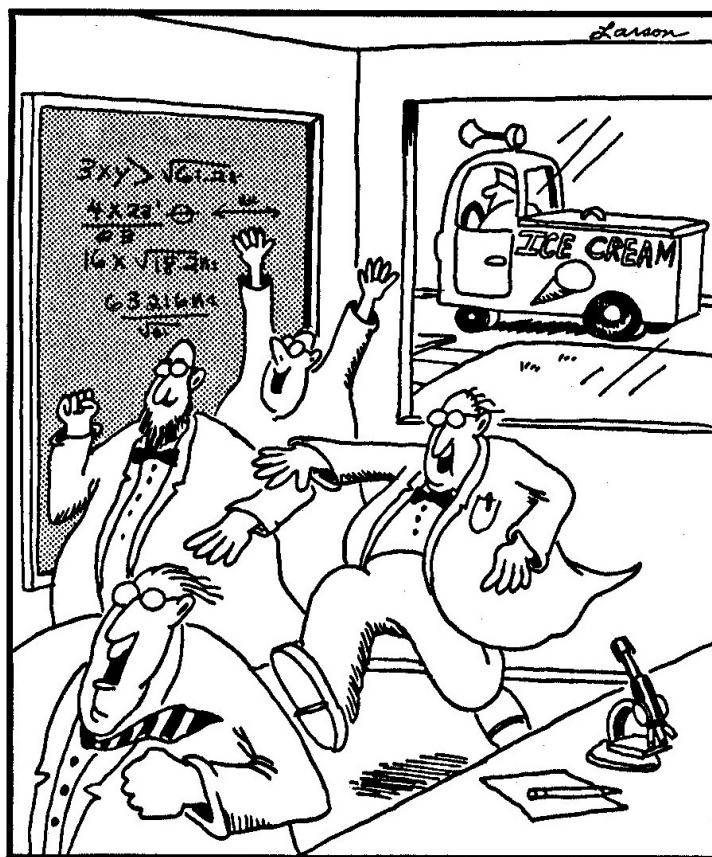


Appunti del corso di:

Fondamenti di Teoria Quantistica dei Campi

Gabriele Cembalo

A.A. 2025-2026



Università degli Studi di Torino
Dipartimento di Fisica
Via Giuria, 1, Torino (TO)

As far as quantum field theory is concerned, a human being or the center of a star isn't all that different from empty space.

Sean Carroll

Prefazione

In questo documento intendo raccogliere i miei appunti basati sul materiale del corso “**Fondamenti di Teoria Quantistica dei Campi**”, tenuto dal Prof. C. Angelantonj e seguito presso *Università degli Studi di Torino* nell’anno accademico 2025-2026. Durante il corso sono stati consigliati diversi libri (elencati in Bibliografia), e cercherò di indicare i riferimenti corrispondenti all’inizio di ogni capitolo.

Questi appunti sono una versione riscritta delle note prese durante le lezioni, quindi la fonte principale è il materiale presentato dal professore. Declino ogni responsabilità e rimando alla mia pagina personale per saperne di più su questi appunti e sul fatto che non hanno natura né accademica né didattica.

Questi appunti vanno chiaramente intesi come note personali, riscritte in maniera ordinata a partire dalle lezioni. Eventuali sviste, errori o imprecisioni sono dovuti ai miei limiti. Inoltre, ho scritto questi appunti principalmente per “spiegare” a me stesso l’argomento, quindi alcune sezioni potrebbero risultare eccessivamente dettagliate o, al contrario, troppo superficiali a seconda del lettore. In ogni caso, spero possano comunque essere utili a qualcuno. Spero anche di essere riuscito a produrre un documento chiaro e ben strutturato.

Una raccolta dei miei appunti è disponibile sulla mia pagina GitHub personale: gCembalo.github.io.

Eventuali errori o refusi possono essere segnalati alla mia email personale: g70362643@gmail.com.

Last update: 09/04/2026

Indice

Convenzioni	1
1 Il campo scalare	3
1.1 Ripasso per il campo scalare libero	3
1.1.1 Soluzione per il campo scalare libero	3
1.1.2 Propagatore del campo scalare	6
1.1.3 Richiami al teorema di Noether	8
1.2 Teorie interagenti	9
1.2.1 Rappresentazione degli stati ed evoluzione temporale .	10
1.2.2 Equazione di Dyson	13
1.2.3 Formula di Gell-Mann-Low	15
1.2.4 Teorema di Wick per campi scalari	19
1.3 Diagrammi di Feynman	21
1.3.1 Esempio di teoria interagente $\hat{\phi}^4$ e fattore di simmetria	22
1.3.2 Linee interne ed esterne	31
1.3.3 Le regole di Feynmann per il campo scalare	31
1.3.4 Diagrammi connessi, non connessi e bolle di vuoto . .	36
1.3.5 Contributo delle bolle di vuoto	40
1.3.6 Gradi di divergenza	42
1.4 Contributi di singola particella e più	46
1.4.1 Introduzione alla rinormalizzazione della teoria	46
1.4.2 Propagatore di Lehmann-Kallen e autostati di una teo- ria interagente	49
1.4.3 Pacchetti d'onda	59
1.4.4 Operatori di creazione e distruzione	63
1.4.5 Formula di riduzione LSZ per campi scalari	67
2 Il campo spinoriale	79
2.1 Ripasso per il campo spinoriale	79
2.1.1 Spinori di Weyl	79
2.1.2 Lagrangiana per campi di Majorana, di Dirac e di Weyl	81
2.1.3 Soluzioni per campi spinoriali	83
2.1.4 Formula di Gell-Mann-Low per campi spinoriali	86

2.2	Formula LSZ per campi spinoriali	86
2.3	Teorema di Wick per campi spinoriali	93
2.3.1	Dimostrazione per induzione (cenni)	95
2.4	Variabili di Mandelstam	96
2.5	Teoria di Yukawa	99
2.5.1	Regole di Feynman	99
2.6	Processi di scattering nella teoria di Yukawa	104
2.6.1	Processo $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$	104
2.6.2	Processo $e^- + \phi \rightarrow e^- + \phi$	111
2.7	Sezione d'urto	115
2.7.1	Ripasso di Relatività Speciale	116
2.7.2	Sezione d'urto in QFT	118
2.7.3	Urto con 2 particelle finali	122
2.7.4	Probabilità di decadimento	125
2.7.5	Urto con 3 particelle finali (cenni)	125
3	Il campo vettoriale	127
3.1	Derivata covariante e cinetica dei fotoni	127
3.2	Soluzione per la teoria di Maxwell	130
3.2.1	Propagatore per il campo di Maxwell	131
3.2.2	Metodo di Gupta-Bleuler	136
3.3	Formula LSZ per i campi vettoriali (cenni)	140
3.4	Teorie di gauge non abeliane	141
3.4.1	Generatori e rappresentazioni	143
3.4.2	Teoria di Yang-Mills	145
4	Funzioni di partizione	153
4.1	Integrali gaussiani	153
4.1.1	Funzione generatrice	153
4.1.2	Integrale gaussiano (matrici)	155
4.1.3	Variabili anti-commutanti	156
4.1.4	Integrale di Berezyn	158
4.2	I path integral in Meccanica Quantistica	161
4.3	Campi scalari	166
4.3.1	Funzione di partizione di una teoria scalare libera	168
4.3.2	Energia libera e funzioni di Green connesse	170
4.3.3	Valore della funzione di correlazione a 2 e 4 gambe	172
4.3.4	Funzione di partizione di una teoria interagente	173
4.3.5	Esempio con la teoria ϕ^4	176
4.3.6	Generalizzazione ad n campi	183
4.4	Funzione di partizione per campi fermionici	183
4.5	Funzione di partizione per campi vettoriali	186
4.5.1	Quantizzazione di Faddeev-Popov	189
4.5.2	Funzione di partizione libera per il caso abeliano	196

4.6	Teoria di Yukawa	199
4.7	QED	206
4.7.1	Regole di Feynman per la QED	207
4.7.2	Esempio per $\mathcal{M}$ invariante di gauge	209
4.7.3	identità di Ward	211
4.7.4	Somma sulle polarizzazioni fisiche	216
5	Il modello standard	219
5.1	Struttura del modello standard (Glashow-Weisberg-Salam)	219
5.2	Rottura spontanea di simmetria	221
5.2.1	Il vuoto della teoria	221
5.2.2	Simmetrie alla Wigner e alla Nambu-Goldstone	226
5.2.3	Teorema di Goldstone	227
5.2.4	Esempio Scalar QED	228
5.2.5	Meccanismo di Higgs	232
5.3	Teoria di Fermi	235
5.4	Gruppo di simmetria, bosoni di gauge e numeri quantici	238
5.4.1	Settore leptónico	239
5.4.2	Settore adronico	240
5.4.3	Osservazione sulle teorie anomale	241
5.4.4	Numeri quantici delle particelle	241
5.5	Correnti elettrodeboli	244
5.5.1	Correnti cariche	245
5.5.2	Corrente neutra ed elettromagnetismo	246
5.6	Interazioni tra vettori di gauge	250
5.7	Masse delle particelle	254
5.7.1	Il campo di Higgs	254
5.7.2	Masse dei bosoni vettori	257
5.7.3	Masse dei leptoni	258
5.7.4	Masse dei quark	260
5.7.5	Mixing dei quark	261
5.7.6	Massa e autoaccoppiamento del campo di Higgs	266
5.7.7	Accoppiamento di Higgs con la materia	267
5.7.8	Accoppiamento di Higgs con i bosoni di gauge	268
5.7.9	Scoperta del bosone di Higgs	269
5.8	Lagrangiana del modello standard	270
	Appendici	271
A	Note sugli esercizi	273
A.1	Matrici e decomposizione gruppi	273
A.2	Caso in cui un solo accoppiamento non è sufficiente	275

B	Richiami di teoria dei gruppi	279
C	Matrici γ	281
C.1	Definizioni	281
C.2	Identità	282
C.3	Tracce	284

Convenzioni

Vediamo brevemente le convenzioni, alcune già introdotte e utilizzate nel corso di *Introduzione alla teoria dei campi*.

Appunto importante: il 90% delle volte ometteremo il cappelletto sopra i simboli di operatori, ma saranno sempre situazioni in cui non ci sarà ambiguità di significato e in cui (se si è fatto il corso di IQFT) si saprà tranquillamente la natura dell'oggetto considerato. Ovviamente, quando non è molto chiaro il ruolo dei campi metterò esplicitamente il simbolo $\hat{\cdot}$.

Utilizzeremo le unità naturali $\hbar = c = 1$ e la metrica:

$$(+, - - -)$$

da cui seguono:

$$\begin{aligned} x^\mu &= (t, \vec{x}) & , & & x_\mu &= (t, -\vec{x}) \\ p^\mu &= (E_p, \vec{p}) & , & & p_\mu &= (E_p, -\vec{p}) \\ \partial^\mu &= (\partial_t, -\vec{\nabla}) & , & & \partial_\mu &= (\partial_t, \vec{\nabla}) \\ \square &= \partial_\mu \partial^\mu = (\partial_t^2, -\nabla^2). \end{aligned}$$

Per le trasformate di Fourier $TF[\cdot]$ utilizziamo:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(p) &= \int d^4x F(x) e^{ipx} \\ F(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{F}(p) e^{-ipx}. \end{aligned}$$

Per la delta di Dirac:

$$\begin{aligned} \delta^4(k) &= \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \\ \delta(-x) &= \delta(x) & TF[\delta^4(x-y)] &= 1. \end{aligned}$$

Derivata ed impulso, per via dell'equazione di Schrodinger:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi &= E\psi \\ -i\hbar \vec{\nabla} \psi &= \vec{k}\psi \end{aligned}$$

dunque, a livello di operatori:

$$i\partial^\mu = (\partial_t, -\vec{\nabla}) \longleftrightarrow p^\mu = (E, \vec{k})$$

scriviamo quindi che:

$$\partial_\mu \longrightarrow -ip_\mu.$$

L'operatore di evoluzione temporale, per hamiltoniane H indipendenti dal tempo, è:

$$U(t - t_0) = e^{-iH(t-t_0)}.$$

La normalizzazione degli stati liberi la prendiamo:

$$\begin{aligned} |\vec{k}\rangle &= \hat{a}^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \\ \langle \vec{p} | \vec{q} \rangle &= (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{q}). \end{aligned}$$

Lo stato di vuoto della teoria libera (void) lo indichiamo con $|0\rangle$, mentre lo stato di vuoto interagente (vacuum) lo indichiamo con $|\Omega\rangle$.¹

¹Nota che nel Peskin e Schroeder utilizza la nostra stessa notazione, mentre lo Srednicki, non sempre li distingue e bisogna intuirlo dal contesto, ma quando compaiono entrambi $|0\rangle$ è quello della teoria interagente, mentre il vuoto libero è $|\emptyset\rangle = |0\rangle_0$.

Capitolo 1

Il campo scalare

In questo capitolo rivedremo inizialmente alcuni concetti già visti al corso di *Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi*, in modo leggermente più formale (infatti ora la fonte principale sarà il Peskin e Schroeder *As far as quantum field theory is concerned, a human being or the center of a star isn't all that different from empty space*.Peskin, mentre a IQFT avevamo usato per una parte anche il Lancaster e Blundell *As far as quantum field theory is concerned, a human being or the center of a star isn't all that different from empty space*.Lancaster), ma ne aggiungeremo tanti di nuovi. Consiglio comunque di leggere tutto il capitolo poiché si potrebbe fare qualche osservazione che nel corso introduttivo è sfuggita.

1.1 Ripasso per il campo scalare libero

Vediamo una rapida parte di ripasso prima di passare ai diagrammi di Feynmann e il calcolo di funzioni di correlazioni in teorie interagenti.

1.1.1 Soluzione per il campo scalare libero

Partiamo dalla lagrangiana, che già conosciamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi) \quad (1.1.1)$$

in cui il segno nel termine cinetico è legato alla scelta della metrica e al fatto che vogliamo l'hamiltoniana H definita positiva. Infatti a noi serve che $\mathcal{L}$ sia semi-definita positiva (quindi può essere positiva o nulla in generale), poiché quando la mettiamo nell'equazione per il calcolo di $\mathcal{H}$, se dovesse mai avere i segni sbagliati, troveremmo un'hamiltoniana non definita positiva, il che ci porterebbe a non avere l'energia limitata inferiormente e un vuoto non stabile.

Abbiamo i momenti coniugati definiti da:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(x) \quad (1.1.2)$$

che ci portano all'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (1.1.3)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi). \quad (1.1.4)$$

Le equazioni del moto sappiamo che si ricavano dal principio di minima azione, quindi chiedendo che la variazione di:

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \right] \quad (1.1.5)$$

sia nulla. Abbiamo che la variazione è:

$$\delta S = \int d^4x \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu (\delta \phi) - m^2 \phi \delta \phi - V'(\phi) \delta \phi \right] \quad (1.1.6)$$

se integriamo per parti il primo pezzo e consideriamo il termine di superficie nullo, allora:

$$\delta S = \int d^4x \left[-\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi - V'(\phi) \right] \delta \phi \quad (1.1.7)$$

e imponendo la variazione nulla, $\delta S = 0$, otteniamo:

$$(\square + m^2) \phi + V'(\phi) = 0 \quad (1.1.8)$$

in cui $\square = \partial_t^2 - \nabla^2$. Ci concentreremo sulle interazioni contenute in $V(\phi)$, per ora guardando il caso della teoria libera, quindi $V(\phi) = 0$, otteniamo quella che chiamiamo **Equazione di Klein-Gordon**:

$$(\square + m^2) \phi = 0 \quad (1.1.9)$$

che nello spazio dei momenti è:

$$(p^2 - m^2) \tilde{\phi}(p) = 0. \quad (1.1.10)$$

È chiaro che (1.1.9) è un'equazione del moto lineare nei campi ϕ . Se vogliamo delle equazioni del moto più complicate, quindi che comprendano delle interazioni, dobbiamo scrivere esplicitamente il potenziale $V(\phi)$, ma sarà argomento delle prossime sezioni.

La soluzione di (1.1.9) è:

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) \left[A(p) e^{-ipx} + A^\dagger(p) e^{ipx} \right] \quad (1.1.11)$$

in cui vale:

$$p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (1.1.12)$$

Sappiamo che in (1.1.11) possiamo riscrivere gli operatori $A^{(\dagger)}$ come:

$$A^{(\dagger)}(p) = \frac{a^{(\dagger)}(p)}{2E_p} \quad (1.1.13)$$

e usando le proprietà della δ possiamo risolvere l'integrale dp^0 . L'espressione del campo scalare libero e del campo momento coniugato è quindi:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[a(p) e^{-ipx} + a^\dagger(p) e^{ipx} \right] \quad (1.1.14)$$

$$\pi(x) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[a(p) e^{-ipx} - a^\dagger(p) e^{ipx} \right]. \quad (1.1.15)$$

Imponiamo che il commutatore a tempi uguali sia uguale al commutatore canonico di variabili coniugate:

$$\left[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y}) \right] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1.1.16)$$

mentre gli altri commutatori sono nulli. Usando questa condizione si ricava che:

$$\left[\hat{a}(p), \hat{a}^\dagger(p') \right] = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (1.1.17)$$

che è l'algebra degli operatori di creazione e distruzione.

Nota. Se $\hat{\phi}(x)$ non trasforma sotto Lorentz, allora nemmeno $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ devono trasformare e quindi lo stato rimane uguale a se stesso.

Possiamo anche calcolare l'operatore hamiltoniano:

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[a(p) a^\dagger(p) + a^\dagger(p) a(p) \right] \quad (1.1.18)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[a^\dagger(p) a(p) + (2\pi)^3 \delta(0) \right] \quad (1.1.19)$$

in cui, la δ , energia di punto zero, è proporzionale al volume dello spazio e diverge a basse energie (divergenza infrarossa, dovuta alla δ) ed ad alte energie (divergenza ultravioletta, dovuto a E_p). Per aggirare gli infiniti definiamo l'hamiltoniana normal-ordered:

$$: H : = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a^\dagger(p) a(p) \quad (1.1.20)$$

cosa che si può fare solo se ignoriamo la gravità (l'energia di punto zero è legata all'energia di vuoto e alla costante cosmologica) e se la geometria del sistema non può cambiare (vedi l'effetto Casimir, in cui si osserva il campo

elettromagnetico tra piatti conduttori e al variare della distanza dei piatti l'energia di punto zero si manifesta come una forza attrattiva o repulsiva).

Facciamo attenzione che per come abbiamo scritto la soluzione del campo, gli operatori non sono adimensionali e questa cosa può non piacere, ma in questo modo otteniamo una misura di integrazione:

$$\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \quad (1.1.21)$$

che è Lorentz invariante. Inoltre questa cosa verrà comoda per il calcolo delle sezioni d'urto (sebbene non sia una scelta obbligatoria).

1.1.2 Propagatore del campo scalare

Possiamo sfruttare il fatto che il propagatore dei campi sia un c-numero (quindi un numero che commuta) e scrivere:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.1.22)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \left[\left(a(p)e^{-ipx} + a^\dagger(p)e^{ipx} \right), \left(a(p)e^{-iqy} + a^\dagger(p)e^{iqy} \right) \right] \quad (1.1.23)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right] \quad (1.1.24)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\left. \frac{e^{-ip(x-y)}}{2E_p} \right|_{E_p} + \left. \frac{e^{-ip(x-y)}}{-2E_p} \right|_{-E_p} \right] \quad (1.1.25)$$

a questo punto possiamo deformare il cammino di integrazione per passare sopra i poli, applicare il lemma di Jordan, che ci permette di vedere che se $x_0 > y_0$, allora dobbiamo chiudere sotto e di conseguenza ritorniamo al passaggio prima, ma che se $x_0 < y_0$ allora chiudiamo sopra e otteniamo zero. Abbiamo così:

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2} \quad (1.1.26)$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2}. \quad (1.1.27)$$

Possiamo definire i due tipi di propagatori:

$$D_R(x - y) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.1.28)$$

$$D_A(x - y) = \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.1.29)$$

che ci permettono di dire che se la prescrizione è di passare sopra i poli, allora otteniamo il propagatore ritardato (1.1.28) con $x^0 > y^0$, mentre se passiamo

sotto i poli otteniamo il propagatore ritardato (1.1.29), in cui $x^0 < y^0$ e in cui il segnale torna indietro.

Se deformiamo il cammino con un polo sopra e uno sotto otteniamo il **propagatore di Feynman**:

$$\Delta_F = \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.1.30)$$

in cui utilizziamo il prodotto temporalmente ordinato:

$$T[\phi(x)\phi(y)] = \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x). \quad (1.1.31)$$

Dai corsi di MQ2 e IQFT sappiamo già che il propagatore è la funzione di Green dell'operatore del moto, ovvero vale:

$$(\square + m^2) D_R(x - y) = -i\delta^4(x - y) \quad (1.1.32)$$

che nello spazio degli impulsi è:

$$(-p^2 + m^2) \tilde{D}_R(p) = -i \quad (1.1.33)$$

il che ci permette di scrivere:

$$D_R(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{D}_R(p) e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2}. \quad (1.1.34)$$

Possiamo effettivamente dimostrare che (1.1.34) soddisfi (1.1.32). Vediamo che:

$$(\square + m^2) D_R(x - y) = (\square + m^2) \left(\theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \right) \quad (1.1.35)$$

$$= A_1 + 2A_2 + A_3. \quad (1.1.36)$$

Analizziamo i singoli termini, ricordando (1.1.16):

$$A_1 = \left[\square \theta(x^0 - y^0) \right] \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.1.37)$$

$$= \left[(\partial_0)^2 \theta(x^0 - y^0) \right] \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$$

$$= \left[\partial_0 \delta(x^0 - y^0) \right] \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$$

$$= -\delta(x^0 - y^0) \partial_0 \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$$

$$= -\delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$$

$$= -\delta(x^0 - y^0) (-i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}))$$

$$= i\delta^4(x - y) \quad (1.1.38)$$

insieme a:

$$A_2 = \partial_\mu \theta(x^0 - y^0) \partial^\mu \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.1.39)$$

$$\begin{aligned} &= \partial_0 \theta(x^0 - y^0) \partial^0 \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\ &= \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\ &= -i\delta(x^0 - y^0) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= -i\delta^4(x - y) \end{aligned} \quad (1.1.40)$$

per ultimo:

$$A_3 = \theta(x^0 - y^0) (\square + m^2) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.1.41)$$

$$= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [(\square + m^2) \phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.1.42)$$

$$= 0. \quad (1.1.43)$$

Dunque complessivamente abbiamo:

$$(\square + m^2) D_R(x - y) = A_1 + 2A_2 + A_3 \quad (1.1.44)$$

$$= i\delta^4(x - y) - 2i\delta^4(x - y) + 0 \quad (1.1.45)$$

$$= -i\delta^4(x - y). \quad (1.1.46)$$

1.1.3 Richiami al teorema di Noether

Noether ci dice che quando abbiamo una simmetria abbiamo anche una corrente conservata. Se consideriamo una trasformazione infinitesima abbiamo:

$$\phi(x) = e^{ipx} \phi(0) e^{-ipx} \quad (1.1.47)$$

$$\sim \phi(0) + i \left[\vec{P}, \phi \right] \vec{x} + \dots \quad (1.1.48)$$

ponendo $\vec{x} = \vec{a}$, che chiamiamo *parametro della traslazione*, possiamo vedere che:

$$\delta\phi = [P, \phi(x)] \quad (1.1.49)$$

$$= \left[\vec{a} \cdot \vec{P}, \phi \right] \quad (1.1.50)$$

$$= -i \vec{a} \cdot \vec{\nabla}_x \phi. \quad (1.1.51)$$

Inoltre, preso $\vec{a}$ parametro di traslazione, abbiamo (sempre ricordando (1.1.16)):

$$[P, \phi(x)] = \left[\vec{a} \cdot \vec{P}, \phi \right] \quad (1.1.52)$$

$$= \vec{a} \int d^3y [\pi(y), \phi(x)] \vec{\nabla}_y \phi(y) \quad (1.1.53)$$

$$= -i \vec{a} \cdot \vec{\nabla}_x \phi. \quad (1.1.54)$$

In generale il tensore energia-impulso è una quantità definita come:

$$T^\mu_\nu = -\mathcal{L}\delta^\mu_\nu + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi \quad (1.1.55)$$

e il momento canonicamente coniugato:

$$P_i = \int d^3x T^{0i} = - \int d^3x \pi(x) \partial_i \phi. \quad (1.1.56)$$

Vediamo un esempio che ci sarà utile in seguito. Prendiamo le traslazioni:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = \phi(x + \varepsilon) \simeq \phi(x) + \varepsilon^\mu \partial_\mu \phi(x) \quad (1.1.57)$$

la quantità conservata è:

$$Q^\mu = \int d^3x T^{0\mu} \quad (1.1.58)$$

e identificando P_μ come il generatore delle traslazioni abbiamo:

$$P_\mu = -i\partial_\mu \implies [P_\mu, \phi] = i\partial_\mu \phi. \quad (1.1.59)$$

1.2 Teorie interagenti

Vediamo in questa sezione come possiamo effettivamente fare i conti nelle teorie interagenti. Nota che nella lagrangiana (1.1.1) il termine $V(\phi)$ è il termine di energia potenziale e descrive le interazioni dei nostri sistemi. La forma di $V(\phi)$ può essere arbitraria, ma nella sua scelta ci si fa guidare dai risultati sperimentali. Noi in questo corso abbiamo l'obiettivo di includere le interazioni nella nostra teoria e per farlo, tipicamente, non ci complichiamo troppo la vita nella scelta di $V(\phi)$ e prendiamo cose del tipo:

$$V(\phi) = \sum_{n=3}^{\infty} a_n \phi^n \quad (1.2.1)$$

e se vogliamo avere nella nostra teoria delle interazioni non banali, quindi che non ci ridiano un'equazione lineare, allora abbiamo bisogno di una dipendenza di $V(\phi)$ almeno di ordine ϕ^3 . Infatti se ad esempio prendiamo una teoria auto-interagente (che analizzeremo tra poche sezioni) con:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1.2.2)$$

allora l'equazione del moto è del tipo:

$$(\square + m^2) \phi = \phi^3 \quad (1.2.3)$$

che chiaramente non è più lineare.

Abbiamo già visto nel corso introduttivo che nel momento in cui buttiamo dentro le interazioni le cose si complicano e non poco. Il nostro obiettivo è quello di calcolare delle *funzioni di correlazione* (o funzioni di Green ad n punti) che sono cose del tipo:

$$\langle \Omega | T [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | \Omega \rangle \quad (1.2.4)$$

in cui per brevità potremmo indicare $\phi(x_n) \equiv \phi_n$. Le chiamiamo *funzioni di correlazione*, ma possiamo interpretarle fisicamente come l'ampiezza di probabilità di propagazione tra certi punti dello spazio-tempo. Nella teoria libera (1.2.4) è proprio il propagatore di Feynman. Il problema di (1.2.4) è che non sappiamo come sia fatto lo stato di vuoto interagente $|\Omega\rangle$, ma soprattutto non sappiamo la forma esplicita dei campi $\phi(x)$. Abbiamo già visto nel corso di Introduzione la rappresentazione di interazione e il teorema di Gell-Mann-Low per riuscire ad avere oggetti maneggiabili tra le mani.

In realtà vedremo che anche con teoremi e formulazioni complicate non riusciremo a trattare in modo esatto le teorie interagenti e ci dovremo servire degli sviluppi perturbativi.

Rivediamo la trattazione da capo e cerchiamo di costruire un metodo per poter visualizzare gli sviluppi perturbativi come processi spazio-temporali.

1.2.1 Rappresentazione degli stati ed evoluzione temporale

Vediamo in questa sezione un particolare tipo di rappresentazione che possiamo utilizzare, per i nostri stati e operatori, per descriverne l'evoluzione temporale. Sono consapevole di aver già scritto una sezione analoga negli appunti di *IQFT*, ma preferisco includere anche quest'altra fonte per completezza.

Consideriamo l'hamiltoniana:

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = H_0 + H_{int} \quad (1.2.5)$$

cioè il caso in cui possiamo separare l'hamiltoniana in una parte libera H_0 ed una parte interagente H_{int} ; in particolare ci interessa il caso in cui la forza di interazione è debole e quindi si può usare una teoria perturbativa.

Se utilizziamo la *rappresentazione di Schrödinger*, allora gli stati evolvono nel tempo e le osservabili/operatori sono costanti. L'evoluzione temporale è data da:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_S = H |\psi(t)\rangle_S \quad (1.2.6)$$

e possiamo usare il propagatore come:

$$|\psi(t)\rangle_S = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (1.2.7)$$

in cui l'operatore è unitario ed evolve nel tempo con l'hamiltoniana H :

$$U^{-1}(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0) \quad , \quad i \frac{\partial}{\partial t} U = H U. \quad (1.2.8)$$

Se abbiamo un'Hamiltoniana che non dipende dal tempo, allora sappiamo che possiamo scrivere:

$$U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.2.9)$$

ovvero abbiamo U espresso in una notazione esponenziale, che dobbiamo notare diventa inutilizzabile quando $H = H(t)$ e quindi quando l'hamiltoniana non commuta più con se stessa a tempi diversi:

$$[H(t), H(t')] \neq 0. \quad (1.2.10)$$

Se utilizziamo la *rappresentazione di Heisenberg* allora, succede l'opposto, ovvero gli stati sono costanti e gli operatori evolvono nel tempo come:

$$q_H(t) = U^\dagger(t, 0) q(0) U(t, 0) \quad (1.2.11)$$

e continua a valere:

$$i \frac{\partial}{\partial t} U = H U \quad (1.2.12)$$

da cui discende l'equazione:

$$i \frac{\partial}{\partial t} q_H(t) = i \frac{\partial U^\dagger}{\partial t} q(0) U + i U^\dagger q(0) \frac{\partial}{\partial t} U \quad (1.2.13)$$

$$= -H U^\dagger q(0) U + U^\dagger q(0) H U \quad (1.2.14)$$

$$= [q_H, H]. \quad (1.2.15)$$

Come ben sappiamo possiamo notare che le due rappresentazioni (Schrödinger e Heisenberg) sono equivalenti perché i valori di aspettazione sono uguali:

$${}_S \langle \psi(t) | q_S(0) | \psi(t) \rangle_S = {}_H \langle \psi(0) | q_H(t) | \psi(0) \rangle_H. \quad (1.2.16)$$

Mettiamo nel nostro cassetto della memoria le cose imparate e passiamo a parlare della rappresentazione che ci sarà più utile, ovvero la **rappresentazione di interazione** (o *di Dirac*) che è una rappresentazione mista tra Heisenberg e Schrödinger. Infatti in questa rappresentazione sia gli stati che gli operatori evolvono nel tempo, ma con pezzi di Hamiltoniana diversi. Il pedice I lo mettiamo per non dimenticarci che usiamo la rappresentazione di interazione. Gli operatori evolvono, alla Heisenberg, ma con l'hamiltoniana libera:

$$q_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} q(t_0) e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (1.2.17)$$

in questo modo se consideriamo degli operatori di una teoria interagente $\phi(x)$, possiamo scriverli in rappresentazione di interazione e avere tra le mani

in realtà un operatore di campo di una teoria libera, di cui sappiamo la forma (vedi discorsi dalla sezione §1.2.3 in poi). Gli stati invece vediamo che evolvono come:

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{iH_0(t-t_0)} |\psi(t)\rangle_S \quad (1.2.18)$$

$$= e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} |\psi(0)\rangle \quad (1.2.19)$$

ovvero, togliamo il pezzo di hamiltoniana libera nell'esponenziale e dunque gli stati evolvono alla Schrödinger, ma con l'hamiltoniana di interazione H_{int} .¹ Ovviamente, se cerchiamo di semplificarci le cose da una parte peggioriamo dall'altra, infatti ora abbiamo che gli stati saranno di una teoria interagente, in particolare avremo che lo stato fondamentale della nostra teoria sarà $|\Omega\rangle \neq |0\rangle$.

L'evoluzione temporale di uno stato segue l'eq di Schrödinger:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = e^{iH_0(t-t_0)} \left[-H_0 |\psi(t)\rangle_S + i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_S \right] \quad (1.2.20)$$

$$= e^{iH_0(t-t_0)} (-H_0 + H) |\psi(t)\rangle_S \quad (1.2.21)$$

$$= e^{iH_0(t-t_0)} H_{int} e^{-iH_0(t-t_0)} |\psi(t)\rangle_I \quad (1.2.22)$$

Ovvero abbiamo:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = H_{int}^I |\psi(t)\rangle_I \quad (1.2.23)$$

$$H_{int}^I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_{int} e^{-iH_0(t-t_0)} = H_{int}(\phi_I). \quad (1.2.24)$$

Osserviamo che per $H_{int} = 0$ riotteniamo la rappresentazione di Heisenberg; inoltre, come dovrebbe essere, i valori di aspettazione non dipendono dalla rappresentazione:

$${}_I \langle \psi(t) | q_I(t) | \psi(t) \rangle_I = {}_S \langle \psi(t) | q_S(0) | \psi(t) \rangle_S = {}_H \langle \psi(0) | q_H(t) | \psi(0) \rangle_H. \quad (1.2.25)$$

Per passare dalla rappresentazione di Heisenberg a quella di interazione dobbiamo usare:

$$q_H(t) = e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)} q_I(t) e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.2.26)$$

$$= U^\dagger(t, t_0) q_I(t) U(t, t_0) \quad (1.2.27)$$

dove indichiamo:

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}. \quad (1.2.28)$$

Osservo che U soddisfa l'equazione di Schrödinger:

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t_0) = H_{int}^I U_I(t, t_0) \quad (1.2.29)$$

¹Nota che vale $e^A e^B = e^{A+B}$ soltanto se $[A, B] = 0$. Nel caso di teoria perturbativa siamo sereni nel dire che H_0 commuta con H , poiché quest'ultima contiene H_0 stessa e H_{int} , la quale è piccola.

come si vede da:

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t_0) = -H_0 e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} + e^{iH_0(t-t_0)} H e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.2.30)$$

$$= e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.2.31)$$

$$= e^{iH_0(t-t_0)} H_{int} e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.2.32)$$

$$= H_{int}^I e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.2.33)$$

$$= H_{int}^I U_I(t, t_0). \quad (1.2.34)$$

Per riuscire a dare una rappresentazione di U in forma esponenziale dobbiamo studiare l'equazione di Dyson, in quanto H_{int}^I ed U dipendono entrambi dal tempo e non è detto che commutino. Infatti nonostante siamo tentati di prendere la soluzione $U \sim \exp\{-iH_I t\}$ questo non lo possiamo fare tranquillamente.

1.2.2 Equazione di Dyson

Consideriamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} X(t) = g A(t) X(t) \quad (1.2.35)$$

in cui X e A sono operatori, e possiamo supporre:

$$X(t) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} g^n X_n(t) \quad (1.2.36)$$

che sostituito in (1.2.35) da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g^n \dot{X}_n(t) = g A(t) \left(\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} g^n X_n(t) \right). \quad (1.2.37)$$

Abbiamo dunque:

$$\dot{X}_1 = A, \quad \dot{X}_n = A X_{n-1} \quad \forall n > 1 \quad (1.2.38)$$

da cui:

$$X_1 = \int dt A \quad (1.2.39)$$

pertanto:

$$X_n = \int dt A X_{n-1} \quad (1.2.40)$$

$$= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \left[T[A(t_1) A(t_2) \dots A(t_n)] \right]. \quad (1.2.41)$$

in cui T indica il prodotto temporalmente ordinato.

Siccome l'argomento di (1.2.41) è simmetrico, dal punto di vista geometrico abbiamo che (guarda bene gli estremi di integrazione):

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \quad (1.2.42)$$

come puoi vedere nella figura 1.1.

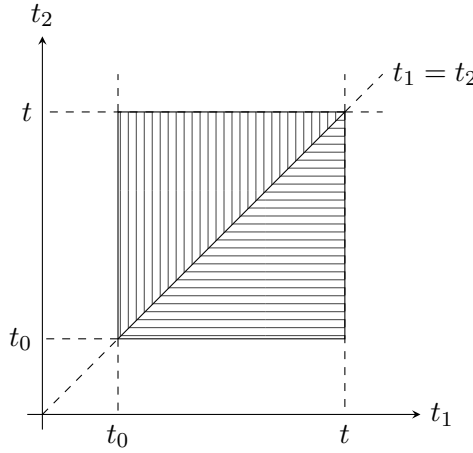


Figura 1.1: Rappresentazione geometrica ispirata dal Rossetti, *Rudimenti di Meccanica Quantistica*, appendice 9.

La relazione (1.2.42) la possiamo generalizzare per n integrali:

$$X_n = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n [T[A(t_1) A(t_2) \dots A(t_n)]] \quad (1.2.43)$$

in cui il fattore $(n!)^{-1}$ compare cambiando gli estremi di integrazione ad n integrali. Possiamo scrivere:

$$X(t) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n [T[A(t_1) A(t_2) \dots A(t_n)]] \quad (1.2.44)$$

che possiamo riscrivere in modo compatto come l'inverso di un'espansione di Taylor:

$$X(t) = T \exp \left\{ g \int_{t_0}^t dt_1 A(t_1) \right\}. \quad (1.2.45)$$

Questo che abbiamo appena detto ci interessa perché l'equazione:

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t_0) = H_{int}^I U_I(t, t_0) \quad (1.2.46)$$

è risolta da:

$$U_I(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t dt_1 H_{int}^I(t_1) \right\} \quad (1.2.47)$$

ed è detta **equazione di Dyson**, che se scritta in termini perturbativi, rispetto la costante di accoppiamento dell'interazione, diventa la *serie di Dyson*:

$$U_I(t, t_0) \equiv T \left[\exp \left\{ -i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_I(t') \right\} \right] \quad (1.2.48)$$

$$= \mathbb{1} + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_2 dt_3 T[\hat{H}_I(t_2)\hat{H}_I(t_3)] + \dots \quad (1.2.49)$$

1.2.3 Formula di Gell-Mann-Low (evoluzione temporale campo interagente)

Prendiamo un campo scalare reale con:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \quad (1.2.50)$$

e studiamo l'equazione del moto:

$$(\square + m^2)\phi = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi} \quad (1.2.51)$$

in cui, però, stiamo usando la rappresentazione di Heisenberg, dunque:

$$\dot{\phi} = i[H, \phi] \quad , \quad \dot{\pi} = i[H, \pi] \quad (1.2.52)$$

dunque:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_{int} \quad (1.2.53)$$

$$= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}. \quad (1.2.54)$$

Vedi qua che $\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}$. Però, se utilizziamo la rappresentazione di interazione allora ϕ_I evolve solo con H_0 e abbiamo la soluzione del campo libero:

$$\phi_0 = \phi^+ + \phi^- \quad (1.2.55)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \left(a e^{-ikx} + a^\dagger e^{ikx} \right). \quad (1.2.56)$$

Vediamo come evolve lo stato di vuoto. Definiamo i ground state della teoria libera e interagente come:

$$H_0 |0\rangle = 0 \quad (1.2.57)$$

$$H |\Omega\rangle = E_0 |\Omega\rangle \quad (1.2.58)$$

e, mettendoci nella rappresentazione di interazione, vediamo come evolve nel tempo $|0\rangle$:

$$e^{-iHt} |0\rangle = e^{-iHt} \mathbb{1} |0\rangle \quad (1.2.59)$$

$$= e^{-iHt} \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|0\rangle \quad (1.2.60)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_n t} |n\rangle \langle n|0\rangle \quad (1.2.61)$$

$$= e^{-iE_0 t} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-iE_n t} |n\rangle \langle n|0\rangle. \quad (1.2.62)$$

Abbiamo $\langle \Omega|0\rangle$ perché stiamo ipotizzando che l'interazione possa essere trattata con uno sviluppo perturbativo, quindi la costante di accoppiamento dev'essere $g \ll 1$, e nel limite di $g = 0$ riotteniamo la teoria libera, quindi il vuoto interagente deve tendere al vuoto della teoria libera e deve farlo in maniera continua rispetto alla variazione di g . Stiamo anche assumendo un overlap tra $|\Omega\rangle$ e $|0\rangle$, poiché si possiamo scrivere $|\Omega\rangle$ come uno sviluppo di diversi stati, tra cui $|0\rangle$, e quindi $\langle \Omega|0\rangle \neq 0$.

Vediamo dunque:

$$|\Omega\rangle = \frac{1}{\langle \Omega|0\rangle} e^{-i(H-E_0)\tau} |0\rangle - \frac{1}{\langle \Omega|0\rangle} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i(E_n-E_0)\tau} |n\rangle \langle n|0\rangle \quad (1.2.63)$$

ma siccome $E_n > E_0$ possiamo studiare:

$$|\Omega\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{e^{-i(H-E_0)\tau}}{\langle \Omega|0\rangle} |0\rangle \quad (1.2.64)$$

perché gli altri termini ($n \neq 0$) tendono a zero grazie alla manipolazione $-i\varepsilon$; nota che abbiamo scelto $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll 1$.

Un modo equivalente per fare quest'operazione è usare la rotazione di Wick:

$$\tau \longrightarrow i\tau. \quad (1.2.65)$$

In più, siccome $\tau \rightarrow \infty$, possiamo traslare di una piccola costante:

$$\tau \longrightarrow \tau + t_0 \quad (1.2.66)$$

e avere comunque:

$$|\Omega\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{e^{-i(H-E_0)\tau}}{\langle \Omega|0\rangle} |0\rangle \quad (1.2.67)$$

L'energia di punto zero sul vuoto agisce come l'identità:

$$\langle H_0|0\rangle = 0 \quad (1.2.68)$$

quindi:

$$e^{iH_0 t} |0\rangle = \mathbb{1} |0\rangle \quad (1.2.69)$$

perciò posso aggiungerlo:

$$|\Omega\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \left[e^{-iE_0(\tau+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle \right]^{-1} e^{-iH(\tau+t_0)} e^{iH_0(\tau+t_0)} |0\rangle \quad (1.2.70)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \left[e^{-iE_0(\tau+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle \right]^{-1} U(t_0, -\tau) |0\rangle. \quad (1.2.71)$$

in cui utilizziamo la definizione di operatore di evoluzione temporale (1.2.28). Analogamente scriviamo:

$$\langle \Omega | = \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle 0 | U(\tau, t_0) \left[e^{-iE_0(\tau-t_0)} \langle 0 | \Omega \rangle \right]^{-1}. \quad (1.2.72)$$

A questo punto, ci piacerebbe, riscrivere il valore di aspettazione dei campi:

$$\langle \Omega | T[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | \Omega \rangle \quad (1.2.73)$$

che è scritta in rappresentazione di Heisenberg, dunque $\phi = \phi_H$, in termini del vuoto libero $|0\rangle$ e con la rappresentazione di interazione, in cui sappiamo che il campo evolve come nella teoria libera ($\phi_I = \phi_0$ e dunque sappiamo darne una rappresentazione).

Ricordiamoci che per passare dalla rappresentazione di Heisenberg a quella di interazione dobbiamo usare:

$$q_H(t) = U^\dagger(t, t_0) q_I(t) U(t, t_0) \quad (1.2.74)$$

in cui:

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}. \quad (1.2.75)$$

Osserviamo inoltre che:

$$U^\dagger(t_2, t_1) = U(t_1, t_2) \quad (1.2.76)$$

$$U(t, t_0) = U(t, t') U(t', t_0). \quad (1.2.77)$$

Possiamo implementare i conti:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \left[\prod_i \phi(x_i) \right] | \Omega \rangle &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle 0 | U(\tau, t_0) T \left[\prod_i \phi(x_i) \right] U(t_0, -\tau) | 0 \rangle \cdot \\ &\quad \cdot \left[|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-2iE_0\tau} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (1.2.78)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle 0 | U(\tau, t_0) T \left[\prod_{i=1}^n U^\dagger(t_i, t_0) \phi_I(x_i) U(t_i, t_0) \right] U(t_0, -\tau) | 0 \rangle \cdot \\ &\quad \cdot \left[|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-2iE_0\tau} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (1.2.79)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle 0 | U(\tau, t_0) T \left[\prod_{i=1}^n U(t_0, t_i) \phi_I(x_i) U(t_i, t_0) \right] U(t_0, -\tau) | 0 \rangle \cdot \\ &\quad \cdot \left[|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-2iE_0\tau} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (1.2.80)$$

in cui possiamo inserire $U(\pm\tau)$ perché $\tau \rightarrow \infty$, dunque è già temporalmente ordinato; inoltre possiamo cambiare l'ordine degli oggetti interni al prodotto temporalmente ordinato, quindi mettere gli operatori di evoluzione temporale tutti vicini:

$$\langle \Omega | T \left[\prod_i \phi(x_i) \right] | \Omega \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty (1-i\varepsilon)} \langle 0 | T \left[U(\tau, -\tau) \prod_{i=1}^n \phi_0(x_i) \right] | 0 \rangle \cdot \left[|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-2i E_0 \tau} \right]^{-1}. \quad (1.2.81)$$

Per poter riscrivere il denominatore osserviamo che gli autostati di H sono normalizzati, quindi:

$$\langle \Omega | \Omega \rangle = 1 \quad (1.2.82)$$

e se sostuiamo (1.2.71) e (1.2.72) otteniamo:

$$\langle \Omega | \Omega \rangle = \langle 0 | U(\tau, t_0) U(t_0, -\tau) | 0 \rangle \left(|\langle \Omega | 0 \rangle|^2 e^{-2i E_0 \tau} \right)^{-1} \quad (1.2.83)$$

$$= \langle 0 | U(\tau, -\tau) | 0 \rangle \left(|\langle \Omega | 0 \rangle|^2 e^{-2i E_0 \tau} \right)^{-1} \quad (1.2.84)$$

$$= 1. \quad (1.2.85)$$

Nota bene che abbiamo abbandonato l'indice I per non appesantire la notazione. Quando applichiamo gli operatori sul vuoto libero siamo nella rappresentazione di interazione, ovvero campo libero, in questo modo manteniamo la consistenza con le formule sopra, anche se i valori di aspettazione sono uguali.

In definitiva abbiamo trovato:

$$\langle \Omega | T \left[\prod_i \phi(x_i) \right] | \Omega \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty (1-i\varepsilon)} \frac{\langle 0 | T \left[U(\tau, -\tau) \prod_i \phi(x_i) \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | U(\tau, -\tau) | 0 \rangle}, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (1.2.86)$$

che è detta **formula di Gell-Mann e Low**. Ricordiamoci anche l'equazione di Dyson (1.2.47) che ci dice:

$$U(\tau, -\tau) = T \exp \left\{ -i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_{int}^{(I)} \right\} \quad (1.2.87)$$

in cui $H_I(t) = H_{int}^{(I)} = H_{int}(\phi_I)$, per cui la formula di Gell-Mann-Low la scriviamo tipicamente come:

$$\langle \Omega | T \left[\prod_i \phi(x_i) \right] | \Omega \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty (1-i\varepsilon)} \frac{\langle 0 | T \left[\exp \left\{ -i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_{int}^{(I)} \right\} \prod_i \phi(x_i) \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | \exp \left\{ -i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_{int}^{(I)} \right\} | 0 \rangle}. \quad (1.2.88)$$

Ora il problema non è più calcolare oggetti del tipo il membro di sinistra di (1.2.88), bensì quello di destra. Infatti, sebbene ci siamo semplificati

la vita riprendendo i campi liberi $\phi(x_i)$ e gli stati di vuoto $|0\rangle$, comunque rimaniamo con un prodotto T-ordinato di un esponenziale in cui compare l'integrale di un'hamiltoniana interagente che può essere complicato a piacere. Ci serviremo del teorema di Wick e dei diagrammi di Feynman per poter calcolare questi oggetti. In questa sezione il nostro lavoro avrà questo obiettivo.

Nota. Il termine di sinistra di (1.2.88) è scritto in rappresentazione di Heisenberg, mentre quello di destra di interazione, ma possiamo vedere che se $H_{int} = 0$, o meglio poniamo a zero il potenziale di interazione $V(\phi)$, allora vale l'identità e le due rappresentazioni coincidono (ulteriore prova di questo fatto).

1.2.4 Teorema di Wick per campi scalari

Utilizzo la notazione:

$$\Delta_F(x - y) = \overline{\phi(x)\phi(y)} \quad (1.2.89)$$

con in campi in rappresentazione di interazione.

Teorema 1. *Il teorema di Wick afferma:*

$$T[\phi(x_i)] = T[\phi_i] = N[\phi_i] + \sum_{\sigma} N[\overline{\phi_i\phi_j\phi_k}] + \sum_{\sigma} N[\overline{\phi_i\phi_j\phi_{i'}\phi_{j'}\phi_{k'}}] + \dots \quad (1.2.90)$$

dove per brevità omettiamo tutti i segni di produttor, indichiamo con $N[\dots]$ il prodotto normal-ordered e con i puntini tutte le altre possibili contrazioni dei campi.

Se abbiamo un numero pari di campi, allora nell'ultimo termine contraiamo tutte le coppie e sommiamo sulle permutazioni (σ), se invece abbiamo un numero di dispari di campi, allora ci rimane un campo non accoppiato.

In quest'ultimo caso (numero dispari di campi) se “paniniamo” nel vuoto, otteniamo:

$$\langle 0 | T[\phi(x_i)] | 0 \rangle = 0 \quad (1.2.91)$$

mentre con un numero pari di campi abbiamo solo le somme sulle permutazioni del prodotto dei propagatori (cioè sopravvive solo il termine dove tutti i campi sono accoppiati).

Da notare che ci interessa studiare:

$$\langle 0 | T[\phi(x_i)] | 0 \rangle \quad (1.2.92)$$

perché prima abbiamo dimostrato che possiamo esprimere:

$$\langle \Omega | T[\phi_H(x_i)] | \Omega \rangle \propto \langle 0 | U(+\infty, -\infty) T[\phi(x_i)] | 0 \rangle \quad (1.2.93)$$

in cui $\phi = \phi_I = \phi_0$, cioè abbiamo la rappresentazione di interazione che si comporta come il campo libero.

Dimostrazione per 2 campi. Consideriamo solo campi liberi:

$$\phi = \phi^+ + \phi^- \quad (1.2.94)$$

in cui:

$$\phi^+ \sim \hat{a} e^{-ikx} \quad , \quad \phi^- \sim \hat{a}^\dagger e^{ikx}. \quad (1.2.95)$$

Studiamo:

$$T[\phi(x)\phi(y)] = \phi(x)\phi(y) \quad (1.2.96)$$

in cui imponiamo $x^0 > y^0$. Implementando i conti:

$$T[\phi(x)\phi(y)] = (\phi^+(x) + \phi^-(x)) \cdot (\phi^+(y) + \phi^-(y)) \quad (1.2.97)$$

$$= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^+(x)\phi^-(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) \quad (1.2.98)$$

$$= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^-(x)\phi^-(y) + [\phi^+(x), \phi^-(y)] \quad (1.2.99)$$

$$= N[\phi(x)\phi(y)] + [\phi^+(x), \phi^-(y)] \quad (1.2.100)$$

che se "paniniamo" nel vuoto:

$$\langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | N[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle + \langle 0 | [\phi^+(x), \phi^-(y)] | 0 \rangle \quad (1.2.101)$$

in cui:

$$\langle 0 | N[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle \sim \langle 0 | \hat{a}^\dagger \dots \hat{a} | 0 \rangle = 0 \quad (1.2.102)$$

e ricordando anche che il commutatore tra campi è un c-numero otteniamo:

$$\Delta_F(x - y) = \langle 0 | [\phi^+(x), \phi^-(y)] | 0 \rangle \quad (1.2.103)$$

$$= [\phi^+(x), \phi^-(y)]. \quad (1.2.104)$$

Dunque, abbiamo trovato che:

$$T[\phi(x)\phi(y)] = N[\phi(x)\phi(y)] + \overline{\phi(x)\phi(y)}. \quad (1.2.105)$$

Dimostrazione per induzione. Siccome il teorema vale per due campi, assumiamo che valga per n e lo dimostriamo per $n+1$. Assumiamo che x_{n+1} sia il tempo più piccolo (possiamo sempre riarrangiare i termini all'interno del prodotto temporalmente ordinato):

$$T[\phi_1 \dots \phi_{n+1}] = T[\phi_1 \dots \phi_n] \phi_{n+1} \quad (1.2.106)$$

$$= T[\phi_i] \phi_{n+1} \quad (1.2.107)$$

$$= N[\phi_i] \phi_{n+1} + \sum_{\sigma} N[\overline{\phi_i \phi_j \phi_k}] \phi_{n+1} + \sum_{\sigma} N[\overline{\phi_i \phi_j \phi_{i'} \phi_{j'} \phi_{k'}}] \phi_{n+1} + \dots \quad (1.2.108)$$

vediamo che il primo termine è riscrivibile come:

$$N[\phi_i] \phi_{n+1} = \left(\sum_{i=0}^n \prod_{j=0}^i (\phi_j^-) \prod_{k=0}^{n-i} (\phi_k^+) \right) (\phi_{n+1}^+ + \phi_{n+1}^-) \quad (1.2.109)$$

$$= \left(\sum \phi_j^- \phi_k^+ \right) (\phi_{n+1}^+ + \phi_{n+1}^-) \quad (1.2.110)$$

$$= \sum \phi_j^- \phi_k^+ \phi_{n+1}^+ + \sum \phi_j^- \phi_k^+ \phi_{n+1}^- \quad (1.2.111)$$

facciamo agire il commutatore nell'ultimo termine:

$$N[\phi_i] \phi_{n+1} = \sum \phi_j^- \phi_k^+ \phi_{n+1}^+ + \sum \phi_j^- \phi_k^+ \phi_{n+1}^- \quad (1.2.112)$$

$$= \sum \phi_j^- \phi_k^+ \phi_{n+1}^+ + \sum \phi_j^- \phi_{n+1}^- \phi_k^+ + \sum \phi_j^- [\phi_k^+, \phi_{n+1}^-] \quad (1.2.113)$$

$$= N[\phi_i \phi_{n+1}] + \sum \phi_j \overline{\phi_{n+1} \phi_k}. \quad (1.2.114)$$

In maniera analoga per gli altri membri abbiamo il termine di normal ordering corretto e la somma va a completare il termine successivo perché aggiunge il termine di contrazione con ϕ_{n+1} .

1.3 Diagrammi di Feynman

Vediamo in questa sezione, che ha come riferimento la sezione §4.4 a p.90 del Peskin e Schroeder As far as quantum field theory is concerned, a human being or the center of a star isn't all that different from empty space. Peskin, come dare una rappresentazione pittorica e come trattare, da un punto di vista matematico, i vari termini che derivano dal calcolo di funzioni di correlazione (funzioni di Green):

$$\langle \Omega | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle \quad (1.3.1)$$

usando la formula di Gell-Mann-Low, applicando lo sviluppo di Dyson e il teorema di Wick. Faremo questa trattazione, che si può applicare poi ai casi più complicati, con l'esempio della teoria auto-interagente $\frac{\lambda}{4!} \phi^4$.

Il modo in cui procederemo sarà il seguente: ci riscriveremo (1.3.1) utilizzando la formula di Gell-Mann-Low (1.2.88), in modo da maneggiare campi liberi, che sappiamo scrivere esplicitamente; poi utilizzeremo lo sviluppo di Dyson dell'equazione (1.2.47) in modo da scrivere un po' meglio l'esponenziale con l'integrale di $\mathcal{H}_{int}$; per finire (quasi) applicheremo il teorema di Wick ad ogni termine della serie, in modo da toglierci di mezzo tutti i prodotti T -ordinati e poter trattare matematicamente gli integrali.

Ovviamente faremo delle considerazioni man mano che procediamo con la trattazione.

Nota. Solitamente indichiamo $\phi_i \equiv \phi(x_i)$.

1.3.1 Esempio di teoria interagente $\hat{\phi}^4$ e fattore di simmetria

Studiamo la teoria ϕ^4 , la cui lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1.3.2)$$

in cui λ è la costante di accoppiamento della teoria ed è adimensionale (facilmente verificabile ricordando che, in unità naturali, abbiamo $[\phi] = L^{-1}$ e che $[S] = 1$). La costante di accoppiamento ci dice quanto l'interazione è forte. Il fattore $4!$ lo mettiamo per tenere conto delle possibili permutazioni che possiamo fare con i quattro campi identici $\phi(x)$.

In questa teoria quindi:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) \implies H_{int}^{(I)} = H_{int}(\phi_I) = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1.3.3)$$

e a noi interessa studiare il valore di aspettazione:

$$\langle \Omega | T[\phi_1 \dots \phi_n] | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T[\phi_1 \dots \phi_n \exp\{-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \phi^4(z)\}] | 0 \rangle}{\langle 0 | T[\exp\{-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \phi^4(z)\}] | 0 \rangle}. \quad (1.3.4)$$

Chiaramente (1.3.4) non è molto bello da calcolare essendoci dei valori di aspettazione sul vuoto (VEV) di un prodotto T-ordinato, con all'interno un integrale non proprio banale. Per riuscire a tirarci fuori da questa cosa abbiamo bisogno di fare delle espansioni in serie in λ , ovvero teoria perturbativa. Facendo ciò possiamo studiare le correzioni al propagatore, ricordando (1.2.57) e (1.2.58).

Il problema è che non possiamo fare gli sviluppi in serie di ciò che ci pare, ma abbiamo bisogno che il parametro su cui facciamo lo sviluppo sia piccolo. In questo caso cosa vuol dire λ piccolo? Se λ fosse un parametro dimensionale dovremmo paragonarlo ad una certa grandezza di riferimento e avremmo casi in cui sarebbe lecito fare teoria perturbativa e altri no; però noi abbiamo $[\lambda] = 1$, per cui non abbiamo alcuna ambiguità nel fare lo sviluppo dell'esponenziale, l'importante che valga:

$$\lambda \ll 1. \quad (1.3.5)$$

Per questo nostro primo approccio consideriamo il caso di sole due particelle, quindi solo due campi $\phi(x)$ e $\phi(y)$, ignoriamo il denominatore di (1.2.88)

(quindi in sostanza quello che facciamo è considerare anche le bolle di vuoto, ma se non sai cosa sono ignora il commento) e facciamo lo sviluppo perturbativo del numeratore:

$$\begin{aligned} \exp\left\{-i \int d^4x \mathcal{H}_{int}\right\} &= \exp\left\{-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x)\right\} \sim \\ &\sim 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^2 \int d^4y d^4z \phi^4(y) \phi^4(z) + \dots \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

che se inserito in (1.2.88) ci da:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T[\phi(x)\phi(y)] | \Omega \rangle &= \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle + \\ &+ \frac{(-i\lambda)}{4!} \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y) \int d^4z \phi^4(z)] | 0 \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{(-i\lambda)^2}{(4!)^2} \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y) \int d^4z \phi^4(z) \int d^4w \phi^4(w)] | 0 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

In questo modo ci ritroviamo tra le mani dei VEV su $|0\rangle$ di prodotti T-ordinati, ma calcolabili. Infatti possiamo utilizzare il teorema di Wick, che ci permette di scrivere un prodotto T-ordinato come il prodotto N-ordinato di tutti i campi più tutte le possibili contrazioni di essi. Ovviamente dobbiamo ricordarci che tutti i termini in cui non tutti i campi sono contratti, dunque rimane il prodotto N-ordinato di qualcosa, sono nulli (di conseguenza lo sono i casi in cui dovremmo avere il VEV di un prodotto T-ordinato di un numero dispari di campi). Ci piace utilizzare il teorema di Wick poiché sappiamo che le contrazioni dei campi, sono proprio i propagatori (liberi) di Feynman, di cui conosciamo l'espressione.

Per ogni ordine perturbativo portiamo fuori l'integrale, utilizziamo il teorema di Wick e otteniamo:

- All'ordine zero (non perturbato) abbiamo solo il propagatore:

$$\langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = \overline{\phi(x)\phi(y)} = \Delta_F(x-y) \quad (1.3.8)$$

e lo rappresentiamo come in figura 1.2:

$$\lambda^0 : \quad \bullet \text{---} x \text{---} y \text{---} \bullet$$

Figura 1.2

- Al *primo ordine* abbiamo solo due famiglie di contrazioni (non equivalenti) possibili, quelle in cui contraiamo i due campi $\phi(x)$ e $\phi(y)$ tra loro e poi i quattro campi $\phi(z)$ a coppie, oppure, contraiamo $\phi(x)$ con un $\phi(z)$, analogamente $\phi(y)$ e poi ci rimane una contrazione di due $\phi(z)$. Ovviamente avendo 4 campi $\phi(z)$ uguali abbiamo una certa molteplicità per ogni diagramma, che dobbiamo tenere in considerazione. Ad esempio, la prima contrazione possibile è:

$$\overbrace{\phi(x)\phi(y)} \quad \overbrace{\phi(z)\phi(z)} \quad \overbrace{\phi(z)\phi(z)} \quad (1.3.9)$$

che però possiamo ottenere in 3 modi diversi, poiché, ovviamente $\phi(x)$ e $\phi(y)$ li possiamo contrarre solo in un modo, ma i $\phi(z)$ li possiamo contrarre in 3 modi differenti.

Analogamente possiamo renderci conto che la seconda famiglia:

$$\overbrace{\phi(x)\phi(z)} \quad \overbrace{\phi(y)\phi(z)} \quad \overbrace{\phi(z)\phi(z)} \quad (1.3.10)$$

ha 12 modi di realizzarsi; infatti possiamo contrarre $\phi(x)$ con 4 possibili campi $\phi(z)$, successivamente rimangono 3 campi con cui possiamo contrarre $\phi(y)$ e per gli ultimi due non abbiamo scelta. Dunque la molteplicità è $4 \cdot 3 = 12$.

Complessivamente il primo ordine, che lo rappresentiamo come in figura 1.3: e lo scriviamo come:

$$\lambda^1 : \left(\begin{array}{c} x \quad y \\ \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bullet \\ \bigcirc \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} x \quad \quad y \\ \bullet \quad \quad \bullet \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bullet \\ \bigcirc \end{array} \right)$$

Figura 1.3

$$\begin{aligned} \int d^4 z \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)\phi^4(z)] | 0 \rangle = \\ + 3\Delta_F(x-y) \int d^4 z \Delta_F(z-z) \Delta_F(z-z) + \\ + 12 \int d^4 z \Delta_F(x-z) \Delta_F(y-z) \Delta_F(z-z) \quad (1.3.11) \end{aligned}$$

- Al *secondo ordine*, ragionando allo stesso modo del primo abbiamo:

$$\int d^4 z \int d^4 w \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)\phi^4(z)\phi^4(w)] | 0 \rangle \quad (1.3.12)$$

$$\lambda^2 : \left(\begin{array}{c} x \quad y \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} x \quad y \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} x \quad y \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) + \dots$$

Figura 1.4

e lo rappresentiamo come in figura 1.4: Il numero di vertici (ossia il numero di punti in cui entrano o escono linee di propagatori, esclusi x e y) mostra a quale ordine perturbativo stiamo lavorando.

- Al terzo ordine abbiamo:

$$\int d^4z \int d^4w \int d^4u \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)\phi^4(z)\phi^4(w)\phi^4(u)] | 0 \rangle \quad (1.3.13)$$

e lo rappresentiamo come in figura 1.5: Il coefficiente di quest'ordine

$$\lambda^3 : \left(\begin{array}{c} x \quad y \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) + \dots$$

Figura 1.5

perturbativo è:

$$\left(-\frac{i\lambda}{4!} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot 3! \cdot 12 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad (1.3.14)$$

in cui: $(-i\lambda/4!)^3$ viene dall'hamiltoniana di interazione; $1/3!$ è il *coefficiente di Taylor/Dyson*; $3!$ viene dal fatto che possiamo permutare z, w, u ; 12 è per le contrazioni equivalenti in z ; 24 è per le contrazioni equivalenti in w ; 12 è per le contrazioni equivalenti in u ; $1/2$ è perché le due contrazioni con $\Delta(w - u)$ sono equivalenti.

Facciamo qualche osservazione riguardo i diagrammi che abbiamo disegnato e i termini dello sviluppo che abbiamo trovato. Ovviamente non abbiamo parlato molto di come giungiamo alle rappresentazioni grafiche, ma è abbastanza chiaro che, ad esempio l'ordine λ^0 essendo:

$$\langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = \overline{\phi(x)\phi(y)} = \Delta_F(x - y) \quad (1.3.15)$$

è un propagatore tra i punti x ed y , per cui come abbiamo imparato da *Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi* lo rappresentiamo come una linea che congiunge i due punti.

In λ^1 il contributo:

$$3\Delta_F(x-y) \int d^4z \Delta_F(z-x) \Delta_F(z-y) \quad (1.3.16)$$

è un propagatore da x ad y , come vediamo nel primo termine della figura 1.3 insieme a due propagatori da z in z , dunque due *loop* che si chiudono in z . Similmente, l'altro contributo dell'ordine λ^1 :

$$12 \int d^4z \Delta_F(x-z) \Delta_F(y-z) \Delta_F(z-z) \quad (1.3.17)$$

ci dà un propagatore da x a z , poi un loop che si chiude in z , e per finire un altro propagatore da z in y .

La costruzione dei termini al secondo ordine si fanno in modo analogo.

I diagrammi che disegniamo all'ordine λ^0 e λ^1 ci dicono una cosa molto importante della nostra teoria. Infatti, mentre il termine λ^0 è il termine libero, senza interazione, e ci rappresenta la propagazione indisturbata da x ad y e il vuoto non fa nulla, il termine λ^1 ci fa vedere, vedi il primo contributo in 1.3, che continuiamo ad avere la propagazione libera da x ad y , ma sta volta anche il vuoto fa qualcosa, il che è rappresentato dai due loop. In modo analogo anche il secondo contributo ci fa vedere che abbiamo propagazione libera da x a z , poi viene creata una particella che evolve e si propaga fino allo stesso punto z , e dopodichè abbiamo la propagazione libera da z ad y . Tutto ciò è dovuto al fatto che siamo passati da una teoria con $|0\rangle$, ad una con $|\Omega\rangle$, e possiamo vedere i termini di ordine ≥ 1 come correzioni quantistiche al caso classico.

Possiamo fare dei discorsi perfettamente analoghi a quelli appena visti, ma con 4 campi nella nostra funzione di correlazione, e dunque calcolare:

$$\langle \Omega | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 | \Omega \rangle. \quad (1.3.18)$$

Sempre ignorando il denominatore di Gell-Mann-Low cominciamo a scriverci lo sviluppo di Dyson del numeratore:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \exp \left\{ -i \int d^4x \mathcal{H}_{int}(x) \right\} | 0 \rangle &\sim \\ &\sim \langle 0 | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 | 0 \rangle - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \langle 0 | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi^4(x) | 0 \rangle + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4x d^4y \langle 0 | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi^4(x) \phi^4(y) | 0 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

ora possiamo applicare il teorema di Wick e considerare tutte le possibili contrazioni dei campi all'interno dei prodotti T-ordinati. Vediamo i singoli termini uno per volta e solo alla fine mettiamo tutto insieme graficamente.

Vediamo che l'ordine λ^0 ci da 3 contributi:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 | 0 \rangle &= \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} \\ &= \Delta(x_2 - x_1) \Delta(x_4 - x_3) + \Delta(x_3 - x_1) \Delta(x_4 - x_2) + \\ &\quad + \Delta(x_4 - x_1) \Delta(x_3 - x_2) \quad (1.3.20) \end{aligned}$$

che sono 4 propagatori liberi di Feynman, che possiamo rappresentare come in figura 1.6 e che ci dicono che le due particelle si propagano, ma non si parlano.

$$\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \} | 0 \rangle = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline 3 \quad 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 4 \end{array}$$

Figura 1.6: Ordine λ^0 .

In modo analogo possiamo vedere l'ordine λ^1 , considerando già la molteplicità:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi^4(x) | 0 \rangle &= 3 \left(\overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} \right) \overbrace{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} + \\ &\quad + 4! \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} + \\ &\quad + 12 \left(\overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_x \phi_x} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_x \phi_x} + \right. \\ &\quad \left. + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_x \phi_x} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_x \phi_x} + \right. \\ &\quad \left. + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_x \phi_x} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_x \phi_x} \right) \overbrace{\phi_x \phi_x} \quad (1.3.21) \end{aligned}$$

che chiaramente possiamo riscrivere in termini di propagatori, ma per brevità non lo riporto e inserisco subito i diagrammi che compaiono. Vedi la figura 1.7.

Possiamo vedere come diagramma particolare il termine:

$$4! \cdot \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} \quad (1.3.22)$$

$$\begin{aligned}
\lambda^1 : \quad & 3 \left(\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \\ \hline x_3 \quad x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \\ | \quad | \\ x_3 \quad x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ x_3 \quad x_4 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ \bullet x \end{array} \right) + \\
& + 4! \left(\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet x \\ \diagup \quad \diagdown \\ x_3 \quad x_4 \end{array} \right) + \\
& + 12 \left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ x_1 \text{---} \bullet x \text{---} x_2 \\ x_3 \text{---} x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ \text{loop} \\ x_3 \text{---} \bullet x \text{---} x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \\ | \\ \bullet x \text{---} \text{loop} \\ | \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ | \\ x_4 \end{array} + \right. \\
& \left. + \dots (\text{altri diagrammi}) \dots \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{loop} \\ \bullet x \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Figura 1.7: Ordine λ^1 .

che è rappresentato nella seconda riga della figura 1.7. Da questo digramma impariamo che ogni volta che si uniscono i propagatori, allora sta avvenendo l'interazione governata da $V(\phi)$, ma poiché il punto x non è fissato, infatti in (1.3.19) stiamo integrando $\int d^4x$, allora l'interazione avviene in tutti i possibili punti, ossia avviene ovunque. Con *interazione* intendiamo qualsiasi cosa; ad esempio nel termine (1.3.22) ci sono due particelle in ingresso, l'interazione e poi due particelle in uscita; però nei primi tre termini dell'ordine λ^1 c'è il loop che ci dice che nel vertice x il vuoto sta facendo qualcosa, e allo stesso modo nei 6 termini nell'ultima parentesi di λ^1 possiamo vedere che il vertice rappresenta la situazione in cui durante la propagazione della particella abbiamo l'emissione di un'altra e il suo successivo assorbimento.

Notiamo, allo stesso tempo, che i punti *marcati*, ossia x_i (con $i = 1, 2, 3, 4$) non vengono integrati e sono fissi.

Probabilmente sarà un discorso che riuscirà in seguito, ma il fatto che in un vertice entrino 4 linee di propagatori è dovuto al modo in cui è costruita $\mathcal{L}_{int}$, che porta² ad $\mathcal{H}_{int}$, in questo caso è $\lambda\phi^4$, e dunque con 4 campi. Infatti, nel termine di interazione più semplice (1.3.22), vediamo che in ogni vertice ci entrano 4 gambe e così dovrà essere per ogni diagramma che costruiremo. Ad esempio nella figura 1.8a vediamo che siamo in presenza di un diagramma

²Noi separiamo la lagrangiana nelle due parti $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$ libera ed interagente. All'interno di $\mathcal{L}_0$ mettiamo tutto ciò che è quadratico nei campi, mentre in $\mathcal{L}_{int}$ ciò che è di ordine superiore. Queste associazioni le facciamo perché i termini quadratici nei campi ci portano ad equazioni di campo lineari, che sono teorie in cui non succede nulla, allo stesso tempo se abbiamo termini di ordine superiore a 2 nei campi, essi ci daranno termini non lineari nelle equazioni di campo, che corrispondono proprio a comportamenti non banali.

non consistente con la teoria $\lambda\phi^4$, visto che abbiamo solo 3 gambe in ogni vertice. Allo stesso tempo però, se fossimo in presenza di una teoria $\lambda\phi^6$, allora il diagramma in figura 1.8b sarebbe consistente.



Figura 1.8

Osservazione. Facciamo un'osservazione importante che ci servirà quando parleremo del denominatore di Gell-Mann-Low. Nel caso di λ^1 troviamo dei termini di propagatori tra punti marcati, tutti moltiplicati per dei loop legati al vuoto. Vedi la figura 1.9. In più notiamo che il termine tra parentesi è proprio il contributo dell'ordine λ^0 (in figura 1.6). Questo non è un caso anomalo, ma in generale funziona in questo modo, ovvero, il termine di ordine λ^2 (1.3.12) conterrà diverse contrazioni, tra cui quella in cui contraiamo tutti i campi $\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi^4(x)$ tra loro, che ci ricostruiscono l'ordine λ^1 , e li moltiplichiamo per le contrazioni dei soli $\phi^4(y)$, che ci danno delle bolle di vuoto.

$$\begin{aligned}
 \lambda^1 : & \left(\begin{array}{ccc} \overline{x_1 x_2} & \begin{array}{c} x_1 \\ | \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ | \\ x_4 \end{array} & \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ x_3 \quad x_4 \end{array} \end{array} \right) \times \left(\text{Bolla di vuoto} \right) \\
 & = (\text{Termine } \lambda^0) \times \left(\begin{array}{c} \text{Bolle di} \\ \text{vuoto} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Figura 1.9

Arrivati a questo punto ci potremmo chiedere come usare nella vita vera i diagrammi di Feynman. Nella pratica quello che si fa è farsi guidare dagli esperimenti per costruire una lagrangiana di interazione e quindi studiare una teoria interagente. Però se ad esempio noi fossimo interessati all'espressione matematica di un solo particolare diagramma, in cui magari le particelle fanno qualcosa di particolarmente interessante, per il metodo che stiamo costruendo dovremmo scriverci Gell-Mann-Low, espandere con la serie di Dyson, applicare il teorema di Wick, considerare tutte le possibili contrazioni dei campi e solo a quel punto riusciremmo ad individuare l'integrale che rappresenta il nostro diagramma. Il fatto è che, oltre ad essere molto macchinoso, con questo metodo potremmo sbagliare un'infinità di cose.

Però ci possiamo rendere conto che per ogni diagramma noi abbiamo inconsciamente utilizzato delle particolari regole per fare delle associazioni oggetto $\leftrightarrow$ diagramma, per cui, dato un diagramma potremmo scriverci una ricetta per ottenere da esso l'espressione matematica. Questo insieme di regole sono le **regole di Feynman**, che occorre puntualizzare sono *theory dependent*.

Prima di pensare a come ricavare le regole di Feynman però ci serve chiarire un altro aspetto dei diagrammi, ossia il *fattore di simmetria*.

Vediamo infatti che le contrazioni di Wick vengono con delle molteplicità, che siamo in grado di calcolare in base alle permutazioni che possiamo avere. In parte tali molteplicità compensano i fattori $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{4!}\right)^n$ dell'espansione perturbativa. L'unica cosa che rimane sono eventuali simmetrie residue, per questo motivo il termine numerico complessivo è detto **fattore di simmetria**. Tale termine possiamo calcolarlo semplicemente contando il numero di simmetrie che un termine dello sviluppo ha. Ad esempio la bolla di vuoto della figura 1.10 ha un fattore di simmetria $s = 8$, poiché abbiamo 3 gradi di simmetria.

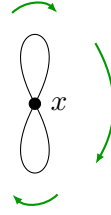


Figura 1.10

Ad esempio, nel termine di ordine λ^3 , scritto in (1.3.13) ed esplicitamente:

$$\frac{(-i\lambda)^3}{8} \int d^4z \int d^4w \int d^4u \Delta_F(x-z) \Delta_F(z-z) \Delta_F(z-w) \Delta_F(w-u) \times \\ \times \Delta_F(u-w) \Delta_F(u-u) \Delta_F(w-y). \quad (1.3.23)$$

tale termine è raffigurato nella figura 1.5 e si vede che si ha $s = 8$. Non è un caso che $s = 8$ compensi esattamente il coefficiente $1/8$ che esce da (1.3.14).

In generale la simmetria del problema si vede permutando le linee equivalenti (devono avere anche la stessa direzione temporale). Puoi vedere la figura 1.11 per alcuni esempi. Nota che nelle figure 3 e 4 teniamo conto delle $3!$ permutazioni possibili che possiamo avere delle linee interne.

Un'osservazione che possiamo fare è che il termine (1.3.22), ossia quello di interazione con 4 gambe uscenti, ha un fattore di simmetria $s = 1$, poiché i punti x_1, x_2, x_3 e x_4 sono fissati.

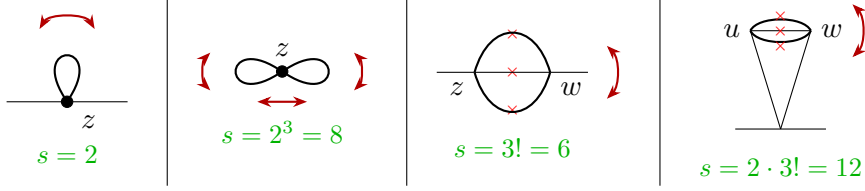


Figura 1.11: Fattori di simmetria.

1.3.2 Linee interne ed esterne

Scriviamo un attimo due definizioni che ci serviranno per distinguere i vari pezzi di un diagramma di Feynman. Facciamo riferimento alla figura 1.8a. Chiamiamo:

- **Propagatori esterni** le linee che collegano i punti marcati (1 e 2) tra loro o con un punto interno (x , y o z).
- **Propagatori interni** le linee che collegano due vertici tra loro, oppure un vertice con se stesso.

1.3.3 Le regole di Feynmann per il campo scalare

Enunciamo in questa sezione le regole di Feynmann per il campo scalare e la teoria ϕ^4 . Le regole di Feynmann permettono guardando uno specifico diagramma di Feynman, che rappresenta un certo ordine perturbativo, di scrivere l'integrale corrispondente (senza doverlo andare a beccare in mezzo a tutto lo sviluppo perturbativo).

Nello spazio delle coordinate e con $\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$ le regole di Feynman sono:

- Ad ogni campo *esterno* associamo:

$$\phi \sim 1 \quad (1.3.24)$$

e lo disegniamo come una linea tratteggiata.

- Ad ogni linea di campo *interna* associamo:

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (1.3.25)$$

- Ad ogni *vertice* associamo:

$$(-i\lambda) \int d^4z \quad (1.3.26)$$

intendendo che l'interazione avviene in ogni punto z dello spazio.

- Dividiamo ogni *diagramma* per il suo fattore di simmetria s .

Facciamo un esempio per capire meglio. Prendiamo il diagramma in figura 1.12. Utilizzando le regole possiamo scrivere:

$$\frac{(-i\lambda)^2}{3!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \Delta_F(x_1 - x) (\Delta_F(x_2 - x_1))^3 \Delta_F(y - x_2). \quad (1.3.27)$$

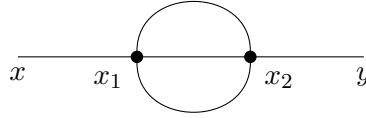


Figura 1.12

Queste sono le regole nello spazio delle coordinate, ma ovviamente possiamo passare facilmente nello spazio degli impulsi (p_i sono i quadri-impulsi entranti in un vertice a 4 linee). Infatti noi sappiamo scrivere esplicitamente i propagatori (1.3.25) che possiamo mettere all'interno della funzione di Green. Sappiamo già che rappresentiamo i propagatori con delle linee, ma ora è necessario associarci il momento p_i trasportato, dunque, continuando l'esempio della figura 1.12, lo rappresentiamo come in figura 1.13.

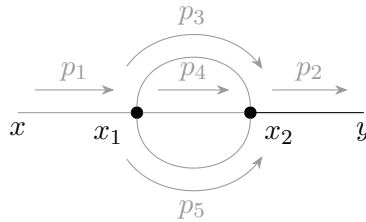


Figura 1.13

Esplicitando i $\Delta(x - y)$:

$$\begin{aligned}
G(x, y) &= \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \Delta_F(x_1 - x) (\Delta_F(x_2 - x_1))^3 \Delta_F(y - x_2) \\
&= \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \prod_{i=1}^5 \int \frac{d^4p_i}{(2\pi)^{3/2}} (i)^5 \frac{e^{-ip_1(x_1-x)}}{(p_1^2 - m^2 + i\varepsilon)} \times \\
&\quad \times \frac{e^{-ip_3(x_2-x_1)}}{(p_3^2 - m^2 + i\varepsilon)} \frac{e^{-ip_4(x_2-x_1)}}{(p_4^2 - m^2 + i\varepsilon)} \frac{e^{-ip_5(x_2-x_1)}}{(p_5^2 - m^2 + i\varepsilon)} \frac{e^{-ip_2(y-x_2)}}{(p_2^2 - m^2 + i\varepsilon)} \\
&= (i)^5 \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \left[\prod_{i=1}^5 \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \right] \int d^4x_1 \int d^4x_2 e^{-i(p_1-p_3-p_4-p_5)x_1} \times \\
&\quad \times e^{-i(p_3+p_4+p_5-p_2)x_2} \times e^{+ip_1x+ip_2y} \tag{1.3.29}
\end{aligned}$$

gli integrali d^4x e d^4y ci danno delle $(2\pi)^4\delta$ ciascuno

$$\begin{aligned}
&= (i)^5 \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_1x+ip_2y} \times \\
&\quad \times \left[\prod_{i=3}^5 \int \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4} \right] \left[\prod_{j=1}^5 \frac{1}{p_j^2 - m^2 + i\varepsilon} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - p_4 - p_5) \times \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + p_3 + p_4 + p_5) \tag{1.3.30}
\end{aligned}$$

possiamo renderci conto che la prima riga di (1.3.30) è la misura di una trasformata di Fourier³ di una funzione di Green $\tilde{G}(p_1, p_2)$:

$$G(x, y) = \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_1x+ip_2y} \tilde{G}(p_1, p_2). \tag{1.3.32}$$

Ovviamente le funzioni di Green $G(x, y)$ e $\tilde{G}(p_1, p_2)$, rispettivamente scritte nello spazio delle coordinate e dei momenti, contengono le stesse informazioni fisiche, per cui possiamo utilizzare equivalentemente l'una o l'altra. Abbiamo scritto:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(p_1, p_2) &= \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_5}{(2\pi)^4} \prod_{i=1}^5 \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \times \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - p_4 - p_5) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + p_3 + p_4 + p_5). \tag{1.3.33}
\end{aligned}$$

Dunque dato un diagramma possiamo, tramite le regole di Feynman, scrivere $G(x, y)$ ed equivalentemente $\tilde{G}(p_1, p_2)$ (che ricaviamo da G). Possiamo scrivere le regole di Feynman nello spazio degli impulsi:

³Infatti sappiamo che:

$$f(x) = \int dx e^{ipx} \tilde{f}(p). \tag{1.3.31}$$

- Ad ogni campo *esterno* associamo:

$$\phi \sim e^{-ipx}. \quad (1.3.34)$$

- Ad ogni linea di campo *interna* associamo:

$$\tilde{\Delta}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (1.3.35)$$

- Ad ogni *vertice* associamo:

$$(-i\lambda) \cdot (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_i) \quad (1.3.36)$$

dove la δ ci garantisce la conservazione dei momenti.

- In ogni *loop* integriamo:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \quad (1.3.37)$$

per tutti i momenti non fissati dalla δ^4 .

- Dividiamo ogni *diagramma* per il suo fattore di simmetria s .

Ricordiamoci che per convenzione l'impulso ha segno positivo se punta dentro il vertice (impulso entrante).

Altri due esempi di applicazione delle regole di Feynman nello spazio degli impulsi sono quelli rappresentati in figura 1.14. Per un vertice con 4 gambe esterne abbiamo:

$$\tilde{G}(p) = (-i\lambda) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) e^{-i(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)z} \quad (1.3.38)$$

$$= (-i\lambda) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4). \quad (1.3.39)$$

Per un vertice con 2 gambe esterne ed un loop abbiamo:

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{(-i\lambda)}{2} \int d^4 z \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip_1(z-x)}}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \times \\ &\quad \times \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip_2(z-x)}}{p_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip_3(z-z)}}{p_3^2 - m^2 + i\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.3.40)$$

$$\tilde{G}(p_1, p_2) = \frac{(-i\lambda)}{2} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\varepsilon} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2). \quad (1.3.41)$$

Però attenzione, abbiamo scritto le regole nello spazio degli impulsi e visto un paio di esempi di come applicarli, ma non abbiamo finito le carte della nostra mano. Infatti, se ritorniamo all'equazione (1.3.33):

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p_1, p_2) &= \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_5}{(2\pi)^4} \prod_{j=1}^5 \frac{i}{p_j^2 - m^2 + i\varepsilon} \times \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - p_4 - p_5) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + p_3 + p_4 + p_5) \end{aligned}$$

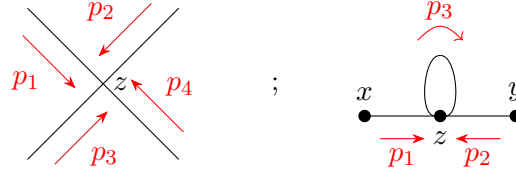


Figura 1.14

e combiniamo le due δ di conservazione possiamo vedere:

$$\begin{aligned} \delta^4(p_1 - p_3 - p_4 - p_5) \delta^4(p_2 + p_3 + p_4 + p_5) &= \\ &= \delta^4(p_1 - p_3 - p_4 - p_5) \delta^4(p_1 + p_2) \end{aligned} \quad (1.3.42)$$

che ci piace di più perché la prima delle due δ dipende dal processo (contenendo i momenti dei propagatori interni), mentre la $\delta^4(p_1 + p_2)$ dipende solo dalle gambe esterne e ci comunica la conservazione del quadri-impulso. Nota che questa δ^4 è legata all'invarianza per traslazioni; infatti $\tilde{G}$ è invariante per traslazioni e molte volte, in alcuni testi, si definisce la trasformata di Fourier di $G(x_1, x_2)$ come:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \tilde{G}(p_1, p_2)$$

fattorizzando la delta di conservazione. Inserendo (1.3.42) all'interno di $\tilde{G}(p_1, p_2)$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p_1, p_2) &= \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_5}{(2\pi)^4} \prod_{j=1}^5 \frac{i}{p_j^2 - m^2 + i\varepsilon} \times \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - p_4 - p_5) \quad (1.3.43) \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{3!} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \times \\ &\quad \times \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_5}{(2\pi)^4} \frac{(i)^3 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - p_4 - p_5)}{(p_3^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_4^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_5^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad (1.3.44) \end{aligned}$$

a questo punto potrebbe sembrarci che le linee interne siano indipendenti, ma in realtà possiamo ancora integrare in uno dei tre momenti non fissati sfruttando la δ^4 . Infatti possiamo scrivere:

$$\delta^4(p_1 - p_3 - p_4 - p_5) \implies p_5 = p_1 - p_3 - p_4 \quad (1.3.45)$$

ed integrare in $d^4 p_5$:

$$\begin{aligned} &= \frac{(-i\lambda)^2}{3!} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \times \\ &\quad \times \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \frac{(i)^3}{(p_3^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_4^2 - m^2 + i\varepsilon)((p_1 - p_3 - p_4)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \end{aligned}$$

rimangono comunque degli integrali sui momenti delle linee interne, ma il numero di momenti indeterminati che ci restano in $\tilde{G}(p_1, p_2)$ è il numero di loop del diagramma. Come possiamo verificare dalla figura 1.13.

Conoscere il numero di loop ci interessa, e anche parecchio, perché entrano in gioco quando cerchiamo di organizzare la serie perturbativa in termini di $\hbar$. Perleremo meglio di ciò nella sezione §1.3.6.

1.3.4 Diagrammi connessi, non connessi e bolle di vuoto

Comintuiamo ad addentrarci sempre di più nella trattazione dei diagrammi di Feynman, definendo i termini del titolo. Infatti, noi all'inizio della sezione §1.3.1 ci siamo preoccupati di trovare un'espressione calcolabile per il teorema di Gell-Mann-Low, ma lo abbiamo fatto ignorando completamente il denominatore di (1.2.88). Vediamo che cosa ci stiamo perdendo:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) \right\} | 0 \rangle &\sim \langle 0 | \mathbb{1} | 0 \rangle + \\ + \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \langle 0 | T \phi^4(x) | 0 \rangle &+ \frac{1}{2} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4x d^4y \langle 0 | T \phi^4(x) \phi^4(y) | 0 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (1.3.46)$$

e notiamo subito che non abbiamo punti marcati. Continuando i conti vediamo che possiamo scrivere (ci scordiamo per un attimo della molteplicità):

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) \right\} | 0 \rangle &\sim 1 + \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \Delta^2(x-x) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4x d^4y &\left\{ \Delta^2(x-x) \Delta^2(y-y) + \Delta^4(x-y) + \right. \\ &\left. + \Delta(x-x) \Delta^2(x-y) \Delta(y-y) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (1.3.47)$$

che graficamente lo rappresentiamo come in figura 1.15. Dunque, il denominatore di Gell-Mann-Low ci dà come contributi i diagrammi senza punti marcati. Diamo delle definizioni:

- Le **bolle di vuoto** sono i pezzi del diagramma che non sono collegati alle gambe esterne.
- I **diagrammi sconnessi** sono quelli che non hanno bolle di vuoto ma *permettono forward scattering* (cioè posso avere particelle che non interagiscono, come in figura 1.26). Un esempio sono i 3 termini (presi singolarmente) del primo ordine perturbativo in λ^1 (figura 1.9).
- I **diagrammi connessi**⁴ sono quelli che non hanno nè bolle di vuoto nè forward scattering.

⁴Teniamo bene a mente che il termine "diagramma connesso" può essere soggetto ad abusi di notazione.

- Chiamiamo **diagrammi tree-level** i diagrammi in cui *non abbiamo loop* (quindi tutti i 4-impulsi sono fissati).

$$\begin{aligned} \langle 0 | T e^{\int d^4x \phi^4(x)} | 0 \rangle &\sim 1 + \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \left(\text{diagramma a loop} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4x d^4y \left\{ \left(x \text{ a loop} \times y \text{ a loop} \right) + \left(x \text{ a loop} \text{ a loop} y \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(x \text{ a loop} y \text{ a loop} \right) \right\} + \dots \end{aligned}$$

Figura 1.15: Espansione perturbativa al second'ordine per le ampiezze di vuoto in teoria ϕ^4 .

Però per il numeratore dell'equazione di Gell-Mann-Low avevamo trovato i termini raffigurati in figura 1.16 (ovviamente sono raffigurati solo una parte di essi). Possiamo dimostrare che la formula di Gell-Mann-Low (GML) (1.2.88), in cui inseriamo la rappresentazione (1.2.87), esclude automaticamente le bolle di vuoto.

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | T \left[\phi(x) \phi(y) \exp \left\{ -i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right\} \right] | 0 \rangle &\sim \\ \sim \left(\text{diagrammi a loop} \right) \times \left(1 + \text{diagrammi a loop} + \text{diagrammi a loop} + \text{diagrammi a loop} + \text{diagrammi a loop} + \dots \right) &+ \dots \end{aligned}$$

Figura 1.16

Possiamo vedere esplicitamente che se consideriamo tutti i termini dello sviluppo otteniamo che le bolle di vuoto si semplificano tra numeratore e denominatore. Per far ciò studiamo numeratore e denominatore separatamente ed espandiamo in serie (ricorda che i campi dentro l'hamiltoniana $\mathcal{H}_I$ sono in rappresentazione di interazione):

$$\langle \Omega | T \left[\phi_1 \dots \phi_n \right] | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \left[\phi_1 \dots \phi_n e^{-i \int d^4z \mathcal{H}_I} \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left[e^{-i \int d^4z \mathcal{H}_I} \right] | 0 \rangle} \equiv \frac{N}{D}. \quad (1.3.48)$$

Abbiamo indicato con n il numero di campi, ovvero numero di particelle in stato finale e iniziale; consideriamo p l'ordine della perturbazione, s è il

numero di vertici collegati con le gambe esterne, mentre $p - s$ è il numero di vertici che non sono collegati con le gambe esterne (ovvero le bolle di vuoto).

Abbiamo visto che il numeratore (N) di GML, che possiamo sviluppare come:

$$N = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^p}{p!} \langle 0 | T \left[\phi_1 \dots \phi_n \int d^4 y_1 \dots d^4 y_p \mathcal{H}_I(y_1) \dots \mathcal{H}_I(y_p) \right] | 0 \rangle \quad (1.3.49)$$

dà come risultato tutti i diagrammi (ad un certo ordine perturbativo), compresi quelli che includono le bolle di vuoto; infatti Wick ci dice che dobbiamo considerare tutte le possibili contrazioni e per questo ci ritroviamo con alcune contrazioni che contraggono tutti i campi ϕ_i tra loro e tutti i campi di $\mathcal{H}_I$ a parte. Dunque, possiamo riscrivere il numeratore esplicitandono i vertici collegati alle gambe esterne e quelli scollegati (bolle di vuoto):

$$N = \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-i)^p}{p!} \langle 0 | T \left[\phi_1 \dots \phi_n \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y_s \mathcal{H}_I(y_1) \dots \mathcal{H}_I(y_s) \right] | 0 \rangle_C \right\} \times \quad (1.3.50)$$

$$\times \sum_{s=0}^p \left\{ \frac{p!}{s!(p-s)!} \langle 0 | T \left[\int d^4 x_{s+1} \dots \int d^4 x_p \mathcal{H}_I(x_{s+1}) \mathcal{H}_I(x_p) \right] | 0 \rangle \right\} \quad (1.3.51)$$

in cui nella riga (1.3.50) ci sono i termini collegati alle gambe esterne e in (1.3.51) le bolle di vuoto. Notiamo anche che appare un termine:

$$\binom{p}{s} = \frac{p!}{s!(p-s)!} \quad (1.3.52)$$

perché stiamo scegliendo s elementi ($\mathcal{H}$) da un gruppo di p elementi che sono equivalenti tra loro (il pedice C serve solo ad enfatizzare il fatto che i vertici sono collegati).

Possiamo manipolare l'espressione estraendo il primo blocco di termini e riscrivendo il resto in termini di $r = p - s$. Da notare che quando scambiamo le sommatorie dobbiamo cambiarne l'indice p , in modo da rispettare la condizione $p > s$, perciò:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=0}^p \longrightarrow \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=s}^{\infty}. \quad (1.3.53)$$

e dunque:

$$N = \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-i)^s}{s!} \langle 0 | T \left[\phi_1 \dots \phi_n \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y_s \mathcal{H}_I(y_1) \dots \mathcal{H}_I(y_s) \right] | 0 \rangle_C \right\} \times \quad (1.3.54)$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-i)^r}{r!} \langle 0 | T \left[\int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_r \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_r) \right] | 0 \rangle \right\} \quad (1.3.55)$$

osserviamo che il secondo blocco (1.3.55), che contiene le bolle di vuoto, coincide esattamente con l'espansione in serie del denominatore! Infatti vale:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \exp \left\{ -i \int d^4 x \mathcal{H}_I(x) \right\} | 0 \rangle &= \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-i)^r}{r!} \langle 0 | T \left[\int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_r \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_r) \right] | 0 \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (1.3.56)$$

Tutti i diagrammi non collegati alle gambe esterne (dunque le bolle di vuoto) non danno contributo al risultato finale; in altre parole la formula di Gell-Mann-Low elimina le bolle di vuoto, ma mantiene sia i diagrammi connessi sia quelli disconnessi, come possiamo vedere in figura 1.17. Scriviamo:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \left[\phi_1 \dots \phi_n \right] | \Omega \rangle &= \frac{\langle 0 | T \left[\phi_1 \dots \phi_n e^{-i \int d^4 z \mathcal{H}_I} \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left[e^{-i \int d^4 z \mathcal{H}_I} \right] | 0 \rangle} \quad (1.3.57) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-i)^s}{s!} \langle 0 | T \left[\phi_1 \dots \phi_n \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y_s \mathcal{H}_I(y_1) \dots \mathcal{H}_I(y_s) \right] | 0 \rangle_C \quad (1.3.58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 | \Omega \rangle &= \text{diagrammi} + \text{diagrammi} + \text{diagrammi} + \dots \\ &+ \text{diagrammi} + \text{diagrammi} + \text{diagrammi} + \text{diagrammi} + \text{diagrammi} + \dots \end{aligned}$$

Figura 1.17

1.3.5 Contributo delle bolle di vuoto

Da questo punto tratteremo argomenti che potrebbero sovrapporsi con quanto vedremo al corso di Advanced, ma non per questo meno importanti (e meno chiesti all'esame).

Abbiamo visto che la formula di Gell-Mann-Low non considera in realtà il contributo delle bolle di vuoto, ma solamente quello dei diagrammi connessi e non. Però ci potremmo chiedere quale sia effettivamente il significato fisico delle bolle di vuoto.

Studiamo la densità di energia di una bolla di vuoto al second'ordine in figura 1.18:

$$V_i = \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int d^4z \int d^4w \langle 0 | T[\phi_z^4 \phi_w^4] | 0 \rangle \quad (1.3.59)$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int d^4z \int d^4w \Delta_F(z-z) \Delta_F^2(z-w) \Delta_F(w-w) \quad (1.3.60)$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int d^4z \int d^4w \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p_1) e^{-ip_1(z-w)} \times \\ \times \tilde{\Delta}(p_2) e^{-ip_2(w-z)} \tilde{\Delta}(p_3) e^{-ip_3(z-z)} \tilde{\Delta}(p_4) e^{-ip_4(w-w)} \quad (1.3.61)$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) \tilde{\Delta}(p_3) \tilde{\Delta}(p_4) \times \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2) \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1) \quad (1.3.62)$$

$$= (\dots) \delta^4(p_1 - p_2) \delta^4(p_1 - p_2) \quad (1.3.63)$$

$$= (\dots) \delta^4(p_1 - p_2) \delta^4(0) \quad (1.3.64)$$

$$= \bar{V}_i (2\pi)^4 \delta^4(0). \quad (1.3.65)$$

Se regolarizziamo la teoria, ovvero regolarizziamo l'infinito mettendoci in una scatola di volume spaziale V_3 per un certo tempo τ , allora:

$$\delta^4(0) = \frac{2\tau V_3}{(2\pi)^4} \quad (1.3.66)$$

ovvero, è proporzionale al volume dello spazio di Minkowski (volume temporale 2τ per il volume spaziale V_3).

Ricordiamoci che quando stavamo parlando della formula di Gell-Mann-Low, nella sezione §1.2.3, avevamo trovato la relazione generale:

$$\langle 0 | U(\tau, -\tau) | 0 \rangle = |\langle \Omega | 0 \rangle|^2 e^{-2i E_0 \tau} \quad (1.3.67)$$

ed era proprio il termine a denominatore, il cui termine esponenziale racchiude tutte le bolle di vuoto della teoria:

$$e^{-2i E_0 \tau} \propto \exp \left\{ \sum V_i \right\} = \exp \left\{ V_3 \tau \sum_{bolle} f_{bolle} \right\} \quad (1.3.68)$$

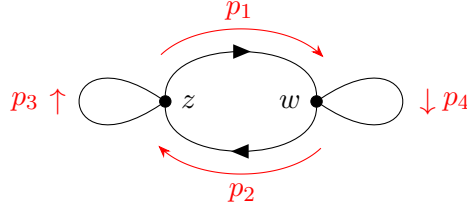


Figura 1.18

dove V_i è la densità di energia della bolla di vuoto. Se trascuriamo il termine $\ln(|\langle\Omega|0\rangle|^2)$, allora otteniamo la relazione:

$$E_0 = \frac{i}{2\tau} \sum V_i \quad (1.3.69)$$

che messa insieme al fatto che, da (1.3.66), abbiamo:

$$\frac{1}{2\tau} = \frac{V_3}{(2\pi)^4 \delta^4(0)} \quad (1.3.70)$$

ci permette di scrivere:

$$\frac{E_0}{V_3} = i \sum \frac{V_i}{(2\pi)^4 \delta^4(0)} = i \sum \tilde{V}_i \quad (1.3.71)$$

cioè riscriviamo la densità di energia del vuoto interagente in funzione della somma delle bolle di vuoto.

In altre parole le bolle di vuoto permettono di calcolare l'energia di vuoto di una teoria interagente E_0 . In QFT l'energia del vuoto non ha molta rilevanza fisica, ma in Relatività Generale non è più così, poiché sappiamo che tutto modifica la geometria dello spazio-tempo. Per questo le bolle di vuoto (E_0) costituiscono la costante cosmologica Λ della teoria.

Un problema attuale dei fisici teorici è quello di vedere perché $\Lambda = \sum \text{bolle} \approx 0$, sebbene le predizioni siano molto lontane dal valore sperimentale 10^{-9} J/m^3 ; questo problema aperto è noto come *Vacuum catastrophe*. Inoltre, l'energia di vuoto ha delle fluttuazioni che sono appunto causate da queste bolle di vuoto.

Nota. Ovviamente qua stiamo parlando del vuoto interagente $|\Omega\rangle$. Il vuoto della teoria libera $|0\rangle$ non fa effettivamente nulla. È facile confondersi poiché li chiamiamo entrambi con lo stesso nome, ma se pensiamo alla terminologia inglese sistemiamo i dubbi, poiché chiamiamo $|0\rangle$ *void*, che è effettivamente il vuoto senza nulla dentro, ma chiamiamo $|\Omega\rangle$ *vacuum*, o *ground state*, in cui non ci sono particelle fisiche che si propagano, ma esso è pieno di particelle virtuali o processi virtuali, rappresentati dalle bolle di vuoto, che rendono la sua energia non nulla.

1.3.6 Gradi di divergenza

Uno dei problemi della QFT, che nel corso della storia è stato molto dibattuto⁵, è il problema degli infiniti nella teoria. Infatti, in ogni diagramma possono essere presenti delle divergenze (che in corsi futuri impareremo a domare).

Per vedere il grado di divergenza di un diagramma occorre riorganizzare la serie perturbativa al posto che in termini di λ , in termini di correzioni quantistiche in $\hbar$ (quindi in base ai loop). Dunque, dobbiamo reintrodurre $\hbar$ nelle nostre equazioni. In realtà $\hbar$ compare in diversi posti, ma quelli rilevanti⁶ sono:

$$T \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{H}_{int} \right\} \quad (1.3.72)$$

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = i\hbar \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1.3.73)$$

$$\Rightarrow \Delta(x - y) = i\hbar \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}p(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (1.3.74)$$

e in questo modo le regole di Feynman nello spazio dei momenti diventerebbero:

- Per ogni linea di campo interna associamo:

$$\frac{i\hbar}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (1.3.75)$$

- Per ogni vertice associamo:

$$-\frac{i\lambda}{\hbar} (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_i). \quad (1.3.76)$$

Cerchiamo di stabilire un'ordine in $\hbar$. Consideriamo un generico diagramma con E linee esterne, I linee interne e V vertici. Il suo peso in $\hbar$ sarà (ricorda che il propagatore è proporzionale ad $\hbar$):

$$\hbar^{E+I-V} \quad (1.3.77)$$

⁵Basti pensare che Dirac stesso, uno dei padri della teoria, nel momento in cui sbarcarono gli infiniti e la necessità del processo di rinormalizzazione, disse che la teoria era sbagliata e bisognava ricominciare da capo. Non comprendeva come una teoria che occorreva aggiustare a mano, per renderla in accordo con gli esperimenti, potesse essere la giusta teoria della natura.

⁶Avremmo anche:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \dots \right) \quad , \quad S = \int d^4x \frac{\mathcal{L}}{\hbar} \quad , \quad (\square + m^2) G = -i\hbar \delta^4(x - y).$$

se chiamiamo L il numero di loop del diagramma, esso è dato dai p^μ indeterminati su cui integriamo:

$$L = I - V + 1 \quad (1.3.78)$$

in cui ricordiamo che integriamo sulle linee interne (I), imponiamo V vincoli di conservazione nei vertici (che ci eliminano degli integrali) e abbiamo 1 delta di conservazione dalle linee esterne (anch'essa ci toglie un'integrale). Dunque, invertendo la relazione scrivendo $I - V = L - 1$, nel diagramma abbiamo:

$$\hbar^{E-1+L} \quad (1.3.79)$$

il che ci rende evidente che salendo con i loop (L) nel diagramma stiamo salendo in potenze di $\hbar$. Puoi vedere in figura 1.19a degli esempi di termini. Nota che abbiamo una potenza overall fissata dalla scelta dello stato iniziale e finale e una potenza che dipende dal numero di momenti indipendenti, pari al numero di loop. Dunque, abbiamo imparato che: lo sviluppo in loop, fissata la funzione di Green, ossia il numero di gambe esterne, consiste in uno sviluppo in $\hbar$. Sviluppare in $\hbar$ ci ricorda tanto lo sviluppo semi-classico. Infatti, i diagrammi tree-level corrispondono al processo classico e le correzioni con n loop sono le correzioni quantistiche del processo.

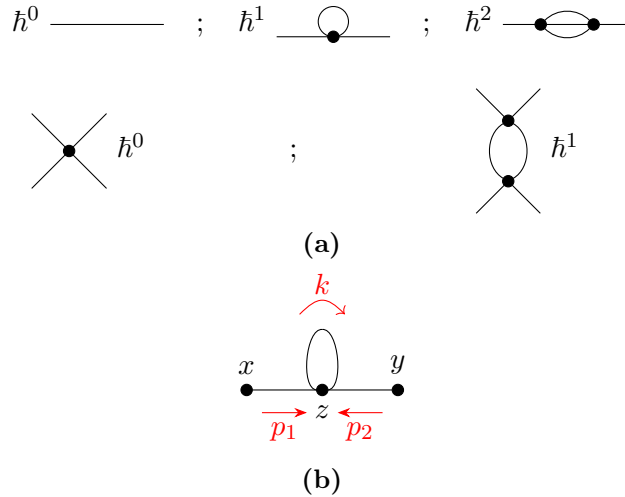


Figura 1.19

Noi in questo corso considereremo solamente tree-level, poiché nel momento in cui abbiamo loop compaiono infiniti, che non sappiamo ancora trattare. Infatti possiamo provare a calcolare il diagramma in figura 1.19b.

Abbiamo:

$$= \frac{-i\lambda}{2} \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \times \\ \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k + k) \quad (1.3.80)$$

proviamo ad integrare:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad , \quad k^\mu k_\mu = k^2$$

andando in coordinate sferiche (in 4 dimensioni):

$$\int \frac{d\Omega_k}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dk k^3 \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad , \quad k = |k| \quad (1.3.81)$$

in cui abbiamo l'integrale in $d\Omega_k$ è semplicemente un numero e lo ignoriamo, mentre l'integrale in dk dobbiamo regolarizzarlo con un *cut-off*, e poi farne il limite:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda \frac{k^3 dk}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (1.3.82)$$

che non ci dà problemi quando $k \rightarrow 0$, ovvero quando siamo a basse energie e quindi nell'infrarosso. Il problema sorge quando abbiamo $\Lambda \rightarrow \infty$, poiché per k molto grandi la massa m è sicuramente trascurabile e l'integrando è kdk e l'integrale viene:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^2 \quad (1.3.83)$$

che chiaramente diverge e per risolvere il problema dobbiamo studiare la *ri-normalizzazione*.

Siamo però in grado di capire quali diagrammi divergono e quali no. Ci calcoliamo il *grado di divergenza superficiale*, il quale sarà theory dependent⁷.

Facciamo un conto molto approssimato in D dimensioni. Consideriamo un diagramma con L loop ed I gambe interne. I momenti dei loop danno contributo:

$$\prod_{i=1}^L d^D p \sim p^{DL} \quad (1.3.84)$$

i propagatori interni danno:

$$\prod_{i=1}^I \frac{1}{p^2 - m^2} \sim \frac{1}{p^{2I}} \quad (1.3.85)$$

⁷Intendiamo *superficiale* nel senso che sarà un po' approssimativo e che se inseriamo termini aggiuntivi potrebbe non essere più un parametro affidabile per stimare la divergenza

dunque, per $p \rightarrow \infty$, l'integrale diverge se:

$$\frac{p^{DL}}{p^{2I}} = p^{DL-2I} \geq 1. \quad (1.3.86)$$

Definiamo il *grado di divergenza* (superficiale) in D dimensioni come:

$$\mathcal{D} = DL - 2I. \quad (1.3.87)$$

Studiamo una teoria del tipo:

$$\mathcal{L}_{int} \sim \phi^N \quad (1.3.88)$$

cioé in cui ci sono N linee di campo. Noi possiamo ricavarci una relazione tra il numero di vertici ed E , I . Infatti sappiamo che in ogni vertice entrano N linee, che provengono dalle E linee esterne e dalle linee interne (che contiamo doppie), quindi per ogni diagramma abbiamo:

$$VN = E + 2I \quad (1.3.89)$$

e di conseguenza:

$$I = \frac{1}{2}(NV - E) \quad (1.3.90)$$

da cui segue:

$$L = I - (V - 1) = \frac{1}{2}NV - \frac{1}{2}E - V + 1. \quad (1.3.91)$$

Pertanto il grado di divergenza è:

$$\mathcal{D} = DL - 2I \quad (1.3.92)$$

$$= D \left(\frac{1}{2}NV - \frac{1}{2}E - V + 1 \right) - (NV - E) \quad (1.3.93)$$

$$= V \left(\frac{1}{2}DN - D - N \right) - \left(\frac{1}{2}DE - D - E \right). \quad (1.3.94)$$

Se $\mathcal{D} > 0$ il diagramma diverge come $\Lambda^{\mathcal{D}}$ (in cui Λ è un valore di cut-off), se $\mathcal{D} = 0$ diverge come $\ln \Lambda$, mentre se $\mathcal{D} < 0$ non diverge.⁸ Come già accennato, queste divergenze possono essere risolte tramite una rinormalizzazione. Da notare che per campi massivi non abbiamo contributi di divergenza infrarossa ($p \rightarrow 0$). La massa e la costante di accoppiamento vengono cambiate dalla rinormalizzazione.

Se facciamo l'esempio in quattro dimensioni con:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1.3.95)$$

abbiamo $D = 4$, $N = 4$ e dunque $\mathcal{D} = 4 - E$, perciò i diagrammi con 2 o 4 gambe esterne hanno $\mathcal{D} \geq 0$, dunque divergono rispettivamente con una divergenza quadratica ($\mathcal{D} = 2$) o logaritmica ($\mathcal{D} = 0$). I diagrammi con $E \geq 6$ gambe esterne non sono divergenti.

⁸Notiamo che la divergenza tratta solamente le componenti ultraviolette, ovvero $p \rightarrow \infty$.

1.4 Contributi di singola particella e più

In questa sezione ci preoccupiamo di caratterizzare meglio le funzioni di Green, che abbiamo già visto con i diagrammi di Feynman, e cerchiamo di dargli un senso fisico.

Abbiamo visto che, grazie alla formula di Gell-Mann-Low, siamo in grado di dare un'espressione del propagatore interagente in termini di sviluppo perturbativo, e anche che ci sono alcuni diagrammi che o non danno contributo (le bolle di vuoto) oppure portano a possibili divergenze (loop). Però possiamo espandere ancora di più le nostre conoscenze riguardo il propagatore interagente.

In generale, calcoliamo funzioni di Green poiché sono le uniche quantità che ci permettono di estrarre informazioni fisiche; in un primo momento ci concentreremo sul cercare di estrarre la massa fisica delle particelle, ma in generale possiamo estrarne anche la probabilità che un certo processo possa avvenire (ampiezza di probabilità e sezione d'urto).

1.4.1 Introduzione alla rinormalizzazione della teoria

Questa sezione è stata aggiunta a mano a posteriori per una mia migliore comprensione degli argomenti che seguono. È una rapida introduzione della sezione con qualche spoiler di quello che troveremo. Invito comunque a confrontare ciò che ho scritto con i vari libri.

Il passaggio da teoria libera ad interagente non solo implica un'interazione tra le particelle, ma anche un cambiamento delle loro proprietà, come massa e carica.

Questo processo lo chiamiamo *rinormalizzazione* e può essere immaginato come un processo in cui la particella si "veste" delle interazioni. Dalla teoria libera, ricordiamo che le particelle sono eccitazioni dei campi attorno al vuoto e gli operatori a e $a^\dagger$ distruggono e creano stati a singola particella, una per volta, le quali evolvono indisturbate e sole.

Sappiamo anche che dal propagatore (che descrive la propagazione di una singola particella da un punto y ad un punto x in modo libero):

$$\tilde{G}_0 = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.4.1)$$

in cui p è il momento della particella, la quale non influenza e non è influenzata dalle altre. Ricordiamo anche che, nel caso in cui non conosciamo la massa della particella, potremmo controllare il polo del propagatore che ci fornirebbe la massa m .

Nel momento in cui accendiamo le interazioni, le cose si complicano notevolmente. Le particelle cominciano a "parlarsi", il vuoto non è più semplice

da trattare come $|0\rangle$ e, nel momento in cui inseriamo una particella nel sistema, questa comincia ad interagire, modificando le sue caratteristiche con altri oggetti.

Ci si potrebbe chiedere se è ancora possibile estrarre le informazioni *fisiche* (misurate negli esperimenti) di una sola particella.

Noi chiamiamo quasi-particle o *particelle vestite* (ma anche particelle ri-normalizzate) le particelle singole della teoria non interagente unite dalle interazioni della teoria. Ciò che sapevamo era che agendo con $a_p^\dagger$ sullo stato di vuoto $|0\rangle$, noi creavamo uno stato di singola particella con momento p definito. In una teoria interagente, possiamo creare uno stato a singola particella con momento definito con un operatore, differente da $a_p^\dagger$, che chiamiamo $q_p^\dagger$. Il problema è che $q_p^\dagger$ non lo conosciamo per nulla e l'unica arma nelle nostre mani è $a_p^\dagger$. Se applichiamo l'operatore di creazione $a_p^\dagger$ della teoria non interagente sul vuoto $|\Omega\rangle$, costruiamo una sovrapposizione di stati, tra cui potrebbe esserci quello di singola particella $|p\rangle$, ma anche in aggiunta ne avremo a molte particelle i cui momenti si sommano a p :

$$a_p^\dagger |\Omega\rangle = |p\rangle \langle p| a_p^\dagger |\Omega\rangle + \sum (\text{multiparticle parts}) . \quad (1.4.2)$$

È importante notare che l'energia di singola particella è differente da quella che troveremmo nella teoria libera. Se m è il parametro che compare in $\mathcal{L}$ e nella legge di dispersione libera $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$, avremo una energia di teoria interagente:

$$E = \sqrt{p^2 + m_p^2} \quad (1.4.3)$$

in cui m_p è la massa di singola particella misurata negli esperimenti. m_p è chiamata *massa fisica* ed è differente da quella che leggiamo in $\mathcal{L}$.

Dalla rappresentazione del propagatore interagente di Lehmann-Källén, si ha che esso descrive non solo l'evoluzione degli stati a singola particella, ma anche quelli a multiparticella:

$$\tilde{G}(p) = \frac{iZ}{p^2 - m_p^2 + i\epsilon} + \left(\begin{array}{c} \text{parti di} \\ \text{multiparticelle} \end{array} \right) . \quad (1.4.4)$$

Sappiamo (lo scopriremo) che un modo di scrivere il propagatore completo è quello di usare la densità spettrale ρ :

$$G(x, y) = \int_0^\infty \frac{dM^2}{(2\pi)} \rho(M^2) \Delta_F(x, y, M^2) \quad (1.4.5)$$

in cui la densità $\rho(M^2)$ ha lo spettro in figura 1.20, e si può scrivere come:

$$\rho(M^2) = (2\pi)\delta(M^2 - m_p^2)Z + \left(\begin{array}{c} \text{parti di} \\ \text{multiparticelle} \end{array} \right) \quad (1.4.6)$$

$$= (2\pi)\delta(M^2 - m_p^2)Z + \theta(M^2 - 4m_p^2)\tilde{\rho}(M^2) \quad (1.4.7)$$

così che si abbia una parte di singola particella e una di continuo, il che vuol dire scrivere:

$$\tilde{G}(p) = \frac{iZ}{p^2 - m_p^2 + i\epsilon} + \int_{\sim 4m_p^2}^{\infty} dM^2 \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (1.4.8)$$

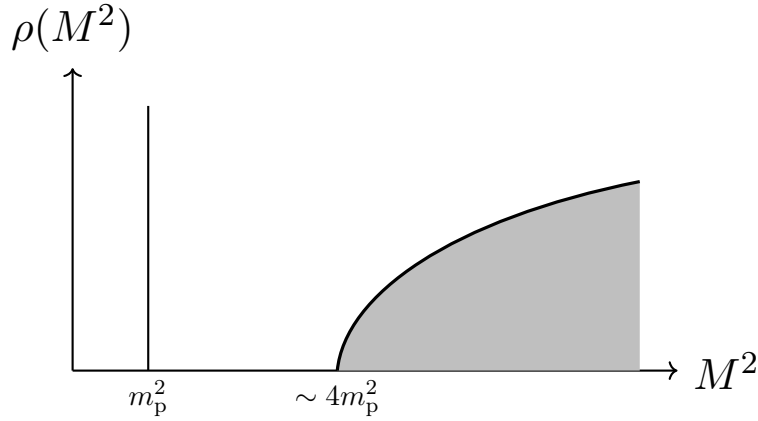
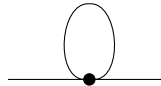


Figura 1.20

Abbiamo quindi capito che le interazioni "vestono" le particelle e le loro caratteristiche. Però possiamo anche vedere come il processo di rinormalizzazione modifichi il propagatore e i diagrammi di Feynman. I parametri che compaiono nella Lagrangiana (massa m , costante di accoppiamento λ e altre) le chiamiamo *bare parameters*, ossia parametri nudi (svestiti).

Dal propagatore sappiamo che estraiamo l'informazione sulla massa fisica delle particelle guardando i poli della funzione di Green. Però, se ci guardiamo il propagatore esatto per una teoria interagente e non separiamo il contributo di singola particella da quello a multiparticella, allora confrontando i poli possiamo vedere come le interazioni influenzino m_p .

Possiamo individuare i diagrammi 1PI (One-Particle Irreducible), come *i diagrammi connessi che non possono essere disconnessi tagliando una linea di un propagatore interno*. Ad esempio:



chiamiamo 1PI self-energy (Σ) la somma di tutti i diagrammi 1PI con due linee esterne amputate:

$$-i\Sigma(p) = \sum \left(\begin{array}{c} \text{tutti i diagrammi 1PI} \\ \text{amputati con 2 linee esterne} \end{array} \right). \quad (1.4.9)$$

Scrivendo uno sviluppo perturbativo del propagatore, in termini di Σ , e confrontando i poli, troviamo:

$$m_p^2 = m^2 + \Sigma(p) \quad (1.4.10)$$

ovvero che Σ shifta la massa fisica per via della presenza di interazioni. Si fa una cosa simile per le costanti d'accoppiamento.

1.4.2 Propagatore di Lehmann-Kallen e autostati di una teoria interagente

Come ben sappiamo, se il campo è interagente allora, alla lagrangiana, dobbiamo aggiungere un potenziale di interazione che ci spieghi come il campo interagisce con se stesso e con le altre particelle. Prendiamo il vuoto $|\Omega\rangle$ della teoria interagente e cerchiamo di determinare il propagatore. In generale scriviamo (per definizione):

$$G(x_1, x_2) = \langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) | \Omega \rangle \quad (1.4.11)$$

$$= \theta(x_1^0 - x_2^0) G_+(x_1, x_2) + \theta(x_2^0 - x_1^0) G_+(x_2, x_1) \quad (1.4.12)$$

dove $G_+(x_1, x_2) = \langle \Omega | \phi(x_1) \phi(x_2) | \Omega \rangle$ è la funzione di Green avanzata, che in una teoria libera sappiamo calcolare tranquillamente.

Possiamo considerare gli autostati di energia ed impulso $|\alpha\rangle$:

$$\hat{P}_\rho |\alpha\rangle = \vec{p}_\rho^{(\alpha)} |\alpha\rangle \quad , \quad \hat{H} |\alpha\rangle = E_\alpha |\alpha\rangle \quad (1.4.13)$$

e la loro rispettiva relazione di completezza:

$$\mathbb{1} = \sum_\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (1.4.14)$$

Ricordiamo un attimo un paio di cose riguardanti il quadri-impulso. Sappiamo che vale:

$$[P_\rho, P_\mu] = 0 \quad (1.4.15)$$

ovvero, possiamo diagonalizzare le 4 componenti di P_ρ . Infatti, P_ρ è un operatore hermitiano, autoaggiunto che possiamo diagonalizzare e trovarne una base completa. Indichiamo con $p_\rho^{(\alpha)}$ l'impulso portato dallo stato $|\alpha\rangle$, che può essere di $1, 2, \dots, n$ particelle. Noi possiamo scrivere:

$$G_+(x_1, x_2) = \sum_\alpha \langle \Omega | \phi(x_1) \underline{|\alpha\rangle} \langle \alpha | \phi(x_2) | \Omega \rangle \quad (1.4.16)$$

e ci piacerebbe capire chi è il termine sottolineato. Possiamo ricordarci cosa abbiamo imparato dal teorema di Noether, nella sezione §1.1.3, ovvero che quando abbiamo una simmetria possiamo identificare la variazione del campo

con il commutatore tra la carica conservata e il campo stesso. Dunque se ci calcoliamo:

$$\partial_\mu \langle \Omega | \phi(x) | \alpha \rangle = \langle \Omega | \partial_\mu \phi(x) | \alpha \rangle \quad (1.4.17)$$

in cui abbiamo fatto filtrare dentro la derivata; visto che siamo in rappresentazione di Heisenberg e gli stati non evolvono, e possiamo utilizzare che per le traslazioni abbiamo (1.1.59):

$$\partial_\mu \langle \Omega | \phi(x) | \alpha \rangle = \langle \Omega | \partial_\mu \phi(x) | \alpha \rangle \quad (1.4.18)$$

$$= i \langle \Omega | [P_\mu, \phi(x)] | \alpha \rangle \quad (1.4.19)$$

$$= i \langle \Omega | P_\mu \phi(x) - \phi(x) P_\mu | \alpha \rangle. \quad (1.4.20)$$

Però dobbiamo tenere presente che il vuoto ci serve sia invariante, non solo per traslazioni, ma in generale anche per trasformazioni di Lorentz; dunque valgono:

$$P_\mu | \Omega \rangle = 0 \quad , \quad \langle \Omega | P_\mu = 0 \quad , \quad J_{\mu\nu} | \Omega \rangle = 0 \quad (1.4.21)$$

che se inseriti in (1.4.20):

$$\partial_\mu \langle \Omega | \phi(x) | \alpha \rangle = -i \langle \Omega | \phi(x) P_\mu | \alpha \rangle \quad (1.4.22)$$

ma noi stiamo considerando $\{\alpha\}$ come base di energia ed impulso, per cui:

$$\partial_\mu \langle \Omega | \phi(x) | \alpha \rangle = -ip_\mu^{(\alpha)} \langle \Omega | \phi(x) | \alpha \rangle \quad (1.4.23)$$

che è un'equazione differenziale che siamo in grado di risolvere, infatti la soluzione è:

$$\langle \Omega | \phi(x) | \alpha \rangle = e^{-ip^{(\alpha)}x} \langle \Omega | \phi(0) | \alpha \rangle \quad (1.4.24)$$

in cui abbiamo messo $\langle \Omega | \phi(0) | \alpha \rangle$ come costante moltiplicativa visto che vogliamo una condizione a $t = 0$. Capito questo possiamo inserirlo dentro (1.4.16) e vedere⁹:

$$G_+(x_1, x_2) = \sum_\alpha e^{-ip^{(\alpha)}(x_1-x_2)} \langle \Omega | \phi(0) | \alpha \rangle \langle \alpha | \phi(0) | \Omega \rangle \quad (1.4.29)$$

⁹Nota che si sarebbe giunti allo stesso risultato ricordando l'evoluzione temporale nella rappresentazione di Heisenberg:

$$\phi(x) = e^{ipx} \phi(0) e^{-ipx} \quad (1.4.25)$$

e implementando i conti

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_\alpha \langle \Omega | \phi(x) | \alpha \rangle \langle \alpha | \phi(y) | \Omega \rangle \quad (1.4.26)$$

$$= \sum_\alpha \langle \Omega | e^{ipx} \phi(0) e^{-ipx} | \alpha \rangle \langle \alpha | e^{ipy} \phi(0) e^{-ipy} | \Omega \rangle \quad (1.4.27)$$

$$= \sum_\alpha e^{-ip_\alpha(x-y)} |\langle \Omega | \phi(0) | \alpha \rangle|^2. \quad (1.4.28)$$

che possiamo ancora implementare inserendo un'altra identità in mezzo:

$$\mathbb{1} = \int d^4q \delta^4(q_\mu - p_\mu^{(\alpha)}) \quad (1.4.30)$$

così:

$$G_+(x_1, x_2) = \sum_\alpha \int d^4q \delta^4(q_\mu - p_\mu^{(\alpha)}) e^{-ip^{(\alpha)}(x_1 - x_2)} \langle \Omega | \phi(0) | \alpha \rangle \langle \alpha | \phi(0) | \Omega \rangle \quad (1.4.31)$$

$$= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x_1 - x_2)} \sum_\alpha (2\pi)^4 \delta^4(q_\mu - p_\mu^{(\alpha)}) \times \\ \times \langle \Omega | \phi(0) | \alpha \rangle \langle \alpha | \phi(0) | \Omega \rangle \quad (1.4.32)$$

in cui abbiamo riarrangiato i termini, aggiungendo anche un fattore $(2\pi)^4$, così da identificare una funzione dipendente solo da q_μ :

$$F(q) = \sum_\alpha (2\pi)^4 \delta^4(q_\mu - p_\mu^{(\alpha)}) \langle \Omega | \phi(0) | \alpha \rangle \langle \alpha | \phi(0) | \Omega \rangle \quad (1.4.33)$$

vedere $G_+(x_1, x_2)$ come trasformata di Fourier di essa e ovviamente $F(q)$ come l'antitrasformata di G_+ :

$$G_+(x_1, x_2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x_1 - x_2)} F(q) \quad (1.4.34)$$

$$F(q) = \int d^4x e^{iqx} G_+(x, 0) \quad (1.4.35)$$

in cui abbiamo fatto una traslazione $x \rightarrow x - x_2$ in modo da semplificare un po' gli argomenti; il che è lecito dal momento che la teoria è invariante per trasformazioni di Poincaré.

Vediamo brevemente che $F(q)$ è un'invariante di Lorentz. Sapendo che q_μ è un quadri-impulso, che la teoria è invariante per trasformazioni di Lorentz (G_+ non trasforma), che la misura d^4x e il prodotto scalare sono invarianti, abbiamo:

$$F(\Lambda q) = \int d^4x' e^{i(\Lambda q)(\Lambda x)} G_+(x', 0) \quad (1.4.36)$$

$$= F(q). \quad (1.4.37)$$

Ci serve anche dimostrare che $F(q) = 0$ nel caso in cui $q^0 < 0$. Data la definizione (1.4.33) vediamo che $F(q) \neq 0$ se la $\delta^4(q_\mu - p_\mu^{(\alpha)})$ è soddisfatta, ovvero se $q_\mu = p_\mu^{(\alpha)}$. Ricordiamo che $p_\mu^{(\alpha)}$ è uno degli autovalori di $\{\alpha\}$. In particolare, per le componenti 0 abbiamo $q_0 = p_0^{(\alpha)}$.

Per quanto ci riguarda in QFT possiamo mettere l'energia del vuoto a zero (poiché non abbiamo i problemi che avremmo in RG):

$$P_\mu |\Omega\rangle = 0 \quad (1.4.38)$$

e sappiamo che vale:

$$E_p = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \quad (1.4.39)$$

ossia che tutti gli stati (ad $1, 2, \dots, n$ particelle) hanno energia positiva. In generale potremmo dire che l'energia dello stato $|\alpha\rangle$ sarà maggiore dell'energia del vuoto, dunque positiva.

Quindi se prendiamo $q_0 < 0$, nella somma $\sum_n$ di $F(q)$, non c'è nessuno stato $|\alpha\rangle$ possibile e vale:

$$F(q) = 0. \quad (1.4.40)$$

Possiamo anche dire che $F \equiv 0$ nel caso $q^2 < 0$, ossia q space-like, poiché con una trasformazione di Lorentz possiamo ottenere un vettore tale per cui abbiamo $q'_0 < 0$.

Queste osservazioni non sono solamente per cultura personale, ma ci servono a capire che la forma di $F(q)$ è vincolata e possiamo scriverla come:

$$F(q) = (2\pi) f(q^2) \theta(q^0) \quad (1.4.41)$$

il che ci permette di dire che $q^0 \geq 0$, così rispettiamo il fatto che $F(q) \neq 0$ solo se q^2 è light-like, time-like oppure $q_0 > 0$. Nota che $f(q^2)$, essendo funzione di q^2 è invariante di Lorentz.

Torniamo al nostro studio della funzione di Green, che possiamo riscrivere come:

$$G_+(x_1, x_2) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x_1 - x_2)} (2\pi) f(q^2) \theta(q^0) \quad (1.4.42)$$

$$= \int_0^\infty du \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x_1 - x_2)} (2\pi) f(u) \delta(u - q^2) \theta(q^0) \quad (1.4.43)$$

$$= \int_0^\infty du f(u) \underbrace{\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x_1 - x_2)} (2\pi) \delta(u - q^2) \theta(q^0)}_{(1.4.44)} \quad (1.4.44)$$

in cui possiamo notare che il termine sottolineato è il propagatore libero del campo scalare:

$$\langle 0 | \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x_1 - x_2)} (2\pi) \delta(q^2 - m^2) \theta(q^0) \quad (1.4.45)$$

$$= \Delta_+(x_1, x_2; m) \quad (1.4.46)$$

che rispetto la nostra scrittura ha la differenza $m^2 \leftrightarrow u$. Dunque abbiamo:

$$G_+(x_1, x_2) = \int_0^\infty du f(u) \Delta_+(x_1, x_2; \sqrt{u}) \quad (1.4.47)$$

in cui chiamiamo $f(u)$ **densità spettrale**. Vediamo in (1.4.47) che la funzione a due punti, in una teoria interagente, non riceve più solamente il contributo di stati ad una particella, ma ne riceve da ∞ stati (non necessariamente di singola particella), con massa $\sqrt{u}$, ciascuno pesato con la densità spettrale¹⁰. Possiamo dire in termini generali che $f(u)$ è una densità di massa/energia.

Visto com'è fatta la funzione a due punti avanzata, possiamo ritornare alla definizione generica di funzione di Green a due punti (1.4.12) e scrivere:

$$G(x_1, x_2) = \theta(x_1^0 - x_2^0) G_+(x_1, x_2) + \theta(x_2^0 - x_1^0) G_+(x_2, x_1) \quad (1.4.50)$$

$$= \int_0^\infty du f(u) \Delta_F(x_1, x_2, \sqrt{u}) \quad (1.4.51)$$

in cui utilizziamo il propagatore causale di Feynman. Nota che integrare su u è come integrare su q^2 , che dev'essere uguale a $p_\mu^{(\alpha)}$, e conseguentemente u va su tutti gli impulsi che esistono tra gli stati nella nostra teoria.

Sicuramente nella nostra teoria, (nel nostro spazio di Fock) ci sarà il vuoto, poi ci sarà uno stato ad una particella (per il quale l'energia è ben definita) e poi ci sarà un continuo di stati, poiché saranno stati a due (e più) particelle e $p^2 = (p_1 + p_2)^2$ sarà continuo.

Supponiamo di avere due particelle, dello stesso tipo e con massa *fisica* m_p , e vediamo cos'è $q^2 = (p_1 + p_2)^2$:

$$(p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_{1\mu}p_2^\mu \quad (1.4.52)$$

$$= m_p^2 + m_p^2 + 2 \left(\sqrt{m^2 + \vec{p}_1^2} \sqrt{m^2 + \vec{p}_2^2} - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \right) \quad (1.4.53)$$

$$\text{nel SR del lab. in cui } \vec{p}_2 = 0 \quad (1.4.54)$$

$$= 2m_p^2 + 2m_p \sqrt{m^2 + \vec{p}_1^2} \quad (1.4.55)$$

¹⁰È facile rendersi conto che in una teoria *libera* G_+ riceve contributi solamente da stati ad 1 particella. Infatti si ha:

$$F(q) = (2\pi)^4 \sum_\alpha |\langle 0 | \phi(0) | \alpha \rangle|^2 \delta^4(q - p^{(\alpha)}) \quad (1.4.48)$$

ma $\phi(0)$ lo sappiamo espandere in termini di operatori di creazione e distruzione e mettendolo all'interno di $F(q)$ otteniamo:

$$\langle 0 | \phi(x) | \alpha \rangle \simeq \langle 0 | a + a^\dagger | \alpha \rangle \simeq \langle 1, \vec{p} | \alpha \rangle = \delta_{1,n} \quad (1.4.49)$$

in cui abbiamo messo lo stato $\langle 1, \vec{p} |$ di singola particella poiché stati a più particelle per costruirli avremmo bisogno di $\langle 0 | a^2$. È proprio $\delta_{1,n}$ a dirci che G_+ riceve contributi solo da stati a singola particella.

in cui vediamo che q^2 non è più fissato dalla mass-shell, ma è un continuo .

In una teoria perturbativa noi siamo in grado di calcolarci $G(x_1, x_2)$ e conosciamo l'espressione di $\Delta_F(x_1, x_2, \sqrt{u})$, per cui, per quanto complicata possa essere (e di solito è molto complicata), possiamo estrarre $f(u)$.

Noi al momento però siamo interessati ad estrarre, da $G(x_1, x_2)$, la massa di una singola particella m_p (che assumiamo esista)¹¹.

Consci del fatto che sia formalmente sbagliato considerare solamente lo stato di singola particella (in cui scriviamo direttamente $p^{(\alpha)} \equiv \vec{p}$ poiché, grazie al mass-shell, ci basta il tri-impulso per fissare lo stato), senza tutti gli altri, calcoliamo:

$$G_+(x_1, x_2) = \sum_n e^{-ip^{(\alpha)}(x_1-x_2)} \langle \Omega | \phi(0) | n \rangle \langle n | \phi(0) | \Omega \rangle \quad (1.4.56)$$

$$\simeq e^{-ip(x_1-x_2)} \langle \Omega | \phi(0) | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \phi(0) | \Omega \rangle + \dots \quad (1.4.57)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip(x_1-x_2)} \langle \Omega | \phi(0) | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \phi(0) | \Omega \rangle + \dots \quad (1.4.58)$$

fai attenzione che qua abbiamo fatto dei passaggi un po' sportivi. Innanzitutto sappiamo che approssimare G_+ con solamente lo stato di singola particella, senza prendere tutti gli altri, è una forzatura grossa, poi scrivendo il secondo passaggio ci rendiamo conto che in realtà (1.4.57) è a sua volta sbagliato perché non stiamo inserendo il fatto che uno stato ad 1 particella è caratterizzato da ∞ (p è un continuo) valori di impulso, dunque scriviamo l'ultima riga, in cui mettiamo una misura che è invariante di Lorentz la quale ci rende gli stati a tri-impulso fissato non più normalizzati ad una $\delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$ (della MQ) bensì a:

$$\langle \vec{p}_1 | \vec{p}_2 \rangle = 2E_{p_1} \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2). \quad (1.4.59)$$

A questo punto il nostro problema, che abbiamo ignorato fin'ora, è capire come sono fatti gli elementi:

$$\langle \Omega | \phi(0) | \vec{p} \rangle. \quad (1.4.60)$$

Prendiamo due stati $|\vec{p}\rangle$ e $|\vec{p}'\rangle$ collegati da una trasformazione di Lorentz:

$$|\vec{p}'\rangle = \left(1 + i\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}\right) |\vec{p}\rangle \quad (1.4.61)$$

¹¹In una teoria interagente la massa m che compare nella lagrangiana $\mathcal{L}$ non è la massa fisica della particella. Ne ripareremo meglio al corso di Advanced e in un altro senso nel capitolo del modello standard.

e con una TL finita ci muoviamo da un certo $|\vec{p}\rangle$ ad qualsiasi $|\vec{p}'\rangle$ ¹². Sappiamo da Noether che il campo trasforma come:

$$\delta\phi = [Q, \phi(x)] \quad (1.4.62)$$

$$= i\omega_{\mu\nu} \left(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu \right) \phi(x) \quad (1.4.63)$$

e visto che $x = 0$ abbiamo:

$$[J_{\mu\nu}, \phi(0)] = 0. \quad (1.4.64)$$

Quindi abbiamo:

$$\langle \Omega | \phi(0) | \vec{p} \rangle = \langle \Omega | \phi(0) \left(1 + i\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right) | \vec{p}' \rangle \quad (1.4.65)$$

$$= \langle \Omega | \phi(0) + i\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \phi(0) | \vec{p}' \rangle \quad (1.4.66)$$

ma avendo che il vuoto è invariante per trasformazioni di Lorentz:

$$\langle \Omega | \phi(0) | \vec{p} \rangle = \langle \Omega | \phi(0) | \vec{p}' \rangle \equiv \langle \Omega | \phi(0) | \vec{p} \rangle \quad (1.4.67)$$

in cui la trasformazione è generica e può essere anche finita; in ogni caso capiamo che (1.4.67) è *indipendente* da $\vec{p}$, poiché $\forall \vec{p}$ assume lo stesso valore. Per questo motivo possiamo scrivere:

$$\langle \Omega | \phi(0) | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \phi(0) | \Omega \rangle = \text{costante} \equiv Z. \quad (1.4.68)$$

La costante Z viene chiamata *Field strenght renormalization*.

Dunque, tornando all'espressione per la funzione di Green avanzata:

$$G_+(x_1, x_2) \simeq \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip(x_1-x_2)} Z \quad (1.4.69)$$

$$\simeq Z \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x_1-x_2)} (2\pi) \delta^4(p^2 - m^2) \theta(p^0) \quad (1.4.70)$$

in cui ci siamo riportati con la misura Lorentz invariante¹³ contenente la θ e la δ . Notiamo però che l'integrale di (1.4.70) è il propagatore Δ_+ .

Dunque, considerando entrambi i contributi in $G(x_1, x_2)$ otteniamo:

$$G(x_1, x_2) = Z \Delta_F(x_1, x_2, m_p) + \dots \quad (1.4.71)$$

¹²Utilizziamo trasformazioni infinitesime quando i due stati differiscono per valori piccoli, ma trasformazioni finite se i valori sono distanti.

¹³Ricorda che nel corso di *Introduzione a QFT* avevamo visto nel processo di seconda quantizzazione che le due misure fossero equivalenti, poiché partendo da quella con θ e δ e integrando quest'ultima si giungeva alla prima.

in cui vediamo chiaramente il contributo di singola particella. Ovviamente possiamo passare nello spazio di Fourier:

$$\tilde{G}(p_1, p_2) = \int d^4x_1 \int d^4x_2 e^{-ip_1x_1 - ip_2x_2} G(x_1, x_2) \quad (1.4.72)$$

$$\simeq Z(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \frac{i}{p_1^2 - m_p^2 + i\varepsilon}. \quad (1.4.73)$$

Dunque, ripetendoci, riconosciamo il fatto che la funzione di Green a due punti (propagatore) è proporzionale ad un propagatore di Feynman di *una* particella con massa m_p . Proprio grazie a questa proporzionalità possiamo vedere che $\tilde{G}^{(2)}$ ha un polo in $p^2 = m_p^2$ (nella massa fisica) e tutti i termini ad $n > 1$ particelle non contribuiscono al polo. Quindi ora, il punto è studiare come sia fatto il polo, e per farlo ci serve capire cosa sono i diagrammi 1PI.

Abbiamo già visto che la funzione di Green:

$$G(x_1, x_2) = \langle \Omega | T \phi_1 \phi_2 | \Omega \rangle \quad (1.4.74)$$

la sappiamo calcolare in modo perturbativo e che, ad esempio per la teoria $\lambda\phi^4$ (per 4 campi dava i termini in figura 1.17), da i termini in figura 1.21.

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \phi_1 \phi_2 | \Omega \rangle = & \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \\ & + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{---} + \\ & + \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{---} + \dots \end{aligned}$$

Figura 1.21

Ogni termine sappiamo calcolarlo grazie alle regole di Feynman e possiamo trovare un modo di riorganizzare i diagrammi in classi. Ad esempio il secondo termine della somma lo possiamo scrivere come un propagatore + una certa quantità legata al loop + un propagatore; graficamente possiamo scrivere il diagramma come in figura 1.22, in cui all'interno del blob inseriamo il contributo del loop, che sarà proporzionale a:

$$-i\lambda \int d^4k \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (1.4.75)$$

con k^μ momento che circola nel loop. Diagrammi dello stesso tipo di quello descritto, ovvero in cui non possiamo amputare nessuna gamba ed avere 2 diagrammi, a loro volta con due gambe esterne, si chiamano diagrammi **1PI** (*one particle irriducibile*).

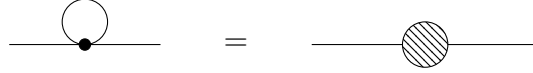


Figura 1.22

Diagrammi che invece riusciamo a tagliare sono ad esempio quelli raffigurati in figura 1.23, alcuni dei quali, dopo che li tagliamo passano da essere di ordine λ^2 a qualcosa di ordine λ^1 (ad esempio il primo e i due della seconda riga).

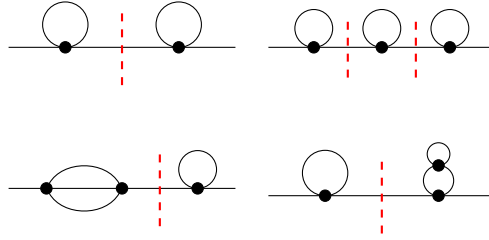


Figura 1.23

Il blob della figura 1.22 lo scriviamo in modo simbolico e rappresenta tutti i diagrammi 1PI che contribuiscono a $G_2(x_1, x_2)$; per questo possiamo scrivere la figura 1.24.

$$\begin{aligned}
 \text{---} \text{blob} \text{---} &= \text{---} \text{loop} \text{---} + \text{---} \text{double loop} \text{---} + \text{---} \text{bubble} \text{---} + \\
 &+ \text{---} \text{triple loop} \text{---} + \dots \\
 \text{---} \text{blob} \text{---} &= -i \Sigma(p^2)
 \end{aligned}$$

Figura 1.24

Ma per come l'abbiamo scritta, la $G(x_1, x_2)$ contiene tutti i contributi dei diagrammi e non solo quelli di tipo 1PI, dunque in modo pittorico la possiamo scrivere come in figura 1.25.

La scrittura pittorica di $\tilde{G}(p_1, p_2)$, notando che con n blob ci sono $(n+1)$ propagatori e che nei propagatori compare la massa m di $\mathcal{L}$ e non quella

$$\tilde{G}(p_1, p_2) = \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} +$$

$$+ \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{---} + \dots$$

Figura 1.25

fisica, non è altro che:

$$\tilde{G}(p_1, p_2) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \left[\frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} (-i\Sigma) \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} (-i\Sigma) \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} (-i\Sigma) \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} + \dots \right] \quad (1.4.76)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \left[1 + \frac{\Sigma}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Sigma^2}{(p_1^2 - m^2 + i\varepsilon)^2} + \dots \right] \quad (1.4.77)$$

nel termine tra parentesi possiamo riconoscere una serie geometrica, e dal momento che $\Sigma \propto \lambda \ll 1$, possiamo scrivere:

$$\tilde{G}(p_1, p_2) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{1 - \frac{\Sigma}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon}} \quad (1.4.78)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2 - \Sigma(p^2) + i\varepsilon} \quad (1.4.79)$$

in cui vediamo che abbiamo un polo per $p_1^2 = m^2 + \Sigma(p^2)$. Confrontando il contributo di singola particella (1.4.73) con la funzione di Green esatta (1.4.79), vediamo cosa succede nei poli. Nell'espressione esatta il polo lo troviamo in $p_1^2 = m^2 + \Sigma(p^2)$, ma nel processo che abbiamo fatto per estrarre il contributo di singola particella ci siamo resi conto che esso contribuisce da solo al polo $p_1^2 = m_p^2$; dunque confrontando abbiamo:

$$m_p^2 = m^2 + \Sigma(p^2) \quad (1.4.80)$$

che potrebbe sembrare leggermente strano il fatto che la massa fisica della particella sia la massa m che compare nella lagrangiana + un contributo che viene fuori da diagrammi di tipo 1PI, e dunque da contributi di interazione. È chiaro che $\Sigma(p^2)$ dipende da λ . Potremmo risolvere $m_p^2 = m_p^2(m^2, \lambda)$ da

(1.4.80) in modo perturbativo¹⁴:

$$m_p^2 = m^2 \quad (1.4.81)$$

$$m_p^2 = m^2 + \Sigma(m^2) \quad (1.4.82)$$

$$\dots \quad (1.4.83)$$

quindi al primo ordine (il termine libero) otteniamo che la variabile m è esattamente la massa fisica m_p , ma quando vediamo ordini più alti non è più così. Capiamo che in qualche modo che la massa dipende dalle interazioni che le particelle hanno.

Riacciandoci ad un discorso già iniziato in precedenza, ci rendiamo di nuovo conto che la trattazione in QFT si riduca al caso classico se eliminiamo i contributi di Σ , ossia dei diagrammi 1PI, che contengono loop, ossia le correzioni quantistiche della teoria.

In generale, i parametri nudi della lagrangiana (m^2 , λ e ne vedremo altri) dipendono dalla scala di energia in cui ci mettiamo. Sarà un problema del prossimo corso di QFT, ma per cominciare a vederlo puoi ricordarti che la costante di accoppiamento della forza forte (analogo di λ) non è costante, ma dipende dalle energie; ragionamento analogo lo possiamo fare con m , che per l'appunto a seconda dell'energia a cui ci mettiamo assume valori diversi.

Possiamo ritenerci soddisfatti di ciò che abbiamo capito e passiamo alla prossima sezione, in cui cerchiamo di capire come le funzioni $G^{(n)}$ ci permettono di costruire la matrice S .

1.4.3 Pacchetti d'onda

Capire bene quello che faremo in questa sezione ci servirà, oltre a generalizzare a teorie interagenti, anche a ricavare la formula di riduzione di LSZ, che ci permetterà di calcolare gli elementi di matrice S .

Riprendiamo la teoria libera. Quello che sappiamo è sicuramente la scrittura del campo scalare ϕ in termini di sviluppo di Fourier (1.1.14), ma soprattutto come scrivere uno stato a singola particella (nello spazio di Fock):

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p} a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle \quad (1.4.84)$$

che sono stati ad impulso fissato e che ci danno una funzione d'onda completamente delocalizzata.

Se volessimo costruire stati $|f\rangle$ che siano localizzati nello spazio - il che ci interessa perché così (nella teoria interagente) possiamo localizzarli molto lontani dalla regione di scattering e studiare le ampiezze di probabilità più

¹⁴Generalmente, questi sviluppi sono serie asintotiche, che in quanto tali divergono e si dovrebbero fare "somme alla Borel" per sistamarle, ma noi ci fermiamo prima e ci pensiamo il prossimo semestre.

semplicemente - allora, non possiamo utilizzare delle onde piane, ma dobbiamo costruire dei pacchetti d'onda. Ci mettiamo al tempo $t = 0$ e, utilizzando lo sviluppo di Fourier di $\phi(x)$, scriviamo¹⁵:

$$|f\rangle = \int d^3x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}|f\rangle \quad (1.4.85)$$

$$= \int d^3x f(\vec{x}) \phi(0, \vec{x}) |0\rangle \quad (1.4.86)$$

$$= \int d^3x f(\vec{x}) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2E_p}} a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle \quad (1.4.87)$$

$$= \int \frac{d^3p}{2E_p} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} f(x) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle \quad (1.4.88)$$

$$= \int \frac{d^3p}{2E_p} \tilde{f}(\vec{p}) |\vec{p}\rangle \quad (1.4.89)$$

in cui abbiamo individuato $\tilde{f}(\vec{p})$ come la trasformata di Fourier di $f(\vec{x})$. Possiamo vedere $\tilde{f}(\vec{p})$ come la funzione d'onda di uno stato ad una particella nello spazio di Fourier, mentre $f(\vec{x})$ la funzione d'onda nello spazio delle coordinate, il cui quadrato ci fornisce la probabilità di trovare la particella tra x ed $x + dx$.

Ora vediamo un caso concreto e introduciamo delle funzioni d'onda che ci permettono di localizzare nello spazio la particella. Prendiamo l'impulso $\vec{p}$ localizzato attorno al valore $\vec{k}$, con una larghezza dipendente da σ :

$$\tilde{f}(\vec{p}) = \frac{1}{\sigma^{3/4}} e^{-\frac{(\vec{p}-\vec{k})^2}{2\sigma}} \quad (1.4.90)$$

$$f(\vec{x}) = \sigma^{3/4} e^{-\frac{\sigma x^2}{2}} \quad (1.4.91)$$

e facendo la scelta su $\tilde{f}$ ovviamente forziamo la sua antitrasformata $f(\vec{x})$, che è una gaussiana piccata attorno $\vec{x} = 0$. Nota che le due gaussiane hanno σ invertito.

Possiamo prendere (1.4.89), attorno $t = 0$, e facendolo evolvere nel tempo, in rappresentazione di Schrodinger con l'operatore di evoluzione temporale, dobbiamo risolvere:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |f, t\rangle = \hat{H} |f, t\rangle \quad (1.4.92)$$

con la condizione $|f, 0\rangle = |f\rangle$. Possiamo fare l'ansatz:

$$|f, t\rangle = \int \frac{d^3p}{2E_p} \tilde{f}(\vec{p}, t) |\vec{p}\rangle \quad (1.4.93)$$

¹⁵La convenzione non so quale sia? La trasformata la prendiamo con $(2\pi)^{3/2}$ a denominatore.

così che:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |f, t\rangle = \hat{H} |f, t\rangle \quad (1.4.94)$$

in cui ∂_t agisce su $\tilde{f}$ e $\hat{H}$ agisce su $|\vec{p}\rangle$; per cui:

$$i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = E_p \tilde{f} \implies \tilde{f}(t, \vec{p}) = e^{-iE_p t} \tilde{f}(\vec{p}) \quad (1.4.95)$$

quindi troviamo:

$$f(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \tilde{f}(\vec{p}, t) \quad (1.4.96)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \frac{e^{-iE_p t}}{\sigma^{3/4}} e^{-\frac{(\vec{p}-\vec{k})^2}{2\sigma}} \quad (1.4.97)$$

in cui abbiamo sempre $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ e l'integrale non essendo più gaussiano non riusciamo più a farlo (a differenza del caso in MQ). Però se $\vec{p}$ è piccato attorno $\vec{k}$, allora possiamo sviluppare E_p attorno $\vec{k}$:

$$E_p = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \quad (1.4.98)$$

$$\simeq \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} + \frac{\vec{k}}{\sqrt{m^2 + \vec{k}^2}} \cdot (\vec{p} - \vec{k}) + \frac{(\vec{p} - \vec{k})^2}{\sqrt{m^2 + \vec{k}^2}} + \frac{[\vec{k} \cdot (\vec{p} - \vec{k})]^2}{(m^2 + \vec{k}^2)^{3/2}} + \dots \quad (1.4.99)$$

Però vediamo che $e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}$ è lineare in $\vec{p}$, $e^{-\frac{(\vec{p}-\vec{k})^2}{2\sigma}}$ dipende da $\vec{p}^2$, per cui dovremmo sviluppare E_p fino all'ordine $(\vec{p} - \vec{k})^2$, ma noi per brevità ci fermiamo al primo e commentiamo solo gli altri. Inserendo lo sviluppo abbiamo:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, t) &\simeq \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{i(\vec{p} - \vec{k}) \cdot \vec{x} + i\vec{k} \cdot \vec{x}\right\} \frac{1}{\sigma^{3/2}} \times \\ &\times \exp\left\{-iE_k t - i\vec{v}_k t \cdot (\vec{p} - \vec{k})\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{(\vec{p} - \vec{k})^2}{2\sigma}\right\} \end{aligned} \quad (1.4.100)$$

in cui la prima riga è la riscrittura di e^{ipx} , mentre la seconda è lo sviluppo di $e^{-iE_p t}$ e in cui abbiamo messo $\vec{v}_k$ la velocità relativistica:

$$\vec{v}_k = \frac{\vec{k}}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}}. \quad (1.4.101)$$

Possiamo cambiare variabile:

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{k} \quad (1.4.102)$$

così:

$$f(\vec{x}, t) = \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - iE_k t}}{\sigma^{3/4}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^{3/2}} \exp \left\{ i\vec{q} \cdot \vec{x} - i\vec{v}_k \cdot \vec{q} - \frac{\vec{q}^2}{2\sigma} \right\} \quad (1.4.103)$$

$$= \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - iE_k t}}{\sigma^{3/4}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(\vec{q} - i\sigma(\vec{x} - \vec{v}_k t))^2}{2\sigma} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\sigma \frac{(\vec{x} - \vec{v}_k t)^2}{2} \right\} \quad (1.4.104)$$

$$f(\vec{x}, t) = \sigma^{3/4} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - iE_k t} e^{-\sigma \frac{(\vec{x} - \vec{v}_k t)^2}{2}} \quad (1.4.105)$$

e questa $f(\vec{x}, t)$ ci dice che il picco della gaussiana si sposta con la traiettoria classica (il secondo esponenziale)¹⁶.

Ricordiamo però che noi ci siamo fermati al primo ordine dello sviluppo, se fossimo andati fino agli ordini quadratici, essi ci direbbero che σ si allarga con $\sqrt{|t|}$.

Possiamo ritenenrnci soddisfatti, ma fino ad un certo punto; infatti, noi vogliamo stati ad n particelle:

$$|p_1, \dots, p_n\rangle \quad (1.4.106)$$

localizzati. Introduciamo dunque:

$$\vec{p}_i \longrightarrow \tilde{f}_i(\vec{p}_i) \quad (1.4.107)$$

e a seguire:

$$\tilde{f}_i(\vec{p}_i) = \frac{1}{\sigma^{3/4}} e^{-\frac{(\vec{p}_i^2 - \vec{k}_i^2)^2}{2\sigma}} \quad (1.4.108)$$

$$f_i(\vec{x}_i) = \sigma^{3/4} e^{-\frac{\sigma \vec{x}_i^2}{2}} \quad (1.4.109)$$

con $\vec{x}_i$ posizione della i -esima particella. Consideriamo la condizione iniziale:

$$|f_1, \dots, f_n\rangle = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{2E_{p_i}} \tilde{f}_i(\vec{p}_i) |p_1, \dots, p_n\rangle \quad , \quad t = 0 \quad (1.4.110)$$

in modo che la funzione d'onda di n particelle sia data dal prodotto delle n funzioni d'onda di singola particella. Nota che avendo bosoni, all'interno del ket possiamo scambiare ciò che vogliamo e abbiamo tra le mani una funzione d'onda simmetrica.

Noi da (1.4.109) sappiamo che le nostre n particelle sono tutte localizzate in $\vec{x}_i = 0$, e possiamo calcolare l'evoluzione temporale dello stato, tenendo conto che:

$$\hat{H} |p_1, \dots, p_n\rangle = \sum_{i=1}^n E_{p_i} |p_1, \dots, p_n\rangle \quad (1.4.111)$$

¹⁶Puoi vedere la fine del paragrafo §2.1.3 delle note di MQ1.

ovvero che l'hamiltoniana è data dalla somma delle singole hamiltoniane e conseguentemente ogni sigola $\tilde{f}(\vec{p}_i)$ prenderà una fase $e^{-iE_{p_i}t}$.

Se noi facciamo gli stessi conti fatti per la singola particella, supponendo $\vec{k}_i \neq \vec{k}_j$ (così localizziamo i centri delle gaussiane nello spazio di Fourier in modo diverso), troveremo che la funzione d'onda f delle n particelle, nello spazio delle coordinate, è data dal prodotto di tutte le f_i di singola particella. Dunque, avremo che ciascuna particella, che all'inizio è localizzata insieme a tutte le altre in $\vec{x} = 0$, evolverà con la traiettoria classica, ma se i $\vec{k}_i \neq \vec{k}_j$, allora quando $t \rightarrow \pm\infty$ avremo che le particelle saranno infinitamente lontane e che la distanza tra i diversi centri dei pacchetti d'onda crescerà con t . Ricordando che l'ampiezza delle gaussiane cresce con $\sqrt{|t|}$, ci rendiamo subito conto che i pacchetti si allontanano l'uno dall'altro più velocemente di quanto si allarghino; per cui a tempi molto grandi avremo le particelle completamente separate.

1.4.4 Operatori di creazione e distruzione

Prima di vedere come si applica la trattazione che abbiamo fatto dei pacchetti d'onda al caso interagente, vediamo un po' di cose che ci servono riguardo gli operatori di creazione e distruzione.

Ricordiamo:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a(\vec{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})e^{ipx} \right) \quad (1.4.112)$$

$$\dot{\phi}(\vec{x}, t) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{E_p}{\sqrt{2E_p}} \left(a(\vec{p})e^{-ipx} - a^\dagger(\vec{p})e^{ipx} \right) \quad (1.4.113)$$

e introduciamo la quantità:

$$g_p(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2E_p}} \quad (1.4.114)$$

che è scritta come onda piana, al posto di essere un pacchetto d'onde, ma questo lo facciamo per semplicità. Il nostro intento è determinare i comportamenti a tempi molto distanti di stati a molte particelle di impulso definito. Ovviamente faremmo una trattazione più corretta considerando pacchetti d'onda centrati attorno ad un valore, ma allungherebbe notevolmente i conti.

Possiamo calcolare:

$$g_p(\vec{x}, t)\dot{\phi}(\vec{x}, t) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{E_p}{\sqrt{2E_p}} \left(a(\vec{p})e^{-ipx} - a^\dagger(\vec{p})e^{ipx} \right) \frac{e^{-iqx}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_q}} \quad (1.4.115)$$

$$\dot{g}_p(\vec{x}, t)\phi(\vec{x}, t) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a(\vec{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})e^{ipx} \right) \frac{E_q e^{-iqx}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_q}} \quad (1.4.116)$$

e integrare in d^3x la differenza:

$$\int d^3x \left(g_p \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(\vec{x}, t) \right) = -i \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p 2E_q}} \left\{ (E_p - E_q) a(\vec{p}) e^{-i(q+p)x} - (E_p + E_q) a^\dagger(\vec{p}) e^{-i(q-p)x} \right\} \quad (1.4.117)$$

integrando in d^3x abbiamo rispettivamente:

$$\begin{aligned} (E_p - E_q) \delta^3(\vec{q} + \vec{p}) e^{-i(E_q + E_p)t} &\implies \vec{p} = -\vec{q} \\ &\implies E_p = E_q \\ &\implies E_p - E_q = 0 \\ (E_p + E_q) \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) e^{-i(E_q - E_p)t} &\implies \vec{p} = \vec{q} \\ &\implies E_p = E_q \\ &\implies E_p + E_q = 2E_q \end{aligned}$$

che se inseriti nel conto danno:

$$\int d^3x g_p(\vec{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(\vec{x}, t) = +i a^\dagger(\vec{p}). \quad (1.4.118)$$

Nota che l'operatore $\overleftrightarrow{\partial}_t$ è hermitiano per costruzione essendoci un segno meno nella sua definizione. Comunque, siamo contenti perché abbiamo trovato:

$$a^\dagger(\vec{p}) = -i \int d^3x g_p(\vec{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(\vec{x}, t) \quad (1.4.119)$$

$$a(\vec{p}) = i \int d^3x g_p^*(\vec{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(\vec{x}, t). \quad (1.4.120)$$

Inoltre notiamo che per costruzione vale:

$$(\square + m^2) g_p = 0. \quad (1.4.121)$$

Ora però mettiamoci in una teoria interagente e costruiamo:

$$a^\dagger(\vec{p}, t) = -i \int d^3x g_p(\vec{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(\vec{x}, t) \quad (1.4.122)$$

con la condizione:

$$g_p(\vec{x}, t) \quad / \quad (\square + m_p^2) g_p = 0. \quad (1.4.123)$$

Possiamo calcolarci:

$$\partial_t a^\dagger(\vec{p}, t) = -i \int d^3x \left(g_p(\vec{x}, t) \partial_t^2 \phi(\vec{x}, t) - \partial_t^2 g_p(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}, t) \right) \quad (1.4.124)$$

in cui all'interno di Leibnitz si cancellano due termini vista la definizione di $\overleftrightarrow{\partial}_t$. Da (1.4.123) possiamo scrivere:

$$\partial_t^2 g_p = \nabla^2 g_p - m_p^2 g_p \quad (1.4.125)$$

che, insieme alla doppia integrazione per parti del ∇^2 (che si sposta su ϕ), ci conduce a:

$$\partial_t a^\dagger(\vec{p}, t) = -i \int d^3x g_p(\vec{x}, t) \left(\square + m_p^2 \right) \phi(\vec{x}, t). \quad (1.4.126)$$

Notiamo il fatto fondamentale che in una teoria libera, avremmo avuto:

$$\partial_t a^\dagger(\vec{p}, t) = -i \int d^3x g_p(\vec{x}, t) \left(\square + m^2 \right) \phi(\vec{x}, t) = 0 \quad (1.4.127)$$

per via dell'equazione di Klein-Gordon. Questo ci piace perché ci dice che, in una teoria libera, $a^\dagger$ e analogamente a , sono indipendenti dal tempo.

Facciamo l'assunzione:

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} a^\dagger(\vec{p}, T(1 - i\varepsilon)) = a_{in}^\dagger(\vec{p}) \sqrt{Z} \quad (1.4.128)$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} a^\dagger(\vec{p}, T(1 - i\varepsilon)) = a_{out}(\vec{p}) \sqrt{Z} \quad (1.4.129)$$

ovvero che gli operatori di creazione e distruzione nella teoria interagente sono asintoticamente uguali a degli operatori che possiamo imporre soddisfare la condizione:

$$a_{in}^\dagger(\vec{p}) |\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} |\vec{p}\rangle \quad (1.4.130)$$

$$\langle \Omega | a_{out}(\vec{p}) = \langle \vec{p} | \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \quad (1.4.131)$$

ossia che creano stati di singola particella ad impulso definito. Stiamo dicendo che, nel limite di tempi grandi, gli operatori interagenti si comportano come gli operatori di creazione e distruzione che conosciamo dalla teoria libera.

Ovviamente questo è visibile esplicitamente (in rappresentazione di Heisenberg):

$$a^\dagger(\vec{p}, t) |\Omega\rangle = \sum |n\rangle \langle n | a^\dagger(\vec{p}, t) |\Omega\rangle \quad (1.4.132)$$

$$= -i \int d^3x g_p(\vec{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_t \sum_n |n\rangle \langle n | \phi(\vec{x}, t) |\Omega\rangle \quad (1.4.133)$$

utilizziamo (1.4.24)

$$= -i \int d^3x g_p(\vec{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_t \sum_n |n\rangle e^{+ip^{(n)}x} \langle n | \phi(0) |\Omega\rangle \quad (1.4.134)$$

possiamo calcolare la derivata esplicitando g_p :

$$a^\dagger(\vec{p}, t) |\Omega\rangle = -i \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i}{\sqrt{2E_p}} \sum_n \left(E^{(n)} + E_p \right) e^{i(E^{(n)} - E_p)t - i(\vec{p}^{(n)} - \vec{p}) \cdot \vec{x}} \times \\ \times |n\rangle \langle n| \phi(0) |\Omega\rangle \quad (1.4.135)$$

a questo punto rendiamo t leggermente immaginario (così da non far divergere alcuni integrali che compaiono nella teoria, esattamente come fatto per GML) e lo mandiamo ad infinito:

$$t = T(1 - i\varepsilon) \quad , \quad \lim_{T \rightarrow -\infty} a^\dagger(\vec{p}) |\Omega\rangle \quad (1.4.136)$$

facendo così abbiamo:

$$e^{i(E^{(n)} - E_p)t} \longrightarrow e^{i(E^{(n)} - E_p)T + (E^{(n)} - E_p)\varepsilon T} \quad (1.4.137)$$

in cui il secondo pezzo dell'esponenziale è soppresso a grandi T e ci saranno stati dominanti. I valori E_n maggiori sono sottodominanti¹⁷. Noi stiamo sommando su n , tra cui sicuramente ci sarà il vuoto, lo stato ad una particella, quello a due eccetera. Per come definiamo l'energia del vuoto, che sarebbe il termine dominante:

$$E_{n=0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E \left(\text{di } a^\dagger(\vec{p}) |\Omega\rangle \right) = 0 \quad (1.4.139)$$

questo ci porterebbe ad una $\delta^3(p)$ per l'integrale in d^3x , il che ci interessa poco perché è vero che vogliamo degli stati con un qualsiasi impulso, ma esso non dev'essere nullo. Dunque, il primo termine dominante sarà quello di singola particella (ricorda che abbiamo visto che l'energia di uno stato a più particelle è maggiore di quella di singola). Mettiamo p' momento di singola particella (sostituendo a Σ un'integrale, con la misura Lorentz invariante, poiché lo spettro di $\vec{p}$ è continuo):

$$a^\dagger(\vec{p}, t) |\Omega\rangle = \int \frac{d^3p'}{2E_{p'}} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (E_{p'} - E_p) e^{i(E_{p'} - E_p)t} e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}} \times \\ \times |\vec{p}'\rangle \langle \vec{p}'| \phi(0) |\Omega\rangle \quad (1.4.140)$$

$$= \int \frac{d^3p'}{2E_{p'}} \frac{(2\pi)^3}{(2\pi)^{3/2}} \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (E_{p'} - E_p) e^{i(E_{p'} - E_p)t} \times \\ \times |\vec{p}'\rangle \langle \vec{p}'| \phi(0) |\Omega\rangle \quad (1.4.141)$$

¹⁷Nota che siamo sereni nel dire che i contributi di E_n , con $n > 1$, sono sottodominanti poiché all'interno della nostra espressione abbiamo anche $\int d^3x e^{-i(\vec{p}^{(n)} - \vec{p}) \cdot \vec{x}}$, che ci porta ad una $\delta(\vec{p} - \vec{p}_{(n)})$, la quale ci fissa $\vec{p} = \vec{p}_{(n)}$ e dunque abbiamo:

$$E_{(1)} = \sqrt{\vec{p}^2 + m_p^2} \implies E_{(n>1)} > E_{(1)} = E_p \quad \forall n. \quad (1.4.138)$$

Proprio perché fissiamo $\vec{p} = \vec{p}_{(n)} \forall n$, e conosciamo tutte le considerazioni fatte sulle masse, siamo sicuri nel fare l'affermazione riguardo i termini soppressi.

notiamo che:

$$\delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \implies \vec{p} = \vec{p}' \implies E_{p'} = E_p \quad (1.4.142)$$

ovvero che il momento portato dallo stato di singola particella dev'essere uguale al momento $\vec{p}$ nell'operatore $a^\dagger$. Questa $\delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$, ricordando l'assunzione iniziale (1.4.128), ci permette di concludere:

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} a^\dagger(\vec{p}, T(1 - i\varepsilon)) |\Omega\rangle = (2\pi)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| \phi(0) |\Omega\rangle \quad (1.4.143)$$

$$\equiv \sqrt{Z} a_{in}^\dagger(\vec{p}) |\Omega\rangle. \quad (1.4.144)$$

Però non abbiamo ancora dimostrato che $a_{in}^\dagger$ sia un'operatore di costruzione. Possiamo ricordare la definizione (1.4.68) che ci diceva che il $\langle \vec{p}| \phi(0) |\Omega\rangle$ è indipendente da $\vec{p}$, che ridefiniamo a meno della costante:

$$\langle \vec{p}| \phi(0) |\Omega\rangle = \frac{\sqrt{Z}}{(2\pi)^{3/2}} \quad (1.4.145)$$

così da poter scrivere:

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} a^\dagger(\vec{p}, T(1 - i\varepsilon)) |\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sqrt{Z} |\vec{p}\rangle \equiv \sqrt{Z} a_{in}^\dagger(\vec{p}) |\Omega\rangle \quad (1.4.146)$$

dunque:

$$a_{in}^\dagger(\vec{p}) |\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} |\vec{p}\rangle \quad (1.4.147)$$

e quindi abbiamo dimostrato che $a^\dagger(\vec{p}, T(1 - i\varepsilon))$, nel limite di tempi infinitamente grandi, tende ad un'operatore $a_{in}^\dagger$, che quando agisce sul vuoto $|\Omega\rangle$ genera stati ad una particella con momento $\vec{p}$, ossia, tende ad un'operatore di creazione.

La dimostrazione per vedere che:

$$\langle \Omega| \lim_{T \rightarrow +\infty} a^\dagger(\vec{p}, T(1 - i\varepsilon)) = \langle \Omega| a_{out}(\vec{p}) \sqrt{Z} = \langle \vec{p}| \frac{\sqrt{Z}}{\sqrt{2E_p}} \quad (1.4.148)$$

ossia, che tende proprio ad un'operatore di creazione in un tempo passato, si fa in modo esattamente uguale.

1.4.5 Formula di riduzione LSZ per campi scalari

Noi nelle precedenti sezioni abbiamo visto come, in una teoria libera, uno stato a molte particelle, costruito tramite pacchetti d'onda, a tempi molto grandi si disaccoppia in stati di singola particella, e successivamente abbiamo studiato gli operatori di creazione e distruzione, che oltre ad imparare che in

una teoria libera essi sono indipendenti dal tempo, abbiamo visto che a tempi molto lontani nel passato e nel futuro, li possiamo scrivere come operatori di creazione e distruzione ordinari.

Noi, ora facciamo l'assunzione che in una teoria interagente sia presente uno stato di singola particella a cui possiamo associare una funzione d'onda, costruita come un pacchetto d'onda, come fatto nella sezione §1.4.3, e che si comporti come già studiato, ossia che evolve nel tempo con la traiettoria classica. Dunque, assumiamo che nella teoria interagente lo stato di singola particella non sia distinguibile da quello della teoria libera, appartiene il valore della massa.

Per gli stati ad n particelle le cose si complicano, poiché non è banale cosa succede. Ci aspettiamo però che esista uno stato a molte particelle:

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle_{in}$$

che evolvendo a tempi grandi nel passato o nel futuro lo faccia con la traiettoria classica e che in un certo limite possiamo descriverlo come particelle singole che sono ben separate spazialmente¹⁸. Ovvero, assumiamo che esista uno stato $|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle_{in}$ tale che:

$$\int \prod \frac{d^3 p_i}{2E_{p_i}} \tilde{f}(\vec{p}_i, t) |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle_{in} \quad (1.4.149)$$

in cui $\tilde{f}(\vec{p}, t)$ ad un tempo generico è un casino a piacere, ma nel momento in cui vediamo tempi molto lontani nel passato esso diventa proprio la funzione d'onda di uno stato di singola particella ben separata dalle altre.

Succede una cosa analoga per tempi molto grandi nel futuro in cui avremo uno stato $\langle \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n |_{out}$ che si disaccoppia in n stati di singola particella disaccoppiati indipendenti.

Quello che stiamo dicendo è che se le nostre n particelle sono ben separate nello spazio e facciamo degli esperimenti locali, dunque guardiamo in prossimità della particella i -esima, e poiché le funzioni d'onda della particella i -esima e j -esima non si toccano, allora lo stato che guardiamo deve coincidere con lo stato di singola particella.

Nota che a noi il fatto che a $t = 0$ gli stati $|\text{in}\rangle$ ed $\langle \text{out}|$ siano un casino, in realtà ci interessa, poiché in questo modo interagiscono. Infatti al tempo iniziale noi abbiamo localizzato in uno stesso punto ($\vec{x} = 0$) tutte le particelle, poiché vogliamo che esse possano interagire.

Teniamo anche a mente che l'energia e l'impulso sono cariche di Noether, ovvero si conservano, per cui possiamo calcolarli in un qualsiasi istante e conoscerli sempre. Ovviamente conviene calcolarli a $t \rightarrow \pm\infty$ visto che

¹⁸A meno che non creiamo stati fortemente legati. Ad esempio, con i quark non possiamo fare una cosa del genere.

abbiamo stati liberi, e per cui si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \begin{matrix} H = \sum E_{p'} \\ \vec{P} = \sum \vec{k}_i \end{matrix} \quad (1.4.150)$$

con la solita $E_{p_i} = \sqrt{\vec{p}^2 + m_p^2}$ e in cui abbiamo notato il fatto che considerando σ piccolo abbiamo sostanzialmente $\vec{p}_i = \vec{k}_i$.

Ora, cerchiamo il modo di calcolare l'ampiezza di transizione:

$${}_{out}\langle \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} \quad (1.4.151)$$

tra uno stato iniziale con n particelle di momento $\vec{p}_i$, ed uno finale con m di momento $\vec{q}_i$. Chiaramente se la teoria è libera ci aspettiamo che gli stati $|in\rangle$ e $\langle out|$ siano uguali, ma per le teorie interagenti essi possono cambiare non solo i momenti e le energie delle particelle, ma anche il numero di esse.

Nota. Già lo abbiamo fatto nello studio degli operatori di creazione e distruzione, ma lo ripetiamo. Noi considereremo d'ora in poi delle onde piane, poiché è vero che sarebbe più corretto utilizzare dei pacchetti d'onda, ma essi complicherebbero notevolmente l'algebra che dovremmo fare. Dunque, per semplicità, ci facciamo andare bene le onde piane.

Prima di buttarci a fare conti spoileriamo il risultato. Noi vogliamo arrivare a dire:

$${}_{out}\langle \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} \sim \langle \Omega | T \phi_1 \dots \phi_m \phi_1 \dots \phi_n | \Omega \rangle \quad (1.4.152)$$

per poi poter utilizzare teoria perturbativa come abbiamo visto con i diagrammi di Feynman. Per raggiungere i nostri scopi ci serviranno le relazioni per gli operatori di creazione e distruzione:

$$\begin{aligned} a^\dagger(\vec{p}) &= -i \int d^3x g_p(\vec{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(\vec{x}, t) \\ a(\vec{p}) &= i \int d^3x g_p^*(\vec{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(\vec{x}, t) \\ \partial_t a^\dagger(\vec{p}, t) &= -i \int d^3x g_p(\vec{x}, t) (\square + m_p^2) \phi(\vec{x}, t) \\ (\square + m_p^2) g_p &= 0 \\ \lim_{T \rightarrow -\infty} a^\dagger(\vec{p}, T(1 - i\varepsilon)) &= a_{in}^\dagger(\vec{p}) \sqrt{Z} \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} a^\dagger(\vec{p}, T(1 - i\varepsilon)) &= a_{out}(\vec{p}) \sqrt{Z} \\ a_{in}^\dagger(\vec{p}) |\Omega\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2E_p}} |\vec{p}\rangle \\ \langle \Omega | a_{out}(\vec{p}) &= \langle \vec{p} | \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \end{aligned}$$

ossia le (1.4.119), (1.4.120), (1.4.126), (1.4.123), (1.4.128), (1.4.129), (1.4.130) e (1.4.131). Quello che dobbiamo fare ora è cercare di riscrivere il nostro stato $|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle_{in}$, che a tempi grandi diventa uno stato di n particelle libere indipendenti, in termini di operatori di creazione (o distruzione per lo stato out) agenti sul vuoto. Intendiamo usare:

$$\frac{1}{\sqrt{2E_{p_i}}} |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle_{in} = a_{in}^\dagger(\vec{p}_i) |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{i-1}, \vec{p}_{i+1}, \dots, \vec{p}_n\rangle_{in}. \quad (1.4.153)$$

Scriviamo dunque:

$${}_{out}\langle \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} = {}_{out}\langle \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m | a_{in}^\dagger(\vec{p}_1) |\vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle_{in} \sqrt{2E_{p_1}} \quad (1.4.154)$$

indicando $\langle out | = {}_{out}\langle \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n |$ e aggiungendo 0:

$$\langle out | a_{in}^\dagger(\vec{p}_1) - a_{out}^\dagger(\vec{p}_1) + a_{out}^\dagger(\vec{p}_1) |\vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle_{in} \sqrt{2E_{p_1}} \quad (1.4.155)$$

ci rendiamo conto che vale:

$$\langle out | a_{out}^\dagger(\vec{p}_i) = 0 \quad (1.4.156)$$

se $\vec{q}_j \neq \vec{p}_i \forall i, j$; altrimenti se $\vec{q}_j = \vec{p}_i$ per qualche i, j , allora $a_{out}^\dagger(\vec{p}_i)$ rimuove tale particella. Però gli scattering in cui $\vec{q}_j = \vec{p}_i$ sono processi in cui c'è una particella che ha impulso iniziale uguale a quello finale, ossia c'è una particella che non interagisce. Processi di questo tipo li chiamiamo **forward scattering** e li rappresentiamo come in figura 1.26. Per noi processi di questo tipo sono poco interessanti e vogliamo solo funzioni di Green connesse, per cui assumiamo che non siamo in presenza di forward scattering e quindi che valga (1.4.156).

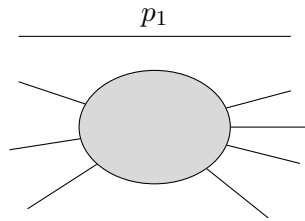


Figura 1.26

Torniamo ai nostri conti. Assumendo (1.4.156) possiamo dimenticarci del termine $+a_{out}^\dagger(\vec{p}_1)$, ma ci teniamo quello con il segno meno perché ci serve. Utilizziamo le assunzioni (1.4.128) e (1.4.129):

$$= \langle out | a_{in}^\dagger(\vec{p}_1) - a_{out}^\dagger(\vec{p}_1) |\vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle_{in} \sqrt{2E_{p_1}} \quad (1.4.157)$$

$$= - \lim_{T \rightarrow +\infty} \langle out | a^\dagger(\vec{p}_1, T) - a^\dagger(\vec{p}_1, -T) |\vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle_{in} \frac{\sqrt{2E_{p_1}}}{\sqrt{Z}} \quad (1.4.158)$$

scriviamo la differenza degli operatori $a^\dagger$ come un'integrale (ricordandoci di essere in rappresentazione di Heisenberg e che di conseguenza la ∂_t agisce solo su $a^\dagger$):

$$= -\frac{\sqrt{2E_{p_1}}}{\sqrt{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \partial_t \langle \text{out} | a^\dagger(\vec{p}_1, t) | \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} \quad (1.4.159)$$

$$= i \frac{\sqrt{2E_{p_1}}}{\sqrt{Z}} \int d^4x_1 g_{p_1} \left(\square_1 + m_p^2 \right) \langle \text{out} | \phi(x_1) | \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} \quad (1.4.160)$$

in cui abbiamo utilizzato (1.4.126), che ci dona un d^3x , che insieme al nostro dt porta a d^4x . Nota solo che non abbiamo scritto m_{p_1} al posto di m_p poiché stiamo considerando un solo tipo di campo che descrive le nostre particelle, per cui sono tutte con la stessa massa.

A questo punto abbiamo tolto la particella con $\vec{p}_1$. Togliamo ora la seconda particella facendo gli stessi passaggi di prima:

$${}_{out} \langle \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} = \quad (1.4.161)$$

$$\begin{aligned} &= i \frac{\sqrt{2E_1}}{\sqrt{Z}} \sqrt{2E_2} \int d^4x_1 g_{p_1} \left(\square_1 + m_p^2 \right) \langle \text{out} | \phi(x_1) a_{in}^\dagger(\vec{p}_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} \\ &= -i \frac{\sqrt{2E_1} \sqrt{2E_2}}{\sqrt{Z}} \int d^4x_1 g_{p_1} \left(\square_1 + m_p^2 \right) \langle \text{out} | \phi(x_1) a_{in}^\dagger(\vec{p}_2) - \\ &\quad - a_{out}^\dagger(\vec{p}_2) \phi(x_1) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} \\ &= -i \frac{\sqrt{2E_1} \sqrt{2E_2}}{(\sqrt{Z})^2} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int d^4x_1 g_{p_1} \left(\square_1 + m_p^2 \right) \langle \text{out} | \phi(x_1) a^\dagger(\vec{p}_2, -T) - \\ &\quad - a^\dagger(\vec{p}_2, T) \phi(x_1) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} \\ &= -i \frac{\sqrt{2E_1} \sqrt{2E_2}}{(\sqrt{Z})^2} \int d^4x_1 g_{p_1} \left(\square_1 + m_p^2 \right) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \partial_{t_2} \langle \text{out} | T \phi(x_1) a^\dagger(\vec{p}_2, t_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} \\ &= (i)^2 \frac{\sqrt{2E_1} \sqrt{2E_2}}{(\sqrt{Z})^2} \int d^4x_1 g_{p_1} \left(\square_1 + m_p^2 \right) \times \\ &\quad \times \int d^4x_2 \partial_{t_2} \left[g_{p_2}(x_2) \langle \text{out} | T \phi(x_1) \partial_{t_2} \phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} - \right. \\ &\quad \left. - \partial_{t_2} g_{p_2}(x_2) \langle \text{out} | T \phi(x_1) \phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} \right]. \quad (1.4.162) \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi calcolarci delle derivate. Il termine completo che compare è:

$$\begin{aligned} &\partial_{t_2} g_{p_2}(x_2) \langle \text{out} | T \phi(x_1) \partial_{t_2} \phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} + \\ &\quad + g_{p_2}(x_2) \partial_{t_2} \langle \text{out} | T \phi(x_1) \partial_{t_2} \phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} - \\ &\quad - \partial_{t_2}^2 g_{p_2}(x_2) \langle \text{out} | T \phi(x_1) \phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} - \\ &\quad - \partial_{t_2} g_{p_2}(x_2) \partial_{t_2} \langle \text{out} | T \phi(x_1) \phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in}. \quad (1.4.163) \end{aligned}$$

Calcoliamo la derivata dell'elemento di matrice (sempre in rappresentazione di Heisenberg):

$$\partial_{t_2} [T\phi(x_1)\phi(x_2)] = \partial_{t_2} [\phi(x_1)\phi(x_2)\theta(t_1 - t_2) + \phi(x_2)\phi(x_1)\theta(t_2 - t_1)] \quad (1.4.164)$$

$$= \phi(x_1)\partial_{t_2}\phi(x_2)\theta(t_1 - t_2) - \phi(x_1)\phi(x_2)\delta(t_1 - t_2) + \\ + \partial_{t_2}\phi(x_2)\phi(x_1)\theta(t_2 - t_1) + \phi(x_1)\phi(x_2)\delta(t_2 - t_1) \quad (1.4.165)$$

$$= T(\phi(x_1)\partial_{t_2}\phi(x_2)). \quad (1.4.166)$$

Dunque abbiamo:

$$\partial_{t_2}g_{p_2}(x_2) \langle \text{out} | T\phi(x_1)\partial_{t_2}\phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} + \\ + g_{p_2}(x_2)\partial_{t_2}^2 \langle \text{out} | T\phi(x_1)\phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} - \\ - \partial_{t_2}^2 g_{p_2}(x_2) \langle \text{out} | T\phi(x_1)\phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} - \\ - \partial_{t_2}g_{p_2}(x_2) \langle \text{out} | T\phi(x_1)\partial_{t_2}\phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in}. \quad (1.4.167)$$

in cui nella seconda riga abbiamo portato fuori ∂_{t_2} , mentre nell'ultima riga l'abbiamo portata dentro, in modo da vedere che il primo termine e l'ultimo si cancellano. Dunque, buttando tutto dentro (1.4.162):

$$= (i)^2 \frac{\sqrt{2E_1}\sqrt{2E_2}}{(\sqrt{Z})^2} \int d^4x_1 g_{p_1} (\Box_1 + m_p^2) \times \\ \times \int d^4x_2 \left[g_{p_2}(t_2)\partial_{t_2}^2 \langle \text{out} | T\phi(x_1)\phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} - \right. \\ \left. - \partial_{t_2}^2 g_{p_2}(x_2) \langle \text{out} | T\phi(x_1)\phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} \right] \quad (1.4.168)$$

utilizzando (1.4.123):

$$\partial_t^2 g_p = \nabla^2 g_p - m_p^2 g_p \quad (1.4.169)$$

abbiamo:

$$= (i)^2 \frac{\sqrt{2E_1}\sqrt{2E_2}}{(\sqrt{Z})^2} \int d^4x_1 g_{p_1} (\Box_1 + m_p^2) \times \\ \times \int d^4x_2 \left[g_{p_2}(t_2)\partial_{t_2}^2 \langle \text{out} | T\phi(x_1)\phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} + \right. \\ \left. + (-\nabla_2^2 + m_p^2) g_{p_2}(x_2) \langle \text{out} | T\phi(x_1)\phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} \right] \quad (1.4.170)$$

possiamo integrare per parti due volte la ∇_2^2 (così si sposta sull'elemento di matrice):

$$\begin{aligned}
&= (i)^2 \frac{\sqrt{2E_1}\sqrt{2E_2}}{(\sqrt{Z})^2} \int d^4x_1 g_{p_1} (\square_1 + m_p^2) \times \\
&\quad \times \int d^4x_2 \left[g_{p_2}(x_2) \partial_{t_2}^2 \langle \text{out} | T\phi(x_1)\phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} + \right. \\
&\quad \left. + g_{p_2}(x_2) (-\nabla_2^2 + m_p^2) \langle \text{out} | T\phi(x_1)\phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} \right] \quad (1.4.171)
\end{aligned}$$

notiamo che i due termini $\partial_{t_2}^2$ e $-\nabla_2^2$ ci forniscono $\square_2$ e possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
&= (i)^2 \frac{\sqrt{2E_1}\sqrt{2E_2}}{(\sqrt{Z})^2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 g_{p_1}(x_1) g_{p_2}(x_2) (\square_1 + m_p^2) (\square_2 + m_p^2) \times \\
&\quad \times \langle \text{out} | T\phi(x_1)\phi(x_2) | \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} . \quad (1.4.172)
\end{aligned}$$

Siamo contenti perché siamo riusciti ad estrarre le prime due particelle dello stato $|\text{in}\rangle$. Possiamo generalizzare:

$${}_{out} \langle \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} = \quad (1.4.173)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i^n \prod_{i=1}^n \sqrt{2E_i}}{(\sqrt{Z})^n} \int \left[\prod_{i=1}^n d^4x_i g_{p_i}(x_i) \right] \times \\
&\quad \times (\square_1 + m_p^2) \dots (\square_n + m_p^2) \langle \text{out} | T\phi(x_1) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle_{in} \quad (1.4.174)
\end{aligned}$$

e abbiamo ottenuto una scrittura in cui abbiamo estratto tutte le particelle di $|\text{in}\rangle$.

Ora dobbiamo estrarre le particelle dello stato $\langle \text{out} |$. Però possiamo scrivere:

$${}_{out} \langle \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m | \text{in} \rangle = {}_{out} \langle \vec{q}_2 \dots, \vec{q}_m | a_{out}(\vec{q}_1) T(\dots) | \Omega \rangle_{in} \quad (1.4.175)$$

e rifacendo gli stessi passaggi di prima: sommiamo 0:

$$0 = T(\dots) a_{in}(\vec{q}_1) - T(\dots) a_{in}(\vec{q}_1) \quad (1.4.176)$$

tenendo solo il termine con il segno "-", scriviamo l'integrale, utilizziamo:

$$a(\vec{p}, t) = i \int d^3x g_p^*(\vec{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(\vec{x}, t) \quad (1.4.177)$$

e arriviamo allo stesso risultato dello stato $|\text{in}\rangle$, ma con g^* , il quale rispetta l'equazione:

$$(\square + m_p^2) g^* = 0. \quad (1.4.178)$$

Dunque, la scrittura completa è:

$${}_{out} \langle \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} = \quad (1.4.179)$$

$$= i^{n+m} \frac{\left(\prod_{i=1}^n \sqrt{2E_i} \right) \left(\prod_{j=1}^m \sqrt{2E_j} \right)}{(\sqrt{Z})^{n+m}} \int \left[\prod_{i=1}^n d^4 x_i g_{p_i}(x_i) \right] \left[\prod_{j=1}^m d^4 y_j g_{q_j}^*(y_j) \right] \times \\ \times \left(\square_1 + m_p^2 \right) \dots \left(\square_n + m_p^2 \right) \left(\square_1 + m_p^2 \right) \dots \left(\square_m + m_p^2 \right) \times \\ \times {}_{out} \langle \Omega | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi(y_1) \dots \phi(y_m) | \Omega \rangle_{in} \quad (1.4.180)$$

in cui abbiamo rimosso tutte le particelle iniziali e finali. Però questa scrittura non è quella definitiva; infatti, possiamo vedere come alcuni pezzi si possono semplificare. Noi ricordiamo di avere (1.4.114):

$$g_{p_i}(\vec{x}_i, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ip_i x}}{\sqrt{2E_{p_i}}}$$

in cui la radice $\sqrt{2E_{p_i}}$ si semplifica con le radici che ci sono fuori dall'integrale. Stessa cosa succede per $g_{q_j}^*(\vec{y}_j, t)$. Dunque la prima riga di (1.4.180) diventa:

$$\int \prod_{i=1}^n \frac{d^4 x_i}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ip_i x_i} \int \prod_{j=1}^m \frac{d^4 y_j}{(2\pi)^{3/2}} e^{+iq_j y_j}. \quad (1.4.181)$$

Scrivendo l'ultima riga di (1.4.180), dunque la funzione di Green, nello spazio di Fourier:

$$\int \left(\prod_{i=1}^n \frac{d^4 l_i}{(2\pi)^4} e^{-il_i x_i} \right) \left(\prod_{j=1}^m \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} e^{-ik_j y_j} \right) \tilde{G}(l_1, \dots, l_n, k_1, \dots, k_m) \quad (1.4.182)$$

possiamo vedere che quando ci agiscono sopra i $\square_{i,j}$ ci portano al piano terra i pezzi $(-il_i)^2$ e $(-ik_j)^2$. In questo modo, la seconda e la terza riga di (1.4.180) diventano:

$$\int \left(\prod_{i=1}^n \frac{d^4 l_i}{(2\pi)^4} e^{-il_i x_i} \right) \left(\prod_{j=1}^m \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} e^{-ik_j y_j} \right) \times \\ \times (-l_1^2 + m_p^2) \dots (-l_n^2 + m_p^2) (-k_1^2 + m_p^2) \dots (-k_m^2 + m_p^2) \times \\ \tilde{G}(l_1, \dots, l_n, k_1, \dots, k_m). \quad (1.4.183)$$

Dunque abbiamo la scrittura:

$${}_{out} \langle \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} = \quad (1.4.184)$$

$$\begin{aligned} &= i^{n+m} \frac{1}{(\sqrt{Z})^{n+m}} \int \left[\prod_{i=1}^n \frac{d^4 x_i}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ip_i x^i} \right] \left[\prod_{j=1}^m \frac{d^4 y_j}{(2\pi)^{3/2}} e^{-iq_j y^j} \right] \times \\ &\quad \times \int \left(\prod_{i=1}^n \frac{d^4 l_i}{(2\pi)^4} e^{-il_i x^i} \right) \left(\prod_{j=1}^m \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} e^{-ik_j y^j} \right) \times \\ &\quad \times (-l_1^2 + m_p^2) \dots (-l_n^2 + m_p^2) (-k_1^2 + m_p^2) \dots (-k_m^2 + m_p^2) \times \\ &\quad \tilde{G}(l_1, \dots, l_n, k_1, \dots, k_m). \end{aligned} \quad (1.4.185)$$

in cui individuiamo $\forall i, j$ i due termini:

$$\int \frac{d^4 x_i}{(2\pi)^4} e^{-i(\vec{p}_i + \vec{l}_i) \cdot \vec{x}} = \delta^3(p_i + l_i) \quad (1.4.186)$$

$$\int \frac{d^4 y_j}{(2\pi)^4} e^{-i(\vec{q}_j - \vec{k}_j) \cdot \vec{y}} = \delta^3(q_j - k_j) \quad (1.4.187)$$

che ci forniscono:

$${}_{out} \langle \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} = \quad (1.4.188)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-i)^{n+m}}{(2\pi)^{3(n+m)/2} Z^{(n+m)/2}} (p_1^2 - m_p^2) \dots (p_n^2 - m_p^2) \times \\ &\quad \times (q_1^2 - m_p^2) \dots (q_m^2 - m_p^2) \times \\ &\quad \times \tilde{G}(-p_1, \dots, -p_n, q_1, \dots, q_m). \end{aligned} \quad (1.4.189)$$

Non abbiamo ancora finito. Noi abbiamo che le particelle degli stati $|in\rangle$ e $\langle out|$ sono particelle fisiche, dunque on-shell e di conseguenza:

$$p_i^2 - m_p^2 = 0 \quad , \quad q_j^2 - m_p^2 = 0 \quad (1.4.190)$$

che prese da sole ci darebbero una probabilità di transizione nulla, ma non ci dobbiamo preoccupare, perché sappiamo che $\tilde{G}$ (funzione di Green ad $n + m$ punti) ha poli semplici ogni volta che uno dei qualsiasi momenti va on-shell. Infatti, noi abbiamo imparato che, ad esempio la funzione di Green a due punti (1.4.73), ha dei termini divisi per la condizione (1.4.190), ovvero avevamo trovato:

$$\tilde{G}^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{iZ}{p^2 - m_p^2 + i\varepsilon}. \quad (1.4.191)$$

Noi sappiamo, dalle regole di Feynman, che i propagatori esterni contribuiscono proprio con $\tilde{G}$.

Dunque, siamo abbastanza felici, perché se mettiamo l'espressione di $\tilde{G}$ dentro la formula (1.4.189) vediamo cancellarsi tutti i termini di mass-shell¹⁹,

¹⁹Quello che esce fuori è il calcolo del residuo della funzione $\tilde{G}$ nel polo semplice $p^2 = m_p^2$.

ma al prezzo di *amputare*, tutti i contributi di propagatori esterni; vedi la figura 1.27a. Quella che chiamiamo **formula di LSZ** (Lippman-Symanzik-Zimmerman) o *formula di riduzione* è dunque:

$${}_{out}\langle \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n \rangle_{in} = \frac{(\sqrt{Z})^{n+m}}{(2\pi)^{3(n+m)/2}} \tilde{G}_{amp}(-p_1, \dots, -p_n, q_1, \dots, q_m) \quad (1.4.192)$$

in cui indichiamo con $\tilde{G}_{amp}$ la funzione di Green ad $n + m$ punti amputata, ovvero quella in cui togliamo le gambe esterne. Puoi vedere la figura 1.27b.

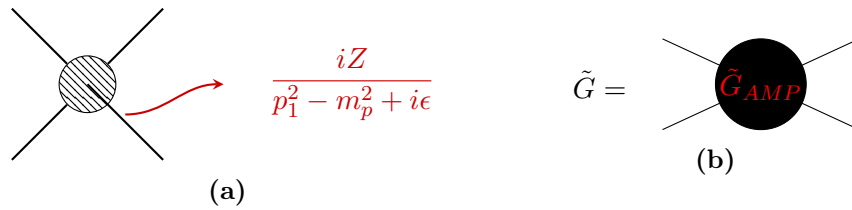


Figura 1.27: 1.27a Rappresentazione contributo linee esterne in un diagramma di Feynman. 1.27b Rappresentazione diagrammatica di $\tilde{G}$ e $\tilde{G}_{amp}$. Queste immagini sono facilmente generalizzabili a diagrammi di funzioni di Green ad $n + m$ punti (gambe esterne).

La formula di LSZ la abbiamo vista per un solo tipo di particelle, descritte da ϕ_1 . Però possiamo anche prendere due set di particelle, descritte da due tipi di campi ϕ_1, ϕ_2 scalari, e scrivere:

$${}_{out}\langle q_1^{(1)}, \dots, q_m^{(1)}, q_1^{(2)}, \dots, q_n^{(2)} | p_1^{(1)}, \dots, p_r^{(1)}, p_1^{(2)}, \dots, p_s^{(2)} \rangle_{in} \quad (1.4.193)$$

in cui abbiamo, ciascuna particella con il proprio impulso, r particelle di tipo (1) ed s particelle di tipo (2) nello stato iniziale, che diventano m particelle di tipo (1) ed n particelle (2) nello stato finale. La formula di riduzione LSZ sarà la stessa trovata in (1.4.192), ma con la differenza che per ogni operatore $a^{(\dagger)}$ ed ogni grandezza (E, m_p) , avremo un'etichetta per la specie.

In ogni caso però, scritta LSZ, utilizzeremo la formula di Gell-Mann-Low per scrivere il valore di aspettazione sul vuoto e successivamente il teorema di Wick, in cui però le contrazioni le faremo solo tra gli stessi tipi di particelle, dal momento che non esistono propagatori che propagano un tipo di particella in un altro²⁰.

²⁰Si dice che i propagatori mantengono il *sapore*, ma questo concetto lo vedremo meglio con il modello standard.

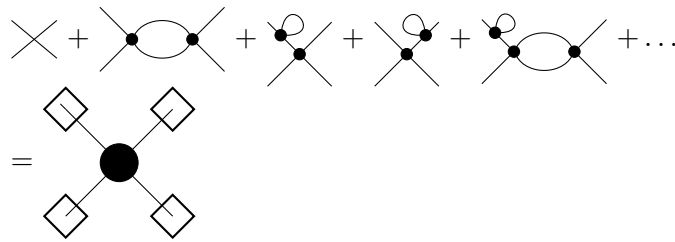


Figura 1.28: Esempio rappresentazione funzione di Green per 2 particelle iniziali e finali.

$$\begin{aligned}
 \text{---} \square \text{---} &= \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \bullet \text{---} + \dots \\
 &= \frac{1}{p^2 - m_p^2 + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

Figura 1.29: Rappresentazione diagrammatica propagatori gambe esterne.

Capitolo 2

Il campo spinoriale

In questo capitolo rivedremo i concetti analizzati nella parte riguardante i campi scalari (capitolo §1), ma applicati al caso di campi spinoriali. È utile rivedere l'Appendice B per un rapido ripasso di alcune cose riguardanti la teoria dei gruppi (più che altro per rivedere un po' di notazione che utilizzeremo) già viste in altri corsi. È rilevante anche guardare le proprietà delle matrici γ^μ in Appendice C.

2.1 Ripasso per il campo spinoriale

Inserisco in questa sezione un ripasso (dalle note di E. Chiarotto) riguardante il campo spinoriale. Non tutto ciò che è qua presente rappresenta ciò che è stato fatto in aula, ma per completezza è meglio che ci sia. A lezione siamo partiti subito dalla sezione in cui dimostriamo la formula di LSZ per campi fermionici.

La notazione in questa sezione è direttamente presa dallo Srednicki As far as quantum field theory is concerned, a human being or the center of a star isn't all that different from empty space. Srednicki, per cui può risultare leggermente contorta rispetto quella solita in aula.

2.1.1 Spinori di Weyl

Conosciamo già le definizioni:

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \quad , \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \quad (2.1.1)$$

e il fatto che nella rappresentazione di Weyl abbiamo:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.2)$$

Introduciamo il campo *left* $\psi_a(x)$ per cui abbiamo $N_k^\dagger = 0$ (dunque stiamo considerando la rappresentazione $(2, 1)$) e il campo *right* $\psi_a^\dagger(x)$ per cui

$N_k = 0$ (e abbiamo la rappresentazione $(1, 2)$). Possiamo passare dalla rappresentazione left e right tramite un'operazione di hermitiana coniugazione:

$$\left[\psi_a(x)\right]^\dagger = \psi_a^\dagger(x). \quad (2.1.3)$$

In più sappiamo che per la trasformazione infinitesima abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{Left: } & \delta\psi_a(x) = \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} (S_{\mu\nu}^L)_a^b \psi_b(x) \\ \text{Right: } & \delta\psi_a^\dagger(x) = \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} (S_{\mu\nu}^R)_a^b \psi_b^\dagger(x) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

in cui:

$$\begin{cases} S_L^{\mu\nu} = +\frac{i}{4} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \\ S_R^{\mu\nu} = -\frac{i}{4} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Possiamo considerare:

$$\chi\psi = \chi^a \psi_a \quad (2.1.6)$$

$$\chi^\dagger \psi^\dagger = \chi_a^\dagger \psi^{\dagger a} \quad (2.1.7)$$

per cui dobbiamo utilizzare i simboli di Levi-Civita bidimensionali¹, perché se definiamo:

$$\psi^a(x) = \varepsilon^{ab} \psi_b(x) \quad (2.1.9)$$

allora abbiamo:

$$\chi\psi = \chi^a \psi_a = \varepsilon^{ab} \chi_b \psi^a \quad (2.1.10)$$

$$= \chi_b \varepsilon^{ab} \psi_a = -\chi_b \varepsilon^{ba} \psi_a \quad (2.1.11)$$

$$= -\chi_b \psi^b = \psi^b \chi_b = \psi\chi \quad (2.1.12)$$

analogamente per (2.1.7) e otteniamo in definitiva:

$$\chi\psi = \psi\chi \quad (2.1.13)$$

$$\chi^\dagger \psi^\dagger = \bar{\psi}^\dagger \chi^\dagger \quad (2.1.14)$$

ma si ha che:

$$\chi_a \psi_b = -\psi_b \chi_a \quad (2.1.15)$$

in cui il meno viene riassorbito dallo scambio di indici del simbolo ε . Inoltre si vede:

$$(\chi\psi)^\dagger = \psi^\dagger \chi^\dagger = \chi^\dagger \psi^\dagger. \quad (2.1.16)$$

¹Che nota essere comunque antisimmetrici e definiti tali per cui:

$$\varepsilon^{ab} \varepsilon_{bc} = \delta^a_c \quad , \quad \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \varepsilon^{\dot{b}\dot{c}} = \delta_{\dot{a}}^{\dot{c}}. \quad (2.1.8)$$

Per concludere possiamo considerare anche la combinazione:

$$\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi = \psi_a^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} \chi_b \quad (2.1.17)$$

che è un'invariante e trasforma come un vettore di Lorentz:

$$\left(\psi_a^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} \chi_b \right)^\dagger = \chi_b^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} \psi_a = \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi. \quad (2.1.18)$$

2.1.2 Lagrangiana per campi di Majorana, di Dirac e di Weyl

Capito come sono fatti gli invarianti, possiamo scrivere la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2}m\psi\psi - \frac{1}{2}m^* \psi^\dagger \psi^\dagger \quad (2.1.19)$$

in cui abbiamo considerato il fatto che in generale abbiamo:

$$m = |m|e^{i\alpha} \in \mathbb{C}. \quad (2.1.20)$$

Nota però che potremmo ridefinire gli spinori:

$$\psi \longrightarrow \psi e^{-i\frac{\alpha}{2}} \quad (2.1.21)$$

$$\psi^\dagger \longrightarrow \psi^\dagger e^{i\frac{\alpha}{2}} \quad (2.1.22)$$

e non avere il "problema" di $m \in \mathbb{C}$.

Le equazioni del moto per la lagrangiana (2.1.19) sono:

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m\psi^\dagger = 0 \quad (2.1.23)$$

$$-i\sigma^\mu \partial_\mu \psi^\dagger + m\psi = 0 \quad (2.1.24)$$

ovvero, scritte in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} -m \delta_a^{\dot{c}} & i\sigma_{a\dot{c}}^\mu \partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^{\mu a\dot{c}} \partial_\mu & -m \delta_{\dot{c}}^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_c \\ \psi^{\dot{c}\dagger} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.1.25)$$

che in notazione più semplice si riduce a:

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma_\mu^\mu \partial^\mu \\ i\bar{\sigma}_\mu^\mu \partial^\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0. \quad (2.1.26)$$

Se definiamo lo **spinore di Majorana**:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi^{\dot{a}\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (2.1.27)$$

e utilizziamo la rappresentazione di Weyl per le matrici γ^μ (2.1.2), allora otteniamo le *equazioni di Dirac*:

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Psi_M = 0. \quad (2.1.28)$$

Ora, consideriamo due spinori left e scriviamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1,2} \left(i\psi_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{1}{2} m(\psi_i \psi_i + \psi_i^\dagger \psi_i^\dagger) \right) \quad (2.1.29)$$

che se poniamo:

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + i\psi_2) \quad (2.1.30)$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 - i\psi_2) \quad (2.1.31)$$

diventa:

$$\mathcal{L} = i\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi - m(\chi\xi + \xi^\dagger \chi^\dagger). \quad (2.1.32)$$

Se ora introduciamo lo **spinore di Dirac**:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_a \\ \xi^{\dot{a}\dagger} \end{pmatrix}, \quad \Psi^\dagger = \begin{pmatrix} \chi^{\dot{a}\dagger} \\ \xi_a \end{pmatrix} \quad (2.1.33)$$

e definiamo:

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{\dot{a}c} \\ \delta_a^c & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.34)$$

che numericamente vale $\beta = \gamma^0$, ma la struttura degli indici è diversa. Facendo questo abbiamo:

$$\bar{\Psi} = \psi^\dagger \Psi^\dagger = (\xi^a, \chi_a^\dagger) \quad (2.1.35)$$

il che implica che la lagrangiana diventi:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi} \not{\partial} \Psi - m\bar{\Psi}\Psi. \quad (2.1.36)$$

Sappiamo già che abbiamo un'invarianza di fase globale con una corrente di Noether:

$$j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (2.1.37)$$

inoltre, possiamo tornare indietro agli spinori di Weyl (quelli left e right) tramite una proiezione:

$$P_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \quad (2.1.38)$$

con γ^5 definita da:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (2.1.39)$$

Per fare il passaggio dallo spinore di Dirac a quello di Majorana dobbiamo utilizzare la matrice di coniugazione di carica e imporre che il coniugato di carica dello spinore di Dirac sia uguale allo spinore di Dirac, ovvero:

$$\Psi = \Psi^C = C \bar{\Psi}^T \quad \text{con} \quad C = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}. \quad (2.1.40)$$

Con la nostra condizione abbiamo:

$$\Psi^C = C \bar{\Psi}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} \quad (2.1.41)$$

e imponendo che:

$$\begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} \quad (2.1.42)$$

questo permette di ridurre lo spinore di Dirac a quello di Majorana.

Importante. Da qui in poi abbandono la notazione con $\psi_a, \psi_a^\dagger$ ed uso solo lo spinore di Dirac che indico come ψ .

2.1.3 Soluzioni per campi spinoriali

Consideriamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.1.43)$$

$$= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \quad (2.1.44)$$

la cui equazione del moto è:

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0. \quad (2.1.45)$$

Abbiamo un unico momento coniugato (quello relativo a $\bar{\psi}$ è nullo):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = -i\bar{\psi}\gamma^0 = -i\psi^\dagger = \bar{\pi}. \quad (2.1.46)$$

È utile anche ricordarci che l'equazione di Dirac implica l'equazione di Klein-Gordon:

$$-(i\not{\partial} + m)(i\not{\partial} - m) = (\not{\partial}^2 + m^2) = (\square + m^2) \quad (2.1.47)$$

questo perché vale la proprietà per l'operatore *slashed*:

$$\not{a}\not{b} = a_\mu \gamma^\mu a_\nu \gamma^\nu = a_\mu a_\nu \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = a_\mu a_\nu \eta^{\mu\nu} = a^2. \quad (2.1.48)$$

Siccome l'equazione di Dirac implica l'equazione di Klein-Gordon possiamo espandere in onde piane e scrivere la soluzione:

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_p}} \left[b_s(p) u_s(p) e^{-ipx} + d_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ipx} \right] \quad (2.1.49)$$

in cui per convenzione diciamo che $b^\dagger$ crea le particelle mentre $d^\dagger$ crea antiparticelle.

Imponiamo le condizioni di anti-commutazione:

$$\{\psi_\alpha(t, \vec{x}), \bar{\psi}_\beta(t, \vec{y})\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.1.50)$$

e tutti gli altri nulli. L'algebra (2.1.50) implica:

$$\{b_s(\vec{p}), b_r^\dagger(\vec{p}')\} = \{d_s(\vec{p}), d_r^\dagger(\vec{p}')\} = (2\pi)^3 2E_p \delta_{rs} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.1.51)$$

Inoltre, affinché (2.1.49) sia soluzione di (2.1.45) dobbiamo avere:

$$\begin{cases} (\not{p} - m)u_s(\vec{p}) = 0 \\ (\not{p} + m)v_s(\vec{p}) = 0. \end{cases} \quad (2.1.52)$$

L'hamiltoniana è:

$$H = \int d^3x \bar{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi \quad (2.1.53)$$

$$= \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[b_s^\dagger(p) b_s(p) + d_s^\dagger(p) d_s(p) \right]. \quad (2.1.54)$$

In più sappiamo che dall'invarianza di fase globale compare la quantità conservata:

$$Q = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[b_s^\dagger(p) b_s(p) - d_s^\dagger(p) d_s(p) \right]. \quad (2.1.55)$$

Per lo spin e momento angolare abbiamo le relazioni:

$$\begin{cases} S_\pm u_\pm(\vec{0}) = \pm \frac{1}{2} u_\pm(\vec{0}) \\ S_\pm v_\pm(\vec{0}) = \mp \frac{1}{2} v_\pm(\vec{0}) \end{cases}, \quad \begin{cases} [J_z, b_\pm^\dagger(\vec{0})] = \pm \frac{1}{2} b_\pm^\dagger(\vec{0}) \\ [J_z, d_\pm^\dagger(\vec{0})] = \pm \frac{1}{2} d_\pm^\dagger(\vec{0}) \end{cases} \quad (2.1.56)$$

dunque u_+ e v_+ sono le soluzioni con spin $S_z = \uparrow$, mentre u_- e v_- sono soluzioni per $S_z = \downarrow$.

Se ci poniamo nel sistema di riferimento di riposo, in cui $p^\mu = (m, \vec{0})$, possiamo facilmente risolvere le equazioni e scrivere le soluzioni:

$$u_+(0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_-(0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.57)$$

$$v_+(0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_-(0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.58)$$

Possiamo anche studiare le quantità:

$$\sum_s u_s(p) \bar{u}_s(p) \quad , \quad \sum_s v_s(p) \bar{v}_s(p) \quad (2.1.59)$$

che non sono invarianti di Lorentz e si possono riscrivere tramite $\gamma^\mu p_\mu$; per far ciò ci mettiamo nel sistema di riferimento di riposo, in cui otteniamo rispettivamente:

$$m\gamma^0 \pm m. \quad (2.1.60)$$

Generalizzando il sistema di riferimento otteniamo:

$$\sum_s u_s(p) \bar{u}_s(p) = (\not{p} + m) \quad , \quad \sum_s v_s(p) \bar{v}_s(p) = (\not{p} - m). \quad (2.1.61)$$

Le normalizzazioni degli spinori sono tali che:

$$\begin{cases} \bar{u}_s(p) u_r(p) = +2m \delta_{sr} \\ \bar{v}_s(p) v_r(p) = -2m \delta_{sr} \end{cases}, \quad \begin{cases} u_s^\dagger(p) u_r(p) = 2 E_p \delta_{sr} \\ v_s^\dagger(p) v_r(p) = 2 E_p \delta_{sr} \end{cases} \quad (2.1.62)$$

di cui la seconda si generalizza come:

$$\begin{cases} \bar{u}_s(p) \gamma^\mu u_r(p) = 2 p^\mu \delta_{sr} \\ \bar{v}_s(p) \gamma^\mu v_r(p) = 2 p^\mu \delta_{sr}. \end{cases} \quad (2.1.63)$$

Inoltre, si ha anche:

$$\bar{u}_s(p) \gamma^0 v_r(-p) = \bar{v}_s(p) \gamma^0 u_r(-p) = 0. \quad (2.1.64)$$

Ovviamente abbiamo bisogno anche di definire il propagatore di Feynman per il campo spinoriale:

$$S_F(x - y) = \langle 0 | T[\psi(x) \bar{\psi}(y)] | 0 \rangle \quad (2.1.65)$$

$$= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle - \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle \quad (2.1.66)$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (2.1.67)$$

che diventa:

$$\begin{cases} \text{se } x^0 > y^0 & \langle 0 | (b + d^\dagger)_x (d + b^\dagger)_y | 0 \rangle \longrightarrow \langle 0 | b_x b_y^\dagger | 0 \rangle \\ \text{se } y^0 > x^0 & \langle 0 | (d + b^\dagger)_y (b + d^\dagger)_x | 0 \rangle \longrightarrow \langle 0 | d_y d_x^\dagger | 0 \rangle. \end{cases} \quad (2.1.68)$$

Inoltre, abbiamo che il propagatore ritardato è la funzione di Green (dell'operatore di Dirac):

$$(i\cancel{\partial}_x - m)S_R(x - y) = i\delta^4(x - y). \quad (2.1.69)$$

Ci servirà quando disegneremo diagrammi di Feynman tenere a mente che il propagatore:

$$S_{xy} = S(x - y) = \langle \Omega | T\psi(x)\bar{\psi}(y) | \Omega \rangle \quad (2.1.70)$$

crea una particella in y e la distrugge in x , mentre un'anti-particella la propaga da x ad y .

2.1.4 Formula di Gell-Mann-Low per campi spinoriali

La formula di Gell-Mann-Low rimane uguale al caso scalare (1.2.88), ma nel teorema di Wick e nella formula SLZ dovremo fare attenzione perché abbiamo delle relazioni di anti-commutazione (quindi verranno fuori dei segni negativi) e non di commutazione come nel caso scalare. Nelle prossime sezioni vedremo entrambi questi due argomenti. Ma scriviamo un attimo la formula di Gell-Mann-Low:

$$G = \langle \Omega | T[\psi \dots \bar{\psi}] | \Omega \rangle \quad (2.1.71)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{\langle 0 | T[U(\tau, -\tau) \psi \dots \bar{\psi}] | 0 \rangle}{\langle 0 | U(\tau, -\tau) | 0 \rangle} \quad (2.1.72)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{\langle 0 | T[\psi \dots \bar{\psi} e^{-i \int d^4 z \mathcal{H}_I}] | 0 \rangle}{\langle 0 | T[e^{-i \int d^4 z \mathcal{H}_I}] | 0 \rangle} \quad (2.1.73)$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-i)^s}{s!} \langle 0 | T \left[\psi \dots \bar{\psi} \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y_s \mathcal{H}_I(y_1) \dots \mathcal{H}_I(y_s) \right] | 0 \rangle. \quad (2.1.74)$$

2.2 Formula LSZ per campi spinoriali

Vediamo in questa sezione la formula di riduzione di LSZ, facendo lo stesso ragionamento del caso scalare. Studiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\cancel{\partial} - m_0)\psi + \mathcal{L}_{int} \quad (2.2.1)$$

dove $\mathcal{L}_{int}$ è un possibile termine di interazione; per esempio possiamo avere:

$$\mathcal{L}_{int} \sim g \phi \bar{\psi} \psi \quad (2.2.2)$$

che è una **lagrangiana di Yukawa** (la studieremo tra non molte sezioni), oppure:

$$\mathcal{L}_{int} \sim e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.2.3)$$

che viene chiamata **lagrangiana di Maxwell** (anche la sezione di questa teoria è prossima).

Noi per il momento lasciamo stare la teoria interagente e concentriamoci su quella libera. Sappiamo bene che le soluzioni all'equazione di Dirac le possiamo scrivere in termini di onde piane, come (2.1.49), ma al nostro scopo ci conviene scriverle come:

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_{s=\pm} \int d^3p \left\{ b_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) g_p(x) + d_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) g_p^*(x) \right\} \quad (2.2.4)$$

in cui mettiamo:

$$g_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-ipx}. \quad (2.2.5)$$

Sarà cruciale tenere a mente le equazioni degli spinori:

$$\begin{cases} (\not{p} - m) u_s(\vec{p}) = 0 \\ (\not{p} + m) v_s(\vec{p}) = 0. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

e le relazioni di normalizzazione ed ortogonalità:

$$\begin{cases} \bar{u}_s(p) u_r(p) = +2m \delta_{sr} \\ \bar{v}_s(p) v_r(p) = -2m \delta_{sr} \end{cases}, \quad \begin{cases} u_s^\dagger(p) u_r(p) = 2 E_p \delta_{sr} \\ v_s^\dagger(p) v_r(p) = 2 E_p \delta_{sr} \end{cases} \quad (2.2.7)$$

$$\begin{cases} \bar{u}_s(p) \gamma^\mu u_r(p) = 2 p^\mu \delta_{sr} \\ \bar{v}_s(p) \gamma^\mu v_r(p) = 2 p^\mu \delta_{sr}. \end{cases} \quad (2.2.8)$$

$$\bar{u}_s(p) \gamma^0 v_r(-p) = \bar{v}_s(p) \gamma^0 u_r(-p) = 0. \quad (2.2.9)$$

La prima cosa che abbiamo fatto con il campo scalare è stata estrarre gli operatori di creazione e distruzione, dunque, facciamo la stessa cosa con b_s e d_s . In questo caso le cose sono leggermente più semplici potendo sfruttare

gli spinori. Calcoliamo:

$$\int d^3x \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma^0 \psi(x) e^{ip'x} = \quad (2.2.10)$$

$$= \int d^3x \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma^0 \left(\sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_p}} \left[b_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ipx} + \right. \right. \\ \left. \left. + d_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{ipx} \right] \right) e^{ip'x} \quad (2.2.11)$$

$$= \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_p}} \int d^3x \left\{ \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma^0 \left[b_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ipx} + \right. \right. \\ \left. \left. + d_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{ipx} \right] \right\} e^{ip'x} \quad (2.2.12)$$

$$= (2\pi)^{3/2} \sum_s \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}} \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma^0 \left[u_s(p) b_s(p) e^{-i(E_p - E_{p'})t} \delta^3(p - p') + \right. \\ \left. + v_s(\vec{p}) d_s^\dagger(\vec{p}) e^{i(E_p + E_{p'})t} \delta^3(p + p') \right] \quad (2.2.13)$$

$$= (2\pi)^{3/2} \sum_s \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[\bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma^0 u_s(\vec{p}) b_s(\vec{p}) + \right. \\ \left. + \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \gamma^0 v_s(-\vec{p}') d_s^\dagger(-\vec{p}') e^{i(2E_{p'})x} \right] \quad (2.2.14)$$

$$= (2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_p} b_s(\vec{p}). \quad (2.2.15)$$

In modo analogo, moltiplicando per $\bar{v}_{s'}\gamma^0$, troviamo l'espressione per $d_s(\vec{p})$. Complessivamente quindi scriviamo:

$$\begin{aligned} b_s(\vec{p}) &= \int d^3x \bar{u}_s(\vec{p}) \gamma^0 \psi(\vec{x}, t) g_p^*(x) \\ b_s^\dagger(\vec{p}) &= \int d^3x \bar{\psi}(\vec{x}, t) \gamma^0 u_s(\vec{p}) g_p(x) \\ d_s(\vec{p}) &= \int d^3x \bar{\psi}(\vec{x}, t) \gamma^0 v_s(\vec{p}) g_p^*(x) \\ d_s^\dagger(\vec{p}) &= \int d^3x \bar{v}_s(\vec{p}) \gamma^0 \psi(\vec{x}, t) g_p(x). \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Varrà la relazione generica:

$$(i\not{D} - m)u_s(\vec{p})g_p(x) = 0 \quad (2.2.17)$$

e ricorda che siamo ancora in una teoria libera.

Quando andiamo in teoria interagente², proprio come fatto per il campo scalare (vedi (1.4.122)), avremo degli operatori:

$$b_s(\vec{p}, t) \quad , \quad b_s^\dagger(\vec{p}, t) \quad (2.2.18)$$

$$d_s(\vec{p}, t) \quad , \quad d_s^\dagger(\vec{p}, t) \quad (2.2.19)$$

che assumiamo avere le stesse espressioni (2.2.16), ma sta volta con le condizioni:

$$(i\cancel{\partial} - m_p)u_s g_p(x) = 0 \quad (2.2.20)$$

$$\bar{u}_s g_p^*(x)(i\overleftarrow{\cancel{\partial}} - m_p) = 0. \quad (2.2.21)$$

Prima non avevamo messo la dipendenza dal tempo negli operatori di creazione e distruzione poiché, così come nella teoria scalare libera, anche nella teoria fermionica libera abbiamo che essi sono indipendenti dal tempo. Possiamo facilmente dimostrarlo:

$$i\partial_t b_s(\vec{p}, t) = i \int d^3x \bar{u}_s(\vec{p}) \gamma^0 (\partial_t \psi g_p^* + \psi \partial_t g^*) \quad (2.2.22)$$

da (2.2.21) vediamo:

$$i\partial_0 \bar{u} g^* \gamma^0 = -i\partial_i \bar{u} \gamma^i g^* - m_p \bar{u} g^* \quad (2.2.23)$$

allora

$$i\partial_t b_s(\vec{p}, t) = i \int d^3x \left[\bar{u}_s(\vec{p}) i\gamma^0 \partial_t \psi g_p^* - i\partial_i (\bar{u}_s(\vec{p}) g_p^*) \gamma^i \psi - m_p \bar{u}_s \psi g_p^* \right] \quad (2.2.24)$$

se integriamo per parti il secondo termine:

$$= \int d^3x \left[\bar{u}_s(\vec{p}) i\gamma^0 \partial_t \psi g_p^* + i\bar{u}_s(\vec{p}) g_p^* \gamma^i \partial_i \psi - m_p \bar{u}_s \psi g_p^* \right] \quad (2.2.25)$$

$$= \int d^3x \bar{u}_s(\vec{p}) (i\cancel{\partial} - m_p) \psi(\vec{x}, t) g_p^*(x) \quad (2.2.26)$$

in cui ci rendiamo conto che questa relazione sarebbe nulla in una teoria libera poiché avremmo:

$$(i\cancel{\partial} - m_p) \psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (2.2.27)$$

ossia l'equazione di Dirac; mentre in una teoria interagente abbiamo:

$$(i\cancel{\partial} - m_p) \psi(\vec{x}, t) = j \quad (2.2.28)$$

con j una qualche sorgente.

²Per campi fermionici le uniche interazione invariante di Lorentz, che possiamo accendere sono del tipo $(\bar{\psi}\psi)^n$ (scopriremo poi che sono termini malati).

In modo analogo si trova:

$$i\partial_t b_s^\dagger(\vec{p}) = \int d^3x \bar{\psi}(\vec{x}, t) (i\overleftarrow{\not{D}} + m_p) u_s(\vec{p}) g_p(x). \quad (2.2.29)$$

Potremmo fare gli stessi discorsi riguardanti i pacchetti d'onda, della sezione §1.4.3, anche per i campi ψ e vedere che anche in questo caso gli stati a molte particelle si disaccoppiano e valgono:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} b_s^\dagger(\vec{p}, t) = \sqrt{Z} b_{in,s}^\dagger(\vec{p}) \quad (2.2.30)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} b_s(\vec{p}, t) = \sqrt{Z} b_{out,s}(\vec{p}) \quad (2.2.31)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d_s^\dagger(\vec{p}, t) = \sqrt{Z} d_{in,s}^\dagger(\vec{p}) \quad (2.2.32)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d_s(\vec{p}, t) = \sqrt{Z} d_{out,s}(\vec{p}) \quad (2.2.33)$$

$$(2.2.34)$$

e seguendo lo stesso ragionamento di ϕ potremmo dimostrare che quelli scritti sono effettivamente operatori di creazione e distruzione tali per cui:

$$b_{in,s}^\dagger(\vec{p}) |\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} |s, \vec{p}\rangle_{in} \quad (2.2.35)$$

$$\langle \Omega | b_{out,s}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} {}_{out} \langle s, \vec{p} | \quad (2.2.36)$$

$$d_{in,r}^\dagger(\vec{q}) |\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_q}} |r, \vec{q}\rangle_{in} \quad (2.2.37)$$

$$\langle \Omega | d_{out,r}(\vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{2E_q}} {}_{out} \langle r, \vec{q} |. \quad (2.2.38)$$

Ora possiamo finalmente provare a calcolare, facendo cadere il pedice di spin, l'ampiezza:

$$\langle out | in \rangle = {}_{out} \langle \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_r, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_s | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n, \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m \rangle \quad (2.2.39)$$

in cui abbiamo n particelle ed m antiparticelle nello stato iniziale, mentre r particelle ed s antiparticelle nello stato finale. Implementando i conti esattamente come nel caso scalare (d'ora in avanti omettiamo dei dettagli e saltiamo conti, per cui è necessario aver capito il procedimento per il campo scalare):

$$= \sqrt{2E_{p_1}} \langle out | b_{in,s}^\dagger(\vec{p}_1) | \vec{p}_2, \dots \rangle_{in} \quad (2.2.40)$$

$$= \sqrt{2E_{p_1}} \langle out | b_{in,s}^\dagger(\vec{p}_1) - b_{out,s}^\dagger(\vec{p}_1) + b_{out,s}^\dagger(\vec{p}_1) | \vec{p}_2, \dots \rangle_{in} \quad (2.2.41)$$

ipotizziamo che non ci sia forward scattering (togliamo $+b_{out,s}^\dagger(\vec{p}_1)$):

$$= \sqrt{2E_{p_1}} \langle \text{out} | b_{in,s}^\dagger(\vec{p}_1) - b_{out,s}^\dagger(\vec{p}_1) | \vec{p}_2, \dots \rangle_{in} \quad (2.2.42)$$

$$= -\frac{\sqrt{2E_{p_1}}}{\sqrt{Z}} \int dt_1 \partial_{t_1} \left(\langle \text{out} | b_s^\dagger(\vec{p}_1, t_1) | \vec{p}_2, \dots \rangle_{in} \right) \quad (2.2.43)$$

$$= -\frac{\sqrt{2E_{p_1}}}{\sqrt{Z}} \int dt_1 \langle \text{out} | \partial_{t_1} b_s^\dagger(\vec{p}_1, t_1) | \vec{p}_2, \dots \rangle_{in} \quad (2.2.44)$$

$$= i \frac{\sqrt{2E_{p_1}}}{\sqrt{Z}} \int dt_1 \int d^3x_1 \langle \text{out} | \bar{\psi}(x_1) | \vec{p}_2, \dots \rangle_{in} (i\overleftarrow{\not{\partial}}_1 + m_p) u_s(\vec{p}_1) g_{p_1}(x_1) \quad (2.2.45)$$

possiamo procedere a rimuovere la seconda particella:

$$= i \frac{\sqrt{2E_{p_1}} \sqrt{2E_{p_2}}}{\sqrt{Z}} \int d^4x_1 \langle \text{out} | \bar{\psi}(x_1) b_{in,s_2}^\dagger(\vec{p}_2) | \vec{p}_3, \dots \rangle_{in} (i\overleftarrow{\not{\partial}}_1 + m_p) u_s(\vec{p}_1) g_{p_1}(x_1) \quad (2.2.46)$$

$$= i \frac{\sqrt{2E_{p_1}} \sqrt{2E_{p_2}}}{\sqrt{Z}} \int d^4x_1 \langle \text{out} | \bar{\psi}(x_1) b_{in,s_2}^\dagger(\vec{p}_2) + b_{out,s_2}^\dagger(\vec{p}_2) \bar{\psi}(x_1) - \\ - b_{out,s_2}^\dagger(\vec{p}_2) \bar{\psi}(x_1) | \vec{p}_3, \dots \rangle_{in} (i\overleftarrow{\not{\partial}}_1 + m_p) u_s(\vec{p}_1) g_{p_1}(x_1) \quad (2.2.47)$$

$$= i \frac{\sqrt{2E_{p_1}} \sqrt{2E_{p_2}}}{\sqrt{Z}} \int d^4x_1 \int dt_2 \partial_{t_2} \langle \text{out} | T \left(\bar{\psi}(x_1) b_{s_2}^\dagger(p_2, t) \right) | \vec{p}_3, \dots \rangle_{in} \times \\ \times (i\overleftarrow{\not{\partial}}_1 + m_p) u_s(\vec{p}_1) g_{p_1}(x_1) \quad (2.2.48)$$

da qua in poi i conti sono analoghi al caso scalare, e procedendo anche a rimuovere le particelle nello stato finale, stessa cosa per le antiparticelle, arriviamo a:

$$\langle \text{out} | \text{in} \rangle = \left(\text{costanti} \right) \int \left[\prod_{i=1}^n d^4x_i g_{p_i}(x_i) \right] \times \\ \times \left[\prod_{j=1}^m d^4y_j g_{q_j}^*(y_j) \right] \times \left[\prod_{l=1}^r d^4w_l g_{k_l}^*(w_l) \right] \times \\ \left[\prod_{f=1}^s d^4z_f g_{l_f}(z_f) \right] \times \\ (i\overleftarrow{\not{\partial}} + m_p)_{\beta_1 b_1} \dots (i\overleftarrow{\not{\partial}} - m_p)_{\delta_1 d_1} \times \\ \langle \Omega | T \left(\bar{\psi}_{a_i}(x_1) \dots \psi_{b_1}(y_1) \dots \bar{\psi}_{c_1}(z_1) \dots \psi_{d_1}(w_1) \dots \right) | \Omega \rangle \times \\ (i\overleftarrow{\not{\partial}} - m_p)_{a_1 \alpha_1} \dots (i\overleftarrow{\not{\partial}} + m_p)_{c_1 \gamma_1} \times \\ u_{s_1}(\vec{p}_1)_{\alpha_1} \dots \bar{u}_{s_1}(\vec{k}_1)_{\delta_1} \dots \bar{v}_{s_1}(\vec{q}_1)_{\beta_1} \dots v_{s_1}(l_1)_{\gamma_1}. \quad (2.2.49)$$

L'espressione per la formula di LSZ (2.2.49) è altamente poco invitante, ma possiamo analizzarla leggermente meglio e cercare di farcela piacere.

La produttoria su i è per le particelle dello stato *in*, la produttoria su j per le antiparticelle *in*, quella su l per le particelle *out* e su f per le antiparticelle *out*. Invece, all'interno del prodotto T ordinato abbiamo i campi $\bar{\psi}_{a_i}(x_i)$ per le particelle dello stato *in*, i campi $\psi_{b_j}(y_j)$ per le antiparticelle dello stato *in*, campi $\psi_{d_l}(w_l)$ per le particelle dello stato *out* e $\bar{\psi}_{c_f}(z_f)$ per le antiparticelle di *out*.

In più abbiamo messo tutti gli indici matriciali. Per interiorizzarli meglio facciamo un'esempio:

$$\bar{\psi}_a(i \overleftarrow{\not{\partial}}_1 + m_p)_{a\alpha} u_s(\vec{p}_1)_\alpha. \quad (2.2.50)$$

Per contrarre opportunamente gli indici dobbiamo ragionare bene su chi corrisponde a cosa. Nei nostri conti abbiamo visto che quando estraiamo una particella dallo stato *in*, questa corrisponde ad uno spinore u , moltiplicato per la matrice $(i \overleftarrow{\not{\partial}}_1 + m_p)$ e il cui prodotto è chiuso con il vettore riga $\bar{\psi}$.

Ci si può facilmente convincere che lo spinore $\bar{u}$ corrisponde ad una particella dello stato *out*, che sarà legato dalla matrice $(i \not{\partial}_1 - m_p)$ al campo ψ .

Per le antiparticelle il discorso è specchiato e avremo che un'antiparticella di *in* avrà ψ contratto con la matrice $(i \not{\partial}_1 - m_p)$ e lo spinore $\bar{v}$; chiaramente avremo nello stato finale l'antiparticelle date da $\bar{\psi}$ con la matrice $(i \overleftarrow{\not{\partial}}_1 + m_p)$ e lo spinore v .

Ovviamente dobbiamo stare attenti all'ordine in cui mettiamo i vari termini se non espliciti gli indici spinoriali.

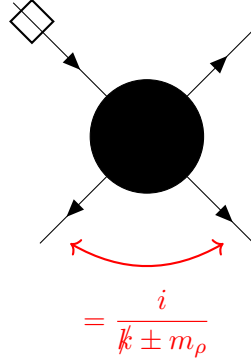
È comunque non bella come espressione, ma possiamo andare nello spazio dei momenti (facendo cadere l'indice di spin ed esplicitando le costanti), in cui compariranno delle δ , e avremo:

$$\begin{aligned} \langle \text{out} | \text{in} \rangle &= \left(\frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^{m+n+r+s} (-1)^{r+s} \times \\ &\quad \times u(\vec{p}_1)_{\alpha_1} \dots \bar{u}(\vec{k}_1)_{\delta_1} \dots \bar{v}(\vec{q}_1)_{\beta_1} \dots v(\vec{l}_1)_{\gamma_1} \times \\ &\quad \tilde{G}_{amp}(p_1, \dots, q_1, \dots, k_1, \dots, l_1, \dots)_{\alpha_1, \dots, \beta_1, \dots, \delta_1, \dots, \gamma_1} \end{aligned} \quad (2.2.51)$$

in cui abbiamo fatto le stesse cose del campo scalare e dove tutte le $\partial \rightarrow p$, quindi $(i \not{\partial} \pm m_p) \rightarrow (i \not{p} \pm m_p)$, che quando agiscono sugli spinori u e v darebbero 0, a meno che la funzione di Green non abbia $(\sim)$ dei poli quando le particelle sono on-shell. O meglio, a meno che $\tilde{G}$ non abbia dei propagatori attaccati come gambe esterne, che contribuiscono con dei termini proporzionali all'inverso delle relazioni di mass-shell. Dunque, si vede che la rinormalizzazione delle masse funziona uguale al caso di ϕ .

Come fatto per il caso scalare possiamo rappresentare diagrammaticamente 2.2.52, in cui il box indica il propagatore amputato.

Notiamo che ora in (2.2.51), rispetto al caso scalare in cui avevamo solamente la $\tilde{G}_{amp}$, abbiamo anche tutte le polarizzazioni delle particelle e antiparticelle.



(2.2.52)

2.3 Teorema di Wick per campi spinoriali

Il teorema di Wick lo abbiamo imparato a conoscere già nel caso scalare ed ora lo rivediamo per i campi spinoriali. Procederà tutto in maniera analoga, ma con l'accortezza che guadagneremo dei segni ogni volta che scambieremo di posto dei campi.

Abbiamo già visto il prodotto:

$$T[\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)] = \theta(x^0 - y^0) \psi_\alpha(x) \psi_\beta(y) - \theta(y^0 - x^0) \psi_\beta(y) \psi_\alpha(x) \quad (2.3.1)$$

possiamo ipotizzare $x^0 > y^0$ e che $\psi = \psi^+ + \psi^-$ (così il primo contiene $\hat{b}$ e il secondo $\hat{d}^\dagger$). In questo modo:

$$T[\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)] = \psi_\alpha^+(x) \psi_\beta^+(y) + \psi_\alpha^+(x) \psi_\beta^-(y) + \psi_\alpha^-(x) \psi_\beta^+(y) + \psi_\alpha^-(x) \psi_\beta^-(y) \quad (2.3.2)$$

$$= \psi_\alpha^+(x) \psi_\beta^+(y) + \psi_\beta^-(y) \psi_\alpha^+(x) + \psi_\alpha^-(x) \psi_\beta^+(y) + \psi_\alpha^-(x) \psi_\beta^-(y) + \left\{ \psi_\alpha^+(x), \psi_\beta^-(y) \right\} \quad (2.3.3)$$

$$= N[\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)] + \left\{ \psi_\alpha^+(x), \psi_\beta^-(y) \right\} \quad (2.3.4)$$

ricordiamoci anche che vale:

$$\{\psi_\alpha(t, \vec{x}), \psi_\beta(t, \vec{y})\} = \{\bar{\psi}_\alpha(t, \vec{x}), \bar{\psi}_\beta(t, \vec{y})\} = 0 \quad (2.3.5)$$

$$\{\psi_\alpha(t, \vec{x}), \bar{\psi}_\beta(t, \vec{y})\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.3.6)$$

e dunque, calcolando il valore di aspettazione sul vuoto, abbiamo:

$$\langle 0 | T[\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | N[\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)] | 0 \rangle + \left\{ \psi_\alpha^+(x), \psi_\beta^-(y) \right\} = 0 \quad (2.3.7)$$

$$\langle 0 | T[\bar{\psi}_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | N[\bar{\psi}_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)] | 0 \rangle + \left\{ \bar{\psi}_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^-(y) \right\} = 0. \quad (2.3.8)$$

Il propagatore è dunque:

$$\langle 0 | T[\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | N[\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)] | 0 \rangle + \left\{ \psi_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^-(y) \right\} \quad (2.3.9)$$

$$= S_F(x - y). \quad (2.3.10)$$

Possiamo riscrivere:

$$T[\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)] = N[\psi(x) \psi(y)] \quad (2.3.11)$$

$$T[\bar{\psi}_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)] = N[\bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y)] \quad (2.3.12)$$

$$T[\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)] = N[\psi(x) \bar{\psi}(y)] + S_F(x - y) \quad (2.3.13)$$

$$= N[\psi(x) \bar{\psi}(y)] + \overline{\psi(x) \psi(y)}. \quad (2.3.14)$$

In maniera più generica possiamo porre $A, B \in \{\psi, \bar{\psi}\}$ e otteniamo:

$$T[A(x) \bar{B}(y)] = N[A(x) \bar{B}(x)] + \overline{A(x) B(y)} \quad (2.3.15)$$

in cui se $A = B$ allora il termine contratto è nullo, altrimenti è uguale al propagatore. Infatti:

$$\overline{\psi \psi} = 0 \quad , \quad \overline{\bar{\psi} \bar{\psi}} = 0 \quad , \quad \overline{\psi \bar{\psi}} = S_F(x - y). \quad (2.3.16)$$

Consideriamo ora un ψ generico, che può essere $\{\psi, \bar{\psi}\}$, e vediamo:

$$T[\psi_1 \dots \psi_n] = (-1)^\sigma \psi_{t_1} \dots \psi_{t_n} \quad (2.3.17)$$

in cui σ è il numero di permutazioni necessarie per ottenere il prodotto temporalmente ordinato. Nel prodotto normal-ordered dividiamo in due gruppi, $A = \{\psi^-\}$ e $B = \{\psi^+\}$:

$$N[\psi_1 \dots \psi_n] = \sum_{A, B} \delta_\sigma \prod_{i \in A} \psi_i^- \prod_{j \in B} \psi_j^+ \quad (2.3.18)$$

in cui la δ indica che c'è un segno $\pm$ che dipende dall'ordine dei campi.

L'enunciato del **teorema di Wick** rimane uguale al caso bosonico, ma dentro al prodotto normale ordinato abbiamo segni sia positivi sia negativi:

$$T[\psi_1 \dots \psi_n] = N[\psi_1 \dots \psi_n] + \sum_{\sigma} N[\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n] + \dots + \sum_{\sigma} N[\psi_1 \psi_2 \dots \psi_{n-1} \psi_n] \quad (2.3.19)$$

in cui stiamo utilizzando un campo ψ generico, ma nella pratica dobbiamo ricordare che:

$$\overline{\psi\psi} = \overline{\psi}\overline{\psi} = 0. \quad (2.3.20)$$

Inoltre, la lagrangiana di interazione ha un numero pari di campi, quindi anche nel teorema di Wick possiamo avere solo un numero pari di campi (diversamente dal caso scalare, in cui anche il caso dispari era possibile).

Per il teorema di Wick (2.3.19), in cui σ sono le combinazioni possibili, abbiamo:

$$\langle 0 | T[\psi \dots \bar{\psi}] | 0 \rangle = \begin{cases} 0 & \# \text{ campi è dispari} \\ \pm \sum_{\sigma} \prod_{i,j} S_{\psi}(x_i - x_j) & \# \text{ campi è pari} \end{cases} \quad (2.3.21)$$

e in cui indichiamo con:

$$S_F(x - y) = \overline{\psi\psi} = \left\{ \psi_{\alpha}^{+}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{-}(y) \right\} = \langle 0 | T[\psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y)] | 0 \rangle. \quad (2.3.22)$$

Però qua dobbiamo stare attenti perché quando abbiamo una contrazione, per poter scrivere il propagatore dobbiamo avere i due campi vicini (nel caso scalare il problema non sorgeva perché i segni erano tutti +). Facciamo un esempio rapido³:

$$\begin{aligned} T(\psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \bar{\psi}_4) &= \psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \bar{\psi}_4 : + \\ &+ : \overbrace{\psi_1 \bar{\psi}_2}^{=S_{12}} \psi_3 \bar{\psi}_4 : + : \psi_1 \overbrace{\bar{\psi}_2 \psi_3}^{=-\bar{\psi}_2 \psi_3 = -S_{23}} \bar{\psi}_4 : + \dots \\ &+ : \overbrace{\psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \bar{\psi}_4}^{=(-1)^2 \psi_1 \bar{\psi}_4 \bar{\psi}_2 \psi_3 = -S_{14} S_{23}} : + \dots \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

$$= S_{12} : \psi_3 \bar{\psi}_4 : - S_{23} : \psi_1 \bar{\psi}_4 : - S_{14} S_{23} + \dots \quad (2.3.24)$$

2.3.1 Dimostrazione per induzione (cenni)

Ipotizziamo che ψ_{n+1} abbia il tempo più piccolo, e quindi possiamo portarlo fuori dal prodotto temporalmente ordinato:

$$T[\psi_1 \dots \psi_n \psi_{n+1}] = T[\psi_1 \dots \psi_n] \psi_{n+1} \quad (2.3.25)$$

³La scrittura è venuta leggermente male, ma non ho trovato un modo più pulito di scrivere che ogni volta che facciamo una contrazione dobbiamo mettere i campi vicini per poter vedere il propagatore $\overline{\psi_i \psi_j} = S_{ij}$.

in cui vediamo che:

$$[\psi_1 \dots \psi_n] \psi_{n+1} = \left(\sum_{A,B} \delta_\sigma \prod_{i \in A} \psi_i^- \prod_{j \in B} \psi_j^+ \right) (\psi_{n+1}^+ + \psi_{n+1}^-) \quad (2.3.26)$$

$$= \sum_{A,B} \delta_\sigma \prod_{i \in A} \psi_i^- \prod_{j \in B} \psi_j^+ \psi_{n+1}^+ + \sum_{A,B} \delta_\sigma \prod_{i \in A} \psi_i^- \prod_{j \in B} \psi_j^+ \psi_{n+1}^- \quad (2.3.27)$$

Per fare in modo che il secondo termine sia normale ordinato, dobbiamo fare delle permutazioni a causa di cui escono dei segni negativi e gli anti-commutatori, ma i segni ricostruiscono il segno giusto per il prodotto normale ordinato di $n+1$ campi, mentre gli anti-commutatori completano la sommatoria con una contrazione aggiungendo le contrazioni tra ψ_{n+1} e gli altri campi, analogamente gli anti-commutatori della prima sommatoria completano la sommatoria con due contrazioni, ecc. Si vedano i libri per completezza.

2.4 Variabili di Mandelstam

Da questo punto in poi studieremo degli urti, per i quali ci sarà particolarmente utile definire determinate variabili, in modo da semplificare notevolmente le espressioni.

Per 4 particelle, dunque quando abbiamo processi:

$$2 \longrightarrow 2$$

possiamo introdurre le variabili di Mandelstam s, t, u che vengono fuori dai diagrammi in figura 2.1.

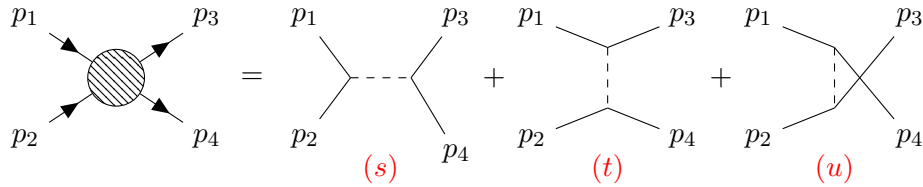


Figura 2.1

Siano p_1, p_2 i quadri-impulsi dei campi iniziali (quindi i tri-impulsi iniziali puntano verso il vertice) e siano p_3, p_4 i quadri-impulsi dei campi finali (quindi i tri-impulsi finali puntano fuori dal vertice), allora le variabili di

Mandelstam sono definite come:

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\ u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \end{cases} \quad (2.4.1)$$

in cui la seconda uguaglianza la possiamo scrivere per via della conservazione del quadri-impulso. Notiamo che la variabile s rappresenta l'energia del centro di massa nel sistema iniziale.

Possiamo vedere che s, t, u non sono varibili indipendenti, infatti vale:

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2. \quad (2.4.2)$$

Possiamo dimostrarlo velocemente utilizzando il fatto che le particelle sono tutte on-shell, ovvero $p_i^2 = m_i^2$, e che vale la conservazione del momento:

$$s + t + u = (p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 + (p_1 - p_4)^2 \quad (2.4.3)$$

$$= p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 + p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 + p_1^2 + p_4^2 - 2p_1 p_4 \quad (2.4.4)$$

$$= 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2p_1 \underbrace{(p_2 - p_3 - p_4)}_{=-p_1} \quad (2.4.5)$$

$$= 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + \underbrace{2p_1(-p_1)}_{=-2m_1^2} \quad (2.4.6)$$

$$\Rightarrow s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2. \quad (2.4.7)$$

Potemmo scriverci le espressioni per esteso delle variabili di Mandelstam:

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(p_1 \cdot p_2) = m_3^2 + m_4^2 + 2(p_3 \cdot p_4) \\ t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2(p_1 \cdot p_3) = m_2^2 + m_4^2 - 2(p_2 \cdot p_4) \\ u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2(p_1 \cdot p_4) = m_2^2 + m_3^2 - 2(p_2 \cdot p_3) \end{cases} \quad (2.4.8)$$

il che ci è comodo perché ad alte energie, in cui m è trascurabile rispetto p , abbiamo:

$$\begin{cases} s \approx +2(p_1 \cdot p_2) = +2(p_3 \cdot p_4) \\ t \approx -2(p_1 \cdot p_3) = -2(p_2 \cdot p_4) \\ u \approx -2(p_1 \cdot p_4) = -2(p_2 \cdot p_3) \end{cases} \quad (2.4.9)$$

che possiamo anche invertire e scrivere⁴:

$$p_1 p_2 = p_3 p_4 = \frac{1}{2}s \quad (2.4.11)$$

$$p_1 p_3 = p_2 p_4 = -\frac{1}{2}t \quad (2.4.12)$$

$$p_1 p_4 = p_2 p_3 = -\frac{1}{2}u. \quad (2.4.13)$$

Nel sistema di riferimento del centro di massa abbiamo:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0 \quad (2.4.14)$$

se chiamiamo θ l'angolo di deflessione tra $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_3$, allora abbiamo:

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 = E_{cm}^2 \\ t = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2(E_1 E_3 - |\vec{p}_1| |\vec{p}_3| \cos \theta) \\ u = (p_1 - p_4)^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2(E_1 E_4 - |\vec{p}_1| |\vec{p}_4| \cos(\pi + \theta)). \end{cases} \quad (2.4.15)$$

Osserviamo che se $m_i = m \ \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, allora nel centro di massa abbiamo:

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 \quad (2.4.16)$$

e anche:

$$s = (2E_1)^2 = (2E_3)^2 \quad (2.4.17)$$

il che implica che:

$$E_1 = E_3 \quad (2.4.18)$$

cioé:

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3|. \quad (2.4.19)$$

Se poniamo $E_i = E$ e $|\vec{p}_i| = |\vec{p}|$, allora otteniamo:

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 & = 4E^2 = E_{cm}^2 \\ t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 & = 2m^2 - 2(E^2 - |\vec{p}|^2 \cos \theta) \\ & = -2|\vec{p}|^2(1 - \cos \theta) \\ u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 & = 2m^2 - 2(E^2 - |\vec{p}|^2 \cos(\pi + \theta)) \\ & = -2|\vec{p}|^2(1 + \cos \theta). \end{cases} \quad (2.4.20)$$

⁴La relazione esatta, ad esempio per t , sarebbe:

$$p_1 p_3 = -\frac{1}{2}(t - m_1^2 - m_3^2). \quad (2.4.10)$$

Se trascuriamo le masse, allora abbiamo:

$$E_1 = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = E_2 \quad (2.4.21)$$

$$E_3 = |\vec{p}_3| = |\vec{p}_4| = E_4 \quad (2.4.22)$$

pertanto nel sistema di riferimento del centro di massa abbiamo:

$$t = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) \quad (2.4.23)$$

$$u = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta). \quad (2.4.24)$$

2.5 Teoria di Yukawa

Ora che abbiamo imparato come rappresentare processi tramite i diagrammi di Feynman, come possiamo scrivere delle ampiezze di transizione, come calcolare il propagatore interagente tramite Gell-Mann-Low e come scrivere il prodotto T ordinato di un certo numero di campi tramite il teorema di Wick, allora possiamo mettere tutto insieme e cominciare a costruire una teoria, che riutilizzeremo in modo un po' mascherato nella costruzione del Modello Standard. Quello che ci interesserà sarà calcolare la probabilità che un certo processo possa avvenire.

Questa sezione è molto importante per la preparazione dello scritto, visto che un possibile esercizio potrebbe essere quello di calcolare una sezione d'urto (che è collegata a ciò che c'è in questa sezione).

2.5.1 Regole di Feynman

La *teoria di Yukawa* descrive l'interazione tra un campo reale ϕ e un campo di Dirac ψ . La lagrangiana di questa teoria la possiamo costruire come:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \bar{\psi}(i\not{\partial} - M)\psi - g\phi\bar{\psi}\psi \quad (2.5.1)$$

in cui abbiamo messo le lagrangiane scalari e spinoriali, con rispettivamente le due masse m ed M al tree-level⁵, e poi un termine di interazione, costruito in modo che non solo sia uno scalare di Lorentz, ma anche che sia un termine reale (visto che $\mathcal{L}$ dev'essere reale). Infatti possiamo vedere che in:

$$\mathcal{L}_{int} = -g\phi\bar{\psi}\psi \quad (2.5.2)$$

⁵Tutti i discorsi riguardanti le differenze tra massa e massa fisica di una particella possiamo dimenticarceli, poiché noi tratteremo solamente processi al tree-level e a questo livello i due concetti di massa coincidono. Infatti abbiamo imparato che sono presenti differenze tra le due masse quando ci sono dei loop.

ϕ è reale e anche il prodotto $\bar{\psi}\psi$ sappiamo bene essere reale. In più le dimensioni sono:

$$[\phi] = L^{-1} \quad , \quad [\psi] = L^{-3/2} \quad , \quad [g] = 0$$

che ci piace perché (come scopriremo nel prossimo corso) una teoria con la costante di accoppiamento adimensionale è rinormalizzabile. Se consideriamo la costante di accoppiamento g piccola, allora siamo tranquilli che possiamo fare teoria perturbativa.

Cominciamo a cercare le regole di Feynman, nello spazio delle coordinate, per questa teoria.

I propagatori li sappiamo scrivere poiché sono quelli che abbiamo quando spegniamo la costante di accoppiamento $g = 0$. Per il campo scalare:

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (2.5.3)$$

per quello fermionico:

$$S_{\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} ie^{-ip(x-y)} (\not{p} - M + i\varepsilon)^{-1}_{\alpha\beta} \quad (2.5.4)$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} (\not{p} + M)_{\alpha\beta} \quad (2.5.5)$$

in cui abbiamo utilizzato:

$$(\not{p} - M)^{-1} = (\not{p} - M)^{-1} (\not{p} + M)^{-1} (\not{p} + M) = (p^2 - M^2 + i\varepsilon)^{-1} (\not{p} + M). \quad (2.5.6)$$

Chiaramente da queste espressioni sappiamo anche scrivere i propagatori nello spazio di Fourier.

Nelle regole di Feynman dobbiamo mettere anche il contributo del vertice. Il vertice $g\phi\bar{\psi}\psi$ compare per la prima volta nella funzione di Green a 3 punti (i diagrammi precedenti non hanno dei vertici da cui possiamo estrarre le regole). In generale, quando si ha una teoria e si vuole trovare il contributo del vertice, bisogna prendere la funzione di Green opportuna, in modo da avere il corretto termine dello sviluppo di GML. Dunque (usando GML e Wick) notiamo "facilmente" che sviluppando l'esponenziale il termine 0 da contributo nullo, poiché rimane un campo non contratto, il primo termine non banale è l'ordine g , in cui compare $\mathcal{H}_{int}$:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \phi(x) \psi_\alpha(y) \bar{\psi}_\beta(z) | \Omega \rangle &= \\ &= \langle 0 | T \left(\phi(x) \psi_\alpha(y) \bar{\psi}_\beta(z) (-i) \int d^4 w \mathcal{H}_{int}(w) \right) | 0 \rangle \quad (2.5.7) \end{aligned}$$

noi sappiamo:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \implies \mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int} = g\phi\bar{\psi}\psi. \quad (2.5.8)$$

Calcoliamo quindi:

$$= \langle 0 | T \left(\phi(x) \psi_\alpha(y) \bar{\psi}_\beta(z) (-i) \int d^4w g \phi(w) \bar{\psi}_\gamma(w) \psi_\gamma(w) \right) | 0 \rangle \quad (2.5.9)$$

$$= -ig \int d^4w \langle 0 | T \left(\phi(x) \psi_\alpha(y) \bar{\psi}_\beta(z) \phi(w) \bar{\psi}_\gamma(w) \psi_\gamma(w) \right) | 0 \rangle \quad (2.5.10)$$

utilizziamo il teorema di Wick e facciamo le contrazioni che ci interessano⁶:

$$= -ig \int d^4w \langle 0 | T \left(\overbrace{\phi(x) \psi_\alpha(y) \bar{\psi}_\beta(z) \phi(w) \bar{\psi}_\gamma(w) \psi_\gamma(w)} \right) | 0 \rangle \quad (2.5.11)$$

poiché a noi interessa vedere un vertice, per cui tutte le contrazioni sono forzate. Ricordati delle regole di quando fai le contrazioni di campi spinoriali (segna meno che escono quando sposti i campi per costruire i propagatori e le contrazioni nulle (2.3.20)). Quindi abbiamo:

$$= -ig \int d^4w \overbrace{\phi(x) \phi(w)} (-1) \overbrace{\psi_\alpha(y) \bar{\psi}_\gamma(w)} \overbrace{\bar{\psi}_\beta(z) \psi_\gamma(w)} \quad (2.5.12)$$

$$= -ig \int d^4w \Delta(x-w) (-1) S_{\alpha\gamma}(y-w) S_{\gamma\beta}(w-z) \quad (2.5.13)$$

in cui vediamo che $\Delta(x-w)$ propaga da x a w , $S_{\alpha\gamma}(y-w)$ propaga da y a w e $S_{\gamma\beta}(w-z)$ da z a w poiché i campi sono messi al contrario. Diagrammaticamente le contrazioni (2.5.13) le rappresentiamo come nel diagramma

⁶Nota che sarebbero possibili anche altre contrazioni a quest'ordine dello sviluppo, ma essi darebbero dei loop. Prova ad esempio a contrarre i due campi scalari tra loro e poi rispettivamente i campi $\psi_\alpha(y) \bar{\psi}_\beta(z)$ e $\bar{\psi}_\gamma(w) \psi_\gamma(w)$. Ottieni una propagazione libera di un fermione e un propagatore scalare con attaccato un loop fermionico.

2.5.14.

$$= -ig \int d^4w \left(x \text{ --- } w \text{ --- } \gamma \begin{array}{l} \nearrow z, \beta \\ \searrow y, \alpha \end{array} \right) \quad (2.5.14)$$

$$= -ig \int d^4w \left(x \text{ --- } w \text{ --- } \begin{array}{l} \nearrow \delta \\ \searrow \gamma \end{array} \begin{array}{l} \nearrow z, \beta \\ \searrow y, \alpha \end{array} \right) \quad (2.5.15)$$

Nel disegno il verso delle frecce è importante poiché i campi fermionici portano una carica (abeliana $U(1)$) e dobbiamo quindi distinguere tra particella e antiparticella; però non stiamo troppo ad impazzire poiché nel momento in cui facciamo il modulo quadro (calcoliamo la sezione d'urto) il fatto di mettere la particella nel ramo sopra piuttosto che sotto non cambia nulla. L'unica cosa importante è non mettere due frecce che entrano (o escono) dal vertice poiché in quel modo non si conserverebbe la carica.

Il diagramma 2.5.14 lo leggiamo meglio se lo spezziamo nelle sue componenti, come in figura 2.5.15. Questo ci permette di vedere che il vertice, a cui ci amputiamo i propagatori, vediamo che contribuisce come:

$$-ig \int d^4w \delta_{\gamma\delta} \quad (2.5.16)$$

in cui la $\delta_{\gamma\delta}$ ci dice che i due indici devono essere uguali, poiché abbiamo dei propagatori, che attacchiamo al vertice. All'interno del vertice quindi vediamo che c'è una matrice $\mathbb{1}$, visto che non c'è nulla; caso diverso sarà la QED, in cui nel vertice troveremo la matrice γ^μ .

Arrivati a questo punto quindi sappiamo scrivere le regole di Feynman, nello spazio delle coordinate:

- Ad ogni linea di campo *interna* associamo i propagatori:

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (2.5.17)$$

$$S_{\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} (\not{p} + M)_{\alpha\beta}. \quad (2.5.18)$$

- Ad ogni *vertice* associamo:

$$-ig \int d^4w \delta_{\gamma\delta}. \quad (2.5.19)$$

- Dividiamo per il fattore di simmetria del diagramma.

Possiamo anche scrivere le regole nello spazio di Fourier:

- Ad ogni linea di campo *interna* associamo i propagatori:

$$\tilde{\Delta}(x-y) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (2.5.20)$$

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}(x-y) = \frac{i}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} (\not{p} + M)_{\alpha\beta}. \quad (2.5.21)$$

- Ad ogni *vertice* abbiamo la conservazione del quadri-impulso:

$$-ig (2\pi)^4 \delta_{\gamma\delta} \delta^4(\Sigma p_i). \quad (2.5.22)$$

- Dividiamo per il fattore di simmetria.

Così come nella teoria $\lambda\phi^4$, avremo anche in questo caso che il numero di p^μ indeterminati (dunque integrati) ci darà il numero di loop.

Però attenzione perché non abbiamo finito, infatti le regole che abbiamo scritto ci danno una ricetta per calcolare delle funzioni di Green (nello spazio che più ci piace), ma potremmo essere interessati a voler calcolare l'ampiezza di probabilità di un certo processo:

$$\langle \text{out} | \text{in} \rangle \quad (2.5.23)$$

e noi abbiamo imparato, dalle formule di LSZ, che quando lo vogliamo fare dobbiamo seguire le regole:

- Amputiamo le gambe esterne.
- Ad ogni campo *esterno*, indicando con l un fermione descritto da ψ , e quindi con l^- le particelle e l^+ le antiparticelle, dobbiamo introdurre le polarizzazioni dei campi spinoriali (ricorda il risultato (2.2.51)). Dunque, associamo:

$$\begin{aligned} \phi &\sim 1, & l_{in}^- &\sim u(p), & l_{out}^- &\sim \bar{u}(p) \\ l_{in}^+ &\sim \bar{v}(p), & l_{out}^+ &\sim v(p). \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

Ricordiamo che per convenzione l'impulso ha segno positivo se punta dentro il vertice (impulso entrante).

Non ci disperiamo se non ci ricordiamo la regola (2.5.24) poiché ci sarà un metodo mnemonico per scriverla.

2.6 Processi di scattering nella teoria di Yukawa

Vediamo in questa sezione un'esempio di calcolo di processi, nella teoria di Yukawa, con 2 particelle nello stato iniziale e 2 particelle nello stato finale. Saranno dunque utili le variabili di Mandelstam. I processi possibili sono:

$$\begin{array}{llll}
 e^{\pm} & e^{\pm} & \longrightarrow & e^{\pm} & e^{\pm} \\
 e^{+} & e^{-} & \longrightarrow & e^{+} & e^{-} \\
 e^{+} & e^{-} & \longrightarrow & \phi & \phi \\
 e^{\pm} & \phi & \longrightarrow & e^{\pm} & \phi.
 \end{array}$$

Chiaramente quando scriviamo un certo processo dobbiamo chiederci per prima cosa se è un processo possibile, ovvero, dobbiamo chiederci se la carica è conservata. I quattro processi elencati sono tutti possibili, mentre un processo non fisico è:

$$e^{+} \quad e^{+} \quad \longrightarrow \quad e^{-} \quad e^{-}.$$

Come appena detto il numero di scattering 2 in 2 che possono avvenire in questa teoria sono limitati, ma è utile per lo scritto calcolarli tutti. Nella mia pagina personale è presente un file con i conti di tutte le ampiezze di probabilità dei processi elencati sopra. Noi nella sezione seguente ne calcoleremo uno di esempio.

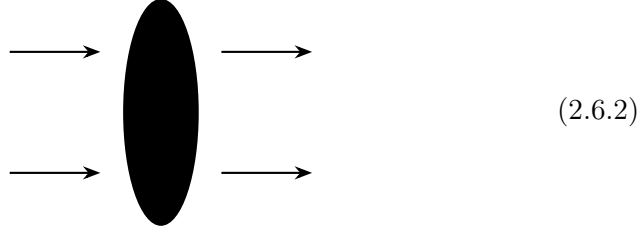
2.6.1 Processo $e^{-} + e^{-} \longrightarrow e^{-} + e^{-}$

Noi ora soffermiamoci sul processo:

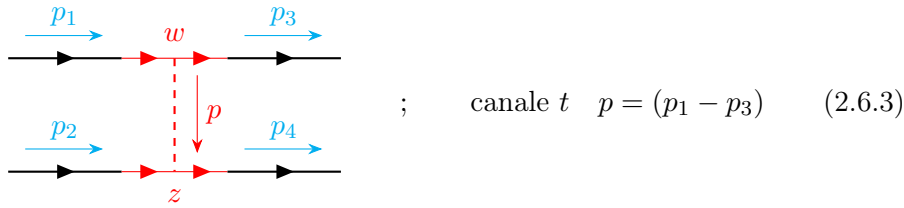
$$e^{-} \quad e^{-} \quad \longrightarrow \quad e^{-} \quad e^{-} \tag{2.6.1}$$

il cui diagramma tree-level che collega i due fermioni iniziali a quelli finali è rappresentato nel diagramma 2.6.2. Chiaramente nel blob nero non può esserci qualsiasi cosa, ma dobbiamo inserirci delle cose coerenti con la teoria che stiamo considerando. Da $\mathcal{L}_{yukawa}$ sappiamo che le interazioni sono racchiuse in vertici del tipo $\phi\bar{\psi}\psi$, dunque nei diagrammi dovremo accoppiare due campi fermionici (con le opportune frecce) ad un campo scalare. Ricordando anche il fatto che in MQ le particelle identiche sono indistinguibili, i due processi che possiamo disegnare sono 2.6.3 e 2.6.4. Entrambi i processi disegnati contribuiranno all'ampiezza di probabilità di (2.6.1), ma potrebbe

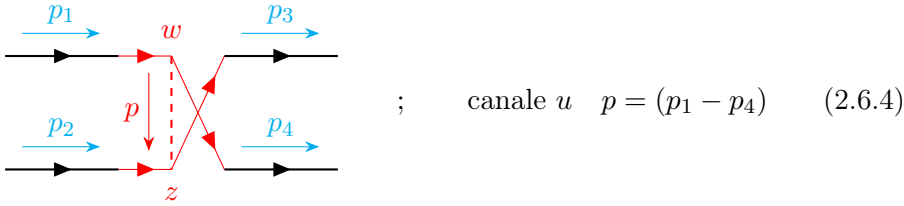
esserci un segno relativo tra i due⁷.



(2.6.2)



(2.6.3)



(2.6.4)

Il segno relativo tra i due diagrammi 2.6.3 e 2.6.4 (in cui i colori sono solo per una maggiore comprensione e non verranno più usati) lo possiamo vedere dal prodotto T ordinato e con il teorema di Wick. Infatti, il diagramma 2.6.3 lo scriviamo come (omettendo un po' di cose):

$$\langle 0 | T \left(\bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_3) \psi(x_4) \phi(w) \bar{\psi}(w) \psi(w) \phi(z) \bar{\psi}(z) \psi(z) \right) | 0 \rangle \quad (2.6.5)$$

in cui ad ogni x_i associamo la gamba con p_i . Dobbiamo spostare i vari campi in modo da ricostruire i propagatori, ma stando attenti ai segni che guadagniamo:

$\psi(w) \bar{\psi}(x_1)$	5 scambi	$(-1)^5$
$\psi(x_2) \bar{\psi}(z)$	5 scambi	$(-1)^5$
$\psi(x_3) \bar{\psi}(w)$	1 scambio	(-1)
$\psi(x_4) \bar{\psi}(z)$	0 scambi	$(+1)$

⁷In MQ avevamo imparato che il segno relativo tra due ampiezze era molto importante; infatti, se abbiamo due processi e vogliamo calcolare l'ampiezza di probabilità totale, prima dobbiamo sommare le ampiezze e poi farne il modulo quadro. Dunque, avevamo notato che $|A_1 + A_2|^2$ era differente da $|A_1 - A_2|^2$. Tieni a mente che in questo caso possiamo avere dei segni relativi perché abbiamo a che fare con dei campi fermionici, ma nei casi in cui sono presenti solo scalari avremmo solo segni positivi.

in cui teniamo conto che una volta fatto uno scambio per i successivi non abbiamo più tra i piedi quelli precedenti. Comunque, abbiamo capito che per il primo diagramma abbiamo segno complessivo -1 .

Vediamo il valore di aspettazione del diagramma 2.6.4:

$$\langle 0 | T \left(\overline{\psi}(x_1) \overline{\psi}(x_2) \psi(x_3) \psi(x_4) \phi(w) \overline{\psi}(w) \psi(w) \phi(z) \overline{\psi}(z) \psi(z) \right) | 0 \rangle \quad (2.6.6)$$

e vediamo che il numero di permutazioni ci da:

$\psi(w) \overline{\psi}(x_1)$	5 scambi	$(-1)^5$
$\psi(z) \overline{\psi}(x_2)$	5 scambi	$(-1)^5$
$\psi(x_4) \overline{\psi}(w)$	0 scambi	$(+1)$
$\psi(x_3) \overline{\psi}(z)$	0 scambi	$(+1)$

dunque un segno complessivo $+1$.

Questa conoscenza dei segni relativi ci è di notevole utilità poiché ora siamo in grado di calcolarci l'ampiezza di probabilità totale del processo, dopo aver amputato le gambe esterne. In ordine: avendo diagrammi di ordine g^2 , mettiamo il contributo dei vertici:

$$(-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_i)$$

mettiamo il contributo del propagatore scalare:

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

integriamo sui quadri-impulsi non fissati:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

e, seguendo nel verso opposto le frecce dei diagrammi, inseriamo le polarizzazioni dei fermioni e il contributo del vertice (in questa teoria abbiamo osservato essere $\mathbb{1}$).

Facciamo un'esempio per le polarizzazioni. Prendiamo il diagramma 2.6.3. Seguendo in verso opposto le frecce, partendo dal vertice di p_3 , abbiamo: un elettrone in uscita nel vertice, dunque $\overline{u}_{s_3}(\vec{p}_3)$, il vertice, dunque $\mathbb{1}$, e l'elettrone che entra nel vertice, quindi $u_{s_1}(\vec{p}_1)$:

$$\overline{u}_{s_3}(\vec{p}_3) \mathbb{1} u_{s_1}(\vec{p}_1). \quad (2.6.7)$$

Possiamo fare la costruzione analoga per l'altro pezzo di diagramma.

Nota che non stiamo indicando gli indici spinoriali (li riprenderemo tra non molto), ma chiaramente quelli sono prodotti tra vettori e matrici. Nella

nostra notazione mettiamo tra parentesi tonde gli oggetti che hanno indici tutti contratti tra loro. Dunque, in questo primo esempio:

$$\left(\bar{u}_{s_3}(\vec{p}_3) u_{s_1}(\vec{p}_1) \right). \quad (2.6.8)$$

Se inseriamo i segni relativi, che abbiamo imparato dalle funzioni di Green, per ogni diagramma, allora scriviamo l'ampiezza di transizione totale come:

$$\begin{aligned} \langle \text{out} | \text{in} \rangle = & (-ig)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \left\{ (-1)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - p) \times \right. \\ & \times (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + p - p_4) \times \\ & \times \left(\bar{u}_{s_3}(\vec{p}_3) u_{s_1}(\vec{p}_1) \right) \left(\bar{u}_{s_4}(\vec{p}_4) u_{s_2}(\vec{p}_2) \right) + \\ & + (+1)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_4 - p) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + p - p_3) \times \\ & \left. \times \left(\bar{u}_{s_4}(\vec{p}_4) u_{s_1}(\vec{p}_1) \right) \left(\bar{u}_{s_3}(\vec{p}_3) u_{s_2}(\vec{p}_2) \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

in cui il primo contributo della somma (quello con il segno -1) è il diagramma 2.6.3, mentre il secondo (con $+1$) è 2.6.4. Chiaramente possiamo combinare le delta di conservazione e ottenere, per entrambi i diagrammi:

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (2.6.10)$$

ovviamente integrando in $d^4 p$. Dunque, abbiamo:

$$\begin{aligned} = & (-ig)^2 i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \times \\ & \times \left\{ \frac{-1}{(p_1 - p_3)^2 - m^2 + i\varepsilon} \left(\bar{u}_{s_3}(\vec{p}_3) u_{s_1}(\vec{p}_1) \right) \left(\bar{u}_{s_4}(\vec{p}_4) u_{s_2}(\vec{p}_2) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{+1}{(p_1 - p_4)^2 - m^2 + i\varepsilon} \left(\bar{u}_{s_4}(\vec{p}_4) u_{s_1}(\vec{p}_1) \right) \left(\bar{u}_{s_3}(\vec{p}_3) u_{s_2}(\vec{p}_2) \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

$$= (-ig)^2 i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \{ \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \} \quad (2.6.12)$$

$$= (-ig)^2 i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \mathcal{M} \quad (2.6.13)$$

in cui abbiamo scritto esplicitamente quello che si chiama **elemento di matrice S ridotta**, ovvero $\mathcal{M}$.⁸

⁸Che ricorda è legato alla funzione di Green amputata da:

$$\tilde{G} = (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_{in} - \Sigma p_{out}) \mathcal{M}. \quad (2.6.14)$$

A questo punto noi possiamo fare il modulo quadro di $\langle \text{out} | \text{in} \rangle$. Il problema è che abbiamo il termine:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (2.6.15)$$

in mezzo. Questo termine in realtà non sarà rilevante quando ci metteremo a calcolare le sezioni d'urto, poiché in qualche modo andrà via e il nostro interesse è calcolare solamente i moduli delle matrici S ridotte, ma con le nostre conoscenze attuali non siamo in grado di capire bene il perché, dunque, *ignoriamo per il momento questo contributo e lasciamolo per dopo*.

Notiamo che l'hermitiano coniugato di spinori è:

$$\left(\bar{u}_{s_3}(\vec{p}_3) u_{s_1}(\vec{p}_1) \right)^\dagger = \bar{u}_{s_1}(\vec{p}_1) u_{s_3}(\vec{p}_3). \quad (2.6.16)$$

Calcoliamo la quantità:

$$\frac{1}{4} \sum_s |\langle \text{out} | \text{in} \rangle|^2 = \frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}|^2 \quad (2.6.17)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 \quad (2.6.18)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_s \left\{ |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathcal{M}_1^\dagger \mathcal{M}_2 \right\} \right\} \quad (2.6.19)$$

ovvero, guardiamo processi non polarizzati, motivo per cui mediamo su tutte le possibili polarizzazioni iniziali (il fattore $1/4$ davanti) e sommiamo su quelle finali. Per quanto riguarda il risultato dell'esperimento (stato finale) siamo interessati a tutti i risultati possibili, e quindi sommiamo su tutte le polarizzazioni delle particelle finali. Mentre per quanto riguarda lo stato iniziale, il fascio di particelle incidenti è composto da una sovrapposizione aleatoria di stati con polarizzazioni diverse e quindi la cosa corretta da fare è mediare sullo stato iniziale. Lasciamo cadere i pedici di spin per semplicità, ma teniamo a mente che ad ogni p_i è associato un pedice s_i .

Calcoliamo un contributo per volta. Cominciamo con:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}_1|^2 &= \frac{1}{4} \sum_s \frac{g^4}{((p_1 - p_3)^2 - m^2 + i\varepsilon)^2} \left\{ \left(\bar{u}_\alpha(\vec{p}_3) u_\alpha(\vec{p}_1) \right) \left(\bar{u}_\beta(\vec{p}_1) u_\beta(\vec{p}_3) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\bar{u}_\gamma(\vec{p}_4) u_\gamma(\vec{p}_2) \right) \left(\bar{u}_\delta(\vec{p}_2) u_\delta(\vec{p}_4) \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

però noi conosciamo la relazione (2.1.61):

$$\sum_s u_\alpha(p) \bar{u}_\beta(p) = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \quad , \quad \sum_s v_\alpha(p) \bar{v}_\beta(p) = (\not{p} - m)_{\alpha\beta}$$

che ci viene in soccorso quando riorganizziamo i termini all'interno dell'ampiezza $|\mathcal{M}_1|^2$, il che è lecito visto che abbiamo solo quantità contratte e gli spinori commutano tra loro⁹:

$$= \frac{g^4}{4} \frac{1}{((p_1 - p_3)^2 - m^2 + i\varepsilon)^2} \underbrace{(\not{p}_3 + m)_{\beta\alpha} (\not{p}_1 + m)_{\alpha\beta} (\not{p}_4 + m)_{\delta\gamma} (\not{p}_2 + m)_{\gamma\delta}}_{(2.6.21)}$$

ma noi ci rendiamo conto che abbiamo, a coppie, un prodotto riga per colonna e poi la somma sullo stesso indice (vedi il termine sottolineato). Dunque i due prodotti ci forniscono una traccia, poiché contraiamo il primo indice con l'ultimo e tutti quelli intermedi legano le varie matrici. Dunque:

$$= \frac{g^4}{4} \frac{1}{((p_1 - p_3)^2 - m^2 + i\varepsilon)^2} \text{Tr}\{(\not{p}_3 + m)(\not{p}_1 + m)\} \text{Tr}\{(\not{p}_4 + m)(\not{p}_2 + m)\}. \quad (2.6.22)$$

Ora, il nostro problema è calcolare delle tracce. È fondamentale ora conoscere le proprietà, non solo della traccia, ma della traccia di matrici γ^μ , dunque per questo motivo rimando all'Appendice C in cui ci sono un po' di proprietà utili. Calcoliamo uno dei due pezzi per esempio:

$$\text{Tr}\{(\not{p}_3 + m)(\not{p}_1 + m)\} = \text{Tr}\{\not{p}_1 \not{p}_3 + (\not{p}_1 + \not{p}_3)m + m^2\} \quad (2.6.23)$$

$$= p_{1,\mu} p_{3,\nu} \underbrace{\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\}}_{4\eta^{\mu\nu}} + m(p_1 + p_3)_\mu \underbrace{\text{Tr}\{\gamma^\mu\}}_{=0} + m^2 \text{Tr}\{\mathbb{1}\} \quad (2.6.24)$$

$$= 4p_{1,\mu} p_{3,\nu} \eta^{\mu\nu} + 4m^2 \quad (2.6.25)$$

$$= 4(p_1 \cdot p_3) + 4m^2 \quad (2.6.26)$$

in cui con $p_1 \cdot p_3 = p_1 p_3$ intendiamo un prodotto minkowskiano. In modo analogo funziona l'altra traccia di (2.6.22) e otteniamo:

$$\frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}_1|^2 = \frac{g^4}{4} \frac{1}{((p_1 - p_3)^2 - m^2 + i\varepsilon)^2} [4(p_1 p_3) + 4m^2] [4(p_2 p_4) + 4m^2]. \quad (2.6.27)$$

Arrivati a questo punto, possiamo ricordarci le variabili di Mandelstam definite nella sezione §2.4, e vedere il limite delle alte energie (in cui le masse

⁹Le quantità rilevanti per la statistica di Fermi-Dirac sono gli operatori di creazione e distruzione, non gli spinori a 4 componenti.

sono trascurabili) per cui:

$$\frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}_1|^2 \sim \frac{g^2}{((p_1 - p_3)^2)^2} [4(p_1 p_3)] [4(p_2 p_4)] \quad (2.6.28)$$

$$= 4 \frac{g^4}{t^2} (p_1 p_3) (p_2 p_4) \quad (2.6.29)$$

$$= \frac{4g^2}{t^2} \left(+ \frac{t^2}{4} \right) \quad (2.6.30)$$

$$= g^4 \quad (2.6.31)$$

in cui abbiamo utilizzato la definizione della variabile t (2.4.1) e la relazione (2.4.12).

Siamo contenti perché siamo riusciti a calcolare il primo termine della probabilità voluta (in realtà non è propriamente la probabilità, ma finché non studiamo per bene le sezioni d'urto facciamocela andare bene). Notiamo anche che il termine $|\mathcal{M}_2|^2$, in (2.6.11), è analogo ad $|\mathcal{M}_1|^2$, ma con lo scambio $3 \leftrightarrow 4$. Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}_2|^2 &= \frac{g^4}{4((p_1 - p_4)^2 - m^2 + i\varepsilon)^2} \text{Tr}\{(\not{p}_1 + m)(\not{p}_4 + m)\} \times \\ &\quad \times \text{Tr}\{(\not{p}_2 + m)(\not{p}_3 + m)\} \end{aligned} \quad (2.6.32)$$

$$= \frac{g^4}{4((p_1 - p_4)^2)^2} \text{Tr}\{\not{p}_1 \not{p}_4\} \text{Tr}\{\not{p}_2 \not{p}_3\} \quad (2.6.33)$$

$$= \frac{g^4}{4u^2} [4(p_1 p_4)] [4(p_2 p_3)] \quad (2.6.34)$$

$$= \frac{4g^4}{u^2} \left(-\frac{u}{2} \right) \left(-\frac{u}{2} \right) \quad (2.6.35)$$

$$= g^4. \quad (2.6.36)$$

Le cose si complicano leggermente quando consideriamo il termine misto. Vediamolo con calma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_s \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^\dagger &= -\frac{g^4}{4((p_1 - p_3)^2 - m^2)((p_1 - p_4)^2 - m^2)} \times \\ &\quad \times \sum_s \left(\bar{u}_\alpha(\vec{p}_1) u_\alpha(\vec{p}_3) \right) \left(\bar{u}_\beta(\vec{p}_2) u_\beta(\vec{p}_4) \right) \times \\ &\quad \times \left(\bar{u}_\gamma(\vec{p}_4) u_\gamma(\vec{p}_1) \right) \left(\bar{u}_\delta(\vec{p}_3) u_\delta(\vec{p}_2) \right) \end{aligned} \quad (2.6.37)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{g^4}{4((p_1 - p_3)^2 - m^2)((p_1 - p_4)^2 - m^2)} \times \\ &\quad \times (\not{p}_4 + m)_{\beta\gamma} (\not{p}_1 + m)_{\gamma\alpha} (\not{p}_3 + m)_{\alpha\delta} (\not{p}_2 + m)_{\delta\beta} \end{aligned} \quad (2.6.38)$$

ora individuiamo nelle quattro matrici un prodotto tra 4 elementi (e non più a coppie) e poi una traccia su tutte. Infatti vedi che gli indici sono intrecciati in modo ciclico. Abbiamo per questo:

$$= -\frac{g^4}{4((p_1 - p_3)^2 - m^2)((p_1 - p_4)^2 - m^2)} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_4 + m)(\not{p}_1 + m)(\not{p}_3 + m)(\not{p}_2 + m) \right\} \quad (2.6.39)$$

$$\sim -\frac{g^4}{4tu} \text{Tr} \left\{ \not{p}_4 \not{p}_1 \not{p}_3 \not{p}_2 \right\} \quad (2.6.40)$$

$$= -\frac{g^4}{4tu} 4 \left(\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} \right) (p_4^\mu p_1^\nu p_3^\rho p_2^\sigma) \quad (2.6.41)$$

$$= -\frac{g^4}{tu} \left[(p_4 p_1)(p_3 p_2) - (p_4 p_3)(p_1 p_2) + (p_4 p_2)(p_1 p_3) \right] \quad (2.6.42)$$

$$= -\frac{g^4}{tu} \left[\frac{u^2}{4} - \frac{s^2}{4} + \frac{t^2}{4} \right] \quad (2.6.43)$$

usiamo (2.4.2)

$$= \frac{g^4}{4tu} \left[(u+t)^2 - u^2 - t^2 \right] \quad (2.6.44)$$

$$= \frac{g^4}{4tu} 2tu \quad (2.6.45)$$

$$= \frac{g^4}{2}. \quad (2.6.46)$$

Dunque siamo arrivati al risultato che ci interessava; infatti abbiamo:

$$\frac{1}{4} \sum_s |\langle \text{out} | \text{in} \rangle|^2 = \frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 \quad (2.6.47)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_s \left\{ |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + 2 \text{Re} \left\{ \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^\dagger \right\} \right\} \quad (2.6.48)$$

$$= g^4 + g^4 + 2 \cdot \frac{g^4}{2} \quad (2.6.49)$$

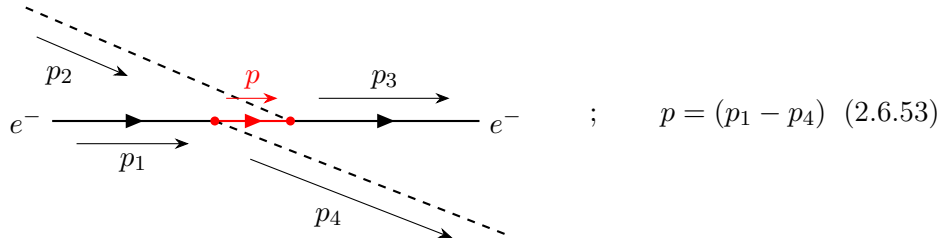
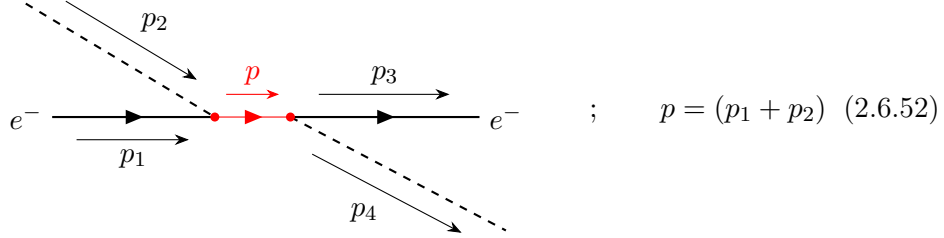
$$= 3g^4. \quad (2.6.50)$$

2.6.2 Processo $e^- + \phi \longrightarrow e^- + \phi$

Vediamo ora, in modo più rapido, visto che abbiamo capito come funziona, il processo:

$$e^- \quad \phi \quad \longrightarrow \quad e^- \quad \phi \quad (2.6.51)$$

al tree-level. I diagrammi possibili 2.6.52 e 2.6.53.



Sta volta al posto di indicare i diversi diagrammi come 1 e 2 li chiamiamo s ed u in base alle loro caratteristiche. Rendiamoci brevemente conto che non ci sono segni relativi. Abbiamo per il diagramma s :

$$\langle 0 | T \left(\overline{\psi}(x_1) \phi(x_2) \psi(x_3) \phi(x_4) \phi(w) \overline{\psi}(w) \psi(w) \phi(z) \overline{\psi}(z) \psi(z) \right) | 0 \rangle \quad (2.6.54)$$

e per il diagramma u :

$$\langle 0 | T \left(\overline{\psi}(x_1) \phi(x_2) \psi(x_3) \phi(x_4) \phi(w) \overline{\psi}(w) \psi(w) \phi(z) \overline{\psi}(z) \psi(z) \right) | 0 \rangle \quad (2.6.55)$$

però ci rendiamo facilmente conto che abbiamo un numero dispari di scambi da fare in entrambi i contributi, per cui non ci sono segni relativi. Cosa deducibile da subito, visto che le uniche contrazioni differenti sono quelle dei campi scalari.

Vediamo (ricordando le regole di Feynman per la teoria di Yukawa):

$$\mathcal{M}_s = (-ig)^2 \overline{u}(\vec{p}_3) \underbrace{i(\not{p} - M)^{-1}}_{\text{prop. fermionico}} u(\vec{p}_1) \quad (2.6.56)$$

$$= \frac{-ig^2}{(p_1 + p_2)^2 - M^2} \overline{u}(\vec{p}_3) (\not{p}_1 + \not{p}_2 - M) u(\vec{p}_1) \quad (2.6.57)$$

$$\sim \frac{-ig^2}{(p_1 + p_2)^2} \overline{u}(\vec{p}_3) (\not{p}_1 + \not{p}_2) u(\vec{p}_1) \quad (2.6.58)$$

insieme a:

$$\mathcal{M}_u = (-ig)^2 \bar{u}(\vec{p}_3) \underbrace{i(\not{p} - M)^{-1}}_{\text{prop. fermionico}} u(\vec{p}_1) \quad (2.6.59)$$

$$= \frac{-ig^2}{(p_1 - p_4)^2 - M^2} \bar{u}(\vec{p}_4) (\not{p}_1 - \not{p}_4 - M) u(\vec{p}_1) \quad (2.6.60)$$

$$\sim \frac{-ig^2}{(p_1 - p_4)^2} \bar{u}(\vec{p}_4) (\not{p}_1 - \not{p}_4) u(\vec{p}_1). \quad (2.6.61)$$

Calcoliamo l'ampiezza al quadrato:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_s |\mathcal{M}_s|^2 &= \frac{g^4}{2s^2} \sum_s \bar{u}_\beta(\vec{p}_1) (\not{p}_1 + \not{p}_2)_{\beta\gamma} u_\gamma(\vec{p}_3) \times \\ &\quad \times \bar{u}_\delta(\vec{p}_3) (\not{p}_1 + \not{p}_2)_{\delta\lambda} u_\lambda(\vec{p}_1) \end{aligned} \quad (2.6.62)$$

$$\frac{g^4}{2s^2} \text{Tr} \left\{ \not{p}_3 (\not{p}_1 + \not{p}_2) \not{p}_1 (\not{p}_1 + \not{p}_2) \right\} \quad (2.6.63)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4g^4}{2s^2} \left[(p_3(p_1 + p_2)) (p_1(p_1 + p_2)) - \right. \\ &\quad \left. - (p_3 p_1)(p_1 + p_2)(p_1 + p_2) + \right. \\ &\quad \left. + (p_3(p_1 + p_2)) ((p_1 + p_2)p_1) \right] \end{aligned} \quad (2.6.64)$$

possiamo utilizzare la conservazione del quadri-impulso:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \quad (2.6.65)$$

per sommare alcuni termini:

$$= \frac{2g^4}{s^2} \left[2(p_3 p_4)(p_1 p_2) - 2(p_1 p_3)(p_1 p_2) \right] \quad (2.6.66)$$

$$= \frac{4g^4}{s^2} \left[\frac{s^2}{4} + \frac{st}{4} \right] \quad (2.6.67)$$

$$= \frac{g^4}{s} (s + t) \quad (2.6.68)$$

$$= -g^4 \frac{u}{s}. \quad (2.6.69)$$

In modo analogo calcoliamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_s |\mathcal{M}_u|^2 &= \frac{g^4}{2u^2} \sum_s \bar{u}_\beta(\vec{p}_1) (\not{p}_1 - \not{p}_4)_{\beta\gamma} u_\gamma(\vec{p}_3) \times \\ &\quad \times \bar{u}_\delta(\vec{p}_3) (\not{p}_1 - \not{p}_4)_{\delta\lambda} u_\lambda(\vec{p}_1) \\ &\quad \frac{g^4}{2u^2} \text{Tr} \left\{ \not{p}_3 (\not{p}_1 - \not{p}_4) \not{p}_1 (\not{p}_1 - \not{p}_4) \right\} \end{aligned} \quad (2.6.70)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2g^4}{u^2} \left[(p_3(p_1 - p_4))(p_1(p_1 - p_4)) - \right. \\ &\quad \left. - (p_3 p_1)(p_1 - p_4)(p_1 - p_4) + \right. \\ &\quad \left. + (p_3(p_1 - p_4))((p_1 - p_4)p_1) \right] \end{aligned} \quad (2.6.71)$$

usiamo $p_1 - p_4 = p_3 - p_2$

$$= \frac{2g^4}{u^2} \left[2(-p_2 p_3)(-p_1 p_4) - (p_1 p_3)(-2p_1 p_4) \right] \quad (2.6.72)$$

$$= \frac{4g^4}{u^2} \left[\frac{u^2}{4} + \frac{tu}{4} \right] \quad (2.6.73)$$

$$= \frac{g^4}{u} (u + t) \quad (2.6.74)$$

$$= -g^4 \frac{s}{u}. \quad (2.6.75)$$

Il termine misto risulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum \mathcal{M}_s^\dagger \mathcal{M}_u &= \frac{g^4}{2su} \sum_s \bar{u}(\vec{p}_1) (\not{p}_1 + \not{p}_2) u(\vec{p}_3) \times \\ &\quad \times \bar{u}(\vec{p}_3) (\not{p}_1 - \not{p}_4) u(\vec{p}_1) \end{aligned} \quad (2.6.76)$$

$$= \frac{g^4}{2su} \sum_s \text{Tr} \left\{ \not{p}_3 (\not{p}_1 - \not{p}_4) \not{p}_1 (\not{p}_1 + \not{p}_2) \right\} \quad (2.6.77)$$

usiamo la conservazione del quadri-impulso

$$\begin{aligned} &= \frac{2g^4}{su} \left[(p_3(p_3 - p_2)) (p_1(p_1 + p_2)) - \right. \\ &\quad \left. - (p_1 p_3)(p_1 - p_4)(p_1 + p_2) + \right. \\ &\quad \left. + (p_3(p_3 + p_4)) ((p_1 - p_4)p_1) \right] \end{aligned} \quad (2.6.78)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2g^4}{su} \left[- (p_2 p_3)(p_1 p_2) - (p_1 p_3) \left(p_1 \underbrace{(p_2 - p_4)}_{=p_3 - p_1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - p_2 p_4 \right) + (p_3 p_4)(-p_1 p_4) \right] \end{aligned} \quad (2.6.79)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2g^4}{su} \left[- (p_2 p_3)(p_1 p_2) - (p_1 p_3) \left((p_1 p_3) - (p_2 p_4) \right) + \right. \\ &\quad \left. + (p_3 p_4)(-p_1 p_4) \right] \end{aligned} \quad (2.6.80)$$

$$= \frac{g^4}{2su} \left[us - (-t) \left(-t - (-t) \right) + s(+u) \right] \quad (2.6.81)$$

$$= g^4. \quad (2.6.82)$$

Dunque per il processo studiato abbiamo:

$$\frac{1}{4} \sum_s |\langle \text{out} | \text{in} \rangle|^2 = \frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u|^2 \quad (2.6.83)$$

$$= -g^4 \left(\frac{u}{s} + \frac{s}{u} - 2 \right). \quad (2.6.84)$$

2.7 Sezione d'urto

Noi fin'ora il massimo che abbiamo calcolato è stata l'ampiezza $|\mathcal{M}|^2$, ma possiamo effettivamente collegarla con qualcosa di misurabile. Quello che ci interessa è, ripassando anche alcuni concetti di Relatività Speciale, capire

come scrivere la sezione d'urto per un processo che partendo con 2 particelle nello stato iniziale, porti a potenzialmente n particelle finali (a seconda delle interazioni che avvengono).

A noi, per motivi sperimentali, ci interessano i casi in cui le particelle non sono polarizzate. Per il calcolo della sezione d'urto non polarizzata dobbiamo considerare il fatto che:

- Nello stato iniziale si ha una sovrapposizione di tutte le polarizzazioni possibili, quindi bisogna mediare sulle polarizzazioni iniziali.
- Nello stato finale dobbiamo considerare tutti i possibili risultati, quindi dobbiamo sommare sulle polarizzazioni finali.

Sappiamo che ogni fermione e ogni fotone ha 2 possibili stati di polarizzazione, dunque se abbiamo n fermioni ed m fotoni nello stato iniziale, dobbiamo considerare:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2^{n+m}} \sum_{spin} |M|^2 \quad (2.7.1)$$

in cui ricordiamo che l'*elemento di matrice S ridotta* (ovvero M) si ricava dalla funzione di Green amputata:

$$\tilde{G}_A = M \cdot (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_{in} - \Sigma p_{out}). \quad (2.7.2)$$

2.7.1 Ripasso di Relatività Speciale

Consideriamo uno stato iniziale con due particelle con quadri-impusi k_i^μ . Ovviamente possiamo scegliere il sistema di riferimento che più ci piace e le due scelte più comode sono il sistema di riferimento del laboratorio, in cui il bersaglio è fisso:

$$\vec{k}_2 = 0 \quad (2.7.3)$$

e il *sistema di riferimento del centro di massa*, in cui c.m. non si muove, e dunque in cui abbiamo:

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0 \quad (2.7.4)$$

quindi:

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = |\vec{k}| \quad (2.7.5)$$

siamo sempre liberi di imporre che:

$$\vec{k}_1 = |\vec{k}| \hat{z} \quad , \quad \vec{k}_2 = -|\vec{k}| \hat{z}. \quad (2.7.6)$$

Possiamo vedere come $\vec{k}_1$ e $\vec{k}_2$, grazie alla scelta del sistema di riferimento, siano legati e come ciò ci permetta di descrivere lo stato iniziale utilizzando una sola variabile. Vogliamo riscrivere $|\vec{k}|$ in funzione delle masse e

dell'energia del centro di massa; vediamo:

$$s = (k_1 + k_2)^2 \quad (2.7.7)$$

$$= (E_1 + E_2)^2 - (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)^2 \quad (2.7.8)$$

$$= (E_1 + E_2)^2 \quad (2.7.9)$$

$$= E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \quad (2.7.10)$$

$$= (|\vec{k}|^2 + m_1^2) + (|\vec{k}|^2 + m_2^2) + 2\sqrt{(|\vec{k}|^2 + m_1^2)(|\vec{k}|^2 + m_2^2)} \quad (2.7.11)$$

$$\Rightarrow \left[s - 2|\vec{k}|^2 - (m_1^2 + m_2^2) \right]^2 = 4(|\vec{k}|^2 + m_1^2)(|\vec{k}|^2 + m_2^2) \quad (2.7.12)$$

$$\Rightarrow s^2 + (m_1^2 + m_2^2)^2 - 4s|\vec{k}|^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) = 4m_1^2m_2^2 \quad (2.7.13)$$

dunque abbiamo:

$$|\vec{k}_1|_{cm} = |\vec{k}| = \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}. \quad (2.7.14)$$

Se anche nello stato finale abbiamo due particelle (m_3, m_4) , allora otteniamo un'espressione analoga se rifacciamo gli stessi passaggi e utilizziamo la conservazione del quadri-impulso totale:

$$0 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4 \quad (2.7.15)$$

ovvero, troviamo:

$$|\vec{k}_3|_{cm} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{s^2 - 2s(m_3^2 + m_4^2) + (m_3^2 - m_4^2)^2}. \quad (2.7.16)$$

Inoltre, ricordiamo che:

$$s = E_{cm}^2. \quad (2.7.17)$$

Nel *sistema di riferimento del laboratorio* abbiamo $\vec{k}_2 = 0$ (bersaglio fisso), dunque possiamo anche scrivere:

$$s = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)^2 \quad (2.7.18)$$

$$= (E_1 + m_2)^2 - |\vec{k}_1|^2 \quad (2.7.19)$$

$$= E_1^2 + 2E_1m_2 + m_2^2 - |\vec{k}_1|^2 \quad (2.7.20)$$

$$= (|\vec{k}_1|^2 + m_1^2) + 2m_2\sqrt{|\vec{k}_1|^2 + m_1^2} + m_2^2 - |\vec{k}_1|^2 \quad (2.7.21)$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\sqrt{|\vec{k}_1|^2 + m_1^2} \quad (2.7.22)$$

$$\Rightarrow s^2 + (m_1^2 + m_2^2)^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) = 4m_2^2|\vec{k}_1|^2 + 4m_2^2m_1^2 \quad (2.7.23)$$

duqnue abbiamo:

$$|\vec{k}_1|_{lab} = \frac{1}{2m_2} \sqrt{s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}. \quad (2.7.24)$$

Abbiamo quindi capito che possiamo passare dal sistema di riferimento del centro di massa a quello del lab (e viceversa) usando:

$$m_2 |\vec{k}_1|_{lab} = E_{cm} |\vec{k}_1|_{cm}. \quad (2.7.25)$$

Però non abbiamo ancora considerato il fatto che in un urto abbiamo a nostra disposizione anche l'angolo di diffusione θ , il quale è legato alla variabile t (oppure u , in base a come ci piace scriverla utilizzando la relazione tra le variabili di Mandelstam e il legame tra s e l'energia del centro di massa). Infatti, anche se fissiamo una direzione privilegiata lungo cui si muovono le particelle iniziali, quelle finali non hanno vincoli, e generalmente la loro direzione di moto è deviata di un'angolo θ rispetto quella iniziale. Vediamo:

$$t = (k_1 - k_3)^2 \quad (2.7.26)$$

$$= (E_1 - E_3)^2 - (\vec{k}_1 - \vec{k}_3)^2 \quad (2.7.27)$$

$$= E_1^2 + E_3^2 - 2E_1 E_3 - \vec{k}_1^2 - \vec{k}_3^2 + 2\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_3 \quad (2.7.28)$$

$$= m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 + 2|\vec{k}_1||\vec{k}_3| \cos \theta \quad (2.7.29)$$

a questo punto potremmo riscrivere $|\vec{k}_{1,2}|$ utilizzando s e quindi legare θ con s e t .

Questo ci interessava vederlo poiché capiamo che tutta la cinematica è racchiusa in s e t .

2.7.2 Sezione d'urto in QFT

Ora torniamo a parlare della QFT e consideriamo processi:

$$2 \longrightarrow n. \quad (2.7.30)$$

Per comodità assumiamo che le particelle siano confinate in una scatola di volume V e che il processo di scattering avvenga in un tempo T (quindi il volume nello spazio delle fasi è VT). La probabilità che il processo avvenga è:

$$P = \frac{|\langle \text{out} | \text{in} \rangle|^2}{\langle \text{in} | \text{in} \rangle \langle \text{out} | \text{out} \rangle} \quad (2.7.31)$$

in cui, come abbiamo già imparato, abbiamo gli stati *in* ed *out* e l'ampiezza:

$$\langle \text{out} | \text{in} \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out}) \mathcal{M} \quad (2.7.32)$$

dove utilizziamo una notazione abbreviata:

$$k_{in} - k_{out} = k_1 + k_2 - \sum_{i=1}^n k'_i \quad (2.7.33)$$

con k' i momenti dello stato finale. Abbiamo anche:

$$|\langle \text{out} | \text{in} \rangle|^2 = |\mathcal{M}|^2 [(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out})]^2 \quad (2.7.34)$$

$$= |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out}) (2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out}) \quad (2.7.35)$$

$$= |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out}) (2\pi)^4 \delta^4(0) \quad (2.7.36)$$

$$= |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out}) VT \quad (2.7.37)$$

in cui abbiamo usato:

$$(2\pi)^4 \delta^4(0) = \int d^4x = VT \quad (2.7.38)$$

è il volume di Minkowski (volume spaziale per volume temporale)¹⁰.

Nota che in (2.7.31) abbiamo anche diviso per la normalizzazione degli stati visto che non li avevamo normalizzati prima. Infatti possiamo vedere che gli stati a singola particella (poiché abbiamo imparato che a tempi molto lontani nel passato e nel futuro gli stati *in* e *out* sono di singola particella) sono normalizzati come segue:

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = 2E_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (2.7.41)$$

$$= \delta^4(k - k') \theta(k_0) \quad (2.7.42)$$

in cui siamo stati attenti a mettere delle normalizzazioni Lorentz invarianti. Se prendiamo stati con stesso impulso:

$$\langle \vec{k} | \vec{k} \rangle = 2E_k \delta^3(0) \quad (2.7.43)$$

$$= 2E_k V \quad (2.7.44)$$

¹⁰Infatti in MQ, in 1 dimensione, avevamo imposto:

$$\langle p | p' \rangle = \delta(p - p') = \int dx \langle p | x \rangle \langle x | p' \rangle = \int \frac{dx}{(2\pi)} e^{-i(p-p')x} \quad (2.7.39)$$

in cui avevamo usato $\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx}$. Dunque se noi prendiamo $p = p'$, allora vediamo bene cos'è $\delta(0)$:

$$\delta(0) = \int \frac{dx}{2\pi} e^{-i(0)x} = \frac{L}{2\pi}. \quad (2.7.40)$$

In 4 dimensioni $\delta^4(0)$ è il volume della scatola (dello spazio) in cui è confinato il sistema per il tempo T .

dove V è sempre il volume. Dunque abbiamo che (considerando le due particelle iniziali e le n finali):

$$\langle \text{in} | \text{in} \rangle = 4E_1 E_2 V^2 \quad (2.7.45)$$

$$\langle \text{out} | \text{out} \rangle = \prod_{j=1}^n 2E'_j V \quad (2.7.46)$$

in cui n è il numero di particelle dello stato finale. Pertanto la probabilità (2.7.31) diventa:

$$P = \frac{|\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out}) VT}{4E_1 E_2 V^2 \prod_{j=1}^n 2E'_j V} \quad (2.7.47)$$

ma noi sappiamo che la sezione d'urto è la probabilità che un certo evento avvenga, nell'unità di tempo:

$$\frac{P}{T} = |\mathcal{M}|^2 \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out})}{4E_1 E_2 V \prod_{j=1}^n 2E'_j V} \quad (2.7.48)$$

però non abbiamo ancora finito.

Nella pratica (2.7.48) non è utilizzabile esattamente, poiché non si può misurare il valore esatto dell'impulso, ma la sovrapposizione entro un piccolo range, quindi per ogni tri-impulso finale dobbiamo sommare su un piccolo range. Tuttavia le particelle sono confinate nella scatola ($V = L^3$), quindi hanno momento quantizzato in funzione della lunghezza (volume); in 1D abbiamo:

$$\vec{k}'_j = \frac{2\pi}{L} \vec{n}_j \quad (2.7.49)$$

in cui n è un valore intero; e inoltre assumiamo condizioni di bordo periodiche, ma questo non impatta sul risultato finale.

Nel caso 3D, nel limite continuo abbiamo:

$$\sum_{\vec{n}_j} \longrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k'_j \quad (2.7.50)$$

cioè dobbiamo moltiplicare (2.7.48) per:

$$\prod_{j=1}^n d^3 n_j = \prod_{j=1}^n \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 k'_j. \quad (2.7.51)$$

notando che P/T moltiplicato per $d^3 n_j$ ci dà la probabilità di misurare n particelle finali, ciascuna con numero quantico compreso n_j ed $n_j + dn_j$,

corrispondente a k_j . Dunque abbiamo:

$$\frac{P}{T} = |\mathcal{M}|^2 \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out})}{4E_1 E_2 V \prod_{j=1}^n 2E'_j V} \prod_{j=1}^n \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 k'_j \quad (2.7.52)$$

$$= |\mathcal{M}|^2 \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out})}{4E_1 E_2 V} \prod_{j=1}^n \frac{d^3 k'_j}{(2\pi)^3 2E'_j} \quad (2.7.53)$$

e possiamo osservare che l'ultimo termine ci rende felici poiché è la misura invariante di Lorentz¹¹ (per ogni particella finale):

$$\widetilde{d^3 k'_j} = \frac{d^3 k'_j}{(2\pi)^3 2E'_j}. \quad (2.7.56)$$

Quello che ci rimane da fare, per ottenere la vera sezione d'urto, è dividere per il flusso delle particelle iniziali. Se ci mettiamo nel sistema del laboratorio abbiamo solo $\vec{k}_1 \neq 0$ e il flusso, visto che abbiamo solo una particella in movimento, sarà dato semplicemente dalla densità (1 particella in una scatola di volume V) della particella moltiplicata per il modulo della sua velocità:

$$\text{flusso} = \frac{1}{V} |\vec{v}| = \frac{1}{V} \frac{|\vec{k}_1|_{lab}}{E_1} \quad (2.7.57)$$

dunque abbiamo:

$$d\sigma_{lab} = |\mathcal{M}|^2 \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out})}{4E_1 E_2 V} \prod_{j=1}^n \widetilde{d^3 k'_j} \frac{E_1 V}{|\vec{k}_1|_{lab}} \quad (2.7.58)$$

che possiamo semplificare se scriviamo il mass-shell per la particella bersaglio $E_2 = m_2$ ($\vec{p}_2 = 0$):

$$d\sigma_{lab} = |\mathcal{M}|^2 \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out})}{4m_2 |\vec{k}_1|_{lab}} \prod_{j=1}^n \widetilde{d^3 k'_j} \quad (2.7.59)$$

ma potremmo ancora semplificarla se ci ricordiamo come collegare $|\vec{k}_1|$ nel sistema di riferimento del laboratorio e del centro di massa (2.7.25):

$$d\sigma_{cm} = |\mathcal{M}|^2 \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out})}{4\sqrt{s} |\vec{k}_1|_{cm} m_2} \prod_{j=1}^n \widetilde{d^3 k'_j}. \quad (2.7.60)$$

¹¹Si potrebbe definire per brevità la misura Lorentz-invariante ad n corpi nello spazio delle fasi, detta **LIPS di n** :

$$d^3 \Pi'_n(k_{in}) = (2\pi)^4 \delta^4 \left(k_{in} - \sum_{i=1}^n k'_i \right) \prod_{j=1}^n d^3 \widetilde{k'_j} \quad (2.7.54)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4 \left(k_{in} - \sum_{i=1}^n k'_i \right) \prod_{j=1}^n \frac{d^3 k'_j}{(2\pi)^3 2E'_j}. \quad (2.7.55)$$

Possiamo notare però che quest'ultima scrittura non è genericamente Lorentz invariante.

Notiamo che per ottenere la sezione d'urto totale dovremo integrare su tutti i momenti delle particelle finali.

2.7.3 Urto con 2 particelle finali

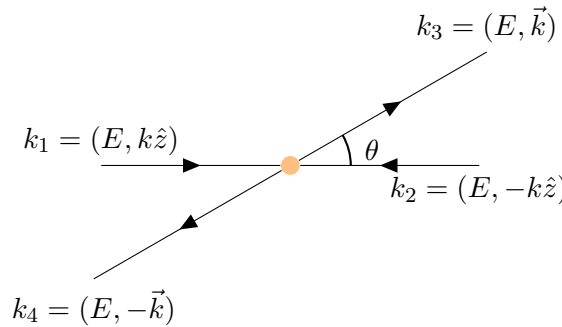
Possiamo vedere come le cose si semplificano notevolmente, oltre a diventare Lorentz invariante (nel sistema di riferimento del c.m.), se guardiamo il caso specifico in cui abbiamo un processo:

$$2 \longrightarrow 2. \quad (2.7.61)$$

Studiamo dunque un urto con 2 particelle nello stato iniziale e 2 nel finale, come raffigurato in figura 2.7.64, dunque una sezione d'urto:

$$d\sigma_{cm} = |\mathcal{M}|^2 \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out})}{4\sqrt{s} |\vec{k}_1|_{cm} m_2} d^3k'_1 d^3k'_2 \quad (2.7.62)$$

$$= \frac{|\mathcal{M}|^2}{4 E_{cm} |\vec{k}_1|} d^3\Pi'_2(k_{in}). \quad (2.7.63)$$



$$(2.7.64)$$

Nel sistema di riferimento del centro di massa abbiamo:

$$\vec{k}_{in} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0 \quad (2.7.65)$$

$$E_{in} = E_1 + E_2 = E_{cm} = \sqrt{s}. \quad (2.7.66)$$

Possiamo calcolare la misura di Lorentz LIPS a 2 corpi:

$$d^3\Pi'_2(k_{in}) = (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) \frac{d^3k'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \frac{d^3k'_2}{(2\pi)^3 2E'_2} \quad (2.7.67)$$

$$= \frac{1}{4(2\pi)^2 E'_1 E'_2} \delta(E_{cm} - E'_1 - E'_2) \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}'_1 - \vec{k}'_2) dk'_1 dk'_2 \quad (2.7.68)$$

$$= \frac{1}{4(2\pi)^2 E'_1 E'_2} \delta(\sqrt{s} - E'_1 - E'_2) \delta^3(\vec{k}'_1 + \vec{k}'_2) dk'_1 dk'_2 \quad (2.7.69)$$

ora la δ^3 elimina uno dei due integrali ponendo $\vec{k}'_2 = -\vec{k}'_1$:

$$d^3\Pi'_2(k_{in}) = \frac{1}{4(2\pi)^2 E'_1 E'_2} \delta(\sqrt{s} - E'_1 - E'_2) dk'_1 \quad (2.7.70)$$

possiamo ricordarci che le energie finali sono funzioni del modulo $|\vec{k}'_1|$ e se passiamo in coordinate sferiche abbiamo:

$$d^3\Pi'_2(k_{in}) = \frac{1}{4(2\pi)^2 E'_1(k) E'_2(k)} \delta(\sqrt{s} - E'_1(k) - E'_2(k)) k^2 d\Omega dk \quad (2.7.71)$$

in cui abbiamo posto:

$$k = |\vec{k}'_1| \quad , \quad E'_i(k) = \sqrt{k^2 + m_i^2}. \quad (2.7.72)$$

Osserviamo che possiamo utilizzare la δ per fare l'integrale sul dk , ricordandoci però della proprietà:

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|} \quad (2.7.73)$$

dove x_0 sono gli zeri di $f(x)$. Noi dentro la δ abbiamo $f(k) = \sqrt{s} - E'_1(k) - E'_2(k)$, dunque vediamo che (lasciando perdere i segni meno poiché tanto prenderemo il modulo):

$$\partial_k f(k) = \partial_k E'_1(k) + \partial_k E'_2(k) \quad (2.7.74)$$

$$= \frac{k}{\sqrt{k^2 + m_1^2}} + \frac{k}{\sqrt{k^2 + m_2^2}} \quad (2.7.75)$$

$$= k \left(\frac{1}{E'_1(k)} + \frac{1}{E'_2(k)} \right) \quad (2.7.76)$$

$$= k \frac{E'_1 + E'_2}{E'_1 E'_2} \quad (2.7.77)$$

$$= \frac{k E_{cm}}{E'_1 E'_2} \quad (2.7.78)$$

$$= \frac{k \sqrt{s}}{E'_1 E'_2} \quad (2.7.79)$$

e dunque $f(k) = 0$ per:

$$k = |\vec{k}'_1|. \quad (2.7.80)$$

Abbiamo la (2.7.71) che diventa:

$$d^3\Pi'_2(k_{in}) = \frac{|\vec{k}'_1|}{4(2\pi)^2 E_{cm}} d\Omega \quad (2.7.81)$$

perciò sostituendo dentro l'espressione per la sezione d'urto differenziale (2.7.63):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{cm} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}'_1|}{|\vec{k}_1|}. \quad (2.7.82)$$

Però non abbiamo finito la nostra missione. Infatti, avendo un moto su un piano, vale:

$$d\Omega = 2\pi d(\cos\theta) \quad (2.7.83)$$

e θ angolo di scattering. La sezione d'urto integrata è:

$$\sigma_{cm} = \frac{1}{32\pi E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}'_1|}{|\vec{k}_1|} \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) |\mathcal{M}(\cos\theta)|^2. \quad (2.7.84)$$

Notiamo che ad alte energie $|\vec{k}_1|$ e $|\vec{k}_2|$ differendo solamente per la massa, (ad alte energie $s \rightarrow \infty$) si ha:

$$\frac{|\vec{k}'_1|}{|\vec{k}_1|} \rightarrow 1. \quad (2.7.85)$$

Volendo possiamo esprimere tutto in funzione delle variabili di Mandelstam, ricordando che da (2.4.15) vale:

$$s = E_{cm}^2 \quad (2.7.86)$$

e che:

$$dt = 2|\vec{k}_1||\vec{k}'_1| d(\cos\theta) \quad (2.7.87)$$

infatti facendo il cambio di variabili:

$$\theta \longrightarrow t = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 + 2|\vec{k}_1||\vec{k}'_1| \cos\theta \quad (2.7.88)$$

abbiamo:

$$d\Omega = 2\pi \frac{dt}{2|\vec{k}_1||\vec{k}'_1|} \quad (2.7.89)$$

e la sezione d'urto differenziale diventa:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi s |\vec{k}_1|^2} \quad (2.7.90)$$

che è indipendente dal sistema di riferimento scelto. La sezione d'urto integrata ora è:

$$\sigma = \frac{1}{64\pi s |\vec{k}_1|^2} \int_{t_-}^{t_+} dt |\mathcal{M}(s, t)|^2 \quad (2.7.91)$$

in cui abbiamo indicato:

$$t_{\pm} = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 \pm 2|\vec{p}_1| |\vec{p}_3|. \quad (2.7.92)$$

Osseviamo che se $m_i = m \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, allora nel sistema di riferimento del centro di massa abbiamo:

$$E_1 = E_2 \quad , \quad E'_1 = E'_2 \quad (2.7.93)$$

e anche:

$$s = (2E_1)^2 = (2E'_1)^2 \quad (2.7.94)$$

il che implica:

$$E_1 = E'_1 \quad \implies \quad |\vec{k}_1| = |\vec{k}'_1| \quad (2.7.95)$$

pertanto la sezione d'urto si riduce a:

$$\sigma = \frac{1}{32\pi E_{cm}^2} \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) |\mathcal{M}(\cos\theta)|^2. \quad (2.7.96)$$

2.7.4 Probabilità di decadimento

Noi non lo dimostreremo, ma con (circa) le stesse manipolazioni fatte per σ e lo stesso formalismo, vale anche la relazione per un decadimento:

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2 s} |\vec{k}'_1| |\mathcal{M}|^2 d\Omega \quad (2.7.97)$$

che ci fornisce il rateo di decadimento di 1 particella in 2 particelle.

2.7.5 Urto con 3 particelle finali (cenni)

Non visto a lezione.

Studiamo un urto con 2 particelle nello stato iniziale e 3 nel finale, dunque con sezione d'urto:

$$d\sigma_{cm} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4 E_{cm} |\vec{k}_1|} d^3\Pi'_3(k_{in}). \quad (2.7.98)$$

Nel sistema di riferimento del centro di massa abbiamo:

$$\vec{k}_{in} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0 \quad , \quad E_{in} = E_1 + E_2 = E_{cm}. \quad (2.7.99)$$

La misura Lorentz invariante è:

$$\Pi'_3(k_{in}) = (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2 - k'_3) \frac{d^3k'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \frac{d^3k'_2}{(2\pi)^3 2E'_2} \frac{d^3k'_3}{(2\pi)^3 2E'_3} \quad (2.7.100)$$

$$= \frac{1}{4 (2\pi)^5 E'_1 E'_2 E'_3} \delta(E_{cm} - E'_1 - E'_2 - E'_3) d^3k'_1 d^3k'_2 \quad (2.7.101)$$

in cui abbiamo:

$$E'_1 = \sqrt{(\vec{k}'_1)^2 + m_1^2} \quad (2.7.102)$$

$$E'_2 = \sqrt{(\vec{k}'_2)^2 + m_2^2} \quad (2.7.103)$$

$$E'_3 = \sqrt{(\vec{k}'_1 + \vec{k}'_2)^2 + m_3^2} \quad (2.7.104)$$

e possiamo ancora utilizzare la δ sull'energia per togliere ancora un integrale sul modulo, come fatto per il caso a 2 corpi, ma ora ce ne resta ancora uno di mezzo.

Capitolo 3

Il campo vettoriale

Vediamo in questo capitolo, l'ultimo tipo di campo che ci manca da trattare, ovvero i campi vettoriali. Vedremo che non è un processo di quantizzazione che scorre liscio come per i campi scalari e spinoriali poiché abbiamo delle complicazioni aggiuntive. Infatti, in generale, non è possibile costruire una teoria per il fotone, che sappiamo dalla fisica classica avere solo due polarizzazioni fisiche, in una forma manifestamente Lorentz covariante. Per riuscire a quantizzare il fotone dobbiamo aggiungere delle rindondanze nella teoria, le invarianze di gauge, in modo da poter quantizzare.

Il punto è che l'invarianza di gauge ci permette di scrivere una teoria quantistica e relativistica del fotone, ma al prezzo di riempircela di roba che non ci serve. Però se noi facciamo le cose tutte per bene queste rindondanze si devono disaccoppiare, lasciando solamente le informazioni sulle quantità fisiche.

Noi al corso di introduzione abbiamo già visto un primo modo di quantizzare la teoria del fotone, facendo sostanzialmente gauge fixing, ma con un procedimento per cui perdiamo la covarianza di Lorentz. Un secondo modo, che è l'obiettivo del capitolo, è mantenere a tutti i costi la covarianza di Lorentz, ma al prezzo di ottenere degli stati a norma negativa, che però non ci disturbano troppo poiché si riescono comunque a disaccoppiare dalle informazioni fisiche.

Un terzo modo è tramite i path integral, ma lo vedremo nel prossimo capitolo.

3.1 Derivata covariante e cinetica dei fotoni

Ripartiamo dal considerare:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \tag{3.1.1}$$

che è invariante per trasformazioni di Poincaré e per trasformazioni di fase globale, la cui corrente di Noether è:

$$j^\mu = \alpha \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (3.1.2)$$

che si vede facilmente essere conservata se i campi risolvono le equazioni del moto:

$$\partial_\mu j^\mu = \alpha \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \alpha \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0. \quad (3.1.3)$$

Se però studiamo una trasformazione di fase locale, ovvero $\alpha = \alpha(x)$, la lagrangiana così com'è non è invariante, ma è proprio a questo proposito che introduciamo la derivata covariante $\mathcal{D}$. Possiamo chiaramente vedere che se facciamo una trasformazione locale abbiamo la lagrangiana che trasforma come:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu \alpha \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (3.1.4)$$

$$= \mathcal{L} + \partial_\mu \alpha j^\mu \quad (3.1.5)$$

dunque, introducendo un pezzo, che si accoppia alla corrente conservata, possiamo rendere $\mathcal{L}$ invariante per trasformazioni locali. Poniamo:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi + eA_\mu j^\mu \quad (3.1.6)$$

e vediamo:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi + \partial_\mu \alpha \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + eA'_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (3.1.7)$$

e affinché $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ dobbiamo avere:

$$A'_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha = A_\mu. \quad (3.1.8)$$

Dunque, per avere la lagrangiana (3.1.6) invariante per trasformazioni di fase locale, il campo di gauge che accoppiamo con la corrente di Noether, deve trasformare simultaneamente ai campi come:

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha. \quad (3.1.9)$$

La lagrangiana (3.1.6) la possiamo riscrivere come:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi \quad (3.1.10)$$

in cui definiamo:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x) \quad (3.1.11)$$

che chiamiamo **derivata covariante**. Nota che, sotto trasformazioni locali, vale:

$$\mathcal{D} \psi' = e^{i\alpha(x)} \mathcal{D} \psi \quad (3.1.12)$$

poiché si può dimostrare che:

$$\mathcal{D}_\mu \longrightarrow e^{-i\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu e^{i\alpha(x)}. \quad (3.1.13)$$

Però la lagrangiana (3.1.10) ci sta dicendo che la dinamica del sistema ce la dà solamente ψ e non il campo A_μ . A noi piacerebbe rendere dinamico il campo A_μ ; dunque, dobbiamo introdurre un termine cinetico per A_μ , che però deve mantenere sia l'invarianza di Lorentz, sia quella di fase locale, dunque quella di gauge, ed essere quadratica nelle derivate. Il termine cinetico che cerchiamo si costruisce (in generale e non solo per la teoria elettromagnetica) con il *tensore degli sforzi* (o *di curvatura*) a partire dal commutatore:

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] f = [\partial_\mu + ieA_\mu, \partial_\nu + ieA_\nu] f \quad (3.1.14)$$

$$= (\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial_\nu + ieA_\nu) f - (\partial_\nu + ieA_\nu)(\partial_\mu + ieA_\mu) f \quad (3.1.15)$$

$$= ie [\partial_\mu (A_\nu f) + A_\mu \partial_\nu f - \partial_\nu (A_\mu f) - A_\nu \partial_\mu f] \quad (3.1.16)$$

$$= ie (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) f \quad (3.1.17)$$

$$= ie F_{\mu\nu} f. \quad (3.1.18)$$

Costruiamo dunque:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.1.19)$$

che a partire dalla trasformazione (3.1.13) possiamo dimostrare valere:

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow e^{-i\alpha(x)} F_{\mu\nu} e^{i\alpha(x)} = F_{\mu\nu} \quad (3.1.20)$$

dunque che $F_{\mu\nu}$ è invariante per trasformazioni di fase locale; infatti avevamo già visto, a partire dalla sua definizione, che esso è invariante per trasformazioni di gauge. Questo tipo di teorie si chiamano **teorie abeliane**, poiché possiamo fare una trasformazione di A_μ con parametro α e poi uno con parametro β e otteniamo lo stesso risultato che otterremmo se facessimo prima una trasformazione con β e poi con α . Purtroppo, come ci renderemo conto tra poche sezioni, le teorie abeliane in fisica non sono sufficienti.

Possiamo ora scrivere la lagrangiana dinamica (con il termine cinetico):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.1.21)$$

che è la lagrangiana dell'**Elettrodinamica quantistica**.

Ricordando la definizione di tensore elettromagnetico notiamo che abbiamo:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (3.1.22)$$

$$= 2(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \partial_\mu A_\nu \quad (3.1.23)$$

$$= 2F^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \quad (3.1.24)$$

e studiando le equazioni del moto con la lagrangiana (3.1.21) vediamo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \implies \partial_\nu F^{\mu\nu} = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = ej^\mu \quad (3.1.25)$$

che non sono altro che le due equazioni di Maxwell non omogenee. In più l'equazione per i campi ψ (equazione di Dirac) diventa:

$$(i\not{D} - m)\psi = eA_\mu \gamma^\mu \psi \quad (3.1.26)$$

che ci dice che il campo ψ non è più libero, ma ci sono delle sorgenti.

Inoltre, valgono quelle che vengono chiamate *identità di Bianchi*:

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} = 0 \quad (3.1.27)$$

scrivibili anche come:

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \partial^\mu F^{\nu\rho} = 0 \quad (3.1.28)$$

e che possono essere derivate dalle identità di Jacobi:

$$\sum_{\#\sigma} [A, [B, C]] = 0 \quad (3.1.29)$$

applicate alle derivate covarianti. Infatti, ricordando che:

$$[D_\rho, D_\nu] = iF_{\rho\nu} \quad (3.1.30)$$

appliche nelle identità di Jacobi, che sono:

$$[D_\mu, [D_\nu, D_\rho]] + [D_\rho, [D_\mu, D_\nu]] + [D_\nu, [D_\rho, D_\mu]] = 0 \quad (3.1.31)$$

e otteniamo:

$$\sum_{\#\sigma} [D_\mu, F_{\rho\nu}] = 0 \quad (3.1.32)$$

da cui ricaviamo le identità (3.1.27).

L'identità di Bianchi ci sono particolarmente utili perché ci permettono di ottenere le altre due equazioni di Maxwell, quelle omogenee, che (3.1.21) non ci dava.

3.2 Soluzione per la teoria di Maxwell

Studiamo la teoria del fotone, ovvero prendiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.2.1)$$

$$= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (3.2.2)$$

$$= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \partial^\mu A^\nu \quad (3.2.3)$$

in cui A_μ è un campo libero. Infatti, vediamo che $F^{\mu\nu}$ contiene solo termini lineari nei campi e nelle derivate, dunque (3.2.1) è quadratica nelle derivate di A_μ , e noi abbiamo imparato bene che lagrangiane di questo tipo sono appartenenti a teorie libere. Teorie interagenti contengono termini che sono di ordine superiore al secondo nei campi, dunque confermiamo ancora che la lagrangiana (3.2.1) ci fornisce una teoria di fotoni liberi, che non interagiscono, nemmeno con se stessi.

Possiamo vedere che abbiamo:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{\mu 0} \quad (3.2.4)$$

e dunque che $\pi_0 = 0$, il che è incompatibile con la richiesta per il commutatore tra A_μ e π che imponiamo essere:

$$[A_\mu(t, \vec{x}), \pi_\nu(t, \vec{y})] = -i \eta_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.2.5)$$

Le componenti 00 di (3.2.5) sono ben definite. Cominciamo a sospettare che costruire una teoria quantistica e relativistica per il fotone sia più delicato del previsto, e questo ce lo confermerà anche la costruzione del propagatore.

Però il problema di (3.2.5) è risolvibile poiché potremmo comunque riuscire ad usare la quantizzazione canonica modificando la lagrangiana, e aggiungendo un termine di gauge fixing. Lo vediamo nella prossima sezione.

3.2.1 Propagatore per il campo di Maxwell

Noi però cerchiamo di dimenticarci del fatto che dobbiamo aggiungere un pezzo alla lagrangiana per poter utilizzare la quantizzazione canonica, e proviamo a costruire un propagatore per la teoria di Maxwell. Vedremo che giungeremo alla stessa conclusione. Scriviamo l'equazione del moto:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (3.2.6)$$

$$= (\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu) \quad (3.2.7)$$

$$= (\square \eta^{\nu\rho} - \partial^\nu \partial^\rho) A_\rho = 0 \quad (3.2.8)$$

e otteniamo qualcosa di una forma che ricorda Klein-Gordon. Sappiamo che i propagatori sono funzioni di Green dell'equazione del moto. Infatti avevamo per la teoria scalare:

$$(\square + m^2)G(x, y) = i\delta^4(x - y) \quad (3.2.9)$$

e $G(x, y)$ è l'operatore inverso dell'operatore cinetico e, a seconda di come aggiriamo le singolarità sul cammino di integrazione, noi siamo in grado di costruirci le funzioni di Green avanzate, ritardate o i propagatori di Feynman. Noi sappiamo che gli operatori sono sempre delicati da invertire. Nel nostro caso abbiamo:

$$(\square \eta^{\nu\rho} - \partial^\nu \partial^\rho)G_{\rho\sigma}(x) = i\delta^\nu_\sigma \delta^{(n)}(x) \quad (3.2.10)$$

che possiamo provare a risolvere nel solito modo andando nello spazio di Fourier; ovvero possiamo scrivere:

$$G_{\rho\sigma}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{G}_{\rho\sigma}(k) e^{-ikx} \quad (3.2.11)$$

$$\delta^4(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \quad (3.2.12)$$

che messe nella definizione di funzione di Green ci danno:

$$(-k^2 \eta^{\nu\rho} + k^\nu k^\rho) \tilde{G}_{\rho\sigma}(k) = i \delta^\nu_\sigma \quad (3.2.13)$$

$$\left(\eta^{\nu\rho} - \frac{k^\nu k^\rho}{k^2} \right) \tilde{G}_{\rho\sigma}(k) = -i \frac{\delta^\nu_\sigma}{k^2} \quad (3.2.14)$$

dobbiamo dunque studiare la matrice che c'è davanti alla $\tilde{G}(k)$ per poterla invertire. Consideriamo:

$$P^\nu_\rho = \delta^\nu_\rho - \frac{k^\nu k_\rho}{k^2} \quad (3.2.15)$$

che è l'operatore che vogliamo invertire. Vediamo le sue proprietà. Possiamo notare che tale operatore è un proiettore:

$$P^\nu_\rho P^\rho_\sigma = \left(\delta^\nu_\rho - \frac{k^\nu k_\rho}{k^2} \right) \left(\delta^\rho_\sigma - \frac{k^\rho k_\sigma}{k^2} \right) \quad (3.2.16)$$

$$= \delta^\nu_\sigma - \frac{k^\nu k_\sigma}{k^2} - \frac{k^\nu k_\sigma}{k^2} + \frac{k^\nu k^\rho k_\rho k_\sigma}{k^4} \quad (3.2.17)$$

$$= \delta^\nu_\sigma - \frac{k^\nu k_\sigma}{k^2} - \frac{k^\nu k_\sigma}{k^2} + \frac{k^\nu k_\sigma}{k^2} \quad (3.2.18)$$

$$= \delta^\nu_\sigma - \frac{k^\nu k_\sigma}{k^2} \quad (3.2.19)$$

$$= P^\nu_\sigma \quad (3.2.20)$$

come volevamo dimostrare. Però i proiettori hanno autovalore 1, se siamo nello spazio in cui proiettiamo, e 0 se siamo nello spazio ortogonale. Capiamo che tipo di autovalori ha P^ν_ρ .

Sappiamo che quando vogliamo diagonalizzare degli operatori dobbiamo fare delle trasformazioni di similitudine:

$$A \longrightarrow A_0 = S^{-1} A S \quad (3.2.21)$$

con A_0 diagonale. Però sappiamo anche che Tr e $\det$ sono invarianti per trasformazioni di similitudine. In particolare sappiamo che la traccia è ciclica, dunque:

$$\text{Tr}\{A_0\} = \text{Tr}\{S^{-1} A S\} = \text{Tr}\{S S^{-1} A\} = \text{Tr}\{A\}. \quad (3.2.22)$$

Possiamo calcolarci la traccia dell'operatore $P^\nu{}_\rho$, la quale ci dirà se ci sono, e quali, autovalori nulli:

$$\text{Tr}\{P^\nu{}_\rho\} = 4 - \frac{k^\nu k_\nu}{k^2} = 3 \quad (3.2.23)$$

quindi, $P^\nu{}_\rho$ ha un autovettore (con conseguente autovalore) nullo¹. Avendo un autovalore nullo non possiamo invertirlo e quindi non possiamo costruire un propagatore.

Non potendo utilizzare l'approccio canonico proviamo a modificare leggermente la lagrangiana della teoria e vediamo se riusciamo a migliorare la nostra situazione. Prendiamo²:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial A)^2 \quad (3.2.25)$$

ossia aggiungiamo un pezzo proporzionale al gauge di Lorentz. Per le equazioni del moto possiamo vedere:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\sigma} = 0 \quad (3.2.26)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial(\partial_\mu A^\mu)^2}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} \quad (3.2.27)$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{\partial F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{\partial F_{\tau\kappa}} \frac{\partial F_{\tau\kappa}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} - \frac{1}{\xi} (\partial A) \frac{\partial}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu) \quad (3.2.28)$$

$$= -F^{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} (\partial A) \eta^{\mu\nu} \quad (3.2.29)$$

che ci porta a:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \partial^\nu (\partial A) = 0. \quad (3.2.30)$$

I momenti coniugati sono:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} - \frac{1}{\xi} (\partial A) \eta^{0\mu} \quad (3.2.31)$$

da cui vediamo che non si ripresenta il problema di π^0 non definito poiché ora abbiamo:

$$\pi^0 = -\frac{1}{\xi} (\partial A). \quad (3.2.32)$$

¹Nota che non è troppo difficile trovare chi sia l'autovettore nullo:

$$P^\nu{}_\rho k^\rho = \left(\delta^\nu{}_\rho - \frac{k^\nu k_\rho}{k^2} \right) k^\rho = 0. \quad (3.2.24)$$

²Potresti prendere un qualsiasi parametro λ , tanto la fisica non ne dipenderà.

Forse ci possiamo illudere del fatto che abbiamo una teoria meno complicata da quantizzare rispetto di quella di Maxwell. Vediamo se il termine cinetico di (3.2.30) possiamo invertirlo e avere un propagatore. Ricordandoci:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (3.2.33)$$

$$= \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu \quad (3.2.34)$$

$$= \left(\square \eta^{\nu\rho} - \partial^\nu \partial^\rho \right) A_\rho \quad (3.2.35)$$

scriviamo:

$$\left(\square \eta^{\nu\rho} + \frac{1-\xi}{\xi} \partial^\nu \partial^\rho \right) A_\rho = 0 \quad (3.2.36)$$

$$\left(\square \eta^{\nu\rho} + \frac{1-\xi}{\xi} \partial^\nu \partial^\rho \right) G_{\rho\sigma} = i \delta^\nu_\sigma \delta^n(x) \quad (3.2.37)$$

$$\left(-k^2 \eta^{\nu\rho} - \frac{1-\xi}{\xi} k^\nu k^\rho \right) \tilde{G}_{\rho\sigma}(k) = i \delta^\nu_\sigma \quad (3.2.38)$$

a questo punto potremmo rifare gli stessi conti visti in precedenza e confermare il fatto che ora il termine cinetico è invertibile, non abbiamo più un proiettore e vale $P^\nu_\rho k^\rho = \frac{1}{\xi} k^\nu$.

L'unica struttura possibile, visto che $\tilde{G}_{\rho\sigma}(k)$ è un tensore di rango 2 e non abbiamo molti tensori di rango 2 da poter utilizzare (abbiamo la metrica e quadri-vettrici), affinché sia rispettata (3.2.38), è:

$$\tilde{G}_{\rho\sigma}(k) = a(k^2) \eta_{\rho\sigma} + b(k^2) k_\rho k_\sigma \quad (3.2.39)$$

in cui a e b sono funzioni scalari, dunque per forza funzioni di k^2 . Possiamo imporre che questa scrittura di $\tilde{G}$ sia l'inverso dell'operatore cinetico, sostituirla in (3.2.38) e risolvere per $a(k^2)$ e $b(k^2)$:

$$\left(-k^2 \eta^{\mu\rho} - \frac{1-\xi}{\xi} k^\mu k^\rho \right) (a(k^2) \eta_{\rho\sigma} + b(k^2) k_\rho k_\sigma) = i \delta^\mu_\sigma \quad (3.2.40)$$

$$-k^2 a \delta^\mu_\sigma - k^2 b k^\mu k_\sigma - \frac{1-\xi}{\xi} a k^\mu k_\sigma - \frac{1-\xi}{\xi} b k^2 k^\mu k_\sigma = i \delta^\mu_\sigma \quad (3.2.41)$$

$$[-k^2 a(k^2) - i] \delta^\mu_\sigma + \left[-k^2 b - \frac{1-\xi}{\xi} (a + b k^2) \right] k^\mu k_\sigma = 0 \quad (3.2.42)$$

$$[-k^2 a(k^2) - i] \delta^\mu_\sigma + \left[-\frac{1}{\xi} k^2 b - \frac{1-\xi}{\xi} a \right] k^\mu k_\sigma = 0 \quad (3.2.43)$$

dunque, abbiamo due condizioni affinché sia rispettata l'equazione. Ricorda che tensori diversi non li possiamo mischiare. Troviamo:

$$-k^2 a = i \quad \implies \quad a(k) = -\frac{i}{k^2} \quad (3.2.44)$$

$$-\frac{1}{\xi} b k^2 - \frac{1-\xi}{\xi} a = 0 \quad \implies \quad b(k) = \left(-\frac{i}{k^2} \right) \left(-\frac{1-\xi}{k^2} \right) \quad (3.2.45)$$

quindi scriviamo il propagatore nello spazio dei momenti:

$$\tilde{G}_{\rho\sigma} = -\frac{i}{k^2} \left(\eta_{\rho\sigma} - (1 - \xi) \frac{k_\rho k_\sigma}{k^2} \right). \quad (3.2.46)$$

Tornando alle equazioni del moto:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \partial^\nu (\partial A) = 0 \quad (3.2.47)$$

$$(\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu) + \frac{1}{\xi} \partial^\nu (\partial A) = 0 \quad (3.2.48)$$

$$\square A^\nu + \frac{1 - \xi}{\xi} \partial^\nu (\partial A) = 0. \quad (3.2.49)$$

se scegliamo, cosa lecita poiché è un parametro arbitrario, $\xi = 1$, allora riotteniamo l'equazione di Klein-Gordon, per A^ν e con $m = 0$. Questo ci piace perché possiamo risolvere l'equazione tramite le onde piane, ma stando attenti a conferire ad A_μ una natura quadri-vettoriale:

$$A_\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \left[a(\lambda, k) \epsilon_\mu(\lambda, k) e^{-ikx} + a^\dagger(\lambda, k) \epsilon_\mu^*(\lambda, k) e^{ikx} \right] \quad (3.2.50)$$

in cui indichiamo con λ la polarizzazione. Nota che abbiamo A_μ reale, per cui abbiamo messo solamente un tipo di operatore (A_μ dev'essere hermitiano). Possiamo vedere però che dall'equazione del moto discende una caratteristica di k^μ :

$$\square A^\nu = 0 \quad \implies \quad k^2 = 0 \quad (3.2.51)$$

ossia k^ν è light-like (dunque descrive un oggetto mass-less). Imponendo (3.2.5) troviamo i commutatori:

$$\left[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k') \right] = -\eta^{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (3.2.52)$$

Abbiamo appena visto che $k^2 = 0$, ossia di tipo luce, ma possiamo introdurre un quadrivettore di tipo tempo:

$$n^\mu n_\mu = 1 \quad (3.2.53)$$

che ci viene comodo poiché sappiamo che un vettore di tipo tempo ed uno di tipo luce individuano un piano in uno spazio quadridimensionale. Possiamo scegliere i due vettori di polarizzazione:

$$\epsilon_\mu^{(1)} \quad , \quad \epsilon_\mu^{(2)} \quad (3.2.54)$$

tali che siano ortogonali al piano di k ed n :

$$\epsilon_\mu^{(i)} k^\mu = 0 \quad , \quad \epsilon_\mu^{(i)} n^\mu = 0 \quad , \quad i = 1, 2 \quad (3.2.55)$$

e anche tali per cui:

$$\epsilon_\mu^{(i)} \epsilon^{(j)\mu} = -\delta^{ij} \quad , \quad i, j = 1, 2 \quad (3.2.56)$$

ossia ortogonali tra loro. Prendiamo il terzo quadrivettore di polarizzazione $\epsilon_\mu^{(3)}$ di tipo spazio ed $\epsilon_\mu^{(0)}$ ortogonale ad n :

$$\epsilon_\mu^{(3)} \epsilon^{(3)\mu} = -1 \quad , \quad \epsilon_\mu^{(0)} n^\mu = 0. \quad (3.2.57)$$

Nel caso in cui avessimo:

$$k_\mu = (k, 0, 0, k) \quad (3.2.58)$$

ovvero scegliamo un sistema di riferimento parallelo ad una specifica direzione, allora una scelta dei vettori di polarizzazione potrebbe essere:

$$\epsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \epsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.59)$$

$$\epsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \epsilon^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.60)$$

Arrivati a questo punto possiamo cominciare a costruire il nostro spazio di Fock e definire chi sono gli stati fisici.

3.2.2 Metodo di Gupta-Bleuler

Vediamo in questa sezione quella che va sotto il nome di **quantizzazione di Gupta-Bleuler**, che noi applicheremo alla nostra teoria, ma è un processo generale che si utilizza ogni volta che si ha bisogno di imporre un vincolo in senso debole. Vedremo al corso di Teoria delle stringhe come questo procedimento lo utilizzeremo per restringere lo spazio degli stati imponendo un vincolo. Nel capitolo degli integrali funzionali vedremo un metodo analogo, ma per le teorie non abeliane.

Possiamo costruire il nostro spazio di Fock di stati fisici. Vogliamo costruire stati:

$$|\vec{k}, \lambda\rangle = \# a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}) |0\rangle \quad (3.2.61)$$

di singola particella con momento $\vec{k}$ e polarizzazione λ . Possiamo osservare che la norma è:

$$\langle \vec{k}', \lambda | \vec{k}, \lambda \rangle = \langle 0 | a^{(\lambda')}(\vec{k}') a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}) | 0 \rangle \quad (3.2.62)$$

$$= \langle 0 | [a^{(\lambda')}(\vec{k}'), a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})] | 0 \rangle \quad (3.2.63)$$

$$= -\eta^{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') (2\pi)^3 \quad (3.2.64)$$

ma se prendiamo $\lambda = \lambda' = 0$, e $\vec{k} = \vec{k}'$, allora stiamo calcolando:

$$\left| \left| \left| \vec{k}, \lambda \right\rangle \right| \right|^2 < 0 \quad (3.2.65)$$

ovvero, otteniamo che nella nostra teoria sono presenti degli stati, detti *ghost*, a norma negativa. Notiamo però che la relazione (3.2.64) ci dice che gli stati sono ortogonali. Il problema delle norme negative però non lo abbiamo per tutte le polarizzazioni; infatti se prendiamo le polarizzazioni longitudinale o trasversa abbiamo $\eta^{\lambda\lambda'} = -1$ e dunque gli stati hanno norma > 0 . Il problema dei ghost sorge quando abbiamo la polarizzazione scalare, $\lambda = 0$.

Quello che non ci piace è che con norme negative dobbiamo buttare tutta l'interpretazione della Meccanica Quantistica. Qualcuno potrebbe anche non scandalizzarsi troppo del fatto che abbiamo trovato una teoria "malata", poiché in realtà non stiamo facendo veramente la teoria di Maxwell, ma in $\mathcal{L}$ abbiamo ancora il pezzo con $\xi = 1$. Nota che ponendo $\xi = 0$ torneremmo all'elettromagnetismo di Maxwell.

A noi però interessa lo stesso questa teoria e ovviamente, possiamo risolvere il problema delle norme negative.

Noi sappiamo che dalle equazioni del moto (3.2.30), otteniamo la teoria di Maxwell, se abbiamo $\partial_\mu A^\mu = 0$. Il punto è che se lo imponiamo brutalmente non risolviamo nulla poiché ritorniamo alla teoria senza propagatore. Quello che possiamo fare è imporlo in senso debole, ossia, diamo una condizione che ci porta a dire che in alcuni casi abbiamo $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Imponiamo³ che gli stati fisici sono quelli per cui:

$$\langle \psi | \partial A | \psi \rangle = 0 \quad (3.2.67)$$

in questo modo selezioniamo automaticamente gli stati fisici con norma definita positiva. Tra tutti gli stati che abbiamo nello spazio di Fock, noi prendiamo solo quelli fisici, per cui imponiamo in senso debole che $\partial A = 0$ attraverso la richiesta che il suo valor medio sia nullo.

Indaghiamo meglio quello che abbiamo appena fatto. Studiamo:

$$\langle \psi | \partial A | \psi \rangle = \langle \psi | \partial A^+ + \partial A^- | \psi \rangle \quad (3.2.68)$$

in cui:

$$A_\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \left[\underbrace{a(\lambda, k) \epsilon_\mu(\lambda, k) e^{-ikx}}_{A^+} + \underbrace{a^\dagger(\lambda, k) \epsilon_\mu^*(\lambda, k) e^{ikx}}_{A^-} \right]. \quad (3.2.69)$$

³Nota che noi imponiamo una condizione sul valor medio, poiché se utilizzassimo solamente l'azione:

$$\partial A | \psi \rangle = 0 \quad (3.2.66)$$

allora il vuoto $|0\rangle$ non sarebbe uno stato fisico, visto che l'operatore A comincerebbe ad agire con gli operatori $a^{(\lambda)\dagger}$ creando qualcosa e quindi non dando un risultato nullo.

Vediamo che (3.2.67) si traduce in⁴:

$$0 = \partial^\mu A_\mu^+(x) |\psi\rangle \quad (3.2.71)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \left[a^{(\lambda)}(k) (-ik^\mu) \cdot \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} \right] |\psi\rangle \quad (3.2.72)$$

$$= -i \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \left[a^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} \right] k^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) |\psi\rangle \quad (3.2.73)$$

in cui notiamo avere il prodotto $k^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ che è Lorentz invariante, per cui possiamo calcolarcelo nel sistema di riferimento che più ci piace. Scegliamo (3.2.58) così sappiamo che solamente le polarizzazioni $\lambda = 0, 3$ ci interessano, poiché $\lambda = 1, 2$ sono ortogonali a k^μ . Dunque nel nostro studio rimane solo un termine:

$$\partial^\mu A_\mu^\dagger(x) |\psi\rangle \sim (a^{(0)} - a^{(3)}) |\psi\rangle = 0. \quad (3.2.74)$$

nota che la condizione che abbiamo ora non ci dice nulla sulle polarizzazioni fisiche, poiché parla solamente delle polarizzazioni scalare e longitudinale.

Ci è comodo scrivere la relazione (3.2.74) poiché con essa è più comodo vedere quali siano gli stati fisici. In particolare (3.2.74) ci dice che dobbiamo eccitare le polarizzazioni 0 e 3 nello stesso modo. Ad esempio, lo stato:

$$(a^{(0)} - a^{(3)}) a^{(0)\dagger}(\vec{k}) |0\rangle$$

non va bene.

Ci piacerebbe però separare gli stati fisici $|\psi_T\rangle \in \mathcal{H}_1$ (le polarizzazione trasverse) dagli stati non fisici $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_2$ (polarizzazione scalare e longitudinale). Pertanto consideriamo:

$$|\psi\rangle = |\psi_T\rangle + |\phi\rangle \quad (3.2.75)$$

e vorremmo verificare che le osservabili agiscano solo sullo spazio fisico, ovvero solo su $|\psi_T\rangle \in \mathcal{H}_1$. La condizione (3.2.74) diventa:

$$(a^{(0)} - a^{(3)}) |\phi\rangle = 0. \quad (3.2.76)$$

Utilizzando lo stesso procedimento del caso scalare, possiamo costruire l'operatore numero delle polarizzazioni longitudinali e trasverse:

$$N_{03} = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \left[a^{(0)\dagger} a^{(0)} - a^{(3)\dagger} a^{(3)} \right] \quad (3.2.77)$$

⁴O equivalentemente:

$$\langle\psi| \partial A^- = 0. \quad (3.2.70)$$

che avrà un set di autostati $|\phi_n\rangle$:

$$N_{03} |\phi_n\rangle = n |\phi_n\rangle \quad (3.2.78)$$

ed essendo un'operatore hermitiano, tali autostati ci forniscono una base per il nostro spazio. Dunque possiamo scrivere:

$$|\phi\rangle = \sum c_n |\phi_n\rangle \quad , \quad |\phi_0\rangle = |0\rangle . \quad (3.2.79)$$

Possiamo provare a costruire:

$$\langle \phi_n | N_{03} | \phi_n \rangle = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \langle \phi_n | a^{(0)\dagger} a^{(0)} - a^{(3)\dagger} a^{(3)} | \phi_n \rangle \quad (3.2.80)$$

a questo punto possiamo utilizzare la relazione (3.2.74)⁵:

$$\partial^\mu A_\mu^+(x) |\phi\rangle \sim (a^{(0)} - a^{(3)}) |\phi\rangle = 0 \implies a^0 |\phi_n\rangle = a^3 |\phi_n\rangle \quad (3.2.82)$$

$$\langle \phi | \partial^\mu A_\mu^-(x) \sim \langle \phi | (a^{(0)\dagger} - a^{(3)\dagger}) = 0 \implies \langle \phi_n | a^{(0)\dagger} = \langle \phi_n | a^{(3)\dagger} \quad (3.2.83)$$

Il fatto che valga (3.2.82) $\forall n$ implica che:

$$\langle \phi_n | N_{03} | \phi_n \rangle \sim \langle \phi_n | a^{(3)\dagger} a^{(3)} - a^{(0)\dagger} a^{(0)} | \phi_n \rangle \quad (3.2.84)$$

$$= \langle \phi_n | (a^{(3)\dagger} - a^{(0)\dagger}) a^{(0)} | \phi_n \rangle \quad (3.2.85)$$

$$= 0 \quad \forall n > 0. \quad (3.2.86)$$

Però dobbiamo ricordare che:

$$\langle \phi_n | N_{03} | \phi_n \rangle = n \langle \phi_n | \phi_n \rangle \quad (3.2.87)$$

e pertanto abbiamo:

$$\langle \phi_n | \phi_n \rangle = 0 \quad \forall n > 0 \quad (3.2.88)$$

mentre per il caso $n = 0$ (il vuoto) abbiamo $|\phi_0\rangle = |0\rangle$ e quindi:

$$\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1. \quad (3.2.89)$$

Tutto ciò implica che:

$$\langle \phi | \phi \rangle = \sum_{n>0} |c_n|^2 \langle \phi_n | \phi_n \rangle \quad (3.2.90)$$

$$= |c_0|^2 \langle 0 | 0 \rangle + \sum_{n>0} |c_n|^2 \langle \phi_n | \phi_n \rangle \quad (3.2.91)$$

$$= |c_0|^2 \quad (3.2.92)$$

$$\geq 0. \quad (3.2.93)$$

⁵Nota che in questo modo soddisfiamo:

$$\langle \psi | \partial A | \psi \rangle = \langle \psi | \langle \phi | \partial A^+ + \partial A^- | \phi \rangle | \psi \rangle = 0. \quad (3.2.81)$$

Per verificare che gli stati longitudinali e scalari non contribuiscono alle osservabili facciamo un'esempio. Vediamo il caso dell'energia. L'hamiltoniana della teoria⁶ è:

$$H(x) = \frac{i}{2} \int d^3x \left[\sum_{i=1}^3 \left[(\dot{A}_i)^2 + (\nabla A_i)^2 \right] - (\dot{A}_0)^2 - (\nabla A_0)^2 \right] \quad (3.2.94)$$

$$= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\sum_{i=1}^3 a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) - a^{(i)\dagger}(k) a^{(i)}(k) \right) \quad (3.2.95)$$

in cui $a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) - a^{(3)\dagger}(k) a^{(3)}(k)$ contano le polarizzazioni longitudinali e scalari, mentre $a^{(1)\dagger}(k) a^{(1)}(k) + a^{(2)\dagger}(k) a^{(2)}(k)$ quelle fisiche. Vediamo dunque:

$$\langle \psi | H | \psi \rangle \sim \langle \psi_T | N_{12} | \psi_T \rangle \langle \phi | \phi \rangle + \langle \psi_T | \psi_T \rangle \langle \phi | N_{03} | \phi \rangle \quad (3.2.96)$$

$$= |c_0|^2 \langle \psi_T | N_{12} | \psi_T \rangle \quad (3.2.97)$$

e dunque che le polarizzazioni non fisiche non agiscono sulle osservabili. Nota che questa relazione potremmo normalizzarla per gli stati:

$$\frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\langle \psi_T | H_{fisica} | \psi_T \rangle}{\langle \psi_T | \psi_T \rangle}. \quad (3.2.98)$$

3.3 Formula LSZ per i campi vettoriali (cenni)

In questa sezione vediamo, brevemente, cosa associare a fotoni entranti o uscenti in un certo diagramma, esattamente come abbiamo fatto al termine della sezione §2.2 per i campi spinoriali. Questo ci sarà utile quando vedremo le regole di Feynman per la QED e dovremo assegnare dei quadri vettori (così come a dei fermioni associamo degli spinori a quattro componenti) alle gambe entranti o uscenti.

Nota. Visto che è una sezione che non abbiamo visto durante il corso riporto solamente i risultati.

Invertendo la relazione (3.2.50) possiamo trovare gli operatori di creazione e distruzione in funzione del campo:

$$\hat{a}^\dagger(\lambda, k) = -i\varepsilon_\mu^*(\lambda, \vec{k}) \int d^3x e^{+ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 A^\mu(x) \quad (3.3.1)$$

$$\hat{a}(\lambda, k) = i\varepsilon_\mu(\lambda, \vec{k}) \int d^3x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 A^\mu(x) \quad (3.3.2)$$

⁶È la somma degli operatori numero. Come visto nella teoria scalare (e spinoriale) libera.

analoghi al caso spinoriale. Possiamo ottenere gli operatori $a^\dagger$ e a solo se richiediamo che i vettori di polarizzazione siano perpendicolari tra loro e normalizzati, ovvero che:

$$\epsilon^\mu(\lambda, p) \epsilon_\mu^*(\lambda', p) = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (3.3.3)$$

Ragionando in modo analogo a quanto fatto per il caso scalare e spinoriale possiamo associare gli operatori di creazione e distruzione agli stati *in* e *out*:

$$a_{in}^\dagger(\vec{k}) \quad , \quad a_{out}(\vec{k}) \quad (3.3.4)$$

dunque, senza fare conti possiamo dire che:

$$\begin{array}{ll} \text{fotone entrante} & \longrightarrow \epsilon_\mu^*(\lambda, \vec{k}) \\ \text{fotone uscente} & \longrightarrow \epsilon_\mu(\lambda, \vec{k}). \end{array}$$

Queste saranno le regole che utilizzeremo per calcolare ampiezze di transizione nella QED.

3.4 Teorie di gauge non abeliane

Vediamo in questa sezione come formulare matematicamente le teorie di gauge non abeliane. Torneranno alcuni demoni del passato che abbiamo già incontrato studiando la teoria dei gruppi. Rivedi le note del corso di *Introduzione alla teoria dei gruppi*.

Faremo un po' di fatica, ma saremo ampiamente ripagati poiché quello che faremo nelle prossime due sezioni sarà cruciale per la costruzione del modello standard.

Considera però che fa parte dei problemi del millennio, per cui non comprenderla fino in fondo è normale.

Abbiamo visto come a partire dalla teoria elettromagnetica, e accoppiando i campi di materia con un vettore, siamo stati in grado di costruire una teoria invariante per trasformazioni di gauge locali di tipo $U(1)$, dunque abeliane. Ora, potremmo pensare di generalizzare tutto quello che abbiamo fatto per cose più complicate, ossia, teorie non-abeliane $SU(n)$.

Ripartiamo dall'inizio del capitolo sulla teoria di Maxwell e supponiamo di avere tanti fermioni, tutti con la stessa massa, e scriviamo:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \bar{\psi}^i (i\not{\partial} - m) \psi^i \quad (3.4.1)$$

chiaramente abbiamo la stessa invarianza di fase globale che avevamo per la lagrangiana di un singolo campo:

$$\psi^i \longrightarrow e^{-i\alpha_i} \psi^i \quad (3.4.2)$$

ma anche di aggiuntive. Ad esempio una qualsiasi forma quadratica (come la norma) $x^i x_i$ rimane invariata per rotazioni spaziali di $SO(n)$.

Noi per la nostra teoria guardiamo trasformazioni generiche del tipo:

$$\psi_i \longrightarrow U_{ij} \psi^j \quad (3.4.3)$$

in cui U_{ij} è una matrice che ci combina le varie componenti dello spinore⁷:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}. \quad (3.4.4)$$

Conseguentemente abbiamo anche:

$$\bar{\psi}_i \longrightarrow \bar{\psi}^j U_{ij}^\dagger. \quad (3.4.5)$$

Per questa trasformazione abbiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L}_U = \sum_{i=1}^n \bar{\psi}^i U^\dagger (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) U \psi^i \quad (3.4.6)$$

e avremo che $\mathcal{L} = \mathcal{L}_U$ (la matrice U filtra oltre $\not\partial$ vivendo in spazi diversi, data la natura diversa dei loro indici) se e solo se le matrici U sono unitarie:

$$U^\dagger U = \mathbb{1}. \quad (3.4.7)$$

Però cosa possiamo dire riguardo U . Sicuramente formano il gruppo unitario in n dimensioni $U(n)$. Sappiamo dire sono n^2 matrici $n \times n$ hermitiane; questo poiché una matrice $n \times n$ ha n^2 entrate e noi possiamo formare una base per tali matrici formata da n^2 elementi. Possiamo anche dire che ci saranno tra tutte queste matrici un sottoinsieme di matrici diagonali costruite in modo da mandare:

$$\psi^i \longrightarrow e^{-i\alpha_i} \psi^i \quad (3.4.8)$$

ossia che moltiplicano per una fase solamente la componente i , lasciando le altre $n - 1$ invariate. Di matrici di questo tipo c'è ne saranno n , e ci conviene definirne una di base, in cui una delle n matrici diagonali, che sarà una generica combinazione lineare delle altre n (matrici diagonali), trasformi ciascuna ψ^i con la stessa fase α :

$$\psi^i \longrightarrow e^{-i\alpha} \psi^i \quad (3.4.9)$$

mentre le altre $n - 1$ matrici danno fasi a più spinori ψ^i .

Facendo in questo modo possiamo decomporre le n trasformazioni come:

$$e^{i\alpha} \times U \quad (3.4.10)$$

⁷Nota che noi possiamo rimescolare i vari ψ_i avendo tutti la stessa massa.

dove le fasi $e^{i\alpha}$ appartengono al gruppo $U(1)$, mentre le U sono matrici $n \times n$, con $n^2 - 1$ elementi indipendenti, visto che abbiamo il vincolo di unitarietà.

Le matrici di $e^{i\alpha}$ (che sono proporzionali all'identità) sono quelle che abbiamo studiato con la teoria elettromagnetica, per cui se volevamo rendere la nostra teoria locale, introducevamo un campo di gauge associato alla simmetria, che si accoppia con tutti i campi di materia; ciò caratterizza il gruppo $U(1)$. Invece, l'insieme delle altre $n^2 - 1$ matrici unitarie, che ruotano le componenti, lo chiamiamo $SU(n)$. Dunque, il gruppo delle matrici U (che ruotano il vettore di spinori ψ) lo scriviamo come⁸:

$$U(n) = U(1) \times SU(n). \quad (3.4.11)$$

3.4.1 Generatori e rappresentazioni

Ora facciamo un passo indietro, torniamo all'astratto e ripariamo di teoria dei gruppi per costruire gli oggetti necessari per parlare della teoria di Yang-Mills.

Ogni elemento del gruppo G può essere in funzione dei *generatori* del gruppo T^a (rappresentazione fondamentale), infatti possiamo scrivere:

$$U = e^{-i\omega^a T^a}. \quad (3.4.12)$$

ossia, esprimiamo un elemento del gruppo come l'esponenziale dei parametri ω^a del gruppo e dei suoi generatori T^a . Nel caso in cui U è un'operatore unitario (quindi il caso che abbiamo visto nella sezione precedente), allora tramite la condizione $U^\dagger U = \mathbb{1}$ vediamo che i generatori T^a devono essere hermitiani⁹. In più, come già detto, i generatori soddisfano la relazione:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (3.4.14)$$

in cui $f^{abc} \in \mathbb{R}$ è detta *costante di struttura* ed è completamente antisimmetrica.

I generatori del gruppo sono matrici hermitiane con traccia nulla e vengono normalizzati (scelta possibile) imponendo:

$$\text{Tr} \{ T^a T^b \} = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (3.4.15)$$

l'insieme di questi generatori costituisce la *rappresentazione* R del gruppo. Inoltre, i generatori soddisfano la stessa algebra del gruppo.

⁸La decomposizione (3.4.11) è una scrittura che possiamo generalmente sempre fare, poiché $U(n)$ è un gruppo semi-semplice; tali gruppi si possono sempre decomporre in prodotti del tipo (3.4.11).

⁹Si dimostra velocemente:

$$U^\dagger U = e^{i\omega^a (T^a)^*} e^{-i\omega^a T^a} \equiv \mathbb{1} \quad (3.4.13)$$

dunque $(T^a)^* - T^a = 0$, ovvero $T^a = T^{a*}$.

Per esempio, in un gruppo $SU(n)$ abbiamo $n^2 - 1$ generatori con $\dim = n \times n$ che obbediscono a (3.4.14). Per $SU(2)$ abbiamo:

$$T^a = \frac{1}{2} \sigma^a \quad , \quad f^{abc} = \varepsilon^{abc} \quad (3.4.16)$$

con ε il simbolo di Levi-Civita. Per $SU(3)$ abbiamo 8 generatori:

$$T^a = \frac{1}{2} \lambda^a \quad (3.4.17)$$

in cui λ sono le **matrici di Gell-Mann**.¹⁰

La rappresentazione (R) del gruppo è un insieme di matrici hermitiane a traccia nulla T_R^a , di dimensioni $D_R \times D_R$, in cui D è la dimensione della rappresentazione, tali da chiudersi in (algebra del gruppo):

$$[T_R^a, T_R^b] = i f^{abc} T_R^c. \quad (3.4.18)$$

Se esiste una trasformazione unitaria:

$$T_R^a \longrightarrow U^{-1} T_R^a U \quad (3.4.19)$$

tale per cui:

$$T_R^a = -(T_R^a)^* \quad (3.4.20)$$

allora la rappresentazione è *reale*. Se una trasformazione di questo tipo non esiste ma esiste una matrice unitaria V tale per cui:

$$-(T_R^a)^* = V^{-1} T_R^a V \quad \forall a \quad (3.4.21)$$

allora la rappresentazione è *pseudo-reale*. Altrimenti la rappresentazione è complessa ed esiste una rappresentazione coniugata $\bar{R}$ con elementi:

$$T_R^a = -(T_R^a)^*. \quad (3.4.22)$$

Un esempio particolare di rappresentazione è la *rappresentazione aggiunta* per cui abbiamo:

$$(T_A^a)^{bc} = -i f^{abc} \quad (3.4.23)$$

ossia i generatori del gruppo sono le costanti di struttura. Siccome la costante di struttura è reale vale:

$$-(T_A^a)^* = T_A^a \quad \forall a \quad (3.4.24)$$

ovvero è una rappresentazione reale.

¹⁰Per dettagli puoi vedere la pagina [Wikipedia](#).

3.4.2 Teoria di Yang-Mills

Stiamo andando nella direzione giusta. Abbiamo visto che la lagrangiana (3.4.1), che possiamo scrivere utilizzando il vettore ψ contenente gli n spinori ψ^i :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi \quad (3.4.25)$$

è invariante per trasformazioni globali, con tutti i discorsi che sono seguiti del gruppo $U(n)$. Possiamo calcolare la corrente di Noether per tali trasformazioni:

$$\psi \longrightarrow U\psi. \quad (3.4.26)$$

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}U^\dagger \quad (3.4.27)$$

studiando trasformazioni infinitesime:

$$\psi \longrightarrow \psi' = (1 - i\omega^a T^a)\psi \quad (3.4.28)$$

per cui abbiamo:

$$\begin{cases} \delta\psi = -i\omega^a T^a \psi \\ \delta\bar{\psi} = \bar{\psi}i\omega^a T^a \end{cases} \quad (3.4.29)$$

dove siamo stati attenti all'ordine in cui scriviamo gli oggetti, visto che ψ è un vettore formato da n spinori e le T^a sono matrici (hermitiane). Abbiamo la corrente:

$$J^{\mu,a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu)T^a \psi (-i\omega^a) \quad (3.4.30)$$

$$= -\bar{\psi}\gamma^\mu T^a \psi \quad (3.4.31)$$

che è verificabile essere una corrente conservata se i nostri campi sono on-shell¹¹.

Ora, come fatto con Maxwell, potremmo chiederci cosa succede se rendiamo la trasformazione U locale, ossia dipendente dalle coordinate. Prendiamo $U = U(x)$ e vediamo:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \bar{\psi}U^\dagger(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)U\psi \quad (3.4.32)$$

$$= \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu(iU^\dagger \partial_\mu U)\psi \quad (3.4.33)$$

dunque, come ci aspettiamo, $\mathcal{L}$ non è invariante per trasformazioni locali. Ripartiamo dall'inizio e modifichiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi \quad (3.4.34)$$

¹¹nota che nel caso in cui $U(1)$ è il gruppo di simmetria, dunque $T^a = \mathbb{1}$, ritroviamo la corrente di Noether che abbiamo già visto mille volte.

e ci chiediamo come deve trasformare la *matrice* A_μ per avere una lagrangiana invariante. Ora i campi A_μ che accoppiamo ai nostri campi sono $n^2 - 1$, ossia mettiamo un potenziale vettore per ogni trasformazione che facciamo, e di conseguenza sono delle matrici, la cui posizione conta. Vediamo la trasformazione della lagrangiana:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\not{\partial} - m)\psi' + \bar{\psi}'\gamma^\mu A'_\mu\psi' \quad (3.4.35)$$

$$= \bar{\psi}U^\dagger(x)(i\not{\partial} - m)U(x)\psi + \bar{\psi}U^\dagger(x)\gamma^\mu A'_\mu U(x)\psi \quad (3.4.36)$$

$$= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu(iU^\dagger\partial_\mu U)\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu U^\dagger A'_\mu U\psi \quad (3.4.37)$$

se imponiamo $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, allora vediamo:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu \left(iU^\dagger\partial_\mu U + U^\dagger A'_\mu U \right) \psi \quad (3.4.38)$$

$$A_\mu = iU^\dagger\partial_\mu U + U^\dagger A'_\mu U \quad (3.4.39)$$

$$A_\mu - iU^\dagger\partial_\mu U = U^\dagger A'_\mu U \quad (3.4.40)$$

e dunque vediamo la legge di trasformazione¹²:

$$A'_\mu = -i(\partial_\mu U)U^\dagger + UA_\mu U^\dagger \quad (3.4.42)$$

$$= iU\partial_\mu U^\dagger + UA_\mu U^\dagger. \quad (3.4.43)$$

Un campo che trasforma come (3.4.43) sta trasformando con la rappresentazione aggiunta (essendo U unitario).

Osservazione. Noi nel ridefinire la lagrangiana con l'accoppiamento della matrice A_μ , non abbiamo introdotto nessuna carica dei nostri campi. Fino ad'ora sapevamo che una carica di riferimento, tra oggetti diversi, ci indicava una relazione tra le due cariche. Mi spiego meglio: se consideriamo un solo tipo di campo, ad esempio prendiamo un solo elettrone, non ha molta utilità introdurre la carica elettrica e , poiché tanto non la si confronta con nulla e possiamo sempre trovare un modo per riscalarla ad 1 ed ignorarla; caso diverso però se ad esempio consideriamo più tipi di particelle, ad esempio se prendiamo un elettrone ed un quark, allora è importante mettere una costante di accoppiamento nella teoria poiché essa ci permette di relazionare le cariche delle due particelle.

Nella teoria che stiamo studiando ora, non inseriamo nessuna costante di accoppiamento, ma il suo ruolo, ossia quello di dirci la carica del campo, dunque come un singolo campo trasforma sotto trasformazione di fase, è ricoperto dalla rappresentazione in cui si trova il campo.

¹²In cui possiamo utilizzare la relazione:

$$UU^\dagger = \mathbb{1} \implies \partial(UU^\dagger) = 0 \implies \partial U \cdot U^\dagger + U \cdot \partial U^\dagger = 0. \quad (3.4.41)$$

Ricorda l'osservazione sulle etichette degli stati fisici che abbiamo fatto nelle note di *Introduzione alla Teoria dei Campi* parlando di teoria dei gruppi. Avevamo visto che, in MQ, l'autovalore dell'operatore di Casimir L^2 ci diceva la dimensione dello spazio di Hilbert e conseguentemente la dimensione della rappresentazione dei nostri stati.

Dunque, una volta che capiamo in che rappresentazione sono i nostri stati fisici, questo è equivalente a dire la carica di tali oggetti. Così sarà per il resto della teoria.

Se utilizziamo una rappresentazione fondamentale, dunque (3.4.26), $n \Rightarrow \psi \rightarrow U\psi$ mentre per la rappresentazione anti-fondamentale abbiamo $\bar{n} \Rightarrow \psi \rightarrow U^*\psi$.

Possiamo provare a fare una trasformazione infinitesima:

$$U \simeq \mathbb{1} - i\omega^a T^a \quad (3.4.44)$$

$$U^\dagger \simeq \mathbb{1} + i\omega^a T^a \quad (3.4.45)$$

in questo modo abbiamo la trasformazione (3.4.43):

$$A'_\mu = -i(-i\partial_\mu \omega^a T^a) + (\mathbb{1} - i\omega^a T^a)A_\mu(\mathbb{1} + i\omega^a T^a) \quad (3.4.46)$$

$$= -\partial_\mu \omega^a T^a - i\omega^a [T^a, A_\mu] + A_\mu \quad (3.4.47)$$

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu \omega^a T^a - i\omega^a [T^a, A_\mu]. \quad (3.4.48)$$

Però, A_μ è un elemento di $SU(n)$, dunque una matrice hermitiana e a traccia nulla, per cui possiamo scriverla in termini dei generatori:

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \quad (3.4.49)$$

poiché T^a fornisce una base di $SU(n)$. Nota che A_μ^a sono coefficienti. In questo modo abbiamo:

$$\delta A_\mu = \delta A_\mu^a T^a \quad (3.4.50)$$

$$= -\delta_\mu \omega^a T^a - i\omega^b A_\mu^c [T^b, T^c] \quad (3.4.51)$$

$$= -\delta_\mu \omega^a T^a - i\omega^b A_\mu^c (if^{bca} T^a) \quad (3.4.52)$$

dunque troviamo:

$$\delta A_\mu^a = -\partial_\mu \omega^a + f^{abc} \omega^b A_\mu^c. \quad (3.4.53)$$

Siamo riusciti a dire come trasforma la matrice A_μ . In realtà noi abbiamo detto, in modo equivalente, come trasformano le componenti di tale matrice nella base dei generatori di $SU(n)$.

Quindi riprendendo (3.4.34) la possiamo riscrivere come:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad (3.4.54)$$

in cui definiamo la derivata covariante:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - iA_\mu. \quad (3.4.55)$$

La lagrangiana (3.4.54) è invariante per trasformazioni locali del gruppo $SU(n)$ tali che:

$$\delta\psi = -i\omega^a T^a \psi \quad (3.4.56)$$

$$\delta\bar{\psi} = i\omega^a \bar{\psi} T^a \quad (3.4.57)$$

$$\delta A_\mu^a = -\partial_\mu \omega^a + f^{abc} \omega^b A_\mu^c. \quad (3.4.58)$$

Nota. Noi avevamo calcolato la corrente conservata (3.4.31) per trasformazioni globali, e come succedeva per l'elettromagnetismo, possiamo vedere che di nuovo il campo A_μ^a si accoppia con i campi della lagrangiana tramite la corrente di Noether; infatti in termine aggiuntivo che mettiamo in (3.4.34) è:

$$\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi = A_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu T^a \psi = A_\mu^a J^\mu. \quad (3.4.59)$$

La ricetta dell'accoppiamento minimale ci dice che dobbiamo accoppiare il campo di gauge con la corrente di Noether.

In (3.4.54) non abbiamo dinamica per A_μ e noi abbiamo imparato che gliela possiamo dare costruendo il tensore degli sforzi:

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \phi = \left[(\partial_\mu - iA_\mu)(\partial_\nu - iA_\nu) - (\partial_\nu - iA_\nu)(\partial_\mu - iA_\mu) \right] \phi \quad (3.4.60)$$

$$= \left[-i\partial_\mu A_\nu + i\partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] \right] \phi \quad (3.4.61)$$

$$= -iF_{\mu\nu} \phi \quad (3.4.62)$$

dunque troviamo che $F_{\mu\nu}$ è una matrice $n \times n$ costruita come:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]. \quad (3.4.63)$$

Notiamo che se siamo in presenza di un gruppo abeliano (Maxwell) il commutatore in $F_{\mu\nu}$ è nullo e ritroviamo il tensore elettromagnetico. Però, proprio come abbiamo fatto con la matrice A_μ , possiamo decomporre un po' meglio il tensore $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu}^a T^a = \partial_\mu A_\nu^a T^a - \partial_\nu A_\mu^a T^a - iA_\mu^b A_\nu^c [T^b, T^c] \quad (3.4.64)$$

$$= \left[\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right] T^a \quad (3.4.65)$$

dunque:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (3.4.66)$$

in cui, essendo le costanti di struttura completamente antisimmetriche, ci conferma la natura antisimmetrica di $F_{\mu\nu}$. È facile immaginare che il termine aggiuntivo rispetto al caso di Maxwell ci cambierà completamente la teoria.

Ricordiamo che in rappresentazione aggiunta abbiamo (3.4.23):

$$(T_A^a)^{bc} = -i f^{abc}$$

dunque se scriviamo A^μ nella rappresentazione aggiunta abbiamo:

$$\delta A_\mu^a = -\left(\partial_\mu \omega^a + \omega^b A_\mu^c f^{abc}\right) \quad (3.4.67)$$

$$= -\left(\partial_\mu \delta^{ab} + i A_\mu^c (T_A^c)^{ab}\right) \omega^b \quad (3.4.68)$$

$$= -(\mathcal{D}_\mu^A)^{ab} \omega^b \quad (3.4.69)$$

se A è nella rappresentazione aggiunta allora lo è anche la derivata covariante (l'apice A sta per rappresentazione aggiunta), che possiamo scrivere anche come:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - i[\cdot, A_\mu]. \quad (3.4.70)$$

Se la derivata covariante è nella rappresentazione aggiunta, per definizione, abbiamo:

$$\mathcal{D}_\mu \longrightarrow U \mathcal{D}_\mu U^\dagger. \quad (3.4.71)$$

La rappresentazione aggiunta di $U(n)$ è $n \times n$, in questo modo otteniamo una rappresentazione reale tale per cui (un campo, ad n componenti ϕ) $\phi \rightarrow U \phi U^\dagger$, quindi A trasforma nella rappresentazione aggiunta di $SU(n)$ e la derivata covariante dipende dalla rappresentazione di A .

Per un campo ψ che trasforma nella rappresentazione fondamentale abbiamo:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i A_\mu \quad (3.4.72)$$

mentre se ϕ appartiene alla rappresentazione aggiunta, dunque $\phi \rightarrow U \phi U^\dagger$, abbiamo:

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i[\phi, A_\mu]. \quad (3.4.73)$$

Ricorda che i campi di gauge sono sempre in rappresentazione aggiunta.

Come visto per l'elettromagnetismo dall'identità di Jacobi:

$$[\mathcal{D}_\mu, F_{\rho\nu}] + [\mathcal{D}_\rho, F_{\nu\mu}] + [\mathcal{D}_\nu, F_{\mu\rho}] = 0 \quad (3.4.74)$$

possiamo dimostrare che vale l'identità di Bianchi:

$$\mathcal{D}_\mu F_{\rho\nu} + \mathcal{D}_\rho F_{\nu\mu} + \mathcal{D}_\nu F_{\mu\rho} = 0 \quad (3.4.75)$$

che possiamo generalizzare come:

$$\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \mathcal{D}_\mu F_{\rho\sigma} = 0. \quad (3.4.76)$$

Visto che la derivata covariante è in rappresentazione aggiunta, dunque trasforma come (3.4.71), e siccome per definizione abbiamo:

$$F_{\mu\nu} = -i[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \quad (3.4.77)$$

ne ricaviamo:

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow U F_{\mu\nu} U^\dagger \quad (3.4.78)$$

cioè che F non è invariante, ma trasforma in maniera covariante come una matrice $n \times n$ (rappresentazione aggiunta).

Sappiamo che per avere una lagrangiana che descriva la dinamica del campo A_μ dobbiamo metterci dentro $F_{\mu\nu}$, ma vista la trasformazione (3.4.78) possiamo mettere all'interno di $\mathcal{L}$ solamente la traccia o il determinante di esso, poiché solo in questi due modi possiamo avere degli invarianti. Diciamo questo perché si vede che aggiungendo la traccia imponiamo l'invarianza di Gauge, visto che:

$$\text{Tr}\{U F U^\dagger U F U^\dagger\} = \text{Tr}\{U F F U^\dagger\} = \text{Tr}\{F F U^\dagger U\} = \text{Tr}\{F F\} \quad (3.4.79)$$

inoltre, la traccia ci restituisce un oggetto di second'ordine nelle derivate (anche il determinante mantiene l'invarianza di Gauge, ma non l'ordine delle derivate).

Scriviamo per questo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{2g^2} \text{Tr}\{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\}. \quad (3.4.80)$$

In cui chiamiamo **lagrangiana di Yang-Mills** il termine:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2g^2} \text{Tr}\{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\}. \quad (3.4.81)$$

Ricordiamo l'espressione di $F_{\mu\nu}$ (3.4.63) e studiamo la variazione della

lagrangiana di Yang-Mills:

$$\delta\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{g^2} \text{Tr}\{F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}\} \quad (3.4.82)$$

$$= -\frac{1}{g^2} \text{Tr}\left\{F_{\mu\nu} \left[\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu + i \left(\delta A^\mu A^\nu - \delta A^\nu A^\mu + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + A^\mu \delta A^\nu - A^\nu \delta A^\mu \right) \right] \right\} \quad (3.4.83)$$

$$= -\frac{2}{g^2} \text{Tr}\left\{F_{\mu\nu} \left[\partial^\mu \delta A^\nu - i \delta A^\nu A^\mu + i A^\mu \delta A^\nu \right] \right\} \quad (3.4.84)$$

integriamo per parti il primo termine ed utilizziamo la ciclicità della traccia sul secondo

$$= -\frac{2}{g^2} \text{Tr}\left\{ \left(-\partial^\mu F_{\mu\nu} - i A^\mu F_{\mu\nu} + i F_{\mu\nu} A^\mu \right) \delta A^\nu \right\} \quad (3.4.85)$$

pertanto l'equazione del moto è:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - i [F^{\mu\nu}, A_\mu] = 0 \quad (3.4.86)$$

che possiamo riscrivere utilizzando la derivata covariante in rappresentazione aggiunta come:

$$\mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (3.4.87)$$

Ritorniamo alla nostra teoria accoppiata. Abbiamo scritto in (3.4.80) la costante g a denominatore perché possiamo riassorbire la costante g nella definizione del campo. In realtà questa cosa è semplice da fare nella teoria di Maxwell, dove $f^{abc} = 0$, e in cui la costante g è irrilevante perché può essere riassorbita ridefinendo il campo come:

$$A_\mu \longrightarrow g A_\mu. \quad (3.4.88)$$

Infatti in Maxwell (teoria abeliana), poiché il tensore degli sforzi era omogeneo nei campi A_μ , e quindi ridefinendoli lo fattorizzavamo, per togliere il $1/g$ potevamo semplicemente mandare $F \rightarrow gF$. Nella teoria di Maxwell la parte di gauge dava un contributo alla lagrangiana pari a:

$$(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \quad (3.4.89)$$

ossia una parte quadratica in A_μ , il che vuol dire nessuna interazione, neppure con se stesso.

Tutto questo non accade più per teorie non abeliane. Ridefinendo (3.4.88) si ottiene:

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow g \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu] \right) \quad (3.4.90)$$

e quindi vediamo che si cancella la g a denominatore della lagrangiana, ma ci rimane all'interno della definizione di $F_{\mu\nu}$ davanti al commutatore. Dunque,

nella lagrangiana abbiamo il contributo di Yang-Mills:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \right) \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - ig[A^\mu, A^\nu] \right) \quad (3.4.91)$$

$$\begin{aligned} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \\ &\quad - 2ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)[A^\mu, A^\nu] - \\ &\quad - g^2[A_\mu, A_\nu][A^\mu, A^\nu] \end{aligned} \quad (3.4.92)$$

dunque il termine di gauge nella lagrangiana non contiene più solo termini quadratici nei campi, ma anche termini di ordine cubici e di ordine 4. Questo ci dice che il campo di gauge A_μ , associato ad una simmetria non abeliana, non solo interagisce con i campi di materia tramite la costante di accoppiamento g , ma interagisce anche con se stesso, e il peso di tali interazioni sono date sempre da g .

Questo tipo di teorie sono quelle che chiamiamo **teorie di Yang-Mills**, saranno alla base del modello standard, e g , detta **costante di accoppiamento di Yang-Mills**, rappresenta l'intensità con un cui avviene l'interazione. Noi in realtà sappiamo già che possiamo avere dei vertici nei diagrammi di Feynman, in cui ci sono 3 o 4 gluoni e tali termini escono fuori considerando il gruppo $SU(3)$ e guardando i termini di ordine 3 e 4 della lagrangiana.

Ovviamente ridefinendo (3.4.88) ritroviamo la definizione della derivata covariante:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - igA_\mu. \quad (3.4.93)$$

Notiamo anche che il termine di gauge di $\mathcal{L}$ lo possiamo riscrivere come:

$$-\frac{1}{2} \text{Tr}\{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} \text{Tr}\{T^a T^b\} \quad (3.4.94)$$

$$= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (3.4.95)$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \quad (3.4.96)$$

con la normalizzazione per i generatori del gruppo (3.4.15).

Capitolo 4

Funzioni di partizione

In questo capitolo vedremo la formulazione della QFT tramite gli integrali di cammino e delle funzioni di partizione, sarà utile pertanto rivedere le note del corso di *Meccanica Quantistica 2*.

Faremo subito un ripasso riguardante gli integrali gaussiani, sia con le coordinate usuali sia con un nuovo tipo non commutante; successivamente introdurremo gli integrali di cammino in Meccanica Quantistica per poi finalmente fare QFT.

Così come successo con gli altri capitoli di queste note, la sezione per il campo scalare sarà decisamente più lunga e dettagliata su molti concetti, mentre per le altre andremo direttamente sull'applicazione di quello già definito e visto.

4.1 Integrali gaussiani

Vediamo in questa sezione tutto ciò che riguarda gli integrali gaussiani, sia per variabili commutanti che non.

4.1.1 Funzione generatrice

Riprendiamo, con le variabili ordinarie commutanti, l'integrale gaussiano:

$$M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-Ax^2} x^n \quad (4.1.1)$$

e cerchiamo chi è la sua funzione generatrice. Ricordiamoci che la *funzione generatrice* di qualche cosa, in termini generali, è una funzione dipendente da un qualche parametro, i cui elementi dello sviluppo di Fourier ci forniscono i vari risultati di quel qualcosa che ci interessa. Nel nostro caso, i vari pezzi dello sviluppo di Fourier ci forniranno l'integrale n -esimo. Dunque,

se riusciamo a trovare la funzione generatrice, allora calcoliamo tutti gli integrali. Scriviamo:

$$I(t) = \int_0^{+\infty} dx e^{-Ax^2+xt} \quad (4.1.2)$$

e possiamo vedere che la sua derivata n -esima:

$$\frac{d^n I}{dt^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-Ax^2} e^{xt} x^n \quad (4.1.3)$$

se la valutiamo in $t = 0$ ci fornisce proprio l'integrale gaussiano (4.1.1) che ci interessa. Il termine xt ad esponente che inseriamo è un termine forzante, di *sorgente*. Utilizzeremo molto il concetto di termine forzante durante tutto il corso del capitolo, proprio perché sarà il parametro rispetto cui deriveremo e che porremo a zero per determinare i momenti della gaussiana. Dunque possiamo scrivere:

$$M_n = \left. \frac{d^n I}{dt^n} \right|_{t=0}. \quad (4.1.4)$$

Dunque abbiamo trovato la nostra funzione generatrice, per cui:

$$I(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{n!} t^n. \quad (4.1.5)$$

Possiamo completare il quadrato all'interno di $I(t)$:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \left\{ -A \left(x - \frac{t}{2A} \right)^2 + \frac{t^2}{4A} \right\} \quad (4.1.6)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{t^2/4A} \quad (4.1.7)$$

e quindi se ad esempio volessimo M_4 dobbiamo calcolare:

$$M_4 = \left. \frac{d^4}{dt^4} I(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d^4}{dt^4} \left(\sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{t^2/4A} \right) \right|_{t=0}. \quad (4.1.8)$$

Siamo contenti perché possiamo calcolare in modo generico:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{-Ax^2} \quad (4.1.9)$$

poiché scrivendo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (4.1.10)$$

vediamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-Ax^2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left. \frac{d^n}{dt^n} I(t) \right|_{t=0} \quad (4.1.11)$$

lì dentro individuiamo la funzione dell'operatore derivata, che è un'operatore complicato a piacere, e che è definito dal suo sviluppo:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n. \quad (4.1.12)$$

Dunque abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{-Ax^2} = f\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-Ax^2+xt} \Big|_{t=0}. \quad (4.1.13)$$

4.1.2 Integrale gaussiano (matrici)

Studiamo:

$$G(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_n \exp\{-X^T A X\} \quad (4.1.14)$$

ipotizziamo di poter diagonalizzare la matrice:

$$A = R^T D R \quad (4.1.15)$$

sostituiamo $Y = RX$, supponendo per semplicità che abbia determinante/Jacobiano pari a 1, dunque:

$$G(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \dots dy_n \exp\{-Y^T D Y\} \quad (4.1.16)$$

questi integrali sono tutti indipendenti perché la matrice D è diagonale, dunque abbiamo:

$$G(A) = \sqrt{\frac{\pi^n}{\lambda_1 \dots \lambda_n}} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}. \quad (4.1.17)$$

Consideriamo ora il caso in cui D ha degli autovalori nulli, dunque G non è ben definito. Ci sarà utile per il futuro. Ricordando che per il campo vettoriale non riuscivamo a trovare il propagatore a causa di un autovalori nulli, si può già intuire quando utilizzeremo ciò che segue. Introduciamo un integrale che agisce solo sugli autovettori con autovalore non nullo, le delta di Dirac servono a togliere quelli patologici:

$$G'(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \dots dy_{n-m} \exp\{-Y^T D Y\} \quad (4.1.18)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \dots dy_n \delta(y_{n-m+1}) \dots \delta(y_n) \exp\{-Y^T D Y\} \quad (4.1.19)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_n \delta(y_{n-m+1}) \dots \delta(y_n) \exp\{-X^T A X\} \det \left[\frac{\partial Y}{\partial X} \right] \quad (4.1.20)$$

qui stiamo considerando il caso generico in cui il determinante/Jacobiano non è 1, quindi stiamo cambiando la misura di integrazione.

4.1.3 Variabili anti-commutanti

Le variabili commutanti, quelle che siamo abituati ad usare, sono tali che $[x, y] = 0$ e sono dei c-numeri, indicati con le lettere latine. Però esistono anche delle variabili anti-commutanti $\{\theta, \eta\} = 0$, sono dette *variabili di Grassmann*, o *c-numeri*, e sono indicate con le lettere greche. Da notare che un anti-commutante per un anti-commutante è un commutante, mentre un commutante per un anti-commutante è un anti-commutante.

Per definizione un g-numero (una variabile anti-commutante) è tale per cui:

$$\theta / \{\theta, \theta\} = 0 \implies \theta^2 = 0 \quad (4.1.21)$$

per questo quando definiamo una funzione di tale variabile e la espandiamo in serie di Taylor, allora abbiamo:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \theta^n = f_0 + f_1 \theta^1 \quad (4.1.22)$$

poiché i termini successivi sono tutti nulli.

Chiaramente possiamo definire le derivate rispetto tali variabili, e si ha che:

$$\frac{\partial c}{\partial \theta} = 0 \quad (4.1.23)$$

ossia, la derivata di una costante è nulla, ma anche:

$$\frac{d}{d\theta} \theta = 1. \quad (4.1.24)$$

Nota che per definizione vale $\{\partial_\theta, \partial_\theta\} = 0$, quindi il fatto che le funzioni delle variabili di Grassmann abbiano al massimo un'ordine nel loro sviluppo di Taylor lo potevamo vedere anche da qua; dunque:

$$\phi(\theta) = \alpha + b\theta \quad \text{con} \quad \{\phi, \phi\} = 0 \implies \{\alpha, \alpha\} = 0, \quad [b, b] = 0. \quad (4.1.25)$$

$$f(\theta) = a + \beta\theta \quad \text{con} \quad \{f, f\} = 0 \implies \{a, a\} = 0, \quad [\beta, \beta] = 0. \quad (4.1.26)$$

Però attenzione perché qua stiamo dando per scontato che f sia una mappa che va da g-numeri in g-numeri, e di conseguenza a è un g-numero e b un c-numero; però nel caso in cui f sia una mappa che va da g-numeri in c-numeri, avremmo a c-numero e b g-numero. Ad ogni modo vediamo:

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(a + \beta\theta) = \frac{d}{d\theta}(\beta\theta) = -\beta \frac{d\theta}{d\theta} = -\beta \quad (4.1.27)$$

poiché la derivata deve stare vicino alla variabile per agire, quindi dobbiamo far anti-commutare β e θ .

Come per tutto il resto in analisi, possiamo definire anche gli integrali rispetto variabili anticommutanti. Per gli integrali, oltre le proprietà:

$$\int d\theta (af(\theta) + bg(\theta)) = a \int d\theta f(\theta) + b \int d\theta g(\theta) \quad (4.1.28)$$

$$\int d\theta \frac{df}{d\theta} = 0 \quad (4.1.29)$$

richiediamo che ci sia invarianza per traslazioni di un g-numero:

$$\int d\theta f(\theta + a) = \int d\theta f(\theta) \quad (4.1.30)$$

questo perché tutti questi integrali sono da considerarsi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}. \quad (4.1.31)$$

Da queste definizioni segue:

$$\int d\theta (f_0 + f_1\theta) = \int d\theta (f_0 + f_1(\theta + \eta)) \quad (4.1.32)$$

$$f_0 \int d\theta + f_1 \int d\theta \theta = \int d\theta [(f_0 + f_1\eta) + f_1\theta] \quad (4.1.33)$$

$$= (f_0 + f_1\eta) \int d\theta + f_1 \int d\theta \theta \quad (4.1.34)$$

dunque questo implica:

$$\int d\theta (1) = 0 \quad (4.1.35)$$

$$\int d\theta (\theta) = 1 \quad (4.1.36)$$

$$\int d\theta [f(\theta)] = -\beta. \quad (4.1.37)$$

Vediamo quindi che per le variabili di Grassmann l'integrale e la derivata non sono più due operazioni inverse, ma sono la stessa cosa.

Se prendiamo funzioni a più variabili:

$$f(\theta_1, \theta_2) \quad , \quad \{\theta_i, \theta_j\} = 0 \quad (4.1.38)$$

abbiamo:

$$f(\theta_1, \theta_2) = f_0 + f_1\theta_1 + f_2\theta_2 + f_3\theta_1\theta_2 \quad (4.1.39)$$

inoltre possiamo notare che:

$$\partial_1 f(\theta_1, \theta_2) = -f_1 + f_3\theta_2 \quad (4.1.40)$$

e conseguentemente:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} f = f_3 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \theta_2^2} \quad (4.1.41)$$

$$= f_3 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(-\theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \theta_2 \right) \quad (4.1.42)$$

$$= -f_3 \frac{\partial}{\partial \theta_1} (\theta_1) \quad (4.1.43)$$

$$= -f_3. \quad (4.1.44)$$

Per gli integrali abbiamo:

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 = -1. \quad (4.1.45)$$

Infatti possiamo anche vedere:

$$\int d\theta_1 d\theta_2 f(\theta_1, \theta_2) = f_3 \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 = -f_3. \quad (4.1.46)$$

Generalizzando ad n variabili abbiamo:

$$f(\theta_1, \dots, \theta_n) = a + \sum \beta_i \theta_i + \sum c_{ij} \theta_i \theta_j + \dots \quad (4.1.47)$$

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_n \theta_n \dots \theta_1 = 1 \quad (4.1.48)$$

e abbiamo capito che per derivate e integrali dobbiamo fare attenzione al segno dovuto al numero di permutazioni per portare $d\theta_i$ vicino alla corrispondente variabile θ_i .

4.1.4 Integrale di Berezyn

Studiando l'integrale gaussiano, per i c-numeri abbiamo visto (4.1.17):

$$\int dx_1 \dots dx_n \exp\{-X^T A X\} = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\sqrt{\det A}} = \sqrt{\det(\pi A^{-1})} \quad (4.1.49)$$

dove A è una matrice simmetrica e quindi invertibile. Per le variabili di Grassmann abbiamo che:

$$\theta^T M \theta = (\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (4.1.50)$$

$$= (\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} m_{11}\theta_1 & m_{12}\theta_2 \\ m_{21}\theta_1 & m_{22}\theta_2 \end{pmatrix} \quad (4.1.51)$$

$$= m_{12}\theta_1\theta_2 + m_{21}\theta_2\theta_1 \quad (4.1.52)$$

$$= (m_{12} - m_{21}) \theta_1 \theta_2 \quad (4.1.53)$$

che ci permette di vedere che le uniche matrici M che contribuiscono, all'integrale gaussiano per variabili non commutanti, sono quelle anti-simmetriche. Se scegliamo una matrice anti-simmetrica otteniamo:

$$\theta^T M \theta = 2 m_{12} \theta_1 \theta_2. \quad (4.1.54)$$

L'integrale di Berezyn è l'equivalente dell'integrale gaussiano:

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \exp\{-\theta^T M \theta\} = \int d\theta_1 d\theta_2 (1 - \theta^T M \theta) \quad (4.1.55)$$

$$= -2 m_{12} \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 \quad (4.1.56)$$

$$= 2 m_{12} \quad (4.1.57)$$

$$= 2 \sqrt{\det M} \quad (4.1.58)$$

generalizziamo ad n variabili come:

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_n \exp\{-\theta^T M \theta\} = \sqrt{2^n \det M} = \sqrt{\det(2M)}. \quad (4.1.59)$$

Prendendo lo sviluppo dell'esponenziale che compare dentro l'integrale n dimensionale vediamo:

$$1 - \theta^T M \theta + \dots + (\theta^T M \theta)^{n/2}$$

in cui contribuisce all'integrale solamente l'ultimo termine, poiché è l'unico che contiene tutte le variabili. Infatti, il numero 1 integrato fa 0 per definizione, il primo ordine $\theta^T M \theta$ è nullo poiché è una forma quadratica e contiene (simultaneamente) solo 2 delle variabili su cui integriamo, e così via fino al termine $(\theta^T M \theta)^{n/2}$ in cui compaiono tutte le θ .

Teniamo a mente che $\det\{M\}$ è un polinomio di grado n nei m_{ij} elementi di matrice, e di conseguenza $\sqrt{\det\{M\}}$ è un polinomio di grado $n/2$ negli elementi di matrice.

Inoltre siccome M dev'essere anti-simmetrica abbiamo che $M^T = -M$ e possiamo scrivere M come una matrice diagonale a blocchi:

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 0 & \lambda_n \\ & & & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.60)$$

Consideriamo il caso in cui aggiungiamo il termine di sorgente η , che è a sua volta una variabile di Grassmann, e calcoliamo:

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_n \exp\{-\theta^T M \theta + \eta^T \theta\} \quad (4.1.61)$$

possiamo sviluppare l'esponenziale:

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \left(1 - \theta^T M \theta + \eta^T \theta + \frac{1}{2} (\eta^T \theta)^2 \right) \quad (4.1.62)$$

in cui abbiamo tenuto solamente i termini lineari nelle variabili, poiché ad esempio $\theta^T M \theta$ è già quadratico nei campi θ_1 e θ_2 , per cui se ne guardiamo il secondo ordine questo diventa quadratico nelle variabili ed è nullo. Notiamo anche che il quadrato che abbiamo nell'esponenziale ci dà:

$$(\eta^T \theta)^2 = (\eta_1 \theta_1 + \eta_2 \theta_2)^2 = \eta_1 \theta_1 \eta_2 \theta_2 + \eta_2 \theta_2 \eta_1 \theta_1 \quad (4.1.63)$$

$$= -2\eta_1 \eta_2 \theta_1 \theta_2. \quad (4.1.64)$$

Applicando le regole che abbiamo visto otteniamo:

$$= \int d\theta_1 d\theta_2 \left\{ -2m_{12} \theta_1 \theta_2 + \eta^T \theta - \eta_1 \eta_2 \theta_1 \theta_2 \right\} \quad (4.1.65)$$

$$= \int d\theta_1 d\theta_2 (-1) (2m_{12} + \eta_1 \eta_2) \theta_1 \theta_2 \quad (4.1.66)$$

$$= 2m_{12} + \eta_1 \eta_2 \quad (4.1.67)$$

$$= 2m_{12} \left(1 + \frac{1}{2m_{12}} \eta_1 \eta_2 \right) \quad (4.1.68)$$

$$= 2\sqrt{\det\{M\}} \left(1 + \frac{1}{4} \eta^T M^{-1} \eta \right) \quad (4.1.69)$$

$$= 2\sqrt{\det\{M\}} \exp \left\{ \frac{1}{4} \eta^T M^{-1} \eta \right\} \quad (4.1.70)$$

e troviamo¹ che, come per gli integrali gaussiani nelle variabili ordinarie, ci rimane l'esponenziale quadratico nella sorgente che coinvolge la matrice inversa.

Finora abbiamo considerato variabili di Grassman reali, consideriamo ora delle variabili di Grassman complesse:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta_1 + i\theta_2) \quad , \quad \zeta^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta_1 - i\theta_2) \quad (4.1.73)$$

¹Nota che si sarebbe anche potuto fare completando il quadrato:

$$\begin{aligned} \theta^T M \theta - \frac{1}{2} \eta^T \theta + \frac{1}{2} \theta^T \eta &= \\ &= \left(\theta - \frac{1}{2} M^{-1} \eta \right)^T M \left(\theta - \frac{1}{2} M^{-1} \eta \right) - \frac{1}{4} \eta^T M^{-1} \eta \end{aligned} \quad (4.1.71)$$

così:

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_n \exp \left\{ -\theta^T M \theta + \eta^T \theta \right\} = \sqrt{\det(2M)} \exp \left\{ \frac{1}{4} \eta^T M^{-1} \eta \right\}. \quad (4.1.72)$$

per cui abbiamo:

$$d\zeta^* d\zeta = \frac{1}{2} (d\theta_1 - id\theta_2) (d\theta_1 + id\theta_2) \quad (4.1.74)$$

$$= \frac{1}{2} (id\theta_1 d\theta_2 - id\theta_2 d\theta_1) \quad (4.1.75)$$

$$= i d\theta_1 d\theta_2 \quad (4.1.76)$$

insieme a:

$$\theta^T M \theta = 2m_{12} \theta_1 \theta_2 \quad (4.1.77)$$

$$= 2m_{12} \frac{1}{2i} (\zeta + \zeta^*) (\zeta - \zeta^*) \quad (4.1.78)$$

$$= \frac{m_{12}}{i} (-\zeta \zeta^* + \zeta^* \zeta) \quad (4.1.79)$$

$$= 2im_{12} \zeta \zeta^* \quad (4.1.80)$$

$$= -i (\zeta^*)^T M \zeta. \quad (4.1.81)$$

Quindi abbiamo:

$$\int d\zeta^* d\zeta \exp\{i(\zeta^*)^T M \zeta\} = i \int d\theta_1 d\theta_2 \exp\{-\theta^T M \theta\} \quad (4.1.82)$$

$$= i 2 \sqrt{\det M} \quad (4.1.83)$$

$$= i \sqrt{\det(2M)}. \quad (4.1.84)$$

Con n coppie di variabili complesse abbiamo:

$$\int d\zeta_1^* d\zeta_1 \dots d\zeta_n^* d\zeta_n \exp\{i(\zeta^*)^T N \zeta\} = 2^n \det\{N\} \quad (4.1.85)$$

dove la matrice N è diagonale (accoppia ciascuna η ad η^*) e chiaramente $n \times n$.
 Da controllare questi ultimi integrali sul Ramond As far as quantum field theory is concerned, a human being or the center of a star isn't all that different from empty space.Ramond.

4.2 I path integral in Meccanica Quantistica

Introduciamo gli integrali funzionali nell'ambito della Meccanica Quantistica non relativistica, per una particella che si muove in 1 dimensione.

L'hamiltoniana di una particella è:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (4.2.1)$$

e vogliamo studiare l'ampiezza di probabilità di transire dallo stato iniziale $(A) |q_A, t_A\rangle$ a quello finale $(B) |q_B, t_B\rangle$ espressa da:

$$\mathcal{A}_{AB} = \langle q_B t_B | q_A t_A \rangle \quad (4.2.2)$$

$$= \langle q_B | e^{-\frac{i}{\hbar} H (t_B - t_A)} | q_A \rangle \quad (4.2.3)$$

in cui ci possiamo porre nelle unità naturali $c = \hbar = 1$. Possiamo dividere l'intervallo temporale in $N + 1$ sotto-intervalli sfruttando la composizione dell'operatore di evoluzione temporale:

$$U(t_A, t_B) = U(t_0, t_1) \dots U(t_N, t_{N+1}) \quad (4.2.4)$$

in cui poniamo $t_A = t_0$ e $t_B = t_{N+1}$, e tra ogni prodotto di operatori di evoluzione temporale inseriamo una relazione di completezza:

$$\int dq_n |q_n\rangle \langle q_n| = \mathbb{1} \quad (4.2.5)$$

in cui $q_A = q_0$ e $q_B = q_{N+1}$. Facendo ciò possiamo riscrivere:

$$\mathcal{A}_{AB} = \langle q_B t_B | q_A t_A \rangle \quad (4.2.6)$$

$$= \langle q_B | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_B - t_A)} | q_A \rangle \quad (4.2.7)$$

$$= \int dq_1 \dots dq_N \langle q_{N+1} | e^{-iH \delta t} | q_N \rangle \dots \langle q_1 | e^{-iH \delta t} | q_0 \rangle \quad (4.2.8)$$

in cui gli intervalli sono:

$$\delta t = \frac{t_B - t_A}{N} \quad (4.2.9)$$

per tutti gli N passi. Riscriviamo l'esponenziale come:

$$e^{-iH \delta t} = \exp \left\{ -i \left(\frac{p^2}{2m} + V(q) \right) \delta t \right\} \quad (4.2.10)$$

dovremmo utilizzare la *formula di Campbell-Baker-Hausdorf*, ma nel limite di δt piccolo i termini con i commutatori sono trascurabili e possiamo scrivere (4.2.10) tranquillamente. Utilizzando (4.2.10) nell'espressione dei braket dell'ampiezza di probabilità abbiamo un problema perché sappiamo come $V(q)$ agisce su $|q\rangle$, ma non sappiamo $\hat{p}^2 |q\rangle$. Per questo dobbiamo introdurre la completezze dei $|p\rangle_n$, così abbiamo:

$$\langle q_{n+1} | e^{-iH \delta t} | q_n \rangle = \langle q_{n+1} | \exp \left\{ -i \frac{p^2}{2m} \delta t \right\} e^{-iV(q) \delta t} | q_n \rangle \quad (4.2.11)$$

$$= \int dp_n \langle q_{n+1} | \exp \left\{ -i \frac{p^2}{2m} \delta t \right\} | p_n \rangle \langle p_n | e^{-iV(q) \delta t} | q_n \rangle \quad (4.2.12)$$

$$= \int dp_n \langle q_{n+1} | p_n \rangle \exp \left\{ -i \frac{p^2}{2m} \delta t \right\} \langle p_n | q_n \rangle e^{-iV(q) \delta t} \quad (4.2.13)$$

$$= \int dp_n \exp \left\{ -i \frac{p^2}{2m} \delta t \right\} e^{-iV(q) \delta t} \langle q_{n+1} | p_n \rangle \langle p_n | q_n \rangle \quad (4.2.14)$$

a questo punto ricordiamo che:

$$\langle q|p\rangle = \frac{e^{ipq}}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.2.15)$$

e continuando i nostri conti:

$$= \int dp_n e^{-iH(q_n, p_n) \delta t} \frac{1}{2\pi} e^{ip_n (q_{n+1} - q_n)} \quad (4.2.16)$$

$$= \int \frac{dp_n}{2\pi} \exp\{i(p_n \dot{q}_n - H(q_n, p_n)) \delta t\} \quad (4.2.17)$$

in cui abbiamo utilizzato il fatto:

$$\frac{q_{n+1} - q_n}{\delta t} \longrightarrow \dot{q}_n \quad \text{per } \delta t \rightarrow 0. \quad (4.2.18)$$

Mettendo tutto insieme otteniamo:

$$\mathcal{A}_{AB} = \langle q_B t_B | q_A t_A \rangle \quad (4.2.19)$$

$$= \int \left(\prod_{i=1}^N dq_i \right) \left(\prod_{i=1}^N \frac{dp_i}{2\pi} \right) \exp \left\{ \sum \left(-i \left(\frac{p_i^2}{2m} + V(q_i) + p_i \dot{q}_i \right) \delta t \right) \right\}. \quad (4.2.20)$$

Possiamo scrivere in termini del tutto generali l'**integrale funzionale**, che otteniamo da (4.2.20), mandando $N \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{A}_{AB} = \langle q_B t_B | q_A t_A \rangle \quad (4.2.21)$$

$$= \int \mathcal{D}_q \int \mathcal{D}_p \exp \left\{ i \int_{t_A}^{t_B} dt (p\dot{q} - H(q, p)) \right\} \quad (4.2.22)$$

in cui imponiamo $q(t_A) = q_A$ e $q(t_B) = q_B$. La scrittura (4.2.22) volendo la possiamo riscrivere in modo da togliere l'integrale $\mathcal{D}_p$ e per farlo dobbiamo completare il quadrato che compare nell'esponenziale, così da ricreare un'integrale gaussiano, riscrivendo il tutto in termini della lagrangiana:

$$\int \mathcal{D}_p \exp \left\{ i \int_{t_A}^{t_B} dt \left(p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} - V(q) \right) \right\} \quad (4.2.23)$$

$$= \int \mathcal{D}_p \exp \left\{ i \int_{t_A}^{t_B} dt \left(-\frac{1}{2m} (p - m\dot{q})^2 + \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right) \right\} \quad (4.2.24)$$

$$= \text{cost} \cdot \exp \left\{ i \int_{t_A}^{t_B} dt \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right) \right\} \quad (4.2.25)$$

la costante, che è l'integrale gaussiano nelle p , la possiamo riassorbire nella definizione di $\mathcal{D}_q$ e ci rimane (rimettendo $\hbar$):

$$\mathcal{A}_{AB} = \langle q_B t_B | q_A t_A \rangle \quad (4.2.26)$$

$$= \int \mathcal{D}_q \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_A}^{t_B} dt \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right) \right\} \quad (4.2.27)$$

$$= \int \mathcal{D}_q \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_A}^{t_B} dt \mathcal{L}(q, \dot{q}) \right\} \quad (4.2.28)$$

$$= \int \mathcal{D}_q \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S \right\}. \quad (4.2.29)$$

Questa cosa ci interessava vederla perché se ora volessimo studiare il valore di aspettazione di una generica osservabile $Q(t)$, con autovalori:

$$\hat{Q}(t) |q_n\rangle = q(t_n) |q_n\rangle \quad (4.2.30)$$

allora, facendo un ragionamento analogo a quello fatto fin'ora, abbiamo che l'elemento di matrice è:

$$\langle q_B t_B | Q(t) | q_A t_A \rangle = \int \mathcal{D}_q q(t) e^{\frac{i}{\hbar} S}. \quad (4.2.31)$$

Per un prodotto temporalmente ordinato avremmo:

$$\langle q_B t_B | T[Q(t_1) \dots Q(t_n)] | q_A t_A \rangle = \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p q(t_1) \dots q(t_n) e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (4.2.32)$$

che otteniamo sviluppando il prodotto temporalmente ordinato, inserendo le identità in q , applicando l'operatore e ottenendo l'autovalore corrispondente.

Possiamo anche aggiungere all'hamiltoniana due termini di sorgente:

$$H \longrightarrow H' = H - f(t) q(t) - g(t) p(t) \quad (4.2.33)$$

per i quali abbiamo:

$$\langle q_B t_B | Q(t) | q_A t_A \rangle = \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p q(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H) \right\} \quad (4.2.34)$$

$$= \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p q(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H + gp + fq) \right\} \Big|_{g=f=0} \quad (4.2.35)$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta f} \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H + gp + fq) \right\} \Big|_{g=f=0} \quad (4.2.36)$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta f} \langle q_B t_B | q_A t_A \rangle_{f,g} \Big|_{f=g=0} \quad (4.2.37)$$

in cui possiamo definire la *derivata funzionale* in modo che:

$$\frac{\delta}{\delta f(t_1)} f(t_2) = \delta(t_1 - t_2) \quad (4.2.38)$$

in analogia con la derivata ordinaria:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu.$$

In modo analogo troviamo:

$$\int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p p(t) e^{\frac{i}{\hbar} S} = \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta g} \langle q_B t_B | q_A t_A \rangle_{f,g} \Big|_{f=g=0}. \quad (4.2.39)$$

Possiamo generalizzare i risultati (4.2.37) e (4.2.39) come:

$$\langle q_B t_B | T[Q(t_1) \dots Q(t_n) P(t_{n+1}) \dots P(t_{n+k})] | q_A t_A \rangle = \quad (4.2.40)$$

$$= \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p q(t_1) \dots q(t_n) p(t_{n+1}) \dots p(t_{n+k}) e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (4.2.41)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{i} \right)^{n+k} \frac{\delta^n}{\delta f_1 \dots \delta f_n} \frac{\delta^k}{\delta g_{n+1} \dots \delta g_{n+k}} \langle q_B t_B | q_A t_A \rangle_{f,g} \Big|_{f=g=0} \quad (4.2.42)$$

il che ci sarà molto utile, tra pochissimo, quando dovremo quantizzare le teorie di campo.

Il punto però è vedere perché ci interessano effettivamente gli integrali funzionali. Infatti, in Meccanica Quantistica non relativistica non c'era molta differenza tra l'utilizzo della formulazione hamiltoniana (Schrödinger e Heisenber) piuttosto che quella lagrangiana (Feynman e gli integrali di cammino). Ora, in Teoria Quantistica dei Campi, è tutto più complicato e ci renderemo conto in questo capitolo come gli integrali funzionali (comicamente) rendano la trattazione di alcune teorie più semplici rispetto la quantizzazione canonica.

Tutto girerà attorno una particolare relazione. Per scrivere già relazioni con quantità della QFT sostituiamo le coordinate q con i campi ϕ , e le osservabili generiche Q , con i campi $\hat{\phi}$. Risulta abbastanza rapido vedere che il prodotto T -ordinato:

$$\langle \phi_b | T \phi(x_1) \phi(x_2) | \phi_a \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) \exp \left\{ i \int dt \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) \right\} \quad (4.2.43)$$

in realtà è collegato alla funzione di Green. Possiamo vedere che nel procedimento che dovremmo seguire per dimostrare (4.2.43), i primi due passaggi

sarebbero:

$$\langle \phi(x_b) | T \phi(x_1) \phi(x_2) | \phi(x_a) \rangle = \langle \phi(\vec{x}_b) | T \left[\phi(x_1) \phi(x_2) e^{-iH(t_b-t_a)} \right] | \phi(\vec{x}_a) \rangle \quad (4.2.44)$$

ma se seguiamo esattamente il ragionamento fatto quando avevamo ricavato la formula di Gell-Mann-Low; mi riferisco alla scrittura (1.2.62), per cui possiamo scrivere:

$$e^{-iHt} |\phi\rangle = \sum_n e^{-iE_n t} |n\rangle \langle n | \phi \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle \Omega | \phi \rangle e^{-iE_0 t} |\Omega\rangle \quad (4.2.45)$$

allora risulta abbastanza chiaro che possiamo scrivere, fattorizzando tutte le costanti in $\mathcal{N}$:

$$\langle \phi(x_b) | T \phi(x_1) \phi(x_2) | \phi(x_a) \rangle = \mathcal{N} \langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) | \Omega \rangle. \quad (4.2.46)$$

Dunque, vista la relazione (4.2.43) possiamo dire che:

$$\langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) | \Omega \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) \exp \left\{ i \int dt \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) \right\} \quad (4.2.47)$$

che ci mostra la vera utilità degli integrali funzionali in Teoria Quantistica dei Campi. Infatti, ci "basta" calcolare gli integrali per determinare le funzioni di Green della teoria in esame.

4.3 Campi scalari

Per comodità ci rimettiamo nelle unità naturali, quindi con $\hbar = 1$, utilizziamo la notazione:

$$\langle A \rangle_x = \int d^4x A(x) \quad (4.3.1)$$

e ricordiamo che per una teoria scalare abbiamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \quad (4.3.2)$$

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \right) \quad (4.3.3)$$

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2) + V(\phi). \quad (4.3.4)$$

Definiamo la **funzione di partizione** come:

$$Z[J] = \langle \Omega | \Omega \rangle_J \quad (4.3.5)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \exp \left\{ i \left(\pi \dot{\phi} - \mathcal{H} + J\phi \right) \right\} \quad (4.3.6)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\phi \exp \{ i \langle \mathcal{L} + J\phi \rangle \} \quad (4.3.7)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi) \right\} \quad (4.3.8)$$

in cui abbiamo:

$$\mathcal{N} = Z_0[J = 0] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_0} \quad (4.3.9)$$

dove con S_0 indichiamo l'azione della teoria libera ($V(\phi) = 0$). Facendo così il ground state in assenza di sorgenti rimane normalizzato:

$$Z_0[0] = \langle \Omega | \Omega \rangle_{J=0} = 1. \quad (4.3.10)$$

Non abbiamo definito nulla di allucinante, anzi in realtà stiamo solamente scrivendo quello che LSZ ci diceva essere rilevante, ossia la funzione di Green, normalizzata sul vuoto:

$$\frac{\langle \Omega | T [\phi(x_1) \phi(x_2)] | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle}. \quad (4.3.11)$$

Ovviamente, ci manca il ponte tra (4.3.11) e il motivo per cui abbiamo definito (4.3.8). Infatti sappiamo che (4.3.11) è legata al path-integral (4.2.47), che ha al piano terra dei campi. La sezione iniziale riguardo le funzioni generatrici di integrali gaussiani serve proprio a costruire questo collegamento. Se ci ricordiamo la definizione della derivata funzionale (4.2.38) possiamo vedere che:

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{i\langle \mathcal{L} + J\phi \rangle} = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \exp \left\{ i \left\langle \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + J\phi \right\rangle_x \right\} \quad (4.3.12)$$

$$= \exp \left\{ i \left\langle \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + J\phi \right\rangle_x \right\} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} i \langle J(x) \phi(x) \rangle_x \quad (4.3.13)$$

$$= \exp \left\{ i \left\langle \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + J\phi \right\rangle_x \right\} i \int d^4x \frac{\delta J(x)}{\delta J(x_1)} \phi(x) \quad (4.3.14)$$

$$= i \phi(x_1) \exp \left\{ i \left\langle \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + J\phi \right\rangle_x \right\} \quad (4.3.15)$$

quindi possiamo scrivere:

$$\langle \Omega | T [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | \Omega \rangle = \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{iS} \quad (4.3.16)$$

$$= \frac{\delta^n}{(i\delta J(x_1)) \dots (i\delta J(x_n))} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \left\langle \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + J\phi \right\rangle_x \right\} \Bigg|_{J=0} \quad (4.3.17)$$

$$= \frac{\delta^n}{(i\delta J(x_1)) \dots (i\delta J(x_n))} Z[J] \Bigg|_{J=0} \quad (4.3.18)$$

dunque, colleghiamo il termine della formula di LSZ, con una derivata della funzione di partizione (4.3.8), che per questo possiamo dire essere la *funzione generatrice delle funzioni di Green della teoria*.

Il problema è che l'integrale (4.3.8) è altamente oscillante e per garantirne la convergenza possiamo procedere in due modi:

- Operare con la sostituzione:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + i \frac{\epsilon}{2} \phi^2 \quad (4.3.19)$$

il che è equivalente a complessificare la massa:

$$m^2 \longrightarrow m^2 - i\epsilon. \quad (4.3.20)$$

- Passiamo nella metrica euclidea, facendo una *rotazione di Wick*:

$$x_0 = -i\bar{x}_0 \implies d^4x \longrightarrow -i d^4\bar{x} \quad (4.3.21)$$

e così otterremmo:

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4\bar{x} \left((\bar{\partial}\phi)^2 + m^2 \phi^2 - 2V(\phi) \right) \right\} \quad (4.3.22)$$

che converge.

La scelta che noi faremo sarà quella di complessificare la massa, ma puoi vedere nelle note di E. Chiarotto anche il calcolo con la rotazione di Wick.

4.3.1 Funzione di partizione di una teoria scalare libera

Vediamo ora i conti espliciti per determinare la funzione di partizione (4.3.8) per una teoria scalare libera visto che dalla relazione (4.3.18) capiamo che se riusciamo a calcolarla, ovvero darne una rappresentazione esplicita, allora siamo in grado di determinare tutte le funzioni di Green che ci pare. Per la teoria interagente sarà leggermente più lunga la trattazione poiché all'interno della definizione (4.3.8) avremo $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$, che ci complicherà leggermente i conti.

Consideriamo il caso libero con $V = 0$ e partiamo da:

$$Z_0[J] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - (m^2 - i\epsilon) \phi^2 + 2J\phi \right] \right\} \quad (4.3.23)$$

dove ci ricordiamo che la normalizzazione la facciamo con:

$$\mathcal{N} = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_0}. \quad (4.3.24)$$

Il modo più semplice per calcolare Z è quello di passare nello spazio delle fasi facendo una trasformata di Fourier:

$$\tilde{F}(p) = \int d^4x F(x) e^{ipx} \quad (4.3.25)$$

$$F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{F}(p) e^{-ipx}. \quad (4.3.26)$$

Possiamo risolvere l'integrale come fatto per integrali gaussiani generici, poiché possiamo passare nello spazio di Fourier, completare il quadrato, così da avere un integrale quadratico nei campi e un altro dipendente solamente dalla sorgente. Abbiamo nell'esponenziale:

$$I = \frac{i}{2} \int d^4x \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - (m^2 - i\epsilon) \phi^2 + 2J\phi \right] \quad (4.3.27)$$

facciamo la sostituzione $i\partial_\mu \rightarrow p_\mu$

$$= \frac{i}{2} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \left[- (p^\mu p'_\mu + m^2 - i\epsilon) \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(p') + \tilde{J}(p) \tilde{\phi}(p') + \tilde{J}(p') \tilde{\phi}(p) \right] e^{-i(p+p')x} \quad (4.3.28)$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \left[- (p^\mu p'_\mu + m^2 - i\epsilon) \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(p') + \tilde{J}(p) \tilde{\phi}(p') + \tilde{J}(p') \tilde{\phi}(p) \right] (2\pi)^4 \delta^4(p+p') \quad (4.3.29)$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[(p^2 - m^2 + i\epsilon) \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(-p) + \tilde{J}(p) \tilde{\phi}(-p) + \tilde{J}(-p) \tilde{\phi}(p) \right] \quad (4.3.30)$$

possiamo porre per brevità $\phi(\pm p) = \phi_\pm$, ma anche:

$$K = p^2 - m^2 + i\epsilon \quad (4.3.31)$$

che se vogliamo gioca lo stesso ruolo della A in (4.1.1), e cambiamo variabile:

$$\tilde{\phi}(p) \longrightarrow \tilde{\phi}(p) - K^{-1} \tilde{J}(p) \quad (4.3.32)$$

che è una traslazione del campo, dunque lo Jacobiano è 1, e non ci disturba l'integrale in alcun modo. Continuando i conti possiamo riscrivere in modo

più comodo l'integrando:

$$I = \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[K \left(\tilde{\phi}_+ - K^{-1} \tilde{J}_+ \right) \left(\tilde{\phi}_- - K^{-1} \tilde{J}_- \right) + \right. \\ \left. + \tilde{J}_+ \left(\tilde{\phi}_- - K^{-1} \tilde{J}_- \right) + \tilde{J}_- \left(\tilde{\phi}_+ - K^{-1} \tilde{J}_+ \right) \right] \quad (4.3.33)$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[K \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(-p) - K^{-1} \tilde{J}(p) \tilde{J}(-p) \right] \quad (4.3.34)$$

Torniamo nello spazio delle coordinate

$$= \frac{i}{2} \int d^4 x \int d^4 y \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \left[\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(y) - (m^2 - i\varepsilon) \phi(x) \phi(y) \right] - \\ - \frac{i}{2} \int d^4 x \int d^4 y \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} J(x) J(y) \quad (4.3.35)$$

$$= \frac{i}{2} \int d^4 x \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - (m^2 - i\varepsilon) \phi^2 \right] - \\ - \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} J(x) J(y) \quad (4.3.36)$$

$$= iS_0 - \frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) J(y) \Delta(x-y) \quad (4.3.37)$$

$$= iS_0 - \frac{1}{2} \langle J(x) \Delta(x-y) J(y) \rangle_{xy} \quad (4.3.38)$$

in cui abbiamo riconosciuto il propagatore (1.1.34). L'espressione per la funzione di partizione è dunque:

$$Z_0[J] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ iS_0 - \frac{1}{2} \langle J(x) \Delta(x-y) J(y) \rangle_{xy} \right\} \quad (4.3.39)$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J(x) \Delta(x-y) J(y) \rangle_{xy} \right\} \quad (4.3.40)$$

in cui osserviamo che l'integrale funzionale agisce solo sul primo termine, dato che il secondo termine è indipendente dal campo ϕ , e usando (4.3.9) lo scriviamo come una costante moltiplicativa essendo un integrale gaussiano risolvibile (come abbiamo visto nella prima sezione del capitolo).

4.3.2 Energia libera e funzioni di Green connesse

In questa sezione continuiamo a parlare di teoria libera, ma le stesse definizioni varranno anche in una interagente, con le dovute complicazioni.

Introduciamo l'energia libera di Helmholtz W e scriviamo Z utilizzando la funzione di Green G , che ci possiamo ricordare essere:

$$G^{(n)} = \langle 0 | T[\phi_1 \dots \phi_n] | 0 \rangle. \quad (4.3.41)$$

Noi abbiamo la definizione:

$$Z_0[J] = \frac{\int \mathcal{D}_\phi e^{iS_0 + i\langle J\phi \rangle}}{\int \mathcal{D}_\phi e^{iS_0}} \quad (4.3.42)$$

e abbiamo già intuito che è legata alle funzioni di Green da una relazione del tipo (4.3.18), e per questo è la funzione generatrice delle funzioni di Green ad n gambe della teoria. Noi scriviamo:

$$Z_0[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \langle J_1 \dots J_n G^{(n)}(1, \dots, n) \rangle_{1, \dots, n} \quad (4.3.43)$$

che invertita ci dà proprio:

$$G^{(n)} = \frac{\delta^n}{(i\delta J_1) \dots (i\delta J_n)} Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (4.3.44)$$

Se applichiamo (4.3.44) otteniamo:

$$G^{(n)} = \langle 0 | T[\phi_1 \dots \phi_n] | 0 \rangle = \sum_{\sigma} \prod_{ij} \Delta(x_i - x_j) \quad (4.3.45)$$

in cui σ sono tutte le combinazioni possibili, e questo risultato *include* il teorema di Wick, ma restituisce anche le bolle di vuoto, come vedremo nella sezione §4.3.3.

Un'altra quantità comoda da utilizzare, poiché ci fornisce solo determinate funzioni di Green, è l'*energia libera*, che definiamo come:

$$Z_0[J] = e^{iW_0[J]} \quad (4.3.46)$$

che possiamo anche scrivere in serie di potenze come:

$$W_0[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(i)^N}{N!} \langle J_1 \dots J_N G_c^{(N)}(1, \dots, N) \rangle_{1, \dots, N} \quad (4.3.47)$$

in cui G_c sono le funzioni di Green *connesse*. Infatti vedremo che W_0 è la funzione generatrice delle sole funzioni di Green connesse, mentre $Z_0[j]$ contiene anche quelle non connesse (vedi l'esempio in §4.3.3). Ricaviamo le funzioni di Green connesse:

$$iG_c^{(n)} = (-1)^n \frac{\delta^n}{\delta J_1 \dots \delta J_n} W_0[J] \Big|_{J=0} \quad (4.3.48)$$

ovvero restituisce lo stesso risultato della formula di Gell-Mann-Low (ed include il teorema di Wick).

Per la teoria libera il risultato esatto è:

$$W_0[J] = \frac{i}{2} \langle J_x \Delta_F(x-y) J_y \rangle_{x,y} \quad (4.3.49)$$

che descrive solo la propagazione da $x_1 \rightarrow x_2$. Nella teoria libera è facile vedere che $W_0[J]$ contiene solo le funzioni di Green connesse, poiché l'unica possibile è il propagatore tra due punti marcati, ma vedremo (senza dimostrarlo esplicitamente) che ciò continuerà a valere anche in una teoria interagente.

4.3.3 Valore della funzione di correlazione a 2 e 4 gambe

Analizziamo meglio la funzione di correlazione ad n gambe:

$$G^{(n)} = \langle 0 | T[\phi_1 \dots \phi_n] | 0 \rangle \quad (4.3.50)$$

$$= \frac{\delta^n}{(i\delta J_1) \dots (i\delta J_n)} Z_0[J] \Big|_{J=0} \quad (4.3.51)$$

$$= \frac{\delta^n}{(i\delta J_1) \dots (i\delta J_n)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x \Delta(x-y) J_y \rangle_{x,y} \right\} \Big|_{J=0} \quad (4.3.52)$$

in particolare quella a 2 gambe:

$$G^{(2)} = \langle 0 | T[\phi_1 \phi_2] | 0 \rangle \quad (4.3.53)$$

$$= \frac{\delta^2}{(i\delta J_1)(i\delta J_2)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y} \right\} \Big|_{J=0} \quad (4.3.54)$$

$$= -\frac{\delta}{\delta J_1} \left[-\langle J_x \Delta(x-x_2) \rangle_x \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y} \right\} \right]_{J=0} \quad (4.3.55)$$

$$= \left[\Delta(x_1 - x_2) \cdot e^{-\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y}} - \langle J_x \Delta(x-x_2) \rangle_x \langle J_y \Delta(x_1 - y) \rangle_y \cdot e^{-\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y}} \right]_{J=0} \quad (4.3.56)$$

$$= \Delta(x_1 - x_2) \quad (4.3.57)$$

in cui notiamo che utilizzando la regola di Leibnitz, quando deriviamo rispetto $J(x_1)$, otteniamo 2 termini, ma di cui uno privo di informazione quando poniamo la sorgente uguale a zero. Questa cosa succederà molte volte a causa della presenza dell'esponenziale.

Possiamo anche vedere la funzione a 4 gambe:

$$G^{(4)} = \langle 0 | T[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4] | 0 \rangle \quad (4.3.58)$$

$$= \frac{\delta^4}{(i\delta J_1) \dots (i\delta J_4)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y} \right\} \Big|_{J=0} \quad (4.3.59)$$

$$= \frac{\delta^3}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3} \left[-\langle J_x \Delta(x-x_4) \rangle_x \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y} \right\} \right]_{J=0} \quad (4.3.60)$$

$$= \frac{\delta^2}{\delta J_1 \delta J_2} \left[\left(-\Delta_{34} + \langle J_x \Delta(x-x_4) \rangle_x \langle J_y \Delta(y-x_3) \rangle_y \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y} \right\} \right]_{J=0} \quad (4.3.61)$$

$$= \frac{\delta}{\delta J_1} \left[\left(\Delta_{34} \langle J_x \Delta(x-x_2) \rangle_x + \Delta(x_2-x_4) \langle J_x \Delta(x-x_3) \rangle_x + \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta(x_2-x_3) \langle J_x \Delta(x-x_4) \rangle_x - \prod_{i=2}^4 \langle J_x \Delta(x-x_i) \rangle_x \right) Z_0[J] \right]_{J=0} \quad (4.3.62)$$

$$= \Delta(x_1-x_2) \Delta(x_3-x_4) + \Delta(x_1-x_3) \Delta(x_2-x_4) + \\ + \Delta(x_1-x_4) \Delta(x_2-x_3) \quad (4.3.63)$$

in cui riconosciamo lo stesso risultato che ci forniva il teorema di Wick nel caso della teoria $\lambda\phi^4$ (1.3.20).

Dunque, possiamo dire che la quantizzazione tramite gli integrali funzionali contiene al suo interno, per costruzione, il teorema di Wick. In un certo senso potremmo dire che fare le contrazioni del teorema di Wick, in questa nuova formulazione, si è trasformato nel fare delle derivate.

4.3.4 Funzione di partizione di una teoria interagente

Consideriamo una lagrangiana di interazione:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \quad (4.3.64)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \quad (4.3.65)$$

in cui consideriamo un potenziale che dipende da una costante di accoppiamento λ piccola, in modo che V sia una perturbazione rispetto alla teoria libera. Avremo:

$$S = S_0 - \int d^4x V(\phi). \quad (4.3.66)$$

Riprendiamo la definizione della funzione di partizione (4.3.8) e generalizziamola nel caso interagente come:

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}_\phi e^{iS+i\langle J\phi \rangle}}{\int \mathcal{D}_\phi e^{iS_0}} \quad (4.3.67)$$

$$= \frac{\int \mathcal{D}_\phi e^{iS_0 - \langle V(\phi) \rangle + i\langle J\phi \rangle}}{\int \mathcal{D}_\phi e^{iS_0}} \quad (4.3.68)$$

che non ha più un'integrale gaussiano a numeratore e non ci permette di calcolarlo facilmente come nel caso di $Z_0[J]$. Quello che possiamo fare però è spezzare l'integrale come:

$$Z[J] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}_\phi e^{-\langle V(\phi) \rangle} e^{iS_0 + i\langle J\phi \rangle} \quad (4.3.69)$$

in cui ci siamo ricordati della definizione della normalizzazione (4.3.24). A questo punto dobbiamo ricordarci il procedimento che abbiamo fatto nella sezione §4.1 ed in particolare ciò che ci ha portato a (4.1.13). Infatti, possiamo vedere un'analogia con quello che stiamo trattando in questa sezione; noi prima volevamo integrare:

$$\int dx f(x) e^{-Ax^2 + xt}$$

e siamo giunti al risultato:

$$f\left(\frac{d}{dt}\right) \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{t^2/(2A)}$$

sviluppando in serie la funzione $f(x)$. Se ora mimiamo quello già fatto nel caso facile, dunque sviluppiamo l'esponenziale con il potenziale (che dipende in genere da una qualche potenza di ϕ):

$$e^{-i\langle V(\phi) \rangle} = \sum c_n (\langle \phi(x) \rangle_x)^n \quad (4.3.70)$$

allora possiamo vedere:

$$Z[J] = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum c_n \int \mathcal{D}_\phi (\langle \phi(x) \rangle_x)^n \exp\{iS_0 + i\langle J\phi \rangle\} \quad (4.3.71)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum c_n \frac{\delta^n}{(i\delta J)^n} \int \mathcal{D}_\phi \exp\{iS_0 + i\langle J\phi \rangle\} \quad (4.3.72)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \exp\left\{-i\langle V\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\rangle_x\right\} \int \mathcal{D}_\phi \exp\{iS_0 + i\langle J\phi \rangle\} \quad (4.3.73)$$

$$= \exp\left\{-i\langle V\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\rangle_x\right\} Z_0[J]. \quad (4.3.74)$$

Siamo contenti perché con (4.3.74) possiamo calcolare l'integrale funzionale con serie perturbativa.

Noi conosciamo la definizione (4.3.46), per cui ci viene comodo prendere il logaritmo dell'espressione (4.3.74). Scrivendo:

$$Z[J] = e^{iW[J]} \quad (4.3.75)$$

$$= \exp \left\{ -i \langle V \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right) \rangle_x \right\} e^{iW_0[J]} \quad (4.3.76)$$

$$= e^{iW_0} e^{-iW_0} e^{-i\langle V \rangle} e^{iW_0} \quad (4.3.77)$$

possiamo vedere:

$$iW[J] = iW_0 + \log \left(e^{-iW_0} e^{-i\langle V \rangle} e^{iW_0} \right) \quad (4.3.78)$$

$$= iW_0 + \log \left[1 + e^{-iW_0} \left(e^{-i\langle V \rangle} - 1 \right) e^{iW_0} \right] \quad (4.3.79)$$

in cui possiamo definire:

$$\delta[J] = e^{-iW_0} \left(e^{-i\langle V \rangle} - 1 \right) e^{iW_0} \quad (4.3.80)$$

così che arriviamo alla scrittura:

$$iW[J] = iW_0[J] + \log(1 + \delta[J]). \quad (4.3.81)$$

Però, se il potenziale dipende da una costante di accoppiamento λ piccola, allora $\lambda \ll 1$ implica $\delta \ll 1$ e possiamo fare uno sviluppo perturbativo e scrivere:

$$\delta(\lambda) = e^{-iW_0} \left(e^{-i\langle V \rangle} - 1 \right) e^{iW_0} \quad (4.3.82)$$

$$\approx e^{-iW_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \langle V \rangle^n \right) e^{iW_0} \quad (4.3.83)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \lambda^n \quad (4.3.84)$$

$$= \lambda \delta_1 + \lambda^2 \delta_2 + \dots \quad (4.3.85)$$

in cui abbiamo definito il coefficiente come:

$$\delta_n = \frac{(-i)^n}{n!} e^{-iW_0} \left(\frac{1}{\lambda} \langle V(\delta_J) \rangle \right)^n e^{iW_0} \quad (4.3.86)$$

con δ_J derivate funzionali. In particolare i primi termini, che sono quelli che analizziamo, risultano essere:

$$\delta_1 = -ie^{-iW_0} \frac{\langle V(\delta_J) \rangle}{\lambda} e^{iW_0} \quad , \quad \delta_2 = \frac{(-i)^2}{2!} e^{-iW_0} \frac{\langle V(\delta_J) \rangle_x}{\lambda} \frac{\langle V(\delta_J) \rangle_y}{\lambda} e^{iW_0} \quad (4.3.87)$$

e se esplicitiamo tutto all'interno dello sviluppo in serie abbiamo:

$$\delta(\lambda) = e^{-W_0} \left(-\langle V \rangle + \frac{1}{2} \langle V \rangle^2 - \frac{1}{3!} \langle V \rangle^3 + \dots \right) e^{W_0} \quad (4.3.88)$$

$$= \delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda^2 + \delta_3 \lambda^3 + \dots \quad (4.3.89)$$

Se sviluppiamo il termine $\delta[J]$ e il logaritmo che lo contiene, allora otteniamo:

$$iW[J] = iW_0 + \log(1 + \delta[J]) \quad (4.3.90)$$

$$= iW_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \delta^n[J] \quad (4.3.91)$$

$$= iW_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \lambda^m \right]^n \quad (4.3.92)$$

$$\approx iW_0 - (\delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda^2 + \dots) + \frac{1}{2} (\delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda^2 + \dots)^2 - \frac{1}{3} (\delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda^2 + \dots)^3 + \dots \quad (4.3.93)$$

$$= iW_0 - \left[\delta_1 \lambda + \left(\delta_2 - \frac{1}{2} \delta_1^2 \right) \lambda^2 + \left(\delta_3 - \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{3} (\delta_1)^3 \right) \lambda^3 + \dots \right] \quad (4.3.94)$$

il fatto che per ogni ordine λ^n non ci sia solo δ_n , ma vengano sottratti i termini inferiori di δ , fa sì che i diagrammi disconnessi si semplifichino e quindi che $W[J]$ sia più utile rispetto a $Z[J]$ per calcolare quantità fisicamente interessanti. Ovviamente per convincerci che $W[J]$ contenga solo cose connesse dobbiamo fare un esempio specifico, in cui diamo un'espressione al potenziale e ci calcoliamo tutti i termini delle espressioni di $Z[J]$ e $W[J]$.

4.3.5 Esempio con la teoria ϕ^4

Ricordiamo che per gli scalari liberi abbiamo il risultato esatto:

$$W_0[J] = \frac{i}{2} \langle J_x \Delta_F(x-y) J_y \rangle_{x,y} \quad (4.3.95)$$

e ora consideriamo la teoria:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (4.3.96)$$

dunque:

$$V \left(\left\langle \frac{\delta}{\delta J(x)} \right\rangle_x \right) = \frac{\lambda}{4!} \left\langle \frac{\delta^4}{i \delta J(x)^4} \right\rangle_x \quad (4.3.97)$$

per cui, in base ai risultati di prima, abbiamo:

$$iW[J] = iW_0 - \left[\delta_1 \lambda + \left(\delta_2 - \frac{1}{2} \delta_1^2 \right) \lambda^2 + \right. \\ \left. + \left(\delta_3 - \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{3} (\delta_1)^3 \right) \lambda^3 + \dots \right] \quad (4.3.98)$$

noi ci fermeremo al secondo ordine, per cui ci interessa calcolare:

$$\delta_1 = e^{-iW_0} \frac{\langle V(\delta_J) \rangle}{\lambda} e^{iW_0} = -\frac{i}{4!} e^{-iW_0} \langle \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \rangle_x e^{iW_0} \quad (4.3.99)$$

$$\delta_2 = \frac{(-i)^2}{2} e^{-iW_0} \frac{\langle V(\delta_J) \rangle_x}{\lambda} \frac{\langle V(\delta_J) \rangle_y}{\lambda} e^{iW_0} \quad (4.3.100)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-i}{4!} \right)^2 e^{-iW_0} \langle \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \rangle_x \langle \frac{\delta^4}{\delta J(y)^4} \rangle_y e^{iW_0} \quad (4.3.101)$$

e possiamo renderci conto che aggiungendo $1 = e^{iW_0} e^{-iW_0}$ tra i due integrali delle derivate funzionali di δ_2 otteniamo:

$$\delta_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{-i}{4!} \right)^2 e^{-iW_0} \langle \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \rangle_x e^{iW_0} e^{-iW_0} \langle \frac{\delta^4}{\delta J(y)^4} \rangle_y e^{iW_0} \quad (4.3.102)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-i}{4!} \right)^2 e^{-iW_0} \langle \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \rangle_x e^{iW_0} \delta_1 \quad (4.3.103)$$

e questa cosa sarà particolarmente importante nei conti. Infatti possiamo renderci conto che nonostante abbiamo due termini uguali all'interno di δ_2 :

$$\delta_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \underbrace{e^{-iW_0} \langle \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \rangle_x e^{iW_0} e^{-iW_0} \langle \frac{\delta^4}{\delta J(y)^4} \rangle_y e^{iW_0}}_{=\delta_1}$$

il primo non è δ_1 poiché la sua derivata può agire sia su e^{iW_0} che su tutto ciò che c'è alla sua destra, per cui non possiamo scrivere direttamente $\delta_2 = \delta_1^2$; però quando la prima derivata agisce solo su e^{-iW_0} , allora ci fornisce dei diagrammi disconnessi, visto che integriamo il primo δ_1 su x , mentre il secondo su y e dunque non c'è nulla che lega i due punti marcati². Quando la derivata del termine sottolineato agisce sul resto del contenuto di δ_2 (ossia δ_1 a destra) questi termini ci forniscono i contributi in cui x è legato ad y , poiché integriamo sul vertice d^4x , dunque abbiamo diagrammi connessi. Notiamo solo che non stiamo dicendo che l'affermazione " $W[J]$ contiene solo diagrammi connessi" sia sbagliata, poiché notiamo che il coefficiente davanti

²L'unico modo che abbiamo di legare dei punti è quello di integrare su un vertice, in d^4x ad esempio, entrambi.

al primo elemento di δ_2 è $+1/2$ e noi, se ci ricordiamo bene la formula (4.3.98), possiamo vedere che i due fattori δ_1^2 , nel contributo λ^2 , si cancellano, e ci garantiscono il non avere diagrammi disconnessi.

Ovviamente questo discorso un po' qualitativo che abbiamo fatto si può dimostrare e si può anche vedere valere ad ordini superiori a λ^2 .

Calcoliamo i primi due contributi, ossia δ_1 e δ_2 in modo esplicito, così da vedere l'espressione esplicita di $W[J]$ all'ordine λ^2 e verificare che contiene solo diagrammi connessi. Vedi l'osservazione prima dell'equazione (4.3.136) per i pedici che mettiamo. Cominciamo, facendo attenzione alle molteplicità, con il termine facile:

$$\delta_1 = -e^{W_0} \left(\frac{1}{\lambda} \langle V(\delta_J) \rangle \right) e^{-W_0} \quad (4.3.104)$$

$$= -\frac{i}{4!} e^{W_0} \left\langle \left(\frac{\delta}{\delta J_z} \right)^4 \right\rangle_z \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} \quad (4.3.105)$$

$$= -\frac{i}{4!} e^{W_0} \left\langle \frac{\delta^3}{\delta J_z^3} \left\{ -J_x \Delta_{xz} \right\}_{xz} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} \right\rangle \quad (4.3.106)$$

$$= -\frac{i}{4!} e^{W_0} \left\langle \frac{\delta^2}{\delta J_z^2} \left\{ \left[-\Delta_{zz} + (-J_x \Delta_{xz})^2 \right]_{xz} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} \right\} \right\rangle \quad (4.3.107)$$

$$= -\frac{i}{4!} e^{W_0} \left\langle \frac{\delta}{\delta J_z} \left\{ \left[3\Delta_{zz} \langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^3 \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} \right\} \right\rangle_z \quad (4.3.108)$$

$$= -\frac{i}{4!} e^{W_0} \left\langle \left[3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right] \right\rangle_z e^{-W_0} \quad (4.3.109)$$

$$= -i \left\{ \left\langle \frac{1}{8} (\Delta_{zz})^2 + \frac{1}{4} \Delta_{zz} (J_x \Delta_{xz})^2 + \frac{1}{24} (J_x \Delta_{xz})^4 \right\rangle_{xz} \right\} \quad (4.3.110)$$

in cui ci siamo resi conto che una volta finite le derivate possiamo spostare come vogliamo gli esponenziali, che chiaramente insieme fanno 1. Fermandoci all'ordine λ avremmo dunque:

$$iW[J] = iW_0[J] - i\lambda\delta_1 + \dots \quad (4.3.111)$$

$$= -\frac{1}{2} \langle J_x \Delta(x-y) J_y \rangle_{xy} - i\lambda \left\{ \left\langle \frac{1}{8} (\Delta_{zz})^2 + \frac{1}{4} \Delta_{zz} (J_x \Delta_{xz})^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{24} (J_x \Delta_{xz})^4 \right\rangle_{xz} \right\} \quad (4.3.112)$$

e ci rendiamo conto che $W[J]$ contiene i contributi delle funzioni di Green a 0, 2 e 4 punti. Infatti, usando (4.3.48), possiamo calcolarci brevemente:

$$G_0^c = iW[J] \Big|_{J=0} \quad (4.3.113)$$

$$= -\frac{i\lambda}{8} \int d^4z \Delta_{zz}^2 \quad (4.3.114)$$

$$G_2^c(x_1, x_2) = \frac{\delta^2}{(i\delta J(x_1))(i\delta J(x_2))} iW[J] \Big|_{J=0} \quad (4.3.115)$$

$$= \Delta_{x_1 x_2} + \frac{i\lambda}{2} \langle \Delta_{zz} \Delta_{zx_1} \Delta_{zx_2} \rangle_z \quad (4.3.116)$$

$$G_4^x(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\delta^4}{(i\delta J(x_1))(i\delta J(x_2))(i\delta J(x_3))(i\delta J(x_4))} iW[J] \Big|_{J=0} \quad (4.3.117)$$

$$= \frac{-i\lambda}{4!} 4! \langle \Delta_{zx_1} \Delta_{zx_2} \Delta_{zx_3} \Delta_{zx_4} \rangle_z \quad (4.3.118)$$

che rispettivamente corrispondono ai diagrammi di Feynman nel diagramma 4.3.119, ossia solo diagrammi connessi.

$$G_0^c : \quad G_2^c : \quad + \quad G_4^c : \quad (4.3.119)$$

Il motivo per cui $Z[J]$ contiene anche le funzioni non connesse è dovuto alla presenza di $Z_0[J]$ al fondo della sua espressione:

$$Z[J] = \exp \left\{ -i \left\langle V \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right) \right\rangle_x \right\} Z_0[J]$$

poiché quando ci mettiamo a fare il suo sviluppo perturbativo ci vengono dei termini aggiuntivi dovuti alle derivate che agiscono su $Z[0]$. Prendendo lo sviluppo di $\delta[J]$ (4.3.85) vediamo:

$$Z[J] \sim Z_0[J] + \lambda \delta_1 Z_0[J] + \dots \quad (4.3.120)$$

possiamo calcolare rapidamente il primo ordine:

$$\lambda \delta_1 Z_0[J] = -\frac{i}{4!} \langle \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \rangle_x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_u \Delta_{uv} J_v \rangle_{uv} \right\} \quad (4.3.121)$$

$$= -\frac{i}{4!} \langle \frac{\delta^3}{\delta J(x)^3} \left(-\Delta_{xv} J_v \right) \rangle_{xv} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_u \Delta_{uv} J_v \rangle_{uv} \right\} \quad (4.3.122)$$

$$= -\frac{i}{4!} \langle \frac{\delta^2}{\delta J(x)^2} \left(-\Delta_{xx} + \Delta_{xv} J_v \Delta_{ux} J_u \right) \rangle_{xuv} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_u \Delta_{uv} J_v \rangle_{uv} \right\} \quad (4.3.123)$$

$$= -\frac{i}{4!} \langle \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(\Delta_{xx} \Delta_{xu} J_u + 2\Delta_{xx} \Delta_{xu} J_u - \right. \\ \left. - \Delta_{xv} \Delta_{xu} \Delta_{xw} J_u J_v J_w \right) \rangle_{xuvw} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_u \Delta_{uv} J_v \rangle_{uv} \right\} \quad (4.3.124)$$

$$= -\frac{i}{4!} \langle \left(3\Delta_{xx}^2 - 3\Delta_{xx} \Delta_{xu} \Delta_{xv} J_u - 3\Delta_{xx} \Delta_{xv} \Delta_{xu} J_u J_v + \right. \\ \left. + \Delta_{xv} \Delta_{xu} \Delta_{xw} \Delta_{xz} J_v J_u J_w J_z \right) \rangle_{xuvwz} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_u \Delta_{uv} J_v \rangle_{uv} \right\} \quad (4.3.125)$$

duqnue, all'ordine λ , abbiamo:

$$Z[J] = Z_0[J] + \lambda \delta_1 Z_0[J] \quad (4.3.126)$$

$$= \left\langle \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \left(3\Delta_{xx}^2 - 6\Delta_{xx} \Delta_{xu} \Delta_{xv} J_u + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta_{xv} \Delta_{xu} \Delta_{xw} \Delta_{xz} J_v J_u J_w J_z \right) \right] Z_0[J] \right\rangle_{xuvwz} \quad (4.3.127)$$

il punto è che ora le funzioni di Green con 0, 2 e 4 gambe, come nel caso di $W[J]$, non hanno solamente contributi connessi, ma ci sono anche contributi disconnessi. Questo è dovuto al fatto che la derivata agisce sia ai pezzi al piano terra che su $Z_0[J]$.

Notiamo solo che la funzione di Green a 0 gambe è:

$$G^0 = Z[J] \Big|_{J=0} = 1 - 3 \frac{i\lambda}{4!} \langle \Delta_{xx}^2 \rangle_x \quad (4.3.128)$$

in cui 1 rappresenta il vuoto, ovvero un diagramma in cui non c'è nulla, e non lo consideriamo; mentre, il secondo termine, oltre a vedere che $3/4! = 1/8$ è il fattore di simmetria del diagramma, è un doppio loop che si chiude su x .

Per completezza possiamo vedere che δ_2 contiene solo termini connessi³:

$$\delta_2 = \frac{1}{2} e^{iW_0} \left(\frac{1}{\lambda} \langle V(\delta_J) \rangle \right)^2 e^{-iW_0} \quad (4.3.129)$$

$$= \frac{1}{2 (4!)^2} e^{iW_0} \left(\frac{\delta}{\delta J_w} \right)^4 \left(\frac{\delta}{\delta J_z} \right)^4 \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} \quad (4.3.130)$$

$$= \frac{1}{2 (4!)^2} e^{iW_0} \left(\frac{\delta}{\delta J_w} \right)^4 \left\{ \left[3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right] \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} \right\} \quad (4.3.131)$$

$$= \frac{1}{2 (4!)^2} e^{iW_0} \left\{ \frac{\delta^4}{\delta J_w^4} \left[3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right] \times \right. \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} + \\ + 4 \frac{\delta^3}{\delta J_w^3} \left[3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right] \times \\ \times \frac{\delta}{\delta J_w} \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} + \\ + 6 \frac{\delta^2}{\delta J_w^2} \left[3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right] \times \\ \times \frac{\delta^2}{\delta J_w^2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} + \\ + 4 \frac{\delta}{\delta J_w} \left[3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right] \times \\ \times \frac{\delta^3}{\delta J_w^3} \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} + \\ + \left[3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right] \times \\ \times \frac{\delta^4}{\delta J_w^4} \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} \left. \right\} \quad (4.3.132)$$

$$= \frac{1}{2 (4!)^2} \left\{ (4!) (\Delta_{zw})^4 + 4 [(4!) (\Delta_{zw})^3 \langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x] \cdot \langle J_y \Delta_{wy} \rangle_y + \right. \\ + 6 \left[12\Delta_{zz} (\Delta_{zw})^2 + 12(\Delta_{zw})^2 (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 \right] \times \\ \times \left[\Delta_{ww} + (\langle J_y \Delta_{wy} \rangle_y)^2 \right] + \\ + 4 \left[12\Delta_{zz} \Delta_{zw} \langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x + 4\Delta_{zw} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^3 \right] \times \\ \times \left[3\Delta_{ww} \langle J_y \Delta_{wy} \rangle_y + (\langle J_y \Delta_{wy} \rangle_y)^3 \right] + \\ + \left[3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right] \times \\ \times \left[3(\Delta_{ww})^2 + 6\Delta_{ww} (\langle J_y \Delta_{wy} \rangle_y)^2 + (\langle J_y \Delta_{wy} \rangle_y)^4 \right] \left. \right\} \quad (4.3.133)$$

³Questo non lo abbiamo visto in aula.

notiamo che l'ultimo termine è proprio $\frac{1}{2}(\delta_1)^2$, quindi $\delta_2 = \frac{1}{2}\delta_1^2 + (\dots)$ e questo primo termine si semplifica nello sviluppo:

$$W[J] = \ln N + W_0 - \left[\delta_1 \lambda + \left(\delta_2 - \frac{1}{2} \delta_1^2 \right) \lambda^2 + \right. \\ \left. + \left(\delta_3 - \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{3} (\delta_1)^3 \right) \lambda^3 + \dots \right] \quad (4.3.134)$$

e in modo analogo si potrebbe vedere che:

$$\delta_3 = \delta_1 \delta_2 - \frac{1}{3} (\delta_1)^3 + (\dots). \quad (4.3.135)$$

Osservazione Da notare che nella formula precedente abbiamo indicato con z, w i vertici e con x e y i punti esterni, inoltre abbiamo omesso di segnare esplicitamente l'integrale sui vertici (z, w). Volendo distinguere ciascun punto esterno (numeri) dai vertici (lettere) e raggruppando i diagrammi equivalenti otteniamo:

$$\delta_1 = -\frac{1}{4!} \left(3 \langle \Delta_{xx}^2 \rangle_x + 6 \langle \Delta_{xx} \Delta_{x1} \Delta_{x2} J_1 J_2 \rangle_{x12} + \right. \\ \left. + \langle \Delta_{x1} \Delta_{x2} \Delta_{x3} \Delta_{x4} J_1 J_2 J_3 J_4 \rangle_{x1234} \right) \quad (4.3.136)$$

insieme a:

$$\delta_2 - \frac{1}{2} (\delta_1)^2 = \frac{1}{2(4!)} \left\{ \langle (\Delta_{zw})^4 + 3 \Delta_{zz} (\Delta_{zw})^2 \Delta_{ww} \rangle_{zw} + \right. \\ + \langle J_1 \Delta_{1z} (4(\Delta_{zw})^3 + 6 \Delta_{zz} (\Delta_{zw})^2 + 6 \Delta_{zz} \Delta_{zw} \Delta_{ww}) \Delta_{w2} J_2 \rangle_{zw12} + \\ + \langle J_1 J_2 \Delta_{1z} \Delta_{2z} (3(\Delta_{zw})^2) \Delta_{w3} \Delta_{w4} J_3 J_4 \rangle_{zw1234} + \\ + \langle J_1 \Delta_{1z} (4 \Delta_{zz} \Delta_{zw}) \Delta_{2w} \Delta_{3w} \Delta_{4w} J_2 J_3 J_4 \rangle_{zw1234} + \\ \left. + \langle J_1 J_2 J_3 \Delta_{1z} \Delta_{2z} \Delta_{3z} \left(\frac{2}{3} \Delta_{zw} \right) \Delta_{w4} \Delta_{w5} \Delta_{w6} J_4 J_5 J_6 \rangle_{zw123456} \right\} \quad (4.3.137)$$

imponendo:

$$Z[J=0] = 1 \quad (4.3.138)$$

eliminiamo tutte le funzioni di Green con zero gambe esterne ($G^{(n=0)}$) tramite la costante di normalizzazione:

$$\ln N = \sum G^{(n=0)}. \quad (4.3.139)$$

4.3.6 Generalizzazione ad n campi

Ovviamente tutto ciò che abbiamo fatto, per un solo campo scalare, si può generalizzare ad n campi scalari, introducendo un termine di sorgente per ognuno di essi. Avremo

$$\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \quad (4.3.140)$$

e dunque la definizione:

$$\int \mathcal{D}_{\phi_1} \dots \mathcal{D}_{\phi_n} \exp \left\{ iS + i \sum_i \langle \phi^i J^i \rangle \right\}. \quad (4.3.141)$$

Nel caso in cui abbiamo la teoria libera, dunque $S = S_0$, è semplice da calcolare (come in MQ) poiché abbiamo n integrali gaussiani che si fattorizzano e avremo:

$$= \mathcal{N} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \langle J^i(x) \Delta^i(x-y) J^i(y) \rangle_{xy} \right\} \quad (4.3.142)$$

dunque, l'energia libera è data dalla somma delle energie libere.

4.4 Funzione di partizione per campi fermionici

Vediamo ora come quantizzare i campi spinoriali. È cruciale la sezione §4.1.3 sulle variabili non commutanti.

I campi fermionici e le sorgenti $(\eta, \bar{\eta})$ si comportano come variabili di Grassmann complesse, dunque scriviamo l'integrale su tutte le possibili configurazioni dei campi, in modo analogo a quanto fatto per il campo scalare. In questo caso abbiamo:

$$S_0 = \int d^4x \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi \quad (4.4.1)$$

dunque, con i termini di sorgente⁴:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}_\psi \mathcal{D}_{\bar{\psi}} \exp \left\{ i \int d^4x \left(\bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right) \right\} \quad (4.4.2)$$

sempre con $\mathcal{N} = Z_0[\eta = 0, \bar{\eta} = 0]$. Ovviamente noi saremo interessati a calcolare oggetti del tipo:

$$\int \mathcal{D}_\psi \mathcal{D}_{\bar{\psi}} e^{iS_0} \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \dots \psi_{\beta_1}(y_1) \dots \quad (4.4.3)$$

⁴Nota che noi introduciamo delle sorgenti della stessa natura dei campi che studiamo, poiché nell'esponentiale dobbiamo avere dei numeri ordinari.

poiché sappiamo essere strettamente legato alle funzioni di Green della teoria. Però quando studiamo le derivate delle sorgenti dobbiamo fare attenzione ai segni perché dobbiamo portare $\delta\eta$ (e $\delta\bar{\eta}$) vicino ad η (ed $\bar{\eta}$) e compariranno dei segni negativi. Infatti possiamo notare che derivando $Z_0[\eta, \bar{\eta}]$ rispetto η (che avrà anche un'indice spinoriale) otteniamo:

$$\frac{\delta}{\delta\eta_{\alpha_1}(x_1)} Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}_\psi \mathcal{D}_{\bar{\psi}} (-i) \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) e^{\dots} \quad (4.4.4)$$

poiché la derivata deve passare attraverso il campo $\bar{\psi}$ per arrivare ad η , per cui esce un segno meno; similmente per $\bar{\eta}$:

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_{\alpha_1}(x_1)} Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}_\psi \mathcal{D}_{\bar{\psi}} (i) \psi_{\alpha_1}(x_1) e^{\dots} \quad (4.4.5)$$

in cui non c'è segno perché non dobbiamo anticommutare nulla. In modo da semplificare le espressioni inseriamo dei fattori $(-i)$ ed i insieme alle derivate. Per il caso di 4 campi avremmo:

$$\langle 0 | T[\psi_1 \psi_2 \bar{\psi}_3 \bar{\psi}_4] | 0 \rangle = \int \mathcal{D}_\psi \mathcal{D}_{\bar{\psi}} \psi_1 \psi_2 \bar{\psi}_3 \bar{\psi}_4 \exp \left\{ i \int d^4 \left(\bar{\psi}(i\not{\partial} - m) \psi + \bar{\eta}\psi - \eta\bar{\psi} \right) \right\} \quad (4.4.6)$$

$$= \int \mathcal{D}_\psi \mathcal{D}_{\bar{\psi}} (-1)^2 \frac{\delta}{(-i\delta\eta_4)} \frac{\delta}{(-i\delta\eta_3)} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta}_2)} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta}_1)} \times \\ \times \exp \left\{ i \int d^4 \left(\bar{\psi}(i\not{\partial} - m) \psi + \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi} \right) \right\} \quad (4.4.7)$$

$$= \int \mathcal{D}_\psi \mathcal{D}_{\bar{\psi}} \frac{\delta}{(i\delta\eta_4)} \frac{\delta}{(i\delta\eta_3)} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta}_2)} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta}_1)} \times \\ \times \exp \left\{ i \int d^4 \left(\bar{\psi}(i\not{\partial} - m) \psi + \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi} \right) \right\} \quad (4.4.8)$$

$$= \frac{\delta}{(i\delta\eta_4)} \frac{\delta}{(i\delta\eta_3)} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta}_2)} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta}_1)} Z_0[\eta, \bar{\eta}]. \quad (4.4.9)$$

Nel caso generico:

$$\frac{\delta^{n+m}}{(-i\delta\eta_{\alpha_1}(x_1)) \dots (-i\delta\eta_{\alpha_n}(x_n)) (i\delta\bar{\eta}_{\beta_1}(y_1)) \dots (i\delta\bar{\eta}_{\beta_m}(y_m))} Z_0[J] = \\ = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}_\psi \mathcal{D}_{\bar{\psi}} \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \dots \bar{\psi}_{\alpha_n}(x_n) \psi_{\beta_1}(y_1) \dots \psi_{\beta_m}(y_m) e^{\dots} \quad (4.4.10)$$

in cui abbiamo considerato il fatto che ogni volta che deriviamo, la derivata successiva deve passare attraverso il campo che sta al piano terra, per cui guadagniamo un segno meno; però una volta finite le derivate possiamo riarrangiare i termini e ottenere gli stessi fattori (-1) che avevamo facendo entrare le derivate; per cui complessivamente otteniamo $(+1)$. Per vederlo

bene puoi vedere il caso con poche derivate. Nota anche che la derivata funzionale per oggetti con indici spinoriali ci da (per definizione):

$$\frac{\delta \eta_\beta(w)}{\delta \eta_\alpha(x)} = \delta^\alpha_\beta \delta^n(w - x). \quad (4.4.11)$$

Il nostro scopo, così come avevamo fatto per il campo scalare, è quello di risolvere l'integrale (4.4.2). Consideriamo il passaggio nello spazio di Fourier:

$$\psi(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\psi}(p) e^{-ipx} \quad (4.4.12)$$

e idem per η e $\bar{\eta}$; facciamo questo perché altrimenti avremmo un operatore il cui inverso non potremmo definirlo con $1/A$. Possiamo calcolare l'integrale dell'esponente (sempre complessificando la massa):

$$I = i \int d^4 x \left[\bar{\psi}(i\not{\partial} - m + i\varepsilon) \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right] \quad (4.4.13)$$

passiamo nello spazio degli impulsi

$$= i \int d^4 x \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\tilde{\bar{\psi}}(q) (\not{p} - m + i\varepsilon) \tilde{\psi}(p) + \right. \\ \left. + \tilde{\bar{\eta}}(q) \tilde{\psi}(p) + \tilde{\bar{\psi}}(q) \tilde{\eta}(p) \right] e^{-ix(p+q)} \quad (4.4.14)$$

$$= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 q \left[\tilde{\bar{\psi}}(q) (\not{p} - m + i\varepsilon) \tilde{\psi}(p) + \right. \\ \left. + \tilde{\bar{\eta}}(q) \tilde{\psi}(p) + \tilde{\bar{\psi}}(q) \tilde{\eta}(p) \right] \delta^4(p+q) \quad (4.4.15)$$

$$= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\tilde{\bar{\psi}}(-p) (\not{p} - m + i\varepsilon) \tilde{\psi}(p) + \tilde{\bar{\eta}}(-p) \tilde{\psi}(p) + \tilde{\bar{\psi}}(-p) \tilde{\eta}(p) \right] \quad (4.4.16)$$

possiamo fare il cambio di variabili:

$$\tilde{\psi} \rightarrow \tilde{\psi} - (\not{p} - m + i\varepsilon)^{-1} \tilde{\eta} \quad (4.4.17)$$

che ha jacobiano pari ad 1, così:

$$= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\tilde{\bar{\psi}}(-p) (\not{p} - m + i\varepsilon) \tilde{\psi}(p) - \tilde{\bar{\eta}}(-p) (\not{p} - m + i\varepsilon)^{-1} \tilde{\eta}(p) \right] \quad (4.4.18)$$

possiamo ripassare nello spazio delle coordinate:

$$= i \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i(x-y)p} \bar{\psi}(y)(i\not{p} - m + i\varepsilon)\psi(x) - \\ - i \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i(x-y)p} \bar{\eta}(y)(\not{p} - m + i\varepsilon)^{-1}\eta(x) \quad (4.4.19)$$

$$= i \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\not{p} - m + i\varepsilon)\psi(x) - \\ - \int d^4x \int d^4y \bar{\eta}(y) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} i e^{-i(x-y)p} (\not{p} - m + i\varepsilon)^{-1}\eta(x) \quad (4.4.20)$$

$$= iS_0 - \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) \eta(y) \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{\not{p} - m + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} \right]. \quad (4.4.21)$$

Dunque, ricordandoci:

$$S(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (4.4.22)$$

$$Z_0[\eta = 0, \bar{\eta} = 0] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS_0} = \mathcal{N} \quad (4.4.23)$$

abbiamo:

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \exp\{-\langle \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \rangle_{xy}\}. \quad (4.4.24)$$

Così come per il caso scalare anche ora la funzione di partizione $Z_0[J]$ contiene tutte le funzioni di Green, connesse e non connesse, della teoria. Allo stesso tempo $W_0[J]$ contiene solamente le funzioni connesse. Possiamo ad esempio vedere:

$$\frac{\delta^2}{(-i\delta\eta_{\alpha_1}(x_1))(i\delta\bar{\eta}_{\beta_1}(y_1))} Z_0[J] \Big|_{\eta, \bar{\eta}=0} = \quad (4.4.25)$$

$$= \frac{\delta}{(-i\delta\eta_{\alpha_1}(x_1))} \left(-\langle S_{\beta_1\beta}(y_1 - y) \eta_\beta(y) \rangle_y \times \right. \\ \left. \times \exp\{-\langle \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \rangle_{xy}\} \right) \Big|_{\eta, \bar{\eta}=0} \quad (4.4.26)$$

$$= -S_{\beta_1\alpha_1}(y_1 - x_1) \quad (4.4.27)$$

$$= -\langle \Omega | T \psi_{\beta_1}(y_1) \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) | \Omega \rangle \quad (4.4.28)$$

$$= \langle \Omega | T \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \psi_{\beta_1}(y_1) | \Omega \rangle. \quad (4.4.29)$$

4.5 Funzione di partizione per campi vettoriali

Se scriviamo la funzione di partizione per il campo vettoriale, nel modo in cui abbiamo scritto quelle per il campo scalare e spinoriale, utilizzando la

lagrangiana di Yang-Mills⁵:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2} \text{Tr}\{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\} \quad (4.5.1)$$

sempre con $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^A T^A$, allora abbiamo:

$$Z[J^\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu} \exp\left\{i \int d^4x \left(\mathcal{L}_{YM} + J^\mu A_\mu\right)\right\}. \quad (4.5.2)$$

Questo integrale è mal definito (non converge) perché abbiamo un'invarianza di gauge. Infatti, stiamo integrando su tutte le possibili configurazioni di A_μ pesate per l'azione corrispondente, però per colpa dell'invarianza di gauge:

$$A'_\mu = A_\mu + \mathcal{D}_\mu \omega \quad (4.5.3)$$

abbiamo infiniti potenziali ω (che è una generica funzione delle coordinate) che ci danno la stessa fisica. Dunque, integrando su A_μ stiamo integrando su tutte le infinite scelte di A'_μ , pesate con la stessa azione S_{YM} . Per questo l'integrale diverge⁶.

Per vederlo possiamo ignorare il termine di corrente: l'integrando è uguale per qualunque A_μ , dunque stiamo integrando lo stesso valore per infinite volte.

Non lo abbiamo visto in aula questo conto. Possiamo però verificare che effettivamente l'esponenziale diverge in diversi modi, sempre a causa dell'invarianza di gauge. Calcoliamo l'integrale nel caso di teorie abeliane,

⁵Non è limitante (anzi) utilizzare la teoria di Yang-Mills al posto di una teoria con la lagrangiana di Maxwell abeliana, poiché abbiamo visto che a partire dalle teorie non abeliane è veloce ricondursi a quelle abeliane.

⁶È un po' come quando facciamo l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cos^2 x = \infty \quad (4.5.4)$$

poiché abbiamo una funzione periodica (invariante per traslazioni) e integriamo infinite volte la stessa cosa.

dunque con $\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_{Maxwell} = \mathcal{L}_0$:

$$I = i \int d^4x \left(\mathcal{L}_0 + J^\mu A_\mu \right) \quad (4.5.5)$$

$$= i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + J^\mu A_\mu \right] \quad (4.5.6)$$

$$= i \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4} (q_\mu \tilde{A}_\nu - q_\nu \tilde{A}_\mu) (p^\mu \tilde{A}^\nu - p^\nu \tilde{A}^\mu) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \tilde{J}^\mu(q) \tilde{A}_\mu(p) + \frac{1}{2} \tilde{J}^\mu(p) \tilde{A}_\mu(q) \right] e^{-i(p+q)x} \quad (4.5.7)$$

$$= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4} (p_\mu \tilde{A}_\nu(-p) - p_\nu \tilde{A}_\mu(-p)) (p^\mu \tilde{A}^\nu(p) - p^\nu \tilde{A}^\mu(p)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \tilde{J}^\mu(-p) \tilde{A}_\mu(p) + \frac{1}{2} \tilde{J}^\mu(p) \tilde{A}_\mu(-p) \right] \quad (4.5.8)$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \left(-p^\mu p_\mu \tilde{A}_\nu(-p) \tilde{A}^\nu(p) + p_\mu p_\mu \tilde{A}^\mu(-p) \tilde{A}^\nu(p) + \right. \right. \\ \left. + p_\mu p_\mu \tilde{A}^\mu(-p) \tilde{A}^\nu(p) - p^\nu p_\nu \tilde{A}_\mu(-p) \tilde{A}^\mu(p) \right) - \tilde{J}^\mu(-p) \tilde{A}_\mu(p) - \\ \left. - \tilde{J}^\mu(p) \tilde{A}_\mu(p) \right] \quad (4.5.9)$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[-\tilde{A}_\mu(-p) (p^2 \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \tilde{A}_\nu(p) + \tilde{J}^\mu(-p) \tilde{A}_\mu(p) + \right. \\ \left. + \tilde{A}_\mu(-p) \tilde{J}^\mu(p) \right]. \quad (4.5.10)$$

Possiamo porre l'operatore cinetico uguale a:

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \quad (4.5.11)$$

e possiamo osservare che:

$$P_{\mu\nu} P^{\nu\rho} = P^\rho{}_\mu = \delta^\rho{}_\mu - \frac{p^\rho p_\mu}{p^2} \quad (4.5.12)$$

dunque che è un proiettore (ovvero può avere solo autovalori 0, 1), inoltre osserviamo che $P_{\mu\nu} p^\nu = 0$ e abbiamo che $\text{Tr}\{P_{\mu\nu}\} = 3$, quindi la matrice $P_{\mu\nu}$ non può essere invertita e questo ci impedisce di completare il quadrato e procedere come nei casi precedenti.

La polarizzazione longitudinale (lungo la direzione del moto) è $\tilde{A}_\mu^L \sim p_\mu$, l'integrando non dipende dalla componente longitudinale perché $\mathcal{L}_0 \sim P_{\mu\nu} p^\nu = 0$, per la lagrangiana, mentre nella sorgente $\tilde{J}^\mu \tilde{A}_\mu^L \propto p_\mu \tilde{J}^\mu = 0$ perché la corrente J è conservata ($\partial_\mu J^\mu = 0 \Rightarrow p_\mu \tilde{J}^\mu = 0$), quindi quando integriamo sulla polarizzazione longitudinale abbiamo:

$$\int \mathcal{D}_{A^L} (1) = \infty. \quad (4.5.13)$$

4.5.1 Quantizzazione di Faddeev-Popov

Chiaramente vogliamo quantizzare questa teoria evitando la divergenza dell'integrale, e il modo in cui riusciamo a farlo è seguire quello che ci dicono Faddeev-Popov.

Cominciamo a vedere un esempio che poi potremo mimare. Sappiamo calcolare:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d^D x e^{-x^T A x} \quad (4.5.14)$$

in cui possiamo diagonalizzare la matrice (con una trasformazione di similitudine):

$$x \rightarrow x' \quad , \quad A \rightarrow A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_D \end{pmatrix} \quad (4.5.15)$$

il cui Jacobiano è pari ad 1, e il risultato è:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d^D x' e^{-x'^T A_{diag} x'} = \frac{\pi^{D/2}}{\sqrt{\prod_i \lambda_i}}. \quad (4.5.16)$$

Il problema lo abbiamo se qualche autovalore è nullo; infatti, in quel caso l'integrale divergerebbe poiché la variabile associata all'autovalore nullo non compare all'interno dell'integrale e noi integriamo 1 tra $\pm\infty$. Possiamo comunque dare un senso all'integrale I togliendo le variabili con autovettori nulli:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d^D x' e^{-x'^T A_{diag} x'} \prod_{i=1}^k \delta(x'_i) \quad (4.5.17)$$

in cui k conta gli autovettori nulli. Possiamo ricambiare le variabili:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^D x \left| \frac{\delta x'}{\delta x} \right| \prod_{i=1}^k \delta(x'_i) e^{-x^T A x}. \quad (4.5.18)$$

Dunque, nel caso in cui ci rendiamo conto di avere un'integrale gaussiano divergente, possiamo cambiare variabile, togliendo le variabili (che nel caso di integrali funzionali diventano configurazioni del campo) patologiche, e ottenere qualcosa di calcolabile, ma al prezzo di aver guadagnato una misura diversa da 1.

Quello che faremo per quantizzare il campo vettoriale è "circa" la stessa cosa.

Noi vogliamo fare un processo di quantizzazione, ma rispettando sempre l'invarianza di Lorentz e di gauge. Però abbiamo anche detto che la divergenza è legata all'invarianza di gauge, dunque dovremo lavorare su quello.

Prendiamo lo spazio delle configurazioni del vettore A_μ , in cui ogni punto è un valore del campo e due valori differenti, collegati da una trasformazione di gauge, diciamo che sono sulla stessa **orbita di gauge**. Ad ogni orbita è associato un valore di ω e due orbite diverse non si intersecano mai. Vedi la figura 4.1.

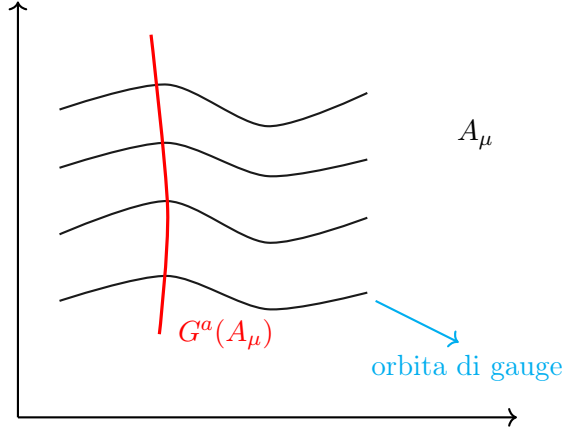


Figura 4.1

Per evitare la divergenza dobbiamo scegliere (imporre) una direzione nello spazio di integrazione che sia tale che venga scelto un solo rappresentante per ogni orbita di gauge, questo equivale a imporre il gauge dall'inizio, dunque:

$$G^a(A_\mu) = 0 \quad (4.5.19)$$

dove G è detta *funzione di gauge-fixing* (è una funzione arbitraria che interseca ogni orbita di gauge una sola volta). In questo modo non abbiamo più una rindondanza, e integrando sulla curva $G^a(A_\mu)$ non abbiamo ∞ elementi equivalenti, ma integriamo solamente sui rappresentanti di ogni orbita.

Osservazione: l'indice rappresenta gli elementi del gruppo: $a \in \{1, \dots, N\}$ in cui N è la dimensione del gruppo; se la teoria è abeliana allora $N = 1$, dunque abbiamo un solo generatore e possiamo non mettere l'indice.

Definiamo:

$$\Delta_G^{-1}[A_\mu] = \int \mathcal{D}_U \delta[G^a(A_\mu^U)] \quad , \quad U = e^{i\omega^a(x)T^a} \quad (4.5.20)$$

in cui U è un elemento del gruppo di gauge e A_μ^U è il campo trasformato. Mettiamo in (4.5.20) la δ di Dirac in modo da imporre (4.5.19), e per come l'abbiamo definita (4.5.20) ci dice che non è rilevante la scelta che facciamo sull'orbita (4.5.19). Il campo A_μ , come sappiamo, trasforma con un elemento del gruppo come:

$$A_\mu^U = U A_\mu U^\dagger - i U \partial_\mu U^\dagger. \quad (4.5.21)$$

Osserviamo che (4.5.20) è invariante di gauge perché se consideriamo $A' = A^{U'}$, cioè trasformiamo con U' , e dunque:

$$\Delta_G^{-1}[A'_\mu] = \int \mathcal{D}_U \delta[G^a(A'_\mu^U)] \quad (4.5.22)$$

$$= \int \mathcal{D}_U \delta[G^a(A_\mu^{U'U})] \quad (4.5.23)$$

ma il prodotto di due elementi di un gruppo appartiene ancora al gruppo e stiamo integrando su tutti gli elementi dello stesso, dunque possiamo porre $U'U = U''$ e $\mathcal{D}_U = \mathcal{D}_{U''}$, pertanto rinominando $U'' \rightarrow U$ otteniamo $\Delta_G^{-1}(A'_\mu) = \Delta_G^{-1}(A_\mu)$ e ciò vale $\forall A', A$ che siano connessi da una trasformazione di gauge. Studiamo meglio:

$$\Delta_G^{-1}(A_\mu) = \int \mathcal{D}_U \delta[G^a(A_\mu^U)] \quad (4.5.24)$$

in cui G è una funzione di U , e facciamo un cambio di variabile:

$$U \longrightarrow G^a \quad , \quad \mathcal{D}_U = \mathcal{D}_{G^a} \det \left| \frac{\delta U}{\delta G^a} \right| \quad (4.5.25)$$

dunque:

$$\Delta_G^{-1}(A_\mu) = \int \mathcal{D}_{G^a} \det \left| \frac{\delta U}{\delta G^a} \right| \delta[G^a] = \det \left| \frac{\delta U}{\delta G^a} \right|_{G^a=0} \quad (4.5.26)$$

perciò otteniamo:

$$\Delta_G(A_\mu) = \det \left| \frac{\delta G^a}{\delta U} \right|_{G=0} = \det \left| \frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} \right|_{G=0} \quad (4.5.27)$$

perché U dipende solo dai parametri ω :

$$U = e^{-i\omega^a T^a} \quad (4.5.28)$$

essendo i generatori delle cose costanti.

Perché abbiamo fatto tutta questa fatica? Poiché per risolvere la funzione di partizione di Yang-Mills (YM) inseriamo:

$$1 = \Delta_G(A_\mu) \cdot \Delta_G^{-1}(A_\mu) \quad (4.5.29)$$

così che:

$$Z = \int \mathcal{D}_{A_\mu} \Delta_G^{-1}[A_\mu] \Delta_G[A_\mu] e^{iS_{YM}} \quad (4.5.30)$$

$$= \int \mathcal{D}_{A_\mu} \int \mathcal{D}_U \delta[G^a(A_\mu^U)] \Delta_G[A_\mu] e^{iS_{YM}(A_\mu)} \quad (4.5.31)$$

$$= \int \mathcal{D}_U \int \mathcal{D}_{A_\mu} \delta[G^a(A_\mu^U)] \Delta_G[A_\mu] e^{iS_{YM}(A_\mu)} \quad (4.5.32)$$

siccome tutto l'integrale è invariante di gauge, poiché vediamo che sicuramente $\mathcal{D}_{A_\mu}$ lo è, abbiamo dimostrato che Δ_G è gauge invariante e per costruzione anche l'azione S_{YM} lo è, allora possiamo dire che preso:

$$A'_\mu = A_\mu^U \quad (4.5.33)$$

per ogni elemento del gruppo U fissato, avremmo:

$$= \int \mathcal{D}_U \int \mathcal{D}_{A_\mu^{U^{-1}}} \delta[G^a(A'_\mu)] \Delta_G[A_\mu^{U^{-1}}] e^{iS_{YM}(A_\mu^{U^{-1}})} \quad (4.5.34)$$

$$= \int \mathcal{D}_U \int \mathcal{D}_{A'_\mu} \delta[G^a(A'_\mu)] \Delta_G[A'_\mu] e^{iS_{YM}(A'_\mu)} \quad (4.5.35)$$

in cui abbiamo sfruttato l'invarianza di gauge. Dunque, per ogni elemento del gruppo U , otteniamo sempre lo stesso integrando. Possiamo dunque notare che il secondo integrale non dipende dal gruppo U (ricorda la relazione (4.5.27)), dunque fattorizza⁷ e possiamo considerare $\mathcal{N} = \int \mathcal{D}_U$. Per cui abbiamo:

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu} \delta[G^a(A_\mu)] \Delta_G[A_\mu] e^{iS_{YM}(A_\mu)}. \quad (4.5.36)$$

Però la scelta $G^a[A_\mu]$ è arbitraria, l'unica cosa che conta è che selezioni un rappresentante, per cui possiamo scrivere (4.5.19) oppure:

$$G^a(A_\mu) = c^a(x) \quad (4.5.37)$$

con c^a delle funzioni costanti rispetto A_μ , in modo totalmente equivalente. In particolare, possiamo anche scegliere di mediare sui c^a con un perso gaussiano, senza cambiare la nostra fisica poiché comunque stiamo selezionando solo un rappresentante per ogni orbita:

$$= \mathcal{N} \int dc^a \exp\left\{-\frac{i}{2\xi} \langle c^a c^a \rangle_x\right\} \int \mathcal{D}_{A_\mu} \delta[G^a(A_\mu) - c^a] \Delta_G[A_\mu] e^{iS_{YM}(A_\mu)} \quad (4.5.38)$$

$$= \mathcal{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu} \det \left| \frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} \right|_{G=0} \exp\left\{iS_{YM} - \frac{i}{2\xi} \langle G^a G^a \rangle_x\right\} \quad (4.5.39)$$

in cui abbiamo applicato la delta di Dirac e sostituito l'espressione (4.5.27). Però possiamo fare una scelta di gauge⁸:

$$G^a[A_\mu] = \partial A^a \quad (4.5.40)$$

⁷L'integrale su $\mathcal{D}_U$ ci dice solo quant'è grande il gruppo e ci ridefinisce la costante di normalizzazione (consideriamo solo gruppi compatti, quindi la dimensione del gruppo è finita).

⁸Nota che è differente dal fare una scelta iniziale di gauge su G^a , poiché facendo tutta questa fatica siamo riusciti ad avere $\Delta_G[A_\mu]$ al piano terra, che come vedremo, nel caso abeliano è banale, ma nel caso non abeliano è cruciale per la quantizzazione della nostra teoria.

che è una scelta Lorentz invariante, e avere:

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu} \det \left| \frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} \right|_{G=0} \exp \left\{ i S_{YM} - \frac{i}{2\xi} \langle (\partial A^a)^2 \rangle_x \right\}. \quad (4.5.41)$$

Il valore di ξ fissa il gauge e può essere scelto in maniera arbitraria perché le ampiezze di probabilità sono gauge-invarianti e quindi indipendenti da ξ .

Per procedere con la soluzione di Z dobbiamo distinguere tra il caso abeliano (dimensione di U $N = 1$, $f^{abc} = 0$) ed il caso non abeliano ($N \neq 1$, $f^{abc} \neq 0$). Infatti, noi abbiamo visto che vale (4.5.27), che diventa:

$$\frac{\delta G^a}{\delta U} = \frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} = \frac{\partial(\delta A_\mu^a)}{\delta \omega^b} \quad (4.5.42)$$

però la variazione δA_μ^a dipende dalla natura del gruppo, se abeliano o meno.

Nel caso di una teoria abeliana ($U(1)$, dimensione 1) con parametro ω , scegliendo il gauge di Lorentz, per cui:

$$G = \partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu (A_\mu + \partial_\mu \omega) \quad (4.5.43)$$

dunque, $\delta A_\mu = \partial_\mu \omega$, e abbiamo:

$$\frac{\delta G}{\delta \omega} = \partial^\mu \partial_\mu \quad (4.5.44)$$

che non dipende dal campo A , quindi:

$$\Delta_G = \det\{(\square)\} \quad (4.5.45)$$

può essere riassorbito nella costante di normalizzazione:

$$Z_{ab} = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}_{A_\mu} \exp \left\{ i S_{YM} - \frac{i}{2\xi} \langle (\partial A)^2 \rangle \right\} \quad (4.5.46)$$

e questo è esattamente Gupta-Bleuler della sezione §3.2.2.

Per una teoria di Yang-Mills (teoria non-abeliana) invece la A trasforma con la derivata covariante del parametro ω ; infatti ricordiamo che per $U = e^{i\omega^a(x)T^a}$ con $a \in \{1, \dots, N\}$ abbiamo che:

$$\delta A_\mu^a = \mathcal{D}_\mu \omega^a \quad (4.5.47)$$

$$= \partial_\mu \omega^a + g f^{abc} \omega^b A_\mu^c \quad (4.5.48)$$

$$= \left(\partial_\mu \delta^a_b + g f^{abc} A_\mu^c \right) \omega^b \quad (4.5.49)$$

dunque:

$$\frac{\delta G^a}{\delta \omega^d} = \frac{\partial^\mu (\mathcal{D}_\mu \omega^a)}{\delta \omega^d} \quad (4.5.50)$$

$$= \partial^\mu \left(\partial_\mu \delta^a_b + g f^{abc} A_\mu^c \right) \delta^b_d \quad (4.5.51)$$

per cui vediamo che ora Δ_G dipende dal campo A_μ e non possiamo più fattorizzarlo. Scriviamo quindi:

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu} \det \left\{ \left[\partial^\mu \left(\partial_\mu \delta^a_b + g f^{abc} A_\mu^c \right) \right] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ i S_{YM} - \frac{i}{2\xi} \langle (\partial A)^2 \rangle \right\}. \quad (4.5.52)$$

La scrittura (4.5.52) è un po' bruttina, ma possiamo riscriverla meglio se ci rendiamo conto che il determinante che compare dentro può essere espresso come risultato di un integrale gaussiano su variabili di Grassmann. Infatti, ricordando il risultato (4.1.58) possiamo scrivere (attenzione che le c che stiamo introducendo sono differenti da quelle in (4.5.37)):

$$\det \left\{ \left[\partial^\mu \left(\partial_\mu \delta^a_b + g f^{abc} A_\mu^c \right) \right] \right\} = \mathcal{M} \int \mathcal{D}_{c^a} \mathcal{D}_{\bar{c}^a} e^{i S_{gh}} \quad (4.5.53)$$

dove:

$$S_{gh} = \int d^4x \bar{c}^a \partial^\mu \left(\partial_\mu \delta^a_d + g f^{abc} A_\mu^c \right) c_d \quad (4.5.54)$$

che se integrata per parti diventa:

$$S_{gh} = \int d^4x \left\{ -\partial^\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a - g \partial^\mu \bar{c}^a g f^{adc} c_d A_\mu^c \right\}. \quad (4.5.55)$$

Dunque, siamo riusciti a trovare una funzione di partizione di Yang-Mills comprende l'azione di Yang-Mills (S_{YM}), un termine di gauge-fixing (S_{gf}) e un'azione *ghost* (S_{gh}):

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu} \mathcal{D}_{c^a} \mathcal{D}_{\bar{c}^a} \exp \left\{ i S_{YM} - \frac{i}{2\xi} \langle (\partial A)^2 \rangle + i S_{gh} \right\} \quad (4.5.56)$$

$$= \mathcal{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu} \mathcal{D}_{c^a} \mathcal{D}_{\bar{c}^a} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \text{Tr} \{ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \} - \frac{i}{2\xi} \langle (\partial A)^2 \rangle + \right. \\ \left. + i \langle -\partial^\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a - g \partial^\mu \bar{c}^a g f^{adc} c_d A_\mu^c \rangle \right\} \quad (4.5.57)$$

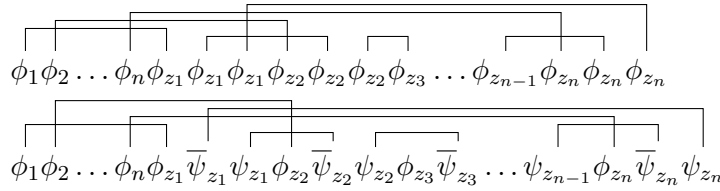
quest'ultima descrive una teoria di campo, in cui i campi dinamici sono i campi di gauge A_μ (di Yang-Mills), ma anche un altro tipo di campi c^a . Dal punto di vista di Lorentz i campi c^a e $\bar{c}^a$ sono scalari (non hanno nessun indice vettoriale o spinoriale), ma con la particolarità di essere anticommutanti e quindi soddisfano la spin-statistica sbagliata. Inoltre possiamo vedere che la normalizzazione del termine cinetico è sbagliata a causa del segno negativo davanti.

I campi c^a e $\bar{c}^a$ sono campi scalari complessi anticommutanti (di Grassman in rappresentazione aggiunta) che sono detti **campi ghost di Faddeev-Popov**. Come intuibile non sono particelle reali (da qui il nome di *ghost*),

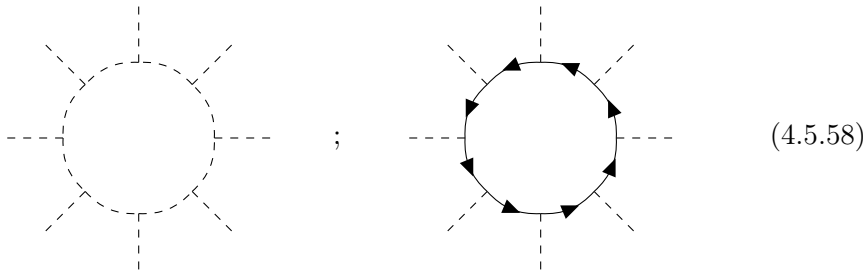
non esistono come stati nel limite asintotico, dunque non esistono particelle associate, ma sono essenziali per la quantizzazione della teoria di Yang-Mills ed esistono esclusivamente nei diagrammi a loop. Un ipotetico processo che le contenga deve avere ampiezza nulla.

Ovviamente nella funzione di partizione (4.5.57) si possono aggiungere i termini di sorgente per i campi.

Per capire il contributo dei ghost (in modo qualitativo) facciamo due esempi. Consideriamo una teoria ϕ^3 , una teoria di Yukawa, con i diagrammi in figura 4.5.58 e le contrazioni con n campi esterni ed n vertici:



in cui possiamo notare che nel caso di ϕ^3 possiamo spostare tutto ciò che vogliamo e non guadagniamo nessun segno, ma caso diverso è quello della teoria di Yukawa, in cui abbiamo tutti i loop contratti già nell'ordine corretto, ad eccezione di $\bar{\psi}_{z1}\psi_{zn}$, che cambiando di posto forniscono un segno meno. Dunque, vediamo che i loop fermionici hanno associato un segno negativo e nelle due teorie c'è un segno relativo.



Cosa succede per i campi di ghost? In teorie in cui abbiamo n gambe esterne, che possono essere campi di gauge A_μ o altro, possiamo avere dei loop, in cui girano i campi di gauge, ma allo stesso tempo possiamo avere delle teorie analoghe (essendo i c^a variabili anticommutanti) in cui nei loop girano i ghost, che forniscono un segno di differenza, e quello che fanno è cancellare, tra tutte le polarizzazioni dei campi A_μ (scalare, longitudinale e

trasversa), quelle non fisiche. Puoi vedere il diagramma in figura 4.5.59.

$$(4.5.59)$$

Non è così complicato vedere l'analogia con la teoria di Gupta-Bleuler. Infatti noi a partire dall'equazione (4.5.41) abbiamo fatto la distinzione tra gruppi abeliani e non abeliani e possiamo pensare ai risultati a cui siamo giunti come due gemelli eterozigoti. Lo scopo finale di entrambe le teorie è quello di quantizzare il campo A_μ e per riuscirci, ognuno di loro con i propri mezzi, deve eliminare le polarizzazioni non fisiche.

Quest'ultima cosa che abbiamo visto è la cosiddetta **simmetria BRST** (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin) o *simmetria residua*. Infatti, nonostante noi abbiamo maneggiato la nostra azione, inserendo un termine di gauge fixing, la lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}$ contiene ancora delle simmetrie residue, tramite la quale si dimostra che gli stati ghost cancellano i contributi di A_μ legati alle polarizzazioni scalare e longitudinale, oltre a far semplificare qualunque particella prodotta dai campi ghost.

4.5.2 Funzione di partizione libera per il caso abeliano

Ci servirà nel momento in cui faremo la QED conoscere l'espressione di (4.5.46):

$$Z_{ab} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu} \exp \left\{ iS_{YM,ab} - \frac{i}{2\xi} \langle (\partial A)^2 \rangle \right\} \quad (4.5.60)$$

ossia la funzione di partizione per il campo A_μ libero, nel caso abeliano. Chiaramente procediamo come i casi scalare e spinoriale e aggiungiamo un termine di sorgente:

$$Z_0[J_\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu} \exp \left\{ iS_{YM,ab} - \frac{i}{2\xi} \langle (\partial A)^2 \rangle + J_\mu A^\mu \right\} \quad (4.5.61)$$

$$= \mathcal{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu} \exp \{ iS_\gamma + \langle J_\mu A^\mu \rangle \} \quad (4.5.62)$$

e ci preoccupiamo dunque di calcolare:

$$I = iS_\gamma + i \langle J_\mu A^\mu \rangle. \quad (4.5.63)$$

Come i casi precedenti dobbiamo andare in Fourier:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \tilde{A}_\mu(p) \quad (4.5.64)$$

analogamente per J_μ . Abbiamo dunque:

$$I = i \int d^4 x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + J^\mu A_\mu \right) \quad (4.5.65)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2} \int d^4 x \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-i(p+q)x} \left(-\frac{1}{2} \left(p^\mu \tilde{A}^\nu(p) - p^\nu \tilde{A}^\mu(p) \right) \left(q_\mu \tilde{A}_\nu(q) - q_\nu \tilde{A}_\mu(q) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\xi} q_\mu \tilde{A}^\mu(q) p_\nu \tilde{A}^\nu(p) + \tilde{J}^\mu(q) \tilde{A}_\mu(p) + \tilde{J}^\mu(p) \tilde{A}_\mu(q) \right) \quad (4.5.66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(-\frac{1}{2} \left(p^\mu \tilde{A}^\nu(p) - p^\nu \tilde{A}^\mu(p) \right) \left(-p_\mu \tilde{A}_\nu(-p) + p_\nu \tilde{A}_\mu(-p) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\xi} p_\mu \tilde{A}^\mu(-p) p_\nu \tilde{A}^\nu(p) + \tilde{J}^\mu(-p) \tilde{A}_\mu(p) + \tilde{J}^\mu(p) \tilde{A}_\mu(-p) \right) \quad (4.5.67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(p^2 \tilde{A}_\mu(-p) \tilde{A}^\mu(p) - p_\mu p_\nu \tilde{A}^\mu(-p) \tilde{A}^\nu(p) + \frac{1}{\xi} p_\mu p_\nu \tilde{A}^\mu(-p) \tilde{A}^\nu(p) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{J}^\mu(-p) \tilde{A}_\mu(p) + \tilde{A}_\mu(-p) \tilde{J}^\mu(p) \right) \quad (4.5.68) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\left(p^2 \eta_{\mu\nu} - \frac{\xi-1}{\xi} p_\mu p_\nu \right) \tilde{A}^\nu(-p) \tilde{A}^\mu(p) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{J}^\mu(-p) \tilde{A}_\mu(p) + \tilde{A}_\mu(-p) \tilde{J}^\mu(p) \right] \quad (4.5.69) \end{aligned}$$

cambiamo variabile:

$$\tilde{A}_\mu \longrightarrow \tilde{A}_\mu - K_{\mu\alpha}^{-1} \tilde{J}^\alpha \quad (4.5.70)$$

dove poniamo:

$$K_{\mu\nu} = \left(p^2 \eta_{\mu\nu} - \frac{\xi-1}{\xi} p_\mu p_\nu \right) \quad (4.5.71)$$

così che:

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[K^{\mu\nu} \left(\tilde{A}_\mu(p) - K_{\mu\alpha}^{-1} \tilde{J}^\alpha(p) \right) \left(\tilde{A}_\nu(-p) - K_{\nu\beta}^{-1} \tilde{J}^\beta(-p) \right) + \right. \\ &\quad + \tilde{J}^\mu(-p) \left(\tilde{A}_\mu(p) - K_{\mu\alpha}^{-1} \tilde{J}^\alpha(p) \right) + \\ &\quad \left. + \left(\tilde{A}_\nu(-p) - K_{\nu\beta}^{-1} \tilde{J}^\beta(-p) \right) \tilde{J}^\nu(p) \right] \quad (4.5.72) \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[K^{\mu\nu} \tilde{A}_\nu(-p) \tilde{A}_\mu(p) - \tilde{J}^\mu(p) K_{\mu\nu}^{-1} \tilde{J}^\nu(-p) \right]. \quad (4.5.73)$$

Ora, nel caso in cui non ci ricordassimo del propagatore di Maxwell (3.2.46), possiamo ricavare chi è l'operatore inverso $K_{\mu\nu}^{-1}$ che c'è tra le due correnti. Scriviamo:

$$K_{\mu\nu}^{-1} = A(p^2)\eta_{\mu\nu} + B(p^2)p_\mu p_\nu \quad (4.5.74)$$

e richiediamo che:

$$\delta^\mu{}_\rho = (K^{-1})^{\mu\nu}(K)_{\nu\rho} \quad (4.5.75)$$

$$= (A(p^2)\eta^{\mu\nu} + B(p^2)p^\mu p^\nu) \left(p^2\eta_{\nu\rho} - \frac{\xi-1}{\xi}p_\nu p_\rho \right) \quad (4.5.76)$$

$$= A(p^2)p^2\delta^\mu{}_\rho - \frac{\xi-1}{\xi}A(p^2)p^\mu p_\rho + p^2B(p^2)p^\mu p_\rho - \frac{\xi-1}{\xi}B(p^2)p^2p^\mu p_\rho \quad (4.5.77)$$

e risolvendo le equazioni tensoriali:

$$A(p^2)p^2 = 1 \quad (4.5.78)$$

$$- \frac{\xi-1}{\xi}A(p^2) + B(p^2)p^2 - \frac{\xi-1}{\xi}B(p^2)p^2 = 0 \quad (4.5.79)$$

troviamo:

$$A(p^2) = \frac{1}{p^2} \quad (4.5.80)$$

$$B(p^2) = \frac{1}{p^2}(\xi-1) \quad A(p^2) = \frac{1}{p^4}(\xi-1) \quad (4.5.81)$$

così che otteniamo:

$$K_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{p^2} \left(\eta_{\mu\nu} + (\xi-1)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \quad (4.5.82)$$

che, a meno di un fattore $-i$, è il propagatore di Maxwell:

$$K_{\mu\nu}^{-1} = -i\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2} \left(\eta_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right). \quad (4.5.83)$$

A questo punto, come fatto le altre volte, ritorniamo nello spazio delle coordinate:

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4x d^4y e^{ip(x-y)} \left[\left(-\partial_x^\rho \partial_{y\rho} \eta^{\mu\nu} + \frac{\xi-1}{\xi} \partial_x^\mu \partial_y^\nu \right) A_\mu(x) A_\nu(y) - J^\mu(x) K_{\mu\nu}^{-1} J^\nu(y) \right] \quad (4.5.84)$$

$$= \frac{i}{2} \int d^4x \left[-\square A_\mu A^\mu + \frac{\xi-1}{\xi} (\partial A)^2 \right] - \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \left[J^\mu(x) K_{\mu\nu}^{-1} J^\nu(y) \right] \quad (4.5.85)$$

Notando che vale l'identità:

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial A)^2 = -\frac{1}{2}(\Box A_\mu A^\mu - (\partial A)^2) - \frac{1}{2\xi}(\partial A)^2 \quad (4.5.86)$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\Box A_\mu A^\mu + \frac{\xi-1}{\xi}(\partial A)^2 \right] \quad (4.5.87)$$

e individuando il propagatore di Maxwell $\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(p)$:

$$= iS_0 - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[J^\mu(x) \tilde{\Delta}_{\mu\nu}(p) J^\nu(y) \right] \quad (4.5.88)$$

$$= iS_0 - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J^\mu(x) \Delta_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y). \quad (4.5.89)$$

Come per le altre funzioni di partizione normalizziamo per $Z_0[J=0]$, per cui il termine iS_0 non compare, e scriviamo:

$$Z_0[J_\mu] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J^\mu(x) \Delta_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y) \rangle_{xy} \right\}. \quad (4.5.90)$$

4.6 Teoria di Yukawa

Vediamo in questa sezione, e in quella che segue, le due teorie interagenti a cui siamo tanto affezionati, ovvero la teoria di Yukawa e l'elettrodinamica quantistica. Rivedremo alcuni concetti già visti, ma sotto la veste di integrali funzionali.

Sappiamo che per la teoria di Yukawa dobbiamo scrivere un'azione del tipo:

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi - g \phi \bar{\psi} \psi \right\} \quad (4.6.1)$$

con il termine di interazione cubico:

$$\mathcal{L}_{int} = -g \phi \bar{\psi} \psi. \quad (4.6.2)$$

Nel momento in cui ci scriviamo la funzione di partizione, ovviamente dovremo integrare su tutte le configurazioni di tutti e tre i campi, e dovremo introdurre 3 sorgenti, una per ogni campo. Abbiamo:

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}_\phi \mathcal{D}_\psi \mathcal{D}_{\bar{\psi}} \exp \{ iS + i \langle \phi J + \bar{\eta} \psi + \eta \bar{\psi} \rangle_x \} \quad (4.6.3)$$

$$= e^{iW[J, \eta, \bar{\eta}]} \quad (4.6.4)$$

sempre con la solita normalizzazione $\mathcal{N} = Z_0[0]$. La funzione di partizione (4.6.3) è la funzione generatrice di tutte le funzioni di Green per la teoria

di Yukawa. Chiaramente non siamo in grado di calcolare la funzione di partizione che abbiamo scritto, così com'è, per colpa del termine cubico $g\phi\bar{\psi}\psi$. Però sappiamo come scrivere una funzione di partizione interagente:

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \exp \left\{ -ig \left\langle \frac{\delta}{(i\delta J)} \frac{\delta}{(-i\delta\eta_\alpha)} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta}_\alpha)} \right\rangle \right\} Z_0[J, \eta, \bar{\eta}] \quad (4.6.5)$$

in cui mettiamo le derivate relative a tutti i campi, così da riuscire a ricostruire il termine di interazione, e dove Z_0 è la funzione di partizione libera. Facendo il conto verifichiamo:

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = -ig \langle \phi(x) \psi_\alpha(x) (-1) \bar{\psi}_\alpha(x) \rangle \quad (4.6.6)$$

$$= -ig \langle \phi \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha \rangle_x. \quad (4.6.7)$$

Non lo abbiamo detto esplicitamente, ma il termine generico dello sviluppo dell'esponenziale sarebbe:

$$\frac{(-ig)^n}{n!} \left(\left\langle \frac{\delta}{(i\delta J)} \frac{\delta}{(-i\delta\eta_\alpha)} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta}_\alpha)} \right\rangle \right)^n. \quad (4.6.8)$$

Ritorniamo all'espressione (4.6.5) e notando che l'azione libera per Yukawa è la somma delle azioni libere scalari e spinoriali, allora mettendo insieme i pezzi (4.3.40) e (4.4.24) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} Z[J, \eta, \bar{\eta}] &= \exp \left\{ -ig \left\langle \frac{\delta}{(i\delta J)} \frac{\delta}{(-i\delta\eta_\alpha)} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta}_\alpha)} \right\rangle \right\} Z_0[J, \eta, \bar{\eta}] \\ &= \exp \left\{ -ig \left\langle \frac{\delta}{(i\delta J)} \frac{\delta}{(-i\delta\eta_\alpha)} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta}_\alpha)} \right\rangle \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J(x) \Delta(x-y) J(y) \rangle_{xy} - \langle \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \rangle_{xy} \right\} \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

in cui riconosciamo i propagatori scalare e spinoriale. Abbiamo già detto che ciò che ci interessa è $W[J, \eta, \bar{\eta}]$ il cui sviluppo è (noi lo abbiamo trovato per il campo scalare, ma l'unica assunzione che avevamo fatto era sulla costante di accoppiamento del potenziale, e non sulla natura dei campi, dunque è valido sempre):

$$iW[J, \eta, \bar{\eta}] = iW_0[J, \eta, \bar{\eta}] + g\delta_1 + g^2 \left(\delta_2 - \frac{1}{2} \delta_1^2 \right) + \dots \quad (4.6.11)$$

in cui:

$$\delta = e^{-iW_0} \left(\exp \left\{ -ig \left\langle \frac{\delta}{(i\delta J)} \frac{\delta}{(-i\delta\eta)} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta})} \right\rangle_x \right\} - 1 \right) e^{iW_0} \quad (4.6.12)$$

e scrivevamo:

$$\delta = g\delta_1 + g^2\delta_2 + \dots \quad (4.6.13)$$

abbiamo:

$$\delta_1 = e^{-iW_0} \left(-i \left\langle \frac{\delta}{(i\delta J)} \frac{\delta}{(-i\delta\eta)} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta})} \right\rangle_x \right) e^{iW_0} \quad (4.6.14)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2}(-i)^2 e^{-iW_0} \left(\left\langle \frac{\delta}{(i\delta J)} \frac{\delta}{(-i\delta\eta)} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta})} \right\rangle_x \left\langle \frac{\delta}{(i\delta J)} \frac{\delta}{(-i\delta\eta)} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta})} \right\rangle_y \right) e^{iW_0} \quad (4.6.15)$$

ed inserendo $1 = e^{iW_0} e^{-iW_0}$ in mezzo ai due integrali di δ_2 , possiamo fare le considerazioni identiche a quelle fatte per il campo scalare e vedere che $W[\dots]$ contiene solo diagrammi connessi.

Calcoliamo i contributi di $W[J, \eta, \bar{\eta}]$. All'ordine 1 ci sarà solo il contributo di W_0 , ossia:

$$G_{\phi\phi}^c(x, y) = \Delta(x - y) \quad (4.6.16)$$

$$G_{\psi\bar{\psi}}^c = S(x - y). \quad (4.6.17)$$

All'ordine $\mathcal{O}(g)$, che viene da δ_1 (4.6.14) e ricordando l'espressione di W_0 da (4.6.10), abbiamo:

$$\delta_1 = e^{-iW_0} \left(-i \left\langle \frac{\delta}{(i\delta J)} \frac{\delta}{(-i\delta\eta)} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta})} \right\rangle_x \right) e^{iW_0} \quad (4.6.18)$$

$$= -\frac{i}{i} e^{-iW_0} \left\langle \frac{\delta}{\delta\eta_\alpha} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha} \left[-\langle \Delta(x - y) J(y) \rangle_y e^{iW_0} \right] \right\rangle_x \quad (4.6.19)$$

$$= -e^{-iW_0} \left\langle \frac{\delta}{\delta\eta_\alpha} \left\{ -\langle \Delta(x - y) J(y) \rangle_y \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (-1) \langle S(x - w)_{\alpha\beta} \eta_\beta(w) \rangle_w e^{iW_0} \right\} \right\rangle_x \quad (4.6.20)$$

$$= -\left\{ \langle \Delta(x - y) J(y) S(x - x)_{\alpha\alpha} \rangle_{xy} - \right. \\ \left. - \langle \Delta(x - y) J(x) S(x - w)_{\alpha\beta} \eta_\beta(w) (-1) \bar{\eta}_\gamma(u) S_{\gamma\alpha}(u - x) \rangle_{xywu} \right\} \quad (4.6.21)$$

$$= -\left\{ \langle \Delta_{xy} J_y S_{xx} \rangle_{xy} + \langle \Delta_{xy} J_x S_{xw} \eta_w \bar{\eta}_u S_{ux} \rangle_{xywu} \right\} \quad (4.6.22)$$

in cui nell'ultimo passaggio abbiamo scritto $1 = e^{iW_0} e^{-iW_0}$, poiché una volta finite le derivate possiamo spostare ciò che vogliamo.

Dotati di δ_1 possiamo vedere esplicitamente il contributo di ordine g alle

funzioni di Green. La funzione ad 1 punto:

$$G_\phi^c(z) = \frac{\delta}{i\delta J(z)} iW[J, \eta, \bar{\eta}] \Big|_{J, \eta, \bar{\eta}=0} \quad (4.6.23)$$

$$= i\langle \Delta(x-z) S_{\alpha\alpha}(x-x) \rangle_x \quad (4.6.24)$$

$$= \begin{array}{c} x \\ \text{-----} \\ z \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \end{array}$$

che ci rappresenta il decadimento di una particella scalare nel vuoto (ossia una coppia virtuale fermione e antifermione). Potremmo anche calcolare:

$$G_{\phi\bar{\psi}\psi}^c(z, u, v) = \frac{\delta^3}{(i\delta J(z))(-i\delta\eta(u))(i\delta\bar{\eta}(v))} \Big|_{J, \eta, \bar{\eta}=0} \quad (4.6.25)$$

$$= -i\langle \Delta(x-z) S_{\gamma\alpha}(v-x) \delta^{\alpha\delta} S_{\delta\beta}(x-u) \rangle_x \quad (4.6.26)$$

$$= \begin{array}{c} u, \delta \\ \nearrow \\ x \\ \searrow \\ v, \gamma \end{array} \begin{array}{c} \text{-----} \\ z \end{array} \begin{array}{c} -ig\delta^{\alpha\delta} \end{array}$$

Dunque, i contributi (4.6.24) e (4.6.26) sono dati da δ_1 .

Notiamo che nel caso fossimo interessati alla funzione di Green a 3 gambe $G_{\phi\phi\phi}$, chiaramente non la possiamo ottenere da $W[J, \eta, \bar{\eta}]$, poiché non ci sono termini che dipendono da 3 sorgenti J . Dunque, non avremo una funzione $G_{\phi\phi\phi}$ connessa, ma la potremmo ottenere solamente da:

$$G_{\phi\phi\phi} = \frac{\delta^3}{\delta J(x)\delta J(y)\delta J(z)} Z \Big|_{J, \eta, \bar{\eta}=0} \quad (4.6.27)$$

$$= i\langle \Delta(x-z) S(x-x) \rangle_x \Delta(y-u) \quad (4.6.28)$$

$$= \begin{array}{c} x \\ \text{-----} \\ z \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \end{array} + \begin{array}{c} y \text{-----} u \end{array}$$

e notiamo che ciò è possibile poiché nella definizione di Z compare sempre un Z_0 , anche dopo che scriviamo lo sviluppo, mentre per W i contributi degli esponenziali $e^{\pm iW_0}$ si cancellavano a vicenda. La presenza di Z_0 è la responsabile per tutti i termini disconnessi, che sono presenti poiché discendono dalle derivate della funzione di partizione libera. Infatti in (4.6.27), abbiamo una derivata che agisce sul pezzo derivante da δ_1 , mentre le altre

due su $Z_0 = e^{iW_0}$.

Ora, ci divertiamo parecchio e calcoliamo il contributo di δ_2 :

$$\delta_2 = \frac{1}{2}(-i)e^{-iW_0} \left\langle \frac{\delta}{(i\delta J(y))} \frac{\delta}{(-i\delta\eta(y))} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta}(y))} \right\rangle_y e^{iW_0} \delta_1 \quad (4.6.29)$$

$$= \frac{1}{2}(-i)e^{-iW_0} \left\langle \frac{\delta}{(i\delta J(y))} \frac{\delta}{(-i\delta\eta_\alpha(y))} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta}_\alpha(y))} \right\rangle_y e^{iW_0} \times$$

$$\times \left\{ \langle \Delta(x-z)J(z)S_{\sigma\sigma}(x-x) + \right.$$

$$\left. + \Delta(x-z)J(z)S(x-w)_{\sigma\beta}\eta_\beta(w)\bar{\eta}_\gamma(u)S_{\gamma\sigma}(u-x) \rangle_{xzwu} \right\} \quad (4.6.30)$$

$$= \frac{1}{2}(-i)e^{-iW_0} \left\langle \frac{\delta}{(i\delta J(y))} \frac{\delta}{(-i\delta\eta_\alpha(y))} \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta}_\alpha(y))} \right\rangle_y e^{iW_0} \times$$

$$\times \left\{ \langle \Delta_{xz}J_zS_{xx} + \Delta_{xz}J_z\bar{\eta}_uS_{ux}S_{xw}\eta_w \rangle \right\} \quad (4.6.31)$$

abbiamo già osservato più volte che quando le derivate vanno su e^{iW_0} danno δ_1 , che si cancellerà con l'altro termine dello sviluppo. Calcoliamo tutti i termini:

$$= \frac{1}{2}e^{-iW_0} \left\langle \frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(y)} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(y)} \left[(-\Delta_{yv}J_v)\Delta_{xz}J_zS_{xx} + (-\Delta_{yv}J_v)\Delta_{xz}J_z\bar{\eta}_uS_{ux}S_{xw}\eta_w + \right. \right.$$

$$\left. + \Delta_{xy}S_{xx} - \Delta_{xy}\bar{\eta}_uS_{ux}S_{xw}\eta_w \right] e^{iW_0} \rangle \quad (4.6.32)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-iW_0} \left\langle \frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(y)} \left[-\Delta_{yv}J_v\Delta_{xz}J_zS_{yx}S_{xw}\eta_w - \Delta_{xy}S_{yx}S_{xw}\eta_w - \right. \right.$$

$$\left. - \left(-\Delta_{yv}J_v\Delta_{xz}J_zS_{xx} - \Delta_{yv}J_v\Delta_{xz}J_z\bar{\eta}_uS_{ux}S_{xw}\eta_w + \Delta_{xy}S_{xx} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \Delta_{xy}\bar{\eta}_uS_{ux}S_{xw}\eta_w \right) S_{yt}\eta_t \right] e^{iW_0} \rangle \quad (4.6.33)$$

$$= \frac{1}{2} \left\langle \left[-\Delta_{yv}J_v\Delta_{xz}J_zS_{yx}S_{xy} - \Delta_{xy}S_{yx}S_{xy} + \underline{\Delta_{yv}J_v\Delta_{xz}J_zS_{xx}S_{yy}} - \right. \right.$$

$$\left. - \Delta_{yv}J_v\Delta_{xz}J_z\bar{\eta}_uS_{ux}S_{xy}S_{yt}\eta_t + \underline{\Delta_{yv}J_v\Delta_{xz}J_z\bar{\eta}_uS_{ux}S_{xw}\eta_wS_{yy}} - \right.$$

$$\left. - \Delta_{xy}S_{xx}S_{yy} - \Delta_{xy}\bar{\eta}_uS_{ux}S_{xy}S_{yt}\eta_t + \Delta_{xy}\bar{\eta}_uS_{ux}S_{xw}\eta_wS_{yy} \right] +$$

$$+ \left[-\Delta_{yv}J_vS_{yx}S_{xw}\eta_w - \Delta_{xy}S_{yx}S_{xw}\eta_w - \right.$$

$$\left. - \left(\underline{-\Delta_{yv}J_v\Delta_{xz}J_zS_{xx}} - \underline{\Delta_{yv}J_v\Delta_{xz}J_z\bar{\eta}_uS_{ux}S_{xw}\eta_w} + \Delta_{xy}S_{xx} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \Delta_{xy}\bar{\eta}_uS_{ux}S_{xw}\eta_w \right) S_{yt}\eta_t \right] (\bar{\eta}_sS_{sy}) \rangle \quad (4.6.34)$$

possiamo notare che i termini sottolineati, sono i contributi disconnessi poiché non abbiamo nulla che colleghi x ed y , ma siamo tranquilli poiché si

semplificano poiché costituiscono il termine $\delta_1^2/2$. Però trovato δ_2 (senza considerare $\delta_1^2/2$) possiamo trovare alcuni contributi alla funzione di Green all'ordine g^2 . Ripuliamo la scrittura, e vediamo:

$$\begin{aligned} \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_1^2 = \frac{1}{2} \langle \{ & \left[-\Delta_{yv}J_v\Delta_{xz}J_zS_{yx}S_{xy} - \Delta_{xy}S_{yx}S_{xy} - \right. \\ & -\Delta_{yv}J_v\Delta_{xz}J_z\bar{\eta}_uS_{ux}S_{xy}S_{yt}\eta_t - \\ & -\Delta_{xy}S_{xx}S_{yy} - \Delta_{xy}\bar{\eta}_uS_{ux}S_{xy}S_{yt}\eta_t + \Delta_{xy}\bar{\eta}_uS_{ux}S_{xw}\eta_wS_{yy} \Big] + \\ & + \left[-\Delta_{yv}J_vS_{yx}S_{xw}\eta_w - \Delta_{xy}S_{yx}S_{xw}\eta_w - \left(\Delta_{xy}S_{xx} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \Delta_{xy}\bar{\eta}_uS_{ux}S_{xw}\eta_w \right) S_{yt}\eta_t \right] (\bar{\eta}_sS_{sy}) \Big\} \rangle \end{aligned} \quad (4.6.35)$$

dunque abbiamo ad esempio la funzione a 0 punti, dunque le bolle di vuoto:

$$G_0^c = -\Delta_{xy}S_{yx}S_{xy} - \Delta_{xy}S_{xx}S_{yy} \quad (4.6.36)$$

$$= \text{diagramma 1} + \text{diagramma 2}$$

Il primo diagramma è una bolla di vuoto con una linea orizzontale tratteggiata che attraversa il centro. Il secondo diagramma è la somma di due bolle di vuoto, ciascuna con una linea orizzontale tratteggiata che attraversa il centro, e le due bolle sono collegate da una linea orizzontale tratteggiata.

La funzione a due gambe:

$$G_{\phi\phi}^c = \frac{\delta^2}{(i\delta J(a))(i\delta J(b))} \left(\frac{1}{2} \Delta_{yv}J_v\Delta_{xz}J_zS_{yx}S_{xy} \right) \Big|_{J=0} \quad (4.6.37)$$

$$= -\langle \Delta_{ya}\Delta_{bx}S_{yx}S_{xy} \rangle_{xy} \quad (4.6.38)$$

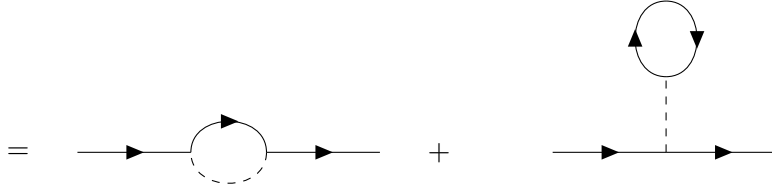
$$= \text{diagramma}$$

Il diagramma mostra una bolla di vuoto con una linea orizzontale tratteggiata che attraversa il centro. Le estremità della linea sono etichettate con x e y . Le estremità della bolla sono etichettate con b e a .

Abbiamo anche l'altra funzione a due gambe:

$$G_{\bar{\psi}\psi}^c = \frac{\delta^2}{(-i\delta\eta(a))(i\delta\bar{\eta}(b))} \left\{ -\frac{1}{2}\Delta_{xy}\bar{\eta}_u S_{ux} S_{yt} \eta_t - \frac{1}{2}\Delta_{xy} S_{yx} S_{xw} \eta_w \bar{\eta}_s S_{sy} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\Delta_{xy} S_{xx} S_{yt} \eta_t \bar{\eta}_s S_{sy} \right\} \Big|_{\eta, \bar{\eta}=0} \quad (4.6.39)$$

$$= \langle -\frac{1}{2}\Delta_{xy} S_{bx} S_{xy} S_{ya} - \frac{1}{2}\Delta_{xy} S_{by} S_{yx} S_{xa} + \\ \frac{1}{2}\Delta_{xy} S_{ya} S_{xx} S_{by} + \frac{1}{2}\Delta_{xy} S_{ya} S_{xx} S_{by} \rangle \quad (4.6.40)$$

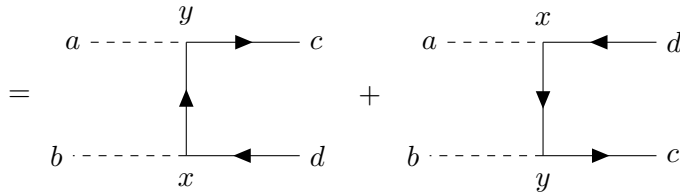


in cui notiamo che abbiamo i diagrammi equivalenti a due a due. Come ultimo contributi possiamo guardare la funzione a 4 campi:

$$G_{\phi\phi\bar{\psi}\psi}^c = \frac{\delta^4}{(i\delta J_a)(i\delta J_b)(-i\delta\eta_c)(i\delta\bar{\eta}_d)} \left\{ \frac{1}{2}\Delta_{yv} J_v \Delta_{xz} J_z \bar{\eta}_u S_{ux} S_{xy} S_{yt} \eta_t \right\} \quad (4.6.41)$$

$$= \Delta_{ya} \Delta_{xb} S_{dx} S_{xy} S_{yc} + \Delta_{yb} \Delta_{xa} S_{dx} S_{xy} S_{yc} \quad (4.6.42)$$

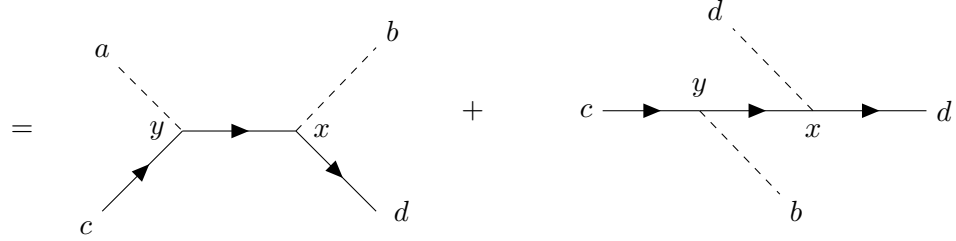
e in questo caso non riusciamo a disegnare direttamente i diagrammi poiché essi dipendono dal processo che consideriamo. Se prendiamo a e b come stati *in*, allora stiamo guardando un processo $2\phi \rightarrow \psi\bar{\psi}$, dunque abbiamo i diagrammi:



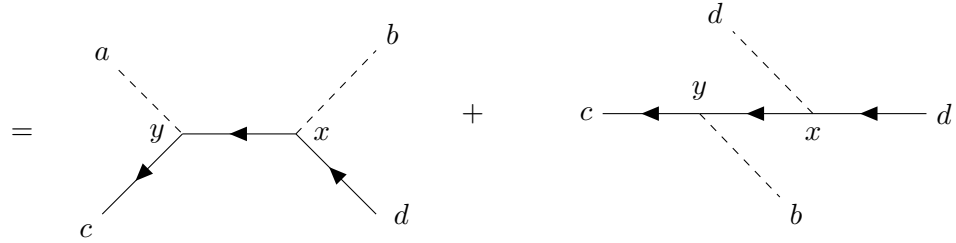
Nel caso in cui a, b siano stati *out* abbiamo gli stessi diagrammi, ma time-reversed.

Se invece abbiamo a, c nello stato *in* e b, d nello stato *out*, dunque un processo $e^- \phi \rightarrow e^- \phi$, stiamo dunque interpretando η_c , associato a ψ , come una particella entrante ed $\bar{\eta}_d$, accoppiata con ψ , come una particella uscente;

per cui i diagrammi sono:



però possiamo anche interpretare η_c , associato a $\bar{\psi}$, come una anti-particella uscente ed $\bar{\eta}_d$, accoppiata con ψ , come una anti-particella entrante; in questo caso i diagrammi sono:



Chiaramente mancano da calcolare alcuni contributi alla funzione di Green, per l'ordine g^2 , ma si costruiscono in modo analogo.

4.7 QED

Studiamo ora la funzione di partizione per la QED. Prendiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_{\pm e} + \mathcal{L}_{int} \quad (4.7.1)$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial A)^2 + \bar{\psi} (i\not{\partial} - e\not{A} - m) \psi \quad (4.7.2)$$

in cui alla lagrangiana di Maxwell aggiungiamo un termine di gauge fixing e uno per il campo fermionico (già reso invariante per trasformazioni locali). Osserviamo che abbiamo termini quadratici (teoria libera) in A_μ , in ψ e l'unico termine di interazione è:

$$\mathcal{L}_{int} = -e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (4.7.3)$$

e quindi, quasi in modo naturale dopo tutte queste pagine di path integral, possiamo scrivere:

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}_{A_\mu} \mathcal{D}_\psi \mathcal{D}_{\bar{\psi}} \exp\{iS + i\langle J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \rangle\}. \quad (4.7.4)$$

chiaramente questo integrale non siamo in grado di calcolarlo essendoci i termini di interazione. Quello che possiamo fare però è riscriverlo, come abbiamo imparato per funzioni di partizione interagenti, un po' meglio:

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}_{A_\mu} \mathcal{D}_\psi \mathcal{D}_{\bar{\psi}} e^{iS_{int}} \exp\{iS_0 + i\langle J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \rangle\} \quad (4.7.5)$$

$$= \exp\left\{-ie\left\langle \frac{\delta}{(i\delta J_\mu(x))} \frac{\delta}{(-i\delta\eta(x))} \gamma_\mu \frac{\delta}{(i\delta\bar{\eta}(x))} \right\rangle_x\right\} Z_0[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] \quad (4.7.6)$$

con:

$$Z_0[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}_\psi \mathcal{D}_{\bar{\psi}} \exp\{iS_{e^\pm} + i\langle \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \rangle\} \times \\ \times \int \mathcal{D}_{A_\mu} \exp\{iS_\gamma + i\langle J_\mu A^\mu \rangle\} \quad (4.7.7)$$

in cui ricordiamo che:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \exp\{-\langle \bar{\eta}(y) S(x-y) \eta(x) \rangle\} \quad (4.7.8)$$

$$Z_0[J_\mu] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle J^\mu(x) \Delta_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y) \rangle_{xy}\right\} \quad (4.7.9)$$

dunque:

$$Z_0[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \exp\left\{-\langle \bar{\eta}(y) S(x-y) \eta(x) \rangle_{xy} - \frac{1}{2}\langle J^\mu(x) \Delta_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y) \rangle_{xy}\right\}. \quad (4.7.10)$$

4.7.1 Regole di Feynman per la QED

Noi non ci riferiamo a particelle (o antiparticelle) specifiche, ma teniamo a mente che i leptoni sono composti da elettroni, muoni e tau, questi hanno stesso numero quantico e stessa carica elettrica, ma massa diversa ($m_e = 0.511$ MeV, $m_\mu = 106$ MeV, $m_\tau = 1777$ MeV).

Capite le definizioni base della teoria possiamo trovare le regole di Feynman della teoria. I propagatori sono facili da scrivere, poiché già noti:

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2} \left(\eta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \quad (4.7.11)$$

$$\tilde{S}(p) = i(\not{p} - m)^{-1}. \quad (4.7.12)$$

Leggermente più lungo è cercarsi il contributo del vertice. Possiamo notare che la prima volta che compare il vertice è nella funzione a 3 punti, per cui

dobbiamo espandere al primo ordine in e l'esponenziale di (4.7.6):

$$-ie \left\langle \frac{\delta}{(i\delta J_\mu(x))} \frac{\delta}{(-i\delta \eta_\alpha(x))} \gamma_{\mu\alpha\beta} \frac{\delta}{(i\delta \bar{\eta}_\beta(x))} \right\rangle_x Z_0[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] \quad (4.7.13)$$

$$\begin{aligned} &= -e \langle (-1)\Delta_{\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)(-1)^3\bar{\eta}_\gamma(z)S(z-x)\gamma_\alpha\gamma_{\alpha\beta}^\mu \times \\ &\quad \times \left[(-1)\Delta_{\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)(-1)S_{\beta\alpha}(x-x) + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^2S(x-w)_{\beta\delta}\eta_\delta(w) \right] \rangle_{xyzw} \end{aligned} \quad (4.7.14)$$

però possiamo notare che abbiamo un termine che non ci interessa proveniente dalla derivata di $\bar{\eta}$:

$$\begin{aligned} &-e \langle (-1)\Delta_{\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)(-1)^3S(z-x)\gamma_\alpha\gamma_{\alpha\beta}^\mu \times \\ &\quad \times \left[(-1)\Delta_{\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)(-1)S_{\beta\alpha}(x-x) \right] \rangle_{xyzw} \\ &= \quad \text{diagramma: una linea ondulata che entra da sinistra in un vertice circolare con una freccia che esce verso destra} \end{aligned}$$

potremmo derivare le regole di Feynman anche da questo diagramma, ma viene più comodo prenderle dal secondo termine. Abbiamo quindi:

$$\sim -e \langle \Delta_{\mu\nu}(x-y)S_{\gamma\alpha}(z-x)\gamma_{\alpha\beta}^\mu S(x-w)_{\beta\delta}J^\nu(y)\bar{\eta}_\gamma(z)\eta_\delta(w) \rangle_{xyzw} \quad (4.7.15)$$

da cui possiamo calcolare la funzione di Green:

$$G_{A_\mu\bar{\psi}\psi} = \frac{\delta^3}{(i\delta J^\lambda(a))(-i\delta \eta_\rho(b))(i\delta \bar{\eta}_\sigma(c))} Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] \Big|_{J, \eta, \bar{\eta}=0} \quad (4.7.16)$$

$$= +ie \langle \Delta_{\mu\lambda}(x-a)S_{\sigma\alpha}(c-x)\gamma_{\alpha\beta}^\mu S_{\beta\rho}(x-b) \rangle_x \quad (4.7.17)$$

$$= \quad \text{diagramma: un vertice centrale con tre linee che entrano/uscirono. Una linea ondulata da sinistra (etichettata a, \lambda) entra nel vertice. Due linee dritte da destra (etichettate b, \rho e c, \sigma) escono dal vertice. Le linee dritte sono etichettate con \beta e \alpha vicino al vertice. Il vertice stesso ha un'etichetta \mu.} \quad (4.7.18)$$

dunque, amputando i pezzi, vediamo che il contributo del vertice è:

$$ie\gamma_{\alpha\beta}^\mu \quad (4.7.18)$$

a cui eventualmente mettiamo l'integrale $\int d^4x$, oppure la delta di conservazione $\delta(\Sigma p_i)$.

Elenchiamo per bene le regole di Feynman nello spazio degli impulsi:

1. Per ogni linea interna o esterna associamo un opportuno *Propagatore*:

- per i fermioni disegniamo una linea continua (con freccia) e associamo:

$$\tilde{S}(p) = i(\not{p} - m)^{-1}. \quad (4.7.19)$$

- Per i fotoni disegniamo una linea ondulata ed associamo:

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2} \left(\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right). \quad (4.7.20)$$

2. *Vertici*: ad ogni vertice associamo $(ie\gamma^\mu)$ ed imponiamo la conservazione del 4-impulso.

3. *Simmetria*: ogni diagramma va diviso per il suo fattore di simmetria.

4. *Loop*: integriamo sui momenti indeterminati dentro i loop.

Ricordiamo che per i diagrammi tree-level il fattore di simmetria è sempre 1.

Nel caso in cui vogliamo calcolare delle ampiezze di probabilità:

1. Amputiamo tutte le gambe esterne, e al posto del propagatore inseriamo:

- Ad ogni fermione nello stato iniziale associamo $u(p)$ e nello stato finale $\bar{u}(p)$.
- Ad ogni anti-fermione nello stato iniziale associamo $\bar{v}(p)$ e nello stato finale $v(p)$.
- Ad ogni fotone nello stato iniziale associamo $[\epsilon_\lambda^\mu(k)]^*$ e nello stato finale $\epsilon_\lambda^\mu(k)$.

Il numero di scattering 2 in 2 che possono avvenire in questa teoria sono limitati, ma è utile per lo scritto calcolarli tutti. È presente nella mia pagina un file con i conti di tutte le ampiezze di probabilità.

4.7.2 Esempio per $\mathcal{M}$ invariante di gauge

Non calcoleremo in modo completo l'ampiezza di scattering di un processo, ma vogliamo dimostrare in questa breve sezione che la fisica è indipendente dalla scelta del gauge ξ .

Ricominciamo da:

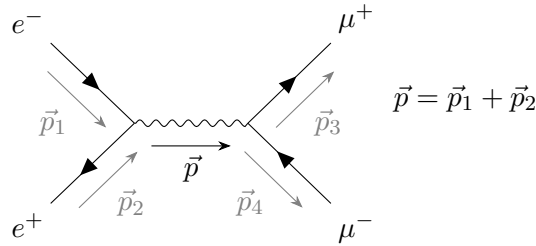
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial A)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad (4.7.21)$$

in cui il termine $-\frac{1}{2\xi}(\partial A)^2$ rende la lagrangiana non invariante e fissa il gauge, la scelta di gauge dipende dal valore di ξ , tuttavia si può dimostrare

che le ampiezza non dipendono dalla scelta di gauge (ovvero non dipendono da ξ). Studiamo un processo di QED del tipo:

$$e^- + e^+ \longrightarrow \mu^- + \mu^+$$

in cui abbiamo messo dei muoni, ma l'importante che siano una coppia particella e antiparticella (i leptoni hanno tutti stessa carica). Prendiamo in considerazione solamente il canale s , per brevità, ma si potrebbe vedere qualsiasi altro canale:



e ci ricordiamo che valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} (\not{p} - m) u(p) &= 0 \quad , \quad (\not{p} + m) v(p) = 0 \\ \bar{u}(p)(\not{p} - m) &= 0 \quad , \quad \bar{v}(p)(\not{p} + m) = 0 \end{aligned} \quad (4.7.22)$$

per particelle (e antiparticelle) on shell. Calcoliamo l'ampiezza:

$$M_s = i e^2 (\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)) (\bar{u}(p_3) \gamma^\nu v(p_4)) \frac{1}{p^2} \left(-\eta_{\mu\nu} - (\xi - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \quad (4.7.23)$$

sostituiamo $p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$

$$\begin{aligned} &= -\frac{i e^2}{s} \left\{ (\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)) (\bar{u}(p_3) \gamma^\nu v(p_4)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi - 1}{s} [\bar{v}(p_2) (\not{p}_1 + \not{p}_2) u(p_1)] [\bar{u}(p_3) (\not{p}_3 + \not{p}_4) v(p_4)] \right\} \quad (4.7.24) \end{aligned}$$

usiamo $\not{p}u(p) = mu(p)$ e le altre

$$\begin{aligned} &= -\frac{i e^2}{s} \left\{ (\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)) (\bar{u}(p_3) \gamma^\nu v(p_4)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi - 1}{s} [\bar{v}(p_2) (\not{p}_1 + m_e) u(p_1) + \bar{v}(p_2) (\not{p}_2 - m_e) u(p_1)] \times \right. \\ &\quad \left. \times [\bar{u}(p_3) (\not{p}_3 - m_\mu) v(p_4) + \bar{u}(p_3) (\not{p}_4 + m_\mu) v(p_4)] \right\} \quad (4.7.25) \end{aligned}$$

$$= -\frac{i e^2}{s} (\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)) (\bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4)). \quad (4.7.26)$$

Dunque, abbiamo visto che l'ampiezza non dipende dalla scelta di ξ e in genere si possono fare diverse scelte, ma è tipico prendere:

$$\xi = 1 \quad (4.7.27)$$

che si chiama **gauge di Feynman**.

Nota però che questa cosa non vale per le funzioni di Green, poiché al suo interno non abbiamo le polarizzazioni delle particelle. Infatti, la funzione G non guarda il fatto che le particelle siano on-shell (e quindi che valgano (4.7.22)), anzi essa ha dei poli quando siamo on-shell.

4.7.3 identità di Ward

Vediamo un esempio di processo 2 in 2, non in modo completo, ma solamente in modo da vedere e dimostrare in un caso specifico quelle che vengono chiamate **identità di Ward**. Tali identità sono molto importanti per la QED, infatti ripreso la solita lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{2\xi}(\partial A)^2$$

possiamo vedere che le identità di Ward dimostrano che la fisica, ovvero le osservabili, non dipendono dalla scelta di ξ , e dunque sono invarianti per trasformazioni di gauge della forma:

$$\delta\psi \longrightarrow -i\alpha(x)\psi \quad (4.7.28)$$

$$\delta A_\mu \longrightarrow -\partial_\mu\alpha(x). \quad (4.7.29)$$

Noi abbiamo, a suo tempo nella sezione §3.2, fatto già tutto il discorso riguardo i vettori di polarizzazione $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}$. Ricordiamo: avevamo introdotto un vettore di tipo luce $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$ e uno di tipo tempo $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$, tramite essi avevamo individuato un piano nello spazio di Minkowski e avevamo richiesto che le componenti ϵ_1 ed ϵ_2 fossero ortogonali, oltre che tra loro, anche a tale piano, cioè:

$$\epsilon_{(1,2)}^\mu k_\mu = \epsilon_{(1,2)}^\mu n_\mu = \epsilon_{(1)}^\mu \epsilon_\mu^{(2)} = 0. \quad (4.7.30)$$

Tutto ciò, tra cui la trasformazione di gauge, avviene nello spazio delle coordinate, ma noi abbiamo imparato, con la scrittura tramite sviluppo di Fourier, che l'informazione del vettore A_μ nello spazio dei momenti è contenuta tutta all'interno del vettore di polarizzazione $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}$. Dunque, fare la trasformazione di gauge (4.7.29) equivale a fare la trasformazione:

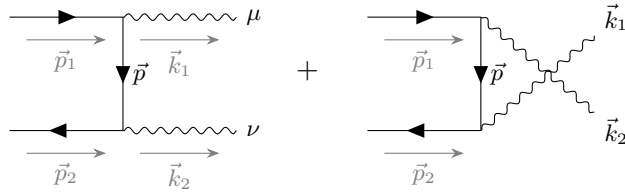
$$\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \longrightarrow \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) - \tilde{\alpha}(k)k_\mu \quad (4.7.31)$$

in cui k_μ è il quadri-impulso del fotone. Dunque, chiedere che le ampiezze di probabilità siano invarianti di gauge, si traduce nel dire che una volta trovate tali quantità, esse devono rimanere invariate se facciamo una trasformazione (4.7.31).

Come già detto non dimostreremo l'invarianza in termini generali, ma lo vedremo applicato ad un'esempio⁹, per cui vediamo il processo:

$$e^+ e^- \longrightarrow 2\gamma$$

che avrà i seguenti diagrammi:



e l'ampiezza di transizione totale (puoi verificare che i diagrammi hanno stesso segno) sarà data da:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = i(e^2) \Big[& \bar{v}(p_2) \not{\epsilon}^{(\lambda_2)}(k_2) (\not{p}_1 - \not{k}_1 - m)^{-1} \not{\epsilon}^{(\lambda_1)}(k_1) u(p_1) + \\ & + \bar{v}(p_2) \not{\epsilon}^{(\lambda_1)}(k_1) (\not{p}_1 - \not{k}_2 - m)^{-1} \not{\epsilon}^{(\lambda_2)}(k_2) u(p_1) \Big] \end{aligned} \quad (4.7.32)$$

in cui abbiamo utilizzato le regole di Feynman viste e contratto la matrice γ^μ del vertice con i vettori di polarizzazione $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}$. Ci viene comodo riscrivere:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\mu\nu} \varepsilon_\mu(k_1) \varepsilon_\nu(k_2) \quad (4.7.33)$$

ossia riscriviamo l'ampiezza $\mathcal{M}$, che dev'essere uno scalare, come la sua parte tensoriale opportunamente contratta con i fotoni finali. In termini generali possiamo avere m fotoni iniziali ed n finali:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mu_1 \dots \mu_n, \nu_1 \dots \nu_m} \varepsilon^{\mu_1}(k_1) \dots \varepsilon^{\mu_n}(k_n) \varepsilon^{*\nu_1}(l_1) \dots \varepsilon^{*\nu_m}(l_m). \quad (4.7.34)$$

Se noi a questo punto ci mettiamo a fare una trasformazione di gauge (4.7.31) su un qualsiasi fotone, ad esempio l' i -esimo, allora otterremo:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_n, \nu_1 \dots \nu_m} \varepsilon^{\mu_1}(k_1) \dots \varepsilon^{\mu_i}(k_i) \dots \varepsilon^{\mu_n}(k_n) \varepsilon^{*\nu_1}(l_1) \dots \varepsilon^{*\nu_m}(l_m) + \\ & + \tilde{\alpha}(k_i) \mathcal{M}_{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_n, \nu_1 \dots \nu_m} \varepsilon^{\mu_1}(k_1) \dots \varepsilon^{\mu_{i-1}}(k_{i-1}) k_i^{\mu_i} \varepsilon^{\mu_{i+1}}(k_{i+1}) \dots \varepsilon^{\mu_n}(k_n) \varepsilon^{*\nu_1}(l_1) \dots \varepsilon^{*\nu_m}(l_m) \end{aligned} \quad (4.7.35)$$

⁹ È capitato in passato che venisse chiesto in un esercizio dell'esame scritto di dimostrare l'identità di Ward per un qualche processo.

ma se l'ampiezza di probabilità è invariante, allora dev'essere soddisfatta la condizione:

$$\mathcal{M}_{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_n, \nu_1 \dots \nu_m} k_i^{\mu_i} = 0 \quad (4.7.36)$$

che è quella che viene chiamata **identità di Ward**. Dunque, dobbiamo controllare che l'ampiezza del nostro processo soddisfi tale identità.

Riprendiamo l'ampiezza del nostro processo di annichilazione (4.7.32) e facciamo una trasformazione di gauge¹⁰ di un $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}$ (indichiamo $\varepsilon_\nu(k_2) = \varepsilon_{\nu 2}$):

$$\delta \mathcal{M} = \mathcal{M}^{\mu\nu} k_{1\mu} \varepsilon_{\nu 2} \quad (4.7.40)$$

$$= i(ie)^2 \left[\bar{v}(p_2) \not{\varepsilon}_2^{(\lambda_2)} (\not{p}_1 - \not{k}'_1 - m)^{-1} \gamma^\mu k_{1\mu} u(p_1) + \right. \\ \left. + \bar{v}(p_2) \gamma^\mu k_{1\mu} (\not{p}_1 - \not{k}'_2 - m)^{-1} \not{\varepsilon}_2^{(\lambda_2)} u(p_1) \right] \quad (4.7.41)$$

$$= i(ie)^2 \left[\bar{v}(p_2) \not{\varepsilon}_2^{(\lambda_2)} (\not{p}_1 - \not{k}'_1 - m)^{-1} \not{k}'_1 u(p_1) + \right. \\ \left. + \bar{v}(p_2) \not{k}'_1 (\not{p}_1 - \not{k}'_2 - m)^{-1} \not{\varepsilon}_2^{(\lambda_2)} u(p_1) \right] \quad (4.7.42)$$

possiamo ricordarci che possiamo utilizzare la conservazione del quadri impulso:

$$k_1^\mu + k_2^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu \quad \implies \quad p_1^\mu - k_2^\mu = k_1^\mu - p_2^\mu \quad (4.7.43)$$

e ci serve anche utilizzare le identità:

$$\not{k}'_1 = (\not{p}_1 - m) - (\not{p}_1 - \not{k}'_1 - m) \quad (4.7.44)$$

$$\not{k}'_1 = (\not{p}_2 + m) + (\not{k}'_1 - \not{p}_2 - m) \quad (4.7.45)$$

poiché in questo modo abbiamo:

$$\delta \mathcal{M} = i(ie)^2 \left[\bar{v}(p_2) \not{\varepsilon}_2^{(\lambda_2)} (\not{p}_1 - \not{k}'_1 - m)^{-1} \times \right. \\ \times [(\not{p}_1 - m) - (\not{p}_1 - \not{k}'_1 - m)] u(p_1) + \\ \left. + \bar{v}(p_2) [(\not{p}_2 + m) + (\not{k}'_1 - \not{p}_2 - m)] \times \right. \\ \left. \times (\not{p}_1 - \not{k}'_2 - m)^{-1} \not{\varepsilon}_2^{(\lambda_2)} u(p_1) \right] \quad (4.7.46)$$

¹⁰Nota che consideriamo la variazione di $\mathcal{M}$ data solamente dalla trasformazione di ε poiché le uniche altre cose che possiamo variare sono gli spinori, ma essi trasformano come:

$$\delta u = -i\tilde{\alpha}u \quad , \quad \delta v = -i\tilde{\alpha}v \quad (4.7.37)$$

$$\delta \bar{u} = i\tilde{\alpha}\bar{u} \quad , \quad \delta \bar{v} = i\tilde{\alpha}\bar{v} \quad (4.7.38)$$

e inducono, in $\mathcal{M} = \bar{v}(\dots)u$ dunque:

$$\delta \mathcal{M} = -\tilde{\alpha}\bar{v}(\dots)u + \tilde{\alpha}\bar{v}(\dots)u = 0. \quad (4.7.39)$$

Quindi, il fatto che i campi trasformino linearmente in se stessi, mentre le polarizzazioni con dei termini aggiuntivi è rilevante nei nostri conti variazionali.

che ci piace molto poiché avendo e^+ ed e^- iniziali on-shell, possiamo utilizzare le relazioni base:

$$\begin{aligned} (\not{p} - m) u(p) &= 0 \quad , \quad (\not{p} + m) v(p) = 0 \\ \bar{u}(p)(\not{p} - m) &= 0 \quad , \quad \bar{v}(p)(\not{p} + m) = 0 \end{aligned} \quad (4.7.47)$$

e in questo modo:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{M} &= i(ie)^2 \left[\bar{v}(p_2) \not{\epsilon}_2^{(\lambda_2)} (\not{p}_1 - \not{k}_1 - m)^{-1} (\not{p}_1 - m) u(p_1) \right. \\ &\quad - \bar{v}(p_2) \not{\epsilon}_2^{(\lambda_2)} u(p_1) + \\ &\quad + \bar{v}(p_2) (\not{p}_2 + m) (\not{p}_1 - \not{k}_2 - m)^{-1} \not{\epsilon}_2^{(\lambda_2)} u(p_1) + \\ &\quad \left. + \bar{v}(p_2) \not{\epsilon}_2^{(\lambda_2)} u(p_1) \right] \end{aligned} \quad (4.7.48)$$

$$= i(ie)^2 \left[-\bar{v}(p_2) \not{\epsilon}_2^{(\lambda_2)} u(p_1) + \bar{v}(p_2) \not{\epsilon}_2^{(\lambda_2)} u(p_1) \right] \quad (4.7.49)$$

$$= 0. \quad (4.7.50)$$

Dunque, abbiamo visto che l'ampiezza di probabilità è invariante di gauge, poiché soddisfa l'identità di Ward, ma notiamo che in questa verifica abbiamo utilizzato il fatto che le particelle siano on-shell, dunque, tutto quello che abbiamo detto non vale per le funzioni di Green. Però siamo contenti perché abbiamo capito che tutto ciò che è legato ad $\mathcal{M}$, dunque anche la sezione d'urto σ , è invariante di gauge.

Chiaramente la verifica che abbiamo fatto si può ripetere anche per una trasformazione di $\varepsilon^{(\lambda_2)}(k_2)$ o per una trasformazione simultanea.

Una conseguenza dell'invarianza di gauge è che, anche nei casi in cui siano presenti dei fotoni con polarizzazioni non fisiche (quindi longitudinali o scalari), essi non danno contributo. Infatti, se noi ci calcoliamo il modulo quadro dell'ampiezza (4.7.32):

$$|\mathcal{M}|^2 = \varepsilon_\mu^{(\lambda_1)} \varepsilon_\rho^{*(\lambda_1)} \varepsilon_\nu^{(\lambda_1)} \varepsilon_\sigma^{*(\lambda_2)} \mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}^{\dagger\rho\sigma} \quad (4.7.51)$$

e se lo facciamo con polarizzazioni non fissate, allora abbiamo:

$$\frac{1}{4} \sum_{\lambda_1=1,2} \sum_{\lambda_2=1,2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1=1,2} \sum_{\lambda_2=1,2} \varepsilon_\mu^{(\lambda_1)} \varepsilon_\rho^{*(\lambda_1)} \varepsilon_\nu^{(\lambda_1)} \varepsilon_\sigma^{*(\lambda_2)} \mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}^{\dagger\rho\sigma} \quad (4.7.52)$$

in cui compare una somma solo sulle polarizzazioni fisiche.

Una piccola nota: noi a lezione abbiamo preso per buona la relazione (ma se vuoi puoi vedere la sezione §4.7.4):

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon_\nu^{*(\lambda)} = -\eta_{\mu\nu} + \frac{\bar{k}_\mu k_\nu + \bar{k}_\nu k_\mu}{k \cdot \bar{k}} \quad (4.7.53)$$

che è in qualche modo analoga alle relazioni valide per gli spinori. Notiamo però che la relazione (4.7.53) non è Lorentz covariante, non solo perché non abbiamo delle contrazioni, ma soprattutto perché stiamo sommando solo su alcune polarizzazioni λ e non su tutte. Inoltre, se abbiamo $k_\mu = (|k|, -\vec{k})$ il quadri-impulso del fotone, allora $\bar{k}_\mu = (|k|, \vec{k})$, ovvero è il quadri impulso con componenti spaziali cambiate di segno¹¹. Però se sommiamo su tutte le λ abbiamo:

$$\sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon_\nu^{*(\lambda)} = -\eta_{\mu\nu}. \quad (4.7.55)$$

Per esclusione possiamo dire:

$$\sum_{\lambda=0,3} \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon_\nu^{*(\lambda)} = \frac{\bar{k}_\mu k_\nu + \bar{k}_\nu k_\mu}{k \cdot \bar{k}} \quad (4.7.56)$$

e come vedremo non daranno contributo all'ampiezza. L'ampiezza non polarizzata (4.7.52) che vogliamo calcolare, è dunque:

$$= \frac{1}{4} \left(-\eta_{\mu\rho} + \frac{\bar{k}_\mu^1 k_\rho^1 + \bar{k}_\rho^1 k_\mu^1}{k^1 \cdot \bar{k}^1} \right) \left(-\eta_{\nu\sigma} + \frac{\bar{k}_\nu^2 k_\sigma^2 + \bar{k}_\sigma^2 k_\nu^2}{k^2 \cdot \bar{k}^2} \right) \mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}^{\dagger\rho\sigma} \quad (4.7.57)$$

$$= \frac{1}{4} \left[\mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu}^\dagger + \eta_{\mu\rho} \frac{k_\nu^2 \bar{k}_\sigma^2 + \bar{k}_\nu^2 k_\sigma^2}{k^2 \cdot \bar{k}^2} \mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}^{\dagger\rho\sigma} + \dots \right] \quad (4.7.58)$$

in cui non stiamo ignorando altri termini del tutto analoghi al secondo scritto. Consideriamo solamente il secondo termine:

$$\eta_{\mu\rho} \frac{k_\nu^2 \bar{k}_\sigma^2 + \bar{k}_\nu^2 k_\sigma^2}{k^2 \cdot \bar{k}^2} \mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}^{\dagger\rho\sigma} = \frac{k_\nu^2 \bar{k}_\sigma^2 + \bar{k}_\nu^2 k_\sigma^2}{k^2 \cdot \bar{k}^2} \mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}_\mu^{\dagger\sigma} \quad (4.7.59)$$

$$= \frac{k_\nu^2 \mathcal{M}^{\mu\nu} \bar{k}_\sigma^2 \mathcal{M}_\mu^\sigma + \bar{k}_\nu^2 \mathcal{M}^{\mu\nu} k_\sigma^2 \mathcal{M}_\mu^{\dagger\sigma}}{k^2 \cdot \bar{k}^2} \quad (4.7.60)$$

in cui possiamo vedere che i termini dove c'è $\bar{k}$ non sappiamo cosa fanno, ma dall'identità di Ward sappiamo che vale:

$$k_\nu^2 \mathcal{M}^{\mu\nu} = k_\sigma^2 \mathcal{M}_\mu^{\dagger\sigma} = 0 \quad (4.7.61)$$

¹¹Possiamo vedere che $\bar{k}$ non è un vettore di Lorentz, proprio a causa del segno cambiato delle componenti spaziali. Infatti se ad esempio prendiamo un vettore $v = (x, y)$ e ne facciamo una rotazione:

$$\begin{cases} x & \longrightarrow & x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y & \longrightarrow & y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (4.7.54)$$

se prendiamo $\bar{v} = (x, -y)$, allora esso trasformerà con i segni sbagliati rispetto a come trasforma un vettore nel piano x, y . Nel senso che: se prendiamo un vettore e facciamo una rotazione nel piano x, y di un angolo θ del tipo (4.7.54), allora possiamo vedere che un oggetto come $\bar{v}$, sotto la stessa trasformazione non trasforma come trasformerebbe un vettore (poiché ha dei segni scambiati).

per cui tutti i termini di quel tipo nella somma (4.7.58) non danno contributo e possiamo dunque dire che tutte le polarizzazioni non fisiche (ricorda la relazione (4.7.56)) non contribuiscono all'ampiezza di scattering, ed è indifferente se quando ci calcoliamo una probabilità non polarizzata utilizziamo la somma su tutte le λ (4.7.55), oppure quella con solo la somma sulle polarizzazioni fisiche (4.7.53).

In realtà quello che abbiamo appena visto vale qualsiasi sia $\mathcal{M}^{\mu\nu}$, poiché come notato non abbiamo mai utilizzato la sua espressione, nonostante conoscessimo quella del processo $e^- e^+ \rightarrow 2\gamma$.

4.7.4 Somma sulle polarizzazioni fisiche

Introduciamo un versore time-like $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ ed un vettore di tipo luce $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$, tramite i quali possiamo definire un piano nello spazio di Minkowski (4D); poi scegliamo ϵ_1 ed ϵ_2 ortogonali al piano e ortogonali tra loro, cioè tali per cui:

$$\epsilon_{(1,2)}^\mu k_\mu = \epsilon_{(1,2)}^\mu n_\mu = \epsilon_{(1)}^\mu \epsilon_\mu^{(2)} = 0 \quad (4.7.62)$$

poi scegliamo ϵ_0 parallelo ad n ; infine, che ϵ_3 si trova sul piano ed è ortogonale ad n .

Una scelta possibile che possiamo fare è:

$$\epsilon_\mu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\lambda} \quad (4.7.63)$$

cioè un vettore dove l'unico elemento non nullo è quello in posizione λ .

Scegliamo le polarizzazioni non fisiche in modo che:

$$\epsilon_{(0)}^\mu = n^\mu \quad , \quad \epsilon_{(3)}^\mu = \frac{k^\mu}{k^0} - n^\mu \quad (4.7.64)$$

e inoltre introduciamo:

$$\bar{k}^\mu = 2(k \cdot n) n^\mu - k^\mu \quad (4.7.65)$$

ovvero:

$$n^\mu = \frac{\bar{k}^\mu + k^\mu}{2k^0}. \quad (4.7.66)$$

Se sommiamo tutte le polarizzazioni otteniamo:

$$\sum_{\lambda=0,1,2,3} \epsilon^\mu(\lambda, p) \epsilon^{*\nu}(\lambda', p) \eta^{\lambda\lambda'} = \eta^{\mu\nu} \quad (4.7.67)$$

da cui ricaviamo la somma sulle polarizzazioni fisiche:

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon^\mu(\lambda, p) \epsilon^{*\nu}(\lambda', p) = -\eta^{\mu\nu} + \epsilon^\mu(0, p) \epsilon^{*\nu}(0, p) - \epsilon^\mu(3, p) \epsilon^{*\nu}(3, p) \quad (4.7.68)$$

$$= -\eta^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu - \left(\frac{k^\mu}{k^0} - n^\mu \right) \left(\frac{k^\nu}{k^0} - n^\nu \right) \quad (4.7.69)$$

$$= -\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{(k^0)^2} + \frac{k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu}{k^0} \quad (4.7.70)$$

$$= -\eta^{\mu\nu} - \frac{1}{2(k^0)^2} \left[2k^\mu k^\nu - k^\mu (\bar{k}^\nu + k^\nu) - k^\nu (\bar{k}^\mu + k^\mu) \right] \quad (4.7.71)$$

$$= -\eta^{\mu\nu} + \frac{k^\mu \bar{k}^\nu + \bar{k}^\mu k^\nu}{(\bar{k} \cdot k)}. \quad (4.7.72)$$

Notiamo che k^μ non è Lorentz invariante, tuttavia questo non è un problema perché questo termine si annulla grazie alle identità di Ward (vedi la sezione dopo): per un fotone nello stato finale $M = \epsilon^\mu(k) M_\mu$ abbiamo che:

$$k^\mu M_\mu = 0 \quad (4.7.73)$$

e quindi:

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon^\mu(\lambda, p) \epsilon^{*\nu}(\lambda', p) \longrightarrow -\eta^{\mu\nu}. \quad (4.7.74)$$

Capitolo 5

Il modello standard

Vediamo in questo capitolo la trattazione del modello standard delle particelle elementari. Come potremo vedere sarà utile tutto ciò che abbiamo imparato dall'inizio del corso di *Introduzione*, fino ad un paio di pagine fa'.

Come tutti gli altri argomenti del corso le referenze sono infinite, ma il professore consiglia in particolare:

- As far as quantum field theory is concerned, a human being or the center of a star isn't all that different from empty space. Iliopoulos J. Iliopoulos, *Elementary Particle Physics*, Oxford.
- [link](#) L. Alvarez Ganmè, M. A. Vazquez-Mozo, *Lectures on Field Theory and the Standard Model: A Symmetry-Oriented Approach*.

In rete si possono reperire altre note utili, tra cui:

- [link](#) J. Iliopoulos *Introduction to the Standard Model of the Electro-Weak Interactions*.
- [link](#) D. Tong *Lecture notes on the Standard Model*.

5.1 Struttura del modello standard (Glashow-Weisberg-Salam)

Nel corso degli anni i dati sperimentali e la teoria hanno portato ad una struttura della **Teoria standard delle particelle elementari**, raffigurata in figura 5.1, che utilizza:

- **Particelle di materia**, descritte da campi spinoriali (Dirac/Weyl), che si separano in:
 - *Leptoni* (elettrone, muone, tau e neutrini), che sono particelle elementari, ovvero senza ulteriori strutture interne.

- *Adroni*, costituiti da quark (up/down, charm/strange, top/bottom) i quali sono particelle fondamentali.
- **Interazioni** (elettromagnetica, debole e forte, ignoriamo la gravità), descritte da campi di gauge (vettoriali, dunque di spin 1), legati alla simmetria di gauge. Queste interazioni fanno parte del gruppo di gauge: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, in cui il termine $SU(3)$ riguarda la carica di colore (*Quantum Chromo-Dynamics*, che non trattiamo), il termine $SU(2)$ è l'isospin, $U(1)$ è l'ipercarica; inoltre $SU(2) \times U(1)$ unifica elettromagnetismo e forza debole (notiamo che da solo $U(1)$ non è l'elettromagnetismo, ma qualcosa di leggermente più complicato).
- **Settore di Higgs**, descritto da un campo scalare, il quale è responsabile della generazione dei termini di massa della materia (che non possiamo aggiungere direttamente in $\mathcal{L}$, ma vengono fuori dal meccanismo di Higgs, descritto nella sezione §5.2.5).

Modello Standard delle Particelle Elementari

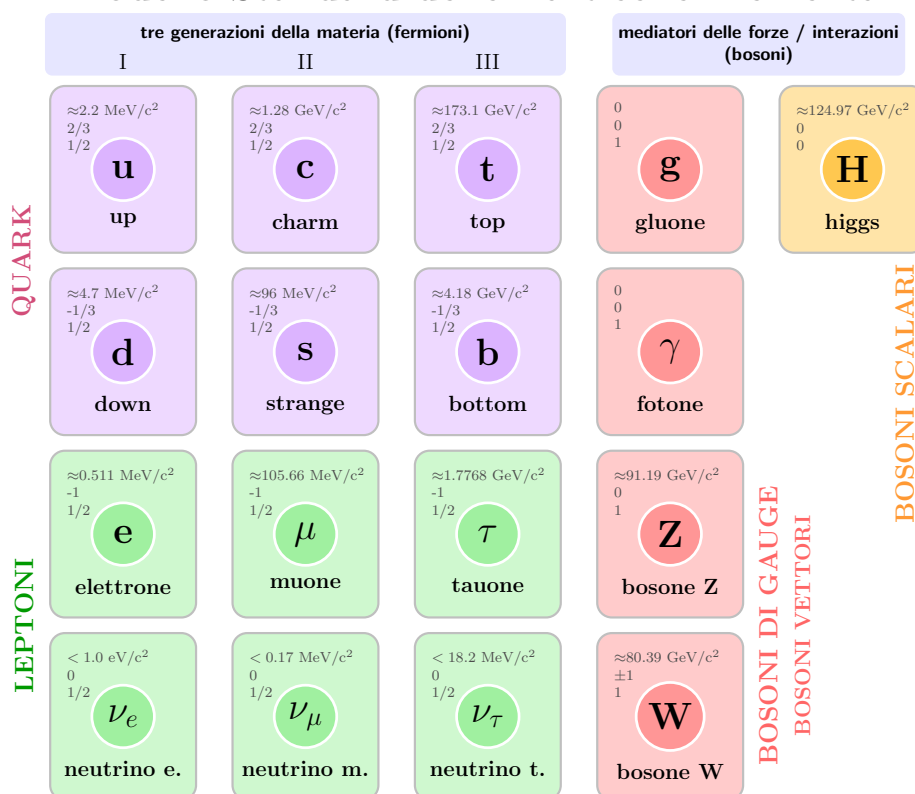


Figura 5.1

Non è oggetto di questo corso l'interazione forte, che interessa solamente i quark, ma studieremo l'unificazione della teoria elettromagnetica e nucleare debole.

Dunque, come vedremo, la lagrangiana del modello standard è costituita da un termine di Yang-Mills (bosoni vettori che mediano le interazioni), un termine per il settore di Higgs, un termine di materia (che descrive leptoni e quark) e delle interazioni tipo Yukawa. Analizzeremo passo passo ciascuno di questi termini, le loro interazioni e masse.

5.2 Rottura spontanea di simmetria

Ricominciamo tutto da capo e riprendiamo i concetti di simmetria, vuoto, particelle ed oscillazioni.

5.2.1 Il vuoto della teoria

Fin da subito non ci siamo fatti troppi problemi interpretativi; dopo aver scritto per la prima volta la lagrangiana del campo scalare e aver quantizzato, abbiamo detto che le particelle fisiche che si trovano negli esperimenti sono le oscillazioni (eccitazioni) dei campi. In realtà, la situazione è leggermente più complicata. Infatti, in QFT *le particelle sono i quanti (oscillazioni) dei campi attorno al vuoto*. Questo è in perfetta analogia a quando, in Fisica Classica, guardavamo le piccole oscillazioni attorno al minimo; infatti noi cercavamo i minimi del potenziale, espandevamo la lagrangiana attorno al minimo, diagonalizzavamo e trovavamo che gli autovalori della matrice erano le frequenze di oscillazione, mentre gli autovettori erano i nostri modi normali (oscillatori armonici che si disaccoppiano completamente). Ora, in QFT succede la stessa cosa, in cui le particelle sono l'analogo dei modi normali di oscillazione e le masse fisiche sono l'analogo delle frequenze.

In realtà il problema era che fino ad un attimo fa' noi affermavamo solamente la cosa sbagliata, ma di fatto facevamo tutto correttamente. Eravamo indotti a non sbagliare poiché qualcuno ci diceva i segni corretti da mettere ai vari termini all'interno della lagrangiana.

Quindi, presa la lagrangiana per n campi scalari:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - V(\phi^i) \quad (5.2.1)$$

siamo interessati a trovare il vuoto della teoria, ovvero la configurazione che minimizza l'energia della teoria, dunque che minimizza il potenziale (essendo il termine cinetico sempre positivo o al più nullo). Nota che buttiamo dentro a $V(\phi^i)$ tutto ciò che non è cinetico, dunque anche il termine di massa. Quando diciamo **vuoto** intendiamo dire che *il valore di aspettazione sul vuoto (VEV) dei campi della lagrangiana è proprio il minimo del potenziale* (spero

si possa capire meglio nel seguito della sezione). Intendo dire che: abbiamo un qualche $V(\phi)$ tra le mani, lo minimizziamo e troviamo che ha un minimo in $\tilde{\phi}$; tale valore sarà il nostro *vuoto* e sarà tale per cui il VEV dei campi varrà:

$$\langle \phi \rangle = \tilde{\phi}. \quad (5.2.2)$$

Però noi vogliamo sempre che il vuoto rispetti l'invarianza di Poincaré, dunque l'unico tipo di campo che può minimizzare l'energia è il campo scalare. Infatti, i campi vettoriali, e spinoriali, sono vettori e puntano in una qualche direzione dello spazio, per cui rompono l'invarianza per rotazioni. Se per caso prendessimo $\vec{v}$ e ne facessimo un VEV, esso potrebbe cambiare sotto rotazioni, e renderebbe il vuoto non Poincaré invariante.¹

Quando studiamo le configurazioni di minimo chiaramente non guardiamo la lagrangiana, ma l'energia, ossia l'hamiltoniana della teoria:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi^i \pi^i + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi^i)(\vec{\nabla} \phi^i) + V(\phi^i) \quad (5.2.5)$$

$$= \frac{1}{2} \pi^i \pi^i + W(\phi^i) \quad (5.2.6)$$

dunque, le configurazioni di vuoto sono quelle che minimizzano $W(\phi^i)$, che è equivalente a minimizzare $V(\phi^i)$ (poiché abbiamo detto che i vettori $\vec{\nabla} \phi$ non vanno bene). In realtà minimizziamo $V(\phi^i)$, poiché siamo obbligati da Poincaré a prendere ϕ costante, visto che nessun termine del tipo $\partial_\mu \phi$, che compare in $\mathcal{L}$, va bene essendo un vettore. Siamo quasi contenti perché gli unici campi di cui dovremo preoccuparci di trovare un minimo saranno quelli scalari, mentre le particelle fermioniche o vettoriali saranno sempre delle fluttuazioni dei campi attorno a 0.

Dunque, la condizione di minimo è:

$$\frac{\delta V}{\delta \phi^i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (5.2.7)$$

e gli estremi solitamente li indichiamo con:

$$\phi^i = \langle \phi^i \rangle = \phi_0^i. \quad (5.2.8)$$

¹Vediamo che anche nel caso di campo vettoriale o spinoriale costante non possiamo dargli un VEV. Infatti, sappiamo che per una trasformazione generica abbiamo le trasformazioni:

$$\delta \psi = \omega_{\mu\nu} \left(\frac{i}{2} \gamma^{\mu\nu} + x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu \right) \psi \quad (5.2.3)$$

$$\delta \phi = \omega_{\mu\nu} (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \phi \quad (5.2.4)$$

dunque, risulta chiaro che anche nel caso di campi spinoriali costanti (dunque con derivate nulle), la variazione $\delta \psi$ non è nulla poiché l'azione di $\gamma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ mescola le componenti di ψ . Caso diverso per il campo scalare. Concludiamo che un VEV di ϕ è Poincaré invariante, mentre per un campi ψ questo non è garantito.

Abbiamo detto che dopo aver trovato il vuoto (minimo del potenziale), dobbiamo espandere la lagrangiana rispetto esso. Il potenziale risulta:

$$V(\phi^i) \simeq V(\phi_0^i) + \underbrace{\sum_i \frac{\delta V}{\delta \phi^i} \Big|_{\phi^i=\phi_0^i}}_{=0} (\phi^i - \phi_0^i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\delta^2 V}{\delta \phi^i \delta \phi^j} \Big|_{\phi^i=\phi_0^i} (\phi^i - \phi_0^i)(\phi^j - \phi_0^j) \quad (5.2.9)$$

e se chiamiamo:

$$\varphi^i = \phi^i - \phi_0^i \quad (5.2.10)$$

essi sono i nostri *campi quantistici*, associati alle fluttuazioni attorno al vuoto e che ci permettono di riscrivere la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\delta^2 V}{\delta \phi^i \delta \phi^j} \Big|_{\phi^i=\phi_0^i} \varphi^i \varphi^j + \dots \quad (5.2.11)$$

in cui riusciamo a individuare i termini quadratici nei campi e nelle derivate, che ci forniscono la parte libera della teoria, e nei termini successivi dello sviluppo del potenziale possiamo individuare (perché non è detto che siano presenti) i termini di interazione. Nota che il termine $V(\phi_0^i)$ non lo inseriamo poiché è un termine costante e può essere riscritto (perché non stiamo facendo una teoria di gravità; ricorda i discorsi sull'energia di vuoto). Noi sappiamo bene che il termine quadratico nei campi ci fornisce la massa delle particelle rappresentate da ϕ^i ; per questo chiamiamo **matrice di massa**:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta \phi^i \delta \phi^j} \Big|_{\phi^i=\phi_0^i} \equiv M_{ij}^2 \quad (5.2.12)$$

che è chiaramente un oggetto simmetrico, ma è generalmente un oggetto qualsiasi e contiene tutta l'informazione sulle particelle e le loro masse.

Se ipotizzassimo di essere in una teoria con solo la parte quadratica della lagrangiana, allora avremmo le equazioni del moto:

$$\square \varphi^i + \sum_j M_{ij}^2 \varphi^j = 0 \quad (5.2.13)$$

in cui se $M_{ij}^2 \varphi^j$ non è diagonale, allora ci mischia i diversi campi φ^j , il che non ci piace molto, poiché noi associamo una particella al campo se riusciamo ad associarne solo uno e a non farla cambiare nella sua evoluzione (quando consideriamo teorie interagenti tutto si complica ovviamente). Però non ci disperiamo perché possiamo diagonalizzare la matrice, mettendo tutti gli autovalori m_i^2 sulla diagonale, non mischiando più tutti i campi e potendo

assegnare una particella elementare con massa m_i^2 ad ogni campo $\hat{\varphi}^i$ che sono gli autovettori di $M_{ij}^2 \varphi^j$. Generalmente, i campi fisici $\hat{\varphi}^i$ sono combinazioni dei φ^i , da cui non riuscivamo ad intuire nulla. Otteniamo dunque:

$$\square \hat{\varphi}^i + m_i^2 \hat{\varphi}^2. \quad (5.2.14)$$

Non abbiamo discusso un'eventualità che potrebbe capitare, ossia quella in cui il termine cinetico non sia diagonale e quindi del tipo:

$$\frac{1}{2} T_{ij} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j \quad (5.2.15)$$

con eventualmente $T_{ij} = T_{ij}(\phi)$, che quindi dovremo sviluppare attorno al vuoto come:

$$T_{ij}(\phi) \sim T_{ij}(\phi_0) + \left. \frac{\delta T_{ij}}{\delta \phi_k} \right|_{\phi_0} \varphi^k + \dots \quad (5.2.16)$$

e nel caso in cui ci siano termini dello sviluppo dipendenti dai campi, all'interno della lagrangiana otterremmo dei termini di interazione di tipo derivativo, che non sono strani, ma semplicemente noi non li abbiamo studiati.²

In casi di termine cinetico non diagonale non dobbiamo diagonalizzare solamente matrice di massa, ma dobbiamo risolvere l'equazione secolare:

$$\det\{M_{ij}^2 - \lambda T_{ij}\} = 0 \quad (5.2.17)$$

con T_{ij} al posto dell'identità.

Vediamo un esempio rapido per fissare un'attimo la procedura che stiamo descrivendo e poi andiamo a vedere i motivi per cui diciamo tutto ciò. Consideriamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (5.2.18)$$

in cui abbiamo il potenziale:

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (5.2.19)$$

la cui unica differenza rispetto al caso studiato nei capitoli precedenti è il segno – davanti al termine massivo; questo cambia tutto. Infatti, l'andamento del potenziale è raffigurato in figura 5.2, in cui possiamo notare che a differenza del caso di una parabola che si somma ad una quartica (in cui l'unico minimo era $\phi = 0$), ora abbiamo un massimo e due minimi, che si trovano in:

$$\frac{\delta V}{\delta \phi} = \frac{\lambda}{3!} \phi^3 - m^2 \phi = 0 \implies \begin{cases} \phi = 0 \\ \phi_{\pm} = \pm \sqrt{6m^2/\lambda} \end{cases} \quad (5.2.20)$$

²C'è una prova d'esame in cui compaiono e in cui ci si rende conto che portano a vertici di interazione dipendenti dall'impulso.

e possiamo vedere che:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta \phi^2} = \frac{\lambda}{2} \phi^2 - m^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V''(0) = -m^2 \\ V''(\phi_{\pm}) = 2m^2 \end{cases} \quad (5.2.21)$$

ossia che, assumendo $m^2 > 0$, $\phi = 0$ è un massimo, mentre $\phi_{\pm}$ sono dei minimi. Arrivati a questo punto possiamo espandere attorno al vuoto (possiamo scegliere indifferentemente uno dei due $\phi_{\pm}$) utilizzando la fluttuazione attorno al minimo:

$$\varphi = \phi - \phi_+ \quad (5.2.22)$$

per ottenere (utilizzando le espressioni delle derivate terza e quarta del potenziale) una lagrangiana ed un'hamiltoniana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi - \frac{1}{2} (2m^2) \varphi^2 - \frac{1}{3!} \sqrt{6m^2 \lambda} \varphi^3 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \quad (5.2.23)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} (2m^2) \varphi^2 + \frac{1}{3!} \sqrt{6m^2 \lambda} \varphi^3 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \quad (5.2.24)$$

dunque, espandendo attorno al vuoto, continuiamo ad avere una particella scalare poiché non può cambiare la sua natura, ma vediamo per prima cosa che la massa delle particelle associate a φ è $2m^2$ (e non m^2 che compariva inizialmente nella lagrangiana), ma soprattutto vediamo che sorgono delle interazioni di ordine cubico e quartico (e non siamo in presenza di una teoria libera come sembrava inizialmente).

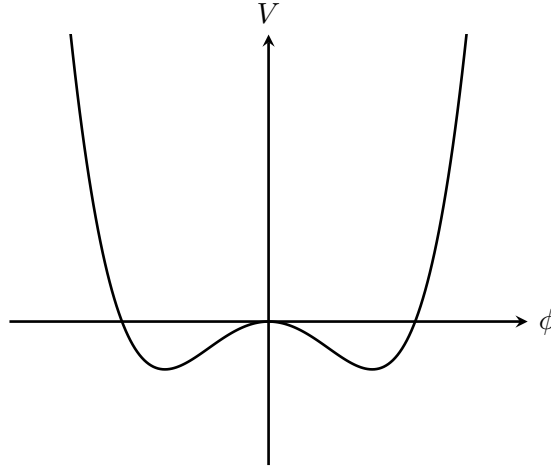


Figura 5.2: Tipico andamento a "sombrero messicano" del potenziale.

Dunque, in generale dobbiamo sempre controllare che la nostra lagrangiana sia scritta intorno ad un minimo del potenziale, e se così non fosse, allora non siamo in grado di leggere alcuna informazione da essa.

5.2.2 Simmetrie alla Wigner e alla Nambu-Goldstone

Noi in generale partiamo con delle simmetrie all'interno della nostra lagrangiana, o in generale all'interno della nostra azione, che dipendono dalla forma del potenziale. Ad esempio, se abbiamo un $V(\phi)$ che dipende solo dal modulo quadro dei campi, allora esso è invariante per rotazioni. Il punto del discordo è che queste simmetrie dell'azione possono realizzarsi, dal punto di vista quantistico, in due modi differenti, le cui conseguenze portano a risultati molto importanti per la QFT. Queste due realizzazioni sono:

1. Realizzazione alla **Wigner**: il vuoto è invariante per le trasformazioni di simmetria.
2. Realizzazione alla **Nambu-Goldstone**: Il vuoto non è invariante e si dice che la *fase è spontaneamente rotta*³. Questa realizzazione implica l'esistenza di bosoni a massa nulla all'interno della teoria.

Vediamo un caso specifico in cui abbiamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - V(\phi^i \phi^i) \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (5.2.25)$$

e chiaramente è una teoria invariante per trasformazioni di $SO(N)$ globali:

$$\phi^i \longrightarrow R^i_j \phi^j \quad , \quad \delta \phi_i = \omega_{ij} \phi^j. \quad (5.2.26)$$

Il punto è che se la lagrangiana (5.2.25) è invariante per trasformazioni di $SO(N)$, lo sono anche il termine cinetico e potenziale separatamente. Dunque deve valere:

$$0 = \delta V = \frac{\delta V}{\delta \phi^i} \delta \phi^i \quad \forall \text{ punto} \quad (5.2.27)$$

e di conseguenza anche la sua derivata sarà nulla:

$$\frac{\delta}{\delta \phi^j} \left(\frac{\delta V}{\delta \phi^i} \delta \phi^i \right) = \frac{\delta^2 V}{\delta \phi^i \delta \phi^j} \delta \phi^i + \frac{\delta V}{\delta \phi^i} \frac{\delta(\delta \phi^i)}{\delta \phi^j} = 0 \quad (5.2.28)$$

per ogni punto ϕ^i , ed in particolare nel vuoto. Se supponiamo di aver minimizzato V e aver trovato il vuoto $\langle \phi^i \rangle$, allora conosciamo la matrice di massa:

$$M_{ij}^2 = \left. \frac{\delta^2 V}{\delta \phi^i \delta \phi^j} \right|_{\phi^i = \langle \phi^i \rangle} \quad (5.2.29)$$

³Tieni a mente che le simmetrie delle nostre teorie non sono mai rotte in modo esplicito (altrimenti ci sarebbero non pochi problemi), infatti la nostra lagrangiana rimane sempre invariante per trasformazioni di simmetria; quello che intendiamo con *rottura spontanea di simmetria* è che il gruppo di simmetria della teoria si continua a realizzare, ma in un modo differente.

e possiamo riscrivere (5.2.28) come:

$$\underbrace{\frac{\delta^2 V}{\delta \phi^i \delta \phi^j}}_{M_{ij}^2} \bigg|_{\phi^i = \langle \phi^i \rangle} \delta \phi^i + \underbrace{\frac{\delta V}{\delta \phi^i}}_{=0} \bigg|_{\phi^i = \langle \phi^i \rangle} \frac{\delta(\delta \phi^i)}{\delta \phi^j} \bigg|_{\phi^i = \langle \phi^i \rangle} = 0 \quad (5.2.30)$$

$$M_{ij}^2 \delta \langle \phi^i \rangle = 0. \quad (5.2.31)$$

Nota che (5.2.31) è un'equazione agli autovalori. Nonostante la nostra teoria, quindi $\mathcal{L}$ ed $\mathcal{H}$, è invariante sotto trasformazioni globali di $SO(N)$, il vuoto in MQ e QFT non è detto che lo sia.

Nel caso in cui il vuoto è invariante, dunque:

$$\delta \langle \phi^i \rangle = 0 \quad (5.2.32)$$

allora, diciamo che la simmetria è realizzata alla Wigner, riusciamo ad aggiungere poco alla nostra teoria e sappiamo che è soddisfatta (5.2.31).

Nel caso in cui il vuoto, per qualche i , non sia invariante:

$$\delta \langle \phi^i \rangle \neq 0 \quad (5.2.33)$$

allora la simmetria è realizzata alla Nambu-Goldstone e abbiamo la relazione (5.2.31) che ci dice che le direzioni in cui $\langle \phi_i \rangle \neq 0$, corrispondono ai ϕ_i che rompono il vuoto, ossia che non sono invarianti, e hanno autovalori di massa nulli (cioè sono autovettori nulli). Dunque, esistono delle particelle a massa nulla e vengono chiamati **bosoni di Goldstone**.

Enunciamo in termini generali il teorema di Goldstone.

5.2.3 Teorema di Goldstone

Preso un gruppo di simmetria globale G con T^i generatori, allora lo possiamo spezzare in due parti. Supponendo valga $\dim G = n_A + n_\alpha$ con: n_α generatori H^α che preservano il vuoto $(H^\alpha)_b^a \langle \phi^b \rangle = 0$ (Wigner); n_A generatori "rotti" K^A che non preservano il vuoto $(K^A)_b^a \langle \phi^b \rangle \neq 0$ (Nambu-Goldstone). Per ognuno di quest'ultimi generatori rotti esiste un autovettore:

$$v_a^A = (K^A)_b^a \langle \phi^b \rangle \quad (5.2.34)$$

calcolato rispetto ad M_{ac}^2 , con autovalore nullo, ovvero per cui abbiamo:

$$M_{ac}^2 v_a^A = 0 \quad (5.2.35)$$

quindi, a ciascun generatore rotto associamo una particella a massa nulla, detta **bosone di Goldstone**.

Nota. Non vale l'inverso di questo teorema; per esempio se abbiamo $V = 0$ $\phi = \text{cost}$ e questo restituisce un vuoto, abbiamo delle simmetrie e abbiamo delle particelle mass-less, ma questo è una conseguenza del fatto che $V = 0$ e non c'entra nulla con Goldstone.

5.2.4 Esempio Scalar QED

Consideriamo la lagrangiana della teoria:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - \frac{1}{2} m^2 (\phi^i \phi^i) - \frac{\lambda}{4} (\phi^i \phi^i)^2 \quad (5.2.36)$$

ossia una sorta di QED per campi scalari. Abbiamo invarianza per trasformazioni $SU(2)$ globali, del tipo:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (5.2.37)$$

Possiamo studiare il potenziale:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 (\phi^i \phi^i) + \frac{\lambda}{4} (\phi^i \phi^i)^2 \quad (5.2.38)$$

e calcoliamo:

$$\frac{\delta V}{\delta \phi^i} = m^2 \phi^i + \frac{\lambda}{2} (\phi_k \phi_k) \phi^i \quad (5.2.39)$$

se vediamo i punti stazionari essi risultano essere:

$$\phi^i = 0 \quad (5.2.40)$$

$$\phi_k \phi_k = -\frac{2m^2}{\lambda}. \quad (5.2.41)$$

Ci conviene calcolare per utilità futura:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta \phi^i \delta \phi^j} = m^2 + \frac{\lambda}{2} (\phi_k \phi_k) \delta^i_j + \lambda \phi_i \phi_j. \quad (5.2.42)$$

Dobbiamo ora differenziare due casi. Puoi vedere l'immagine 5.3.

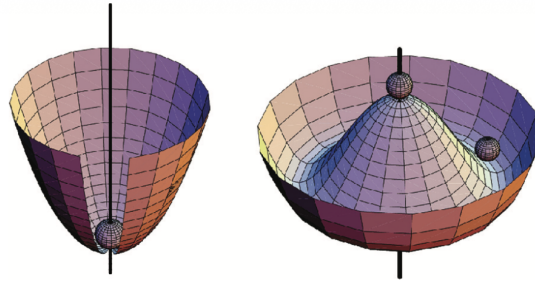


Figura 5.3: La funzione $V(\phi)$ per $m^2 > 0$ (sinistra) e $m^2 < 0$ (destra).

Nel caso $m^2 > 0$ il minimo del potenziale lo abbiamo per $\phi^i = 0$, dunque il nostro vuoto è:

$$\langle \phi^i \rangle = 0 \quad , \quad i = 1, 2 \quad (5.2.43)$$

per cui i nostri campi fisici saranno:

$$\varphi^i = \phi^i \quad (5.2.44)$$

e la lagrangiana, espansa attorno al vuoto; risulterà essere:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^1 \partial^\mu \varphi^1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^2 \partial^\mu \varphi^2 - \frac{1}{2} m^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \dots \quad (5.2.45)$$

da cui possiamo leggere (essendo la matrice di massa già diagonale) che entrambe le particelle φ_1 e φ_2 hanno la stessa massa (classica) m .

Caso diverso però se supponiamo $m^2 < 0$. In questo caso possiamo vedere che:

$$\left. \frac{\delta^2 V}{\delta \phi_i \delta \phi_j} \right|_{\phi_i=0} = m^2 < 0 \quad (5.2.46)$$

$$\left. \frac{\delta^2 V}{\delta \phi_i \delta \phi_j} \right|_{\phi_i \phi_j = -2m^2/\lambda} = -2m^2 > 0 \quad (5.2.47)$$

dunque $\phi^i = 0$ è un massimo e il nostro vuoto è:

$$\phi_k \phi_k = -\frac{2m^2}{\lambda}. \quad (5.2.48)$$

Una possibile scelta di parametrizzare il vuoto è:

$$\langle \phi_1 \rangle = \sqrt{\frac{-2m^2}{\lambda}} \quad , \quad \langle \phi_2 \rangle = 0 \quad (5.2.49)$$

che è una scelta legittima poiché a noi quello che interessa è che la lunghezza del vettore dei campi sia tale da soddisfare (5.2.48), ma possiamo scegliere di parametrizzare i nostri vettori come più ci piace⁴. In questo caso abbiamo:

$$\varphi = \phi_i - \langle \phi_i \rangle. \quad (5.2.51)$$

⁴Nota che potremmo rifare tutto l'esercizio parametrizzando il vuoto con:

$$\langle \phi_1 \rangle = \sqrt{\frac{-2m^2}{\lambda}} \cos \alpha \quad , \quad \langle \phi_2 \rangle = \sqrt{\frac{-2m^2}{\lambda}} \sin \alpha. \quad (5.2.50)$$

Possiamo calcolarci i vari termini dello sviluppo del potenziale (sfruttiamo (5.2.42)):

$$\left. \frac{\delta^2 V}{\delta \phi_1^2} \right|_{\langle \phi_1 \rangle} = -2m^2 \quad (5.2.52)$$

$$\left. \frac{\delta^2 V}{\delta \phi_2^2} \right|_{\langle \phi_2 \rangle} = m^2 \quad (5.2.53)$$

$$\left. \frac{\delta^2 V}{\delta \phi_1 \delta \phi_2} \right|_{\langle \phi_1 \rangle, \langle \phi_2 \rangle} = 0 + 0 + \lambda \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \rangle = 0 \quad (5.2.54)$$

che possiamo inserire all'interno dell'espansione della lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^1 \partial^\mu \varphi^1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^2 \partial^\mu \varphi^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi_1^2 + \dots \quad (5.2.55)$$

da cui possiamo vedere che il campo φ_2 ha massa nulla. Infatti possiamo vedere che $\langle \phi_i \rangle$ non è invariante per trasformazioni globali di $SU(2)$:

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_1 \rangle \\ \langle \phi_2 \rangle \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \phi_1 \rangle \\ \langle \phi_2 \rangle \end{pmatrix} \quad (5.2.56)$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \phi_1 \rangle \cos \theta + \langle \phi_2 \rangle \sin \theta \\ -\langle \phi_1 \rangle \sin \theta + \langle \phi_2 \rangle \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.2.57)$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \phi_1 \rangle \cos \theta \\ -\langle \phi_1 \rangle \sin \theta \end{pmatrix} \quad (5.2.58)$$

come volevasi dimostrare. Siamo passati da un vuoto diretto solo lungo ϕ_1 , poiché $\langle \phi_2 \rangle = 0$, ad un vuoto con entrambe le componenti diverse da zero.

Osservazione. (è un caso molto simile alla prova del 03-02-2026) In generale, se abbiamo una simmetria globale $SO(N)$, e un vuoto del tipo:

$$\langle \phi_1 \rangle = \phi_1^0, \quad \langle \phi_i \rangle = 0 \quad i = 2, \dots, N \quad (5.2.59)$$

allora lo stabilizzatore⁵ del vuoto è $SO(N-1)$. Visti i $N(N-1)/2$ generatori di $SO(N)$ e i $[(N-1)(N-2)]/2$ generatori di $SO(N-1)$, abbiamo che il numero di bosoni di Goldstone è:

$$\frac{N(N-1)}{2} - \frac{(N-1)(N-2)}{2} = N-1 \quad (5.2.60)$$

ossia la dimensione del gruppo di simmetria diminuito di 1.

⁵Definiamo lo *stabilizzatore di un vettore* come il gruppo di trasformazioni che lo lasciano invariato.

Però noi potremmo parametrizzare il vuoto anche in un altro modo; che in molte situazioni è più conveniente. Infatti, sempre rimanendo nel caso $m^2 < 0$, possiamo scrivere:

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad , \quad \phi^\dagger = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad (5.2.61)$$

in questo modo⁶:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger - m^2 \phi \phi^\dagger - \lambda (\phi \phi^\dagger)^2 \quad (5.2.63)$$

che a sua volta possiamo anche riparametrizzare:

$$\phi = \rho e^{i\theta} \quad , \quad \phi^\dagger = \rho e^{-i\theta} \quad (5.2.64)$$

con ρ e θ campi reali. Facciamo questo poiché in questo modo vediamo:

$$\partial_\mu \phi = (\partial_\mu \rho + i\rho \partial_\mu \theta) e^{i\theta} \quad (5.2.65)$$

$$\partial_\mu \phi^\dagger = (\partial_\mu \rho - i\rho \partial_\mu \theta) e^{-i\theta} \quad (5.2.66)$$

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger = \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta \quad (5.2.67)$$

e possiamo scrivere la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - m^2 \rho^2 - \lambda \rho^4 \quad (5.2.68)$$

in cui vediamo che il bosone di Goldstone, quello a massa nulla, è proprio il campo θ . Ma con i cambi che abbiamo fatto possiamo riscrivere il vuoto come:

$$\langle \rho \rangle = \sqrt{-\frac{2m^2}{\lambda}} \quad , \quad \langle \theta \rangle = 0 \quad (5.2.69)$$

possiamo studiare il potenziale:

$$V = m^2 \rho^2 + \lambda \rho^4 \quad (5.2.70)$$

$$\frac{\delta V}{\delta \rho} = 2m^2 \rho + 4\lambda \rho^3 \quad (5.2.71)$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta \rho^2} = 2m^2 + 12\lambda \rho^2 \quad (5.2.72)$$

e vedere che:

$$\left. \frac{\delta^2 V}{\delta \rho^2} \right|_{\langle \rho \rangle} = 2m^2 + 12\lambda \left(-\frac{2m^2}{\lambda} \right) = -22m^2 \quad (5.2.73)$$

⁶Ci sono i conti espliciti nel file dedicato nella mia pagina personale, ma basta invertire la relazione scrivendo:

$$\phi_1 = \frac{\phi + \phi^\dagger}{\sqrt{2}} \quad , \quad \phi_2 = -i \frac{\phi - \phi^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (5.2.62)$$

e sostituire in $\mathcal{L}$.

dunque scrivendo il campo fisico $\xi = \rho - \langle \rho \rangle$ abbiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi + \langle \rho \rangle)^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - (-22m^2) \xi^2 + \dots \quad (5.2.74)$$

dunque confermiamo che il bosone di Goldstone è il campo θ , mentre il nostro campo scalare fisico è:

$$\xi \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \xi \quad (5.2.75)$$

in modo da riscalarare i coefficienti della lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi + \langle \rho \rangle)^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{1}{2} (-22m^2) \xi^2 + \dots \quad (5.2.76)$$

da cui leggiamo la massa classica dei campi ξ .

5.2.5 Meccanismo di Higgs

Quando si verifica la rottura spontanea di una simmetria di gauge le conseguenze sono diverse dal caso precedente. In particolare, succede che i bosoni di Goldstone non esitono (non ci sono particelle scalari senza massa), ma al loro posto alcuni campi di gauge diventano massivi. Questo fenomeno è conosciuto come *meccanismo di Higgs*, e come facilmente immaginabile sarà cruciale per i bosoni del modello standard.

Consideriamo il caso di una simmetria $U(1)$ locale. Prendiamo un campo complesso scalare (in questo modo la rotazione la rappresentiamo come una fase):

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (5.2.77)$$

e se vogliamo che la teoria sia invariante per trasformazioni:

$$\phi \longrightarrow e^{i\alpha} \phi \quad (5.2.78)$$

$$\phi^\dagger \longrightarrow e^{-i\alpha} \phi^\dagger \quad (5.2.79)$$

ma con $\alpha = \alpha(x)$, allora dobbiamo introdurre i campi di gauge in modo da costruire la derivata covariante:

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (5.2.80)$$

in questo modo:

$$\mathcal{D}_\mu \phi \longrightarrow \partial_\mu (e^{i\alpha} \phi) + i A'_\mu e^{i\alpha} \phi \quad (5.2.81)$$

$$= (\partial_\mu \phi + i \partial_\mu \phi + i A'_\mu \phi) e^{i\alpha} \quad (5.2.82)$$

e quindi dobbiamo richiedere:

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha. \quad (5.2.83)$$

Se diamo dinamica anche al campo di gauge, allora abbiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (5.2.84)$$

in cui chiaramente consideriamo il caso abeliano. Vedendo l'espressione della lagrangiana saremmo tentati di dire che i campi ϕ e $\phi^\dagger$ abbiano massa m , mentre il campo A_μ è mass-less. Però ciò che non è sempre vero. Studiamo il potenziale:

$$V(\phi^\dagger \phi) = m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (5.2.85)$$

nel caso $m^2 > 0$ abbiamo il vuoto:

$$\langle \phi \rangle = 0 \quad , \quad \langle \phi^\dagger \rangle = 0 \quad (5.2.86)$$

e risulta chiaro che il vuoto sia realizzato alla Wigner ed è invariante per le nostre trasformazioni. Se espandiamo (5.2.84) attorno al vuoto, otteniamo la stessa forma di lagrangiana e possiamo affermare che ϕ e $\phi^\dagger$ hanno massa m , mentre il campo A_μ è mass-less.

Nel caso $m^2 < 0$ conviene riscrivere i campi come:

$$\phi = \rho e^{i\theta} \quad , \quad \phi^\dagger = \rho e^{-i\theta} \quad (5.2.87)$$

in questo modo abbiamo il potenziale:

$$V(\rho) = m^2 \rho^2 + \frac{\lambda}{2} \rho^4 \quad (5.2.88)$$

e se studiamo le sue derivate abbiamo:

$$\begin{aligned} V' &= 2m^2 \rho + 2\lambda \rho^3 \\ \Rightarrow \quad V' = 0 &: \begin{cases} \rho = 0 & (\text{massimo}) \\ \rho = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}} \equiv \rho_0 & (\text{minimo}) \end{cases} \\ V''(\rho) \Big|_{\rho_0} &= 2m^2 + 6\lambda \rho_0^2 \\ &= 2m^2 - 6m^2 = -4m^2 \\ V'''(\rho) \Big|_{\rho_0} &= 12\lambda \rho_0 = 12\sqrt{-m^2 \lambda} \\ V^{IV}(\rho) \Big|_{\rho_0} &= 12\lambda. \end{aligned}$$

Però ora non abbiamo più il vuoto preservato, e se ci riscrivessimo la lagrangiana potremmo notare che θ sarebbe il nostro bosone di Goldstone. Ma non è così semplice.

Se scriviamo $\zeta = \rho - \rho_0$ ed espandiamo attorno al vuoto abbiamo:

$$\mathcal{D}_\mu \phi = (\partial_\mu + iA_\mu) \rho e^{i\theta} \quad (5.2.89)$$

$$= [\partial_\mu \rho + i(\partial_\mu \phi + A_\mu) \rho] e^{i\theta} \quad (5.2.90)$$

$$= [\partial_\mu \zeta + i(\zeta + \rho_0)(\partial_\mu \theta + A_\mu)] e^{i\theta} \quad (5.2.91)$$

per cui il termine cinetico:

$$(\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) = \partial_\mu \zeta \partial^\mu \zeta + (\rho_0^2 + 2\zeta \rho_0 + \zeta^2) (\partial_\mu \theta + A_\mu)^2 \quad (5.2.92)$$

che però ci fa rendere conto che dobbiamo riscalarlo i campi di un fattore $\sqrt{2}$ i campi ζ , poiché non abbiamo la giusta normalizzazione:

$$\zeta \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta. \quad (5.2.93)$$

Facendo tutto questo abbiamo la lagrangiana espansa:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \zeta \partial^\mu \zeta + \left(\rho_0^2 + \sqrt{2} \zeta \rho_0 + \frac{\zeta^2}{2} \right) (\partial_\mu \theta + A_\mu)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \\ & + \frac{1}{2} (-4m^2) \frac{\zeta^2}{2} - 2\sqrt{-m^2 \lambda} \frac{\zeta^3}{2\sqrt{2}} - \frac{\lambda}{2} \frac{\zeta^4}{4} \end{aligned} \quad (5.2.94)$$

a noi per lo spettro di massa interessa solo la parte quadratica:

$$\mathcal{L}_{quadr.} = \frac{1}{2} \partial_\mu \zeta \partial^\mu \zeta + \frac{1}{2} (-2m^2) \zeta^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \rho_0^2 (\partial_\mu \theta + A_\mu)^2. \quad (5.2.95)$$

Però a questo punto potremmo sfruttare l'invarianza di gauge del campo A_μ e rimangiarci il campo θ . Infatti se scriviamo:

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta \quad (5.2.96)$$

cioè ci mettiamo in quella che si chiama **gauge unitaria**, allora otteniamo il termine quadratico:

$$\mathcal{L}_{quadr.} = \frac{1}{2} \partial_\mu \zeta \partial^\mu \zeta + \frac{1}{2} (-2m^2) \zeta^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \left(-\frac{m^2}{\lambda} \right)^2 A_\mu^\dagger A'^\mu \quad (5.2.97)$$

dunque vediamo che il campo di gauge A_μ ha acquisito una massa. Nota che dovremmo ancora riscalarlo di un fattore $1/2$ per vedere la massa. Quando il bosone di gauge diventa massivo, chiaramente le interazioni diventano a corto range.

Osservazione. La rottura spontanea della simmetria preserva i gradi di libertà, non ne fa perdere, ma semplicemente li riorganizza: inizialmente avevamo due gradi di libertà dati dai campi ϕ e $\bar{\phi}$ complessi e due gradi di

libertà dal bosone di gauge mass-less, ora, nella situazione finale, un grado di libertà appartiene a ζ (particella di Higgs) e 3 appartengono al bosone massivo A , in più la trasformazione di gauge equivale a inglobare il bosone di Goldstone dentro A ed in particolare la polarizzazione longitudinale di A coincide con il bosone di Goldstone. Dunque, la rottura spontanea di simmetria, nel caso in cui il vuoto non preserva una simmetria per trasformazioni locali, riarrangia i gradi di libertà in modo che i bosoni di gauge associati ai generatori rotti, acquistano una massa.

Il meccanismo della rottura spontanea di simmetria e il meccanismo di Higgs sono l'unico modo per trattare, in un modo consistente dal punto di vista quanto-meccanico, i vettori di gauge massivi (lo vedremo bene per le interazioni deboli).

Notiamo anche che il risultato ottenuto assomiglia alla lagrangiana di Proca:

$$\mathcal{L}_{proca} = (\mathcal{D}_\mu \phi^\dagger)(\mathcal{D}^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{M^2}{2} A_\mu A^\mu \quad (5.2.98)$$

infatti rispetto (5.2.94), i termini quadratici sono uguali, ma i termini di interazione sono diversi, e sono proprio quest'ultimi a rendere la teoria coerente da un punto di vista quanto-meccanico e la teoria rinormalizzabile.

5.3 Teoria di Fermi

Questa teoria sarà vista meglio nel corso di *Fenomenologia delle Interazioni Fondamentali*.

Intorno agli anni 30' del secolo scorso, con l'intento di dare una spiegazione al decadimento β :

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

Enrico Fermi introduce una lagrangiana puntuale del tipo:

$$\mathcal{L} \sim \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu e \bar{d} \gamma_\mu u \quad (5.3.1)$$

in cui G_F è una costante di accoppiamento, e abbiamo scritto esplicitamente dei campi fermionici per rappresentare neutrino elettronico, elettrone, quark down e quark up. Essendo particelle fermioniche abbiamo:

$$[\bar{\nu}_e] = [e] = [\bar{d}] = [u] = [\psi] = L^{-3/2}$$

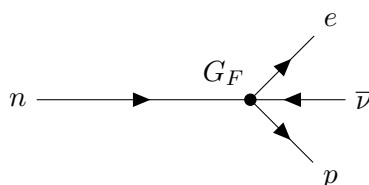
e notiamo che per costruzione G_F non è adimensionale:

$$[\mathcal{L}] = [G_F] [\psi]^4 = [G_F] L^{-6} = L^{-4}$$

ovvero:

$$[G_F] = L^2 = M^{-2}$$

già per questo motivo potremmo dire che questa teoria non ha senso, essendo non rinormalizzabile. Però, un altro motivo per cui scartiamo tale teoria è che se ci calcolassimo l'ampiezza di probabilità del processo:



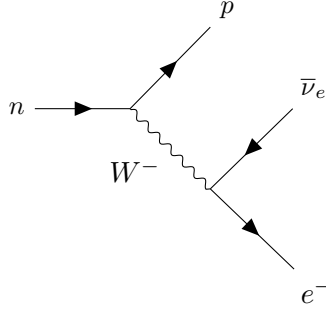
allora troveremmo un'ampiezza di probabilità $\mathcal{M} \propto G_F$, ma dovendo essere un numero adimensionale troviamo in realtà $\mathcal{M} \propto E^2 G_F$, e dunque un'ampiezza di probabilità che cresce indefinitamente con l'energia. Ciò non è chiaramente accettabile. Puoi vedere questo conto nel compendio del corso.

Per questo, la teoria di Fermi così come l'abbiamo formulata non è valida. In realtà, come vedremo ad energie basse funziona benissimo, ma smette di essere appropriata se saliamo con E e dunque non ha un campo di applicabilità infinito.

In generale nella Fisica le teorie sono più furbe del fisico che le scrive, poiché sono loro a suggerire quando esse non sono più valide e qual è il loro limite. Tipicamente, per come capiamo la natura ad oggi, tutto ciò che scriviamo sono delle teorie *efficaci* (effettive), le quali descrivono i fenomeni in un certo range di energie e non è detto che tali teorie siano estendibili altrove. Mostrandoci delle singolarità, non trattabili, le teorie ci dicono quando esse hanno raggiunto il proprio limite e noi per risolvere il problema, o cambiamo il punto di partenza, oppure (cosa molto comune) introduciamo dei gradi di libertà in più che diventano rilevanti solamente alle scale che danno problemi. La Gravità Quantistica alla Einstein ha esattamente questo tipo di problema.

Quello che succede con la teoria di Fermi è quello appena descritto, e noi per risolvere il problema potremmo dire che in realtà prima avevamo una divergenza poiché consideravamo un'interazione puntuale, ma se invece

considerassimo un diagramma del tipo:



allora tutto sarebbe consistente. In più ciò sarebbe coerente con l'osservazione sperimentale che le interazioni deboli sono a corto range, dunque mediate da un potenziale di tipo Yukawa:

$$\frac{e^{-mr}}{r^2} \quad (5.3.2)$$

il che ha come conseguenza dei bosoni mediatori W_μ massivi, la cui interazione si spegne esponenzialmente quando la distanza è dell'ordine dell'inverso della massa. Differiscono le interazioni elettromagnetiche, che sono mediate da bosoni massless e descritte da un potenziale tipo:

$$\frac{1}{r^2}. \quad (5.3.3)$$

Si potrebbe pensare di introdurre un campo vettoriale massivo B_μ usando la lagrangiana di Proca:

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m_B^2}{2} B_\mu B^\mu \quad (5.3.4)$$

che però non è invariante di gauge e questo farebbe sì che la teoria non sia rinormalizzabile; per evitare questo problema si utilizza il *meccanismo di Higgs*.

Un'altra evidenza sperimentale è che la lagrangiana (5.3.1) non deve preservare la parità; ovvero processi carichi, quindi in cui compaiono delle particelle con carica elettrica (nel caso del decadimento β compaiono elettrone e protone), trattano in maniera diversa parte left e parte right dei campi spinoriali. Infatti, da tutti gli esperimenti si vede che solo le parti left partecipano ai processi carichi. Per questo la lagrangiana più corretta da scrivere sarebbe:

$$\mathcal{L} \sim \bar{\nu}_e(1 - \gamma^5)e\bar{n}(1 - \gamma^5)p. \quad (5.3.5)$$

Nota che per la QED le componenti left e right dei fermioni si accoppiavano allo stesso modo con il campo di Maxwell, proprio perché la QED

preserva la parità.

Un'altra osservazione è che non esistono solamente processi carichi, ma ci sono una serie di processi di interazione elettrodebole differenti tra loro. Infatti possiamo avere processi che mischiano la parte leptonica e adronica, oppure processi che fanno parlare leptoni con leptoni, o adroni con adroni, ma anche decadimenti che non portano una carica elettrica, dunque neutri.

5.4 Gruppo di simmetria, bosoni di gauge e numeri quantici

Ci siamo preoccupati di introdurre i mediatori della forza elettrodebole, in modo da risolvere il problema della teoria di Fermi, ma non abbiamo pensato a quanti ne esistano.

Ciò che sappiamo è che esistono in natura processi con correnti cariche (positive o negative che siano), processi con correnti neutre e i processi elettromagnetici. Quindi, in totale abbiamo bisogno di 4 bosoni W_μ di gauge nella nostra teoria.

Come abbiamo studiato, i vettori di gauge li troviamo nel momento in cui imponiamo che le simmetrie nella nostra teoria siano locali. Ci manca da capire qual è il gruppo di gauge associato ai 4 vettori W_μ che introduciamo⁷. I gruppi con 4 generatori sono:

$$U(1)^4 \quad , \quad U(2) = U(1) \times SU(2).$$

Però sappiamo che il gruppo $U(1)^4$ non può essere la scelta corretta. Infatti abbiamo visto che i campi abeliani non possono auto-interagire, il che è in contrasto con il fatto che 2 dei quattro W_μ siano carichi, e dunque che possano interagire elettromagneticamente con i fotoni. Ciò di cui abbiamo bisogno sono termini di grado > 2 all'interno della nostra $\mathcal{L}$. Dunque, prendiamo un gruppo non abeliano per la teoria elettrodebole:

$$U(1) \times SU(2) \tag{5.4.1}$$

in cui storicamente si è associato al gruppo $U(1)$ il numero quantico di **ipercarica** Y , mentre ad $SU(2)$ si associa l'**isospin**.

Abbiamo capito che ci sono 4 vettori di gauge (1 associato ad $U(1)$ e 3 associati a $SU(2)$), ma possiamo capire un po' meglio la loro identità. Vedremo meglio dopo perché è sbagliato mettere il campo elettro-magnetico in $U(1)$, per ora concentriamoci sui generatori di $SU(2)$.

⁷Infatti ricorda che la dimensione del gruppo è data dal numero di generatori del gruppo, ed essi a loro volta ci danno il numero di vettori di gauge.

Sappiamo che abbiamo i generatori di $SU(2)$ $T^a = \sigma^a/2$, ed in generale possiamo scrivere:

$$W_\mu = W^a T^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (5.4.2)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (5.4.3)$$

in cui abbiamo introdotto:

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (5.4.4)$$

e quindi usiamo:

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2} (\sigma_1 \pm i\sigma_2). \quad (5.4.5)$$

Notiamo l'analogia con gli operatori di innalzamento e abbassamento della MQ (che ricorda ottenevamo dalla complessificazione dell'algebra). I campi W_μ^1 , W_μ^2 e W_μ^3 sono reali, ma quando li complessifichiamo, e creiamo $W_\mu^\pm$, essi diventano carichi (complessi).

I campi $W_\mu^\pm$, essendo carichi, sicuramente devono stare all'interno di $SU(2)$ per i motivi di interazione detti prima, però non sappiamo cosa possono essere W_μ^3 ed il vettore associato ad $U(1)$.

Parliamo un attimo dei settori della particelle elementari, per tornare sui gruppi tra poco.

5.4.1 Settore leptonico

Le evidenze sperimentali ci dicono che i processi carichi interessano solo le parti left dei fermioni, per cui $W_\mu^\pm$ si accoppiano solamente con tali parti. Per via del fatto che la parità sia rotta per i processi deboli, per la trattazione del modello standard ci conviene utilizzare gli spinori di Weyl, anziché quelli di Dirac⁸. Dunque, le parti right dei fermioni non si accoppiano in nessun modo con $W_\mu^\pm$.

Abbiamo imparato che quando noi vogliamo che un particolare campo si accoppi ad un certo vettore, dunque senta delle forze, allora è necessario che tale campo trasformi in modo non banale con il gruppo di gauge associato. Dunque le componenti left dei fermioni devono trasformare in modo non banale rispetto al gruppo di gauge $SU(2)$, altrimenti non avremmo accoppiamento; ma allo stesso tempo le parti right, rispetto $SU(2)$, devono trasformare in modo triviale (banale).

⁸Nota che alcuni testi utilizzano gli spinori di Dirac, su cui ci applicano i proiettori left e right. A seconda di ciò che scegliamo utilizzeremo le matrici σ^μ piuttosto che γ^μ .

La scelta minimale che possiamo fare per rispettare ciò che abbiamo detto è prendere le parti Left che trasformano come un doppietto di $SU(2)$ (che è la rappresentazione più piccola che trasforma in modo non banale), mentre le parti Right come dei singoletti.

In natura si sono osservate 3 famiglie diverse di leptoni (vedi l'osservazione sulle teorie anomale), tutti con stessi numeri quantici, ma con masse diverse. In generale, una *famiglia* contiene una particella (e, μ, τ) e il suo neutrino associato; nel modello standard $e/\mu/\tau$ hanno una componente L e una R, mentre i neutrini sono massless ed esistono solo nella chiralità L⁹.

I leptoni li rappresentiamo dunque come:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L ; \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L ; \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \right\} , \quad l_R = \{e_R ; \mu_R ; \tau_R\} \quad (5.4.6)$$

omettendo ν_R non essendo osservato. Nota che L ed l indicano i *leptoni*, mentre le lettere a pedice sono le componenti left e right. Inoltre, chiariamo il fatto che L sia un doppietto di $SU(2)$, le cui componenti sono spinori di Weyl.

Dunque abbiamo in gioco due gruppi $SU(2)$, che però non si parlano. Infatti, abbiamo l' $SU(2)$ dell'invarianza di gauge, insieme all' $SU(2)$ del gruppo di Lorentz che agisce solo sugli spinori di Weyl. Quando scriveremo la lagrangiana compariranno delle matrici σ^μ , ma esse saranno dei soli numeri per il gruppo di gauge $SU(2)$, poiché riguardano solamente l'invarianza di Lorentz.

5.4.2 Settore adronico

Intorno agli anni 60 del secolo scorso si sono cominciate a scoprire un numero enorme di particelle e si è cominciato a perdere la speranza di poterle catalogare e modellizzare tutte. In realtà ci si è reso presto conto che non tutte le particelle sono elementari, bensì sono formate da componenti tali. In particolare si sono scoperti gli adroni¹⁰, che sono formati da quark, i quali a loro volta sono particelle fermioniche elementari, ma con la caratteristica di avere carica elettrica frazionaria.

Ancora dalla natura delle interazioni deboli sappiamo che solo le componenti left dei quark si accoppiano con i campi $W_\mu^\pm$, per cui le scriviamo come un doppietto di $SU(2)$. Analogamente ai leptoni, scriviamo per le parti right dei singoletti, e dunque disaccoppiate. Abbiamo:

$$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} , \quad u_R = u_R \quad , \quad d_R = d_R. \quad (5.4.7)$$

⁹In realtà, in teorie che vanno oltre il modello standard, si riesce a spiegare il fatto che negli esperimenti si osserva una loro oscillazione e di conseguenza il fatto che abbiano una massa molto piccola $\ll 1$ eV.

¹⁰Gli adroni possono presentarsi in natura in due configurazioni: possono essere formati da una coppia di quark e anti-quark, dando vita ad un *mesone*, oppure possono essere formati da un tris di quark formando i *barioni*.

Chiamiamo u il quark up e d il quark down, ed essi sono gli unici due ingredienti di cui abbiamo bisogno per costruire protone e neutrone (che sono barioni).

Analogamente con quanto osservato per i leptoni, anche i quark vengono osservati in famiglie, in particolare 3:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

più tutti i relativi singoletti right.

5.4.3 Osservazione sulle teorie anomale

Nel modello standard è fondamentale che sia preservata la simmetria di gauge sia a livello classico che quantistico. È fondamentale verificare che le simmetrie di gauge vengano conservate dalla quantizzazione. In generale, la simmetria di gauge, non può essere esplicitamente rotta (spontaneamente può fare ciò che vuole) a livello quantistico, altrimenti la teoria non avrebbe alcun senso la teoria. Rompere esplicitamente la simmetria vorrebbe dire che la corrente associata non sarebbe conservata. Però, può succedere che alcune teorie perfette dal punto di vista classico (o che per lo meno a noi sembrano tali), a livello quantistico presentino delle *anomalie*, ossia rompano esplicitamente l'invarianza di gauge (e le simmetrie non sono conservate dalla quantizzazione). Nel caso in cui l'anomalia si presenti per simmetrie locali, non c'è più nulla da fare e dobbiamo buttare il modello teorico (oppure provare a curarlo).

Il modello standard è consistente famiglia per famiglia, ma per renderlo tale, ovvero evitare anomalie nelle simmetrie di gauge, abbiamo bisogno che tali famiglie (di leptoni e quark) siano complete. Le diverse famiglie individuano il **flavour** della materia. Dunque, per ogni doppietto di leptoni deve esistere un doppietto di quark, con i rispettivi singoletti. Se così non fosse, ad esempio se avessimo 4 famiglie di leptoni e solo 3 di quark, allora tutto si romperebbe perché avremmo delle anomalie nel modello standard.

5.4.4 Numeri quantici delle particelle

Abbiamo visto la definizione dei bosoni $W_\mu^\pm$ (5.4.4), ma non abbiamo ancora capito chi possa essere il terzo bosone associato ai generatori di $SU(2)$. Però ci sono alcune considerazioni che possiamo fare.

Se proviamo a calcolare il commutatore tra i due vettori carichi W_μ^+ e W_μ^- , e sapendo che la carica si conserva, ci aspettiamo che il terzo generatore del gruppo risulterà essere neutro. Essendo i generatori di $W_\mu^\pm$ gli analoghi degli operatori di scala della MQ non relativistica, di conseguenza il terzo generatore di $SU(2)$ sarà σ_3 , di cui conosciamo gli autovalori, ossia $\pm 1/2$.

Fatte queste considerazioni possiamo affermare che l'EM non sta dentro $SU(2)$, nonostante rispetti la carica nulla. Se σ_3 fosse l'EM, allora questo implicherebbe che le cariche elettriche di ν_e ed e (componenti left) siano $\pm 1/2$. Però l'unica certezza che abbiamo è che il neutrino sia neutro, per cui non si deve accoppiare con il fotone. In più, se σ_3 fosse l'EM, questo ci direbbe che solamente le componenti left degli elettroni sono cariche, ma non quelle right, visto che non trasformano per $SU(2)$.

Concludiamo che l'ultimo generatore di $SU(2)$ non può essere quello associato con il campo di Maxwell.

Con ragionamenti abbozzati possiamo anche capire perché $U(1)$ non può nemmeno lui essere l'elettromagnetismo. Da ciò che abbiamo detto, se $U(1)$ fosse l'EM, allora noi vorremmo che esso si accoppiasse solamente con la parte bassa del doppietto L (ν è neutro). In questo modo però romperemmo l'invarianza di $SU(2)$, poiché una sua rotazione non permetterebbe più il mescolamento delle due componenti.

Quindi se noi vogliamo rispettare il gruppo di gauge $U(1) \times SU(2)$, allora non possiamo decidere che componenti, di una qualsiasi rappresentazione di uno dei due, trasformino in modo diverso rispetto l'altro gruppo di gauge. Dunque, entrambe le componenti del doppietto devono accoppiarsi allo stesso modo (con la stessa carica) con il campo $U(1)$.

Per questo motivo (un po' spoilerando) abbiamo chiamato $U(1)$ il gruppo dell'ipercarica Y ed $SU(2)$ l'isospin. Comunque abbiamo imparato che l'elettromagnetismo non è manifestamente presente, ma dev'essere nascosto da qualche parte nel gruppo di gauge. Costruiamo la carica elettrica (combinando oggetti neutri) con la formula di Gell-Mann e Nishijima:

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2} \quad (5.4.8)$$

in cui non mettiamo gli altri due generatori di $SU(2)$, ossia T^1 e T^2 , poiché essi sono associati ai bosoni carichi $W^\pm$. Nota anche che Y lo dividiamo per due per convenzione e perché abbiamo la definizione di $T^3 = \sigma/2$. Nella tabella 5.4 riassumiamo tutti i numeri quantici delle particelle del modello standard.

Abbiamo detto che abbiamo:

$$T^3 = \frac{\sigma^3}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad (5.4.9)$$

da cui possiamo vedere che il neutrino ν ha autovalore di T^3 pari ad $1/2$, mentre la particella associata $-1/2$. Noi gli unici numeri quantici che conosciamo con certezza sono le cariche elettriche, e se imponiamo che la carica del ν sia nulla otteniamo:

$$Q_\nu = \frac{1}{2} + \frac{Y}{2} = 0 \quad \implies \quad Y_\nu = -1 \quad (5.4.10)$$

ma Y è il numero quantico associato alle trasformazioni rispetto $U(1)$, e noi abbiamo detto che particella e il suo neutrino associato devono trasformare allo stesso modo per tale gruppo. Dunque, dobbiamo avere $Y_{l_L} = -1$, che possiamo verificare da:

$$Q = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \quad (5.4.11)$$

così siamo contenti poiché ciò è coerente con quello che sappiamo della carica elettrica dei leptoni.

Allo stesso tempo però, guardando la parte right dei leptoni, possiamo dire che $T_{l_R}^3 = 0$ poiché essi non trasformano con $SU(2)$, ma la loro carica elettrica è sempre $Q = -1$, per cui:

$$Q = -1 = 0 + \frac{Y_{l_R}}{2} \implies Y_{l_R} = -2. \quad (5.4.12)$$

Ora che conosciamo le cariche delle particelle rispetto i gruppi di simmetria possiamo scrivere le derivate covarianti per le parti left e right dei leptoni:

$$\mathcal{D}_\mu L = \left(\partial_\mu - igW_\mu^a T^a - \frac{ig'}{2} Y B_\mu \right) \quad (5.4.13)$$

$$= \left(\partial_\mu - igW_\mu^a T^a + \frac{ig'}{2} B_\mu \right) \quad (5.4.14)$$

$$\mathcal{D}_\mu l_R = (\partial_\mu + ig' B_\mu) l_R \quad (5.4.15)$$

in cui abbiamo inserito esplicitamente il valore di Y_l . Ricordiamo che le trasformazioni dei campi, rispetto i gruppi, sono:

$$\begin{cases} L & \xrightarrow{SU(2)} & UL \\ L & \xrightarrow{U(1)} & e^{i\frac{Y}{2}\alpha} L \end{cases}, \quad \begin{cases} l_R & \xrightarrow{SU(2)} & l_R \\ l_R & \xrightarrow{U(1)} & e^{i\frac{Y}{2}\alpha} l_R. \end{cases} \quad (5.4.16)$$

Per cui se ci volessimo cominciare a scrivere la lagrangiana per il settore leptonico avremmo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} + \sum_{a=1}^3 \left(iL_a^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L_a + il_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu l_{R,a} \right)$$

in cui mettiamo la somma su tutte le famiglie di leptoni e i tensori $B_{\mu\nu}$ ed $F_{\mu\nu}$ costruiti opportunamente a partire dai campi di gauge B_μ e W_μ^a che associamo rispettivamente ai gruppi $U(1)$ e $SU(2)$.

Con ragionamenti analoghi riusciamo a scrivere anche le derivate covarianti dei quark. Infatti, conoscendo il fatto che la carica elettrica dei quark è:

$$Q_{el}(u) = \frac{2}{3}, \quad Q_{el}(d) = -\frac{1}{3} \quad (5.4.17)$$

possiamo ricavare l'ipercarica:

$$u : \quad \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{Y}{2} \quad \Longrightarrow \quad Y = \frac{1}{3} \quad (5.4.18)$$

$$d : \quad \frac{-1}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}. \quad (5.4.19)$$

Possiamo anche vedere che per la parte right vale:

$$u_R : Y = +\frac{4}{3} \quad (5.4.20)$$

$$d_R : Y = -\frac{2}{3}. \quad (5.4.21)$$

Noti i numeri quantici e le cariche dei campi siamo in grado di scrivere le derivate covarianti:

$$\mathcal{D}_\mu Q_L = \left(\partial_\mu - igW_\mu^a T^a - \frac{ig'}{6} B_\mu \right) Q_L \quad (5.4.22)$$

$$\mathcal{D}_\mu u_R = \left(\partial_\mu - \frac{2i}{3} g' B_\mu \right) u_R \quad (5.4.23)$$

$$\mathcal{D}_\mu d_R = \left(\partial_\mu + \frac{i}{3} g' B_\mu \right) d_R \quad (5.4.24)$$

Se vogliamo possiamo completare (per ora) la lagrangiana del modello standard come:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} + \sum_{a=1}^3 \left(iL_a^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L_a + i l_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu l_{R,a} \right) \\ & + \sum_{a=1}^3 \left(iQ_{L,a}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q_{L,a} + i u_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_{R,a} + i d_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_{R,a} \right). \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

5.5 Correnti elettrodeboli

Studiamo in questa sezione come sono fatte le varie correnti presenti nella teoria elettrodebole.

Infatti, data la lagrangiana $\mathcal{L}$ possiamo vedere facilmente come sono fatte le correnti, poiché sappiamo da ciò che c'è all'interno della derivata covariante comparire la corrente accoppiata con i bosoni di gauge.

Per tutta la trattazione associamo il campo W_μ^a al gruppo $SU(2)$ e un campo di gauge B_μ al gruppo $U(1)$. Dunque abbiamo i tensori di curvatura:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (5.5.1)$$

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ig[W_\mu, W_\nu]. \quad (5.5.2)$$

5.5.1 Correnti cariche

Riprendiamo la lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} + \sum_{a=1}^3 \left(iL_a^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L_a + i l_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu l_{R,a} \right) \\ & + \sum_{a=1}^3 \left(iQ_{L,a}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q_{L,a} + i u_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_{R,a} + i d_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_{R,a} \right). \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

e cerchiamo quali sono le correnti cariche. Come detto dobbiamo vedere come si accoppiano i vari campi con le derivate covarianti, poiché in esse compaiono i $W_\mu^\pm$.

Cominciamo ad estrarre la corrente carica¹¹:

$$\mathcal{L} \supset J_\mu^- W^{+\mu} \quad (5.5.4)$$

per cui dobbiamo leggere i coefficienti di $W^{+\mu}$ dai pezzi legati ai leptoni e agli adroni. Ovviamente, sappiamo che i $W_\mu^\pm$ si accoppiano solo alle parti left, per cui vediamo (togliendo tutti i termini neutri e carichi negativamente) solo le parti che ci interessano, dunque consideriamo i termini in cui le derivate covarianti (che contengono W_μ^+) agiscono sui doppietti:

$$\sum_{a=1}^3 iL_a^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L_a = \sum_{a=1}^3 i \begin{pmatrix} \nu_L^\dagger & e_L^\dagger \end{pmatrix}_a \tilde{\sigma}^\mu \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix}_a \quad (5.5.5)$$

$$= \sum_{a=1}^3 \frac{g}{2} \begin{pmatrix} \nu_L^\dagger & e_L^\dagger \end{pmatrix}_a \tilde{\sigma}^\mu \sqrt{2}W_\mu^+ \begin{pmatrix} e_L \\ 0 \end{pmatrix}_a \quad (5.5.6)$$

$$= \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{a=1}^3 \nu_{L,a}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_{L,a} W_\mu^+. \quad (5.5.7)$$

Dunque abbiamo trovato:

$$J_{\mu,a}^- = \frac{g}{\sqrt{2}} \nu_{L,a}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_{L,a} \quad (5.5.8)$$

che è il contributo dei leptoni e se la guardiamo bene è molto simile al pezzo che avevamo scritto per la teoria di Fermi.

¹¹Nota che associamo la corrente negativa al campo W^+ , e analogamente J^+ a W^- , poiché richiediamo sempre che la lagrangiana sia neutra.

Analogamente possiamo trovare la corrente per i quark:

$$\sum_{a=1}^3 i Q_{L,a}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q_{L,a} = \sum_{a=1}^3 i \begin{pmatrix} u_L^\dagger & d_L^\dagger \end{pmatrix}_a \tilde{\sigma}^\mu \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}_a \quad (5.5.9)$$

$$= \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{a=1}^3 u_{L,a}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_{L,a} W_\mu^+ \quad (5.5.10)$$

per cui:

$$J_{\mu,a}^- = \frac{g}{\sqrt{2}} u_{L,a}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_{L,a}. \quad (5.5.11)$$

È facile convincersi che la corrente J_μ^+ si ottiene facendo l'hermitiano coniugato.

Le correnti neutre per i quark li vedremo in seguito.

5.5.2 Corrente neutra ed elettromagnetismo

Seguendo un procedimento leggermente diverso ricaviamo la corrente neutra e cerchiamo di capire dove si trova l'elettromagnetismo.

Cominciamo sempre dai leptoni e vediamo che della quantità:

$$g W_\mu - \frac{g'}{2} B_\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g W_\mu^3 - g' B_\mu & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -g W_\mu^3 - g' B_\mu \end{pmatrix} \quad (5.5.12)$$

che compare nella lagrangiana, ci interessa la parte diagonale. Omettendo la sommatoria vediamo:

$$= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \nu_L^\dagger & e_L^\dagger \end{pmatrix} \tilde{\sigma}^\mu \begin{pmatrix} g W_\mu^3 - g' B_\mu & 0 \\ 0 & -g W_\mu^3 - g' B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix} \quad (5.5.13)$$

$$= -\frac{i}{2} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) \nu_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_L + \frac{i}{2} (g W_\mu^3 + g' B_\mu) e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L \quad (5.5.14)$$

il secondo addendo sarà un qualche cosa che sente l'elettrone, ma possiamo leggere nel primo termine della somma il campo associato ai processi neutri, poichè sappiamo bene che il neutrino non si accoppia con l'elettromagnetismo, per cui tutto ciò che parla lui sicuramente non è il campo di Maxwell. Chiamiamo per questo:

$$Z_\mu \sim g W_\mu^3 - g' B_\mu \quad (5.5.15)$$

il *campo associato a processi neutri*. Possiamo però fare una trasformazione di $SO(2)$ in modo da riparametrizzare la scrittura dei campi, pur mantenendo la normalizzazione dei termini cinetici invariata. Possiamo fare una

rotazione per un angolo, che chiamiamo **angolo di weak mixing** (o di Weinberg)¹², poiché data una coppia di numeri possiamo sempre riparametrizzarli in termini di un angolo:

$$\cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad ; \quad \sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (5.5.16)$$

e in questo modo abbiamo:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & \sin \theta_w \\ -\sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (5.5.17)$$

la cui trasformazione inversa è:

$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} \quad (5.5.18)$$

che ci portano a:

$$Z_\mu = \cos \theta_w W_\mu^3 - \sin \theta_w B_\mu. \quad (5.5.19)$$

e al fotone A_μ , che sarà la combinazione ortogonale, poiché la sua dinamica dev'essere disaccoppiata da quella di Z_μ :

$$A_\mu = \sin \theta_w W_\mu^3 + \cos \theta_w B_\mu. \quad (5.5.20)$$

Dunque, vediamo che il campo di Maxwell non è direttamente associato ad un generatore del gruppo di simmetria, ma è una combinazione lineare non banale dei campi neutri di $U(2)$.

Questa scelta per Z e A è giustificata anche dal fatto che nella rottura di simmetria tramite Higgs la combinazione che forma Z acquisisce massa, mentre A rimane massless.

Possiamo anche invertire le relazioni (5.5.19) e (5.5.20):

$$W_\mu^3 = \cos \theta_w Z_\mu + \sin \theta_w A_\mu \quad (5.5.21)$$

$$B_\mu = \cos \theta_w A_\mu - \sin \theta_w Z_\mu. \quad (5.5.22)$$

Avendo le parametrizzazioni dei campi, possiamo continuare i conti (5.5.14):

$$\begin{aligned} &= -\frac{i}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu \nu_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_L + i \left[g(\cos \theta_w Z_\mu + \sin \theta_w A_\mu) + \right. \\ &\quad \left. + g'(\cos \theta_w A_\mu - \sin \theta_w Z_\mu) \right] e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L \end{aligned} \quad (5.5.23)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{i}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu \nu_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_L + \frac{i}{2} \left[(g \cos \theta_w - g' \sin \theta_w) Z_\mu + \right. \\ &\quad \left. + (g \sin \theta_w + g' \cos \theta_w) A_\mu \right] e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L \end{aligned} \quad (5.5.24)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{i}{2} Z_\mu \left[\sqrt{g^2 + g'^2} \nu_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_L - (g \cos \theta_w - g' \sin \theta_w) e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L \right] + \\ &\quad + i g \sin \theta_w A_\mu e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L. \end{aligned} \quad (5.5.25)$$

¹²Nota che vale $\theta_w \approx 28^\circ$.

da cui vediamo che, coerentemente con quanto osservato negli esperimenti, si accoppiano al bosone Z_μ dell'interazione debole sia il neutrino che l'elettrone, ma con il campo di Maxwell A_μ ci parla solamente la parte left dell'elettrone.

Se vediamo anche l'accoppiamento della parte right:

$$ig'l_R^\dagger \tilde{\sigma}^\mu l_R B_\mu = ig'l_R^\dagger \tilde{\sigma}^\mu l_R (\cos \theta_w A_\mu - \sin \theta_w Z_\mu) \quad (5.5.26)$$

$$= ig' \cos \theta_w A_\mu l_R^\dagger \tilde{\sigma}^\mu l_R - ig' \sin \theta_w Z_\mu l_R^\dagger \sigma^\mu l_R \quad (5.5.27)$$

per la parte elettromagnetica sembra che la costante di accoppiamento sia differente per le parti left e right, ma è un assurdo che la parte left abbia una certa carica elettrica e la parte right un'altra, infatti guardando meglio si ha:

$$g' \cos \theta_w = \frac{g'g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g \sin \theta_w. \quad (5.5.28)$$

Se mettiamo insieme l'accoppiamento della parti left e right otteniamo:

$$\begin{aligned} &= -\frac{i}{2} Z_\mu \left[\sqrt{g^2 + g'^2} \nu_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_L - (g \cos \theta_w - g' \sin \theta_w) e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L - \right. \\ &\quad \left. - ig' \sin \theta_w Z_\mu l_R^\dagger \sigma^\mu l_R \right] + \\ &\quad + i A_\mu g \sin \theta \left[e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L + l_R^\dagger \tilde{\sigma}^\mu l_R \right] \end{aligned} \quad (5.5.29)$$

dunque, per la parte elettromagnetica abbiamo l'accoppiamento:

$$ig \sin \theta_w A_\mu \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R \quad (5.5.30)$$

e per quello che abbiamo imparato dall'elettromagnetismo, possiamo fissare sperimentalmente:

$$g \sin \theta_w = e. \quad (5.5.31)$$

Dunque abbiamo imparato che la corrente elettromagnetica è:

$$J_{em}^\mu = g \sin \theta_w \left(e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L + e_R^\dagger \sigma^\mu e_R \right) \quad (5.5.32)$$

mentre la corrente neutra per i leptoni è:

$$\begin{aligned} J_0^\mu &= -\frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} \nu_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_L - (g \cos \theta_w - g' \sin \theta_w) e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu e_L - \\ &\quad - g' \sin \theta_w e_R^\dagger \sigma^\mu e_R. \end{aligned} \quad (5.5.33)$$

Chiaramente la corrente neutra viola la parità, infatti non solo compaiono unicamente i neutrini left e non quelli right, ma anche il fatto che le parti left e right degli elettroni abbiano costanti di accoppiamento differenti non permette di conservare la parità.

Impariamo quindi che sia le correnti cariche che neutre violano la parità, ma la differenza tra queste interazioni è che nel caso carico le correnti si accoppiano solo ai fermioni left, visto che solo loro trasformano rispetto $SU(2)$, mentre per le interazioni neutre esse ricevono contributo sia dai fermioni left che da quelli right, poichè tutti si accoppiano con B_μ (il quale contiene Z_μ) avendo ipercarica $\neq 0$, però abbiamo visto che le tratta in modo differente.

Possiamo anche vedere l'accoppiamento dei quark left con i campi di neutri. Ci aspettiamo che entrambe le componenti della famiglia si accoppino con entrambi i campi. Vediamo:

$$-\frac{i}{2} \begin{pmatrix} u_L^\dagger & d_L^\dagger \end{pmatrix} \tilde{\sigma}^\mu \begin{pmatrix} gW_\mu^3 + \frac{1}{3}g'B_\mu & 0 \\ 0 & -gW_\mu^3 + \frac{1}{3}g'B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (5.5.34)$$

$$= -\frac{i}{2} (gW_\mu^3 + \frac{1}{3}g'B_\mu) u_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u_L - \frac{i}{2} (-gW_\mu^3 + \frac{1}{3}g'B_\mu) d_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_L \quad (5.5.35)$$

$$= -\frac{i}{2} \left(g \cos \theta_w Z_\mu + g \sin \theta_w A_\mu + \frac{1}{3}g' \cos \theta_w A_\mu - \frac{1}{3}g' \sin \theta_w Z_\mu \right) u_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u_L - \\ - \frac{i}{2} \left(-g \cos \theta_w Z_\mu - g \sin \theta_w A_\mu + \frac{1}{3}g' \cos \theta_w A_\mu - \frac{1}{3}g' \sin \theta_w Z_\mu \right) d_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_L \quad (5.5.36)$$

$$= -\frac{i}{2} \left\{ \left[(g \cos \theta_w - \frac{1}{3}g' \sin \theta_w) Z_\mu + \frac{4}{3}eA_\mu \right] u_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u_L + \right. \\ \left. + \left[(-g \cos \theta_w - \frac{1}{3}g' \sin \theta_w) Z_\mu - \frac{2}{3}eA_\mu \right] d_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_L \right\} \quad (5.5.37)$$

da cui possiamo ritrovare le cariche elettriche dei quark $4/3$ e $-2/3$ se analizziamo l'accoppiamento con il campo di Maxwell.

Dal contributo delle parti right vediamo:

$$iu_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_{R,a} + id_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_{R,a} \quad (5.5.38)$$

$$= iu_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \left(-\frac{2}{3}ig' \right) B_\mu u_{R,a} + id_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \left(\frac{i}{3}g' \right) B_\mu d_{R,a} \quad (5.5.39)$$

$$= \left(\frac{2}{3}g' \cos \theta_w A_\mu - \frac{2}{3}g' \sin \theta_w Z_\mu \right) u_{R,a}^\dagger \sigma^\mu u_{R,a} + \\ + \left(-\frac{1}{3}g' \cos \theta_w A_\mu + \frac{1}{3}g' \sin \theta_w Z_\mu \right) d_{R,a}^\dagger \sigma^\mu d_{R,a} \quad (5.5.40)$$

in cui possiamo ancora una volta rivedere le cariche elettriche dei quark (dagli accoppiamenti con i bosoni A_μ):

$$Q_{el}(u) = \frac{2}{3}g' \cos \theta_w = \frac{2}{3}g \sin \theta_w = \frac{2}{3}e \quad (5.5.41)$$

$$Q_{el}(d) = -\frac{1}{3}g' \cos \theta_w = -\frac{1}{3}g \sin \theta_w = -\frac{1}{3}e. \quad (5.5.42)$$

5.6 Interazioni tra vettori di gauge

Per come costruiamo il modello standard abbiamo anche le interazioni tra i bosoni di gauge. Ad esempio, essendo carichi i vettori $W_\mu^\pm$ possono interagire con il campo elettromagnetico oppure tra di loro (facendo parte di un gruppo non abeliano).

Ricordiamo che abbiamo:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (5.6.1)$$

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ig[W_\mu, W_\nu] \quad (5.6.2)$$

e siamo interessati di vedere le componenti di $W_{\mu\nu}$ rispetto i generatori T^3 e $T^\pm$. Infatti possiamo scrivere:

$$W_\mu = W_\mu^3 T^3 + W_\mu^+ T^- + W_\mu^- T^+. \quad (5.6.3)$$

Dei generatori di $SU(2)$ conosciamo l'algebra:

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk} T_k \quad (5.6.4)$$

da cui:

$$[T^3, T^\pm] = \pm T^\pm \quad (5.6.5)$$

$$[T^+, T^-] = 2T^3 \quad (5.6.6)$$

esattamente come gli operatori di scala della MQ (algebra di $SL(2, \mathbb{C})$).

La parte facile è riscrivere $B_{\mu\nu}$, poiché ci basta inserire dentro la scrittura di B_μ (5.5.22):

$$B_{\mu\nu} = \cos \theta_w (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - \sin \theta_w (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu). \quad (5.6.7)$$

Dobbiamo impegnarci leggermente di più per ottenere le componenti del tensore $W_{\mu\nu}$. Se vogliamo analizzare $W_{\mu\nu}^3$, allora dobbiamo capire quale commutatore, che ci compare in (5.6.2), ci fornisce la componente 3. Chiaramente dall'algebra (5.6.6) vediamo che abbiamo:

$$[W_\mu^- T^+, W_\nu^+ T^-] = W_\mu^- W_\nu^+ (2T^3)$$

ma anche la combinazione antisimmetrizzata:

$$[W_\mu^+ T^-, W_\nu^- T^+] = W_\mu^+ W_\nu^- (-2T^3).$$

Oppure utilizzando la relazione base:

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (5.6.8)$$

otteniamo le componenti di $W_{\mu\nu}^3$:

$$W_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 + 2ig (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-) \quad (5.6.9)$$

inserendo anche la scrittura per W_μ^3 (5.5.21):

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^3 &= \cos \theta_w (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + \sin \theta_w (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - \\ &\quad - 2ig (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) \end{aligned} \quad (5.6.10)$$

che ci mostra come il campo W_μ^3 non si accoppi con il campo di Maxwell, e quindi risulta scarico. Diciamo che W_μ^3 è discaccoppiato poiché nemmeno Z_μ (contenuto in W_μ^3) lo fa, non avendo termini in cui A_μ e Z_μ si parlano.

La componente $W_{\mu\nu}^+$ avrà al suo interno il commutatore:

$$[W_\mu^3 T^3, W_\nu^+ T^-] = W_\mu^3 W_\nu^+ (-T^-)$$

a cui dobbiamo sommarci anche la combinazione antisimmetrizzata, in modo da avere tutti i contributi legati a T^- :

$$W_{\mu\nu}^+ = \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+ - ig (W_\mu^3 W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^3) \quad (5.6.11)$$

$$= \partial_\mu W_\nu^+ - i \left(g \cos \theta_w Z_\mu + \underbrace{g \sin \theta_w A_\mu}_e \right) W_\mu^+ - [\mu \leftrightarrow \nu] \quad (5.6.12)$$

$$= \mathcal{D}_\mu W_\nu^+ - ig \cos \theta_w Z_\mu W_\nu^+ - [\mu \leftrightarrow \nu] \quad (5.6.13)$$

in cui abbiamo individuato la derivata covariante:

$$\mathcal{D}_\mu W_\nu^+ = (\partial_\mu - ie A_\mu) W_\nu^+ \quad (5.6.14)$$

da cui possiamo leggere la carica elettrica di W_ν^+ , ossia $+e$.

Rifacendo la stessa cosa con il $W_{\mu\nu}^-$ abbiamo:

$$W_{\mu\nu}^- = \partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^- - ig (-W_\mu^3 W_\nu^- + W_\nu^- W_\mu^3) \quad (5.6.15)$$

$$= \partial_\mu W_\nu^- + i \left(g \cos \theta_w Z_\mu + \underbrace{g \sin \theta_w A_\mu}_e \right) W_\mu^- - [\mu \leftrightarrow \nu] \quad (5.6.16)$$

$$= \mathcal{D}_\mu W_\nu^- + ig \cos \theta_w Z_\mu W_\nu^- - [\mu \leftrightarrow \nu] \quad (5.6.17)$$

con:

$$\mathcal{D}_\mu W_\nu^- = (\partial_\mu + ie A_\mu) W_\nu^- \quad (5.6.18)$$

da cui leggiamo la carica elettrica $-e$.

Dunque, all'interno della lagrangiana abbiamo il termine cinetico per i bosoni di gauge (in cui consideriamo il fatto che il termine $W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu}$ compare due volte):

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^a W^{b\mu\nu} \text{tr}\{T^a T^b\} \quad (5.6.19)$$

$$= -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^3 W^{3\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} \quad (5.6.20)$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \left[\text{doppio prodotto (in cui si parlano)} \right. \\ \left. Z_\mu \text{ e } A_\mu \text{ si cancella} \right] \quad (5.6.21)$$

Possiamo sereni nel dire che se prima avevamo una lagrangiana con i termini cinetici dei campi di gauge diagonali, allora che quando facciamo una rotazione (introduciamo i sin e cos, così da mandare B_μ e W_μ^3 in A_μ e Z_μ) continuiamo ad avere un termine cinetico diagonale e dunque con A_μ che non parla con Z_μ .

Ad ogni modo possiamo vedere un attimo meglio i vari termini che compaiono all'interno del termine cinetico appena scritto. In particolare vediamo il passaggio dalla seconda riga alla terza. Abbiamo il termine:

$$B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = \left[\cos \theta_w (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - \sin \theta_w (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) \right] \times \\ \times \left[\cos \theta_w (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \sin \theta_w (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) \right] \quad (5.6.22)$$

$$= \cos^2 \theta_w (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \\ + \sin^2 \theta_w (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) - \\ - \cos \theta_w \sin \theta_w (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) - \\ - \cos \theta_w \sin \theta_w (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (5.6.23)$$

$$= \cos^2 \theta_w F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sin^2 \theta_w Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \\ - \cos \theta_w \sin \theta_w (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) - \\ - \cos \theta_w \sin \theta_w (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (5.6.24)$$

in cui identifichiamo i tensori:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.6.25)$$

$$Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu. \quad (5.6.26)$$

Abbiamo anche il pezzo:

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu}^3 W^{3\mu\nu} = & \cos^2 \theta_w (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + \\
& + \sin^2 \theta_w (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \\
& - 4g^2 (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) (W^{+\mu} W^{-\nu} - W^{+\nu} W^{-\mu}) + \\
& + \cos \theta_w \sin \theta_w (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \\
& - 2ig \cos \theta_w (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) (W^{+\mu} W^{-\nu} - W^{+\nu} W^{-\mu}) + \\
& + \cos \theta_w \sin \theta_w (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) - \\
& - 2ig \sin \theta_w (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (W^{+\mu} W^{-\nu} - W^{+\nu} W^{-\mu}) - \\
& - 2ig \cos \theta_w (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) - \\
& - 2ig \sin \theta_w (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (5.6.27) \\
= & \cos^2 \theta_w Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \sin^2 \theta_w F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots \quad (5.6.28)
\end{aligned}$$

(5.6.24) e (5.6.27) sono dei pezzi che sembrano dare delle interazioni tra Z_μ ed A_μ , ma in realtà dobbiamo mettere tutto insieme. Infatti se prendiamo la somma che compare nella lagrangiana:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \supset & -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^3 W^{3\mu\nu} - \dots \quad (5.6.29) \\
= & -\frac{1}{4} (\cos^2 \theta_w + \sin^2 \theta_w) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} (\cos^2 \theta_w + \sin^2 \theta_w) Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \\
& - 4g^2 (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) (W^{+\mu} W^{-\nu} - W^{+\nu} W^{-\mu}) + \\
& - 2ig \cos \theta_w (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) (W^{+\mu} W^{-\nu} - W^{+\nu} W^{-\mu}) + \\
& - 2ig \sin \theta_w (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (W^{+\mu} W^{-\nu} - W^{+\nu} W^{-\mu}) - \\
& - 2ig \cos \theta_w (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) - \\
& - 2ig \sin \theta_w (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \\
& + \dots \quad (5.6.30)
\end{aligned}$$

vediamo che i termini che fanno parlare A_μ con Z_μ si cancellano, come ci aspettiamo.

Ci mancherebbe anche il termine:

$$W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} = (\mathcal{D}_\mu W_\nu^+ - ig \cos \theta_w Z_\mu W_\nu^+) (\mathcal{D}^\mu W^{-\nu} + ig \cos \theta_w Z^\mu W^{-\nu}) \quad (5.6.31)$$

$$\begin{aligned}
= & \mathcal{D}_\mu W_\nu^+ \mathcal{D}^\mu W^{-\nu} + ig \cos \theta_w \mathcal{D}_\mu W_\nu^+ Z^\mu W^{-\nu} - \\
& - ig \cos \theta_w Z_\mu W_\nu^+ \mathcal{D}^\mu W^{-\nu} + g^2 \cos^2 \theta_w Z_\mu Z^\mu W_\nu^+ W^{-\nu}. \quad (5.6.32)
\end{aligned}$$

5.7 Masse delle particelle

Ci siamo concentrati molto sulle interazioni, sulle cariche e sui numeri quantici delle particelle, ma non abbiamo ancora parlato delle masse.

Quello che sappiamo dagli esperimenti è che:

- I leptoni e i quark sono particelle massive.
- L'elettromagnetismo è un'interazione a lungo range, dunque ci aspettiamo che il fotone sia massless.
- Le interazioni deboli sono a corto range, per cui dobbiamo dare massa ai bosoni $W_\mu^\pm$ e Z_μ .

La lagrangiana (5.4.25) chiaramente non è completa, infatti dobbiamo introdurre ancora i termini di massa. Per un campo fermionico, lavorando con gli spinori di Weyl, saremmo tentati di scrivere:

$$\bar{\psi}\psi \longrightarrow \psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L \quad (5.7.1)$$

ma questo, pur essendo invariante per Poincaré, non è invariante per il gruppo di gauge $U(1) \times SU(2)$ della nostra teoria. Infatti, ricordiamo che i fermioni left formano un doppietto per $SU(2)$, mentre i fermioni right dei singoletti, per cui per una trasformazione di $SU(2)$ le parti left trasformano e vanno in una combinazione lineare di fermione e neutrino left, mentre le parti right non trasformano. Sappiamo anche che parti left e right hanno cariche diverse per il gruppo $U(1)$, per cui anche per una sua variazione tale termine non sarebbe invariante.

Il procedimento che seguiremo per fornire la massa alle particelle, sia ai bosoni di gauge che ai campi di materia, è il meccanismo di Higgs che abbiamo visto nella sezione §5.2.5. In quella sezione ciò che avevamo era una lagrangiana con all'interno un potenziale $V(\phi)$, con la classica forma a sombrero messicano, che se espansa attorno al vuoto, allora il termine di Yukawa faceva in modo di sputare fuori un termine che modificava la massa dei campi fermionici di $\mathcal{L}$. L'unica differenza che incontriamo ora è che abbiamo una teoria non abeliana.

5.7.1 Il campo di Higgs

Nel nostro modello noi vogliamo dare massa a 3 campi di gauge, per cui dovremo introdurre 3 campi scalari. Però per la consistenza della teoria, è necessario che rimanga un campo scalare neutro aggiuntivo che ci dia le oscillazioni attorno al vuoto.

Ricorda come avevamo fatto nella sezione §5.2.5, in cui eravamo partiti con un campo scalare complesso, riscritto in termini di ρ e θ , che una volta

rotta la simmetria ci faceva vedere che θ era il bosone di Goldstone che veniva mangiato dal bosone di gauge, che acquisiva massa, mentre ρ (il quale è neutro) rimaneva e ci forniva le oscillazioni attorno al vuoto¹³.

Ovviamente, i campi scalari che introduciamo devono avere gli stessi numeri quantici interni dei campi da cui vengono mangiati (ovviamente appartiene lo spin). Quindi se diamo massa ad un campo carico, dovremo avere uno scalare carico, mentre se vogliamo un campo di gauge neutro massivo, dovremo introdurre un campo scalare neutro. Qua stiamo parlando di cariche elettriche.

Noi vogliamo dare massa a due campi di gauge carichi ed uno neutro, per cui abbiamo bisogno di 4 campi scalari all'interno della nostra lagrangiana, di cui 2 carichi elettromagneticamente e 2 neutri (1 sarà il campo di Higgs). Chiaramente per applicare il meccanismo di Higgs dovremo in qualche modo rompere spontaneamente la simmetria del nostro sistema, per cui dobbiamo introdurre un certo potenziale per il nuovo campo scalare, così che esso assuma un VEV non nullo quando ci mettiamo nel vuoto.

Anche per il gruppo $SU(2) \times U(1)$ i campi scalari devono trasformare in modo consistente. Dovendosi accoppiare con dei campi carichi $W^\pm$, essi devono trasformare per $SU(2)$, dunque dobbiamo scrivere un doppietto di $SU(2)$. Altrimenti, il campo di Higgs, se fosse un singoletto di $SU(2)$, darebbe massa solamente al Z_μ ed eventualmente al fotone.

Dovendo introdurre 4 gradi di libertà scalari, un modo che abbiamo per scriverli in termini di doppietto di $SU(2)$, è quello di scrivere un doppietto, che contiene due campi scalari complessi¹⁴:

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} \quad (5.7.2)$$

con all'interno il campo carico H^+ che ha carica elettrica +1 (il suo complesso coniugato ha carica negativa) e dunque:

$$Q(H^+) = 1 \quad \implies \quad 1 = \frac{1}{2} + \frac{Y}{2} \quad \implies \quad Y_H = 1 \quad (5.7.3)$$

che ci conferma anche il fatto che il campo H^0 sia neutro:

$$Q(H^0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0. \quad (5.7.4)$$

Gli esperimenti ci confermano che la scelta minimale che facciamo, scrivere un doppietto con all'interno due campi scalari complessi, con 4 gradi di libertà, è effettivamente corretta.

¹³Vedremo nel corso di *Advanced QFT* perché è fondamentale per la consistenza della teoria che il campo scalare ρ si accoppi, nel modo in cui si accoppia, con il campo di gauge.

¹⁴Nota che se prendiamo un generico vettore riga (a, b) che viene ruotato da una generica matrice di $SU(2)$, allora avremo che le sue componenti, a e b , sono generalmente dei numeri complessi, dunque con 2 gradi di libertà ciascuno e quattro totali.

Vista l'ipercarica del campo H , dunque come esso trasforma per il gruppo $U(1)$, possiamo scrivere la derivata covariante:

$$\mathcal{D}_\mu H = \left(\partial_\mu - igW_\mu - i\frac{g'}{2}B_\mu \right) H. \quad (5.7.5)$$

Vedremo che ciascun grado di libertà del doppietto (5.7.2) viene mangiato da un bosone di gauge, conferendogli massa. In particolare, noi possiamo scrivere H^+ e H^0 con le loro componenti reali ed immaginarie. Si ha che $H^\pm$ vengono mangiati da $W^\pm$, il campo $\text{Im}\{H^0\}$ viene preso da Z_0 e la parte reale $\text{Re}\{H^0\}$ è il **bosone di Higgs** scoperto al CERN nel 2012. Vedremo esplicitamente questa cosa tra poco, ma mimeremo quello fatto nelle prove del 15-02-2024 e 03-02-2026.

Dovendo rompere spontaneamente la simmetria, in modo da dare massa ai vettori di gauge, dobbiamo dare un VEV non banale ad H e introduciamo il potenziale:

$$V_H = \frac{\lambda}{4} \left(H^\dagger H - \frac{v^2}{2} \right)^2 \quad (5.7.6)$$

che è una leggera complicazione di quello visto nella sezione §5.2.5. Ci piace scrivere (5.7.6) in questo modo poichè così è semi-definito positivo, e dunque sappiamo che quando si annulla ci troviamo nel suo minimo, che risulta essere:

$$H^\dagger H = \frac{v^2}{2}. \quad (5.7.7)$$

Però noi abbiamo imparato che possiamo fare una trasformazione di $SU(2) \times U(1)$, in modo da orientarci in modo tale che sia la componente bassa a prendere un VEV non nullo:

$$\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (5.7.8)$$

Vediamo esplicitamente chi sono i campi mangiati dai campi di gauge. Prendiamo $SU(2) \times U(1)$ globale e sviluppiamo il potenziale (5.7.6). Il campo sviluppato attorno al vuoto è:

$$H = \begin{pmatrix} h^+ \\ \frac{h+v}{\sqrt{2}} + ik \end{pmatrix} \quad (5.7.9)$$

in cui h^+ è un campo complesso, ma h e k reali. Se mettiamo H dentro V_H :

$$V_H = \frac{\lambda}{4} \left(\left(h^- - \frac{h+v}{\sqrt{2}} - ik \right) \left(\frac{h^+}{\sqrt{2}} + ik \right) - \frac{v^2}{2} \right)^2 \quad (5.7.10)$$

$$= \frac{\lambda}{4} \left(h^- h^+ + \left(\frac{h+v}{\sqrt{2}} \right)^2 + k^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2 \quad (5.7.11)$$

$$= \frac{\lambda}{4} \left(h^- h^+ + \frac{1}{2} h^2 + \frac{v^2}{2} + \sqrt{2} h v + k^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2 \quad (5.7.12)$$

$$= \frac{\lambda}{4} \left(h^- h^+ + \frac{1}{2} h^2 + \sqrt{2} h v + k^2 \right)^2 \quad (5.7.13)$$

guardandone solamente i termini quadratici nei campi:

$$\mathcal{L}_{quad} = \frac{\lambda}{2} v^2 h^2 \quad (5.7.14)$$

il che ci mostra che i campi $h^\pm$ e k sono massless, dunque bosoni di Goldstone, che nel momento in cui viene reso locale il gruppo di simmetria vengono mangiati dai campi vettoriali.

5.7.2 Masse dei bosoni vettori

Per leggere le masse, dei bosoni, sappiamo che basta leggere gli accoppiamenti nelle derivate covarianti, nel vuoto. Vediamo:

$$\mathcal{D}_\mu \langle H \rangle = -i \begin{pmatrix} \frac{g}{2} W_\mu^3 + \frac{g'}{2} B_\mu & \frac{\sqrt{2}}{2} g W_\mu^+ \\ \frac{\sqrt{2}}{2} g W_\mu^- & -\frac{g}{2} W_\mu^3 + \frac{g'}{2} B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (5.7.15)$$

$$= -i \begin{pmatrix} \frac{g}{2} W_\mu^+ \\ -\frac{g}{2} W_\mu^3 + \frac{g'}{2} B_\mu \end{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (5.7.16)$$

che ci mostra il termine cinetico (quando facciamo l'hermitiano coniugato passiamo da W^+ a W^-):

$$(\mathcal{D}_\mu \langle H \rangle)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \langle H \rangle) = \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{8} (g W_\mu^3 - g' B_\mu)^2 v^2 \quad (5.7.17)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^+ W^{-\mu} + \\ &\quad + \frac{1}{8} (g^2 + g'^2) \left(\frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} W_\mu^3 - \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} B_\mu \right)^2 v^2 \end{aligned} \quad (5.7.18)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^+ W^{-\mu} + \\ &\quad + \frac{1}{8} (g^2 + g'^2) (\cos \theta_w W_\mu^3 - \sin \theta_w B_\mu)^2 v^2 \end{aligned} \quad (5.7.19)$$

$$= \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{8} (g^2 + g'^2) v^2 Z_\mu Z^\mu \quad (5.7.20)$$

e ricordando che per un campo scalare complesso la normalizzazione del termine di massa è $m^2 \phi^\dagger \phi$, mentre per scalari neutri è $\frac{1}{2} m^2 \phi^2$, allora possiamo vedere, dal primo termine, la massa che prendono i vettori di gauge carichi:

$$m_{W^+}^2 = m_{W^-}^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \quad (5.7.21)$$

e dal secondo termine:

$$m_Z^2 = \frac{1}{4} (g^2 + g'^2) v^2. \quad (5.7.22)$$

Volendo è possibile riscrivere le masse (5.7.21) e (5.7.22) in termini di carica elettrica e e angolo θ_w .

Come ci aspettiamo, troviamo che il fotone rimane a massa nulla.

Dunque, una volta scelto il potenziale $V(H)$, e dunque fatto assumere al campo H un VEV non nullo, la simmetria del modello standard viene spontaneamente rotta:

$$SU(2) \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{em}.$$

Dunque la simmetria manifesta, che ci rimane quando il campo scalare prende un VEV, è l' $U(1)$ elettromagnetico, poichè rimaniamo con un solo campo di gauge a massa nulla, la cui simmetria è $U(1)$.

5.7.3 Masse dei leptoni

Introdotta il campo di Higgs, con la sua derivata covariante e il suo potenziale, possiamo scrivere un'ulteriore pezzo di Lagrangiana del Modello

Standard:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} + \sum_{a=1}^3 \left(iL_a^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L_a + il_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu l_{R,a} \right) \\ & + \sum_{a=1}^3 \left(iQ_{L,a}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q_{L,a} + iu_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_{R,a} + id_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_{R,a} \right) \\ & + (\mathcal{D}_\mu H)^\dagger (\mathcal{D}^\mu H) - V(H) + \dots\end{aligned}\quad (5.7.23)$$

con:

$$V(H) = \frac{\lambda}{4} \left(H^\dagger H - \frac{v^2}{2} \right)^2. \quad (5.7.24)$$

Come già accennato, per i fermioni non possiamo scrivere un termine di massa del tipo:

$$\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L \quad (5.7.25)$$

poiché altrimenti romperemmo esplicitamente, non solo $SU(2)$ di isospin, ma anche $U(1)$ di ipercarica.

Dobbiamo utilizzare ancora il settore di Higgs, in modo da scrivere in $\mathcal{L}$ degli invarianti (ovviamente reali) di Poincaré, di $SU(2)$ e di $U(1)_Y$. Ciò che non sappiamo ancora è come scrivere tali invarianti. Per essere invariante di Poincaré dev'essere uno scalare, per cui sicuramente non possiamo scrivere dei pezzi puramente quadratici utilizzando gli unici ingredienti a nostra disposizione, ossia L_L , l_R ed H .

Dobbiamo in qualche modo avere dei vettori riga per vettori colonna, così che uno trasformi con $U \in SU(2)$, l'altro con $U^\dagger$ ed è invariante. Gli unici oggetti che possiamo mettere come riga, piuttosto che come colonna, sono i doppietti L_L ed H . Però usando solamente questi due ingredienti non avremmo un oggetto invariante per Poincaré, poiché non stiamo considerando anche la parte right. Aggiungendo anche il singoletto l_R sistemiamo non solo l'invarianza di Poincaré, ma anche la simmetria rispetto $U(1)_Y$. L'invariante che dobbiamo inserire all'interno della lagrangiana è¹⁵:

$$L^\dagger H l_R \quad (5.7.26)$$

insieme al suo complesso coniugato. Dobbiamo inserire all'interno della lagrangiana:

$$\mathcal{L} \supset \sum_{i=1}^3 \left\{ G_i L_{L,i}^\dagger H l_{R,i} + G_i l_{R,i}^\dagger H^\dagger L_{L,i} \right\} \quad (5.7.27)$$

¹⁵Si vede che l'ipercarica dell'oggetto è: $Y_L = -1$, $Y_R = -2$ e $Y_H = 1$. Dunque, se ogni campo trasforma con una fase $e^{-i\alpha Y/2}$ per il gruppo $U(1)$, abbiamo un oggetto con ipercarica $Y = 0$, ossia non trasforma.

che, come abbiamo studiato, sono accoppiamenti di tipo Yukawa. Come già sappiamo per vedere le masse delle particelle dobbiamo metterci nel vuoto:

$$G_i L_{L,i}^\dagger \langle H \rangle l_{R,i} + G_i l_{R,i}^\dagger \langle H^\dagger \rangle L_{L,i} \quad (5.7.28)$$

$$= G_i \begin{pmatrix} \nu_i^\dagger & l_i^\dagger \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} l_{R,i} + G_i l_{R,i}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \end{pmatrix}_L \quad (5.7.29)$$

$$= \frac{v G_i}{\sqrt{2}} \left(l_{L,i}^\dagger l_{R,i} + l_{R,i}^\dagger l_{L,i} \right) \quad (5.7.30)$$

da cui leggiamo le masse dei leptoni (per i diversi i):

$$m_e = \frac{G_1 v}{\sqrt{2}} \quad , \quad m_\mu = \frac{G_2 v}{\sqrt{2}} \quad , \quad m_\tau = \frac{G_3 v}{\sqrt{2}}. \quad (5.7.31)$$

5.7.4 Masse dei quark

Ripetendo lo stesso ragionamento anche per i quark dobbiamo introdurre nella lagrangiana i termini:

$$\mathcal{L} \supset \sum_{i=1}^3 \left\{ G_i^{(d)} Q_{L,i}^\dagger H d_{R,i} + G_i^{(d)} d_{R,i}^\dagger H^\dagger Q_{L,i} \right\} \quad (5.7.32)$$

che nel vuoto ci forniscono:

$$G_i^{(d)} Q_{L,i}^\dagger \langle H \rangle d_{R,i} + G_i^{(d)} d_{R,i}^\dagger \langle H^\dagger \rangle Q_{L,i} \quad (5.7.33)$$

$$= G_i^{(d)} \begin{pmatrix} u_i^\dagger & d_i^\dagger \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} d_{R,i} + G_i^{(d)} d_{R,i}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L \quad (5.7.34)$$

$$= \frac{v G_i^{(d)}}{\sqrt{2}} \left(d_{L,i}^\dagger d_{R,i} + d_{R,i}^\dagger d_{L,i} \right) \quad (5.7.35)$$

ma da cui riusciamo a leggere solamente le masse dei quark down. Per dare massa anche ai quark up potremmo definire un altro doppietto:

$$\tilde{H} = i\sigma_2 H^* \quad (5.7.36)$$

in cui abbiamo le componenti scambiate. Il campo $\tilde{H}$ si comporta bene, esattamente come H , per una generica trasformazione di $SU(2)$ del tipo¹⁶:

$$U = e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}} \quad , \quad U \in SU(2) \quad (5.7.38)$$

¹⁶A tal proposito è fondamentale la presenza di σ_2 , poiché così possiamo utilizzare la proprietà $\sigma_2 \sigma^i \sigma^2 = -\sigma^i$. Infatti:

$$\tilde{H} \longrightarrow i\sigma_2 (UH)^* = i\sigma_2 e^{-i\frac{\sigma^{*i}}{2}\omega_i} H^* = i\sigma_2 e^{-i\frac{\sigma^{*i}}{2}\omega_i} \sigma_2 \sigma_2 H^* = i e^{i\frac{\sigma^i}{2}\omega_i} \sigma_2 H^* = U\tilde{H}. \quad (5.7.37)$$

ovvero, si comporta come un doppietto. Notiamo che $\tilde{H}$ ha ipercarica opposta rispetto H , avendo H^* al suo interno. Vediamo il VEV:

$$\langle \tilde{H} \rangle = i\sigma_2 \langle H^* \rangle \quad (5.7.39)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7.40)$$

Definito $\tilde{H}$ possiamo scrivere:

$$\mathcal{L} \supset \sum_{i=1}^3 \left\{ G_i^{(u)} Q_{L,i}^\dagger \tilde{H} u_{R,i} + G_i^{(u)} u_{R,i}^\dagger \tilde{H}^\dagger Q_{L,i} \right\} \quad (5.7.41)$$

che nel VEV ci mostra:

$$G_i^{(u)} Q_{L,i}^\dagger \langle \tilde{H} \rangle u_{R,i} + G_i^{(u)} u_{R,i}^\dagger \langle \tilde{H}^\dagger \rangle Q_{L,i} \quad (5.7.42)$$

$$= G_i^{(u)} \begin{pmatrix} u_i^\dagger & u_i^\dagger \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} u_{R,i} + G_i^{(u)} u_{R,i}^\dagger \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L \quad (5.7.43)$$

$$= \frac{v G_i^{(u)}}{\sqrt{2}} \left(u_{L,i}^\dagger u_{R,i} + u_{R,i}^\dagger u_{L,i} \right) \quad (5.7.44)$$

quindi siamo felici. Non proprio, la storia è leggermente più complicata di così.

5.7.5 Mixing dei quark

Come i leptoni, abbiamo detto che esistono 3 famiglie per i quark, tuttavia diversamente dai leptoni (almeno per il modello standard) si vede dagli esperimenti che i quark possono mischiarsi. Infatti, si osserva che in natura il sapore dei leptoni si conserva, ma così non è per le interazioni deboli che coinvolgono gli adroni, in cui il sapore non è preservato. Negli anni '60 vengono scoperti dei processi elettrodeboli che portano alla formazione del quark strange, che prima non era considerato, visto che tutte le particelle osservate (barioni o mesoni che fossero) erano formate solamente da quark up e down. In particolare ciò che si osservava era una *violazione di stranezza*, o nel linguaggio moderno **flavour changing**, per cui il sapore down veniva trasformato nel sapore del quark strange. Per modellizzare questa osservazione ed inglobare il quark strange nella teoria storicamente si è pensato di fare (noi lo riproduciamo in modo molto qualitativo ed intuitivo) è riscrivere il doppietto di adroni come:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix} \quad (5.7.45)$$

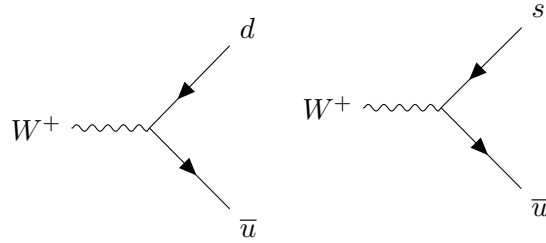
dove θ_c è detto **angolo di Cabibbo** (sperimentalmente si trova $\sin \theta_c \approx 0.22$). Nota che questo equivale a riscrivere le componenti basse con una rotazione di $SU(2)$:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \implies \begin{cases} d' = d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \\ s' = -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c. \end{cases} \quad (5.7.46)$$

Facendo ciò la corrente carica risulta essere:

$$J_\mu^+ = \bar{u}_L \bar{\sigma}^\mu d_L \cos \theta_c + \bar{u}_L \bar{\sigma}^\mu s_L \sin \theta_c \quad (5.7.47)$$

che permettono la costruzione dei diagrammi:



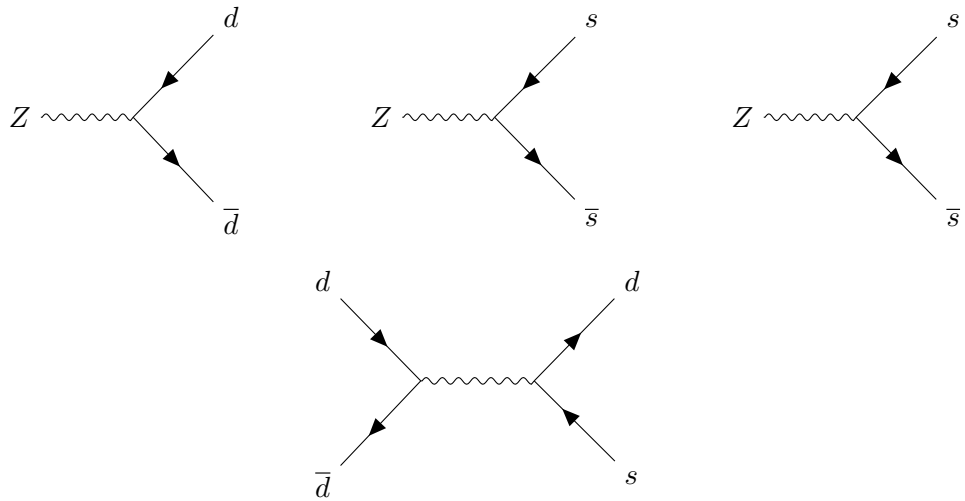
e tutto ciò sarebbe stato sufficiente a spiegare la violazione della stranezza, poiché si possono creare diagrammi per trasformare quark down in quark strange.

Però, allo stesso tempo la corrente neutra, che prima non mischiava le varie parti del doppietto (vedi la sezione §5.5.2), risulta essere:

$$J_0^\mu \supset d_L^\dagger \tilde{\sigma}_\mu d_L \quad (5.7.48)$$

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \cos^2 \theta_c d_L^\dagger \tilde{\sigma}_\mu d_L + \sin^2 \theta_c s_L^\dagger \tilde{\sigma}_\mu s_L + \\ &\quad + \sin \theta_c \cos \theta_c d_L^\dagger \tilde{\sigma}_\mu s_L + h.c. \end{aligned} \quad (5.7.49)$$

e ciò apre le strade a diagrammi del tipo:



Questa è la parte di corrente di mixing tra down e strange; tuttavia sperimentalmente si osserva che i processi con $\Delta Q = 0$ (carica elettrica), $\Delta s = 1, 2$ (strangeness) sono fortemente soppressi e non vengono spiegati dall'ipotesi di Cabibbo.

Nel 70' viene proposto il **meccanismo GIM** (Glashow-Iliopoulos-Maiani) che richiede l'esistenza del quark charm, con stessi numeri quantici del quark up, e che forma un doppietto con il quark strange, scritto come:

$$\begin{pmatrix} c \\ -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c \end{pmatrix}. \quad (5.7.50)$$

Introducendo tale doppietto nei processi neutri si ha:

$$J_\mu^0 \supset (\text{quello di prima}) + \left(-d^\dagger \sin \theta_c + s^\dagger \cos \theta_c \right) \tilde{\sigma}_\mu (-d \sin \theta_c + s \cos \theta_c) \quad (5.7.51)$$

$$= (\dots) + \sin^2 \theta_c d_L^\dagger \tilde{\sigma}_\mu d_L + \cos^2 \theta_c s_L^\dagger \tilde{\sigma}_\mu s_L - \underbrace{\sin \theta_c \cos \theta_c d_L^\dagger \tilde{\sigma}_\mu s_L}_{h.c.} \quad (5.7.52)$$

in cui il termine sottolineato mostra ancora violazione di stranezza, ma è tale da cancellare il termine misto che compariva nel contributo del flavour down-down (5.7.49). Grazie al meccanismo GIM si modella il fatto che nei processi neutri non ci sia violazione di flavour.

Successivamente però si è scoperto che le cose sono più complicate rispetto la situazione che abbiamo analizzato noi. Dopo poco tempo sono stati scoperti anche i quark top e bottom, dunque possiamo generalizzare i quark a:

$$Q_{L,i} = \begin{pmatrix} u_{L,i} \\ d_{L,i} \end{pmatrix} \quad , \quad u_{R,i} \quad , \quad d_{R,i} \quad ; \quad i = \{1, 2, 3\} \quad (5.7.53)$$

ossia, 3 famiglie, che però non rappresentano i quark fisici, come ci insegna GIM, ma sono una loro combinazione lineare. Infatti, i doppietti di $SU(2)$ scritti utilizzando l'angolo di Cabibbo, ci stanno dicendo che le due componenti non sono autostati di massa; poichè le componenti alte sono identificate, ma la componente bassa mischia, ad esempio, d con s che sono due particelle diverse¹⁷, per questo motivo possiamo dire che il termine di massa non è diagonale. Proviamo quindi a capire dove sono i quark fisici.

¹⁷Appartenendo a famiglie diverse hanno stessi numeri quantici (entrambi componenti basse), ma hanno masse diverse.

La parte di massa dei quark, per tutto quello che abbiamo detto, la possiamo scrivere come:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m^Q = & \sum_{i,j=1}^3 G_{ij}^{(d)} Q_{L,i}^\dagger H d_{R,j} + h.c. + \\ & + \sum_{i,j=1}^3 G_{ij}^{(u)} Q_{L,i}^\dagger \tilde{H} u_{R,j} + h.c.\end{aligned}\quad (5.7.54)$$

così che mettendoci nel VEV ci fornisce:

$$\frac{v}{\sqrt{2}} \left(d_{L,i}^\dagger G_{ij}^{(d)} d_{R,j} + u_{L,i}^\dagger G_{ij}^{(u)} u_{R,j} + h.c. \right) \quad (5.7.55)$$

ma avendo le componenti basse combinazioni di due particelle fisiche le matrici $G_{ij}^{(d)}$ non sono diagonali. Come ben sappiamo, per leggere i quark fisici, dobbiamo diagonalizzare il termine di massa. Possiamo scrivere¹⁸ la trasformazione unitaria:

$$\frac{v}{\sqrt{2}} G^{(u)} = U_L^\dagger M^{(u)} U_R \quad (5.7.56)$$

$$\frac{v}{\sqrt{2}} G^{(d)} = D_L^\dagger M^{(d)} D_R \quad (5.7.57)$$

in questo modo abbiamo anche la trasformazione:

$$\tilde{u}_R^i = U_R^{ij} u_R^j, \quad \tilde{u}_L^i = U_L^{ij} u_L^j \quad (5.7.58)$$

$$\tilde{d}_R^i = D_R^{ij} d_R^j, \quad \tilde{d}_L^i = D_L^{ij} d_L^j. \quad (5.7.59)$$

con le trasformazioni inverse, che ad esempio ci danno $u_L = U_L^\dagger \tilde{u}_L$.

Nota che abbiamo $U_{R,L}$ e $D_{R,L}$ sono 4 matrici unitarie, le matrici diagonalizzate $M^{(u)}$ e $M^{(d)}$ hanno come autovalori (positivi) le masse delle particelle fisiche, che sono i quark $\tilde{q}$, autostati di massa:

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{d} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{b} \end{pmatrix}$$

mentre i nostri vecchi u_i e d_i abbiamo capito essere, ciascuno, delle combinazioni lineari rispettivamente dei quark up, charm, top e down, strange, bottom.

¹⁸Una matrice complessa G , possiamo diagonalizzarla con autovalori positivi e reali, attraverso una trasformazione bi-unitaria; il che vuol dire che utilizziamo le matrici Left e Right diverse, ma entrambe unitarie.

Vediamo cosa implica nelle correnti. Per la corrente neutra abbiamo:

$$Q_{L,i}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q_{L,i} = \begin{pmatrix} u_i^\dagger & d_i^\dagger \end{pmatrix}_L \tilde{\sigma}^\mu \begin{pmatrix} \# & 0 \\ 0 & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix} \quad (5.7.60)$$

$$= Z_\mu \left(u_{L,i}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u_{L,i} + d_{L,i}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_{L,i} \right) \quad (5.7.61)$$

$$= Z_\mu \left(\tilde{u}_{L,i} U_L \tilde{\sigma}^\mu U_L^\dagger \tilde{u}_{L,i} + \tilde{d}_{L,i} D_L \tilde{\sigma}^\mu D_L^\dagger \tilde{d}_{L,i} \right) \quad (5.7.62)$$

$$= Z_\mu \left(\tilde{u}_{L,i} \tilde{\sigma}^\mu \tilde{u}_{L,i} + \tilde{d}_{L,i} \tilde{\sigma}^\mu \tilde{d}_{L,i} \right). \quad (5.7.63)$$

Siamo contenti perché i quark fisici non si mischiano (non c'è flavour mixing) nelle interazioni neutre. Per la corrente carica abbiamo:

$$Q_{L,i}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q_{L,i} = \begin{pmatrix} u_i^\dagger & d_i^\dagger \end{pmatrix}_L \tilde{\sigma}^\mu \begin{pmatrix} 0 & \# \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix} \quad (5.7.64)$$

$$= u_{L,i}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_{L,i} \quad (5.7.65)$$

$$= \tilde{u}_{L,i}^\dagger U_L \tilde{\sigma}^\mu D_L^\dagger \tilde{d}_{L,i} \quad (5.7.66)$$

$$= \tilde{u}_{L,i}^\dagger V_{CKM} \tilde{\sigma}^\mu \tilde{d}_{L,i}. \quad (5.7.67)$$

poiché ora le matrici non si tolgono per la relazione $UU^\dagger = \mathbb{1}$. Abbiamo introdotto la **matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa**:

$$V_{CKM} = U_L D_L^\dagger \quad (5.7.68)$$

che è una matrice unitaria:

$$V_{CKM}^\dagger V_{CKM} = \mathbb{1}. \quad (5.7.69)$$

La matrice V_{CKM} è unitaria e 3x3, le cui entrate le determiniamo dagli esperimenti, e può essere vista come una generalizzazione a tre famiglie della rotazione che avevamo fatto quando avevamo introdotto l'angolo di Cabibbo e il meccanismo di GIM, e possiamo parametrizzarla in termini di 3 angoli ed una fase; per cui è una matrice complessa.

La corrente (5.7.67) accoppiata al campo di gauge:

$$W_\mu^+ \tilde{u}_{L,i}^\dagger V_{CKM} \tilde{\sigma}^\mu \tilde{d}_{L,i} \quad (5.7.70)$$

viola la CP se V_{CKM} è complessa. Effettivamente, noi eravamo partiti con il dire che i processi deboli violano la parità, ma ora abbiamo che nel settore dei quark, associato alle correnti cariche, viene violata anche la coniugazione di carica. Chiaramente questo è osservato sperimentalmente.

A riguardo puoi vedere il compendio.

Osservazione. Se noi avessimo solo due famiglie, la matrice CKM sarebbe:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \quad (5.7.71)$$

cioè parametrizzabile attraverso un solo angolo, con la fase riassorbita e dunque una matrice reale. Essendo reale vuol dire che CP non viene rotta.

Nota. Tutto questo discorso non lo facciamo per i leptoni poiché non osserviamo flavour mixing per loro.

5.7.6 Massa e autoaccoppiamento del campo di Higgs

Noi fin'ora abbiamo considerato il vuoto del campo H , ma vogliamo capire anche come la particella fisica (del campo di Higgs) si accoppi. Possiamo riscrivere il nostro campo espanso attorno al vuoto (5.7.8) come:

$$H = \begin{pmatrix} h^+ \\ \frac{h+v}{\sqrt{2}} + ik \end{pmatrix} \quad (5.7.72)$$

ma ci possiamo mettere in un gauge¹⁹ in cui k e $h^\pm$ diventano bosoni di Goldstone e vengono mangiati da Z_μ^0 e $W_\mu^\pm$, dunque in cui:

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h+v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (5.7.73)$$

e ci rimane solamente il campo fisico h , che non viene mangiato dai bosoni di gauge (non rappresenta nessuna polarizzazione longitudinale dei bosoni di gauge massivi) e rende tutto consistente. Il bosone h lo chiamiamo **bosone di Higgs**²⁰, ed è quello che si è osservato nel 2012 al CERN di Ginevra.

Possiamo calcolarci:

$$H^\dagger H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{h+v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h+v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (5.7.74)$$

$$= \frac{1}{2} (h+v)^2 \quad (5.7.75)$$

e dunque:

$$H^\dagger H - \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} (h^2 + 2hv). \quad (5.7.76)$$

¹⁹Ricorda che mangiamo i bosoni di Goldstone, e diamo massa ai bosoni di gauge, tramite una trasformazione di gauge.

²⁰In realtà ci sono stati dei lavori, in materia condensata, precedenti ad P. Higgs di Brout e Englert che descrivevano lo stesso meccanismo. Per questo si può anche chiamare *meccanismo di Brout-Englert-Higgs*.

Dunque il termine di potenziale diventa:

$$V(H) = \frac{\lambda}{4} \frac{1}{4} (h^2 + 2hv)^2 \quad (5.7.77)$$

$$= \frac{\lambda}{16} (h^4 + 4h^3v + 4h^2v^2) \quad (5.7.78)$$

da cui possiamo leggere il termine di massa:

$$m_H^2 = \frac{\lambda v^2}{2} \simeq (125.25 \pm 0.17) \text{ GeV} \quad (5.7.79)$$

che avevamo già trovato in (5.7.14), e anche che sono possibili gli accoppiamenti, del campo di Higgs con se stesso, relativi ai seguenti diagrammi di ordine cubico e quartico:



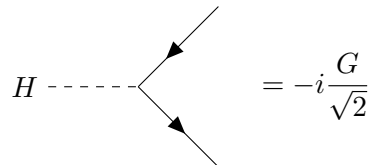
con i vertici pesati dagli opportuni termini che leggiamo in (5.7.78).

5.7.7 Accoppiamento di Higgs con la materia

Per i leptoni abbiamo che il campo di Higgs compare solo nei termini di Yukawa (5.7.27) che gli danno massa, per cui, se prendiamo il VEV vediamo le masse delle particelle leptoniche (come abbiamo già visto), ma se facciamo i conti abbiamo termini del tipo:

$$GL_{L,i}^\dagger H l_{R,i} + Gl_{R,i}^\dagger H^\dagger L_{L,i} = G \frac{h+v}{\sqrt{2}} (l_{L,i}^\dagger l_{R,i} + l_{R,i}^\dagger l_{L,i}) \quad (5.7.80)$$

e dunque dei vertici del tipo:



Per i quark funziona in modo esattamente identico, ma utilizzando i termini (5.7.54).

5.7.8 Accoppiamento di Higgs con i bosoni di gauge

L'ultimo accoppiamento che ci rimane da vedere del campo di Higgs è quello con i campi di gauge della teoria. Chiaramente tali termini li leggiamo dalla derivata covariante:

$$\mathcal{D}_\mu H = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} gW_\mu^3 + g'B_\mu & \sqrt{2}gW_\mu^+ \\ \sqrt{2}gW_\mu^- & -gW_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ h+v \end{pmatrix} \quad (5.7.81)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\sqrt{2}\frac{g}{2}W_\mu^+(h+v) \\ \partial_\mu h + \frac{i}{2}(gW_\mu^3 - g'B_\mu)(h+v) \end{pmatrix} \quad (5.7.82)$$

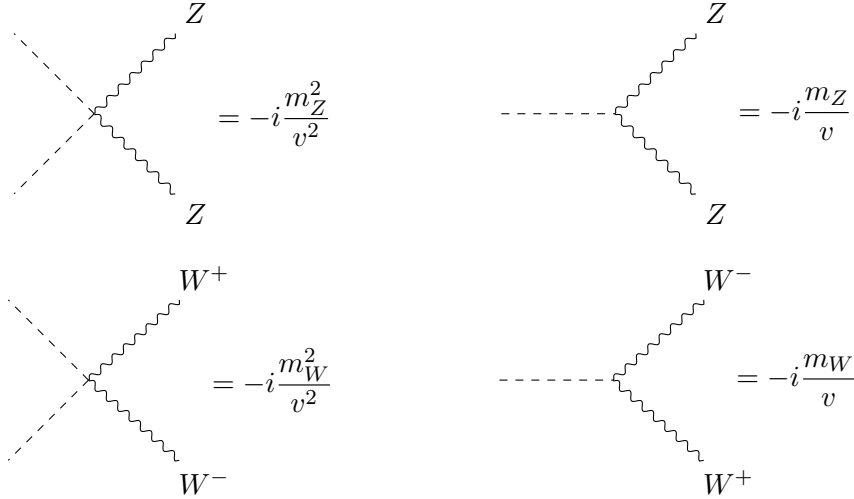
in cui dobbiamo renderci conto della combinazione:

$$gW_\mu^3 - g'B_\mu = \sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu. \quad (5.7.83)$$

Visto questo abbiamo il termine cinetico:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu H)^\dagger (\mathcal{D}^\mu H) &= \frac{1}{2} \left[\partial_\mu h \partial^\mu h + \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} (h^2 + 2hv + v^2) (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu + \\ &\quad \left. + \frac{2g^2}{4} (h^2 + 2hv + v^2) W_\mu^+ W^{-\mu} \right] \end{aligned} \quad (5.7.84)$$

da cui possiamo leggere le masse dei bosoni di gauge (che abbiamo già analizzato), ma soprattutto gli accoppiamenti tra il campo h e i vettori Z_μ e $W_\mu^\pm$, che sono raffigurabili dai diagrammi:



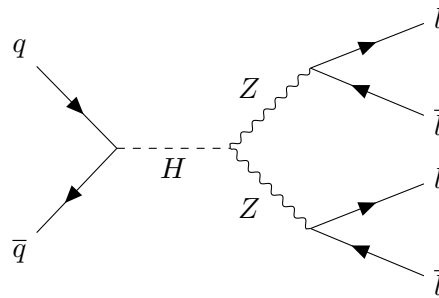
Nota. Ad esempio, per il vertice del diagramma di accoppiamento tra il campo h e due campi Z si ha:

$$\underbrace{\frac{1}{4} 2v^2 (g^2 + g'^2)}_{m_z} \frac{1}{v} = \frac{m_z}{v}.$$

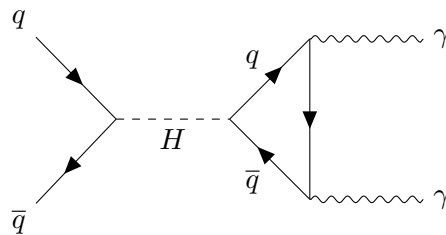
In più, in (5.7.84) possiamo vedere che davanti l'accoppiamento $Z_\mu Z^\mu$ è presente un fattore $1/2$, mentre davanti W^+W^- un fattore $1/4$. Ciò è dovuto al fatto che ci sono due possibili diagrammi equivalenti per l'accoppiamento con Z_μ .

5.7.9 Scoperta del bosone di Higgs

Come già detto più volte il bosone h di Higgs è stato scoperto al CERN nel 2012. LHC (Large Hydron Collider) è una macchina adronica, che circonda Ginevra, dunque che permette di realizzare scattering protone-protone. Negli esperimenti che si svolgono nel centro di ricerca si hanno stati iniziali con moltissimi quark (adroni). Dalla teoria sappiamo che sono possibili processi, unicamente grazie agli accoppiamenti del campo di Higgs, del tipo:



che ci permettono di misurare il campo di Higgs h , il quale non è una particella stabile e decade in una coppia di Z_μ , i quali a loro volta possono decadere in coppie di leptoni e anti-leptoni. Un altro processo possibile da ricercare è:



in cui vediamo che dei quark decadono nel campo h , il quale produce una coppia quark anti-quark, che essendo carichi possono accoppiarsi al campo di Maxwell, dando luogo al vertice classico della QED e ad un loop per i quark. Il contributo maggiore a questo secondo tipo di diagramma è dato da quando $q = t$ (quark top), essendo il più massiccio di tutti.

Tramite questi due processi CMS e ATLS hanno scoperto (confermando più volte il risultato) il bosone di Higgs.

5.8 Lagrangiana del modello standard

La lagrangiana che abbiamo scritto per il Modello Standard è:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} + \sum_{a=1}^3 \left(iL_a^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L_a + i l_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu l_{R,a} \right) \\
& + \sum_{a=1}^3 \left(iQ_{L,a}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q_{L,a} + i u_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_{R,a} + i d_{R,a}^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_{R,a} \right) \\
& + (\mathcal{D}_\mu H)^\dagger (\mathcal{D}^\mu H) - V(H) + \\
& + \sum_{i=1}^3 \left\{ G_i L_{L,i}^\dagger H l_{R,i} + G_i l_{R,i}^\dagger H^\dagger L_{L,i} \right\} \\
& + \sum_{i,j=1}^3 G_{ij}^{(d)} Q_{L,i}^\dagger H d_{R,j} + h.c. + \\
& + \sum_{i,j=1}^3 G_{ij}^{(u)} Q_{L,i}^\dagger \tilde{H} u_{R,j} + h.c.
\end{aligned} \tag{5.8.1}$$

con:

$$V(H) = \frac{\lambda}{4} \left(H^\dagger H - \frac{v^2}{2} \right)^2. \tag{5.8.2}$$

Nella tabella 5.4 riporto un riassunto dei numeri quantici delle particelle elementari facenti parte del Modello Standard.

	Higgs		Leptoni				Quarks			
	h^+	h^0	ν_L	l_L	ν_R	l_R	u_L	d_L	u_R	d_R
Q	+1	0	0	-1	0	-1	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
I_3	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
Y	+1	+1	-1	-1	0	-2	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Figura 5.4: Numeri quantici delle particelle elementari.

Appendici

Appendice A

Note sugli esercizi

Voglio raccogliere in questa Appendice alcuni appunti riguardanti gli esercizi che potranno capitare allo scritto. Una collezione delle mie prove svolte la trovi nella mia pagina personale (considera che possono esserci errori). È importante consultare tale file poiché le prove del 06-02-2025, 17-02-2025, 03-02-2026 e 18-02-2026 hanno importanti spunti utili anche per l'esame orale. Le suddette prove sono state svolte in aula con il professore.

Infatti lo scritto di questo esame è un po' "atipico", poiché gli esercizi che sono tipicamente riformulazioni di dimostrazioni o modelli visti in aula. Si consideri che un esercizio tipico è quello di costruire un modello (in un Universo parallelo) di particelle elementari con caratteristiche diverse da quello conosciuto. Diversi esercizi di quest'ultimo tipo in realtà sono una riscrittura di teorie più avanzate (stringhe, supersimmetria, etc.).

Puoi vedere il file di E. Chiarotto riguardante gli esercizi in cui ci sono diverse (se non tutte) le tipologie di esercizi che possono capitare allo scritto. Considera che gli esercizi di QFT fattibili in 3 ore non sono molti, per cui, oltre ad essere di poche tipologie, le ampiezze di probabilità che solitamente vengono chieste sono sempre le stesse, dunque assume molto significato il consiglio del professore di calcolarsi per bene tutte le sezioni d'urto $2 \rightarrow 2$ in Yukawa e QED.

A.1 Matrici e decomposizione gruppi

Noi nel capitolo in cui abbiamo parlato di teorie di Yang-Mills abbiamo accennato al fatto che un generico gruppo $U(N)$ lo si poteva decomporre in un gruppo abeliano $U(1)$ ed un $SU(N)$. Vediamo in questa rapida sezione un esempio.

Prendiamo una matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{A.1.1}$$

a cui richiediamo di essere hermitiana:

$$A = A^\dagger \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.2})$$

con $a, d \in \mathbb{R}$. Se guardiamo il caso di matrici bidimensionali, ossia guardiamo il gruppo $U(2)$, allora una base di matrici è:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.3})$$

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.4})$$

che ci permette di scrivere ad esempio:

$$A = 2a\sigma_a + 2d\sigma_b + \text{Re}\{b\}\sigma_1 + \text{Im}\{b\}\sigma_2. \quad (\text{A.1.5})$$

Possiamo calcolare i commutatori per la base di $U(2)$:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \frac{i}{2}(\sigma_a - \sigma_b) \quad , \quad [\sigma_a, \sigma_b] = 0 \quad (\text{A.1.6})$$

$$[\sigma_1, \sigma_a] = -\frac{i}{2}\sigma_2 \quad , \quad [\sigma_2, \sigma_a] = \frac{i}{2}\sigma_1 \quad (\text{A.1.7})$$

$$[\sigma_1, \sigma_b] = \frac{i}{2}\sigma_2 \quad , \quad [\sigma_2, \sigma_b] = -\frac{i}{2}\sigma_1 \quad (\text{A.1.8})$$

da cui vediamo che le ultime 4 regole di commutazione ci suggeriscono che possiamo scegliere una base più furba di quella attuale, poiché essi sono molto simili e possiamo scegliere una combinazione lineare di σ_a e σ_b , in modo da diagonalizzare l'algebra. Prendiamo:

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2} \quad , \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2} \quad (\text{A.1.9})$$

in questo modo otteniamo:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad , \quad [\sigma_0, \sigma_i] = 0. \quad (\text{A.1.10})$$

Dunque, di tutte le 4 matrici abbiamo un sottoinsieme che forma un'algebra chiusa, e l'elemento che rimane fuori, ossia σ_0 che è proporzionale all'identità, ci restituisce un gruppo abeliano unidimensionale.

Notiamo infatti, che avendo solo un'elemento σ_0 è una base per il gruppo $U(1)$ (è una matrice diagonale a traccia non nulla), mentre σ_i , sono matrici hermitiane, 2x2 a traccia nulla, dunque formano il gruppo $SU(2)$. Vediamo quindi:

$$U(2) \rightarrow U(1) \times SU(2). \quad (\text{A.1.11})$$

Questa cosa chiaramente si generalizza a gruppi n dimensionali.

A.2 Caso in cui un solo accoppiamento non è sufficiente

Possono capitare delle situazioni in cui quando accoppiamo i campi di materia che abbiamo nella lagrangiana $\mathcal{L}$, non otteniamo qualcosa di invariante per trasformazioni locali e quindi dobbiamo fare il procedimento di accoppiamento più volte. Ad esempio, nel caso di:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \quad (\text{A.2.1})$$

esso è invariante (il termine di massa è irrilevante) per le trasformazioni:

$$\psi \longrightarrow e^{i\alpha}\psi \quad (\text{A.2.2})$$

$$\bar{\psi} \longrightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi} \quad (\text{A.2.3})$$

e Noether ci dice che se vogliamo rendere tali trasformazioni locali, ovvero $\alpha = \alpha(x)$, allora dobbiamo scrivere:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + A_\mu J^\mu \quad (\text{A.2.4})$$

in cui J^μ è la corrente di Noether per la simmetria globale. Vediamo che con:

$$\delta\psi = i\alpha\psi \quad (\text{A.2.5})$$

$$\delta\bar{\psi} = -i\alpha\bar{\psi} \quad (\text{A.2.6})$$

abbiamo:

$$j^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\psi)}\delta\psi + \delta\bar{\psi}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\bar{\psi})} \quad (\text{A.2.7})$$

$$= i\bar{\psi}\gamma^\mu i\alpha\psi \quad (\text{A.2.8})$$

$$= -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (\text{A.2.9})$$

Dunque la nostra lagrangiana è:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + A_\mu J^\mu \quad (\text{A.2.10})$$

$$= \bar{\psi}\gamma^\mu i(\partial_\mu + iA_\mu)\psi \quad (\text{A.2.11})$$

da cui vediamo:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= i\delta\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu)\psi + \\ &\quad + i\bar{\psi}\gamma^\mu(i\delta A_\mu)\psi + \\ &\quad + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu)\delta\psi \end{aligned} \quad (\text{A.2.12})$$

$$\begin{aligned} &= \alpha\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu)\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\delta A_\mu\psi + \\ &\quad + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu)(i\alpha\psi) \end{aligned} \quad (\text{A.2.13})$$

$$\begin{aligned} &= \alpha\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu)\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\delta A_\mu\psi + \\ &\quad - \alpha\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu)\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.2.14})$$

$$(\text{A.2.15})$$

e abbiamo $\delta\mathcal{L} = 0$ se e solo se:

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu \alpha. \quad (\text{A.2.16})$$

Come già accennato non è detto che riusciamo ad avere $\delta\mathcal{L} = 0$ al primo passo di questa procedura di Noether. Consideriamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \quad (\text{A.2.17})$$

che è invariante per trasformazioni di $U(1)$, per cui si ha:

$$\delta\phi = i\alpha\phi \quad (\text{A.2.18})$$

$$\delta\phi^\dagger = -i\alpha\phi^\dagger \quad (\text{A.2.19})$$

con cui ci possiamo calcolare la corrente:

$$j^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \delta\phi^\dagger \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi^\dagger)} \quad (\text{A.2.20})$$

$$= \partial_\mu \phi^\dagger (i\alpha\phi) + (\partial_\mu \phi) (-i\alpha\phi^\dagger) \quad (\text{A.2.21})$$

$$\sim i \left(\phi \partial_\mu \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial_\mu \phi \right) \quad (\text{A.2.22})$$

in cui abbiamo rimosso il parametro in modo un po' sportivo. Possiamo riscrivere la lagrangiana con il campo A_μ accoppiato alla corrente di Noether:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger + iA_\mu \left(\phi \partial^\mu \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial^\mu \phi \right) \quad (\text{A.2.23})$$

di cui possiamo calcolare la variazione:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \partial_\mu \delta\phi \partial^\mu \phi^\dagger + \partial_\mu \phi \partial^\mu \delta\phi^\dagger + \\ &\quad + i\delta A_\mu (\phi \partial^\mu \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial^\mu \phi) + \\ &\quad + iA_\mu (\delta\phi \partial^\mu \phi^\dagger - \delta\phi^\dagger \partial^\mu \phi) + \\ &\quad + iA_\mu (\phi \partial^\mu (\delta\phi^\dagger) - \phi^\dagger \partial^\mu (\delta\phi)) \end{aligned} \quad (\text{A.2.24})$$

$$\begin{aligned} &= i\alpha \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger + i\partial_\mu \alpha \phi \partial^\mu \phi^\dagger - \\ &\quad - i\alpha \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger - i\partial_\mu \alpha \phi^\dagger \partial^\mu \phi + \\ &\quad + i\delta A_\mu (\phi \partial^\mu \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial^\mu \phi) - \\ &\quad - \alpha A_\mu (\phi \partial^\mu \phi^\dagger + \phi^\dagger \partial^\mu \phi) + \\ &\quad + A_\mu (\phi \partial^\mu \phi^\dagger \alpha + \phi \phi^\dagger \partial^\mu \alpha + \\ &\quad + \phi^\dagger \partial^\mu \phi \alpha + \phi^\dagger \phi \partial^\mu \alpha) \end{aligned} \quad (\text{A.2.25})$$

$$\begin{aligned} &= i\partial_\mu \alpha (\phi \partial^\mu \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial^\mu \phi) + \\ &\quad + i\delta A_\mu (\phi \partial^\mu \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial^\mu \phi) + \\ &\quad + 2A_\mu \partial^\mu \alpha \phi^\dagger \phi \end{aligned} \quad (\text{A.2.26})$$

ma anche imponendo delle condizioni su δA_μ , per colpa del termine con il prodotto dei campi, non riusciamo a togliere tutto e avere $\delta\mathcal{L} = 0$. Possiamo prendere:

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu \alpha \quad (\text{A.2.27})$$

rimanere con:

$$\mathcal{L}' = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger + iA_\mu (\phi \partial^\mu \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial^\mu \phi) \quad (\text{A.2.28})$$

$$\delta\mathcal{L}' = 2A_\mu \partial^\mu \alpha \phi^\dagger \phi \quad (\text{A.2.29})$$

e rifare lo stesso procedimento di accoppiamento, ma aggiungendo un termine in modo che possa cancellare ciò che avanza in $\delta\mathcal{L}'$:

$$\mathcal{L}'' = \mathcal{L}' + A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi \quad (\text{A.2.30})$$

in cui abbiamo notato che in $\delta\mathcal{L}'$ c'è $\phi^\dagger \phi$ invariante, e il pezzo ∂^μ che somiglia tanto alla variazione di un campo A_μ . In questo modo si ha:

$$\delta\mathcal{L}'' = \delta\mathcal{L}' + 2A_\mu \delta A^\mu \phi^\dagger \phi + \underbrace{0}_{\text{variazioni } \phi^\dagger \phi} \quad (\text{A.2.31})$$

$$= 2A_\mu \partial^\mu \alpha \phi^\dagger \phi - 2A_\mu \partial^\mu \alpha \phi^\dagger \phi \quad (\text{A.2.32})$$

$$= 0. \quad (\text{A.2.33})$$

Dunque siamo riusciti ad avere $\delta\mathcal{L}'' = 0$, con:

$$\mathcal{L}'' = \left[(\partial_\mu + iA_\mu) \phi \right] \left[(\partial_\mu - iA_\mu) \phi^\dagger \right] \quad (\text{A.2.34})$$

in cui riconosciamo la classica derivata covariante:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iA_\mu. \quad (\text{A.2.35})$$

Quindi, abbiamo imparato che per l'elettrodinamica scalare (SQED) non basta un solo processo di accoppiamento per avere una teoria locale, ma che alla fine dei conti otteniamo comunque una lagrangiana scritta tramite l'accoppiamento minimale.

Appendice B

Richiami di teoria dei gruppi

I riferimenti per questa, rapida, appendice sono p. 38-42 del Peskin e Schroeder As far as quantum field theory is concerned, a human being or the center of a star isn't all that different from empty space. Peskin e p. 211-214 dello Srednicki As far as quantum field theory is concerned, a human being or the center of a star isn't all that different from empty space. Srednicki.

Rivedremo, un po' velocemente, alcuni concetti riguardante la teoria dei gruppi che ci saranno utili nel corso.

Ricordiamo che un *gruppo* G è un insieme di elementi per cui esiste l'identità, l'inverso e vale la proprietà associativa. Diciamo che un gruppo è *chiuso* se per ogni operazione O definita dentro il gruppo abbiamo:

$$O(g_1, g_2) = g_3 \in G \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Ogni elemento del gruppo può essere in funzione dei *generatori* del gruppo T^a , che sono matrici con traccia nulla, e l'insieme di tali generatori costituisce la *rappresentazione del gruppo*; inoltre, i generatori soddisfano la stessa algebra del gruppo.

Nei *gruppi di Lie* i parametri sono continui, quindi possiamo studiare una trasformazione infinitesima da cui si può ricavare l'algebra (di Lie) del gruppo. Diciamo che un gruppo è *Abeliano* se gli elementi del gruppo commutano.

Nel caso di un gruppo di Lie possiamo sempre scrivere un generico elemento del gruppo in forma esponenziale:

$$g(\theta) = e^{i\theta_a T^a}$$

con $a \in 1, \dots, \dim G$. L'algebra di Lie si ottiene dalle relazioni:

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c$$

in cui f^{abc} è detta *costante di struttura*.

Ricordiamo che l'algebra di Lie di $SO(3)$ è uguale all'algebra di $SU(2)$:

$$[T^a, T^b] = i\varepsilon^{abc} T^c.$$

Abbiamo che il gruppo di Lorentz $SO(1,3) = SU(2) \otimes SU(2)$, e possiamo usare diverse rappresentazioni:

- La rappresentazione $(1,1)$, oppure $(0,0)$, per gli scalari (campi con spin 0).
- La rappresentazione $(2,1)$, $(1,2)$ oppure $(1/2,0)$, $(0,1/2)$ per gli spinori (campi left e right con spin $1/2$).
- La rappresentazione $(2,2)$, oppure $(1/2,1/2)$, per i vettori (campi con spin 1).

I generatori del gruppo di Lorentz sono $M^{\mu\nu}$ (hermitiano, anti-simmetrico), che includono l'operatore di momento angolare:

$$J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M^{jk}$$

e l'operatore di boost:

$$K^i = M^{i0}.$$

Si ricava che:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk} J_k. \end{aligned}$$

Abbiamo anche visto che possiamo introdurre due operatori non-hermitiani:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2} (J_i + iK_i) \\ N_i^\dagger &= \frac{1}{2} (J_i - iK_i) \end{aligned}$$

per i quali l'algebra si disaccoppia ed è:

$$\begin{aligned} [N_i, N_j] &= i\varepsilon_{ijk} N_k \\ [N_i^\dagger, N_j^\dagger] &= i\varepsilon_{ijk} N_k^\dagger \\ [N_i, N_j^\dagger] &= 0 \end{aligned}$$

dunque, ci permettono di avere due algebre di Lie legate al gruppo $SU(2)$, fattorizzate, che sono legate tra loro.

Appendice C

Matrici γ

Questa appendice puoi vederla come un continuazione di quella già presente negli appunti del corso di *Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi*, ma saremo un po' più rapidi e dimostreremo alcune delle relazioni, che non solo ci saranno utili, ma che anche abbiamo già incontrato e preso per buone.

I riferimenti sono p. 133-135 del Peskin e Schroeder As far as quantum field theory is concerned, a human being or the center of a star isn't all that different from empty space. Peskin e p. 295-297 dello Srednicki As far as quantum field theory is concerned, a human being or the center of a star isn't all that different from empty space. Srednicki e la pagina [Wikipedia](#).

C.1 Definizioni

Ricordiamo alcune definizioni:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1.1})$$

in cui abbiamo:

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \quad , \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \quad (\text{C.1.2})$$

con σ^i matrici di Pauli. Vale anche l'altra definizione:

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (\text{C.1.3})$$

Valgono le seguenti regole di anti-commutazione:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1} \quad (\text{C.1.4})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0. \quad (\text{C.1.5})$$

Abbiamo le seguenti identità:

$$\text{Tr}\{\mathbb{1}\} = 4 \quad (\text{C.1.6})$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \quad (\text{C.1.7})$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (\text{C.1.8})$$

Ricordiamo anche che in QFT la convenzione per la metrica di Minkowski è:

$$\eta = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1.9})$$

Ricordiamoci anche del *tensore di Levi-Civita* definito come:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \sigma = \text{even} \\ -1 & \sigma = \text{odd} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{C.1.10})$$

in cui con σ indichiamo il numero di permutazioni sugli indici per ottenere:

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \xrightarrow{\sigma} (0, 1, 2, 3).$$

Alcune delle identità che valgono per il simbolo di Levi-Civita in 4 dimensioni sono:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho = \eta^{\mu\nu} \gamma^\rho + \eta^{\nu\rho} \gamma^\mu - \eta^{\mu\rho} \gamma^\nu - i\varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \gamma_\sigma \gamma_5 \quad (\text{C.1.11})$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -4! = -24 \quad (\text{C.1.12})$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -6 \delta^\mu{}_\nu \quad (\text{C.1.13})$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta^\mu{}_\rho \delta^\nu{}_\sigma - \delta^\mu{}_\sigma \delta^\nu{}_\rho). \quad (\text{C.1.14})$$

C.2 Identità

Vediamo una carrellata di proprietà, che dimostriamo, delle matrici di Dirac. Ovviamente la numerazione è totalmente a caso e messa solamente per creare una sorta di ordine.

Identità 1:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = 4 \quad (\text{C.2.1})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= \eta_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} \\ &= (1)^2 + 3(-1)^2 = 4. \end{aligned}$$

Identità 2:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (\text{C.2.2})$$

Dimostrazione:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu = (2\eta^{\mu\nu}) \gamma_\mu - 4\gamma^\nu = -2\gamma^\nu.$$

Identità 3: (che non vale se la dimensione è diversa da 4.)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\rho} \quad (\text{C.2.3})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \gamma^\rho \gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\mu \\ &= 2\eta^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma_\mu - \gamma^\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\} \gamma_\mu + \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma_\mu \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\nu - \gamma^\nu (2\eta^{\mu\rho}) \gamma_\mu + 4\gamma^\nu \gamma^\rho \\ &= 2(\gamma^\rho \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\rho) \\ &= 2\{\gamma^\rho, \gamma^\nu\} \\ &= 4\eta^{\nu\rho}. \end{aligned}$$

Identità 4: (che non vale se la dimensione è diversa da 4.)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \quad (\text{C.2.4})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu \\ &= 2\eta^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu - \gamma^\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\} \gamma^\sigma \gamma_\mu + \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma_\mu \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - \gamma^\nu (2\eta^{\mu\rho}) \gamma^\sigma \gamma_\mu + \gamma^\nu \gamma^\rho \{\gamma^\mu, \gamma^\sigma\} \gamma_\mu - \\ &\quad - \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma_\mu \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - 2\gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho + \gamma^\nu \gamma^\rho (2\eta^{\mu\sigma}) \gamma_\mu - 4\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - 2\gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho + 2\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma - 4\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - 2\gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho - 2\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \\ &= 2\{\gamma^\rho \gamma^\sigma\} \gamma^\nu - 2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu - 2\{\gamma^\nu, \gamma^\sigma\} \gamma^\rho + \\ &\quad + 2\gamma^\sigma \{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} - 2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho - 2\{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} \gamma^\sigma + \\ &\quad + 2\gamma^\rho \{\gamma^\nu, \gamma^\sigma\} - 2\{\gamma^\rho, \gamma^\sigma\} \gamma^\nu + 2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu. \end{aligned}$$

Identità 5:

$$\gamma^\mu \gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{\alpha_n} \gamma_\mu = 2\gamma^{\alpha_n} \dots \gamma^{\alpha_1} \quad (\text{C.2.5})$$

con n dispari.

C.3 Tracce

Le proprietà della traccia, in generale, sono la *ciclicità*:

$$\text{Tr}\{ABC\} = \text{Tr}\{BCA\} = \text{Tr}\{CAB\} \quad (\text{C.3.1})$$

l'*additività*:

$$a \text{Tr}\{A\} + b \text{Tr}\{B\} = \text{Tr}\{aA + bB\} \quad (\text{C.3.2})$$

e l'*invarianza per trasposizione*:

$$\text{Tr}\{A^T\} = \text{Tr}\{A\}. \quad (\text{C.3.3})$$

Vediamo quelle per le matrici γ^μ .

Traccia 1:

$$\text{Tr}\{\#\text{odd}(\gamma^\mu)\} = 0 \quad (\text{C.3.4})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}\} &= \text{Tr}\{\gamma^{\mu_1} (\gamma_5)^2 \dots \gamma^{\mu_n} (\gamma_5)^2\} \\ &= \text{Tr}\{\gamma_5 \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \dots \gamma_5 \gamma^{\mu_n} \gamma_5\} \\ &= \text{Tr}\{(-\gamma^{\mu_1} \gamma_5) \gamma_5 \dots (-\gamma^{\mu_n} \gamma_5) \gamma_5\} \\ &= (-1)^n \text{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}\}. \end{aligned}$$

Traccia 2:

$$\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = 4\eta^{\mu\nu}. \quad (\text{C.3.5})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} &= \frac{1}{2} \text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} + \frac{1}{2} \text{Tr}\{\gamma^\nu \gamma^\mu\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}\{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\} \\ &= \eta^{\mu\nu} \text{Tr}\{\mathbb{1}\} \\ &= 4\eta^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Traccia 3:

$$\text{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu\} = 4 \left(\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} + \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \right). \quad (\text{C.3.6})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu\} &= \text{Tr}\{\{\gamma^\alpha, \gamma^\mu\} \gamma^\beta \gamma^\nu - \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu\} \\ &= \text{Tr}\{2\eta^{\alpha\mu} \gamma^\beta \gamma^\nu - \gamma^\mu \{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\nu\} \\ &= \text{Tr}\{2\eta^{\alpha\mu} \gamma^\beta \gamma^\nu - 2\eta^{\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\beta \{\gamma^\alpha, \gamma^\nu\} - \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\alpha\} \\ &= 2\eta^{\alpha\mu} \text{Tr}\{\gamma^\beta \gamma^\nu\} - 2\eta^{\alpha\beta} \text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} + 2\eta^{\alpha\nu} \text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\beta\} - \\ &\quad - \text{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu\} \\ &= 8 \left(\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} + \eta^{\alpha\nu} \eta^{\mu\beta} \right) - \text{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu\}. \end{aligned}$$

Traccia 4:

$$\text{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}\} = \text{Tr}\{\gamma^{\mu_n} \dots \gamma^{\mu_1}\}. \quad (\text{C.3.7})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}\} &= \text{Tr}\{(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n})^*\} \\ &= \text{Tr}\{(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n})^\dagger\} \\ &= \text{Tr}\{(\gamma^{\mu_n})^\dagger \dots (\gamma^{\mu_1})^\dagger\} \\ &= \text{Tr}\{(\gamma^0 \gamma^{\mu_n} \gamma^0) \dots (\gamma^0 \gamma^{\mu_1} \gamma^0)\} \\ &= \text{Tr}\{\gamma^{\mu_n} \gamma^0 \gamma^0 \dots \gamma^{\mu_1} \gamma^0 \gamma^0\} \\ &= \text{Tr}\{\gamma^{\mu_n} \dots \gamma^{\mu_1}\}. \end{aligned}$$

Traccia 5:

$$\text{Tr}\{\gamma_\rho \gamma^\nu \gamma_\sigma \gamma^\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\tau \gamma_\mu\} = -32 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\lambda\rho}. \quad (\text{C.3.8})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\gamma_\rho \gamma^\nu \gamma_\sigma (\gamma^\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\tau \gamma_\mu)\} &= \text{Tr}\{\gamma_\rho \gamma^\nu \gamma_\sigma (-2 \gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\lambda)\} \\ &= -2 \text{Tr}\{\gamma_\rho (\gamma^\nu \gamma_\sigma \gamma_\tau \gamma_\nu) \gamma_\lambda\} \\ &= -2 \text{Tr}\{\gamma_\rho (4 \eta_{\sigma\tau}) \gamma_\lambda\} \\ &= -8 \eta_{\sigma\tau} \text{Tr}\{\gamma_\rho \gamma_\lambda\} \\ &= -32 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\lambda\rho}. \end{aligned}$$

Vediamo quelle con γ^5 .**Traccia 6:**

$$\text{Tr}\{\gamma_5\} = 0. \quad (\text{C.3.9})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\gamma_5\} &= \text{Tr}\{i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3\} \\ &= 4 (\eta^{01} \eta^{23} + \eta^{03} \eta^{12} - \eta^{02} \eta^{13}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Traccia 7:

$$\text{Tr}\{\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu\} = 0. \quad (\text{C.3.10})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu\} &= \text{Tr}\{(\gamma^a \gamma^a) \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu\} \\ &= \text{Tr}\{\gamma^a \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^a\} \\ &= (\text{impongo } a \neq \mu, \nu \text{ e non è sommato}) \\ &= \text{Tr}\{\gamma^a \gamma_5 \gamma^\mu (-\gamma^a \gamma^\nu)\} \\ &= -\text{Tr}\{\gamma^a \gamma_5 (-\gamma^a \gamma^\mu) \gamma^\nu\} \\ &= +\text{Tr}\{\gamma^a (-\gamma^a \gamma_5) \gamma^\mu \gamma^\nu\} \\ &= -\text{Tr}\{(\gamma^a \gamma^a) \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu\}. \end{aligned}$$

Traccia 8:

$$\text{Tr}\{\gamma_5 \cdot \# \text{odd}(\gamma^\mu)\} = 0. \quad (\text{C.3.11})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\gamma_5 \cdot \# \text{odd}(\gamma^\mu)\} &= \text{Tr}\{i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \cdot \# \text{odd}(\gamma^\mu)\} \\ &= i \text{Tr}\{\# \text{odd}(\gamma^\mu)\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Traccia 9:

$$\text{Tr}\{\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\} = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{C.3.12})$$

Dimostrazione:

$$\text{Tr}\{\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\} = -4ie^{\mu\nu\rho\sigma}.$$