per fare questo il punto di partenza è un funzionale¹ che conosciamo bene: l'**azione**. L'azione S è il punto di partenza di diverse cose:

- Se la *minimizziamo* possiamo ottenere le equazioni del moto (classiche o elettromagnetiche come abbiamo visto).
- Se il nostro sistema possiede delle *invarianze*, allora grazie al teorema di Noether sappiamo avere delle quantità conservate.
- Permette la transizione dalla meccanica classica alla Meccanica Quantistica attraverso i *path integral*.

Il progetto, dunque, per costruire la nuova teoria è:

1. Costruire un'azione che abbia le caratteristiche volute e le proprietà di invarianza richieste (trattando ancora campi classici).
2. Ricaviamo a partire da questa azione le equazioni del moto e le proprietà delle loro soluzioni.
3. Estendiamo la trattazione al caso quantistico (facendo la seconda quantizzazione).

Ripassiamo brevemente come funziona l'azione per la Fisica classica.

C.1 Principio di minima azione

Prendiamo un sistema classico discreto, ad esempio una particella puntiforme individuata da un vettore posizione $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ che si muove in un certo

¹Ricorda che un funzionale manda una funzione in un numero, generalmente in $\mathbb{C}$.

potenziale $V = V(x_i)$ indipendente dal tempo t . Per definizione abbiamo:

$$S([x_i]; t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 - V(x_i) \right] \quad (\text{C.1.1})$$

in cui notiamo bene il fatto che S sia un funzionale, ossia, che ad ogni cammino sia associata un'azione (un numero reale in questo caso). A questo punto consideriamo delle deformazioni del cammino:

$$x_i(t) \rightarrow x_i(t) + \delta x_i(t) \quad (\text{C.1.2})$$

in cui le deformazioni $\delta x_i(t)$ sono tali per cui il punto iniziale e finale non cambiano, ossia, tali per cui:

$$\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0. \quad (\text{C.1.3})$$

In questo modo l'azione diventa:

$$S[x_i + \delta x_i] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt} \right)^2 - V(x_i + \delta x_i) \right] \quad (\text{C.1.4})$$

possiamo vedere il termine al quadrato:

$$\left(\frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt} \right)^2 = \left[\frac{dx_i}{dt} + \frac{d(\delta x_i)}{dt} \right]^2 \quad (\text{C.1.5})$$

$$= \left(\frac{dx_i}{dt} + \frac{d(\delta x_i)}{dt} \right) \left(\frac{dx_i}{dt} + \frac{d(\delta x_i)}{dt} \right) \quad (\text{C.1.6})$$

$$\sim \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dx_i}{dt} \frac{d(\delta x_i)}{dt} + \left(\frac{d(\delta x_i)}{dt} \right)^2 \quad (\text{C.1.7})$$

in cui abbiamo trascurato i termini $\mathcal{O}(\delta x_i^2)$ e visto che non ci piace troppo la derivata di δx_i aggiungiamo e togliamo:

$$2 \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i \quad (\text{C.1.8})$$

poiché in questo modo abbiamo:

$$\left(\frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i}{dt} \delta x_i \right) - 2 \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \mathcal{O}(\delta x_i^2). \quad (\text{C.1.9})$$

Nell'espressione (C.1.4) c'è anche $V(x_i + \delta x_i)$ che possiamo espandere con Taylor:

$$V(x_i + \delta x_i) \sim V(x_i) + \partial_i V \delta x_i + \mathcal{O}(\delta x_i^2). \quad (\text{C.1.10})$$

Inserendo gli sviluppi (C.1.9) e (C.1.10) nell'espressione (C.1.4) dell'azione otteniamo:

$$S[x_i + \delta x_i] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 - V(x_i) \right] - \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \partial_i V \right] \delta x_i + m \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i}{dt} \delta x_i \right) \quad (C.1.11)$$

$$S[x_i + \delta x_i] = S[x_i] - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \partial_i V \right) \delta x_i + m \left[\frac{dx_i}{dt} \delta x_i \right]_{t_1}^{t_2} \quad (C.1.12)$$

in cui notiamo che l'ultimo termine, quello di superficie (o di bordo), è nullo, poiché per tutti i cammini abbiamo la condizione (C.1.3). Dunque l'espressione dell'azione risulta essere:

$$S[x_i + \delta x_i] - S[x_i] = - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \partial_i V \right) \delta x_i \quad (C.1.13)$$

in cui il termine tra parentesi può essere visto come:

$$\frac{\delta S}{\delta x_i}. \quad (C.1.14)$$

Otteniamo che S è invariante per la trasformazione infinitesima che manda $x_i \rightarrow x_i + \delta x_i$ se e solo se:

$$S[x_i + \delta x_i] - S[x_i] = 0 \quad (C.1.15)$$

o equivalentemente se:

$$\frac{\delta S}{\delta x_i} = 0 \quad (C.1.16)$$

verificata se:

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \partial_i V = 0 \quad (C.1.17)$$

che possiamo vedere non essere altro che l'equazione del moto classica, ossia $\vec{F} = m\vec{a}$. Notiamo, inoltre, che l'estremizzazione di S ($\delta S = 0$) individua un'intera classe di cammini. Quale tra gli infiniti cammini verrà effettivamente percorso dal sistema dipende dalle condizioni al contorno, ovvero, dai valori iniziali di x_i e $\frac{dx_i}{dt}$.

C.2 Legame tra simmetrie di S e le quantità conservate

Un'importante osservazione che si deve fare riguarda il termine di bordo dell'equazione (C.1.12). Sarebbe molto prepotente da parte di un fisico considerare solo trasformazioni di x_i tali per cui il termine di bordo sia nullo, infatti, esistono diverse trasformazioni rilevanti in Fisica (ad esempio le rotazioni) per cui il termine di bordo non si annulla in automatico. Emmy Noether viene in soccorso e ci da un teorema fondamentale per trovare leggi di conservazione in situazioni qualsiasi ed in particolare in situazioni come questa.

Riprendiamo la variazione dell'azione:

$$S[x_i + \delta x_i] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 - V(x_i) \right] - \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \partial_i V \right] \delta x_i + m \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i}{dt} \delta x_i \right) \quad (\text{C.2.1})$$

sostanzialmente, se la trasformazione considerata non annulla il termine di superficie, noi per far valere ancora le equazioni del moto forzatamente mettiamo a 0 l'altro termine integrale. L'integrale è una derivata totale rispetto a t , per cui, porla a 0 equivale a chiedere che la cosa all'interno di dt sia una corrente, che rispetta un'equazione di continuità², alla quale corrisponde sempre (per via del teorema di Noether) una quantità conservata. Vediamo un esempio semplice.

Supponiamo di avere $V = V(x_i)$ solo funzione del modulo di x_i , ovvero, di $r = \sqrt{x^i x_i}$. In questo caso, $S[x_i]$ è invariante per rotazioni, poiché dipende solo da r e non dalle coordinate angolari. Per cui, per una rotazione infinitesima³:

$$\delta x_i = \varepsilon_{ij} x^j \quad (\text{C.2.2})$$

si avrà:

$$\delta S = 0. \quad (\text{C.2.3})$$

Questo, però, è uno dei casi in cui non ci si disfa del termine di bordo di $S[x_i + \delta x_i]$ semplicemente imponendo la condizione sulla deformazione agli estremi:

$$\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0 \quad (\text{C.2.4})$$

²In generale quando abbiamo una $\frac{d}{dt}$ questa corrisponde ad un'equazione di continuità.

³In cui $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$ è il tensore di Levi-Civita.

ma si trova che esso dipende dagli estremi.⁴ Dobbiamo chiedere che (C.2.3) sia verificata se valgono le equazioni del moto:

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \partial_i V = 0 \quad (\text{C.2.5})$$

che sono tali, solo se il termine di superficie (integrale) si annulla, ossia, solo se:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \varepsilon_{ij} x^j \right) = 0 \quad \implies \quad \varepsilon_{ij} x^j m x^j \frac{dx}{dt} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (\text{C.2.6})$$

ricordando che avere indici ripetuti vuol dire avere indici sommati e che $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$, allora:

$$m \left(x^j \frac{dx^i}{dt} - x_i \frac{dx_j}{dt} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (\text{C.2.7})$$

in cui individuiamo, nel termine tra parentesi, proprio il momento angolare L_{ij} . Abbiamo quindi:

$$L_{ij}(t_1) = L_{ij}(t_2) \quad (\text{C.2.8})$$

che vuol dire che il momento angolare si conserva.

Si è potuto vedere con questo semplice esempio una cosa molto importante. L'invarianza dell'azione per rotazioni corrisponde ad una legge di conservazione ed implica l'esistenza di una costante del moto, in questo caso il momento angolare. L'enunciato del teorema di Noether è:

Teorema 3. *Ad un'invarianza dell'azione corrisponde una quantità conservata e quindi una legge di conservazione. Ad un'invarianza dell'azione corrisponde una simmetria del sistema.*

Da questa breve sezione concludiamo che:

- Le equazioni del moto classiche si ottengono con il principio di minima azione.
- Le condizioni al contorno sono date dall'esterno, a seconda del tipo di sistema.

⁴Bisogna distinguere i concetti di simmetria dell'azione e deformazione del cammino. Se noi prendiamo un'azione, un cammino e lo deformiamo, allora otteniamo sia una variazione del funzionale azione δS , sia una variazione del cammino (dal punto di vista delle coordinate) δx . Però, l'azione è invariante per rotazioni (è simmetrica), per cui se noi prendiamo δS e ruotiamo il sistema di riferimento, δS non deve cambiare, ma ciò non influenza in alcun modo il fatto che si modifichi la forma del cammino e di conseguenza gli estremi. Per questo non possiamo imporre che la variazione degli estremi sia nulla.

- Le invarianze di S corrispondono a quantità conservate e rispecchiano di conseguenza le simmetrie del sistema.
- Il teorema di Noether è importantissimo perché permette di determinare le costanti del moto di un certo sistema, basandosi solamente sulle invarianze che inseriamo in S .

Quello che facciamo per arrivare alla Teoria Quantistica dei Campi è esattamente questo, ossia, richiedere l'invarianza sotto trasformazioni generate dal gruppo di Lorentz (rotazioni e boosts) e dal gruppo di Poincaré (rotazioni, boosts e traslazioni), costruire l'azione della teoria, determinare le equazioni del moto e le quantità conservate.

Vediamo più in dettaglio questi argomenti quando nel capitolo §5 costruiamo le equazioni di campo e vediamo le varie correnti di Noether per i diversi tipi di campi.

Appendice D

Nozioni gruppi

Raccolgo in questa appendice una brevissima parte riguardo nozioni base riguardo la teoria dei gruppi.

D.1 Notazioni

- **G** : generale.
- **S** : speciale, ovvero, un gruppo in cui il determinante della rappresentazione matriciale di un generico elemento è uguale a 1.
- **L** : lineare, ovvero, il generico elemento agisce su uno spazio lineare.
- **O** : ortogonale, ovvero, $G^T G = \mathbb{1}$, e sono gruppi che garantiscono la conservazione del prodotto scalare.
- **R** : nella rappresentazione matriciale di un generico elemento ci sono solo numeri reali.
- **C** : nella rappresentazione matriciale di un generico elemento vi sono soltanto numeri complessi.
- **U** : il generico elemento è unitario, ovvero, $G^\dagger G = \mathbb{1}$.
- **(n)** : indica la dimensione dello spazio $\mathbb{R}^n$, su cui agisce la rappresentazione fondamentale. Per spazi a metrica non definita si ha la notazione **(m,n)**, dove nella metrica avremo m segni negativi ed n positivi (o viceversa a seconda della convenzione).

D.2 Gruppo $\mathbb{Z}_2$

Viene chiamato **gruppo degli interi modulo 2** i cui elementi sono:

$$\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\} \tag{D.2.1}$$

ed è un gruppo abeliano.

L'utilità del gruppo $\mathbb{Z}_2$ risiede anche nella trattazione dei gruppi di Lie. L'omeomorfismo:

$$SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow SO(3, 1) \quad (\text{D.2.2})$$

è due ad 1, ovvero, ogni elemento di $SO(3, 1)$ ha due preimmagini in $SL(2, \mathbb{C})$. Il nucleo dell'omeomorfismo è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, ed è generato dall'elemento $-\mathbb{1} \in SL(2, \mathbb{C})$, poichè:

$$(-\mathbb{1}) \cdot (-\mathbb{1}) = \mathbb{1} \quad \text{e} \quad (-\mathbb{1}) \rightarrow \text{identità in } SO(3, 1). \quad (\text{D.2.3})$$

Quindi diciamo:

$$SO(3, 1) \cong \frac{SL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}. \quad (\text{D.2.4})$$

Similmente, sappiamo che $SU(2)$ è un doppio ricoprimento di $SO(3)$:

$$SO(3) \cong \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2}. \quad (\text{D.2.5})$$

in cui anche qua il nucleo è $\mathbb{Z}_2$ generato da $(-\mathbb{1})$.

Nella teoria delle rappresentazioni, $\mathbb{Z}_2$ spesso indica una simmetria discreta, come parità o cambio di segno, o anche lo spin half (dove ruotare di 2π cambia il segno dello spinore, vedi la sezione §3.2).

Appendice E

Complementi di Relatività Speciale

E.1 Legame tra rapidità, massa di riposo ed energia di un sistema

In questa breve appendice vedremo come sono legate tra loro la rapidità η , la massa a riposo di un sistema m e la sua energia. Tutto ciò ci è utile per il capitolo §6.

Ricordiamo che gli elementi della matrice che opera un boost si esprimono in termini della rapidità η , ricordiamo ciò che abbiamo visto nella sezione §3.5.1, come segue:

$$\cosh \eta = \gamma \quad , \quad \sinh \eta = \beta\gamma \quad , \quad \tanh \eta = \beta \quad (\text{E.1.1})$$

con:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{E.1.2})$$

e abbiamo le matrici di boost che si possono scrivere, ad esempio con un boost lungo x , come:

$$\Lambda_{B_x} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.1.3})$$

Utilizzando la cinematica relativistica abbiamo la relazione:

$$E = \gamma mc^2 \quad , \quad |\vec{v}| = \frac{|\vec{p}|}{\gamma m} \quad , \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (\text{E.1.4})$$

esse ci permettono di trovare¹:

$$\cosh^2\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \gamma) = \frac{1}{2} \frac{mc^2}{mc^2} (1 + \gamma) = \frac{1}{2} \frac{mc^2 + \gamma mc^2}{mc^2} \quad (\text{E.1.6})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E + mc^2}{mc^2} \quad (\text{E.1.7})$$

o in unità naturali:

$$\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) = \sqrt{\frac{E + m}{2m}}. \quad (\text{E.1.8})$$

Analogamente:

$$\sinh^2\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{1}{2}(\gamma - 1) = \frac{1}{2} \frac{mc^2\gamma - mc^2}{mc^2} \quad (\text{E.1.9})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E - mc^2}{mc^2} \quad (\text{E.1.10})$$

e:

$$\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) = \sqrt{\frac{E - m}{2m}}. \quad (\text{E.1.11})$$

Possiamo ancora vedere:

$$\tanh\left(\frac{\eta}{2}\right) = \sqrt{\frac{E - m}{E + m}} = \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{E + m} = \frac{|\vec{p}|}{E + m}. \quad (\text{E.1.12})$$

E.2 Generatori del gruppo di Lorentz

Verifichiamo brevemente che i generatori:

$$J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M^{jk}, \quad K^i = M^{0i} = -M^{i0} \quad (\text{E.2.1})$$

siano i momenti angolari e i boost. Dovremo utilizzare la relazione:

$$(M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = -i(g^{\mu\rho}g^\sigma{}_\nu - g^{\mu\sigma}g^\rho{}_\nu) \quad (\text{E.2.2})$$

e il fatto che $g^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu$. Calcoliamo, ad esempio, J_z , così da poterlo confrontare con la matrice trovata nella sezione §3.2, gli altri si calcolano in

¹Ti serve ricordare che vale:

$$\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{1 + \cosh \eta}{2}. \quad (\text{E.1.5})$$

modo analogo (vedi calcoli nel file apposito):

$$(J_z)^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}(\varepsilon_{3jk}M^{jk})^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}(\underbrace{\varepsilon_{312}}_{+1}M^{12} + \underbrace{\varepsilon_{321}}_{-1}\underbrace{M^{21}}_{-M^{12}})^\mu{}_\nu = (M^{12})^\mu{}_\nu \quad (\text{E.2.3})$$

$$= -i(g^{\mu 1}g^2{}_\nu - g^{\mu 2}g^1{}_\nu) \quad (\text{E.2.4})$$

$$= -i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1 \ 0) + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0 \ 0) \quad (\text{E.2.5})$$

$$= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.6})$$

che possiamo vedere essere una matrice 4x4 in cui nella parte spaziale compare la matrice di rotazione attorno l'asse z . Analogamente:

$$(K^x)^\mu{}_\nu = (M^{01})^\mu{}_\nu \quad (\text{E.2.7})$$

$$= -i(g^{\mu 0}g^1{}_\nu - g^{\mu 1}g^0{}_\nu) \quad (\text{E.2.8})$$

$$= -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0 \ 0) + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (\text{E.2.9})$$

$$= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.10})$$

che possiamo vedere essere il generatore di un boost lungo l'asse x .

Determinate le espressioni matriciali si può verificare l'algebra del gruppo di Lorentz.

Appendice F

Le matrici γ^μ di Dirac

Come abbiamo potuto vedere nei capitoli §4, 5 e 6 le matrici di Dirac γ^μ sono essenziali per tutta la parte della teoria della Teoria Quantistica dei Campi che riguarda campi spinoriali. Abbiamo già accennato a qualcosa nel corso dei capitoli in base a quello che ci serviva, ma raccogliamo in questa appendice tutto (o per lo meno tutto ciò che ci interessa ai fini del corso) ciò che riguarda γ^μ dalla loro introduzione fino le loro proprietà. Le proprietà e le relazioni per le matrici γ^μ sono moltissime e di solito si indica con *gammologia* la branca della matematica che studia queste matrici, noi impareremo alcune cose man mano che svilupperemo la Teoria Quantistica dei Campi e non tutto. In tutti i libri di Teoria Quantistica dei Campi è presente un capitolo o un'appendice con elencate tutte le proprietà e relazioni delle matrici γ ; si veda ad esempio il capitolo 47 di Srednicki Physical law should have mathematical beauty.Srednicki:2007qs, il capitolo 3 di Peskin e Schroeder Physical law should have mathematical beauty.Peskin:1995ev o il capitolo 36 di Lancaster e Blundell Physical law should have mathematical beauty.Lancaster:2014pza.

F.1 Giustificazioni fisiche

I motivi per cui abbiamo introdotto le matrici γ^μ li abbiamo visti nella sezione §4.4.3, ma sono molteplici gli utilizzi, anche piuttosto importanti, delle matrici γ^μ . Uno dei motivi per cui si utilizzano le matrici (F.2.2) è compatte l'equazione di Dirac (5.4.27), definendo, per un generico operatore a , l'operatore:

$$\not{a} = \gamma^\mu a_\mu \quad (\text{F.1.1})$$

che viene chiamato *a-slash*. Quella di $\not{a}$ si chiama anche **notazione di Feynmann**. Nel caso della derivata l'operatore è:

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} - \gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} - \gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{F.1.2})$$

il quale permette di riscrivere (5.4.27) come:

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0 \quad (\text{F.1.3})$$

raccogliendo la i si ottiene quella che Dirac stesso¹ definì una delle equazioni più eleganti mai scritte:

$$(\cancel{\partial} + im)\psi = 0. \quad (\text{F.1.4})$$

Un'altra relazione comoda per cui si utilizzano le matrici (F.2.2) è quella che definisce:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (\text{F.1.5})$$

che, come abbiamo avuto modo di vedere nei vari capitoli, è di notevole importanza.

F.2 Definizioni e rappresentazione di Weyl

Abbiamo cominciato ad introdurre le matrici γ non appena, nel capitolo §4.4.3, abbiamo osservato le proprietà di trasformazione sotto parità degli spinori left e right (qui abbiamo introdotto γ^0) e quando abbiamo visto come proiettare solo una delle due componenti dello spinore ψ (abbiamo definito γ^5).

Abbiamo definito le matrici di Dirac come un'estensione in uno spazio quadridimensionale delle matrici di Pauli². Infatti avevamo scritto un quadrivettore:

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) \quad (\text{F.2.2})$$

in cui l'indice μ è un indice di Lorentz, quindi corre da 0 a 3, i cui elementi sono le nostre matrici. γ^μ ha un'algebra specifica, in particolare di anticommutatori, che è:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{F.2.3})$$

e va sotto il nome di **algebra di Clifford**. Sono molto importanti le matrici γ anche per la Fisica che deriva dall'equazione di Dirac, infatti la rappresentazione irriducibile è data da matrici 4x4 e ciò si traduce nel fatto che gli spinori $\psi(x)$ descritti dall'equazione di Dirac saranno oggetti a 4 componenti. Ovviamente, non esiste un'unica rappresentazione di γ^μ , ma quella

¹Vedi il libro *La bellezza come metodo. Saggi e riflessioni su fisica e matematica* di P. Dirac.

²Che sono le solite:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.2.1})$$

che va sotto il nome di rappresentazione del chirale o **rappresentazione di Weyl**³ definisce:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.2.4})$$

in cui $\mathbb{1}_2$ è la matrice identità 2x2. La rappresentazione di Weyl permette di decomporre lo spinore ψ come:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (\text{F.2.5})$$

ma questa distinzione di spinori left e right è valida in qualsiasi rappresentazione dell'algebra di Clifford, ed è invariante, poiché come impareremo vale $[\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0$ in cui $\sigma^{\mu\nu}$ sono collegati ai generatori $M^{\mu\nu}$ di Lorentz, il vantaggio di utilizzare la rappresentazione di Weyl, o chirale, viene dal fatto che la fattorizzazione di ψ_L e ψ_R e la loro proiezione con gli operatori $P_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$ è più comoda rispetto ad altre. Quindi, non è che sia meno conveniente utilizzare altre rappresentazioni delle matrici γ , semplicemente la chiralità, che vedremo essere una proprietà intrinseca dei campi spinoriali, è meno trasparente. Per comodità possiamo riscrivere la rappresentazione (F.2.4) in modo più compatto, definendo:

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \quad , \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \quad (\text{F.2.6})$$

che permette di scrivere:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.2.7})$$

Possiamo aggiungere ancora un'altra matrice oltre il quadrivettore (F.2.2), che va sotto il nome di **matrice di chiralità**:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (\text{F.2.8})$$

Essendo la matrice (F.2.8) aggiunta in un momento successivo e non facente parte del vettore (F.2.2), ci si potrebbe chiedere quale algebra soddisfi. Si può dimostrare che:

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\text{F.2.9})$$

ossia, γ^5 anticommuta con tutte le matrici di Dirac γ^μ . Potremmo anche chiederci se siamo in presenza di matrici hermitiane oppure no. Vediamo che vale:

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad , \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad , \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad (\text{F.2.10})$$

e che dunque solo γ^0 e γ^5 sono hermitiane, mentre γ^i sono anti-hermitiane. Il fatto che non γ^μ non siano completamente hermitiana non ci deve stupire,

³Vedi la sezione §F.4 per discorso sulle differenze tra le varie rappresentazioni.

esso infatti è una conseguenza del fatto che non esistono rappresentazioni unitarie finite dimensionali del gruppo di Lorentz (poichè non è compatto). In generale possiamo scrivere:

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (\text{F.2.11})$$

F.3 Proprietà fondamentali

Le matrici (F.2.2) hanno importanti proprietà immediate da verificare⁴:

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{1} \quad (\text{F.3.1})$$

$$(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -\mathbb{1} \quad (\text{F.3.2})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = (\gamma^0)^2 + \gamma^i \gamma_i = 4\mathbb{1} \quad (\text{F.3.3})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (\text{F.3.4})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} \quad (\text{F.3.5})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu. \quad (\text{F.3.6})$$

Possiamo calcolare le tracce delle matrici γ in 4 dimensioni. Torneranno sicuramente utili. Abbiamo sicuramente:

$$\text{Tr}\{\mathbb{1}\} = 4. \quad (\text{F.3.7})$$

Poi è facilmente dimostrabile che la traccia di un numero dispari di matrici γ è sempre nulla. Ad esempio:

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^5\} = 0. \quad (\text{F.3.8})$$

Poi possiamo vedere le seguenti relazioni:

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{F.3.9})$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma\} = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (\text{F.3.10})$$

$$\text{Tr}\{\gamma^5\} = 0 \quad (\text{F.3.11})$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5\} = 0 \quad (\text{F.3.12})$$

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5\} = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{F.3.13})$$

Ovviamente, anche la matrice di chiralità (F.2.8) ha delle proprietà analoghe, infatti, per γ^5 valgono:

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -\frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma, \quad (\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \quad (\text{F.3.14})$$

e anche che:

$$\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = -i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^5, \quad \gamma^{\mu\nu\rho} = +i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \gamma^5. \quad (\text{F.3.15})$$

⁴Noi, per lo meno in questa appendice, facciamo sempre riferimento alla rappresentazione di Weyl.

È importante ricordare che le proprietà e relazioni che utilizziamo valgono nella specifica rappresentazione che utilizziamo, se ne scegliessimo un'altra queste portebbero non essere così evidenti.

F.4 Rappresentazione di Dirac

Nella sezione precedente §F.2 abbiamo visto la rappresentazione di Weyl per le matrici γ^μ , ma è doveroso segnalare che esiste anche una rappresentazione di Dirac. A seconda del testo che si sceglie si può trovare l'una o l'altra. Fissata la notazione, ma facendo variare i testi si possono trovare delle definizioni diverse a meno di un segno, infatti, alcuni testi mettono un segno — in più o in meno nelle matrici γ^0 e γ^5 (le matrici γ^i sono sempre le stesse in qualsiasi delle due rappresentazioni).

Ad ogni modo, la **rappresentazione di Dirac** è:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{F.4.1})$$

F.5 Forme bilineari degli spinori di Dirac

Questa sezione è fondamentale per la sezione §6.5, in cui vediamo le varie forme bilineari che ci interessa formare degli spinori di Dirac. Vediamo in questa sezione le matrici Γ^a e le loro proprietà che utilizzeremo in §6.5.

Tutte le proprietà viste riguardo gli spinori di Dirac e gli invarianti possono essere riassunte in una serie di forme bilineari. Infatti, possiamo dimostrare che esistono 16 matrici 4x4 ad elementi costanti, che indichiamo come Γ^a , tali per cui la combinazione $\bar{\psi}\Gamma^a\psi$ può essere decomposta in termini che hanno proprietà di trasformazione, per operazione di matrici del gruppo di Lorentz, ben definite⁵ e che costituiscono una base per lo spazio di Dirac. Le Γ^a sono la base per l'algebra che governa lo spazio di Dirac, ed essendo 16 matrici permettono di dire che l'algebra ha dimensione 16, però attenzione che questa dimensione è diversa dalla dimensione dello spazio di Dirac, che è 4. Quello che vogliamo fare è riscrivere Γ^a in termini di queste 16 matrici, così che riusciamo a formare delle forme bilineari (quando Γ^a è messa dentro $\bar{\psi}\Gamma^a\psi$) con le proprietà che ci servono in base alla situazione in cui siamo. Se ci pensiamo qualcuna l'abbiamo già vista, infatti, se prendiamo $\Gamma^a = \gamma^\mu$ sappiamo che $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ è un vettore di Lorentz, oppure, se prendiamo $\Gamma^a = \mathbb{1}$ sappiamo che $\bar{\psi}\psi$ è un invariante di Lorentz. Ovviamente, già conosciamo una base di matrici 4x4 che ci permette di costruire degli oggetti ben definiti per trasformazioni di Lorentz, per questo motivo, gli oggetti Γ^a saranno

⁵Il che vuol dire che possono essere degli invarianti, vettori di Lorentz o altro ben definito.

combinazioni antisimmetriche di matrici γ . La nostra base di matrici Γ^a , è formata da:

$\mathbb{1}$	(1 matrice)	scalare
γ^μ	(4 matrice)	vettore
$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	(6 matrici antisimm.)	tensore di rango 2
$\gamma^\mu \gamma^5$	(4 matrici)	pseudo-vettore
γ^5	(1 matrice)	pseudo-scalare

in cui intendiamo con pseudo-vettori e pseudo-scalari degli oggetti che trasformano come vettori e come scalari, ma che cambiano segno per trasformazioni di parità.

Possiamo vedere le proprietà delle matrici Γ^a .

1. Vale: $(\Gamma^a)^2 = \pm 1$. Infatti, sappiamo bene che vale (F.3.2) e (F.3.14) e possiamo vedere che, ad esempio:

$$\sigma^{01} = \frac{i}{2}[\gamma^0, \gamma^1] = i\gamma^0\gamma^1 \quad (\text{F.5.1})$$

$$\Rightarrow (\sigma^{01})^2 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^1 = +(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2 = -\mathbb{1}. \quad (\text{F.5.2})$$

2. Ogni Γ^a si può esprimere come prodotto al più di 4 matrici γ diverse, con coefficienti ± 1 o $\pm i$. Ad esempio possiamo scrivere:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{F.5.3})$$

$$\gamma^0\gamma^5 = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{F.5.4})$$

dalla (F.5.4) possiamo accorgerci che quando ci sono più di 4 matrici γ , almeno 2 devono essere uguali e sapendo che vale (F.3.2) il loro prodotto farà ± 1 e ridurrà il numero totale di matrici γ .

3. Vale: $\forall \Gamma^a, \Gamma^b$ per cui $a \neq b$, allora $\exists \Gamma^c \neq \mathbb{1}$ tale per cui $\Gamma^a\Gamma^b = \alpha\Gamma^c$ con $\alpha = \pm 1, \pm i$.

Questa proprietà può essere vista come corollario della **2**.

4. Vale: $\forall \Gamma^a \neq \mathbb{1} \exists$ almeno una Γ^b tale per cui $\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 0$.

5. Vale: $\forall \Gamma^a \neq \mathbb{1}$ allora $\text{Tr} \{\Gamma^a\} = 0$. Infatti abbiamo:

$$\text{Tr} \{\Gamma^a\} = \pm \text{Tr} \left\{ \Gamma^a \left(\Gamma^b \right)^2 \right\} \quad (\text{F.5.5})$$

in cui Γ^b è una matrice che anticommuta con Γ^a e per cui esiste sicuramente la proprietà 4, così che possiamo operare una permutazione ciclica:

$$\pm \text{Tr} \left\{ \Gamma^a \left(\Gamma^b \right)^2 \right\} = \pm \text{Tr} \left\{ \Gamma^b \Gamma^a \Gamma^b \right\} = \mp \text{Tr} \left\{ \left(\Gamma^b \right)^2 \Gamma^a \right\} = -\text{Tr} \left\{ \Gamma^a \right\} \quad (\text{F.5.6})$$

abbiamo trovato quindi che:

$$\text{Tr} \left\{ \Gamma^a \right\} = -\text{Tr} \left\{ \Gamma^a \right\} \implies \text{Tr} \left\{ \Gamma^a \right\} = 0. \quad (\text{F.5.7})$$

6. Dalle proprietà 3 e 5 segue che per $a \neq b$ vale $\text{Tr} \left\{ \Gamma^a \Gamma^b \right\} = 0$.

7. Le matrici Γ^a sono linearmente indipendenti e conseguentemente qualsiasi matrice 4x4 può essere scritta come sovrapposizione lineare di Γ^a .

Il set completo di forme bilineari che troviamo è quindi:

$\bar{\psi}\psi$	(1)	scalare
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	(4)	vettore (o vettore polare)
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	(6)	tensore di rango 2
$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	(4)	pseudo-vettore (o vettore assiale)
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	(1)	pseudo-scalare.

Rimandiamo alla sezione §6.5 per vedere le proprietà di trasformazione degli oggetti elencati sopra.

F.5.1 Identità di Fierz

Sono identità che legano, per scambio, le forme bilineari. Il cuore di queste identità è la relazione che lega le matrici di Pauli:

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} (\sigma_\mu)_{\gamma\delta} = 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}. \quad (\text{F.5.8})$$

Notiamo che le componenti α, γ trasformano nella rappresentazione di Weyl come ψ_L , mentre β, δ come ψ_R . Utilizzeremo la rappresentazione:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (\text{F.5.9})$$

e gli spinori associati u, v a ψ_L e ψ_R , cioè u_L, u_R, v_L e v_R . Sono valide le relazioni:

$$\begin{cases} u_L = P_L u = \frac{1-\gamma^5}{2} u \\ u_R = P_R u = \frac{1+\gamma^5}{2} u \end{cases} \quad (\text{F.5.10})$$

e analoghe per v .

Se partiamo dalla relazione (F.5.8) e prendiamo prodotti a panino con u_1, u_2, u_3 e u_4 troviamo:

$$(\bar{u}_{1R} \sigma^\mu u_{2R}) (\bar{u}_{3R} \sigma_\mu u_{4R}) = 2\varepsilon_{\alpha\gamma} \bar{u}_{1R\alpha} \bar{u}_{3R\gamma} \varepsilon_{\beta\delta} u_{2R\beta} u_{4R\delta} \quad (\text{F.5.11})$$

$$= -(\bar{u}_{1R} \sigma^\mu u_{4R}) (\bar{u}_{3R} \sigma_\mu u_{2R}) \quad (\text{F.5.12})$$

dunque, il prodotto di queste forme bilineari è antisimmetrico per scambio degli indici 2,4 e 1,3. Possiamo riscriverla anche in notazione a 4 componenti:

$$(\bar{u}_{1R} \sigma^\mu u_{2R}) (\bar{u}_{3R} \sigma_\mu u_{4R}) = \bar{u}_1 \gamma^\mu \frac{1 + \gamma^5}{2} u_2 \bar{u}_3 \gamma^\mu \frac{1 + \gamma^5}{2} u_4 \quad (\text{F.5.13})$$

$$= -\bar{u}_1 \gamma^\mu \frac{1 + \gamma^5}{2} u_4 \bar{u}_3 \gamma^\mu \frac{1 + \gamma^5}{2} u_2. \quad (\text{F.5.14})$$

Le identità di Fierzz possono essere generalizzate a ciascuna delle 16 forme bilineari introdotte come:

$$(\bar{u}_1 \Gamma^A u_2) (\bar{u}_3 \Gamma^B u_4). \quad (\text{F.5.15})$$

Appendice G

Spazio di Fock

Vediamo in questa sezione una veloce sfogliata delle nozioni fondamentali riguardo la trattazione di sistemi di particelle identiche in Meccanica Quantistica e dello spazio di Fock. Per motivi di tempo e anche di brevità non riporto tutta la trattazione, ma mi limiterò a introdurre solamente gli oggetti e le relazioni utili ai nostri fini. Una trattazione più soddisfacente e rigorosa può essere trovata nelle *note del corso di Meccanica Quantistica 2* del Prof. Sciuto, oppure, nei capitoli 2 e 3 del Lancaster e Blundell *Physical law should have mathematical beauty*.Lancaster:2014pza. Puoi anche vedere il capitolo 1 dello Srednicki *Physical law should have mathematical beauty*.Srednicki:2007qs. Se avete seguito il corso di IFIF sarà sufficiente rivedere gli appunti.

G.1 Particelle distinguibili

In Meccanica Classica si è sempre stati in grado di distinguere due particelle identiche, poiché si aveva la nozione di traiettoria, per cui, almeno in linea di principio, si poteva seguire il cammino di ciascuna particella e non si avevano problemi nel distinguerle. Con la Meccanica Quantistica, come abbiamo già avuto modo di vedere, le cose si complicano poiché le particelle non seguono più una traiettoria, ma rispettano il principio d'indeterminazione di Heisenberg. Per la Meccanica Quantistica due particelle identiche sono indistinguibili. Cerchiamo in questa sezione un modo per trattare questo tipo di sistemi in Meccanica Quantistica non relativistica.

Cominciamo con il considerare un sistema di 2 particelle, il cui spazio di Hilbert complessivo risulterà:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad (\text{G.1.1})$$

con $\mathcal{H}_{1,2}$ gli spazi di singola particella. Possiamo definire un'operatore di scambio P_{12} che sostanzialmente permette di scambiare di posto le particelle.

Scelta come base $\{|i\rangle\}$ per lo spazio $\mathcal{H}_i$ allora l'operatore di scambio è definito come:

$$P_{12} \sum_{i,j} c_{ij} |i\rangle |j\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |j\rangle |i\rangle. \quad (\text{G.1.2})$$

È facile dimostrare che $P_{ij}^2 = \mathbb{1}$ e che di conseguenza i suoi autovalori siano ± 1 . Quando troviamo l'autovalore $+1$ possiamo dire che lo spazio $\mathcal{H}$ è simmetrico per scambio di due particelle, mentre se abbiamo autovalore -1 diciamo che $\mathcal{H}$ è antisimmetrico per lo scambio di due particelle. Indichiamo:

$$\mathcal{H} : \begin{cases} (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)_S & \text{simmetrico} \\ (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)_A & \text{antisimmetrico.} \end{cases} \quad (\text{G.1.3})$$

Dunque, in generale gli spazi fisici, e di conseguenza gli stati, possono essere solamente simmetrici o antisimmetrici e possiamo descriverli come:

$$|\psi\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi\rangle |\chi\rangle + |\chi\rangle |\varphi\rangle) \quad , \quad P_{12} |\psi\rangle_S = |\psi\rangle_S \quad (\text{G.1.4})$$

$$|\psi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi\rangle |\chi\rangle - |\chi\rangle |\varphi\rangle) \quad , \quad P_{12} |\psi\rangle_A = -|\psi\rangle_A. \quad (\text{G.1.5})$$

Inoltre l'operatore di scambio dovrà commutare con tutte le osservabili dello SCOC (Sistema Completo di Osservabili Commutanti) poiché altrimenti la misura di un'osservabile che non commuta con P_{12} , permetterebbe di distinguere le particelle, che però essendo identiche devono rendere invariante per scambio il sistema.

Poiché la parità di scambio non dipende dalla coppia, non può dipendere dagli stati quantici occupati, dall'interazione tra esse, dal numero di particelle e nemmeno dallo stato del sistema. Dagli esperimenti si vede e con la Teoria Quantistica dei Campi si dimostra che la parità dipende unicamente dal tipo di particelle ed in particolare dipende dallo spin s del sistema. L'autovalore di P_{12} è $(-1)^{2s}$ con s spin e permette di distinguere particelle bosoniche e fermioniche. Dichiamo:

$$(-1)^{2s} : \begin{cases} +1 & \text{spin intero} & \implies & \text{bosoni} & (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)_S \\ -1 & \text{spin semi-intero} & \implies & \text{fermioni} & (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)_A. \end{cases} \quad (\text{G.1.6})$$

In particolare, possiamo verificare che gli stati fermionici:

$$|\psi\rangle_F = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi\rangle |\chi\rangle - |\chi\rangle |\varphi\rangle) \quad (\text{G.1.7})$$

rispettano il principio di esclusione di Pauli, poiché mettendo $|\varphi\rangle = |\chi\rangle$ abbiamo $|\psi\rangle_F = 0$.

Se vogliamo scrivere un po' meglio lo spazio di Hilbert di singola particella possiamo scriverlo come:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{orb}} \otimes \mathcal{H}_s \quad (\text{G.1.8})$$

dove $\mathcal{H}_s$ è lo spazio di spin, che è dimostrabile essere $\mathcal{H}_s = \mathbb{C}^{2s+1}$. Per un sistema di due particelle abbiamo di conseguenza:

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{\text{orb},1} \otimes \mathcal{H}_{\text{orb},2} \otimes \mathcal{H}_{s,1} \mathcal{H}_{s,2}) \quad (\text{G.1.9})$$

che ovviamente può essere simmetrico o antisimmetrico. Ad esempio per un sistema di 2 particelle fermioniche di spin $1/2$ si ha:

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{\text{orb},1} \otimes \mathcal{H}_{\text{orb},2} \otimes \mathcal{H}_{1/2} \mathcal{H}_{1/2})_A \quad (\text{G.1.10})$$

in cui tra l'altro sappiamo come scrivere gli stati, poiché ad MQ1 abbiamo imparato che componendo due particelle con spin $s = 1/2$ si ottengono 4 stati di spin disaccoppiati (uno stato di singoletto e 3 di tripletto):

$$\begin{cases} |1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |1, -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases} \quad (\text{G.1.11})$$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (\text{G.1.12})$$

tra cui l'unico che va bene, perché rispetta l'antisimmetria, è lo stato $|0, 0\rangle$, che ci permette di dire che:

$$\mathcal{H}_{1/2} \mathcal{H}_{1/2} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \implies \mathcal{H}_F = [\mathcal{H}_{\text{orb},1} \otimes \mathcal{H}_{\text{orb},2} \otimes (\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1)] \quad (\text{G.1.13})$$

A noi non interessa molto, ma se si vuole nelle dispense di Sciuto c'è un capitolo riguardante l'attrazione e la repulsione tra le particelle bosoniche piuttosto che fermioniche.

G.2 Formalismo dei numeri di occupazione

Vediamo in questa sezione il formalismo che ci porteremo avanti nel futuro e come esso sia essenziale nella Meccanica Quantistica non relativistica non appena cominciamo ad avere più di 3 particelle nel nostro sistema. Infatti, molte volte in Meccanica Quantistica non è fattibile trattare molte particelle. Ad esempio, prendendo un sistema con 3 particelle abbiamo:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \quad (\text{G.2.1})$$

in cui possiamo definire 3 operatori di scambio P_{12} , P_{13} e P_{23} . Per 3 particelle bosoniche avremmo la funzione d'onda:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_S = A & (|\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle |\varphi_3\rangle + |\varphi_1\rangle |\varphi_3\rangle |\varphi_2\rangle + |\varphi_3\rangle |\varphi_2\rangle |\varphi_1\rangle + \\ & + |\varphi_2\rangle |\varphi_1\rangle |\varphi_3\rangle + |\varphi_3\rangle |\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle). \end{aligned} \quad (\text{G.2.2})$$

Per i fermioni basterebbe antisimmetrizzare $|\psi\rangle$. Se immaginiamo di fare la stessa cosa fatta per (G.2.2), ma con 4, 5, 6... particelle, ci rendiamo immediatamente conto che questo implicherebbe l'avere una funzione d'onda lunghissima e intrattabile matematicamente. Ovviamente, è un problema risolvibile. Facciamo un passo indietro e ragioniamo sulle modalità con cui operiamo. Fin'ora se avessimo voluto scrivere lo stato del sistema avremmo scritto lo stato di ogni particella, lo avremmo composto con tutte le altre e avremmo sommato tutte le possibili combinazioni. Per capirci, un sistema di due particelle che possono essere negli stati $|i_1\rangle$ e $|i_2\rangle$ (diversi tra loro) lo possiamo descrivere con la funzione d'onda:

$$|\psi\rangle_{B,F} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|i_1\rangle |i_2\rangle \pm |i_2\rangle |i_1\rangle). \quad (\text{G.2.3})$$

Questo modo di procedere abbiamo appena finito di dire che non va bene. Allora, al posto di descrivere il sistema con uno stato $|\psi\rangle_{B,F}$ in cui specifichiamo la natura bosonica o fermionica e scriviamo in modo simmetrico o antisimmetrico tutte le possibili combinazioni di composizione degli stati di singola particella, possiamo pensare di descrivere il sistema dicendo semplicemente quante particelle ci siano in uno specifico stato e lasciamo sottintesa la simmetrizzazione o l'antisimmetrizzazione del sistema. Mi spiego meglio, se abbiamo due particelle identiche che possono stare negli stati $|i_1\rangle$ e $|i_2\rangle$ (diversi tra loro) allora il sistema complessivo lo descriviamo dicendo:

$$|n_{i_1} = 1, n_{i_2} = 1\rangle = |1, 1\rangle \quad (\text{G.2.4})$$

in cui intendiamo dire che è presente $n_{i_1} = 1$ particella nello stato $|i_1\rangle$ e $n_{i_2} = 1$ particella nello stato $|i_2\rangle$. I numeri n_i sono detti **numeri di occupazione**.

Per generalizzare il tutto prendiamo un sistema di N particelle con:

$$\mathcal{H}_N = \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_{N \text{ volte}}. \quad (\text{G.2.5})$$

Utilizzando il formalismo dei numeri di occupazione possiamo scrivere in modo sintetico una qualsiasi base per lo spazio $\mathcal{H}_N$:

$$|\{n\}\rangle = |n_0, n_1, \dots, n_N\rangle \quad n_i \in \mathbb{N} \quad (\text{G.2.6})$$

ma con il vincolo per particelle bosoniche:

$$\sum_i n_i = N \quad (\text{G.2.7})$$

e per particelle fermioniche:

$$n_i = 0, 1 \quad (\text{G.2.8})$$

poiché se sono particelle fermioniche ovviamente devono rispettare il principio di Pauli e non possiamo avere più di una particella in un certo stato $|i\rangle$.

In questo formalismo gli stati di singoletto e tripletto li scriviamo:

$$\begin{cases} |1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |1, -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \\ |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2, 0\rangle \\ |1, 1\rangle \\ |0, 2\rangle \\ |1, 1\rangle \end{cases} \quad (\text{G.2.9})$$

in cui notiamo che abbiamo due stati $|1, 1\rangle$, ma uno simmetrico ed uno antisimmetrico. Per ora sorvoliamo sul fatto che non siamo in grado di distinguere la natura bosonica o fermionica di un sistema, lo capiremo meglio quando ripareremo degli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$.

G.3 Spazio di Fock

Quando cerchiamo di fare la seconda quantizzazione, ovvero cerchiamo di passare da una teoria di campo classica ad una teoria di campo quantistica, cerchiamo di avere una descrizione che ammetta sia sistemi con un numero ∞ di particelle sia sistemi con il numero di particelle non fissato. Avere $N \rightarrow \infty$ o N non fissato nella Meccanica Quantistica non relativistica non è permesso¹, per cui lo spazio che avremo nella nuova teoria di campo quantistica non potrà essere lo spazio di Hilbert a cui eravamo abituati. Ricorda che N grande e non fissato era uno dei problemi della MQ analizzati nel capitolo §1.

Il nuovo spazio che avremo nella nostra teoria si chiama **spazio di Fock** e si costruisce partendo dagli spazi di N particelle, bosoniche o fermioniche, e da uno spazio aggiuntivo $\mathcal{H}_0$ che è definito come lo spazio unidimensionale, generato da $|0\rangle$, e rappresenta lo stato di vuoto, ovvero l'assenza di particelle. Abbiamo:

$$\mathcal{H}_{\text{Fock}} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_{1,B/F} \oplus \mathcal{H}_{2,B/F} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{N,B/F} \quad (\text{G.3.1})$$

in cui $\mathcal{H}_{i,B/F}$ sono i sottospazi di i particelle. Come già detto possiamo estendere lo spazio di Fock per $N \rightarrow \infty$ e ottenere:

$$\mathcal{H}_{\text{Fock}} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_{N,B/F}. \quad (\text{G.3.2})$$

Fissata una base per $\mathcal{H}_1$ si può anche fissare la base di $\mathcal{H}_{\text{Fock}}$ utilizzando il formalismo dei numeri di occupazione. Gli elementi di tale base sono i vettori:

$$|\{n\}\rangle \quad \begin{cases} n_i \in \mathbb{N} & \text{bosoni} \\ n_i = 0, 1 & \text{fermioni} \end{cases} \quad (\text{G.3.3})$$

in cui ciascun elemento appartiene ad un solo sottospazio $\mathcal{H}_{i,B/F}$.

¹Mandare $N \rightarrow \infty$ in Meccanica Quantistica fa perdere la separabilità dello spazio.

G.4 Operatori di creazione e distruzione

Abbiamo detto che vogliamo descrivere sistemi in cui il numero di particelle non è fissato, però non abbiamo detto come aggiungere o togliere particelle al sistema. Descriviamo in questa sezione gli operatori di creazione $\hat{a}^\dagger$ e di distruzione $\hat{a}$, che per semplicità scriveremo senza cappelletto. Il formalismo matematico che utilizzeremo sarà identico a quello utilizzato per gli operatori di innalzamento e abbassamento dell'oscillatore armonico della Meccanica Quantistica, ma il significato fisico completamente differente (Puoi vedere le note di Meccanica Quantistica 1 sulla mia pagina personale). Ora, come vedremo, il nome creazione e distruzione sarà descrittivo dell'azione che essi svolgono. Come detto, però, dobbiamo distinguere i sistemi bosonici da quelli fermionici per via dei vincoli che abbiamo sui valori che n_i numero di occupazione può assumere.

Procediamo per step e cominciamo a definire $a_i^\dagger$ come l'**operatore di creazione** e a_i come l'**operatore di distruzione**, che rispettivamente creano e distruggono particelle nello stato i e sono operatori che vivono nello spazio di Fock. Il discorso che faremo sarà già introduttivo per il teorema dello spin-statistica, ma vedremo meglio il discorso in seguito. Immaginiamo di voler creare il sistema con una particella nello stato i_1 ed una nello stato i_2 . Possiamo quindi agire sullo stato di vuoto come:

$$a_{i_1}^\dagger a_{i_2}^\dagger |0\rangle \propto |1, 1\rangle \quad (\text{G.4.1})$$

ma allo stesso tempo come:

$$a_{i_2}^\dagger a_{i_1}^\dagger |0\rangle \propto |1, 1\rangle \quad (\text{G.4.2})$$

in cui il segno di proporzionalità è necessario perché c'è una costante ancora da determinare. Se lo stato finale che otteniamo è sempre $|1, 1\rangle$ allora ci aspettiamo che in qualche modo gli operatori che utilizziamo per crearlo siano proporzionali:

$$a_{i_1}^\dagger a_{i_2}^\dagger = \lambda a_{i_2}^\dagger a_{i_1}^\dagger \quad (\text{G.4.3})$$

con λ costante. Assumiamo che ci siano solamente due possibilità: $\lambda = \pm 1$, che rispecchiano la possibilità di avere stati simmetrici, piuttosto che antisimmetrici rispetto lo scambio delle due particelle, ovvero, bosoni e fermioni. Chiamiamo $i_1 = i$ e $i_2 = j$ per semplicità.

Bosoni Prendiamo $\lambda = +1$ e abbiamo:

$$a_i^\dagger a_j^\dagger = a_j^\dagger a_i^\dagger \quad (\text{G.4.4})$$

il che ci permette di vedere:

$$[a_i^\dagger, a_j^\dagger] = a_i^\dagger a_j^\dagger - a_j^\dagger a_i^\dagger = 0. \quad (\text{G.4.5})$$

con discorsi analoghi abbiamo anche:

$$[a_i, a_j] = 0 \quad (\text{G.4.6})$$

e possiamo imporre, in analogia con quanto succedeva in Meccanica Quantistica quando componevamo due oscillatori armonici:

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}. \quad (\text{G.4.7})$$

Possiamo generalizzare l'azione degli operatori a_i e $a_i^\dagger$ sfruttando i fattori di normalizzazione che avevamo definito nella trattazione dell'oscillatore armonico. Definiamo nel caso generale:

$$a_i^\dagger |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, \dots, n_i + 1, \dots\rangle \quad (\text{G.4.8})$$

$$a_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, \dots, n_i - 1, \dots\rangle. \quad (\text{G.4.9})$$

Per snellire leggermente la trattazione possiamo scrivere al posto del ket con tutti i numeri di occupazione solamente un ket compatto in cui inseriamo solo il numero di occupazione che viene modificato dall'azione dell'operatore; quello che sto dicendo è che le relazioni generiche diventano:

$$a_i^\dagger |n_i\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_i + 1\rangle \quad (\text{G.4.10})$$

$$a_i |n_i\rangle = \sqrt{n_i} |n_i - 1\rangle. \quad (\text{G.4.11})$$

Ovviamente, come per l'oscillatore armonico, vale:

$$a_i |0\rangle = 0. \quad (\text{G.4.12})$$

Ad esempio, partiamo dallo stato $|1, 0, 1\rangle$ e applichiamo l'operatore $a_2^\dagger$, otteniamo:

$$a_2^\dagger |1, 0, 1\rangle = |1, 1, 1\rangle. \quad (\text{G.4.13})$$

Chiudiamo questo paragrafo vedendo come creare un generico stato:

$$|\{n_i\}\rangle = \prod_{i \in \mathbb{N}} \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle. \quad (\text{G.4.14})$$

Possiamo vedere che nel caso bosonico agire sul vuoto prima con $a_i^\dagger$ o con $a_j^\dagger$ non cambia nulla:

$$a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle = a_j^\dagger a_i^\dagger |0\rangle \quad (\text{G.4.15})$$

per via della simmetria e delle regole di commutazione.

Fermioni Analizziamo ora il caso in cui in (G.4.3) abbiamo $\lambda = -1$. Ora abbiamo:

$$a_i^\dagger a_j^\dagger = -a_j^\dagger a_i^\dagger \quad (\text{G.4.16})$$

il che porta a:

$$\{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0 \quad (\text{G.4.17})$$

e anche:

$$\{a_i, a_j\} = 0 \quad , \quad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}. \quad (\text{G.4.18})$$

Anche per particelle fermioniche possiamo definire l'azione degli operatori di creazione e distruzione come sopra, ma ora oltre la condizione:

$$a_i |0\rangle = 0 \quad (\text{G.4.19})$$

abbiamo anche:

$$a_i^\dagger |n_i = 1\rangle = 0 \quad (\text{G.4.20})$$

per via del principio di esclusione di Pauli.

Possiamo scrivere lo stato generico come:

$$|\{n_i\}\rangle = \prod_{i \in \mathbb{N}} (a_i^\dagger)^{n_i} |0\rangle \quad (\text{G.4.21})$$

in cui non abbiamo il fattore di normalizzazione per via del fatto che $n_i = 0, 1$.

Però facciamo attenzione perché non è così banale come agiscono gli operatori $a_i^\dagger$ su stati che non siano $|0\rangle$ o $|n_i = 1\rangle$. Infatti se per un sistema bosonico avevamo (G.4.15), ovvero la simmetria per lo scambio di due operatori $a^\dagger$, ora abbiamo:

$$a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle = a_i^\dagger |n_j = 1\rangle = |n_i = 1, n_j = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|i\rangle |j\rangle - |j\rangle |i\rangle) \quad (\text{G.4.22})$$

e se immaginiamo di invertire l'ordine degli operatori:

$$a_j^\dagger a_i^\dagger |0\rangle = a_j^\dagger |n_i = 1\rangle = |n_j = 1, n_i = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|j\rangle |i\rangle - |i\rangle |j\rangle) \quad (\text{G.4.23})$$

e dunque:

$$a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle = -a_j^\dagger a_i^\dagger |0\rangle \quad (\text{G.4.24})$$

a causa dell'asimmetria e delle regole di anti-commutazione.

Vedi la sezione §G.5 del normal ordering per vedere le relazioni generali per le azioni di a_i e $a_i^\dagger$ nel caso fermionico.

G.5 Normal Ordering

Parliamo ora di quello che va sotto il nome di **normal ordering**, che indichiamo come $N[\cdot] = : \cdot :$ e che serve per riuscire ad attribuire un segno alla nostra base e a capire se siamo in presenza di fermioni o bosoni. L'azione di $N[\cdot]$ serve anche per eliminare gli infiniti che si vengono a creare nella costruzione della teoria di campo (vedi la sezione §7.2.1). Definiamo il normal ordering scegliendo come posizionare gli operatori di creazione e distruzione davanti allo stato su cui stanno agendo. Ovviamente, il problema ce lo poniamo quando abbiamo una produttoria di più di un operatore che agisce su uno stato.

Scegliamo innanzitutto di mettere gli operatori che compaiono nella produttoria in ordine crescente e poi di mettere tutti gli operatori $a_i^\dagger$ a sinistra e tutti gli a_i a destra.

Quando siamo in presenza di bosoni il normal ordering non dà problemi vista l'algebra di commutatori che li governa, ma quando trattiamo fermioni compare un segno meno, per via degli anticommutatori.

Possiamo scrivere ad esempio, nel caso *bosonico*:

$$N[a a^\dagger] = : a a^\dagger : = a^\dagger a \quad (\text{G.5.1})$$

$$N[a^\dagger a a a^\dagger a^\dagger] = : a^\dagger a a a^\dagger a^\dagger : = a^\dagger a^\dagger a^\dagger a a \quad (\text{G.5.2})$$

$$N[a_1 a_2^\dagger a_3] = a_2^\dagger a_1 a_3 \quad (\text{G.5.3})$$

dove in (G.5.3) non conta l'ordine tra a_1 e a_3 poiché essi commutano.

Nel caso *fermionico* invece avremmo in (G.5.3):

$$N[a_1 a_2^\dagger a_3] = -a_2^\dagger a_1 a_3 \quad (\text{G.5.4})$$

in cui abbiamo fatto solo una permutazione che, per via dell'anticommutatore, fa comparire un segno meno.

Il normal ordering serve per capire come agiscono gli operatori di creazione e distruzione su stati che non siano $|0\rangle$ o $|n_i = 1\rangle$ nel caso fermionico. Facciamo un esempio. Consideriamo come stato iniziale $|0, 1, 1\rangle$ e vogliamo agire con a_2 su di esso (le etichette le facciamo partire da 0), siamo sicuri di ottenere:

$$a_2 |0, 1, 1\rangle = |0, 1, 0\rangle ? \quad (\text{G.5.5})$$

Utilizziamo le regole che ci siamo imposti:

$$a_2 |0, 1, 1\rangle = a_2 a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle \quad (\text{G.5.6})$$

$$= -a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger |0\rangle \quad (\text{G.5.7})$$

$$= -a_1^\dagger (1 - a_2^\dagger a_2) |0\rangle \quad (\text{G.5.8})$$

$$= -a_1^\dagger |0\rangle + a_1^\dagger a_2^\dagger a_2 |0\rangle \quad (\text{G.5.9})$$

$$= -a_1^\dagger |0\rangle \quad (\text{G.5.10})$$

$$= -|0, 1, 0\rangle \quad (\text{G.5.11})$$

abbiamo ottenuto un segno di differenza rispetto quello che ci aspettavamo. Un altro esempio è:

$$a_1^\dagger |1, 0, 1\rangle = a_1^\dagger a_0^\dagger a_2^\dagger |0\rangle = a_0^\dagger a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle = -|1, 1, 1\rangle. \quad (\text{G.5.12})$$

Nel caso fermionico, in base a quello visto fin'ora, possiamo scrivere:

$$a_i |n_i\rangle = \pm n_i |n_i - 1\rangle \quad (\text{G.5.13})$$

$$a_i^\dagger |n_i\rangle = \pm (1 - n_i) |n_i + 1\rangle. \quad (\text{G.5.14})$$

G.5.1 Operatore numero di occupazione

Con il formalismo del numero di occupazione n_i ci rappresenta il numero di particelle nello stato $|i\rangle$. C'è un operatore che ci permette di capire, se abbiamo il nostro sistema in un suo generico stato, quante particelle si trovano nello stato di singola particella $|i\rangle$. Definiamo l'operatore:

$$\hat{n}_i \equiv a_i^\dagger a_i \quad (\text{G.5.15})$$

che chiamiamo **operatore numero**.

Verifichiamo che effettivamente $\hat{n}_i$ conti le particelle. Per i *bosoni* è immediato:

$$\hat{n}_i |n_i\rangle = a_i^\dagger a_i |n_i\rangle = a_i^\dagger \sqrt{n_i} |n_i - 1\rangle = n_i |n_i\rangle \quad (\text{G.5.16})$$

e vediamo che l'autovalore di $\hat{n}_i$ è proprio il numero di particelle n_i . Per il caso *fermionico* abbiamo:

$$\hat{n}_i |n_i\rangle = a_i^\dagger a_i |n_i\rangle = a_i^\dagger (\pm n_i |n_i - 1\rangle) \quad (\text{G.5.17})$$

$$= \pm n_i a_i^\dagger |n_i - 1\rangle = \pm n_i [\pm (1 - (n_i - 1)) |n_i\rangle] \quad (\text{G.5.18})$$

$$= \pm n_i [\pm (1 - n_i + 1)] |n_i\rangle = n_i (2 - n_i) |n_i\rangle \quad (\text{G.5.19})$$

$$= (2n_i - n_i^2) |n_i\rangle \quad (\text{G.5.20})$$

$$\text{vale } n_i^2 = n_i \quad (\text{G.5.21})$$

$$= (2n_i - n_i) |n_i\rangle \quad (\text{G.5.22})$$

$$= n_i |n_i\rangle. \quad (\text{G.5.23})$$

Notiamo che $n_i^2 = n_i$ solo perché nel caso fermionico abbiamo che $n_i = 0, 1$.

Possiamo anche definire l'**operatore numero** che conta, non le particelle in un singolo stato, ma le particelle totali nel sistema. In questo caso è presente una somma su tutti i possibili stati i . L'operatore è:

$$\hat{N} |\{n_i\}\rangle = \sum_i \hat{n}_i |\{n_i\}\rangle = \sum_i n_i |\{n_i\}\rangle = N |\{n_i\}\rangle \quad (\text{G.5.24})$$

G.6 Operatore di campo quantizzato

Vediamo in questa sezione la potenza che ha il formalismo dei numeri di occupazione e lo spazio di Fock. Infatti, lo spazio di Fock permette di "riorganizzare" lo spazio di Hilbert e di trattare sistemi di particelle identiche con un nuovo formalismo, trattando la funzione d'onda, nel senso della MQ, come un campo.

Facciamo attenzione che siamo ancora in Meccanica Quantistica non relativistica anche se stiamo facendo cose che ci sembrano familiari a quelle che facciamo in Teoria Quantistica dei Campi.

Abbiamo visto che per particella singola scriviamo:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{orb}} \otimes \mathcal{H}_s \quad (\text{G.6.1})$$

e tra tutte le basi per lo spazio di singola particella la più naturale è quella composta dagli autovalori simultanei della posizione $\vec{x}$ e della terza componente dello spin S_3 , cioè i vettori $|\vec{x}, \sigma\rangle$, e per cui valgono le equazioni agli autovalori:

$$\hat{x} |\vec{x}, \sigma\rangle = \vec{x} |\vec{x}, \sigma\rangle \quad , \quad \hat{\sigma} |\vec{x}, \sigma\rangle = \hbar \sigma |\vec{x}, \sigma\rangle . \quad (\text{G.6.2})$$

Purtroppo però non è una base numerabile e occorre fare un'estensione al continuo. Per brevità di notazione² possiamo scrivere:

$$|\vec{x}_1 \sigma_1, \dots, \vec{x}_N \sigma_N\rangle = |\{\vec{x}, \sigma\}\rangle \quad (\text{G.6.4})$$

che rappresenta una base per lo spazio $\mathcal{H}_N$ di N particelle bosoniche o fermioniche.

Possiamo scrivere una base sia per lo spazio simmetrico che antisimmetrico di bosoni e fermioni identici:

$$|\{\vec{x}, \sigma\}\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P P |\vec{x}_1 \sigma_1, \dots, \vec{x}_N \sigma_N\rangle \quad (\text{G.6.5})$$

$$|\{\vec{x}, \sigma\}\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^P P |\vec{x}_1 \sigma_1, \dots, \vec{x}_N \sigma_N\rangle \quad (\text{G.6.6})$$

²Nota che l'ordine dei prodotti diretti è solo convenzione e potremmo tranquillamente scrivere:

$$|\vec{x}_1 \sigma_1, \dots, \vec{x}_N \sigma_N\rangle = |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\rangle |\sigma_1, \dots, \sigma_N\rangle = |\{\vec{x}\}\rangle |\{\sigma\}\rangle . \quad (\text{G.6.3})$$

in cui la somma è estesa a tutti gli operatori di scambio dello spazio $\mathcal{H}_N$ che permutano gli stati delle particelle e il termine $(-1)^P$ indica che il termine della sommatoria va preso con il segno positivo o negativo a seconda che il numero di scambi sia pari o dispari.

Prendiamo il caso di particelle bosoniche. Fissata la base possiamo creare un'operatore $\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x})$ che crei una particella nello stato $|\{\vec{x}, \sigma\}\rangle$, proprio come nello spazio discreto faceva $\hat{a}_i$ per lo stato $|\{i\}\rangle$. In particolare, quando $\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x})$ agisce sullo stato di vuoto vorremmo:

$$\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x}) |0\rangle = |\vec{x}, \sigma\rangle. \quad (\text{G.6.7})$$

Per dare una rappresentazione di $\hat{\psi}^\dagger$ possiamo utilizzare la relazione di completezza dello spazio nella relazione (G.6.7):

$$\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x}) |0\rangle = \sum_{i,\rho} |i, \rho\rangle \langle i, \rho | \vec{x}, \sigma\rangle \quad (\text{G.6.8})$$

in cui l'indice i indica gli autostati del sistema di particella singola, per via del fatto che possiamo separare i prodotti diretti:

$$\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x}) |0\rangle = \sum_{i,\rho} |i, \rho\rangle \langle i | \vec{x}\rangle \langle \rho | \sigma\rangle \quad (\text{G.6.9})$$

$$= \sum_{i,\rho} |i, \rho\rangle \langle i | \vec{x}\rangle \delta_{\rho\sigma} \quad (\text{G.6.10})$$

$$= \sum_{i,\rho} \langle i | \vec{x}\rangle |i, \sigma\rangle \quad (\text{G.6.11})$$

$$= \sum_{i,\rho} \langle i | \vec{x}\rangle a_{i\sigma}^\dagger |0\rangle \quad (\text{G.6.12})$$

individuiamo dunque:

$$\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x}) = \sum_{i,\rho} \langle i | \vec{x}\rangle a_{i\sigma}^\dagger \quad (\text{G.6.13})$$

in cui possiamo identificare, come abbiamo imparato dalla Meccanica Quantistica, il braket $\langle i | \vec{x}\rangle$ con la funzione d'onda (di singola particella) $\psi_i^\dagger(\vec{x})$ (ora la $\dagger$ indica il complesso coniugato) nel senso della MQ non relativistica.

Nota che se vogliamo creare una particella con una certa terza componente di spin σ in un certo punto $\vec{x}$, abbiamo utilizzato gli operatori di creazione $\hat{a}^\dagger$, che appunto creano una particella il cui stato è autostato dell'impulso. Per creare uno stato con posizione $\vec{x}$ fissata abbiamo bisogno di infiniti autostati dell'impulso³

³Ricorda che spazio delle coordinate e degli impulsi sono collegati tramite una trasformata di Fourier, per cui passare da uno spazio all'altro implica un integrale su una variabile continua.

Possiamo vedere l'hermitiano coniugato di (G.6.13):

$$\hat{\psi}_\sigma(\vec{x}) = \sum_{i,\rho} \langle \vec{x}|i\rangle a_{i\sigma}. \quad (\text{G.6.14})$$

Notiamo subito che vale:

$$\hat{\psi}_\sigma(\vec{x}) |0\rangle = 0. \quad (\text{G.6.15})$$

Abbiamo quindi trovato che gli operatori (G.6.13) e (G.6.14) sono una combinazione lineare degli operatori di creazione e distruzione pesati tramite le funzioni d'onda $\psi_i^\dagger(\vec{x}) = \langle i|\vec{x}\rangle$ e $\psi_i(\vec{x}) = \langle \vec{x}|i\rangle$ nello spazio delle configurazioni. Gli operatori (G.6.13) e (G.6.14) creano e distruggono particelle di spin σ nel punto $\vec{x}$ dello spazio delle configurazioni.

Uno stato generico lo costruiamo come:

$$\hat{\psi}_{\sigma_1}^\dagger(\vec{x}_1) \hat{\psi}_{\sigma_2}^\dagger(\vec{x}_2) \dots \hat{\psi}_{\sigma_N}^\dagger(\vec{x}_N) |0\rangle = |\vec{x}_1\sigma_1, \vec{x}_2\sigma_2, \dots, \vec{x}_N\sigma_N\rangle. \quad (\text{G.6.16})$$

Notiamo un'ultima cosa, che ritroveremo anche nella Teoria Quantistica dei Campi capitolo §7, ossia lo studio dell'algebra degli operatori (G.6.13) e (G.6.14). Vediamo:

$$[\hat{\psi}_\sigma(\vec{x}), \hat{\psi}_\rho^\dagger(\vec{y})] = \sum_{i,j} \langle \vec{x}|i\rangle \langle j|\vec{y}\rangle [a_{i\sigma}, a_{j\rho}^\dagger] \quad (\text{G.6.17})$$

$$= \sum_{i,j} \langle \vec{x}|i\rangle \langle j|\vec{y}\rangle \delta_{ij} \delta_{\sigma\rho} \quad (\text{G.6.18})$$

$$= \sum_i \langle \vec{x}|i\rangle \langle i|\vec{y}\rangle \delta_{\sigma\rho} \quad (\text{G.6.19})$$

$$= \delta_{\sigma\rho} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{G.6.20})$$

Valgono anche:

$$[\hat{\psi}_\sigma(\vec{x}), \hat{\psi}_\rho(\vec{y})] = 0 \iff [a_{i\sigma}, a_{j\rho}] = 0 \quad (\text{G.6.21})$$

$$[\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x}), \hat{\psi}_\rho^\dagger(\vec{y})] = 0 \iff [a_{i\sigma}^\dagger, a_{j\rho}^\dagger] = 0. \quad (\text{G.6.22})$$

Noi abbiamo visto il caso bosonico, ma il caso di particelle fermioniche basta semplicemente sostituire i commutatori con gli anticommutatori.

Quello che abbiamo visto è il modo in cui si tratta la Meccanica Quantistica non relativistica per un sistema con molte particelle bosoniche (o fermioniche). La generalizzazione del formalismo che abbiamo sviluppato (vedi Srednicki Physical law should have mathematical beauty.Srednicki:2007qs nel capitolo 1 come ne parla) non può essere fatta se non passando ad una teoria di campo, che sarà proprio quello che faremo nel capitolo §7, a cui

rimando per discorsi dettagliati riguardo la Teoria Quantistica dei Campi. Passare ad una teoria di campo ci permette di trattare sistemi a molte particelle, il cui numero non per forza è fissato, ma ci costringe non solo ad abbandonare il concetto di particella singola, visto che gli oggetti base della teoria sono campi formati da una somma su tutti i possibili stati, ma anche il concetto base di funzione d'onda, che comunque continua a rimanerci accanto comparando dentro la definizione di operatore di campo quantizzato. Nota che aver il campo, funzione di una variabile continua, ci porta ad avere sistemi con ∞ gradi di libertà.

Appendice H

Discorsi sulla costruzione dell'operatore di campo di Klein-Gordon

H.1 Riferimenti dei libri

Visto che mi è sembrato un po' oscuro il modo in cui ci siamo ricavati l'espressione dell'operatore di campo $\hat{\phi}$, allora ho deciso di raccogliere le varie fonti per chiarirmi un po' le idee:

- Dal capitolo 2.3 di Peskin e Schroeder *Physical law should have mathematical beauty*. Peskin:1995ev e Tong *Physical law should have mathematical beauty*. Tong: vediamo che se espandiamo il campo $\phi(x)$ di Klein-Gordon come (facciamo una trasformazione di Fourier):

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{p}, t) \quad (\text{H.1.1})$$

possiamo riscrivere l'equazione di Klein-Gordon come:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\vec{p}|^2 + m^2) \right] \phi(\vec{p}, t) = 0 \quad (\text{H.1.2})$$

e non è difficile accorgersi che questa è l'equazione differenziale di un'oscillatore armonico con pulsazione:

$$\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (\text{H.1.3})$$

Dal corso di MQ1 noi sappiamo bene come risolvere il problema dell'oscillatore armonico (se vuoi ripassa il comportamento degli operatori di innalzamento ed abbassamento nell'appendice G) e sappiamo scrivere posizione ed impulso in termini di $a^\dagger$ e a :

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a + a^\dagger) \quad , \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (a - a^\dagger). \quad (\text{H.1.4})$$

Ora, stiamo andando nella teoria di campo e abbiamo $q^i \rightarrow \phi(x)$ e $p_i \rightarrow \Pi(x)$, per cui in analogia con quanto già noto scriviamo:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a + a^\dagger) \quad , \quad \Pi = -i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (a - a^\dagger). \quad (\text{H.1.5})$$

Possiamo scrivere l'espansione il campo di Klein-Gordon usando lo stesso ragionamento, ma trattando ogni modo di oscillazione, ad impulso $\vec{p}$ fissato, come un'oscillatore armonico indipendente con il proprio a e $a^\dagger$:

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \quad (\text{H.1.6})$$

e di conseguenza:

$$\Pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (a_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}). \quad (\text{H.1.7})$$

In questo modo anche i discorsi sui fattori di normalizzazione si risolvono in automatico.

Questo discorso è anche collegato a quanto detto per la costruzione del campo quantizzato nell'Appendice G. Avevamo trovato che l'operatore di campo era:

$$\hat{\psi}_\sigma(\vec{x}) = \sum_{i,\sigma} \langle \vec{x}|i\rangle a_{i\sigma} \quad , \quad \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\vec{x}) = \sum_{i,\sigma} \langle i|\vec{x}\rangle a_{i\sigma}^\dagger \quad (\text{H.1.8})$$

in cui compariva la funzione d'onda nel senso della Meccanica Quantistica che pesava gli operatori di creazione e distruzione.

- Dal capitolo 11 di Lancaster e Blundell *Physical law should have mathematical beauty*. Lancaster:2014pza: fanno i primi step, in cui costruiscono $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$ e le relazioni di commutazione esattamente come facciamo noi nel capitolo §7. Poi, dopo aver elevato ad operatori $\hat{\phi}$ e $\hat{\Pi}$ si convincono che il modo più conveniente per capire come essi possano agire sullo stato $|\{n_i\}\rangle$ di numeri di occupazione sia quello di scriverli in termini di operatori di creazione e distruzione. Quello che fanno è ricordarsi i risultati che hanno ottenuto nel loro capitolo §2 in cui studiano gli oscillatori armonici quantistici e le loro composizioni. In particolare ciò che ricordano è come scrivono l'operatore posizione in termini di a e $a^\dagger$, ossia:

$$\hat{x}_j = \left(\frac{\hbar}{m}\right)^{1/2} \sum_k \frac{1}{(2\omega_k N)^{1/2}} (\hat{a}_k e^{ik_j a} + \hat{a}_k^\dagger e^{-ik_j a}). \quad (\text{H.1.9})$$

In analogia a ciò, facendo i cambi $\vec{k} \rightarrow \vec{p}$, $\omega_k \rightarrow E_p$ e $\hat{x} \rightarrow \hat{\phi}$, scrivono l'operatore di campo indipendente dal tempo:

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \quad (\text{H.1.10})$$

in cui non fanno molti discorsi sui fattori di normalizzazione, ma ne parleremo meglio noi in seguito. Nel capitolo 11 fanno dei discorsi molto simili a quelli che ho riportato nel capitolo §7. Anche per loro vale:

$$E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (\text{H.1.11})$$

- Dal capitolo 3 di Srednicki Physical law should have mathematical beauty. Srednicki:2007qs: lui fa in una pagina un paio di osservazioni, basati sui risultati che aveva ottenuto per l'hamiltoniana della MQ non relativistica nel tentativo di relativizzarla (nel suo capitolo 1), e arriva a scrivere un'espressione, relativistica, per H . Poi ricomincia tutto da capo e mostra meglio l'invarianza di Lorentz di quello che crea.

Ricomincia da capo, prende un campo classico scalare e reale, si scrive una lagrangiana Lorentz invariante, calcola l'azione e la minimizza trovando l'equazione di Klein-Gordon. Nota che la generica soluzione di KG è l'onda piana di forma:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} \pm i\omega t} \quad (\text{H.1.12})$$

con $\vec{k}$ vettore d'onda arbitrario e ω della forma:

$$\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (\text{H.1.13})$$

La generica soluzione di Klein-Gordon la scrive di conseguenza come:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{f(k)} \left[a(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} + b(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega t} \right] \quad (\text{H.1.14})$$

con $a(\vec{k})$ e $b(\vec{k})$ funzioni arbitrarie e $f(\vec{k})$ inserita per futura convenienza. Siamo ancora in una teoria di campo classica, ma se interpretassimo $\phi(\vec{x}, t)$ come una funzione d'onda (che non è) potremmo vedere in $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega t}$ il contributo delle energie negative, poiché sappiamo che la soluzione dell'equazione di Schrodinger libera è $\phi \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - iE(\vec{p})t}$ in cui $E(\vec{p})$ è l'energia della particella, se prendiamo $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} + iE(\vec{p})t}$ allora abbiamo un segno meno da associare all'energia.

Srednicki fa tutti i discorsi utilizzando campi classici reali (reale che vuol dire che $\phi(\vec{x}, t)$ assegna un numero reale ad ogni punto dello spazio tempo) e scalari (che significa che per due sistemi di riferimento

inerziali diversi vale $\phi(x) = \bar{\phi}(\bar{x})$, ovvero, che le equazioni del moto in SRI diversi sono uguali). Per avere un campo reale bisogna imporre $\phi(x) = \phi^*(x)$, il che ci porta a:

$$\phi^*(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{f(k)} \left[a^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega t} + b^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \right] \quad (\text{H.1.15})$$

$$= \int \frac{d^3k}{f(k)} \left[a^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega t} + b^*(-\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \right] \quad (\text{H.1.16})$$

in cui nella seconda riga cambiamo variabile d'integrazione del secondo termine $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$. Comparando le espressioni di ϕ e ϕ^* e imponendo l'uguaglianza si arriva a:

$$a(\vec{k}) = b^*(-\vec{k}) \quad (\text{H.1.17})$$

che permette di scrivere facilmente:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{f(k)} \left[a(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} + a^*(-\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega t} \right] \quad (\text{H.1.18})$$

$$= \int \frac{d^3k}{f(k)} \left[a(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} + a^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega t} \right] \quad (\text{H.1.19})$$

$$= \int \frac{d^3k}{f(k)} \left[a(\vec{k}) e^{ik^\mu x_\mu} + a^*(\vec{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} \right] \quad (\text{H.1.20})$$

con k^μ quadrivettore d'onda e il prodotto¹:

$$k^\mu x_\mu = -\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (\text{H.1.21})$$

che è Lorentz invariante. A questo punto passa a parlare della normalizzazione $f(\vec{k})$ e la fissa in modo che la misura di integrazione sia Lorentz invariante. Il modo in cui Srednicki lo fa è prendendo (come facciamo noi nel capitolo §7) $d^4k \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0)$ che abbiamo dimostrato valere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \delta(k^2 + m^2) \theta(k^0) = \frac{1}{2\omega}. \quad (\text{H.1.22})$$

Per questo motivo sceglie $f(k^\mu) = (2\pi)^3 2\omega$ e quindi arriva a:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[a(\vec{k}) e^{ik^\mu x_\mu} + a^*(\vec{k}) e^{-ik^\mu x_\mu} \right]. \quad (\text{H.1.23})$$

Però, arrivato a questo punto si stanca della teoria classica ed eleva i campi al ruolo di operatore e definisce le regole di commutazione come le abbiamo già viste. Quando impone i commutatori tra i campi e i momenti coniugati vede anche le regole di commutazione di $a(\vec{k})$ e il suo complesso coniugato, che ora è diventato l'hermitiano, ossia $a^\dagger(\vec{k})$. Nel capitolo 4 comincia a parlare del teorema di spin-statistica, ma lasciamolo per il futuro.

¹Nota che Srednicki utilizza la metrica Minkowskiana con i segni opposti a quelli usati da noi.

H.2 Normalizzazione stati a tri-impulso fissato

In questa sezione parleremo della normalizzazione degli stati $|\vec{k}\rangle$ a tri-impulso fissato; prima verificheremo che siano correttamente normalizzati e solo successivamente vedremo che non sono Lorentz invarianti.

Se partiamo dalla conoscenza di:

$$|\vec{k}\rangle = \hat{a}_k^\dagger |0\rangle \quad , \quad \langle \vec{k}| = \langle 0| \hat{a}_k \quad (\text{H.2.1})$$

e una corretta normalizzazione dello stato di vuoto:

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad (\text{H.2.2})$$

allora, possiamo verificare:

$$\langle \vec{k}' | \vec{k} \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{k'} \hat{a}_k^\dagger | 0 \rangle \quad (\text{H.2.3})$$

$$= \langle 0 | \left([\hat{a}_{k'}, \hat{a}_k^\dagger] + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \right) | 0 \rangle \quad (\text{H.2.4})$$

$$= \langle 0 | [\hat{a}_{k'}, \hat{a}_k^\dagger] | 0 \rangle \quad (\text{H.2.5})$$

$$= \langle 0 | \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') | 0 \rangle \quad (\text{H.2.6})$$

$$= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{H.2.7})$$

come volevamo.²

Parliamo ora del fatto che:

$$\langle \vec{k}' | \vec{k} \rangle = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{H.2.8})$$

non sia Lorentz invariante. Se facciamo, ad esempio, un boost nella direzione 3 abbiamo:

$$k = \begin{pmatrix} E_k \\ k_3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad k' = \begin{pmatrix} E_{k'} \\ k'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k \\ k_3 \end{pmatrix} \quad (\text{H.2.9})$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma E_k + \beta\gamma k_3 \\ \beta\gamma E_k + \gamma k_3 \end{pmatrix} \quad (\text{H.2.10})$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(E_k + \beta k_3) \\ \gamma(\beta E_k + k_3) \end{pmatrix}. \quad (\text{H.2.11})$$

²La norma di $|\vec{k}\rangle$ è positiva poiché il commutatore è stato definito con il segno positivo.

Quindi la misura di integrazione Lorentz invariante dovrà essere normalizzata in modo tale che:

$$\delta^3(\vec{k} - \vec{p})d^3k = \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}')d^3k' \quad (\text{H.2.12})$$

$$\delta^3(\vec{k} - \vec{p}) = \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}') \frac{d^3k'}{d^3k} \quad (\text{H.2.13})$$

$$\delta^3(\vec{k} - \vec{p}) = \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}') \gamma \left(\beta \frac{dE_k}{dk_3} + 1 \right) \quad (\text{H.2.14})$$

utilizzando:

$$E_k^2 - k_3^2 = m^2 \implies E_k = \sqrt{m^2 + k_3^2} \quad (\text{H.2.15})$$

$$\implies \frac{dE_k}{dk_3} = \frac{1}{2E_k} 2k_3 = \frac{k_3}{E_k} \quad (\text{H.2.16})$$

otteniamo:

$$\delta^3(\vec{k} - \vec{p}) = \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}') \gamma \left(\beta \frac{k_3}{E_k} + 1 \right) \quad (\text{H.2.17})$$

$$= \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}') \frac{\gamma}{E_k} \underbrace{(E_k + \beta k_3)}_{E'_k} \quad (\text{H.2.18})$$

$$= \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}') \frac{E'_k}{E_k} \quad (\text{H.2.19})$$

quindi, la normalizzazione Lorentz invariante degli stati a tri-impulso fissato deve includere un fattore proporzionale all'energia in modo che:

$$\langle k|p \rangle = \delta^3(\vec{k} - \vec{p})E_k = \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}')E'_k \quad (\text{H.2.20})$$

proprio come abbiamo trovato nel capitolo §7.

Appendice I

Rappresentazione di interazione

Ricordiamo in questa appendice alcune cose riguardo la rappresentazione di interazione. Questo tipo di interazione è la più comoda da utilizzare in Teoria Quantistica dei Campi e potrà essere un po' veloce su alcuni punti riguardo le rappresentazioni di Heisenberg e Schrodinger, ma per quello rivedi gli appunti di MQ1. Puoi seguire per questa appendice il capitolo 18 del Lancaster e Blundell *Physical law should have mathematical beauty*. Lancaster:2014pza.

Come ben sappiamo Finora in Meccanica Quantistica possiamo avere una formulazione con stati dipendenti dal tempo ed operatori indipendenti dal tempo (rappresentazione di Schrödinger) o una con stati indipendenti dal tempo e operatori dipendenti dal tempo (rappresentazione di Heisenberg). Sappiamo anche che è disponibile una terza via, chiamata rappresentazione dell'interazione, in cui sia gli stati che gli operatori hanno una certa dipendenza dal tempo.

Come detto sopra, prendiamo l'hamiltoniana divisa in due parti $H = H_0 + H'$. La parte libera sarà generalmente indipendente dal tempo e può essere facilmente risolta. Imponiamo che gli operatori nella rappresentazione di interazione evolvono nel tempo (secondo Heisenberg) attraverso la parte libera dell'hamiltoniana:

$$\hat{O}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{O} e^{-i\hat{H}_0 t} \quad (\text{I.0.1})$$

e avremo dunque un'equazione del moto di tipo Heisenberg:

$$i \frac{d\hat{O}_I}{dt} = [\hat{O}_I, \hat{H}_0]. \quad (\text{I.0.2})$$

Però una volta stabilita la dipendenza temporale degli operatori, possiamo utilizzare un generico elemento di matrice per vedere come evolvono gli stati. Sfruttiamo il fatto che i valori medi rimangono uguali al variare della

rappresentazione:

$${}_S \langle \phi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle_S \quad (\text{I.0.3})$$

$$= \langle \psi_I(t) | \hat{O}_I(t) | \psi_I(t) \rangle \quad (\text{I.0.4})$$

$$= \langle \psi_I(t) | e^{i\hat{H}_0 t} \hat{O} e^{-i\hat{H}_0 t} | \psi_I(t) \rangle \quad (\text{I.0.5})$$

e da quello scritto sopra vediamo bene che:

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi_I(t)\rangle \implies |\psi_I(t)\rangle = e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_S \quad (\text{I.0.6})$$

che possiamo derivarla nel tempo:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} [e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_S] \quad (\text{I.0.7})$$

$$= -H_0 e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_S + e^{i\hat{H}_0 t} \underbrace{i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_S}_{\hat{H} |\psi(t)\rangle_S} \quad (\text{I.0.8})$$

$$= -H_0 e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_S + e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H} |\psi(t)\rangle_S \quad (\text{I.0.9})$$

$$= -H_0 e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_S + e^{i\hat{H}_0 t} (\hat{H}_0 + \hat{H}') |\psi(t)\rangle_S \quad (\text{I.0.10})$$

$$= e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' |\psi(t)\rangle_S \quad (\text{I.0.11})$$

$$= e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi_I(t)\rangle. \quad (\text{I.0.12})$$

Dunque, vediamo che mentre gli operatori, nella rappresentazione di interazione, evolvono come scritto in (I.0.1) e (I.0.2), gli stati evolvono alla Schrodinger con H' :

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = \hat{H}_I |\psi_I(t)\rangle \quad (\text{I.0.13})$$

in cui $\hat{H}_I$ è l'hamiltoniana di interazione, che essendo un'operatore anch'essa, evolve secondo Heisenberg:

$$\hat{H}_I = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' e^{-i\hat{H}_0 t}. \quad (\text{I.0.14})$$

Forse è passata in secondo piano, ma abbiamo detto che tutte le descrizioni che diamo sono equivalenti, il che è molto importante, poiché la Fisica, chiaramente, non deve dipendere da come noi scriviamo gli oggetti. Ciò lo possiamo facilmente verificare calcolando un generico elemento di matrice di un qualsiasi operatore:

$$\langle \hat{F} \rangle_\psi = {}_S \langle \psi(t) | \hat{F} | \psi(t) \rangle_S \quad (\text{I.0.15})$$

$$= \langle \psi(0) | \hat{U}^\dagger(t, 0) \hat{F} \hat{U}(t, 0) | \psi(0) \rangle \quad (\text{I.0.16})$$

$$= \langle \psi(0) | e^{i\hat{H}t} \hat{F} e^{-i\hat{H}t} | \psi(0) \rangle \quad (\text{I.0.17})$$

$$= \langle \psi(0) | e^{i\hat{H}'t} e^{i\hat{H}_0 t} \hat{F} e^{-i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H}'t} | \psi(0) \rangle \quad (\text{I.0.18})$$

in cui, ovviamente tutte le uguaglianze sono valide e i vari termini sono equivalenti, ma in particolare individuiamo in (I.0.15) la rappresentazione di Schrodinger, in (I.0.17) la rappresentazione di Heisenberg e in (I.0.18), se assegnamo gli esponenziali correttamente, la rappresentazione di interazione.

Notiamo che in particolare tutte le rappresentazioni coincidono a $t = 0$, poiché:

$$e^{i\hat{H}t}\Big|_{t=0} = \mathbb{1} \quad \Longrightarrow \quad \hat{O}_I = \hat{O} \quad , \quad \hat{H}_I = \hat{H}' \quad , \quad |\psi_I(0)\rangle = |\psi(0)\rangle_S . \quad (\text{I.0.19})$$

il motivo per cui la rappresentazione di interazione è importante lo abbiamo spiegato quando abbiamo definito la matrice di scattering S .

Appendice J

Indice file aggiuntivo con i conti

Riporto un rapido indice dei conti che puoi trovare nel file dei conti aggiuntivi.

• Dimostrazione algebra $SO(1, 3)$ con rappresentazione differenziale .	1
• Dimostrazione algebra $SU(2) \otimes SU(2)$	3
• Dimostrazione generatori J^i e K^i a partire dagli $M^{\mu\nu}$	5
• Momenti angolari e boost sotto trasformazioni di parità e inversione temporale	7
• Conti proprietà di trasformazione spinori L ed R	9
• Conti corrente di Noether caso generico e per trasformazione di coordinate	10
• Dimostrazione che ΔS è equivalente a δS a meno di un termine di bordo	12
• Dimostrazione espressione elicità	13
• Dimostrazione teorema di Noether	15
• Espressione matrici σ^{0i} e σ^{ij}	16
• Dimostrazione (+ convenzioni) espressione matrice bidimensionale per $S(\Lambda)$	17
• Dimostrazione $\not{p}\not{p} = pp$	19
• Conti causalità propagatore scalare	20

Appendice K

Elenco di cose da dover ripetere

Raccolgo in questo capitolo una sorta di indice allungato in cui inserisco vari punti che mi servono per riuscire a ripetere in vista dell'esame senza dover leggere continuamente gli appunti.

1 - Introduzione

È una parte introduttiva e discorsiva. Puoi iniziare parlando dei problemi della Meccanica Quantistica e dei motivi per cui si vuole costruire una nuova teoria. Puoi provare a relativizzare l'equazione di Schrodinger, ma spiega il perché fallisci quasi subito.

Potresti parlare anche del ruolo del tempo, della posizione e cosa diventano nella QFT.

L'idea del mare di Dirac la abbandonala per il momento e parlane insieme al concetto di antiparticella nel capitolo §7.

2 - Richiami Relatività Speciale

È un capitolo di ripasso in realtà, quindi ricorda gli assiomi della Relatività Speciale, la proprietà della metrica che discende dall'invarianza della distanza spazio-temporale (trova la proprietà e poi verifica che un intervallo rimane uguale in due sistemi di riferimento diversi), il fatto che la derivata vari come le coordinate, e come trasformano i vettori controvarianti e covarianti.

Convieni anche ricordare cosa succede moltiplicando tensori simmetrici e antisimmetrici.

3 - Gemme di teoria dei gruppi

C'è una prima parte molto generica sulla teoria dei gruppi, che puoi ripetere molto velocemente, giusto per rimanere allenato. In particolare parla di:

- Perché ci interessa la teoria dei gruppi e quali sono le differenze tra simmetrie continue e discrete.

- Cos'è un gruppo (visione intuitiva e matematica)? Definizione rappresentazioni, in particolare la differenza tra riducibile e irriducibile, e la rappresentazione complessa coniugata.
- Definizione gruppo di Lie. Gruppo continuo e connesso.
- Cosa sono i generatori di un gruppo. Cos'è la dimensione di un gruppo. Le costanti di struttura, le regole di commutazione e l'algebra di Lie. Cosa serve la formula di Baker-Campbell-Hausdorff.
- Cos'è il rango di un gruppo e cosa sono gli operatori di Casimir.
- Definizioni di gruppo compatto, sottogruppo e sottoalgebra. Definizione di gruppo semplice, semi-semplice e perché ci interessano.
- Rappresentazioni unitarie di gruppi compatti.

Dopo la prima parte di definizioni facciamo qualche esempio di gruppo rilevante in fisica. Non serve andare troppo a fondo, ma sono necessarie alcune osservazioni per entrare meglio nella materia e per poterle utilizzare con più tranquillità con il gruppo di Lorentz e di Poincaré. Devi ripassare:

- Definizione del gruppo $U(1)$ e due rappresentazioni che ne puoi dare.
- Definizione del gruppo $SO(n)$ e perché ci interessa più di $O(n)$. Puoi determinare un generatore di $SO(3)$, analizzare l'algebra e dire qualcosa sui generatori. Puoi anche mostrare la proprietà di ortogonalità delle rotazioni in 3 dimensioni.

Se vuoi puoi scrivere la generalizzazione dell'algebra di $SU(n)$ e dei suoi generatori (oppure questa cosa la puoi notare con il gruppo di Lorentz).

- Definizione del gruppo $SU(2)$, determinazione dei generatori infinitesimi del gruppo e parla dell'isomorfismo che c'è tra $SU(2)$ ed $SO(3)$, facendo cenni all'utilizzo dei quaternioni, ma segui la strada classica per vedere che le rotazioni $SO(3)$ sono rappresentabili come matrici 2×2 .
- Dai la definizione astratta di algebra e gruppo di Lie per arrivare a dire che cos'è il gruppo di ricoprimento. Cosa si fa effettivamente nella pratica per determinare il gruppo di ricoprimento? Cosa sono le etichette fisiche?

A questo punto puoi passare a parlare del gruppo di Lorentz.

- Quanti elementi indipendenti puoi identificare nelle matrici Λ ? Distingui le diverse parti del gruppo di Lorentz.

- Quali sono le trasformazioni che fanno parte del gruppo di Lorentz? (potresti provare a ricavare le due rappresentazioni dei boost, con la rapidità e senza).
- Ricava una rappresentazione matriciale dei generatori del gruppo di Lorentz. Dai una rappresentazione infinita e spiega quando puoi separarle. Ad una prima ripetizione puoi dimostrare l'algebra si $SO(1,3)$.
- Rappresenta i generatori in termini di momenti angolari e boost. Definisci l'algebra e scrivi un generico elemento di $SO(1,3)$. Quali sono gli operatori di Casimir del gruppo di Lorentz?
- Fai vedere come si fattorizza l'algebra di $SO(1,3)$ in due algebre di $SU(2)$. Puoi fare un discorso sui gruppi di ricoprimento (due parole su $SL(2, \mathbb{C})$). Parla delle etichette degli stati fisici e delle diverse rappresentazioni che possiamo dare del gruppo di Lorentz.

Dopo il gruppo di Lorentz, ovviamente c'è il gruppo di Poincaré:

- Dimmi cos'è il gruppo di Poincaré, quali sono i suoi generatori e la sua algebra. Quali sono gli operatori di Casimir del gruppo di Poincaré? Quale interpretazione ne possiamo dare?

4 - Campi locali

Dimmi perché vogliamo una teoria locale, di che tipo sono le lagrangiane che scriviamo e come definiamo un campo locale.

Dopo aver visto la trasformazione generica di una funzione f , dimmi come si comportano i campi scalari sotto trasformazioni di traslazione e di Lorentz. Fammi vedere perché possiamo dire che $\partial_\mu \phi$ è un campo vettoriale. Parla un poi di come vediamo degli invarianti per i campi spinoriali.

Nota. Per il campo spinoriale mima i conti delle proprietà di Λ_L e Λ_R , la parte importante sono gli spinori e come essi portino a costruire spinori quadri-dimensionali. Parla inoltre di come trasformiamo gli invarianti con $\psi_{L,R}$ in invarianti con ψ .

$$\Lambda_L^{-1} = \Lambda_R^\dagger \quad , \quad \Lambda_{L,R}^T = \sigma^2 \Lambda_{L,R}^{-1} \sigma^2 \quad , \quad \sigma^2 \Lambda_L \sigma^2 = \Lambda_R^* \\ \sigma^2 \sigma^i \sigma^2 = -\sigma^{i*} \quad , \quad \Lambda_L^T \sigma^2 \Lambda_L = \sigma^2.$$

5 - Equazioni di campo

Racconta brevemente qualcosa sull'azione e sulla lagrangiana. Mostre come si giunge alle equazioni di Eulero-Lagrange. Dimostra il teorema di Noether per i diversi tipi di trasformazioni che puoi fare (ad una seconda ripetizione

puoi fare direttamente il caso generale e vedere i casi limite).

Devi ricavare le equazioni di campo per ϕ e ψ , oltre le correnti e le cariche conservate in entrambi i casi. Per il campo scalare considera la simmetria per traslazioni e per trasformazioni di Lorentz, mentre per il caso spinoriale fai delle trasformazioni di fase e di fase chirale.

6 - L'equazione di Dirac

Vedi l'invarianza dell'equazione di Dirac. Mostra come trasforma l'equazione per parità e le combinazioni $\bar{\psi}\psi$ e $\psi^\dagger\psi$. Fai anche vedere che l'equazione di Dirac è connessa con l'equazione di Klein-Gordon.

Riscrivi i generatori di Lorentz usando le $\sigma^{\mu\nu}$. Definisci la matrice di spin. Enuncia le forme bilineari degli spinori di Dirac, ma prima di vedere le leggi di invarianza mostra come si trasforma $\bar{\psi}$. Ti servirà:

$$\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu.$$

Puoi mostrare che le correnti associate alle trasformazioni di fase e chiralità siano effettivamente dei vettori e che siano conservate nel caso in cui ψ soddisfi l'equazione di Dirac.

Scrivi quali sono le generiche soluzioni dell'equazione di Dirac e verifica quale equazione soddisfano. Determina anche la loro espressione generica nel S.R. di riposo. Scrivi la matrice di boost in rappresentazione bidimensionale e determina $u_s(p)$ e $v_s(p)$. Verifica:

$$\begin{aligned} (\not{p} - m) u_s(p) &= 0 \quad , \quad (\not{p} + m) v_s(p) = 0 \\ u_s^\dagger(p) u_{s'}(p) &= v_s^\dagger(p) v_{s'}(p) = 2E\delta_{ss'} \\ \bar{u}_s(p) (\not{p} - m) &= 0 \quad , \quad \bar{v}_s(p) (\not{p} + m) = 0 \\ \bar{u}_s(p) u_{s'}(p) &= 2m\delta_{ss'} \quad , \quad \bar{v}_s(p) v_{s'}(p) = -2m\delta_{ss'} \\ \bar{u}_s(p) v_{s'}(p) &= \bar{v}_s(p) u_{s'}(p) = 0. \end{aligned}$$

Formule utili:

$$\begin{aligned} \text{Weyl:} \quad \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \\ \text{Weyl:} \quad \gamma^0 &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Normalizza le soluzioni dell'equazione di Dirac e parla dell'interpretazione.

Definisci i proiettori delle soluzioni ad energia positiva e negativa e vedi le proprietà di idempotenza, completezza e ortogonalità.

Ridefinisci i proiettori left e right e vedi come sono legati.

Ricava le equazioni di Weyl e l'operatore di elicità. Verifica inoltre che l'operatore di elicità coincide con la chiralità nel caso mass-less.

Aggiuntivo. Riprendi la definizione del vettore di Pauli-Lubanski e utilizzando la relazione:

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

ricava l'espressione generica di W^μ . Ricava nel caso massivo l'operatore di spin.

Considerando anche la generica espressione di $M_{\mu\nu}$ con le parti di momento angolare orbitale e di spin separate identifica l'operatore di momento angolare totale.

7 - Seconda quantizzazione

Comincia con il campo scalare scarico e dopo aver ricordato la lagrangiana calcola, in modo implicito il campo $\pi(x)$ e l'hamiltoniana $\mathcal{H}$. Imponi le regole di commutazione e giustificalo. Cerca una rappresentazione esplicita dei campi scalari come sviluppo di Fourier. Determina chi sono gli operatori $\hat{A}$ e la loro normalizzazione. Calcola l'hamiltoniana H . Spiega cosa ci dice il teorema di spin-statistica per i bosoni.

Quantizza il campo scalare carico, definisci le regole di commutazione, trova l'hamiltoniana e la carica conservata per trasformazioni di $U(1)$.

Quantizza il campo spinoriale, scrivendo l'hamiltoniana in una forma semplice. Scrivi la forma esplicita dei campi, le regole di anti-commutazione e trova l'hamiltoniana. Parla della spin-statistica fermionica.

Spiega l'interpretazione che diamo allo sviluppo di Fourier dei campi.

8 - Propagatore libero

Puoi parlare in modo introduttivo del propagatore in Meccanica Quantistica non relativistica, della sua espressione in funzione di $(t, \vec{x})$ e (E, x) e delle informazioni che contiene. Vedi anche il propagatore nello spazio degli impulsi.

Vedi l'evoluzione temporale degli operatori ϕ e π . Dai la definizione di propagatore libero e di prodotto T-ordinato. Ricava l'espressione della funzione di Green dell'operatore di Klein-Gordon e confrontane l'espressione con il propagatore di Feynman.

Fai i conti espliciti per il propagatore di Feynman. Trovalo nello spazio delle coordinate e anche nello spazio degli impulsi.

Parla della definizione e dell'interpretazione che diamo del propagatore di un campo scalare carico.

Calcola la funzione di Green dell'operatore di Dirac. Puoi anche fare qualche considerazione sul propagatore spinoriale e com'è legato a quello scalare; mi riferisco a:

$$S_F(x-y) = (i\not{\partial} + m) \Delta_F(x-y)$$

ti può essere utile:

$$(i\not{\partial}_x - m) [i\Delta_C(x-y)] \gamma^0 = \left\{ \hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(y) \right\}.$$

9 - Propagatore interagente

Parla della teoria del propagatore in una teoria interagente in modo generico e definisci le funzioni di Green ad n gambe.

Ricava l'espressione del teorema di Gell-Mann-Low, mentre lo fai parla della rappresentazione di interazione dell'Appendice I e dello sviluppo di Dyson dell'operatore $\hat{U}(t; t_0)$ (dai la definizione della matrice $\hat{S}$ in termini di operatore di evoluzione temporale).

Parla dell'utilità del teorema di Wick e dimostrarlo per n campi.

10 - Teorie di gauge ed Elettromagnetismo

Ripassa un po' di EM classico riscrivendo le equazioni di Maxwell con i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$, ma anche con A^μ in forma covariante. Vedi qual è l'equazione del moto per la lagrangiana $\mathcal{L}_{EM}$. Calcola il tensore energia-impulso e fai vedere come renderlo simmetrico e quali sono le sue quantità conservate.

Racconta cosa sono le invarianze di gauge e le teorie di gauge. Mostra che non possiamo avere teorie (singole) invarianti per trasformazioni di gauge locali. Spiega come costruiamo la lagrangiana della QED e quali sono i termini di interazione.

Fai un gauge fixing in EM e vedi perché i gradi di libertà sono solamente due.

Quantizza l'elettromagnetismo massivo, trova l'espressione dell'equazione di Proca, scrivi la condizione che induce e la forma dell'equazione di A^μ . Determina i momenti coniugati, l'hamiltoniana, le regole di commutazione e dai un'espressione ad A^μ parlando dei vettori di polarizzazione.

Quantizza l'elettromagnetismo massless, scrivi la lagrangiana, trova i momenti coniugati, imponi le leggi di commutazione e rendile compatibili con le

leggi di Maxwell. Scrivi un'espressione per il campo A^μ e parla delle caratteristiche del vettore di polarizzazione. Scrivi l'espressione del propagatore del fotone.