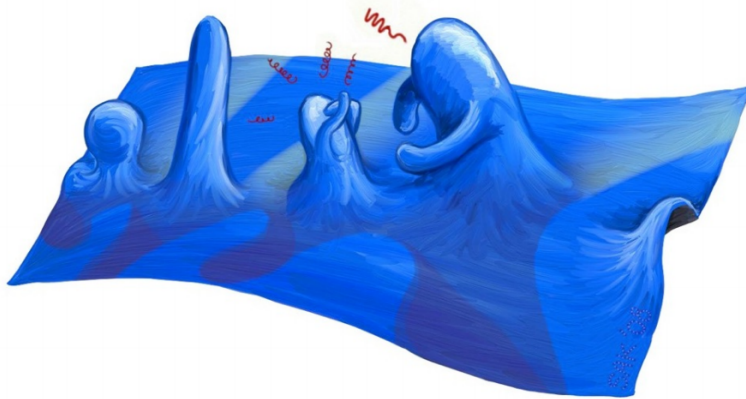


Appunti del corso di:
**Complementi di "Introduzione alla
Teoria Quantistica dei Campi"**

Gabriele Cembalo

A.A. 2025-2026



Università degli Studi di Torino
Dipartimento di Fisica
Via Giuria, 1, Torino (TO)

Questi discorsi non sono che
complementi delle precedenti
specolazioni, e servono a darne
compimento e perfezione.

Galileo Galilei (1638)

Prefazione

In questo documento intendo raccogliere i miei appunti basati sul materiale del corso “**Complementi di "Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi"**”, tenuto dal Prof. M. Boggione e seguito presso *Università degli Studi di Torino* nell’anno accademico 2025-2026. Durante il corso sono stati consigliati diversi libri (elencati in Bibliografia), e cercherò di indicare i riferimenti corrispondenti all’inizio di ogni capitolo.

Questi appunti sono una versione riscritta delle note prese durante le lezioni, quindi la fonte principale è il materiale presentato dal professore. Declino ogni responsabilità e rimando alla mia pagina personale per saperne di più su questi appunti e sul fatto che non hanno natura né accademica né didattica.

Questi appunti vanno chiaramente intesi come note personali, riscritte in maniera ordinata a partire dalle lezioni. Eventuali sviste, errori o imprecisioni sono dovuti ai miei limiti. Inoltre, ho scritto questi appunti principalmente per “spiegare” a me stesso l’argomento, quindi alcune sezioni potrebbero risultare eccessivamente dettagliate o, al contrario, troppo superficiali a seconda del lettore. In ogni caso, spero possano comunque essere utili a qualcuno. Spero anche di essere riuscito a produrre un documento chiaro e ben strutturato.

Una raccolta dei miei appunti è disponibile sulla mia pagina GitHub personale: gCembalo.github.io.

Eventuali errori o refusi possono essere segnalati alla mia email personale: g70362643@gmail.com.

Last update: 03/12/2025

Indice

1	Introduzione	1
2	Simmetrie discrete del campo di Dirac	3
2.1	Parità	4
2.2	Inversione temporale	7
2.3	Coniugazione di carica	10
2.4	Sommario di C , P e T	12
3	Propagatori interagenti e teorie perturbative	13
3.1	Teoria perturbativa in Meccanica Quantistica	13
3.2	La matrice S	16
3.2.1	Definizione della matrice S	17
3.2.2	Sviluppo perturbativo della matrice S	19
3.3	Teorema di Wick	20
3.4	Diagrammi di Feynmann	24
3.5	Teoria $\hat{\phi}^4$	26
3.5.1	Regole di Feynmann nello spazio delle configurazioni per la teoria $\hat{\phi}^4$	33
3.5.2	Diagrammi di Feynmann nello spazio degli impulsi per la teoria $\hat{\phi}^4$	34
3.5.3	Regole di Feynmann nello spazio degli impulsi per la teoria $\hat{\phi}^4$	36
3.5.4	Scattering di due particelle	37
3.6	Teoria di Yukawa	39
3.6.1	La teoria $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$	43
3.6.2	Regola di Feynmann per la teoria $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$	46
3.6.3	Scattering di due particelle per la teoria $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$	46

Capitolo 1

Introduzione

Non ci sarebbe da scrivere una vera introduzione per queste note, le uniche cose che posso dire è che sono una continuazione degli appunti di *Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi* e che conterranno argomenti che potrebbero ritornare nel corso di *Fondamenti della Teoria Quantistica dei Campi*.

Ricordo anche che puoi vedere il file linkato alla mia pagina personale, in cui ho messo alcuni conti che ho svolto durante lo studio, ma che non ho avuto voglia di riportare nelle note. Vedi l'indice al termine delle note del corso di introduzione.

In più, visto che sono argomenti sparsi e potrebbero risultare slegati, cercherò di indicare sempre i riferimenti bibliografici.

Capitolo 2

Simmetrie discrete del campo di Dirac

Vediamo in questo capitolo quali sono le simmetrie discrete che possiede il campo spinoriale di Dirac. Può essere visto come una parte attaccata al capitolo relativo alla teoria dei gruppi (oppure vedi le mie note *Introduzione alla teoria dei gruppi*), ma con qualche spolverata di Fisica. Rileggi brevemente la sezione riguardo l'equazione di Dirac in cui abbiamo giusto accennato due cose sulla trasformazione di parità. Il riferimento principale è il capitolo 3.6 sul Peskin e Schroeder Questi discorsi non sono che complementi delle precedenti specolazioni, e servono a darne compimento e perfezione. Peskin:1995ev, ma puoi anche vedere il capitolo 15 del Lancaster e Blundell Questi discorsi non sono che complementi delle precedenti specolazioni, e servono a darne compimento e perfezione. Lancaster:2014pza. Una descrizione (che non abbiamo seguito) fatta bene è presente anche sullo Srednicki Questi discorsi non sono che complementi delle precedenti specolazioni, e servono a darne compimento e perfezione. Srednicki:2007qs.

Come abbiamo avuto modo di vedere, ci sono alcune trasformazioni che non appartengono al gruppo di Lorentz ristretto $L_+^\uparrow$, tra di esse ci sono:

- Trasformazione di parità P .
- Inversione temporale T .
- Coniugazione di carica C .

Analizzeremo nel corso del capitolo ciascuna di essere, ma perché? Perché ci si è resi conto, dalle osservazioni sperimentali, che la natura rispetta la simmetria per trasformazioni CPT . Infatti, ad esempio, le interazioni forti, EM e gravitazionale sono simmetriche per C , P e T separatamente. Allo stesso tempo le interazioni deboli violano C e P separatamente, ma rispettano le simmetrie CP e T (apparte alcuni casi particolari rari).

In particolare, una Teoria Quantistica dei Campi costruita in modo corretto deve possedere simmetria *CPT*, il che vuol dire che se invertiamo le 4 coordinate dello spazio-tempo e cambiamo le cariche, quindi scambiamo particelle con antiparticelle, allora tutto dev'essere invariante. Questo va sotto il nome di *teorema CPT*. Una conseguenza del teorema è che la massa e il tempo di vita di una qualsiasi particella devono essere identici a quelli della corrispettiva antiparticella.

2.1 Parità

In generale, per una trasformazione di Lorentz abbiamo:

$$\psi(x) \xrightarrow{\text{T.L.}} \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x). \quad (2.1.1)$$

Per una trasformazione di parità, abbiamo visto con l'equazione:

$$\psi \xrightarrow{\text{P.}} \psi'(x') = S_P\psi(x) \quad (2.1.2)$$

in cui vale:

$$S_P = \eta_P \gamma^0 \quad (2.1.3)$$

che:

$$\psi(x) \xrightarrow{\text{P.}} \psi'(x') = S_P\psi(x) \quad \text{con } S_P = \eta_P \gamma^0 \quad (2.1.4)$$

in cui $\eta_P = e^{i\varphi}$ con $\varphi \in \mathbb{R}$. Una trasformazione di parità consiste sostanzialmente in un'inversione spaziale e, come sappiamo, riesce a invertire l'impulso di una particella, ma non il suo spin. Una descrizione pittorica della trasformazione è quella che da il Peskin e Schroeder che ho riportato in figura 2.1.

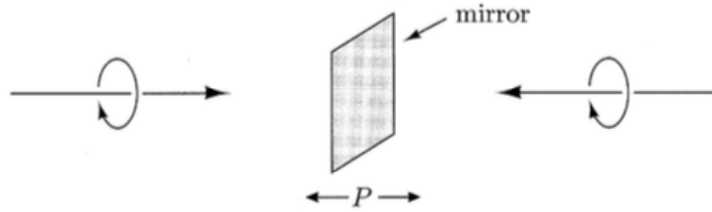


Figura 2.1

Come sappiamo, una trasformazione di Lorentz trasforma il campo $\psi(x)$ tramite una matrice 4x4 costante, ci aspettiamo quindi anche di poter rappresentare la trasformazione di parità tramite matrici 4x4, e allo stesso tempo, trattando $\hat{\psi}(x)$ come un'operatore, di scrivere una trasformazione per esso del tipo:

$$S_P \hat{\psi}(x) S_P = \eta_P \gamma^0 \hat{\psi}(t, -\vec{x}). \quad (2.1.5)$$

Nota che scriviamo $S_P \hat{\psi}(x) S_P$ e non $S_P^{-1} \hat{\psi}(x) S_P$ perché vale che $S_P^{-1} = S_P^\dagger$, essendo la partià rappresentabile da un'operatore unitario (poiché $S_P^2 = \mathbb{1}$), e con un'abuso di notazione scriviamo $S_P \hat{\psi}(x) S_P$, ovviamente intendendo che uno dei due operatori S_P sia l'inverso dell'altro.

Per riuscire a trovare dei risultati concreti riformuliamo il tutto utilizzando il linguaggio della QFT, ossia, riformuliamo tutto in termini di operatori di creazione e distruzione e degli stati di singola particella che essi creano agendo sul vuoto:

$$\hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) |0\rangle \quad , \quad \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) |0\rangle . \quad (2.1.6)$$

L'operatore di parità trasforma ogni stato (2.1.6) come:

$$\begin{cases} \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) |0\rangle & \xrightarrow{\text{P.}} \hat{a}_s^\dagger(-\vec{p}) |0\rangle \\ \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) |0\rangle & \xrightarrow{\text{P.}} \hat{b}_s^\dagger(-\vec{p}) |0\rangle \end{cases} \quad (2.1.7)$$

per cui dobbiamo avere che:

$$\begin{cases} S_P \hat{a}_s(\vec{p}) S_P = \eta_a \hat{a}_s(-\vec{p}) \\ S_P \hat{b}_s(\vec{p}) S_P = \eta_b \hat{b}_s(-\vec{p}) \end{cases} \quad (2.1.8)$$

conseguentemente:

$$\begin{cases} S_P \hat{a}_s^\dagger(\vec{p}) S_P = \eta_a^* \hat{a}_s^\dagger(-\vec{p}) \\ S_P \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) S_P = \eta_b^* \hat{b}_s^\dagger(-\vec{p}) \end{cases} \quad (2.1.9)$$

e siccome due applicazioni successive dell'operatore di parità devono portare l'osservabile al suo valore originale, e siccome le osservabili sono costituite da un numero pari di operatori fermionici, allora si ha:

$$|\eta_{a,b}|^2 = 1 \quad \implies \quad \eta_{a,b} = \pm 1. \quad (2.1.10)$$

Visto come trasformano gli operatori di creazione e distruzione possiamo calcolare come trasforma l'operatore $\hat{\psi}(x)$ esprimendolo in termini di $\hat{a}^{(\dagger)}$ e $\hat{b}^{(\dagger)}$. Ricordando l'espressione del campo spinoriale quantizzato scriviamo:

$$\begin{aligned} S_P \hat{\psi}(x) S_P & \xrightarrow{\text{P.}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_k \left[\eta_a \hat{a}_s(-\vec{p}) (u_s(\vec{p}) e^{-ipx})' + \right. \\ & \quad \left. + \eta_b^* \hat{b}_s^\dagger(-\vec{p}) (v_s(\vec{p}) e^{+ipx})' \right] \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

in cui abbiamo lasciato da trasformare le parentesi con gli spinori u_s e v_s . Ora, indichiamo:

$$\tilde{p}^\mu = (p^0, -\vec{p}) = (E_p, -\vec{p}) \quad (2.1.12)$$

da cui consegue:

$$px = p_\mu x^\mu = \tilde{p} \cdot (t, \vec{x}) = \tilde{p}_\mu \tilde{x}^\mu = \tilde{p} \tilde{x} \quad (2.1.13)$$

ma anche che:

$$\tilde{p} \cdot \sigma = p \cdot \bar{\sigma} \quad (2.1.14)$$

$$\tilde{p} \cdot \overleftarrow{\sigma} = p \cdot \sigma. \quad (2.1.15)$$

Gli spinori quindi trasformano come:

$$\begin{cases} v(\vec{p}) = \gamma^0 v(\tilde{p}) \\ v(\vec{p}) = -\gamma^0 v(\tilde{p}) \end{cases} \quad (2.1.16)$$

è facile dimostrarlo (vedi pagina 65 del Peskin) utilizzando le relazioni tra p e σ di sopra. Quindi otteniamo:

$$S_P \hat{\psi}(x) S_P \xrightarrow{\text{P.}} \int \frac{d^3 \tilde{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_k \left[\eta_a \hat{a}_s(\tilde{p}) u_s(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p}\tilde{x}} - \eta_b^* \hat{b}_s^\dagger(\tilde{p}) v_s(\tilde{p}) e^{+i\tilde{p}\tilde{x}} \right] \quad (2.1.17)$$

che mi aspetto essere proporzionale ad $\hat{\psi}(t, -\vec{x})$. Possiamo rispettare le nostre aspettative richiedendo che:

$$\eta_b^* = -\eta_a \quad (2.1.18)$$

così che si fattorizzino e si cambi il segno, ma che implica anche che:

$$\eta_a \eta_b = -\eta_a \eta_a^* = -1. \quad (2.1.19)$$

Per convenzione si sceglie $\eta_a = +1$ e dunque $\eta_b = -\eta_a = -1$. Troviamo quindi:

$$S_P \hat{\psi}(x) S_P \xrightarrow{\text{P.}} \eta_a \gamma^0 \hat{\psi}(t, -\vec{x}) \quad (2.1.20)$$

con $|\eta_a|^2 = 1$.

Grazie alla trasformazione (2.1.20) il Peskin verifica anche tutte le proprietà di trasformazione degli invarianti bilineari sotto parità.

Facciamo un'attimo un breve appunto sull'operatore di parità. Abbiamo riportato la figura 2.1 del Peskin e Schroeder per rappresentare una trasformazione di parità, ma chi la spiega effettivamente bene è il Lancaster e Blundell. Loro ci dicono: quando guardiamo una certa immagine in uno specchio tutto sembra uguale, ma allo stesso tempo diverso. Quando guardiamo una mano riflessa, ovviamente se contiamo il numero di dita esso rimane lo stesso. Allo stesso tempo però, ci rendiamo conto che lo specchio ci mostra una realtà opposta a quella in cui effettivamente viviamo, ribaltando la coordinata spaziale perpendicolare alla superficie dello specchio e lasciando invariate

le altre due. L'effetto dello specchio non può essere ricostruito tramite delle rotazioni. Però se dopo lo specchio agiamo con una rotazione di 180° attorno l'asse perpendicolare allo specchio, allora otteniamo una trasformazione di *inversione*, che è rappresentata dall'operatore di parità P di cui abbiamo parlato. Successivamente all'inversione, come già detto, otteniamo come risultato che tutte e tre le coordinate spaziali risultano ribaltate.

Però, non tutte le quantità si trasformano ugualmente sotto parità. Abbiamo parlato ad esempio delle dita della mano, il cui numero non viene modificato con lo specchio; le quantità invarianti sotto P si chiamano **scalari**. Per i vettori, come ad esempio il campo elettrico, l'azione di P ha l'effetto di cambiamento di segno ottenendo l'oggetto opposto. Però, esistono anche degli oggetti intermedi, ossia oggetti che sono matematicamente scalari o vettori, ma che non si comportano come tali. Chiamiamo **pseudoscalari** gli oggetti che sono effettivamente scalari, ma che sotto parità cambiano segno. Allo stesso modo chiamiamo **pseudovettori** gli oggetti che sono vettori (formati dal prodotto esterno di due vettori, a volte chiamati *vettori polari*), ma che sotto l'azione di P non cambiano segno. Riassumiamo brevemente i risultati:

$$P(\text{scalare}) = \text{scalare}$$

$$P(\text{pseudoscalare}) = -\text{pseudoscalare}$$

$$P(\text{vettore}) = -\text{vettore}$$

$$P(\text{pseudovettore}) = \text{pseudovettore}.$$

Tutto quello che abbiamo detto è riassunto nelle figure (2.2) e (2.3).

2.2 Inversione temporale

Vediamo in questa sezione la trasformazione, che chiamiamo T , dell'inversione temporale. Come la parità, e come vedremo la coniugazione di carica, vorremmo che anche T fosse un operatore unitario e vorremmo che agisse nel modo seguente:

$$\begin{cases} \hat{a}_s(\vec{p}) & \xrightarrow{T.} \hat{a}_s(-\vec{p}) \\ \psi(t, \vec{x}) & \xrightarrow{T.} \psi(-t, \vec{x}) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

ossia una trasformazione che inverte l'asse temporale. Ovviamente ci sono relazioni analoghe anche per l'operatore $\hat{b}$ di antiparticella. Notiamo che invertendo il segno del tempo, la velocità cambia segno e di conseguenza anche l'impulso.

Ad ogni modo, ottenere una trasformazione di questo tipo è molto difficile poiché, come abbiamo già avuto modo di vedere, l'operazione di mandare $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ implica la trasformazione $(t, \vec{x}) \rightarrow (t, -\vec{x})$ nello sviluppo di $\hat{\psi}(x)$

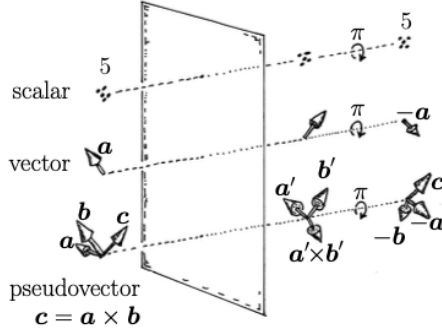


Figura 2.2: Operazione di parità composta dal riflesso su uno specchio e una rotazione di 180° attorno l'asse perpendicolare lo specchio stesso.

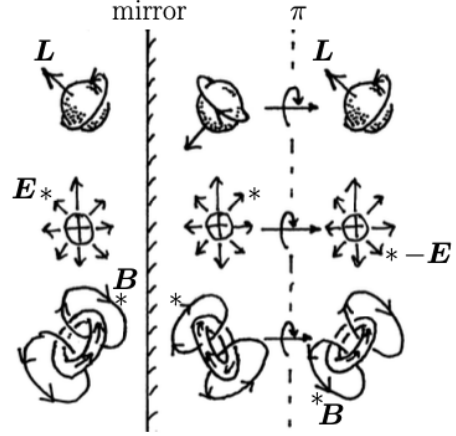


Figura 2.3: Operazione di parità su quantità fisiche. Possiamo vedere che il momento angolare $\vec{L}$ e il campo magnetico $\vec{B}$ si comportano come pseudovettori, ma il campo elettrico $\vec{E}$ come un vettore.

in termini di operatori di creazione e distruzione. Ci si può anche rendere conto che la difficoltà cresce se si vuole imporre che T sia una simmetria per la teoria di Dirac.

Quello che si può fare è rinunciare ad avere T definito in modo convenzionale, ma pur mantenendo l'unitarietà (cose che non vogliamo perdere se vogliamo preservare la probabilità). Definiamo quindi un'operatore unitario, quindi tale per cui:

$$T^{-1} = T^\dagger \quad (2.2.2)$$

che non agisce solamente sugli operatori, ma anche sui c-numeri tramite un'operazione di complessa coniugazione:

$$T(\text{c-numero}) = (\text{c-numero})^* T. \quad (2.2.3)$$

In questo modo, anche se T è simmetria del sistema, ovvero se $[T, H] = 0$, abbiamo che $T e^{-iHt} = e^{+iHt} T$ e dal momento che l'evoluzione temporale avviene con gli operatori e^{-iHt} ed e^{+iHt} , allora effettivamente T inverte la freccia del tempo. Puoi vedere i conti sul Peskin e Schroeder. Notiamo anche che definendo così l'operatore T perdiamo la linearità, da momento che l'operatore complesso coniugato non è un'operazione lineare, infatti, T è detto operatore *antiunitario* o *antilineare*.¹

¹Il Lancaster e Blundell spiega molto bene l'inversione temporale, in particolare ci dice che cos'è un operatore antiunitario e perché dobbiamo introdurlo. Quando invertia-

Oltre ad invertire il senso dell'asse temporale, T inverte anche la proiezione dello spin; cosa importante poiché $\hat{\psi}$ ha una struttura spinoriale data da u_s e v_s con $s = 1, 2$. Il Peskin e Schroeder danno un'immagine pittorica della trasformazione che riporto in figura 2.4.

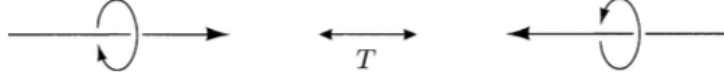


Figura 2.4

È utile ricrodare le convenzioni che avevamo scelto nella sezione in cui avevamo parlato delle soluzioni dell'equazione di Dirac, in particolare ricordare che associavamo gli spinori $u_s(\vec{p})$ alle particelle fermioniche e $v_s(\vec{p})$ alle antiparticelle, ma anche rinfrescare la memoria sulla forma degli spinori bidimensionali $\chi_{1,2}$ e $\phi_{1,2}$. Notiamo anche che l'operazione di T , nel passaggio particella e antiparticella ci fa fare, automaticamente anche lo scambio up→down, cioè, se per le particelle avevamo spin s , per le antiparticelle avremo $-s$ nel pedice associato agli spinori; dunque scriviamo ad esempio $\phi_s = \chi_{-s}$.

Con un po' di algebra, e se vuoi con l'aiuto del Peskin, si può dimostrare che l'operazione che effettivamente "flippi" la componente di spin sia:

$$\begin{cases} u_{-s}(\vec{p}) = -\gamma^1 \gamma^3 [u_s(\vec{p})]^* \\ v_{-s}(\vec{p}) = -\gamma^1 \gamma^3 [v_s(\vec{p})]^* \end{cases} \quad (2.2.6)$$

in cui $\vec{p} = (p^0, -\vec{p}) = (E_p, -\vec{p})$. Le relazioni (2.2.6) rendono esplicito il fatto che l'inversione temporale richieda un'operazione di complessa coniugazione. Per gli operatori di distruzione possiamo scrivere:

$$\begin{cases} T \hat{a}_s(\vec{p}) T = \hat{a}_{-s}(-\vec{p}) \\ T \hat{b}_s(\vec{p}) T = \hat{b}_{-s}(-\vec{p}) \end{cases} \quad (2.2.7)$$

a meno di un fattore di fase η_T del tutto ininfluenza che possiamo omettere per semplicità.

mo l'asse temporale, ma lasciamo invariato lo spazio vogliamo delle trasformazioni che facciamo:

$$T^{-1} \hat{x} T = \hat{x} \quad , \quad T^{-1} \hat{p} T = \hat{p} \quad (2.2.4)$$

e l'unico modo che abbiamo per rispettare la regola di commutazione tra posizione ed impulso $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ deve valere $T^{-1} i T = -i$, che è proprio la relazione tipica degli operatori antiunitari. Gli operatori antiunitari, chiamiamolo S , non sono lineari e vale:

$$S(a|\phi\rangle + b|\chi\rangle) = a^* S|\phi\rangle + b^* S|\chi\rangle \quad (2.2.5)$$

proprietà che, tra l'altro, giustifica il fatto che anche dei c-numeri si trasformino sotto azione di S , cosa che diremmo non succedere visto che seppur c-numeri sono comunque numeri e quindi che commutino con tutto.

Viste le proprietà di trasformazione degli spinori e degli operatori di creazione e distruzione possiamo vedere come si trasformi il campo sotto queste trasformazioni (mettiamo esplicitamente gli operatori $T^\dagger$ per vedere meglio le trasformazioni):

$$T^\dagger \hat{\psi}(t, \vec{x}) T = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s T^\dagger \left(\hat{a}_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ipx} + \right. \\ \left. + \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{+ipx} \right) T \quad (2.2.8)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s T^\dagger \left(\hat{a}_s(\vec{p}) \underbrace{TT^\dagger}_{=1} u_s(\vec{p}) e^{-ipx} + \right. \\ \left. + \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \underbrace{TT^\dagger}_{=1} v_s(\vec{p}) e^{+ipx} \right) T \quad (2.2.9)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(\hat{a}_{-s}(-\vec{p}) u_s^*(\vec{p}) e^{+ipx} + \right. \\ \left. + \hat{b}_{-s}^\dagger(-\vec{p}) v_s^*(\vec{p}) e^{-ipx} \right) \quad (2.2.10)$$

ricordandoci che T agisce anche sui c-numeri restituendone il complesso coniugato. Continuando i conti:

$$T^\dagger \hat{\psi}(t, \vec{x}) T = (\gamma^1 \gamma^3) \int \frac{d^3 \tilde{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(\hat{a}_{-s}(\tilde{p}) u_{-s}(\tilde{p}) e^{+i\tilde{p} \cdot (t, -\vec{x})} + \right. \\ \left. + \hat{b}_{-s}^\dagger(\tilde{p}) v_{-s}(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p} \cdot (t, -\vec{x})} \right) \quad (2.2.11)$$

notando che $\tilde{p} \cdot (t, -\vec{x}) = -\tilde{p} \cdot (-t, \vec{x})$, allora possiamo finalmente scrivere:

$$T^\dagger \hat{\psi}(t, \vec{x}) T = \gamma^1 \gamma^3 \hat{\psi}(-t, \vec{x}). \quad (2.2.12)$$

Come per la parità (e la coniugazione di carica) sul Peskin e Schroeder ci sono le proprietà di trasformazione anche degli invarianti bilineari.

2.3 Coniugazione di carica

La trasformazione di coniugazione di carica, che indichiamo con C , è convenzionalmente definita come l'operazione che trasforma un fermione, con una certa proiezione di spin, in un anti-fermione con stessa proiezione di spin. In generale, quello che fa è mandare una particella in un'antiparticella lasciando invariata la proiezione dello spin e cambiandone tutte le quantità

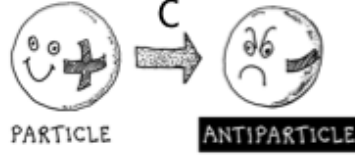


Figura 2.5

charge-like, ossia tutte le quantità collegate alla carica, ossia, carica elettrica, numero leptonico, hypercarica etc. . Il Lancaster e Blundell lo rappresentano con la figura 2.5.

Quello che fa una trasformazione di questo tipo è:

$$\begin{cases} C\hat{a}_s(\vec{p})C = \hat{b}_s(\vec{p}) \\ C\hat{b}_s(\vec{p})C = \hat{a}_s(\vec{p}) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

a meno di una fase η_C che ignoriamo per semplicità. Relazioni analoghe anche per gli operatori di creazione. Gli spinori si trasformano come (il Peskin e Schroeder lo verificano velocemente):

$$\begin{cases} u_s(\vec{p}) = -i\gamma^2[v_s(\vec{p})]^* \\ v_s(\vec{p}) = -i\gamma^2[u_s(\vec{p})]^* \end{cases} \quad (2.3.2)$$

in cui possiamo notare che anche in questo caso entra in gioco l'operazione di complessa coniugazione. Inserendo le trasformazioni degli spinori all'interno dell'espressione della trasformazione dell'operatore di campo:

$$\begin{aligned} C\hat{\psi}(x)C &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left[-i\gamma^2\hat{b}_s(\vec{p})[v_s(\vec{p})]^* e^{-ipx} - \right. \\ &\quad \left. -i\gamma^2\hat{a}_s^\dagger(\vec{p})[u_s(\vec{p})]^* e^{+ipx} \right] \\ &= -i\gamma^2\hat{\psi}^*(x) = -i\gamma^2\left(\hat{\psi}^\dagger\right)^T = -i\left(\hat{\bar{\psi}}\gamma^0\gamma^2\right)^T. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Quindi possiamo vedere che:

$$C\hat{\psi}(x)C = -i\gamma^2\hat{\psi}^*(x) \quad (2.3.4)$$

che ci mostra che la coniugazione di carica manda ψ in ψ^* , ma equivalentemente abbiamo:

$$C\hat{\psi}(x)C = -i\left(\hat{\bar{\psi}}\gamma^0\gamma^2\right)^T \quad (2.3.5)$$

in cui dobbiamo stare attenti che la γ^0 è presente solo nella relazione che lega l'operazione di coniugazione di carica $C\hat{\psi}C$ con $\bar{\psi}$.

Ovviamente, anche l'operatore di coniugazione di carica C è un operatore unitario.

2.4 Sommario di C , P e T

Noi non le abbiamo viste, ma sul Peskin e Schroeder sono presenti tutte le trasformazioni di tutte le forme bilineari che abbiamo visto per i campi spinoriali. Riassumiamo in una tabella tali proprietà di trasformazione (mettiamo anche l'operatore derivata e lasciamo fuori ovviamente l'identità e lo spinore ψ , che abbiamo già visto):

	$\bar{\psi}\psi$	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	∂_μ
P	+1	-1	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu(-1)^\nu$	$(-1)^\mu$
T	+1	-1	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$	$-(-1)^\mu$
C	+1	+1	-1	+1	-1	+1
CPT	+1	+1	-1	-1	+1	-1

Capitolo 3

Propagatori interagenti e teorie perturbative

Questo capitolo è complementare al capitolo riguardo la teoria interagente in QFT. Vedremo in particolare come applicare la teoria perturbativa, gli sviluppi perturbativi della matrice S ed il teorema di Wick. Questo capitolo è quasi totalmente governato dai diagrammi di Feynmann, che ci forniscono una visione pittorica degli sviluppi perturbativi. I riferimenti per questa sezione sono la parte IV del Lancaster e Blundell Questi discorsi non sono che complementi delle precedenti specolazioni, e servono a darne compimento e perfezione.Lancaster:2014pza e il capitolo 4 del Peskin e Schroeder Questi discorsi non sono che complementi delle precedenti specolazioni, e servono a darne compimento e perfezione.Peskin:1995ev.

Abbiamo imparato che le teorie quantistiche, ed in particolare la QFT, sono particolarmente difficili da risolvere quando si è in presenza di interazioni. Per questo ricorriamo alla teoria delle perturbazioni per ottenere dei risultati approssimati e in cui i propagatori e i diagrammi di Feynmann diventano gli strumenti fondamentali.

Abbiamo visto nel corso di *Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi* come sono fatti i propagatori sia in Meccanica Quantistica non relativistica che in QFT, ed in particolare abbiamo visto come essi siano legati a funzioni di Green. Utile tenere a mente sia i risultati ottenuti in MQ che quelli in QFT.

3.1 Teoria perturbativa in Meccanica Quantistica

Nella maggior parte dei casi non siamo in grado, o non siamo interessati, ad ottenere una soluzione esatta di un certo problema, per cui ripieghiamo sulla teoria delle perturbazioni. Generalmente abbiamo a che fare con

un'hamiltoniana del tipo:

$$H = H_0 + V \quad (3.1.1)$$

in cui H_0 è il termine che sappiamo risolvere esattamente, ovvero il caso libero, e V è il termine perturbativo (dunque vale $V \ll H_0$), che può rappresentare un'interazione¹. Possiamo scrivere, utilizzando una notazione simbolica (attenzione che non è una cosa molto rigorosa scrivere in questo modo), l'equazione di Schrodinger:

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \implies (H - E)|\psi\rangle = 0 \quad (3.1.2)$$

ma conoscendo la funzione di Green dell'operatore di Schrodinger possiamo anche scrivere:

$$(H - E)G = -\mathbb{1} \quad (3.1.3)$$

in cui facciamo attenzione che $\mathbb{1}$ rappresenta, in modo matriciale, la δ^4 . Sempre facendo molta attenzione possiamo invertire l'equazione ed ottenere il propagatore e trovare una serie perturbativa in termini del propagatore libero:

$$G = \frac{\mathbb{1}}{E - H} \quad (3.1.4)$$

$$= \frac{\mathbb{1}}{E - H_0 - V} \quad (3.1.5)$$

$$= \frac{\mathbb{1}}{(E - H_0) \left(\mathbb{1} - \frac{V}{E - H_0} \right)} \quad (3.1.6)$$

$$\sim \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} \left(\mathbb{1} + \frac{V}{E - H_0} + \frac{V^2}{(E - H_0)^2} + \dots \right) \quad (3.1.7)$$

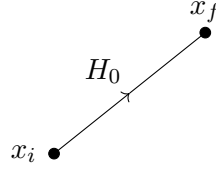
$$= \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} + \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} V \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} + \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} V \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} V \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} + \dots \quad (3.1.8)$$

e se riconosciamo che il **propagatore libero** è:

$$G_0 = \frac{\mathbb{1}}{E - H_0} \quad (3.1.9)$$

che possiamo rappresentare graficamente come una semplice linea che collega due punti dello spazio tempo, chiamati *vertici*, e rappresenta la propagazione di una particella libera da un punto iniziale ad uno finale. Vedi la figura 3.1.

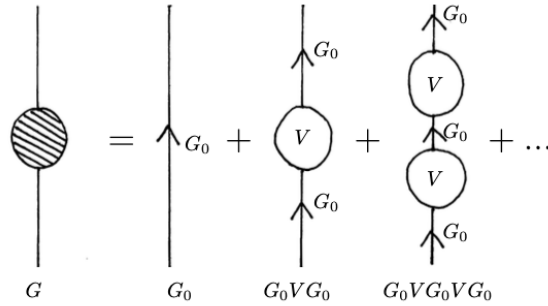
¹Nota che non solo dev'essere una perturbazione a corto range, ma anche che avvenga per un tempo molto piccolo essendo che nella teoria di Yukawa le interazioni sono rappresentate dai propagatori e sappiamo bene che i propagatori rompono il mass-shell, ma che in una teoria quantistica ciò si può fare solo per tempi brevi. Vedi la sezione §3.6 dedicata.

**Figura 3.1:** Rappresentazione pittorica del propagatore libero.

L'equazione (3.1.8) diventa:

$$G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0 + \dots \quad (3.1.10)$$

che è quello che va sotto il nome di equazione o **serie di Dyson**. La serie (3.1.10) può essere rappresentata graficamente come mostrato in figura 3.2.

**Figura 3.2:** Rappresentazione pittorica della serie di Dyson.

Teniamo bene a mente che in tutto ciò l'unica parte risolvibile esattamente è il termine di propagatore libero G_0 con H_0 , mentre il pezzo con V è quello che viene associato al processo di interazione, cioè allo scattering, che altera o interrompe la propagazione. Chiamiamo:

$$G = \frac{1}{E - H_0 - V} \quad (3.1.11)$$

full propagator o propagatore d'interazione.

Notiamo che in figura 3.2 a sinistra dell'uguale la palla è piena, il che significa che al suo interno mettiamo tutta l'informazione riguardo l'interazione del sistema, mentre tutte le palle che si trovano a destra dell'uguale sono vuote, proprio a significare che non contengono tutta l'informazione di V , ma solamente una parte, ossia solo uno specifico termine dello sviluppo perturbativo. Prendiamo ad esempio il terzo termine della figura, che cosa ci sta dicendo? Semplice, ci dice che la particella si propaga liberamente descritta da G_0 , incontra un'interazione V , continua la sua propagazione con G_0 , riincontra V e infine se ne va liberamente con il propagatore libero. Quindi, l'interpretazione che diamo allo sviluppo (3.1.10) è il seguente:

l'ampiezza di probabilità che abbiamo che la particella si propaghi da un punto iniziale ad un punto finale, ossia G , è data dalla sovrapposizione lineare dell'ampiezza che la particella si sposti liberamente dal punto iniziale ad un punto intermedio, in cui incontra un'interazione, e che poi prosegua liberamente (ovvero il termine $G_0 V G_0$), più l'ampiezza di probabilità che la propagazione sia interrotta da due termini di interazione ($G_0 V G_0 V G_0$), e così via.

Dunque, l'algebra delle funzioni di Green ci permette, non solo di dare una descrizione visiva estremamente utile ed efficace del propagatore, in termini di sviluppo perturbativo, ma anche di avere una immediata visualizzazione del processo fisico.

Quello che abbiamo appena visto sta alla base di come verranno costruiti i diagrammi di Feynmann.

3.2 La matrice S

Lo studio e l'utilizzo della matrice di scattering S ci permette di studiare teorie interagenti, che non sono risolvibili esattamente, attraverso uno sviluppo perturbativo. La teoria che studieremo si rifà molto alla teoria perturbativa della MQ e ritroveremo lo sviluppo in serie di Dyson, ma sta volta in una veste consona alla QFT.²

Partiamo, come al solito in una teoria interagente, con l'hamiltoniana del sistema fatta come:

$$H = H_0 + H' \quad (3.2.1)$$

in cui H_0 è l'hamiltoniana libera, indipendente dal tempo e che sappiamo risolvere esattamente, mentre H' è l'hamiltoniana di interazione, eventualmente dipendente dal tempo e che agisce solo per un intervallo di tempo limitato (e in una porzione spazialmente limitata). In un prototipo di un esperimento di scattering iniziamo con particelle ben separate e non interagenti. Ad un certo punto spariamo le particelle l'una contro l'altra e le facciamo interagire, anche in un modo complicato, ma sicuramente dall'hamiltoniana del mondo reale H . Le particelle successivamente si allontaneranno l'una dall'altra e finiranno, nello stato finale per essere ben separate. La prima cosa da dire su questo è che le complicate interazioni del mondo reale rendono questo processo impossibile da analizzare. La seconda è che la teoria perturbativa, insieme al fatto che consideriamo le particelle prima dell'urto molto bene separate (quindi libere e governate da H_0), permette di fare i conti e risolvere il problema.

²Segnalo il fatto che una trattazione della matrice $\hat{S}$, dal punto di vista della MQ non relativistica, la si può trovare nel Rossetti Questi discorsi non sono che complementi delle precedenti specolazioni, e servono a darne compimento e perfezione. Rossetti nel capitolo XVII nelle sezioni che vanno dalla 11 alla 13.

Il nostro problema è che se proviamo a lavorare nella rappresentazione di Heisenberg non possiamo nemmeno scrivere espressioni semplici per gli operatori dipendenti dal tempo, figuriamoci calcolare un propagatore. La strada che dobbiamo percorrere è quella di metterci in una situazione in cui l'evoluzione temporale e la dipendenza da t non sono più un problema e dopodiché sviluppare in serie gli oggetti che avremo per le mani.

Cominciamo ad immaginare un mondo senza interazioni complicate. Cioè, cominciamo a considerare la parte di H , meno complicata, ossia H_0 che descrive un mondo semplice di particelle non interagenti, e lasciamo un secondo H' , che descrive le complicate interazioni, fuori dalla discussione. Definiamo degli stati talmente lontani nel tempo che non vedono l'interazione e che sono governati solo da H_0 (motivo per cui non evolvono nel tempo):

$$|\psi\rangle_{\text{in}}^{\text{non int}} = |p_1 p_2\rangle_{\text{in}} \quad (3.2.2)$$

$$|\psi\rangle_{\text{out}}^{\text{non int}} = |q_1 q_2\rangle_{\text{out}} \quad (3.2.3)$$

in cui (3.2.2) sono gli autostati di H_0 a $t = -\infty$ e (3.2.3) gli autostati a $t = +\infty$. Possiamo a questo punto definire l'ampiezza di scattering del processo come:

$$\mathcal{A} = {}_{\text{out}}^{\text{non int}} \langle q_1, q_2 | \hat{S} | p_1 p_2 \rangle_{\text{in}}^{\text{non int}} \quad (3.2.4)$$

in cui consideriamo gli stati iniziali e finali molto lontani dall'interazione, quindi liberi, e mettiamo tutta l'informazione sull'hamiltoniana del mondo reale H in $\hat{S}$. Dunque, $\hat{S}$ gioca il ruolo di un operatore di evoluzione temporale (poiché contiene l'informazione dell'interazione) e ci dice come evolve il sistema da un certo stato *in* in uno *out*.

Possiamo rappresentare graficamente tutto ciò che abbiamo detto grazie alla figura 3.3.

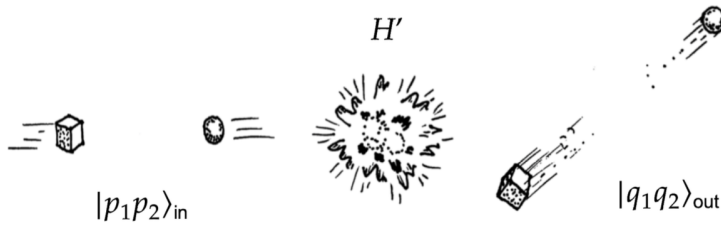


Figura 3.3: Rappresentazione scattering di due particelle.

3.2.1 Definizione della matrice S

Ovviamente, come abbiamo già spoilerato, esiste un modo per sviluppare in modo perturbativo l'espressione (3.2.4), ma per farlo abbiamo bisogno di rinfrescare la memoria sul tipo di rappresentazione più conveniente da utilizzare

in QFT, ovvero la rappresentazione di interazione. Ho scritto l'Appendice ?? in proposito, quindi prima di continuare questo capitolo vai a ripassare quella parte.

Chiaramente per poter sviluppare un oggetto prima dobbiamo definirlo decentemente. Per poter definire la matrice S dobbiamo capire perché abbiamo detto che la rappresentazione di interazione è molto importante per la QFT. Il punto importante è che la parte di interazione dell'hamiltoniana è zero all'inizio e alla fine del problema, visto che ci mettiamo in autostati di H_0 , ovvero (3.2.2) e (3.2.3). Infatti, immaginiamo che la parte di interazione dell'hamiltoniana H' si accenda e si spenga lentamente e senza intoppi, come raffigurato in figura 3.4. Ricordiamo che H' evolve nel tempo e la sua evoluzione temporale la abbiamo chiamata H_I . Quando $H_I = 0$ (poiché $H' = 0$) abbiamo solo la rappresentazione di Heisenberg per la parte libera dell'hamiltoniana H_0 ; proprio perché abbiamo autostati di H_0 , essi possiamo costruirli a partire dallo stato di vuoto $|0\rangle$ applicando gli operatori di creazione (o distruzione), il che ci viene particolarmente comodo e ci piace.

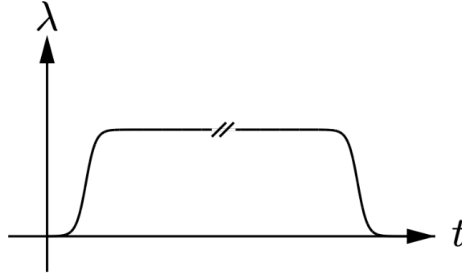


Figura 3.4: Rappresentazione funzionale di H_I .

Possiamo dare una rappresentazione funzionale dell'hamiltoniana di interazione come:

$$\hat{H}_I(t) = \lambda(t)\hat{H}'. \quad (3.2.5)$$

Detto in altre parole, gli stati evolvono nel tempo solo durante il periodo in cui avviene l'interazione, cioè quando $H_I \neq 0$; al di fuori di questo intervallo di tempo gli stati rimangono "congelati" (sono stati descritti con Heisenberg, dunque non evolvono nel tempo se non con H_I). Gli operatori (come i campi ϕ) evolvono sempre solo con H_0 (anche quando $H' \neq 0$).

Dunque, ricordando l'equivalenza di tutte le rappresentazioni scriviamo:

$$\mathcal{A} = \begin{matrix} \text{non} \\ \text{out} \end{matrix} \text{int} \langle q_1, q_2 | \hat{S} | p_1 p_2 \rangle_{\text{in}}^{\text{non int}} \quad (3.2.6)$$

$$= \begin{matrix} \text{out} \\ \text{real world} \end{matrix} \langle \phi | \hat{S} | \psi \rangle_{\text{real world}}^{\text{in}} \quad (3.2.7)$$

$$= \begin{matrix} \text{out} \\ \text{real world} \end{matrix} \langle \phi | \psi \rangle_{\text{real world}}^{\text{in}} \quad (3.2.8)$$

$$= \langle \phi_I(0) | \psi_I(0) \rangle \quad (3.2.9)$$

$$= \langle \phi_I(+\infty) | \hat{U}_I(+\infty, 0) \hat{U}_I(0, -\infty) | \psi_I(-\infty) \rangle \quad (3.2.10)$$

$$= \langle \phi_I(+\infty) | \hat{U}_I(+\infty, -\infty) | \psi_I(-\infty) \rangle \quad (3.2.11)$$

$$= \begin{matrix} \text{out} \\ \text{real world} \end{matrix} \langle \phi | \hat{U}_I(+\infty, -\infty) | \psi \rangle_{\text{real world}}^{\text{in}} \quad (3.2.12)$$

dunque, deduciamo che:

$$\hat{S} = \hat{U}_I(t, -t) \quad , \quad \text{con } t \rightarrow +\infty \quad (3.2.13)$$

ossia, $\hat{S}$ è l'operatore di evoluzione temporale, nella rappresentazione di interazione, che lega gli istanti $t = -\infty$ e $t = +\infty$. Quando definiamo $S = U_I(-\infty, \infty)$ è quello che di solito chiamiamo **limite asintotico** (o *limite adiabatico*) dell'operatore di evoluzione.

3.2.2 Sviluppo perturbativo della matrice S

Discorsi riguardanti l'operatore di evoluzione temporale vengono fatti anche nella sezione §??, conviene per completezza vedere anche quella. L'operatore di evoluzione temporale, che per necessità di conservazione della probabilità dev'essere unitario $\hat{U}(t, t) = \mathbb{1}$, sappiamo evolvere secondo l'equazione di Schrodinger:³

$$i \frac{d}{dt_2} \hat{U}(t_2, t_1) = \hat{H}_I \hat{U}(t_2, t_1). \quad (3.2.16)$$

Però attenzione, ci sono due problemi non tanto banali. Il primo è che $\hat{H}_I(t)$ non è un semplice numero e non possiamo scrivere la soluzione di (3.2.16) come:

$$e^{-i \int_{t_1}^{t_2} dt H_I(t)}. \quad (3.2.17)$$

Il secondo problema che abbiamo è che $\hat{H}_I(t)$ non commuta con se stessa a tempi diversi:

$$\left[\hat{H}_I(t_1), \hat{H}_I(t_2) \right] \neq 0 \quad (3.2.18)$$

³Facilmente dimostrabile mettendosi nella rappresentazione di interazione:

$$i \frac{d}{dt_2} |\psi_I(t_2)\rangle = \hat{H}_I |\psi_I(t_2)\rangle \implies i \frac{d}{dt_2} \hat{U}(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle = \hat{H}_I \hat{U}(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle \quad (3.2.14)$$

$$\implies i \frac{d}{dt_2} \hat{U}(t_2, t_1) = \hat{H}_I \hat{U}(t_2, t_1). \quad (3.2.15)$$

dipendendo dal tempo in modo non banale. La soluzione a questi nostri problemi viene dall'introduzione dell'operatore di ordinamento temporale T , infatti, all'interno di un prodotto T-ordinato tutti gli operatori commutano, così come succede con il normal ordering. Definiamo quindi:

$$\hat{U}_I(t_2, t_1) = T \left[e^{-i \int_{t_1}^{t_2} dt H_I(t)} \right] \quad (3.2.19)$$

che va sotto il nome di *sviluppo di Dyson dell'operatore di evoluzione temporale*, nella rappresentazione di interazione. Se ora reintroduciamo la densità hamiltoniana possiamo scrivere:

$$\hat{H}_I(t) = \int d^3x \hat{\mathcal{H}}_I(\vec{x}) \implies \int_{-\infty}^{+\infty} dt \hat{H}_I(t) = \int d^4x \hat{\mathcal{H}}_I(x^\mu) \quad (3.2.20)$$

che messa insieme al ricordo che la matrice $\hat{S}$ è l'operatore $\hat{U}(+\infty, -\infty)$, allora possiamo ottenere:

$$\hat{S} = T \left[e^{-i \int d^4x \hat{\mathcal{H}}_I(x)} \right] \quad (3.2.21)$$

che va sotto il nome di **sviluppo di Dyson della matrice S** . L'espressione (3.2.21) è una scrittura simbolica particolarmente bella esteticamente, ma poco utile da punto di vista pratico. La relazione (3.2.21) diventa utile nel momento in cui la sviluppiamo in serie (come per tutti gli operatori definiti tramite esponenziali):

$$\hat{S} = T \left[\mathbb{1} - i \int d^4z \hat{\mathcal{H}}_I(z) + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4y d^4w \hat{\mathcal{H}}_I(y) \hat{\mathcal{H}}_I(w) + \dots \right] \quad (3.2.22)$$

che però attenzione è uno sviluppo valido solamente quando il termine $\hat{\mathcal{H}}_I$ è piccolo rispetto l'hamiltoniana totale $\hat{\mathcal{H}}$, e solo se $\hat{\mathcal{H}}_I(x)$ è non nulla solo su un piccolo range.

Notiamo che nei termini in cui compare $\hat{\mathcal{H}}$ più volte, abbiamo un integrale sulle corrispondenti coordinate di ciascuna densità. Per questo, visto che $\hat{\mathcal{H}}_I$ è un'interazione attiva solo su piccoli intervalli, è ragionevole pensare che i termini con un numero elevato di ricorrenze di $\hat{\mathcal{H}}_I$ siano soppressi rispetto ai termini in cui $\hat{\mathcal{H}}_I$ compare solo una volta, o due etc.

3.3 Teorema di Wick

Voglio riportare in questa sezione il teorema di Wick fatto in termini generici usando il procedimento seguito dal Lancaster e Blundell. Questi discorsi non sono che complementi delle precedenti specolazioni, e servono a darne compimento e perfezione. Lancaster:2014pza, ma è identico a quello fatto dal Peskin. Questi discorsi non sono che complementi delle precedenti specolazioni, e servono a darne compimento e perfezione. Peskin:1995ev, per cui se

si è già compresa la versione di Questi discorsi non sono che complementi delle precedenti specolazioni, e servono a darne compimento e perfezione. Peskin:1995ev non occorre leggerla.

Vediamo ora uno dei teoremi fondamentali che ci permettono di fare effettivamente i calcoli e ci permette di arrivare ai diagrammi di Feynmann. Dal momento che gli stati iniziali e finali, nella rappresentazione di interazione, sono autostati di H_0 , possono essere costruiti agendo con gli operatori di creazione e distruzione sullo stato di vuoto $|0\rangle$. Allora, per calcolare le ampiezze di scattering $\langle\phi|\psi\rangle_{\text{out}}^{\text{non int}} \langle\phi|\psi\rangle_{\text{in}}^{\text{non int}}$ ci aspettiamo di dover calcolare, in generale, oggetti del tipo:

$$\langle 0|T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Z}]|0\rangle \quad (3.3.1)$$

cioè, oggetti che sono valori di aspettazione sul vuoto del prodotto temporalmente ordinato di una catena di operatori $(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Z})$, che non saranno altro che operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$. Siamo certi di questo poiché in $\hat{S}$ è contenuta l'interazione $\hat{H}_I$, che è data dal prodotto di campi, che possiamo individuare dai diagrammi di Feynmann. Conti tipo (3.3.1) sono estremamente complicati, ma il teorema di Wick ci viene in aiuto mettendo in relazione il VEV (vacuum expectation value) del prodotto T-ordinato con quello del prodotto normal ordered, il quale è più semplice da trattare in quanto è sempre nullo.⁴

Prima di enunciare il teorema dobbiamo capire di cosa si occupa e che oggetti utilizza. Per prima cosa rendiamoci conto che possiamo espandere un qualsiasi operatore di campo nella sua parte di creazione e di distruzione:

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}^- + \hat{\phi}^+ \quad , \quad \hat{\phi}^-|0\rangle = 0 \quad \langle 0|\hat{\phi}^+ = 0 \quad (3.3.2)$$

in cui:

$$\hat{\phi}^\dagger = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_k}} \hat{a}_k^\dagger e^{+ikx} \quad (3.3.3)$$

$$\hat{\phi} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_k}} \hat{a}_k e^{-ikx} \quad (3.3.4)$$

Il teorema di Wick utilizza delle quantità che chiamiamo contrazioni, per capire cosa sono facciamo un esempio. Prendiamo due operatori di campo, che chiamiamo $\hat{A}$ e $\hat{B}$, e facciamone il prodotto:

$$\hat{A}\hat{B} = (\hat{A}^+ + \hat{A}^-)(\hat{B}^+ + \hat{B}^-) = \hat{A}^+\hat{B}^+ + \hat{A}^-\hat{B}^- + \hat{A}^+\hat{B}^- + \hat{A}^-\hat{B}^+ \quad (3.3.5)$$

e possiamo anche calcolare il prodotto normal-ordered dei due operatori:

$$N[\hat{A}\hat{B}] = \hat{A}^+\hat{B}^+ + \hat{A}^-\hat{B}^- + \hat{A}^+\hat{B}^- + \hat{B}^+\hat{A}^-. \quad (3.3.6)$$

⁴Ricorda che l'ordinamento normale pone gli operatori di annichilazione a destra e gli operatori di creazione a sinistra, e quindi questo VEV è identicamente zero poiché $\hat{a}|0\rangle = 0$.

Possiamo facilmente notare che l'unica differenza tra (3.3.5) e (3.3.6) è solo l'ordine degli ultimi due operatori nella somma, per questo motivo la loro differenza da:

$$\hat{A}\hat{B} - N[\hat{A}\hat{B}] = [\hat{A}^-, \hat{B}^+]. \quad (3.3.7)$$

Però, presi due campi $\hat{A}(x)$ e $\hat{B}(y)$, noi possiamo sempre scriverci il loro prodotto T-ordinato:

$$T[\hat{A}(x)\hat{B}(y)] = \begin{cases} \hat{A}(x)\hat{B}(y) & x^0 > y^0 \\ \hat{B}(y)\hat{A}(x) & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (3.3.8)$$

e possiamo notare la quantità:

$$T[\hat{A}(x)\hat{B}(y)] - N[\hat{A}(x)\hat{B}(y)] = \begin{cases} [\hat{A}^-(x), \hat{B}^+(y)] & x^0 > y^0 \\ [\hat{B}^-(y), \hat{A}^+(x)] & x^0 < y^0. \end{cases} \quad (3.3.9)$$

Il punto del discorso è che il valore di aspettazione sul vuoto di (3.3.9) si riduce semplicemente al valore di aspettazione del prodotto T-ordinato, visto che il VEV di un prodotto normal-ordered è nullo, dunque, possiamo scrivere in modo del tutto generale (e soprattutto giustificato):

$$\begin{aligned} \langle 0 | (T[\hat{A}(x)\hat{B}(y)] - N[\hat{A}(x)\hat{B}(y)]) | 0 \rangle &= \langle 0 | T[\hat{A}(x)\hat{B}(y)] | 0 \rangle \\ &= \begin{cases} \langle 0 | [\hat{A}^-(x), \hat{B}^+(y)] | 0 \rangle & x^0 > y^0 \\ \langle 0 | [\hat{B}^-(y), \hat{A}^+(x)] | 0 \rangle & x^0 < y^0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Possiamo definire, in modo generico, la quantità (3.3.9) come una **contrazione**, che indichiamo con:

$$\overline{\hat{A}\hat{B}} = T[\hat{A}\hat{B}] - N[\hat{A}\hat{B}] \quad (3.3.11)$$

che è semplicemente un numero (in realtà un c-numero), dal momento che con la relazione (3.3.9) abbiamo visto essere semplicemente un commutatore, che avendo a che fare solo con operatori di creazione e distruzione è al più una δ di Kroneker⁵. Possiamo scrivere:

$$\overline{\hat{A}\hat{B}} = \overline{\hat{A}}\overline{\hat{B}} \langle 0|0 \rangle = \langle 0 | \overline{\hat{A}\hat{B}} | 0 \rangle = \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}] | 0 \rangle. \quad (3.3.12)$$

Utilizzando la relazione (3.3.11) possiamo scrivere:

$$T[\hat{A}\hat{B}] = N[\hat{A}\hat{B}] + \overline{\hat{A}\hat{B}} = N[\hat{A}\hat{B} + \overline{\hat{A}\hat{B}}] \quad (3.3.13)$$

che è una versione a due operatori del teorema di Wick. Possiamo enunciare:

⁵ Abbiamo a che fare solo con $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ (o quelli di antiparticella) perché in una teoria libera abbiamo ϕ solo in funzione di essi, ma anche in una interagente quando facciamo il limite adiabatico (andiamo a istanti di tempo molto distanti dalla regione di interazione) siamo comunque in presenza di campi non interagenti, quindi solo con operatori di creazione e distruzione.

Teorema 1 (di Wick) *Vale, per una generica stringa di operatori, la relazione:*

$$T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Z}] = N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Z}] + N[\overline{\hat{A}\hat{B}}\hat{C}\dots\hat{Z} + \dots] \quad (3.3.14)$$

$$= N\left[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Z} + \begin{array}{c} \text{tutte le possibili} \\ \text{contrazioni di } \hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Z} \end{array}\right]. \quad (3.3.15)$$

Dalla relazione (3.3.15) cominciamo già a vedere che se facciamo il valore di aspettazione sul vuoto del prodotto T-ordinato, allora sopravvivono solo i termini con tutti i campo contratti (in tutti i modi possibili), poiché altrimenti avremmo i valori di aspettazione di una cosa tipo:

$$N[\overline{\hat{A}\hat{B}}\hat{C}\hat{D}] = \overline{\hat{A}\hat{B}} N[\hat{C}\hat{D}] \quad (3.3.16)$$

e come sappiamo il valore di aspettazione di un prodotto normal-ordered da zero. Conseguenza di ciò è che sono non nulli solamente i VEV dei prodotti T-ordinati di un numero pari di operatori.

Proviamo a vedere l'applicazione del teorema di Wick per 4 campi:

$$\begin{aligned} T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] &= N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] + N[\overline{\hat{A}\hat{B}}\hat{C}\hat{D}] + N[\overline{\hat{A}\hat{C}}\hat{B}\hat{D}] + N[\overline{\hat{A}\hat{D}}\hat{B}\hat{C}] + \\ &+ N[\overline{\hat{B}\hat{C}}\hat{A}\hat{D}] + N[\overline{\hat{B}\hat{D}}\hat{A}\hat{C}] + N[\overline{\hat{C}\hat{D}}\hat{A}\hat{B}] + N[\overline{\hat{A}\hat{B}}\overline{\hat{C}\hat{D}}] + \\ &+ N[\overline{\hat{A}\hat{C}}\overline{\hat{B}\hat{D}}] + N[\overline{\hat{A}\hat{D}}\overline{\hat{B}\hat{C}}] \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

calcoliamo il valore di aspettazione sul vuoto:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle &= \langle 0 | N[\overline{\hat{A}\hat{B}}\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | N[\overline{\hat{A}\hat{C}}\hat{B}\hat{D}] | 0 \rangle + \langle 0 | N[\overline{\hat{A}\hat{D}}\hat{B}\hat{C}] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

utilizzando la definizione di contrazione (3.3.11):

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle &= \langle 0 | T[\overline{\hat{A}\hat{B}}\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | T[\overline{\hat{A}\hat{C}}\hat{B}\hat{D}] | 0 \rangle + \langle 0 | T[\overline{\hat{A}\hat{D}}\hat{B}\hat{C}] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

che possiamo anche riscrivere, utilizzando il teorema di Wick, come:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle &= \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | T[\hat{A}\hat{C}] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{B}\hat{D}] | 0 \rangle + \langle 0 | T[\hat{A}\hat{D}] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{B}\hat{C}] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Possiamo notare una cosa molto interessante, se al posto di prendere 4 operatori generici, prendiamo 4 campi scalari $\hat{\phi}$ allora otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(z)\hat{\phi}(w)] | 0 \rangle &= \langle 0 | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z)\hat{\phi}(w)] | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(w)] | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(w)] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

che, ricordando le definizioni di propagatore di Feynmann per campo scalare (neutro), diventa:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(z)\hat{\phi}(w)] | 0 \rangle &= \Delta(x-y)\Delta(z-w) + \\ &+ \Delta(x-z)\Delta(y-w) + \Delta(x-w)\Delta(y-z) \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

in cui vediamo bene che tutto il formalismo che stiamo analizzando tramite il teorema costruisce in automatico un qualcosa di quantistico, poiché dando come risultati dei propagatori, ci sta semplicemente dicendo che il nostro sistema si propaga in tutti i modi possibili, essendo una combinazione lineare di tutti i possibili propagatori.

Per concludere possiamo scrivere l'espressione del teorema di Wick in modo più generico possibile per una stringa arbitraria di operatori:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Z}] | 0 \rangle &= \langle 0 | T[\hat{A}\hat{B}] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{C}\hat{D}] | 0 \rangle \dots \langle 0 | T[\hat{Y}\hat{Z}] | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | T[\hat{A}\hat{C}] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{B}\hat{D}] | 0 \rangle \dots \langle 0 | T[\hat{Y}\hat{Z}] | 0 \rangle + \\ &+ \text{tutte le possibili combinazioni.} \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

che detto a parole è: il valore di aspettazione sul vuoto di un prodotto di n operatori è dato dalla somma dei prodotti dei VEV di tutti i possibili prodotti T-ordinati di coppie di operatori.

3.4 Diagrammi di Feynmann

Come avremo modo di verificare, il teorema di Wick, che abbiamo studiato, sarà uno strumento essenziale, non solo per espandere la matrice $\hat{S}$ nella teoria delle perturbazioni, ma anche, di conseguenza, nella formulazione e studio dei diagrammi di Feynmann.

Uno dei più grandi successi di Richard Feynman fu la sua invenzione di (quelli che ora vengono chiamati) **diagrammi di Feynman**. Si tratta di disegni che rappresentano i termini nell'espansione perturbativa della matrice $\hat{S}$. Avremo modo di vedere, che i diagrammi di Feynman esistono in diverse forme correlate, ma le più semplici di queste sono semplicemente diagrammi

dello spazio-tempo che descrivono la traiettoria⁶ delle particelle. Immaginiamo di mettere l'asse del tempo verso in alto e rappresentiamo le particelle mediante linee con una freccia che va nella direzione del tempo, mentre le antiparticelle sono rappresentate da linee con frecce che vanno nella direzione opposta, ossia, indietro nel tempo. Possiamo guardare la figura 3.5.



Figura 3.5

Possiamo disegnare coppie di particelle e antiparticelle create in un dato momento o distrutte in un altro momento. Vedi la figura 3.6.

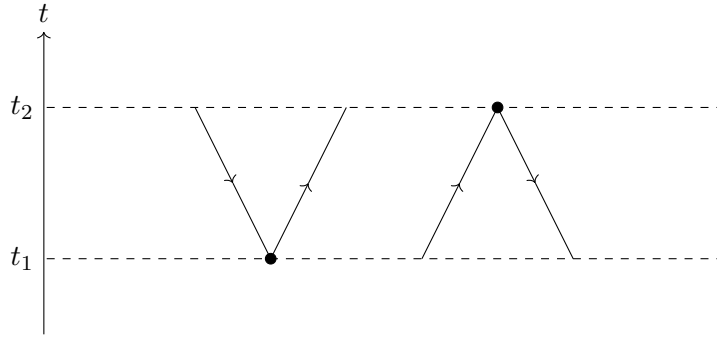


Figura 3.6

Le cose ovviamente le possiamo complicare a piacere, ad esempio, nella figura 3.7 arriviamo con una particella, in un certo istante t_1 creiamo una coppia particella-antiparticella ed in un'istante successivo t_2 la prima particella viene annichilita dall'antiparticella ed in un'uscita abbiamo solo la seconda particella.

Come abbiamo già detto le interazioni tra le particelle le descriviamo tramite lo sviluppo di Dyson della matrice di scattering $\hat{S}$, ovvero:

$$\hat{S} = T \left[e^{-i \int d^4z \mathcal{H}_I(z)} \right] \quad (3.4.1)$$

in cui è vero che compare $\mathcal{H}_I(z)$ che rappresenta l'interazione in un punto z preciso dello spazio-tempo, ma è altrettanto vero che è integrata in d^4z , dunque l'ampiezza in realtà tiene conto del fatto che l'interazione possa avvenire in qualunque punto dello spazio e del tempo.

⁶Ricorda sempre che parlare di traiettorie in teorie quantistiche è un po' rischioso, quello che intendiamo dire qua è che possiamo pensare alle linee dei diagrammi come le evoluzioni temporali delle particelle, ma comunque resta valido il fatto che non conosciamo una legge oraria $\vec{x}(t)$ in senso classico.

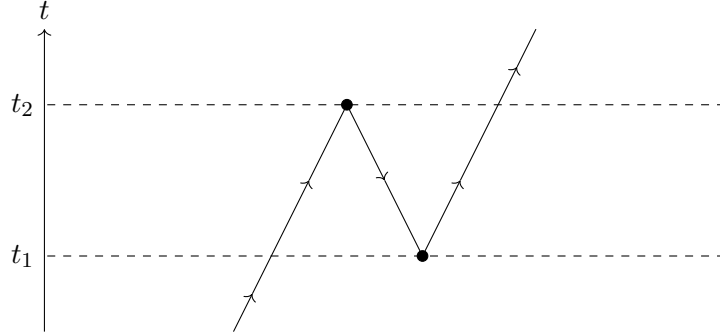


Figura 3.7

Tutto questo è molto bello, ma non abbiamo detto nulla sostanzialmente, abbiamo solo fatto dei disegni molto poco giustificati; vediamo un esempio specifico, che in realtà non rappresenta una vera e propria teoria fisica, ma è un ottimo allenamento, per capire che cosa Feynmann abbia effettivamente inventato.

3.5 Teoria $\hat{\phi}^4$

Eseguiamo ora l'intera procedura di calcolo di un elemento di matrice $\hat{S}$ per il caso semplice della teoria $\hat{\phi}^4$ (poiché come vedremo in un corso successivo, sarà una delle poche teorie rinormalizzabili, infatti, si potrebbe pensare che la teoria $\hat{\phi}^3$ sia più semplice, ma in realtà è una teoria che ha energie non definite positive, a meno che non consideriamo anche potenze più alte di $\hat{\phi}$)⁷. Il punto è che quando mettiamo delle combinazioni dei campi in $\mathcal{L}$, solamente poche combinazioni ci descrivono delle teorie fisiche e sensate, mentre molte altre ci danno delle teorie non normalizzabili o con uno spettro energetico non limitato inferiormente. Le teorie normalizzabili sono quelle che contengono all'interno di $\mathcal{L}$ una costante di accoppiamento (del termine di interazione) adimensionale.⁸

La densità lagrangiana che descrive la teoria interagente $\hat{\phi}^4$ è data da:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_\mu \phi(x)]^2 - \frac{m}{2}\phi^2(x) - \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x) \quad (3.5.1)$$

⁷Anche considerare potenze più grandi però non è molto semplice, poiché è facile che la teoria non sia rinormalizzabile, vedi $\hat{\phi}^6$, e quindi sia senza potere predittivo. Ovviamente discorsi analoghi a quelli fatti per ϕ si possono fare per i campi spinoriali.

⁸Nota non solo che in generale i pezzi che mettiamo in $\mathcal{L}$ hanno dimensioni L^{-4} (ad esempio $m^2\phi^2$ ha dimensioni L^{-4}), ma anche che questo è il caso dell'interazione $\hat{\phi}^4$, che avendo dimensione L^{-4} ci permette di dire che λ è adimensionale.

in cui λ è un termine di accoppiamento, su cui faremo il nostro sviluppo della matrice $\hat{S}$. La cui parte libera di $\mathcal{L}$ è:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}[\partial_\mu \phi(x)]^2 - \frac{m}{2}\phi^2(x) \quad (3.5.2)$$

che ci da, tramite la quantizzazione canonica, la densità hamiltoniana libera:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right)^2 + (\vec{\nabla} \hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right]. \quad (3.5.3)$$

La parte di $\mathcal{L}$ interagente è chiaramente:

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4(x) \quad (3.5.4)$$

che ci da la densità hamiltoniana:

$$\hat{\mathcal{H}}_I(z) = \frac{\lambda}{4!}\hat{\phi}^4(z). \quad (3.5.5)$$

L'interazione è data dall'incontro di 4 campi scalari in un punto dello spazio tempo z . Il diagramma lo possiamo disegnare come 4 linee (senza freccia perché possono descrivere sia particelle che antiparticelle essendo campi scalari) che si incontrano in un punto, come mostrato in figura 3.8.

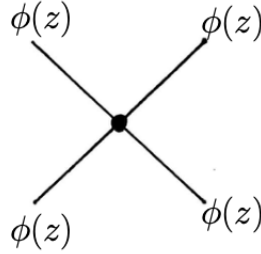


Figura 3.8: Rappresentazione vertice della teoria $\phi^4(z)$.

Per calcolare lo sviluppo di Dyson della matrice $\hat{S}$ procediamo per passi successivi. Uno schema di quello che andremo a fare è in figura 3.9.

Prima di cominciare la nostra ricetta per trovare l'ampiezza di transizione facciamo un appunto. Noi non discuteremo mai il conto effettivo degli integrali che troveremo. Questo non per via della semplicità o banalità di conto, ma perché molto spesso integrali tipo quelli che troveremo divergono e danno luogo ad infiniti non banali⁹, e per i quali sarà necessario studiare la teoria delle rinormalizzazioni (non oggetto di questo corso).

⁹Questa era l'argomentazione, a suo tempo, di Dirac per portare avanti la sua idea che la Teoria Quantistica dei Campi non sarebbe stata la ricercata "teoria del tutto". Da notare anche che inizialmente Dirac formulò per primo la QFT e successivamente fu lui stesso ad andarci conto quando la QED (dopo Feynmann etc.) diede i primi risultati sperimentali soddisfacenti.

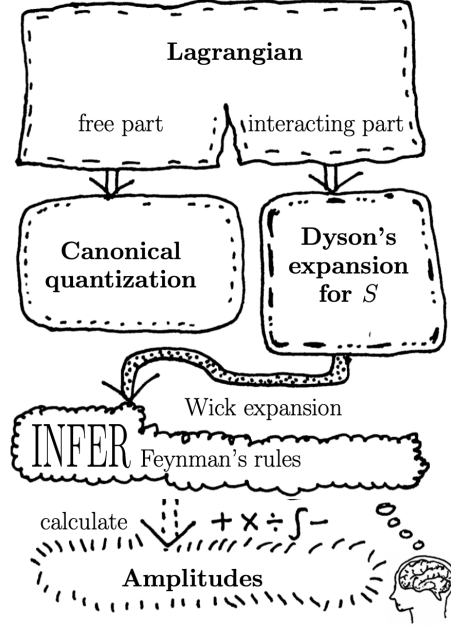


Figura 3.9: Schema del processo per derivare le regole di Feynmann.

1. Innanzitutto decidiamo che cosa vogliamo studiare e scriviamo l'espressione di ampiezza di probabilità. Prendiamo il caso di particella libera, per cui:

$$\mathcal{A} = \langle q|p \rangle_{\text{out}}^{\text{real world}} = \langle q| \hat{S} |p \rangle_{\text{in}}^{\text{non int}} \quad (3.5.6)$$

$$= (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \langle 0 | \hat{a}_q \hat{S} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (3.5.7)$$

in cui abbiamo fissato le normalizzazioni degli stati arbitrariamente utilizzando i termini di normalizzazione degli operatori di creazione e distruzione.

2. Possiamo espandere la matrice $\hat{S}$ come ci dice il teorema di Wick ed inserire la nostra forma di $\hat{\mathcal{H}}_I$:

$$\hat{S} = T \left[e^{-i \int d^4x \hat{\mathcal{H}}_I(x)} \right] \quad (3.5.8)$$

$$= T \left[\mathbb{1} - i \int d^4z \hat{\mathcal{H}}_I(z) + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4y d^4w \hat{\mathcal{H}}_I(y) \hat{\mathcal{H}}_I(w) + \dots \right] \quad (3.5.9)$$

$$= T \left[\mathbb{1} - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4z \hat{\phi}^4(z) + \frac{(-i)^2}{2!} \left(\frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4y d^4w \hat{\phi}^4(y) \hat{\phi}^4(w) + \dots \right]. \quad (3.5.10)$$

3. Possiamo inserire lo sviluppo (3.5.10) all'interno dell'espressione (3.5.7):

$$\mathcal{A} = (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \langle 0 | \hat{a}_q \hat{S} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (3.5.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = T \Big[\langle 0 | \hat{a}_q \mathbb{1} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 z \langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}^4(z) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle + \\ + \frac{(-i)^2}{2!} \left(\frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4 y d^4 w \langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}^4(y) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}^4(w) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle + \dots \Big]. \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

L'espressione (3.5.12) la possiamo anche vedere come:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots \quad (3.5.13)$$

in cui ogni termine $\mathcal{A}_i$ dello sviluppo è legato ad una potenza di λ , ad esempio $\mathcal{A}_0 \propto \lambda^0$ oppure $\mathcal{A}_2 \propto \lambda^2$.

4. Utilizziamo i teorema di Wick per calcolarci i prodotti T-ordinati che compaiono in 3.5.12, che sono termini del tipo $\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}^4 \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle$ e che saranno espressi in termini di contrazioni.

5. Disegnare i diagrammi di Feynmann relativi a tutti gli ordini a cui siamo interessati. Ciascun diagramma rappresenterà una tipologia di termini nello sviluppo di Dyson di $\hat{S}$.

Ovviamente, la parte complicata dei 5 punti elencati è il quarto e per semplicità possiamo trattare un termine per volta dello sviluppo (3.5.12). Cominciamo a trattare il primo termine non banale, ossia il primo ordine:

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}^4(z) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (3.5.14)$$

in cui ci rendiamo presto conto che esistono solo due tipi di contrazioni che possiamo fare:

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (3.5.15)$$

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (3.5.16)$$

analizziamone uno per volta e vediamo come possiamo rappresentarli nei diagrammi di Feynmann.

In (3.5.15) stiamo contraendo gli operatori di creazione e distruzione e gli operatori $\hat{\phi}$ separatamente ognuno per conto proprio. Ovviamente ci sono 3 tipi di contrazioni di questo tipo del tutto analoghe di significato, ovvero (a costo di risultar pedante le riporto, ma solo per questa teoria):

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (3.5.17)$$

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (3.5.18)$$

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \quad (3.5.19)$$

questo fatto tornerà dopo, per ora teniamo a mente che c'è una certa molteplicità. Il teorema di Wick mi permette di riscrivere le contrazioni (3.5.15) in termini di prodotti T-ordinati:

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_q \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \quad (3.5.20)$$

in cui non abbiamo messo il prodotto T-ordinato per gli operatori $\hat{a}_q \hat{a}_p^\dagger$ poiché distruggono e creano particelle a $t = -\infty$ e $t = +\infty$ rispettivamente, per cui il tempo è ben ordinato.

Ora viene la parte leggermente complicata, perché dobbiamo interpretare i termini T-ordinati della moltiplicazione (3.5.20) nei diagrammi di Feynmann. Un riassunto grafico di quello che stiamo per vedere è in figura 3.10. Vediamo che abbiamo:

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \langle q | p \rangle = \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) \quad (3.5.21)$$

rappresenta la conservazione dell'impulso e possiamo rappresentarla come una linea dritta senza vertice, non dipendendo da z .

Allo stesso tempo però vediamo che le contrazioni dei campi scalari $\hat{\phi}$ non sono altro che due propagatori liberi, che rappresentano appunto una propagazione da un punto z fino allo stesso punto z . Dunque, sono termini che possiamo rappresentare come delle curve che iniziano e finiscono nello stesso punto. Questi termini, secondo i diagrammi di Feynmann, vengono anche chiamati **diagrammi di vuoto** e contribuiscono all'ampiezza di transizione solo con una fase overall $e^{i\phi}$, per cui non hanno effetto. termini di questo tipo non sono influenti poiché non sono connessi con particelle entranti o uscenti.

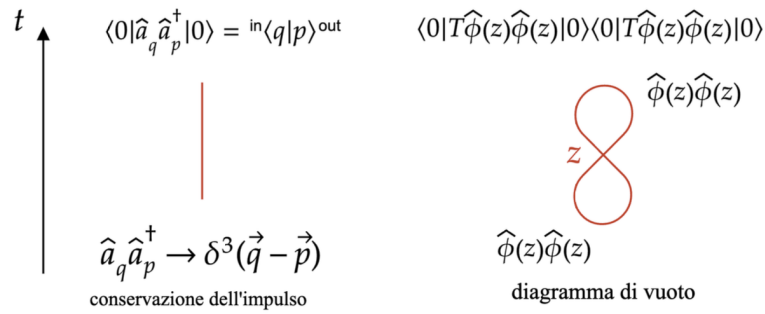


Figura 3.10: Rappresentazione prima possibile contrazione del primo ordine dello sviluppo della teoria $\phi^4(z)$.

Questo tipo di diagrammi, formati da due diagrammi separati, si chiamano *disconnesso* e sono termini poco interessanti dal punto di vista fisico, proprio perché sono due pezzi separati e non possono influenzarsi a vicenda.

Analizziamo ora la seconda possibilità di contrazioni che possiamo fare, ossia (3.5.16), di cui possiamo notare esistere 12 modi per realizzarla. Usando il teorema di Wick (3.5.16) diventa:

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{\phi} \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}(z) | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \langle 0 | \hat{\phi}(z) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle. \quad (3.5.22)$$

In questo caso le interpretazioni sono leggermente più complicate da vedere. Sicuramente riconosciamo un termine identico al primo caso che abbiamo analizzato, ossi il propagatore da z in z , ma i termini nuovi, e interessanti del prodotto sono il primo e il terzo. Vediamo il primo termine:¹⁰

$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}(z) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_q \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} e^{+ikz} | \vec{q} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_q}} e^{+iqz} \quad (3.5.23)$$

dunque è un termine che possiamo interpretare come una particella (ricorda che stiamo parlando di campo scalare) uscente dal punto z , la cui informazione è data dal campo $\hat{\phi}$, con impulso $\vec{q}$, la cui informazione è portata dall'operatore $\hat{a}_p$. Il terzo termine delle contrazioni lo analizziamo alla stessa maniera e vediamo che:

$$\langle 0 | \hat{\phi}(z) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}(z) | \vec{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-ipz} \quad (3.5.24)$$

dunque, questo è un termine interpretabile come una particella entrante nel punto z con un impulso $\vec{p}$. Questi discorsi sono rappresentati nei diagrammi di Feynmann di figura 3.11.

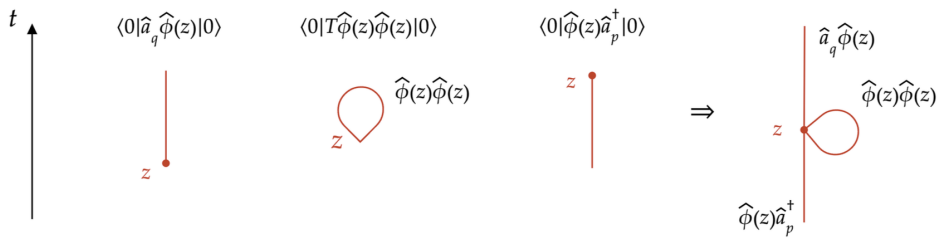


Figura 3.11: Rappresentazione seconda possibile contrazione del primo ordine dello sviluppo della teoria $\phi^4(z)$.

Questo secondo tipo di diagrammi non è disconnesso, si dice di contatto, e ha significato fisico.

¹⁰Utilizziamo l'espressione esplicita del campo scalare e ricordiamo la sua azione sul vuoto.

Facciamo un bel riassunto di quello che abbiamo imparato. Abbiamo visto che possiamo scrivere per il primo ordine di (3.5.12):

$$\mathcal{A}_1 = -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4z \left[3 \langle 0 | \hat{a}_q \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z)] | 0 \rangle + \right. \\ \left. + 12 \langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}(z) | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \langle 0 | \hat{\phi}(z) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle \right] \quad (3.5.25)$$

in cui abbiamo tenuto conto della molteplicità di ciascun termine. Grazie ai diagrammi di Feynmann abbiamo visto che da $\mathcal{A}_1$ riceviamo due tipi di contributi, uno dai diagrammi disconnessi (che sono 3), che non hanno senso fisico, e l'altro dai diagrammi connessi (sono 12) che sono la parte interessante. Riguardo la relazione tra lo sviluppo di $\hat{S}$ e i diagrammi di Feynmann abbiamo imparato:

- In ogni diagramma ci sono un certo numero di punti in cui avvengono le interazioni, in particolare questi punti sono detti **vertici** e sono proprio il punto in cui le linee si uniscono. Una cosa importante da tenere a mente è che in ogni diagramma compaiono tanti vertici quanto è l'ordine perturbativo che stiamo considerando. In più, quando disegniamo un diagramma, inseriamo un termine $(-i\lambda)$ per ogni vertice, detto coupling.
- In ogni vertice entrano, o escono, tante linee quanti sono i campi che compaiono nell'hamiltoniana $\hat{\mathcal{H}}_I$ della nostra teoria. In questo caso abbiamo 4 gambe che convergono in ogni vertice (rivedi la figura 3.8).
- Il termine $\overline{\hat{\phi}(z) \hat{a}_p^\dagger}$ rappresenta un linea entrante nel vertice di interazione, mentre il termine $\overline{\hat{a}_p \hat{\phi}^\dagger(z)}$ rappresenta una linea uscente. Ovviamente queste linee entranti ed uscenti, che chiamiamo **linee esterne**, come abbiamo visto, rappresentano delle particelle (o antiparticelle) on-shell che entrano ed escono dal processo. Queste linee hanno un estremo che non è attaccato a nulla, il che rappresenta la connessione con il mondo esterno. Notiamo che avendo scelto una convenzione per l'asse temporale disegniamo le linee entranti al di sotto dei vertici, mentre le linee uscenti al di sopra.
- Le contrazioni tra gli operatori di creazione e distruzione $\overline{\hat{a}_q \hat{a}_p^\dagger}$ rappresentano semplicemente delle δ^3 di conservazione.
- Le contrazioni tra due campi $\overline{\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)} = \langle 0 | T[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)] | 0 \rangle$ rappresenta un propagatore che connette i punti spazio temporali x e y , il quale corrisponde ad una linea che connette due vertici, che viene spesso chiamata **linea interna** e rappresenta particelle virtuali. Nel nostro caso il propagatore era un loop che connetteva z con se stesso.

3.5.1 Regole di Feynmann nello spazio delle configurazioni per la teoria $\hat{\phi}^4$

Fino ad ora i diagrammi di Feynmann non hanno rappresentato una semplificazione nei nostri conti, anzi, oltre a dover implementare i conti espliciti dello sviluppo perturbativo ci siamo messi pure a disegnarli. In realtà, ovviamente, sono molto utili e utilizzati, proprio perché una volta capito il funzionamento di una teoria e a che disegno associare ciascun prodotto T-ordinato dello sviluppo perturbativo di $\hat{S}$, allora semplicemente guardando un diagramma di Feynmann, e senza scrivere null'altro riguardo l'espansione, siamo in grado di scrivere l'espressione dello specifico termine perturbativo rappresentato. Ad esempio, arriva un nostro collega e ci porta il quarto diagramma della figura 3.11, a quel punto noi solamente guardandolo, e ricordando quello che abbiamo capito della teoria $\hat{\phi}^4$, siamo in grado di scrivere:

$$\mathcal{A}_1 \propto -i\lambda \int d^4z \langle 0 | \hat{a}_q \hat{\phi}(z) | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\phi}(z) \hat{\phi}(z)] | 0 \rangle \langle 0 | \hat{\phi}(z) \hat{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \quad (3.5.26)$$

$$= -i\lambda \int d^4z \frac{1}{\sqrt{2E_q}} e^{+iqz} \Delta(z-z) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-ipz} \quad (3.5.27)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \int d^4z e^{+i(q-p)z} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.5.28)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \int d^4z \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{+i(q-p)z}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.5.29)$$

Per poter automatizzare questo procedimento dobbiamo scrivere alcune regole, che saranno valide ad ogni ordine, ma solamente per una specifica teoria, infatti per ogni interazione saremo in grado di scrivere le relative regole di Feynmann. Le regole per $\hat{\phi}^4$ sono:

- Ad ogni vertice associamo un termine $(-i\lambda)$, così che in base al numero di vertici, che sono collegati con l'ordine perturbativo, ricostruiamo la corretta potenza di λ .
- Ad ogni linea interna associamo un propagatore $\Delta(x-y)$.
- Ad ogni linea esterna associamo un termine $e^{\pm ipx}$ a seconda che sia uscente o entrante.
- Integrare su tutte le possibili posizioni dei vertici dello spaziotempo.
- Dobbiamo anche dividere ciascun termine per il fattore di simmetria¹¹, che chiamiamo D , in modo da ottenere il giusto coefficiente davanti a ciascun termine.

¹¹Puoi vedere come calcolare i fattori di simmetria al capitolo 19.4 del Lancaster e Blundell Questi discorsi non sono che complementi delle precedenti specolazioni, e servono a darne compimento e perfezione. Lancaster:2014pza.

Infatti, se riprendiamo l'espressione (3.5.29) che avevamo scritto senza troppi pensieri e consideriamo tutte le regole, dunque inseriamo anche il fattore di simmetria (12), il termine di coupling e mettiamo le normalizzazioni degli stati ad impulso fissato che avevamo scelto in (3.5.11), allora otteniamo il corretto termine:

$$\mathcal{A}_1 = 12(2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \frac{(-i\lambda)}{4!} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \int d^4z \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{+i(q-p)z}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.5.30)$$

$$= -i\frac{\lambda}{2} \int d^4z \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{+i(q-p)z}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.5.31)$$

3.5.2 Diagrammi di Feynmann nello spazio degli impulsi per la teoria $\hat{\phi}^4$

Già dall'espressione (3.5.31) ci possiamo rendere conto che, essendo due integrali, uno sullo spazio e uno sugli impulsi, potrebbe essere comodo toglierne uno dei due. Infatti, i calcoli risultano molto più semplici nello spazio degli impulsi. Vediamo questa semplicità attraverso un'esempio. Consideriamo il secondo ordine della teoria $\hat{\phi}^4$ i cui possibili diagrammi sono in figura 3.12.

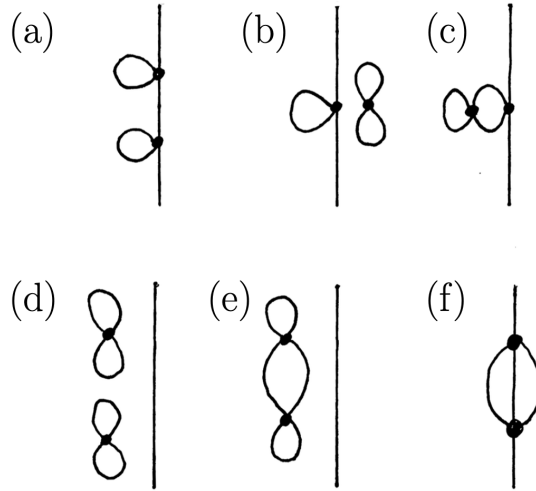


Figura 3.12: Rappresentazione tutti i possibili diagrammi del secondo ordine della teoria $\phi^4(z)$.

Quello interessante fisicamente e che vogliamo studiare è (f) e si chiama **diagramma di saturno**. Possiamo applicare le regole di Feynmann che abbiamo elencato in precedenza e ottenere (con un fattore di simmetria $D =$

6):

$$\mathcal{A}_2^{(S)} = (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \frac{(-i\lambda)^2}{D} \int d^4y d^4w \times \quad (3.5.32)$$

$$\times \langle 0 | \overbrace{\hat{a}_q \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(w) \hat{\phi}(w) \hat{\phi}(w) \hat{a}_p^\dagger \hat{\phi}(y)}^{\text{diagram}} | 0 \rangle \quad (3.5.33)$$

$$= -\frac{\lambda}{6} \int d^4y d^4w e^{+iqy} \Delta(y-w) \Delta(y-w) \Delta(y-w) e^{-ipw} \quad (3.5.34)$$

ricordando l'espressione del propagatore di Feynmann causale neutro abbiamo:

$$A_2^{(S)} = -\frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\ \times \int d^4y d^4w e^{+iqy} e^{-ipw} e^{-ik_1(y-w)} e^{-ik_2(y-w)} e^{-ik_3(y-w)} \quad (3.5.35)$$

$$A_2^{(S)} = -\frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\ \times \int d^4y d^4w e^{+iqy} e^{-ipw} e^{-i(k_1+k_2+k_3)y} e^{+i(k_1+k_2+k_3)w} \quad (3.5.36)$$

possiamo notare che gli integrali su y e w sono proprio le rappresentazioni integrali della δ :

$$\int d^4y e^{-i(k_1+k_2+k_3)y} = (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - k_2 - k_3) \quad (3.5.37)$$

$$\int d^4w e^{i(k_1+k_2+k_3)w} = (2\pi)^4 \delta^4(q - (-k_1 - k_2 - k_3)) = (2\pi)^4 \delta^4(q + k_1 + k_2 + k_3) \quad (3.5.38)$$

allora otteniamo:

$$A_2^{(S)} = -\frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - k_2 - k_3) (2\pi)^4 \delta^4(q + k_1 + k_2 + k_3). \quad (3.5.39)$$

Le δ che compaiono in (3.5.39) ci dicono che in ogni vertice tutti i momenti si sommano a 0, dunque se abbiamo una particella in ingresso con impulso p e in uscita con impulso q , allora non solo possiamo dire che in ogni vertice l'impulso si conserva, ma anche globalmente. Le due delta le possiamo scrivere insieme come $\delta(q - p)$, ma solo dopo averne usata una per riscrivere $k_1 = q - k_2 - k_3$ e fare l'integrale d^4k_1 . Abbiamo in questo modo:

$$A_2^{(S)} = -\frac{\lambda}{6} (2\pi)^4 \delta^4(q - p) \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{i}{(q - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\ \times \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.5.40)$$

Sebbene in (3.5.40) il numero di integrali da fare è comunque due, dunque sembra che non ci siamo messi in una posizione tanto migliore, in realtà è un'espressione più comoda di quella che avremmo nello spazio delle configurazioni. Infatti, abbiamo lasciato solo i pezzi relativi ai propagatori e abbiamo tolto di mezzo tutti i termini esponenziali (quindi i fattori di gambe esterne). Un confronto tra i diagrammi nello spazio delle configurazioni e degli impulsi è in figura 3.13.

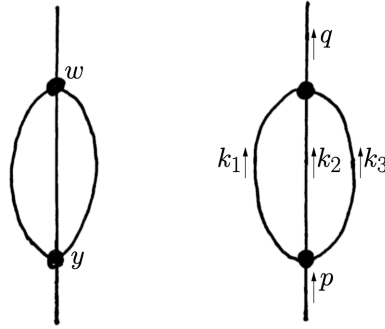


Figura 3.13: Confronto diagrammi nello spazio delle configurazioni e degli impulsi della teoria $\phi^4(z)$.

3.5.3 Regole di Feynmann nello spazio degli impulsi per la teoria $\hat{\phi}^4$

Vediamo, in base a quello imparato poco fa, quali sono le regole di Feynmann nello spazio degli impulsi nello spazio degli impulsi:

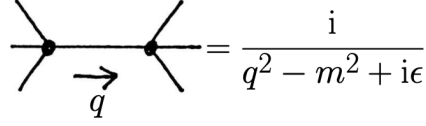
- Ad ogni vertice associamo il coupling $(-i\lambda)$.
- Ad ogni linea interna associamo il quadri-impulso q ed il corrispondente propagatore (vedi la figura 3.14):

$$\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.5.41)$$

- In ogni vertice imponiamo la conservazione del quadri-impulso.
- Integriamo su tutti i quadri-impulsi con misura:

$$\frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \quad (3.5.42)$$

- Alle linee esterne associamo un fattore 1.
- Dobbiamo dividere per il fattore di simmetria D .



$$\text{diagram} = \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Figura 3.14

- Dobbiamo includere la δ di conservazione del quadri-impulso totale ad ogni diagramma.

Un esempio di applicazione di queste regole può essere il diagramma in figura 3.15.

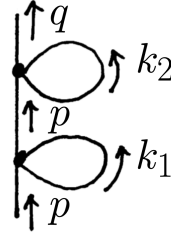


Figura 3.15

In questo caso l'ampiezza al secondo ordine, seguendo le regole di Feynmann, sarà:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= (2\pi)^4 \delta^4(q - p) \times \frac{(-i\lambda)^2}{6} \times \\ &\times \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p - k_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.5.43)$$

in cui abbiamo utilizzato la conservazione del quadri-impulso per integrare su k_3 .

3.5.4 Scattering di due particelle

Abbiamo visto con la sezione §3.5 come trattare la teoria $\hat{\phi}^4$ e tutte le regole di Feynmann relative ad essa, però, siamo ancora limitati alla trattazione di una singola particella che interagisce, vediamo brevemente in questa sezione un primo approccio alla teoria dello scattering. Questo argomento sarà ampiamente trattato nel corso successivo di QFT.

Se abbiamo due particelle che entrano nel diagramma di Feynmann, interagiscono con una qualche $\mathcal{H}_I$ e poi ne escono, allora ci rendiamo subito

conto che l'ampiezza di transizione è:

$$\mathcal{A} = \langle q_1 q_2 | \hat{S} | p_2 p_1 \rangle = (2\pi)^6 \sqrt{16} E_{q_1} E_{q_2} E_{p_1} E_{p_2} \langle 0 | \hat{a}_{q_1} \hat{a}_{q_2} \hat{S} \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2}^\dagger | 0 \rangle \quad (3.5.44)$$

e descrive due particelle che entrano nel sistema con impulso p_1 e p_2 che successivamente ne escono con impulso q_1 e q_2 . A questo punto si potrebbe scrivere un'espressione per $\mathcal{H}_I$, inserirla in $\hat{S}$, espanderla in serie e calcolare tutte le possibili contrazioni e contributi. Però noi abbiamo imparato che i diagrammi di Feynmann sono uno strumento potentissimo e ci permettono di non fare i conti a mano semplicemente guardando i disegni. Alcuni dei contributi alla matrice di scattering $\hat{S}$ sono mostrati in figura 3.16.

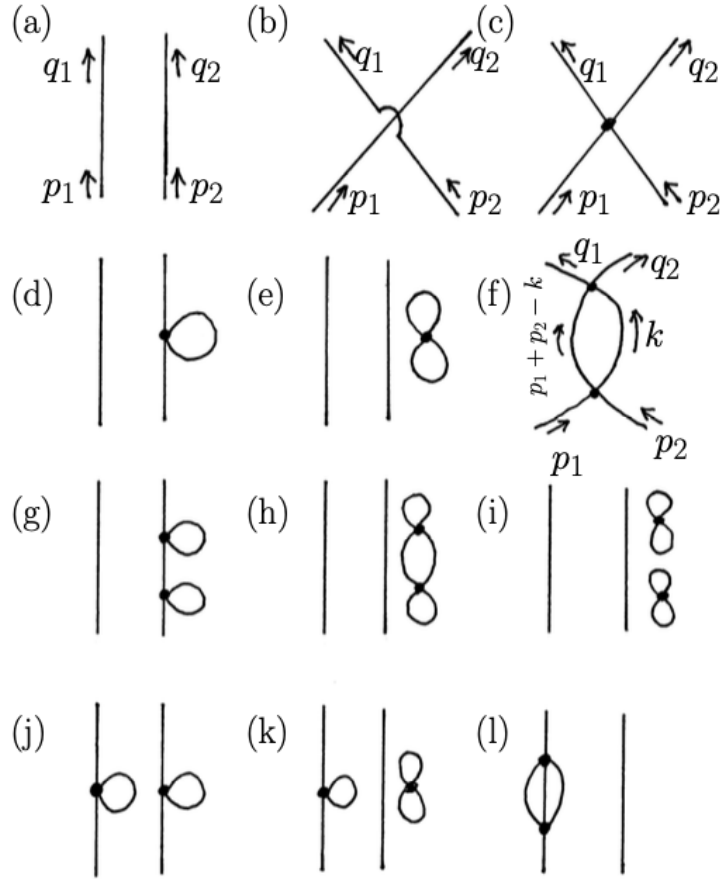


Figura 3.16: Alcuni possibili diagrammi di Feynmann per la matrice $\hat{S}$, fino al secondo ordine.

I diagrammi (a) e (b), come si vede dall'assenza di vertici contribuiscono all'ordine 0 e il loro contributo sarà proporzionale semplicemente a delle δ

di conservazione:

$$\mathcal{A}_0^{(a)} = (2\pi)^6 \sqrt{16} E_{q_1} E_{q_2} E_{p_1} E_{p_2} \delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_1) \delta^3(\vec{q}_2 - \vec{p}_2) \quad (3.5.45)$$

$$\mathcal{A}_0^{(a)} = (2\pi)^6 \sqrt{16} E_{q_1} E_{q_2} E_{p_1} E_{p_2} \delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_2) \delta^3(\vec{q}_2 - \vec{p}_1) \quad (3.5.46)$$

che ovviamente rappresentano il fatto che essendo particelle identiche, non avendo differenziato gli operatori di creazione e distruzione (quando abbiamo a che fare con particelle diverse diversifichiamo i campi presenti in $\mathcal{A}$), possiamo confonderle e non possiamo dire se la particella che entra con p_1 esce con q_1 o con q_2 (idem per la particella p_2), per cui consideriamo entrambi i diagrammi. Non essendoci interazioni non danno contributo allo scattering e non sono processi misurabili nell'esperimento. Le cose cominciano ad essere interessanti all'ordine 1, in cui abbiamo i diagrammi disconnessi, non interessanti (d) ed (e), ma anche il diagramma connesso (c), il quale sarà anch'esso proporzionale ad una delta di conservazione:

$$\mathcal{A}_1^{(c)} = (2\pi)^4 (-i\lambda) \delta^4(q_1 + q_2 - p_1 - p_2). \quad (3.5.47)$$

È interessante anche l'ordine due in cui il diagramma più rilevante è (f) il cui contributo sarà:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2^{(f)} = (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_1 - p_2) \frac{(-i\lambda)^2}{2} \times \\ \times \int \frac{d^4}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.5.48)$$

3.6 Teoria di Yukawa

Parliamo in questa sezione dell'idea alla base della teoria di Yukawa, che pur essendo precedente a Feynmann, permette di capire l'enorme importanza della teoria del propagatore.

Una delle cose più interessanti delle particelle è che interagiscono tra loro. L'idea di Yukawa è incentrata su una nozione chiave: le particelle interagiscono scambiandosi **quantità di forza**, cioè particelle virtuali che mediano la forza di interazione. Le *particelle virtuali* sono quelle particelle che non rispettano la condizione di mass-shell, cioè che violano la relazione che lega massa ed energia in relatività ristretta, per cui sono particelle tali da:

$$E^2 - \vec{p}^2 \neq m^2. \quad (3.6.1)$$

Com'è possibile che si possa non rispettare il mass-shell? La Meccanica Quantistica ci consente di violare questa dispersione classica, purché non lo facciamo per troppo tempo! Invocando l'incertezza energia-tempo, per cui:

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \quad (3.6.2)$$

possiamo dire che le particelle di energia E possono esistere purché lo facciano per un periodo abbastanza breve per cui si abbia $\Delta t \leq \hbar/\Delta E$. Le particelle virtuali, quindi, devono avere un raggio finito poiché: non possono vivere per sempre e devono viaggiare a velocità finite. Yukawa intuì che il potenziale mediato dalla particella virtuale avrebbe avuto la forma:

$$V(\vec{r}) \propto -\frac{e^{-|\vec{r}|/a}}{4\pi|\vec{r}|} \quad (3.6.3)$$

in cui a è un parametro la cui dimensione è una lunghezza. Yukawa notò che non era sufficiente un potenziale coulombiano, poiché vogliamo che l'azione di $V(\vec{r})$ sia a corto range spaziale.

Se ricordiamo il corso di MQ2 possiamo notare che il potenziale (3.6.3) è molto simile (in realtà è lo stesso) alla funzione di Green dell'operatore $(\nabla^2 + \vec{k}^2)$, che è l'operatore dell'equazione di scattering della Meccanica Quantistica. Da questo, prendendo $i|\vec{k}| = -m$, otteniamo che il potenziale di Yukawa (3.6.3) è la funzione di Green dell'equazione:

$$(\nabla^2 - m^2)V(\vec{r}) = \delta^3(\vec{r}) \quad (3.6.4)$$

che è la parte spaziale dell'equazione di Klein-Gordon. Quello che impariamo è molto di più, infatti abbiamo visto che il potenziale di Yukawa, essendo una funzione di Green, è effettivamente un propagatore descrivente l'evoluzione di un campo (virtuale) scalare. Il prezzo che bisogna pagare nella teoria per avere particelle virtuali, ovvero che non rispettino il mass-shell, è quello che esse, oltre ad essere rappresentate da propagatori tipo (3.6.3) esse possono viaggiare su una distanza, finita e fissata dalla loro massa.

Possiamo anche dare una rappresentazione grafica della teoria di Yukawa. Facciamo riferimento alla figura 3.17. Abbiamo rappresentato l'asse temporale sulla sinistra rivolto verso l'alto; il primo diagramma lo possiamo interpretare come segue: possiamo immaginare processi spazio-temporali in cui all'istante y^0 la particella, che chiamiamo A , emette un segnale, ovvero una particella virtuale Q con massa m_Q , dalla posizione y che si propaga fino al punto x , in cui arriva al tempo x^0 , in tale punto dello spazio e del tempo collide con la particella B che si trova nello stesso punto x . Ovviamente, per via dell'emissione e dell'assorbimento della particella virtuale, le particelle iniziali A e B risulteranno diverse da quelle finali, che indichiamo A' e B' . Il bilancio energetico del processo lo possiamo scrivere come:

$$E_A = E_{A'} + E_Q \quad (3.6.5)$$

in cui la particella $E_Q = \sqrt{p_Q^2 + m_Q^2}$ è l'energia che perde la particella A emettendo la particella virtuale ed è anche l'energia che guadagna B .

Però, la conservazione dell'energia e la simmetria dell'interazione dal punto di vista energetico sarebbero in guai seri se ci fermassimo solo al primo

diagramma per descrivere l'interazione tra le particelle A e B . Infatti, considerando solo il primo, avremmo un trasferimento netto di energia da A a B .

Per mantenere la simmetria consideriamo anche il processo inverso, ossia, il processo in cui è B che emette una particella virtuale ed A che la assorbe. Nel secondo diagramma vediamo per l'appunto la particella B che all'istante x^0 emette una particella virtuale Q , identica a quella del primo diagramma, nel punto x , essa si propaga, al tempo y^0 e nella posizione y incontra la particella A , a cui restituisce la stessa quantità di energia che nel primo diagramma le aveva sottratto. Il bilancio energetico sta volta è:

$$E_B = E_{B'} + E_Q \quad (3.6.6)$$

in cui E_Q è l'energia che perde la particella B e che acquista A .

Entrambi i processi sono necessari affinché si conservi l'energia e la loro somma dà esattamente il propagatore di Feynmann, raffigurato nel terzo diagramma.

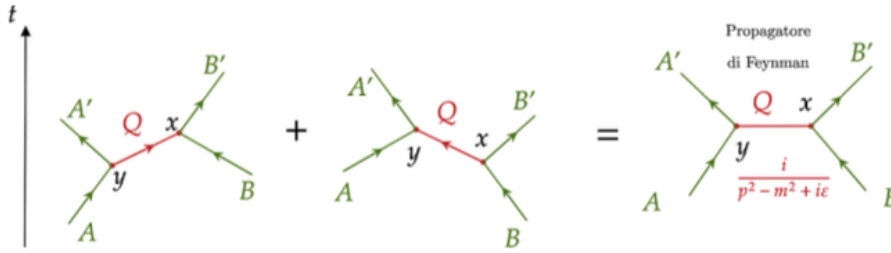


Figura 3.17: Raffigurazione scambio di particelle della teoria di Yukawa.

Infatti, quello che descrive un propagatore di Feynmann è lo scambio di una particella virtuale, ossia off-shell. Ricordiamoci il denominatore dei propagatori, ad esempio nel propagatore di Feynmann causale neutro, che avevano poli in $p^2 = m^2$, ossia nelle condizioni di mass-shell e il messaggio, chiaro, è che le funzioni di Green (o propagatori di Feynmann liberi) descrivono la propagazione di tutte le particelle, meno quelle on-shell, dunque descrivono la propagazione di particelle virtuali. In più, le linee che disegniamo per rappresentare dei propagatori (vedi il capitolo dei propagatori delle note di Introduzione alla QFT) non sono molto diverse alla vista dalle linee della figura 3.17, e questo non a caso. Infatti, come vedremo più avanti l'ampiezza di probabilità di un processo di scattering a due particelle contiene proprio il termine:

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.6.7)$$

che non è altro che il propagatore di Feynmann nello spazio degli impulsi. Questo lo possiamo rapidamente verificare in MQ non relativistica servendoci

dell'approssimazione di Born, che prevede che l'ampiezza di scattering f sia data dalla trasformata di Fourier del potenziale:

$$f \propto \tilde{V}(\vec{p}) = \int d^3r V(\vec{r}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \quad (3.6.8)$$

in cui $\vec{p}$ è l'impulso dell'onda trasmessa, e nel nostro caso $\vec{p}$ è l'impulso trasferito, cioè l'impulso della particella virtuale scambiata mediatrice della forza di Yukawa. Se nell'espressione di f sostituiamo (3.6.3) e facciamo la trasformata, otteniamo proprio:

$$f \propto \frac{1}{-|\vec{p}|^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.6.9)$$

che è la parte spaziale del propagatore (3.6.7), ovvero la funzione di Green dell'equazione di Klein-Gordon.

Notiamo un'ultima cosa. La particella mediatrice scambiata tra A e B dev'essere per forza virtuale per ragioni di conservazione dell'energia e dell'impulso. Infatti, se ci pensiamo un attimo, il processo di sola emissione di un quanto Q :

$$A \longrightarrow A' + Q \quad (3.6.10)$$

non può avvenire. Immaginiamo di porci, ad esempio, nel sistema di riposo di A , in cui $E_A = m_A^2 c^2$ (ricordiamoci che stiamo trattando una teoria relativistica, per cui possiamo studiarla in qualsiasi sistema di riferimento inerziale). In questo caso, nello stato finale dobbiamo avere energia sufficiente per emettere una nuova particella Q e per conferire il necessario "rinculo" ad A' . Com'è chiaro rendersi conto, la sola energia di riposo A non è sufficiente né per l'una né per l'altra cosa.

Un diagramma di Feynmann per lo scattering di 2 particelle lo rappresentiamo meglio in figura 3.18.

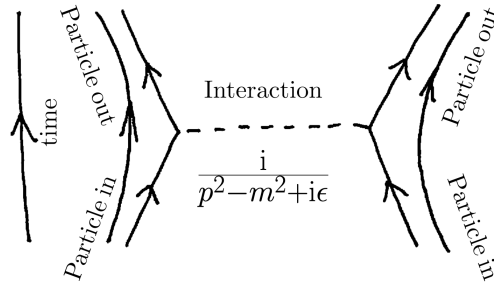


Figura 3.18: Raffigurazione scattering di due particelle della teoria di Yukawa.

3.6.1 La teoria $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$

Nel corso di questo capitolo abbiamo detto che alcuni integrali che troviamo dai diagrammi di Feynmann divergono e danno luogo a degli infiniti, una delle poche teorie con diagrammi non divergenti è quella che analizzeremo in questa sezione. La teoria di Yukawa $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$ descrive l'interazione di un campo scalare carico, che indichiamo con non poca ambiguità con $\hat{\psi}$, ed un campo $\hat{\phi}$. Il riferimento per questa teoria è il capitolo 20 del Lancaster e Blundell. Questi discorsi non sono che complementi delle precedenti specolazioni, e servono a darne compimento e perfezione. Lancaster:2014pza. Questa teoria è importante perché la ritroveremo nello studio della QED. Infatti, è una teoria molto simile alla elettrodinamica quantistica, ma con la differenza che i quanti di energia non sono scambiati per mezzo di un fotone, ma grazie ad una particella scalare $\hat{\phi}$. Le lagrangiane di interazione sono leggermente diverse:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{EM}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \\ &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{EM}} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{KG}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \\ &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{KG}} - g\bar{\psi}\psi\phi. \end{cases}$$

Il vertice della teoria è raffigurato in figura 3.19, che notiamo bene non essere un vertice realizzabile in natura, ma è solo un pezzo, infatti di solito c'è un altro vertice analogo attaccato tramite lo stesso campo $\hat{\phi}$.

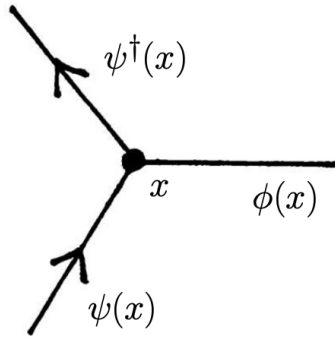


Figura 3.19: Raffigurazione vertice della teoria di Yukawa.

La lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \psi^\dagger \partial_\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - g \psi^\dagger \psi \phi \quad (3.6.11)$$

in cui si può riconoscere la lagrangiana di interazione:

$$\mathcal{L}_I = -g \psi^\dagger \psi \phi \quad (3.6.12)$$

in cui g è la costante di accoppiamento. Ovviamente dobbiamo ricordarci le espressioni dei campi scalari carichi, ma anche del campo scalare neutro.

Dalla lagrangiana (3.6.11) troviamo l'hamiltoniana di interazione:¹²

$$\hat{\mathcal{H}}_I = g\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}\hat{\phi} \quad (3.6.13)$$

che possiamo utilizzare per il conto dell'ampiezza di transizione espandendo la matrice $\hat{S}$. Implementiamo i conti:

$$\mathcal{A} = \langle q | \hat{S} | p \rangle = (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \langle 0 | \hat{a}_q \hat{S} \hat{a}_p | 0 \rangle \quad (3.6.14)$$

espandiamo la matrice $\hat{S}$ tramite la serie di Dyson:

$$\begin{aligned} \hat{S} = T \Big[& \mathbb{1} + (-ig) \int d^4z \hat{\psi}^\dagger(z) \hat{\psi}(z) \hat{\phi}(z) + \\ & + \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4y d^4w \left[\hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(y) \hat{\phi}(y) \right] \left[\hat{\psi}^\dagger(w) \hat{\psi}(w) \hat{\phi}(w) \right] + \dots \Big] \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

inserirlo l'ampiezza:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \langle 0 | \hat{a}_q \mathbb{1} \hat{a}_p | 0 \rangle + \\ & + (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} (-ig) \int d^4z \langle 0 | T \left[\hat{a}_q \hat{\psi}^\dagger(z) \hat{\psi}(z) \hat{\phi}(z) \hat{a}_p \right] | 0 \rangle + \\ & + (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4y d^4w \langle 0 | \left[\hat{a}_q \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\psi}^\dagger(w) \hat{\psi}(w) \hat{\phi}(w) \hat{a}_p \right] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

e notiamo subito che: all'ordine 0 non otteniamo nulla di interessante, ma semplicemente una delta di conservazione; al primo ordine troviamo proprio 0, visto che abbiamo imparato con il teorema di Wick che la contrazione di un numero dispari di campi da un valore di aspettazione sul vuoto nullo. L'unico termine interessante è il secondo ordine. Dobbiamo capire a cosa corrispondono le varie contrazioni che otteniamo con il teorema di Wick; le possibili contrazioni (non nulle) sono (indicando con $\hat{a}$, $\hat{b}$ gli operatori di particella e antiparticella per il campo carico e con $\hat{c}$ gli operatori per il campo neutro):

$$\overbrace{\hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(y)} \quad , \quad \overbrace{\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)} \quad (3.6.17)$$

$$\overbrace{\hat{a}_p \hat{\psi}^\dagger(x)} \quad , \quad \overbrace{\hat{\psi}(x) \hat{a}_p^\dagger} \quad (3.6.18)$$

$$\overbrace{\hat{b}_p \hat{\psi}(x)} \quad , \quad \overbrace{\hat{\psi}^\dagger(x) \hat{b}_p^\dagger} \quad (3.6.19)$$

$$\overbrace{\hat{c}_q \hat{\phi}(x)} \quad , \quad \overbrace{\hat{\phi}(x) \hat{c}_q^\dagger} \quad (3.6.20)$$

Ora, dobbiamo interpretarli. Sappiamo bene che la contrazione diventa un prodotto T-ordinato e vediamo subito che i primi due (3.6.17) sono due

¹²Ricordando che $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I$.

propagatori. Le altre contrazioni le possiamo vedere con i calcoli espliciti pinzando la contrazione tra due vettori di vuoto, vediamo (indichiamo con m la massa dei campi carichi e con μ quella del campo neutro):

$$\overline{\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(y)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad , \quad \overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-iq(x-y)}}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (3.6.21)$$

$$\overline{\hat{a}_p\hat{\psi}^\dagger(x)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad , \quad \overline{\hat{\psi}(x)\hat{a}_p^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (3.6.22)$$

$$\overline{\hat{b}_p\hat{\psi}(x)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad , \quad \overline{\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{b}_p^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (3.6.23)$$

$$\overline{\hat{c}_q\hat{\phi}(x)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \quad , \quad \overline{\hat{\phi}(x)\hat{c}_q^\dagger} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}. \quad (3.6.24)$$

Prima di vedere nel dettaglio ciascun termine cosa rappresenta notiamo che i diagrammi di Feynmann in questa teoria saranno leggermente diversi da quelli disegnati per $\hat{\phi}^4$, dal momento che abbiamo campi carichi e dobbiamo distinguere i termini di particella e antiparticella, e per cui dovremo disegnare le linee con delle frecce proprio a mostrare se si sta andando avanti nel tempo, quindi si ha una particella, o indietro nel tempo, e quindi si ha un'antiparticella. Attenzione che le frecce non rappresentano la direzione dell'impulso. Vediamo i vari contributi cosa rappresentano:

$$\overline{\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(y)} = \text{propagatore campo carico da } x \text{ a } y \quad (3.6.25)$$

$$\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} = \text{propagatore campo neutro da } x \text{ a } y \quad (3.6.26)$$

$$\overline{\hat{a}_p\hat{\psi}^\dagger(x)} = \text{particella uscente dal vertice } x \text{ con impulso } \vec{p} \quad (3.6.27)$$

$$\overline{\hat{\psi}(x)\hat{a}_p^\dagger} = \text{particella entrante nel vertice } x \text{ con impulso } \vec{p} \quad (3.6.28)$$

$$\overline{\hat{b}_p\hat{\psi}(x)} = \text{antiparticella uscente dal vertice } x \text{ con impulso } \vec{p} \quad (3.6.29)$$

$$\overline{\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{b}_p^\dagger} = \text{antiparticella entrante nel vertice } x \text{ con impulso } \vec{p} \quad (3.6.30)$$

$$\overline{\hat{c}_q\hat{\phi}(x)} = \text{antiparticella uscente dal vertice } x \text{ con impulso } \vec{q} \quad (3.6.31)$$

$$\overline{\hat{\phi}(x)\hat{c}_q^\dagger} = \text{particella entrante nel vertice } x \text{ con impulso } \vec{q}. \quad (3.6.32)$$

Vediamo ora, prima le regole di Feynmann per questa teoria e poi come possiamo vedere processi di scattering.

3.6.2 Regola di Feynmann per la teoria $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$

Elenchiamo le regole di Feynmann per la teoria $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$:

- Ad ogni vertice associamo un fattore $(-ig)$.
- Per ogni linea interna relativa ai campi $\hat{\phi}$ includiamo un propagatore:

$$\frac{i}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (3.6.33)$$

Per ogni linea interna del campo $\hat{\psi}$ includiamo il propagatore:

$$\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.6.34)$$

- Integriamo su tutti i quadri-impulsi non fissati.
- Includiamo le delta di conservazione del quadri-impulso totale.
- A tutte le linee esterne associamo un fattore 1
- I coefficienti di simmetria sono tutti $D = 1$.

3.6.3 Scattering di due particelle per la teoria $\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\phi}$

Consideriamo, come fatto per la teoria $\hat{\phi}^4$, un processo di scattering per due particelle, dunque un processo in cui abbiamo due particelle in ingresso e due in uscita. Come sappiamo dobbiamo calcolare la quantità:

$$\mathcal{A} = \langle q_1 q_2 | \hat{S} | p_2 p_1 \rangle = (2\pi)^6 \sqrt{16} E_{q_1} E_{q_2} E_{p_1} E_{p_2} \langle 0 | \hat{a}_{q_1} \hat{a}_{q_2} \hat{S} \hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2}^\dagger | 0 \rangle \quad (3.6.35)$$

in cui dobbiamo inserire lo sviluppo di Dyson della matrice $\hat{S}$ con all'interno l'espressione di $\mathcal{H}_I$.

Come succedeva per la teoria $\hat{\phi}^4$ anche ora abbiamo l'ordine 0 che non dà nessun contributo rilevante, se non delle delta di conservazione, e l'ordine 1, come visto nel caso ad una particella, che è nullo per via del fatto di avere un numero dispari di campi. Il contributo interessante viene dal secondo ordine dello sviluppo di $\hat{S}$, per cui si ha:

$$\mathcal{A}_2 \propto \langle 0 | \hat{a}_{q_1} \hat{a}_{q_2} \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\psi}^\dagger(w) \hat{\psi}(w) \hat{\phi}(w) \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_1}^\dagger | 0 \rangle. \quad (3.6.36)$$

Dell'ampiezza (3.6.36) possiamo avere 3 contrazioni non banali, che sono:

$$\langle 0 | \hat{a}_{q_1} \hat{a}_{q_2} \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\psi}^\dagger(w) \hat{\psi}(w) \hat{\phi}(w) \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_1}^\dagger | 0 \rangle \quad (3.6.37)$$

$$\langle 0 | \hat{a}_{q_1} \hat{a}_{q_2} \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\psi}^\dagger(w) \hat{\psi}(w) \hat{\phi}(w) \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_1}^\dagger | 0 \rangle \quad (3.6.38)$$

$$\langle 0 | \hat{b}_{q_1} \hat{a}_{q_2} \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(y) \hat{\phi}(y) \hat{\psi}^\dagger(w) \hat{\psi}(w) \hat{\phi}(w) \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{b}_{p_1}^\dagger | 0 \rangle. \quad (3.6.39)$$

I tre diagrammi associati ai tre valori di aspettazione sono riportati nelle figure 3.20, 3.21 ed 3.22 rispettivamente.

Il diagramma associato a (3.6.37) rappresenta una particella entrante ($\overline{\psi(y)\hat{a}_{p_1}^\dagger}$), che emette una particella mediatrice ($\overline{\phi(y)\phi(w)}$) che viaggia da w a y e collide con una seconda particella ($\overline{\psi(w)\hat{a}_{p_2}^\dagger}$); ovviamente, dopo lo scambio della particella messaggera, le particelle proseguono il loro moto ($\overline{\hat{a}_{q_1}\psi^\dagger(y)}$ e $\overline{\hat{a}_{q_2}\psi^\dagger(w)}$). Questo diagramma è anche noto come **canale t**, per via della variabile di Mandelstam¹³ $t = (p_1 - q_1)$, che è l'impulso conservato (e trasportato dalla particella virtuale).

Il diagramma (3.6.38) è sostanzialmente identico a (3.6.37), poiché nessuno dei due considera antiparticelle ed entrambi hanno due particelle in ingresso e due particelle in uscita; l'unica loro differenza è l'impulso delle particelle in uscita, che ovviamente, trattando particelle identiche non possiamo sapere chi è chi e consideriamo tutte le possibilità. Il diagramma (3.6.38) è chiamato **canale u**, per via della variabile di Mandelstam $u = (p_1 - q_2)$.

Il diagramma (3.6.39) è l'unico dei tre che considera i contributi sia di particella che di antiparticella. Questo diagramma ci mostra una particella entrante ($\overline{\psi(w)\hat{a}_{p_2}^\dagger}$) e un'antiparticella entrante ($\overline{\psi^\dagger(w)\hat{b}_{p_1}^\dagger}$), che annichiliscono nel punto w emettendo una particella virtuale ($\overline{\phi(y)\phi(w)}$), la quale nel punto y emette la coppia di particella ($\overline{\hat{a}_{q_2}\psi^\dagger(y)}$) e antiparticella ($\overline{\hat{b}_{q_1}\psi(y)}$).

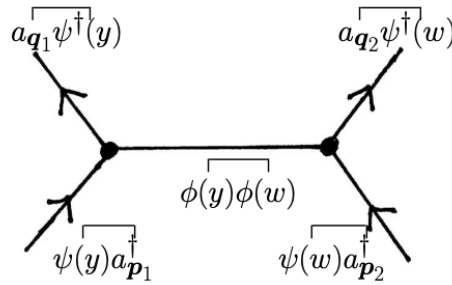
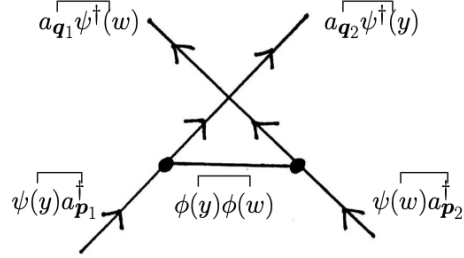
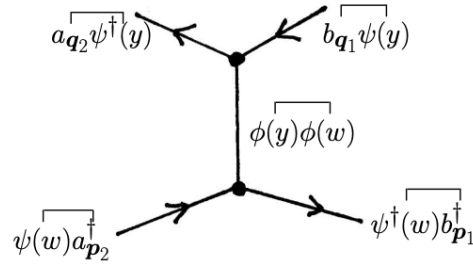


Figura 3.20: Rappresentazione canale t

Ovviamente possiamo raffigurare i diagrammi di Feynmann nello spazio degli impulsi, come possiamo vedere nelle figure 3.23, 3.24 ed 3.25, le cui

¹³Le variabili di Mandelstam t , u ed s sono degli invarianti di Lorentz e si utilizzano per nominare questo tipo di diagrammi per via dei vari impulsi conservati in ciascuno.

**Figura 3.21:** Rappresentazione canale u **Figura 3.22:** Rappresentazione canale s

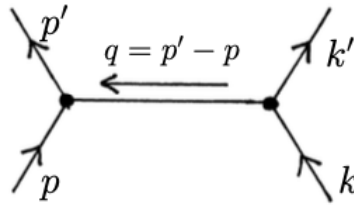
ampiezze di probabilità sono:

$$\mathcal{A}_t^{(2)} \propto (-ig)^2 \frac{i}{t - \mu^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \quad (3.6.40)$$

$$\mathcal{A}_u^{(2)} \propto (-ig)^2 \frac{i}{u - \mu^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \quad (3.6.41)$$

$$\mathcal{A}_s^{(2)} \propto (-ig)^2 \frac{i}{s - \mu^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(k + k' - p - p'). \quad (3.6.42)$$

$$(3.6.43)$$

**Figura 3.23:** Rappresentazione canale t nello spazio degli impulsi

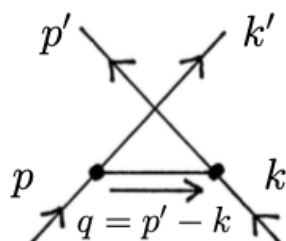


Figura 3.24: Rappresentazione canale u nello spazio degli impulsi

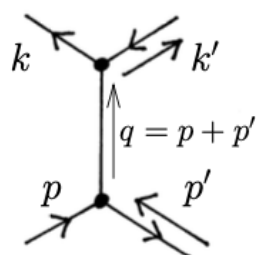


Figura 3.25: Rappresentazione canale s nello spazio degli impulsi