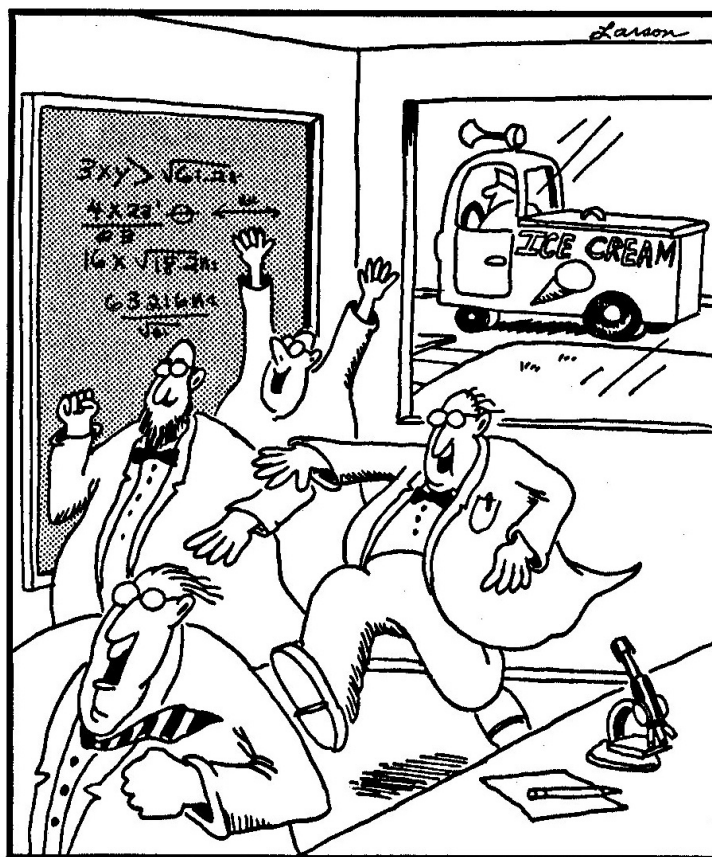


Appunti del corso di:
**Complementi di: "Fondamenti di
Teoria Quantistica dei Campi"**

Gabriele Cembalo

A.A. 2025-2026



Università degli Studi di Torino
Dipartimento di Fisica
Via Giuria, 1, Torino (TO)

Science is not a collection of
truths. It is a continuing
exploration of mysteries.

Freeman Dyson

Prefazione

In questo documento intendo raccogliere i miei appunti basati sul materiale del corso “**Complementi di: "Fondamenti di Teoria Quantistica dei Campi"**”, tenuto dal Prof. C. Angelantonj e seguito presso *Università degli Studi di Torino* nell’anno accademico 2025-2026. Durante il corso sono stati consigliati diversi libri (elencati in Bibliografia), e cercherò di indicare i riferimenti corrispondenti all’inizio di ogni capitolo.

Questi appunti sono una versione riscritta delle note prese durante le lezioni, quindi la fonte principale è il materiale presentato dal professore. Declino ogni responsabilità e rimando alla mia pagina personale per saperne di più su questi appunti e sul fatto che non hanno natura né accademica né didattica.

Questi appunti vanno chiaramente intesi come note personali, riscritte in maniera ordinata a partire dalle lezioni. Eventuali sviste, errori o imprecisioni sono dovuti ai miei limiti. Inoltre, ho scritto questi appunti principalmente per “spiegare” a me stesso l’argomento, quindi alcune sezioni potrebbero risultare eccessivamente dettagliate o, al contrario, troppo superficiali a seconda del lettore. In ogni caso, spero possano comunque essere utili a qualcuno. Spero anche di essere riuscito a produrre un documento chiaro e ben strutturato.

Una raccolta dei miei appunti è disponibile sulla mia pagina GitHub personale: gCembalo.github.io.

Eventuali errori o refusi possono essere segnalati alla mia email personale: g70362643@gmail.com.

Last update: 20/01/2026

Contents

1	Campo scalare	1
1.1	Propagatore di Lehmann-Kallen e autostati di una teoria interagente	1
1.2	Disaccoppiamento degli stati a multiparticelle	3
1.3	Operatori di creazione e distruzione	5
1.4	Formula di LSZ	6
1.5	Esempio sulla funzione di Green	10
1.6	Potenziale di Yukawa scalare (scattering tra nucleoni e pioni)	12
1.6.1	Caso non relativistico	15
2	Campo spinoriale	17
2.1	LSZ	17
3	Campo vettoriale	25
3.1	Esempio annichilazione di fermioni	25
3.2	Esempio del Bhabha scattering	28
3.3	Esempio sul segno di un loop di fermioni	32
3.4	Osservazione sulla teoria di Yang-Mills	32
4	Integrali funzionali	35
4.1	Legame tra path integral e prodotto T-ordinato nel vuoto . .	35
4.2	Spazio delle coordinate	37
4.3	Rotazione di Wick	37
4.4	Esempio $\lambda\phi^4$	39
5	Il modello standard	41
5.1	La lagrangiana di Fermi	41
5.1.1	Validità della teoria di Fermi	43
5.2	Rottura spontanea di simmetria (Wigner e Nambu-Goto) . .	46
5.3	Rottura della simmetria e spettro di massa	47
5.4	Teorema di Goldstone	48
5.5	Esempio di rottura della simmetria	49
5.5.1	Sostituzione 1	50
5.5.2	Sostituzione 2	51

5.6	Fotone massivo tramite Goldstone	52
5.6.1	Sostituzione	52
5.7	Struttura del modello standard (Glashow-Weisberg-Salam) . .	54
5.8	Termini cinetici di Yang-Mills rispetto ad generatori	55
5.9	Settore leptónico	56
5.9.1	Bosoni fisici e costanti di accoppiamento	57
5.9.2	Numeri quantici e campi	59
5.9.3	Lagrangiana massless dei leptoni	60
5.10	Trasformazione di carica e di parità	62
5.10.1	Decadimento del muone	66
5.11	Settore di Higgs	68
5.11.1	Rottura della simmetria tramite Higgs	69
5.11.2	Calcolo del potenziale	70
5.11.3	Calcolo della derivata covariante	71
5.11.4	Lagrangiana di Higgs e masse dei bosoni vettori	72
5.12	Lagrangiana di Yang-Mills-Higgs	72
5.13	Masse dei leptoni tramite Higgs	74
5.14	Adroni e quark	74
5.14.1	Nota sulle costanti di accoppiamento	76
5.15	Mixing dei quark	77

Chapter 1

Campo scalare

1.1 Propagatore di Lehmann-Kallen e autostati di una teoria interagente

L'inizio è uguale a quello della mia sezione.

Visto il caso $x^0 > y^0$, possiamo definire il propagatore interagente, in analogia al caso libero, come:

$$\Delta_F = \langle \Omega | T[\phi(x)\phi(y)] | \Omega \rangle \quad (1.1.1)$$

$$= \theta(x^0 - y^0) \langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle \Omega | \phi(y)\phi(x) | \Omega \rangle \quad (1.1.2)$$

$$= \sum_{\alpha} |\langle \Omega | \phi(0) | \alpha \rangle|^2 \left[e^{-ip_{\alpha}(x-y)} \theta(x^0 - y^0) + e^{-ip_{\alpha}(y-x)} \theta(y^0 - x^0) \right]. \quad (1.1.3)$$

Possiamo definire la densità spettrale come:

$$\rho(q) = \sum_{\alpha} (2\pi)^4 \delta^4(q - p_{\alpha}) |\langle \Omega | \phi(0) | \alpha \rangle|^2 \quad (1.1.4)$$

che è una densità di massa/energia, e in cui $q = p_{\alpha}$ (per via della δ) e in cui $q_0^2 > 0$, ovvero tale per cui q_{μ} è un oggetto time-like.

Notiamo che Δ_F è un'invariante di Lorentz, per cui, anche $\rho(q)$ dovrà esserlo. Scriviamo dunque:

$$\rho(q) = \theta(q^0) \sigma(q^2) \quad (1.1.5)$$

in cui:

$$\sigma(q^2) = \int_0^{\infty} d(m^2) \sigma(m^2) \delta(q^2 - m^2) \quad (1.1.6)$$

che chiamiamo *spettro di massa*. Possiamo scrivere il propagatore interagente

(1.1.3) come:

$$\Delta_F = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \rho(q) \left[e^{-iq(x-y)} \theta(x^0 - y^0) + e^{-iq(y-x)} \theta(y^0 - x^0) \right] \quad (1.1.7)$$

$$= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \theta(q^0) \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \delta(q^2 - m^2) \left[e^{-iq(x-y)} \theta(x^0 - y^0) + e^{-iq(y-x)} \theta(y^0 - x^0) \right] \quad (1.1.8)$$

$$= \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\delta(q^0 - E_{q,m})}{2 E_{q,m}} \left[e^{-iq(x-y)} \theta(x^0 - y^0) + e^{-iq(y-x)} \theta(y^0 - x^0) \right] \quad (1.1.9)$$

$$= \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \Delta_F^0(x - y, m^2) \quad (1.1.10)$$

dove $\Delta_F^0(x - y, m^2)$ è il propagatore di Feynman per la particella libera di massa m , mentre σ rappresenta la densità degli stati (compresi gli stati legati). La rappresentazione è detta **rappresentazione di Lehmann-Kallen**. Nel caso di campo libero avevamo $\sigma(m^2) = \delta(m^2 - m_0^2)$.

Possiamo anche dimostrare che la σ è correttamente normalizzata per essere una densità. Da (1.1.10) otteniamo che:

$$\langle \Omega | [\phi(x), \phi(y)] | \Omega \rangle = \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \langle 0 | [\phi_0(x), \phi_0(y)] | 0 \rangle \quad (1.1.11)$$

se deriviamo rispetto y^0 :

$$\langle \Omega | [\phi(x), \pi(y)] | \Omega \rangle = \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \langle 0 | [\phi_0(x), \pi_0(y)] | 0 \rangle \quad (1.1.12)$$

in cui abbiamo ipotizzato che il potenziale di interazione non dipende dalle derivate del campo. Ovviamente, noi ricordiamo il commutatore (??), che vale a prescindere dal fatto che sia una teoria libera o interagente, per cui dobbiamo avere:

$$1 = \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \quad (1.1.13)$$

dunque, la $\sigma(m^2)$ ha le dimensioni che deve avere.

Fin'ora non ci siamo preoccupati di distinguere stai a singola particella da stati multi-particelle. Ricordiamo che esistono 3 set di autostati possibili:

- $|0\rangle$: lo stato di vuoto libero (assenza di particelle).
- $|\alpha\rangle$: lo stato di singola particella libera di massa m_0 .

- $|\alpha, n\rangle$: lo stato legato di molte particelle, dipende dall'impulso e da altre n variabili, ha energia:

$$E_k = \sqrt{k^2 - M^2} \quad (1.1.14)$$

con $M > m_0$ e in cui M è la massa minima per stati legati, di almeno 2 particelle. Notiamo che per $m > M$ la σ assume valori continui.

Per la precisione, dopo lo stato a singola particella, possiamo avere uno stato legato a molte particelle che può avere $M < 2m_0$ (ma sempre $M > m_0$), ma dobbiamo anche notare che se escludiamo gli stati legati ci rimangono solo gli stati con $M \geq 2m_0$ (che possono avere momento relativo grande a piacere!)¹.

Per uno stato legato possiamo scrivere:

$$\sigma(m^2) = Z \delta(m^2 - m_0^2) + \theta(m^2 - M^2) \tilde{\sigma}(m^2) \quad (1.1.15)$$

e dunque:

$$\Delta_F = \int_0^\infty d(m^2) \Delta_F^0(x - y, m^2) [Z \delta(m^2 - m_0^2) + \theta(m^2 - M^2) \tilde{\sigma}(m^2)] \quad (1.1.16)$$

$$= Z \Delta_F^0(x - y, m_0^2) + \int_{M^2}^\infty d(m^2) \Delta_F^0(x - y, m^2) \tilde{\sigma}(m^2) \quad (1.1.17)$$

in cui il primo termine è il propagatore di un campo libero moltiplicato per una costante di normalizzazione Z (descrive una sola particella), che è utile perché se vogliamo correlare il campo libero ϕ_0 al campo interagente ϕ , allora abbiamo $\phi = \sqrt{Z} \phi_0$, cioè permette di riscalar il campo libero.

Notiamo che imponendo la normalizzazione di $\sigma(m^2)$ abbiamo:

$$1 = \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) = Z + \int_{M^2}^\infty d(m^2) \tilde{\sigma}(m^2) \quad (1.1.18)$$

e siccome:

$$\int_{M^2}^\infty d(m^2) \tilde{\sigma}(m^2) > 0 \quad (1.1.19)$$

dobbiamo avere $Z \in (0, 1)$, dove Z dà una misura di quanto il campo interagisca con se stesso e si calcola tramite teorie perturbative.

1.2 Disaccoppiamento degli stati a multiparticelle

I riferimenti sono p. 53-54 dello Srednicki Science is not a collection of truths. It is a continuing exploration of mysteries.Srednicki.

¹A riguardo vedi pag. 51 dello Srednicki Science is not a collection of truths. It is a continuing exploration of mysteries.Srednicki.

Quando abbiamo una teoria libera sappiamo che vale:

$$\langle k, n | \phi_0(x) | 0 \rangle = 0 \quad (1.2.1)$$

in cui a sinistra abbiamo uno stato legato e a destra il vuoto. Vogliamo dimostrare in questa sezione che vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle k, n | \phi_0(x) | \Omega \rangle = 0 \quad (1.2.2)$$

ovvero che gli stati a molte particelle si disaccoppiano.

Prendiamo come stato iniziale uno stato a multiparticella, che può essere scritto come una sovrapposizione di pacchetti d'onda:

$$|\psi\rangle = \sum_n \int d^3p \psi_n(p) |p, n\rangle \quad (1.2.3)$$

e che dev'essere normalizzabile.

Notiamo che vale:

$$\langle p, n | \phi(x) | \Omega \rangle = \langle p, n | e^{ipx} \phi(0) e^{-ipx} | \Omega \rangle \quad (1.2.4)$$

$$= e^{ipx} \langle p, n | \phi(0) | \Omega \rangle \quad (1.2.5)$$

$$= e^{ipx} A_n(p). \quad (1.2.6)$$

Ora, calcoliamo:

$$\langle \psi | a^\dagger | \Omega \rangle = \sum_n \int d^3p \psi_n^*(p) \langle p, n | a^\dagger | \Omega \rangle \quad (1.2.7)$$

$$= -i(2\pi)^3 \sum_n \int d^3p \psi_n^*(p) \langle p, n | \int d^3k g(k) \int d^3x \left[e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x) \right] | \Omega \rangle \quad (1.2.8)$$

$$= -i(2\pi)^3 \sum_n \int d^3p d^3k d^3x \left[\psi_n^*(p) g(k) \left(e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle p, n | \phi(x) | \Omega \rangle \right) \right] \quad (1.2.9)$$

$$= -i(2\pi)^3 \sum_n \int d^3p d^3k d^3x \left[\psi_n^*(p) g(k) \left(e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_t e^{ipx} A_n(p) \right) \right] \quad (1.2.10)$$

$$= (2\pi)^3 \sum_n \int d^3p d^3k d^3x \left[\psi_n^*(p) g(k) (E_p + E_k) e^{i(p-k)x} A_n(p) \right] \quad (1.2.11)$$

$$= (2\pi)^3 \sum_n \int d^3p d^3k \left[\psi_n^*(p) g(k) (E_p + E_k) e^{i(E_p - E_k)t} A_n(p) \delta^3(p - k) \right] \quad (1.2.12)$$

ricordando che:

$$E_p = \sqrt{p^2 + M^2} \quad (1.2.13)$$

per uno stato a multi-particella, e:

$$E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad (1.2.14)$$

per lo stato di singola particella. Se applichiamo la δ^3 e usiamo il fatto che $M > m$, allora nell'integrale rimane solo una fase oscillante positiva, **che quindi tende a zero** quando $t \rightarrow -\infty$, per via del lemma di Riemann-Lebesgue, per cui vediamo che gli stati a multi-particella si disaccoppiano.

1.3 Operatori di creazione e distruzione

In questa sezione cerchiamo le espressioni degli operatori di creazione e distruzione in termini dei campi scalari ϕ e $\phi^\dagger$. Per semplicità indicheremo:

$$\widetilde{d^3p} = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \quad (1.3.1)$$

e di conseguenza le espressioni dei campi saranno:

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{p} \left[a(p)e^{-ipx} + a^\dagger(p)e^{ipx} \right]. \quad (1.3.2)$$

Calcoliamo la derivata temporale del campo:

$$\dot{\phi}(x) = \int d^3\tilde{p} (-iE_p) \left[a(p)e^{-ipx} - a^\dagger(p)e^{ipx} \right] \quad (1.3.3)$$

e calcoliamo la quantità:

$$\int d^3x e^{iqx} \left[\dot{\phi}(x) - iE_q \phi(x) \right] = \quad (1.3.4)$$

$$= \int d^3x d^3\tilde{p} e^{iqx} \left[-iE_p (a(p)e^{-ipx} - a^\dagger(p)e^{ipx}) - iE_q (a(p)e^{-ipx} + a^\dagger(p)e^{ipx}) \right] \quad (1.3.5)$$

$$= \int d^3x d^3\tilde{p} \left[-i(E_p + E_q) a(p) e^{-i(p-q)x} + i(E_p - E_q) a^\dagger(p) e^{i(p+q)x} \right] \quad (1.3.6)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[-i(E_p + E_q) a(p) e^{-i(p-q)x} (2\pi)^3 \delta^3(p-q) + i(E_p - E_q) a^\dagger(p) e^{i(p+q)x} (2\pi)^3 \delta^3(p+q) \right] \quad (1.3.7)$$

$$= -ia(p) \quad (1.3.8)$$

in cui nel passaggio (1.3.6) abbiamo integrato su x per far comparire la δ . Dunque abbiamo trovato:

$$a(p) = i \int d^3x e^{iqx} [\dot{\phi}(x) - iE_q \phi(x)] \quad (1.3.9)$$

$$= i \int d^3x [e^{iqx} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x)] \quad (1.3.10)$$

in cui abbiamo definito $\overleftrightarrow{\partial}_t = \overrightarrow{\partial}_t - \overleftarrow{\partial}_t$. Analogamente:

$$a^\dagger(p) = -i \int d^3x e^{-iqx} [\dot{\phi}(x) + iE_q \phi(x)] \quad (1.3.11)$$

$$= -i \int d^3x [e^{-iqx} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x)]. \quad (1.3.12)$$

Possiamo definire, nella teoria libera, l'operatore di creazione in modo che sia indipendente dal tempo come:

$$a_p^\dagger = \int d^3k g_p(k) a^\dagger(k) \quad (1.3.13)$$

in cui abbiamo:

$$g_p(k) \propto \exp \left\{ -\frac{(\vec{k} - \vec{p})^2}{4\sigma^2} \right\} \quad (1.3.14)$$

che è un pacchetto d'onda con larghezza σ e centrato in $\vec{p}$. Definito con (1.3.13) abbiamo $a_p^\dagger$ che crea una particella in un intorno di $\vec{p}$.

Notiamo che se supponiamo che $a_p^\dagger$ sia della stessa forma anche in una teoria interagente, allora esso non sarà indipendente dal tempo, per cui conviene considerare:

$$|p\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} a_p^\dagger(t) |\Omega\rangle. \quad (1.3.15)$$

1.4 Formula di LSZ

Per il campo interagente abbiamo una lagrangiana della forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2 \phi^2 + \mathcal{L}_{int} \quad (1.4.1)$$

le cui equazioni del moto sono:

$$(\square + m_0^2) \phi = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi} = j_0(\phi). \quad (1.4.2)$$

Nel caso di campo libero $\mathcal{L}_{int} = 0$ e abbiamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi_0^2 \quad (1.4.3)$$

le cui equazioni del moto sono:

$$(\square + m^2)\phi_0 = 0 \quad (1.4.4)$$

in cui m è la massa fisica misurabile del campo ϕ .

Studiamo:

$$(\square + m^2)\phi = j_0(\phi) + (m^2 - m_0^2)\phi^2 = j(\phi) \quad (1.4.5)$$

la cui soluzione dipende dalla soluzione omogenea, che è la teoria libera:

$$\phi(x) = \sqrt{Z} \phi_0 + \int d^4y G_R(x-y) j(y) \quad (1.4.6)$$

Se abbiamo uno stato iniziale $|\alpha\rangle$ e vogliamo ricavare lo stato finale $|\beta\rangle$. La densità di probabilità di scattering è $S_{\alpha\beta} = \langle\beta|\alpha\rangle$, che poi possiamo legare alla sezione d'urto, che è un'osservabile.

Possiamo osservare che quando abbiamo un'interazione a corto raggio, nei due stati, iniziale e finale, quindi gli stati a $t \rightarrow \pm\infty$, rimane solo il campo *libero*, che per definizione interagisce solo con se stesso.² Infatti, si ha:

$$\begin{cases} \langle\alpha|\phi|\beta\rangle & \longrightarrow \sqrt{Z} \langle\alpha|\phi_{in}|\beta\rangle & \text{se } t = -\infty \\ \langle\alpha|\phi|\beta\rangle & \longrightarrow \sqrt{Z} \langle\alpha|\phi_{out}|\beta\rangle & \text{se } t = +\infty \end{cases} \quad (1.4.7)$$

queste sono dette **condizioni LSZ** (Lippman-Symanzik-Zimmerman), in cui si indica con ϕ il campo interagente e con ϕ_{in} e ϕ_{out} i campi liberi di stato iniziale e finale.

Prendiamo un solo tipo di particelle e studiamo $\langle\beta_{out}|\alpha_{in}\rangle$ in cui possiamo esplicitare una particella di impulso p , ovvero consideriamo:

$$|\alpha\rangle = |\tilde{\alpha}, p\rangle = a^\dagger(p) |\tilde{\alpha}\rangle \quad (1.4.8)$$

in cui possiamo ricordare le espressioni trovate (1.3.10) e (1.3.12).

Nota In generale, alcune delle particelle potrebbero non interagire, questo fenomeno è detto *forward scattering*: in questo caso lo stato iniziale e finale contengono una particella identica (stesso tipo e stesso momento).

Se ignoriamo il forward scattering, ovvero se ipotizziamo che tutte le particelle dello stato iniziale interagiscano, allora $\forall p \int \alpha_{in}$ abbiamo $p \notin \beta_{out}$, che si può anche scrivere come:

$$\langle\beta_{out}| a_{out}^\dagger(p) = 0 \quad (1.4.9)$$

²Ovviamente si intende limite in senso debole, fuori dall'integrale.

e viceversa. Calcoliamo l'ampiezza di scattering:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \beta | a_{in}^\dagger(q) - a_{out}^\dagger(q) | \tilde{\alpha} \rangle \quad (1.4.10)$$

$$= -i \int d^3x \left[e^{-iqx} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle \beta | \phi_{in}(x) - \phi_{out}(x) | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.4.11)$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3x \left[e^{-iqx} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.4.12)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \partial_t \left[e^{-iqx} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.4.13)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-iqx} (\partial_t^2 \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle) - \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle [\partial_t^2 e^{-iqx}] \right] \quad (1.4.14)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-iqx} (\partial_t^2 \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle) + \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle [(-\nabla^2 + m^2) e^{-iqx}] \right] \quad (1.4.15)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-iqx} [(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle] \right] \quad (1.4.16)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-iqx} (\square_x + m^2) \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.4.17)$$

in cui: nel passaggio (1.4.12) abbiamo utilizzato le condizioni LSZ (1.4.7); in (1.4.15) abbiamo ricordato l'equazione di Klein-Gordon, per cui:

$$(\square + m^2)e^{-iqx} = (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)e^{-iqx} = 0; \quad (1.4.18)$$

all'espressione (1.4.16) ci siamo arrivati integrando per parti due volte.

Tutto il calcolo che abbiamo fatto per arrivare a (1.4.17) serve ad estrarre una sola particella; se estraiano tutte le particelle arriviamo alla formula di riduzione di LSZ.

Studiamo $\langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle$ in cui estraiano nello stato finale:

$$\langle \beta | = \langle \tilde{\beta} p | = \langle \tilde{\beta} | a(p) \quad (1.4.19)$$

e rifacciamo lo stesso ragionamento fatto per arrivare a (1.4.17):

$$\langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \tilde{\beta} | a_{out}(p) \phi(x) - \phi(x) a_{in}(p) | \tilde{\alpha} \rangle \quad (1.4.20)$$

$$= i \int d^3y \left[e^{ipy} \overleftrightarrow{\partial}_{t_y} \langle \tilde{\beta} | \phi_{out}(y) \phi(x) - \phi(x) \phi_{in}(y) | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.4.21)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3y \left[e^{ipy} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y) \phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.4.22)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y \partial_{t_y} \left[e^{ipy} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y) \phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.4.23)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y \left[e^{ipy} (\partial_{t_y}^2 \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y) \phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle) - \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y) \phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle (\partial_{t_y}^2 e^{ipy}) \right] \quad (1.4.24)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y \left[e^{ipy} (\partial_{t_y}^2 \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y) \phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle) + \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y) \phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle [(-\nabla_y^2 + m^2) e^{ipy}] \right] \quad (1.4.25)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y \left[e^{ipy} (\square_y + m^2) \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y) \phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle \right]. \quad (1.4.26)$$

Determiniamo finalmente la formula di riduzione LSZ per gli scalari:

$$\begin{aligned} &_{out} \langle p_1, \dots, p_n | q_1, \dots, q_m \rangle_{in} = \left(\frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^{n+m} \left[\prod_{i=1}^m \int d^4x_i e^{-iq_i x_i} (\square_{x_i} + m^2) \right] \times \\ &\times \left[\prod_{j=1}^n \int d^4y_j e^{ip_j y_j} (\square_{y_j} + m^2) \right] \langle \Omega | T[\phi(y_1) \dots \phi(y_n) \phi(x_1) \dots \phi(x_m)] | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

Nello spazio dei momenti otteniamo:

$$\left[\prod_{i,j=1}^{m,n} (q_i^2 - m^2) (p_j^2 - m^2) \right] G(q_1 \dots q_m p_1 \dots p_n) \quad (1.4.28)$$

in cui il primo fattore sono i propagatori amputati tramite il calcolo dei residui, mentre il secondo fattore è la funzione di correlazione (di Green) ad $m + n$ gambe.

Per la precisione, la **funzione di correlazione (di Green) a $m + n$**

gambe è definita come:

$$\begin{aligned}
 G(q_1 \dots q_m p_1 \dots p_n) &= \left[\prod_{i=1}^m \int d^4 x_i e^{-i q_i x_i} \right] \left[\prod_{j=1}^n \int d^4 y_j e^{i p_j y_j} \right] \times \\
 &\quad \times \langle \Omega | T[\phi(y_1) \dots \phi(y_n) \phi(x_1) \dots \phi(x_m)] | \Omega \rangle \\
 &= (\sqrt{Z})^{n+m} \left[\prod_{i=1}^m \frac{i}{q_i^2 - m^2} \right] \left[\prod_{j=1}^n \frac{i}{p_j^2 - m^2} \right] \text{out} \langle p_1, \dots, p_n | q_1, \dots, q_m \rangle_{\text{in}}
 \end{aligned} \tag{1.4.29}$$

in cui possiamo osservare che ha dei poli legati alla condizione di mass-shell, inoltre, si ha che l'ampiezza di probabilità è legata al residuo della funzione di Green nei poli quando tutti i momenti vanno on-shell.

Vedi successivi per dettagli. (si?) Indichiamo con $\tilde{G}$ la funzione di correlazione/Green (1.4.29), come facciamo sempre con le grandezze nello spazio dei momenti. La funzione di correlazione/Green amputata si ottiene eliminando i propagatori delle gambe esterne dalla funzione di Green nello spazio dei momenti (1.4.29):

$$\tilde{G}^{(n)} = \tilde{G}_A^{(n)} \prod_{i=1}^n \Delta_F(p_i). \tag{1.4.30}$$

Nota che esiste un abuso di notazione anche qui, per cui si chiama G sia la funzione di Green, sia la funzione di Green amputata; ricordiamoci però che le regole di Feynman restituiscono la funzione di Green amputata!

1.5 Esempio sulla funzione di Green

Studiamo:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4 \tag{1.5.1}$$

e calcoliamo la funzione di correlazione/Green con 2 e con 4 gambe al prim'ordine perturbativo, utilizzando quello che abbiamo imparato da LSZ (1.4.29), dalla formula di GML (??) e dal teorema di Wick.

Vediamo la funzione a 2 gambe:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \langle \Omega | T[\phi(x_1)\phi(x_2)] | \Omega \rangle \quad (1.5.2)$$

$$\approx -i \frac{\lambda}{4!} \langle 0 | T[\phi_1 \phi_2 \int d^4 z \phi_z^4] | 0 \rangle_C \quad (1.5.3)$$

$$= -i \frac{\lambda}{2} \int d^4 z \Delta(x_1 - z) \Delta(x_2 - z) \Delta(z - z) \quad (1.5.4)$$

$$= -\frac{i\lambda}{2} \int d^4 z \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p_1) e^{-ip_1(x_1-z)} \times \\ \times \tilde{\Delta}(p_2) e^{-ip_2(x_2-z)} \tilde{\Delta}(p) e^{-ip(z-z)} \quad (1.5.5)$$

$$= -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \exp\{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2)\} \times \\ \times \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p) \quad (1.5.6)$$

dunque nello spazio degli impulsi abbiamo:

$$\tilde{G}^{(2)}(p_1, p_2) = -\frac{i\lambda}{2} \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p) \quad (1.5.7)$$

la funzione di Green amputata di conseguenza è:

$$\tilde{G}^{(2)}(p_1, p_2) = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p) \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \quad (1.5.8)$$

e dunque, dalla relazione tra la funzione di Green amputata ed M :

$$M = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p). \quad (1.5.9)$$

Vediamo a 4 gambe:

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle \Omega | T[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)] | \Omega \rangle \quad (1.5.10)$$

$$\approx -i \frac{\lambda}{4!} \langle 0 | T[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \int d^4 z \phi_z^4] | 0 \rangle_C \quad (1.5.11)$$

$$= -i\lambda \int d^4 z \Delta(x_1 - z) \Delta(x_2 - z) \Delta(x_3 - z) \Delta(x_4 - z) \quad (1.5.12)$$

$$= -i\lambda \int d^4 z \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p_1) e^{-ip_1(x_1-z)} \tilde{\Delta}(p_2) e^{-ip_2(x_2-z)} \times \\ \times \tilde{\Delta}(p_3) e^{-ip_3(x_3-z)} \tilde{\Delta}(p_4) e^{-ip_4(x_4-z)} \quad (1.5.13)$$

$$= -i\lambda \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \exp\{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4)\} \times \\ \times \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) \tilde{\Delta}(p_3) \tilde{\Delta}(p_4) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \quad (1.5.14)$$

che nello spazio degli impulsi diventa:

$$G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \exp\{-i(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4)\} \times \\ \times \langle \Omega | T[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)] | \Omega \rangle \quad (1.5.15)$$

$$\approx -i\lambda \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) \tilde{\Delta}(p_3) \tilde{\Delta}(p_4) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4). \quad (1.5.16)$$

La funzione di Green amputata è:

$$\tilde{G}_A^{(4)} = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \quad (1.5.17)$$

dunque, dalla relazione tra la funzione di Green amputata ed M , ricaviamo:

$$M = -i\lambda. \quad (1.5.18)$$

1.6 Potenziale di Yukawa scalare (scattering tra nucleoni e pioni)

Consideriamo una teoria con 2 tipi di particelle scalari (spin 0), reali (massa μ , con campo σ) e complesse (massa m , campo ϕ). Abbiamo la lagrangiana libera che è:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} \mu^2 \sigma^2 + \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - m^2 \phi \bar{\phi}. \quad (1.6.1)$$

Le soluzioni per i campi liberi le conosciamo già e sono:

$$\sigma = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[a(p) e^{-ipx} + a^\dagger(p) e^{ipx} \right] \quad , \quad \kappa = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\sigma}} = \dot{\sigma} \quad (1.6.2)$$

$$\phi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[b(p) e^{-ipx} + c^\dagger(p) e^{ipx} \right] \quad , \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \quad (1.6.3)$$

$$\bar{\phi} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[c(p) e^{-ipx} + b^\dagger(p) e^{ipx} \right] \quad , \quad \bar{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\phi}}} = \dot{\bar{\phi}}. \quad (1.6.4)$$

Come nel caso precedente dobbiamo imporre la regola di commutazione, a tempi uguali:

$$[\phi, \bar{\pi}] = i\delta^3(x - y). \quad (1.6.5)$$

Inoltre abbiamo che:

$$\Delta_\phi(x - y) = \langle 0 | T[\phi(x) \bar{\phi}(y)] | 0 \rangle \quad (1.6.6)$$

quando $x^0 > y^0$ diventa:

$$\langle 0 | b_x b_y^\dagger | 0 \rangle \quad (1.6.7)$$

quindi, abbiamo una particella; mentre quando $x^0 < y^0$ diventa:

$$\langle 0 | c_y c_x^\dagger | 0 \rangle \quad (1.6.8)$$

e abbiamo un'antiparticella.

Se lasciamo il campo σ invariato e facciamo una trasformazione di fase su ϕ , allora otteniamo:

$$\delta\phi = i\alpha\phi \quad (1.6.9)$$

dunque, la corrente sarebbe:

$$j^\mu = i\bar{\phi} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \quad (1.6.10)$$

$$= -i\partial^\mu \bar{\phi}\phi + i\partial^\mu \phi\bar{\phi} \quad (1.6.11)$$

e la carica:

$$Q = \int d^3x j^0 \quad (1.6.12)$$

$$= i \int d^3x (\bar{\phi}\dot{\phi} - \dot{\bar{\phi}}\phi). \quad (1.6.13)$$

Se consideriamo una teoria interagente con:

$$\mathcal{L}_{int} = -g\sigma\bar{\phi}\phi \quad (1.6.14)$$

$$\mathcal{H}_{int} = g\sigma\bar{\phi}\phi \quad (1.6.15)$$

quindi con 3 gambe in ogni vertice, possiamo identificare ϕ con il nucleone (linea continua con freccia) e σ con il pione (linea tratteggiata). Ricordiamo che per l'espansione in serie di Gell-Mann-Low, in ogni vertice ho un termine abbiamo un termine $(-ig)$. Scriviamo:

$$\exp\left\{-i \int d^4x \mathcal{H}_{int}\right\} = \sum \frac{1}{n!} \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_{int}\right)^n \quad (1.6.16)$$

$$= \sum \frac{1}{n!} \left(-ig \int d^4x \sigma\bar{\phi}\phi\right)^n \quad (1.6.17)$$

da notare poi che il fattore $1/n!$ viene sempre cancellato dai modi equivalenti di scambiare i vertici tra di loro, inoltre, per la teoria di Yukawa non abbiamo fattori di simmetria per i diagrammi, questo perché i campi in gioco non possono essere scambiati tra loro.

Alcuni esempi di interazioni sono:³

³I termini di ordine dispari sono nulli perché abbiamo un numero dispari di campi, e la C sta ad indicare il fatto che escludiamo i diagrammi con le bolle di vuoto.

- *Primo esempio*, raffigurato in figura 1.1a è:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T[\bar{\phi}_1 \phi_2 \bar{\phi}_3 \phi_4] | \Omega \rangle &= \langle 0 | T[\bar{\phi}_1 \phi_2 \bar{\phi}_3 \phi_4] | 0 \rangle_C + \\ &+ (-ig)^2 \int d^4z d^4w \langle 0 | T[\bar{\phi}_1 \phi_2 \bar{\phi}_3 \phi_4 \sigma(z) \phi(z) \bar{\phi}(z) \sigma(w) \phi(w) \bar{\phi}(w)] | 0 \rangle_C + \dots \end{aligned} \quad (1.6.18)$$

- *Secondo esempio*, raffigurato in figura 1.1b è:

$$\text{bra} \Omega T[\bar{\phi}_1 \phi_2 \sigma_3 \sigma_4] | \Omega \rangle = \langle 0 | T[\bar{\phi}_1 \phi_2 \sigma_3 \sigma_4] | 0 \rangle_C + \dots \quad (1.6.19)$$

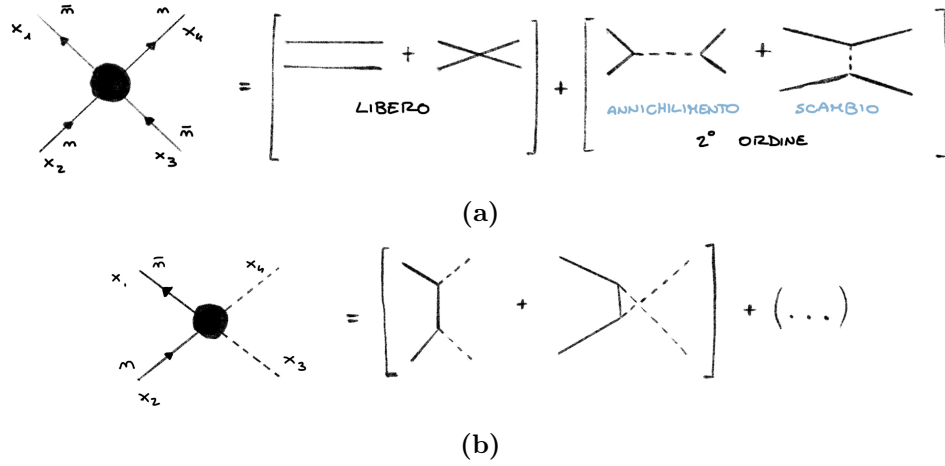


Figure 1.1: Esempi interazioni teoria $\sigma\bar{\phi}\phi$.

I diagrammi di Feynman che entrano nella definizione della matrice S (ampiezza di probabilità) sono quelli a cui vengono amputate le gambe esterne, ovvero, quelli a cui stiamo eliminando i poli della funzione di Green, ovvero stiamo trovando l'ampiezza di probabilità (on-shell) come il residuo della funzione di Green.

Da notare che per tutti i diagrammi al tree-level senza gambe esterne, si ha un fattore di simmetria finale $s = 1$.

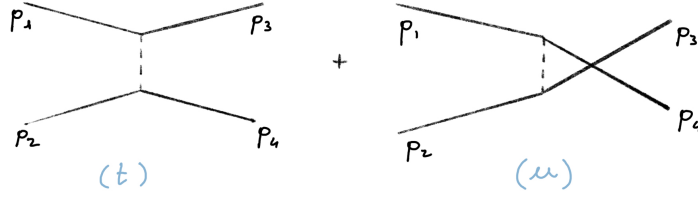
Proviamo a studiare l'ampiezza di probabilità per un processo di scambio, raffigurato in figura 1.2.

Scriviamo:

$$iT = (ig)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \mu^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k - p_3) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - k - p_4) \quad (1.6.20)$$

$$= -\frac{ig^2}{t - \mu^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (1.6.21)$$

$$= M_t \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (1.6.22)$$

**Figure 1.2:** Processo di scambio

ovvero:

$$M_t = -\frac{ig^2}{t - \mu^2}. \quad (1.6.23)$$

Se scambiamo p_3 e p_4 abbiamo:

$$iT = -\frac{ig^2}{u - \mu^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (1.6.24)$$

ovvero:

$$M_u = -\frac{ig^2}{u - \mu^2}. \quad (1.6.25)$$

Se vogliamo ritrovare la probabilità, prima sommiamo le ampiezze e poi ne facciamo il quadrato (altrimenti perdiamo i termini di interferenza); inoltre per calcolare l'ampiezza di probabilità dobbiamo prendere il residuo considerando particelle on-shell e ignorando le gambe esterne. In sintesi:

$$|M_{tot}|^2 = |M_u + M_t|^2 \quad (1.6.26)$$

$$= |M_u|^2 + |M_t|^2 + 2 \operatorname{Re}\{M_u M_t^\dagger\} \quad (1.6.27)$$

da notare che in questo caso i diagrammi hanno tutti segno positivo perché abbiamo solo scalari (quando avremo anche i fermioni potremmo avere dei segni relativi).

1.6.1 Caso non relativistico

Osserviamo che:

$$(p^\mu - p'^\mu)^2 = (p^0 - p'^0)^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 \quad (1.6.28)$$

ma nel limite non relativistico abbiamo che $p^0 = p'^0$ e dunque:

$$M = -\frac{ig^2}{(p_1 - p_3)^2 - \mu^2} \approx \frac{ig^2}{|\vec{p}_1 - \vec{p}_3|^2 + \mu^2} = \frac{ig^2}{|\vec{q}|^2 + \mu^2}. \quad (1.6.29)$$

Se siamo nel limite non relativistico vale l'approssimazione di Born:

$$\tilde{V}(q) = |M| = \frac{g^2}{|\vec{q}|^2 + \mu^2} \quad (1.6.30)$$

ovvero che il modulo di M è la trasformata di Fourier del potenziale. Dunque troviamo:

$$V(x) = g^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2 + \mu^2} \quad (1.6.31)$$

$$= \frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \int_0^\infty dq q^2 \frac{e^{-irq \cos \theta}}{q^2 + \mu^2} \quad (1.6.32)$$

$$= \frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 + \mu^2} \left(\frac{e^{-irq}}{-irq} - \frac{e^{irq}}{-irq} \right) \quad (1.6.33)$$

$$= \frac{g^2}{ir(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \frac{q}{q^2 + \mu^2} (e^{irq} - e^{-irq}) \quad (1.6.34)$$

$$= \frac{g^2}{ir(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q e^{irq}}{q^2 + \mu^2} \quad (1.6.35)$$

in cui abbiamo indicato $r = |\vec{x}|$ e $q = |\vec{q}|$, arrivati a questo punto possiamo deformare il cammino ed utilizzare il lemma di Jordan:

$$V(x) = \frac{g^2}{r(2\pi)^2} \text{Res} \left\{ \frac{q e^{irq}}{q^2 + \mu^2} \right\}_{q=i\mu} \quad (1.6.36)$$

$$= \frac{g^2}{4\pi r} e^{-\mu r} \quad (1.6.37)$$

che è il potenziale di Yukawa; quindi, g rappresenta per i nucleoni l'equivalente della carica elettrica, inoltre è un potenziale a corto raggio per particelle massive (è una sorta di generalizzazione del potenziale coulombiano).

Chapter 2

Campo spinoriale

2.1 LSZ

L'equazione del moto per la teoria interagente è:

$$(i\not{D} - m_0)\psi = j_0 \quad (2.1.1)$$

che è leggermente diversa al caso della teoria libera in cui avevamo:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_0(i\not{D} - m)\psi_0 \quad ; \quad (i\not{D} - m)\psi_0 = 0. \quad (2.1.2)$$

Possiamo porre:

$$j = j_0 + (m - m_0)\psi \quad (2.1.3)$$

in modo da poter riscrivere l'equazione del moto (2.1.1) come:

$$(\not{D} - m)\psi = j \quad (2.1.4)$$

la cui soluzione si trova usando la soluzione dell'omogenea, ossia il campo libero (??), e la funzione di Green, che è il propagatore:

$$\psi(x) = \sqrt{Z} \psi_0 + \int d^4x S_{rel}(x - y) j(y) \quad (2.1.5)$$

in cui il fattore $\sqrt{Z}$ tiene conto dell'autointerazione.

Quindi, scelti due stati normalizzati, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \alpha | \psi | \beta \rangle = \sqrt{Z} \langle \alpha | \psi_{in} | \beta \rangle \quad (2.1.6)$$

e analogamente:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \alpha | \psi | \beta \rangle = \sqrt{Z} \langle \alpha | \psi_{out} | \beta \rangle \quad (2.1.7)$$

dove abbiamo indicato con ψ_{in} e ψ_{out} i campi liberi iniziali e finali in cui abbiamo solo l'autointerazione; inoltre, le ψ rappresentano pacchetti d'onda.

Vogliamo studiare:

$$S_{\alpha\beta} = \langle \beta | \alpha \rangle \quad (2.1.8)$$

esplicitiamo la presenza di una particella con momento p ed elicità s :

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha, (p, s)\rangle \quad (2.1.9)$$

per far ciò abbiamo bisogno di esprimere gli operatori di creazione e distruzione in funzione dei campi (relazioni di inversione). Ricordo che abbiamo:

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[b_s(p) u_s(p) e^{-ipx} + d_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ipx} \right] \quad (2.1.10)$$

e che valgono le seguenti relazioni:

$$\bar{u}_s(p) \gamma^\mu u_r(p) = \bar{v}_s(p) \gamma^\mu v_r(p) = 2p^\mu \delta_{sr} \quad (2.1.11)$$

$$\bar{u}_s(p) \gamma^0 v_r(-p) = \bar{v}_s(p) \gamma^0 u_r(-p) = 0. \quad (2.1.12)$$

Possiamo svolgere i conti:

$$\int d^3x \bar{u}_r(p) \gamma^0 \psi(x) e^{ipx} = \quad (2.1.13)$$

$$= \int d^3x \bar{u}_r(p) \gamma^0 \left(\sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \left[b_s(q) u_s(q) e^{-iqx} + d_s^\dagger(q) v_s(q) e^{iqx} \right] \right) e^{ipx} \quad (2.1.14)$$

$$= \sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \int d^3x \left\{ \bar{u}_r(p) \gamma^0 \left[b_s(q) u_s(q) e^{-iqx} + d_s^\dagger(q) v_s(q) e^{iqx} \right] \right\} \quad (2.1.15)$$

$$= \sum_s \int \frac{d^3q}{2E_q} \bar{u}_r(p) \gamma^0 \left[u_s(q) b_s(q) e^{-i(E_q - E_p)t} \delta^3(q - p) + v_s(q) d_s^\dagger(q) e^{i(E_q + E_p)t} \delta^3(q + p) \right] \quad (2.1.16)$$

$$= \sum_s \frac{1}{2E_p} \left[\bar{u}_r(p) \gamma^0 u_s(p) b_s(p) + \bar{u}_s(p) \gamma^0 v_s(-p) d_s^\dagger(-p) e^{i(2E_p)x} \right] \quad (2.1.17)$$

$$= \hat{b}_r(p) \quad (2.1.18)$$

analogamente possiamo vedere:

$$\int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 v_r(p) e^{ipx} = \quad (2.1.19)$$

$$= \int d^3x \left(\sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \left[b_s^\dagger(q) \bar{u}_s(q) e^{iqx} + d_s(q) \bar{v}_s(q) e^{-iqx} \right] \right) \gamma^0 v_r(p) e^{ipx} \quad (2.1.20)$$

$$= \sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \int d^3x \left[b_s^\dagger(q) \bar{u}_s(q) e^{iqx} + d_s(q) \bar{v}_s(q) e^{-iqx} \right] \gamma^0 v_r(p) \quad (2.1.21)$$

$$= \sum_s \frac{1}{2E_q} \left[b_s^\dagger(-p) \bar{u}_s(-p) e^{-i(2E_p)x} + d_s(p) \bar{v}_s(p) \right] \gamma^0 v_r(p) \quad (2.1.22)$$

$$= \hat{d}_r(p). \quad (2.1.23)$$

Dunque abbiamo trovato per le particelle:

$$\hat{b}(p, s) = \int d^3x \bar{u}_s(p) \gamma^0 \psi_0(x) e^{ipx} \quad (2.1.24)$$

$$\hat{b}^\dagger(p, s) = \int d^3x \bar{\psi}_0(x) \gamma^0 u_s(p) e^{-ipx} \quad (2.1.25)$$

e per le anti-particelle:

$$\hat{d}(p, s) = \int d^3x \bar{\psi}_0(x) \gamma^0 v_r(p) e^{ipx} \quad (2.1.26)$$

$$\hat{d}^\dagger(p, s) = \int d^3x \bar{v}_r(p) \gamma^0 \psi_0(x) e^{-ipx}. \quad (2.1.27)$$

Tornando al nostro problema iniziale (2.1.8) possiamo considerare una particella nello stato iniziale $|\alpha\rangle$ ed ignorare il forward-scattering, e calcolare:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \beta | b_{in}^\dagger(p, s) | \tilde{\alpha} \rangle \quad (2.1.28)$$

$$= \langle \beta | b_{in}^\dagger(p, s) - b_{out}^\dagger(p, s) | \tilde{\alpha} \rangle \quad (2.1.29)$$

$$= \langle \beta | \int d^3x \left[\bar{\psi}_{in}(x) - \bar{\psi}_{out}(x) \right] \gamma^0 u_s(p) e^{-ipx} | \tilde{\alpha} \rangle \quad (2.1.30)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3x \langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle \gamma^0 u_s(p) e^{-ipx} \quad (2.1.31)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{Z}} \int d^4x \partial_t \left[\langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle \gamma^0 u_s(p) e^{-ipx} \right] \quad (2.1.32)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[i \left(\partial_t \langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle \right) \gamma^0 u_s(p) e^{-ipx} + i \langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle \gamma^0 u_s(p) \partial_t e^{-ipx} \right] \quad (2.1.33)$$

possiamo ricordare che valgono (??), in particolare la prima, che ci permette di scrivere:

$$i\gamma^0 \partial_0 e^{-ipx} u_s(p) = \gamma^0 p_0 e^{-ipx} u_s(p) \quad (2.1.34)$$

$$= -(\gamma^i p_i - m) e^{-ipx} u_s(p) \quad (2.1.35)$$

$$= -(i\gamma^i \partial_i - m) e^{-ipx} u_s(p) \quad (2.1.36)$$

e dunque possiamo riprendere i nostri conti:

$$\begin{aligned} \langle \beta | \alpha \rangle &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[i \langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle \gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 u_s(p) e^{-ipx} - \right. \\ &\quad \left. - \langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle (i\gamma^i \partial_i - m) e^{-ipx} u_s(p) \right] \end{aligned} \quad (2.1.37)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle (i\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 + i\gamma^i \overleftarrow{\partial}_i + m) u_s(p) e^{-ipx} \right] \quad (2.1.38)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\langle \beta | \bar{\psi}(x) | \tilde{\alpha} \rangle (i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) u_s(p) e^{-ipx} \right]. \quad (2.1.39)$$

Possiamo fare il conto analogo per l'antiparticella iniziale:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \left\langle \tilde{\beta} \left| d_{in}^\dagger(p, s) \right| \alpha \right\rangle \quad (2.1.40)$$

$$= \left\langle \tilde{\beta} \left| d_{in}^\dagger(p, s) - d_{out}^\dagger(p, s) \right| \alpha \right\rangle \quad (2.1.41)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3x \bar{v}_r(p) \gamma^0 \left\langle \tilde{\beta} \left| \psi(x) \right| \alpha \right\rangle e^{-ipx} \quad (2.1.42)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\bar{v}_r(p) \gamma^0 \partial_t \left(\left\langle \tilde{\beta} \left| \psi(x) \right| \alpha \right\rangle \right) e^{-ipx} + \right. \\ &\quad \left. + \bar{v}_r(p) \gamma^0 \left\langle \tilde{\beta} \left| \psi(x) \right| \alpha \right\rangle \partial_t e^{-ipx} \right] \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

a questo punto possiamo riusare la relazione (??) per scrivere:

$$\bar{v}_r(p) \gamma^0 \partial_0 e^{-ipx} = -i\bar{v}_r(p) \gamma^0 p_0 e^{-ipx} \quad (2.1.44)$$

$$= i\bar{v}_r(p) (\gamma^i p_i + m) e^{-ipx} \quad (2.1.45)$$

$$= i\bar{v}_r(p) (i\gamma^i \partial_i + m) e^{-ipx} \quad (2.1.46)$$

che ci fa arrivare a:

$$\begin{aligned} \langle \beta | \alpha \rangle &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\bar{v}_r(p) (i\gamma^0 \partial_0) \left(\left\langle \tilde{\beta} \left| \psi(x) \right| \alpha \right\rangle \right) e^{-ipx} - \right. \\ &\quad \left. - (\bar{v}_r(p) (i\gamma^i \partial_i + m) e^{-ipx}) \left\langle \tilde{\beta} \left| \psi(x) \right| \alpha \right\rangle \right] \end{aligned} \quad (2.1.47)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-ipx} \bar{v}_r(p) (i\overrightarrow{\not{\partial}} - m) \left\langle \tilde{\beta} \left| \psi(x) \right| \alpha \right\rangle \right] \quad (2.1.48)$$

e possiamo vedere che il risultato finale è analogo al caso di particella (2.1.39), ma con un segno opposto sul termine di derivata.

Ovviamente dovremmo calcolare anche tutte le altre componenti, ma i conti sono analogi e i risultati complessivi sono:

$$\begin{cases} \langle \beta | b_{in}^\dagger(p, s) | \alpha \rangle = +\frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\langle \beta | \bar{\psi} | \alpha \rangle (i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) u_s(p) e^{-ipx} \right] \\ \langle \beta | b_{out}(p, s) | \alpha \rangle = -\frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{+ipx} \bar{u}_s(p) (i \overrightarrow{\not{\partial}} - m) \langle \beta | \psi | \alpha \rangle \right] \\ \langle \beta | d_{in}^\dagger(p, s) | \alpha \rangle = +\frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-ipx} \bar{v}_s(p) (i \overleftarrow{\not{\partial}} - m) \langle \beta | \psi | \alpha \rangle \right] \\ \langle \beta | d_{out}(p, s) | \alpha \rangle = -\frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\langle \beta | \bar{\psi} | \alpha \rangle (i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) v_s(p) e^{+ipx} \right]. \end{cases} \quad (2.1.49)$$

Se estraiamo una particella dopo aver già estratto $n+m$ campi, ignorando come sempre il forward scattering, possiamo inserire un fattore $(-1)^{m+n}$ che si semplifica per gli scambi:

$$\langle \beta | T[\psi_{\alpha_1}(y_1) \dots \psi_{\alpha_n} \bar{\psi}_{\beta_1}(z_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_m}(z_m)] b_{in}^\dagger | \alpha \rangle = \quad (2.1.50)$$

$$= \langle \beta | T[\psi \dots \bar{\psi}] b_{in}^\dagger | \alpha \rangle - (-1)^{m+n} \langle \beta | b_{out}^\dagger T[\psi \dots \bar{\psi}] | \alpha \rangle \quad (2.1.51)$$

$$= \langle \beta | T[\psi \dots \bar{\psi}] (b_{in}^\dagger - b_{out}^\dagger) | \alpha \rangle. \quad (2.1.52)$$

Infatti, facendo passare $b_{out}^\dagger$ attraverso tutti i campi esso prende un segno $(-1)^{m+n}$, che si compensa con il segno scelto, dopodiché facciamo gli stessi passaggi di prima.

Supponendo di avere n particelle ed m antiparticelle nello stato iniziale $|\alpha\rangle$ e di avere s particelle e t antiparticelle nello stato finale $\langle \beta |$, si ha che:

$$\langle \beta_{(s,t)} | \alpha_{(n,m)} \rangle = \langle \Omega | [(b_1 \dots b_s)(d_1 \dots d_t)]_{out} [(b_1^\dagger \dots b_n^\dagger)(d_1^\dagger \dots d_m^\dagger)]_{in} | \Omega \rangle \quad (2.1.53)$$

che per come abbiamo scritto le (2.1.49) possiamo riordinarle come segue:

$$\langle \beta_{(s,t)} | \alpha_{(n,m)} \rangle = \langle \Omega | (d_1^\dagger \dots d_m^\dagger)_{in} (b_1^\dagger \dots b_s^\dagger)_{out} (b_1^\dagger \dots b_n^\dagger)_{in} (d_1^\dagger \dots d_t^\dagger)_{out} | \Omega \rangle. \quad (2.1.54)$$

Osserviamo che se t è pari allora possiamo spostare $(d_1^\dagger \dots d_t^\dagger)_{out}$ a destra senza problemi, mentre se è dispari verrà fuori un fattore $(-1)^{m+n}$, analogamente per spostare $(d_1^\dagger \dots d_m^\dagger)_{in}$ ottengo un fattore $(-1)^{n+s}$. Ora espliciti-

amo i vari pezzetti:

$$\begin{aligned}
\langle \beta_{(s,t)} | \alpha_{(n,m)} \rangle &= (-1)^{m+s} \langle \Omega | (d_1^\dagger \dots d_m^\dagger)_{in} (b_1^\dagger \dots b_s^\dagger)_{out} (b_1^\dagger \dots b_n^\dagger)_{in} (d_1^\dagger \dots d_t^\dagger)_{out} | \Omega \rangle = \\
&= (-1)^{m+t} \left(\frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^{n+m+s+t} \left\{ \prod_{j=1}^m \int d^4 x_j e^{-i p_j x_j} \bar{v}_s(p_j) (i \vec{\not{\partial}}_j - m) \right\} \times \\
&\quad \times \left\{ \prod_{k=1}^s \int d^4 x_k e^{+i p_k x_k} \bar{u}_s(p_k) (i \vec{\not{\partial}}_k - m) \right\} \times \langle \Omega | \psi_j \psi_k \bar{\psi}_i \bar{\psi}_l | \Omega \rangle \times \\
&\quad \times \left\{ \prod_{j=1}^n \int d^4 x_i (i \vec{\not{\partial}}_i + m) u_s(p_i) e^{-i p_i x_i} \right\} \left\{ \prod_{l=1}^t \int d^4 x_l (i \vec{\not{\partial}}_l + m) v_s(p_l) e^{+i p_l x_l} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.1.55}$$

Notiamo, e teniamo a mente, che non è segnato esplicitamente, ma gli elementi con la stessa sommatoria hanno indici spinoriali legati, nell'ordine in cui i vari elementi sono scritti:

$$\begin{aligned}
(\dots) \bar{u}_{\gamma_1}(z_1) (\dots) (i \vec{\not{\partial}} - m)_{\gamma_1 c_1} (\dots) \langle 0 | T[\psi_{c_1}(z_1) (\dots) \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) (\dots)] | 0 \rangle \times \\
\times (i \vec{\not{\partial}} + m)_{\alpha_1 \alpha_1} (\dots) u_{\alpha_1}(x_1) (\dots)
\end{aligned}$$

in cui gli indici $(\alpha_1, \gamma_1, \dots)$ rappresentano gli indici del prodotto tra gli spinori.

Usando lo stesso abuso di notazione che abbiamo osservato per il caso scalare (ovvero utilizziamo G sia per indicare la funzione di Green, sia la funzione di Green amputata), possiamo scrivere la definizione delle funzioni di Grenn:

$$G = \bar{v}_j \bar{u}_k \langle \Omega | T[\psi_j \psi_k \bar{\psi}_i \bar{\psi}_l] | \Omega \rangle u_i v_l \tag{2.1.56}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G} &= \left\{ \prod_{j=1}^m \int d^4 x_j e^{-i p_j x_j} \right\} \left\{ \prod_{k=1}^s \int d^4 x_k e^{+i p_k x_k} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{-i p_i x_i} \right\} \times \\
&\quad \times \left\{ \prod_{l=1}^t \int d^4 x_l e^{+i p_l x_l} \right\} G
\end{aligned} \tag{2.1.57}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{n+t} (\sqrt{Z})^{n+m+s+t} \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{i}{\not{p}_j - m} \right\} \left\{ \prod_{k=1}^s \frac{i}{\not{p}_k + m} \right\} \times \\
&\quad \times \left\{ \prod_{i=1}^n \frac{i}{\not{p}_i + m} \right\} \left\{ \prod_{l=1}^t \frac{i}{\not{p}_l - m} \right\} \langle \beta_{(s,t)} | \alpha_{(n,m)} \rangle
\end{aligned} \tag{2.1.58}$$

che troviamo grazie alla formula LSZ. La funzione di correlazione/Green amputata si ottiene eliminando i propagatori delle gambe esterne dalla funzione di Green nello spazio dei momenti:

$$\tilde{G}^{(n)} = \tilde{G}_A^{(n)} \prod_{i=1}^n \Delta_F(p_i). \quad (2.1.59)$$

Chapter 3

Campo vettoriale

3.1 Esempio annichilazione di fermioni

I riferimenti sono p. 131-136 del Peskin e Schroeder Science is not a collection of truths. It is a continuing exploration of mysteries. Peskin.

Consideriamo la QED, dunque una lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu \quad (3.1.1)$$

e studiamo il processo:

$$e^- + e^+ \longrightarrow \mu^- + \mu^+$$

in cui abbiamo solo il canale s e siccome $m_\mu \approx 200 m_e$ trascuriamo solo la massa dell'elettrone. Il processo lo possiamo vedere in figura 3.1.

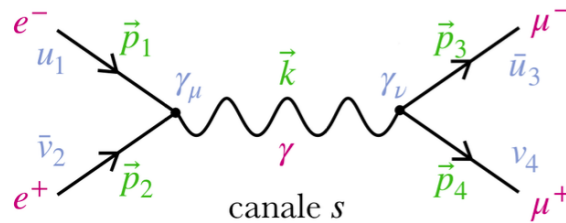


Figure 3.1: Raffigurazione canale s processo $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$.

Utilizziamo le regole di Feynman per la QED per scrivere l'elemento di

matrice S ridotta:

$$M (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \quad (3.1.2)$$

$$= \left[\bar{v}(p_2) (-ie \gamma_\mu) u(p_1) \right] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i\eta^{\mu\nu}}{k^4} \left[\bar{u}(p_3) (-ie \gamma_\nu) v(p_4) \right] \times \\ \times (2\pi)^4 \delta(k - p_3 - p_4) (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k) \quad (3.1.3)$$

$$= \frac{-ie^2}{(p_1 + p_2)^2} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \quad (3.1.4)$$

Dunque abbiamo:

$$M = M_s = \frac{-ie^2}{s} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) \quad (3.1.5)$$

e possiamo procedere con il calcolo della sezione d'urto non polarizzata mediando sulle polarizzazioni iniziali e sommando su quelle finali:

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spin} |M_s|^2 \quad (3.1.6)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spin} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) (\bar{v}_4 \cdot \gamma^\nu \cdot u_3) (\bar{u}_1 \cdot \gamma_\nu \cdot v_2) \quad (3.1.7)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}_2 - m_e) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{p}_3 + m_\mu) \gamma^\nu (\not{p}_4 - m_\mu) \right\} \quad (3.1.8)$$

ad alte energie $m_e \approx 0$

$$\approx \frac{e^4}{4s^2} p_1^\alpha p_2^\beta p_{3,\rho} p_{4,\sigma} \times \\ \times \text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \} \text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma - m_\mu^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \} \quad (3.1.9)$$

$$= \frac{4e^4}{s^2} p_1^\alpha p_2^\beta p_{3,\rho} p_{4,\sigma} [\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}] \times \\ \times [\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - m_\mu^2 \eta^{\mu\nu}] \quad (3.1.10)$$

$$= \frac{8e^4}{s^2} [(p_1 \cdot p_3) (p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) + m_\mu^2 (p_1 \cdot p_2)] \quad (3.1.11)$$

ora, notando che nel sistema di riferimento del centro di massa, con $m_e \approx 0$, abbiamo:

$$\begin{cases} p_1 = (E, E\hat{z}) & ; & p_2 = (E, -E\hat{z}) \\ p_3 = (E, \vec{k}) & ; & p_4 = (E, -\vec{k}) \end{cases} \quad (3.1.12)$$

in cui:

$$\vec{k} \cdot \hat{z} = |\vec{k}| \cos \theta = \sqrt{E^2 - m_\mu^2} \cos \theta \quad (3.1.13)$$

allora continuando i conti:

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{8e^4}{(2E)^4} \left[\left(E^2 - E \sqrt{E^2 - m_\mu^2} \cos \theta \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(E^2 + E \sqrt{E^2 - m_\mu^2} \cos \theta \right)^2 + 2 E^2 m_\mu^2 \right] \quad (3.1.14)$$

$$= \frac{e^4}{2} \left[\left(1 - \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \cos \theta \right)^2 + \left(1 + \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \cos \theta \right)^2 + 2 \frac{m_\mu^2}{E^2} \right] \quad (3.1.15)$$

$$= e^4 \left[1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right]. \quad (3.1.16)$$

Calcoliamo anche la sezione d'urto:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{|\vec{p}_3| E_{cm}}{E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{|\mathcal{M}|^2}{64 \pi^2 E_{cm}^2} \quad (3.1.17)$$

osserviamo che:

$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right| = 2 \quad (3.1.18)$$

dunque:

$$\frac{|\vec{p}_3| E_{cm}}{E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} = \frac{\sqrt{E^2 - m_\mu^2} \cdot 2 E}{2 \cdot E^2} = \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \quad (3.1.19)$$

per semplicità possiamo porre $a = m_\mu^2/E^2$, $x = \cos \theta$ e calcolare la sezione d'urto totale:

$$\sigma_{cm} = \frac{e^4}{64 \pi^2 E_{cm}^2} \int d\Omega \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right] \quad (3.1.20)$$

$$= \frac{e^4}{32 \pi E_{cm}^2} \int_{-1}^{+1} dx \sqrt{1 - a} \left[1 + a + (1 - a) x^2 \right] \quad (3.1.21)$$

$$= \frac{e^4}{32 \pi E_{cm}^2} \sqrt{1 - a} \left[2(1 + a) + \frac{2}{3} (1 - a) \right] \quad (3.1.22)$$

$$= \frac{e^4}{12 \pi E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \quad (3.1.23)$$

$$= \frac{4\pi \alpha^2}{3 E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2} \right). \quad (3.1.24)$$

Se avessimo trascurato tutte le masse avremmo ottenuto:

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{2e^4}{s^2} (t^2 + u^2) \quad (3.1.25)$$

tramite la simmetria di crossing possiamo studiare:

$$e^- + \mu^- \longrightarrow e^- + \mu^-$$

da cui otteniamo:

$$|\mathcal{M}_t|^2 = \frac{2e^4}{t^2} (s^2 + u^2). \quad (3.1.26)$$

Se avessimo studiato:

$$e^- + e^- \longrightarrow e^- + e^-$$

allora avremmo avuto anche il canale u , oltre il canale t , questo perché le particelle finali sono identiche, per cui possiamo scambiare gli impulsi e dobbiamo studiare:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spin} |M_t + M_u|^2 \quad (3.1.27)$$

$$= |\mathcal{M}_t|^2 + |\mathcal{M}_u|^2 + \frac{1}{4} \sum_{spin} 2 \operatorname{Re} \{ M_t M_u^\dagger \}. \quad (3.1.28)$$

3.2 Esempio del Bhabha scattering

I riferimenti sono p. 355 es. 59.2 dello Srednicki Science is not a collection of truths. It is a continuing exploration of mysteries.Srednicki e p. 192 es. 5.2 del Peskin e Schroeder Science is not a collection of truths. It is a continuing exploration of mysteries.Peskin.

Consideriamo la QED con la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu \quad (3.2.1)$$

e studiamo il processo:

$$e^- + e^+ \longrightarrow e^- + e^+$$

in cui abbiamo sia il canale s (di annichilazione) che il canale t (di scambio), raffigurati in figura 3.2.

A noi interessa riordinare gli elementi che troviamo nella matrice S come $\psi \bar{\psi}$, formando il propagatore $S_F(x-y) = \langle 0 | T[\psi(x) \bar{\psi}] | 0 \rangle$, ma per fare questo dobbiamo ricordarci:

$$\{\psi, \psi\} = \{\bar{\psi}, \bar{\psi}\} = 0 \quad (3.2.2)$$

$$\{\psi(t, \vec{x}), \bar{\psi}(t, \vec{y})\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.2.3)$$

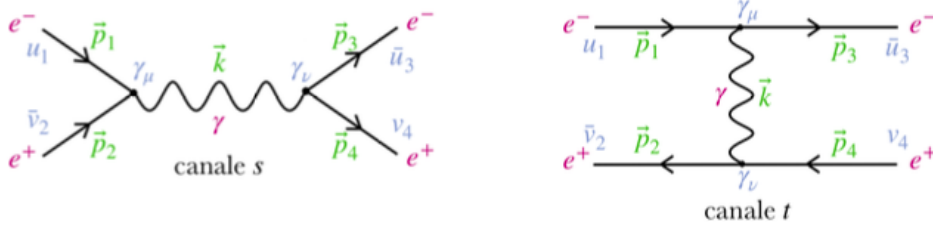


Figure 3.2: Rappresentazione canale s e t processo $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$.

Contraendo troviamo un segno relativo e l'elemento di matrice S ridotta complessivo è dato da $M = M_s - M_t$:

$$M_s = [\bar{v}(p_2) (-ie \gamma_\mu) u(p_1)] \frac{i \eta^{\mu\nu}}{k^2} [\bar{u}(p_3) (-ie \gamma_\nu) v(p_4)] \quad (3.2.4)$$

$$= \frac{-ie^2}{s} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) \quad (3.2.5)$$

$$M_t = [\bar{u}(p_3) (-ie \gamma_\mu) u(p_1)] \frac{i \eta^{\mu\nu}}{k^2} [\bar{v}(p_2) (-ie \gamma_\nu) v(p_4)] \quad (3.2.6)$$

$$= \frac{-ie^2}{t} (\bar{u}_3 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{v}_2 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4). \quad (3.2.7)$$

Mediamo sulle polarizzazioni iniziali e sommiamo su quelle finali:

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spin} |M_s|^2 \quad (3.2.8)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spin} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) (\bar{v}_4 \cdot \gamma^\nu \cdot u_3) (\bar{u}_1 \cdot \gamma_\nu \cdot v_2) \quad (3.2.9)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spin} \left[(\bar{v}_2)_\alpha (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (u_1)_\beta \cdot (\bar{u}_1)_\gamma (\gamma_\nu)_{\gamma\delta} (v_2)_\delta \right] \times \\ \times \left[(\bar{u}_3)_\rho (\gamma^\mu)_{\rho\sigma} (v_4)_\sigma \cdot (\bar{v}_4)_\tau (\gamma^\nu)_{\tau\epsilon} (u_3)_\epsilon \right] \quad (3.2.10)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spin} \left[(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\not{p}_1 + m_e)_{\beta\gamma} (\gamma_\nu)_{\gamma\delta} (\not{p}_2 - m_e)_{\delta\alpha} \right] \times \\ \times \left[(\gamma^\mu)_{\rho\sigma} (\not{p}_4 - m_e)_{\sigma\tau} (\gamma^\nu)_{\tau\epsilon} (\not{p}_3 + m_e)_{\epsilon\rho} \right] \quad (3.2.11)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}_2 - m_e) \right\} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{p}_3 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_4 - m_e) \right\} \quad (3.2.12)$$

alle alte energie $m_e \approx 0$

$$\approx \frac{e^4}{4s^2} p_1^\alpha p_2^\beta p_{3,\rho} p_{4,\sigma} \text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \} \text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \} \quad (3.2.13)$$

$$= \frac{4e^2}{s^2} p_1^\alpha p_2^\beta p_{3,\rho} p_{4,\sigma} \left[\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \right] \times \\ \times \left[\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \right] \quad (3.2.14)$$

$$= \frac{8e^4}{s^2} \left[(p_1 \cdot p_3) (p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) \right] \quad (3.2.15)$$

$$= \frac{2e^4}{s^2} (t^2 + u^2). \quad (3.2.16)$$

Possiamo ricavare il canale t usando la simmetria di crossing:

$$|\mathcal{M}_t|^2 = \frac{2e^4}{t^2} (s^2 + u^2). \quad (3.2.17)$$

Studiamo ora il termine misto:

$$|\mathcal{M}_{st}| = \frac{1}{4} \sum_{spin} \text{Re} \left\{ M_s M_t^\dagger \right\} \quad (3.2.18)$$

$$= \frac{e^4}{4 s t} \sum_{spin} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) (\bar{v}_4 \cdot \gamma^\nu \cdot v_2) (\bar{u}_1 \cdot \gamma_\nu \cdot u_3) \quad (3.2.19)$$

$$= \frac{e^4}{4 s t} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}_3 + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_4 - m_e) \gamma^\nu (\not{p}_2 - m_e) \right\} \quad (3.2.20)$$

alle alte energie $m_e \approx 0$

$$= \frac{e^4}{4 s t} p_{1,\alpha} p_{3,\beta} p_{4,\rho} p_{2,\sigma} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \right\} \quad (3.2.21)$$

dobbiamo a questo punto ricordarci delle relazioni per le matrici γ , che puoi non solo vedere nell'Appendice ??, ma soprattutto nelle note del corso di *Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi*. Vediamo infatti:

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu = 4 \eta^{\alpha\beta} \quad , \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2 \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \quad (3.2.22)$$

per cui abbiamo:

$$\text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \gamma^\alpha (\gamma_\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu) \gamma^\sigma \right\} = -2 \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \gamma^\alpha (\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\beta) \gamma^\sigma \right\} \quad (3.2.23)$$

$$= -8 \eta^{\alpha\rho} \text{Tr} \left\{ \gamma^\beta \gamma^\sigma \right\} \quad (3.2.24)$$

$$= -32 \eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\sigma}. \quad (3.2.25)$$

Tornando ai nostri conti:

$$|\mathcal{M}_{st}| = -\frac{8e^4}{s t} (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) \quad (3.2.26)$$

$$= -\frac{2e^4}{s t} u^2. \quad (3.2.27)$$

Complessivamente abbiamo:

$$|\mathcal{M}_{tot}|^2 = |\mathcal{M}_s|^2 + |\mathcal{M}_t|^2 - 2|\mathcal{M}_{st}|^2 \quad (3.2.28)$$

$$= 2 e^4 \left[\frac{t^2}{s^2} + \frac{s^2}{t^2} + u^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right)^2 \right]. \quad (3.2.29)$$

Se avessimo studiato il processo:

$$e^- + e^- \longrightarrow e^- + e^-$$

avremmo avuto due diagrammi di scambio (canale t e canale u) in quanto le particelle degli stati finali sono identiche e quindi possiamo scambiarne gli impulsi.

3.3 Esempio sul segno di un loop di fermioni

Guardando la figura 3.3 scriviamo:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)] | 0 \rangle &= (-ie)^2 \int d^4x d^4y \langle 0 | A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \bar{\psi}(x) \times \\ &\quad \times \not{A}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \not{A}(y) \psi(y) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

$$= -\Delta_{\mu\rho} \Delta_{\nu\sigma} \Delta_1 \Delta_2. \quad (3.3.2)$$

In generale troviamo che un loop con n fotoni esterni che abbia solo fermioni interni ha segno negativo:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[A_{\mu_2}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n)] | 0 \rangle &= (-ie)^2 \int d^4y_1 \dots d^4y_n \times \\ &\quad \times \langle 0 | A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) \bar{\psi}(y_1) \not{A}(y_1) \psi(y_1) \bar{\psi}(y_2) \times \\ &\quad \times \not{A}(y_2) \psi(y_2) \dots \bar{\psi}(y_n) \not{A}(y_n) \psi(y_n) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.3.3)$$



Figure 3.3: Rappresentazione loop di fermioni.

3.4 Osservazione sulla teoria di Yang-Mills

Riprendiamo l'esempio del campo spinoriale ad N componenti, in aggiunta al campo vettoriale, la lagrangiana completa è:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi \quad (3.4.1)$$

in cui ricordiamo (??), inoltre per avere invarianza locale il campo A deve trasformare come:

$$gA_\mu \longrightarrow gA'_\mu = -iU (\partial_\mu U^\dagger) + gU A_\mu U^\dagger. \quad (3.4.2)$$

Se riscriviamo esplicitando i generatori abbiamo in una trasformazione infinitesima e:

$$gA'_\mu = gA_\mu - \partial_\mu \omega^a T^a + i g \omega^a [T^a, A_\mu] \quad (3.4.3)$$

$$= gA_\mu - D_\mu (\omega^a T^a) \quad (3.4.4)$$

$$= gA_\mu + i D_\mu U \quad (3.4.5)$$

dove abbiamo utilizzato la derivata covariante in rappresentazione aggiunta (??). Esplicitando la lagrangiana notiamo che il termine di interazione dato da:

$$\mathcal{L}_{int} = -g \bar{\Psi} (\gamma_\mu A^\mu) \Psi \quad (3.4.6)$$

come in Maxwell.

Se invece consideriamo un campo scalare complesso:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi)^\dagger + m^2 \phi \phi^\dagger \quad (3.4.7)$$

quando richiediamo l'invarianza di fase locale tramite la derivata covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu \quad (3.4.8)$$

otteniamo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (\partial_\mu \phi + iA_\mu \phi) (\partial^\mu \phi + iA^\mu \phi)^\dagger + m^2 \phi \phi^\dagger. \quad (3.4.9)$$

Dunque, abbiamo dei termini di interazioni di tipo derivativo, in cui un campo (A) interagisce con la derivata di un altro campo (ϕ).

Le interazioni derivate non sono rare, ma si trattano meglio usando i path integrals (vedi il capitolo §??).

Chapter 4

Integrali funzionali

4.1 Legame tra path integral e prodotto T-ordinato nel vuoto

L'ampiezza di transizione generica è data da:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int dq_0 dq_f \langle \psi | q_f \rangle \langle q_f | q_0 \rangle \langle q_0 | \phi \rangle \quad (4.1.1)$$

$$= \int dq_0 dq_f \psi^*(q_f) \phi(q_0) \langle q_f | q_0 \rangle \quad (4.1.2)$$

ma a noi interessa studiare il ground state:

$$\langle 0 | 0 \rangle_{f,g} = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow +\infty}} \int dq_0 dq_f \psi^*(q_f) \phi(q_0) \langle q_f t_f | q_0 t_0 \rangle. \quad (4.1.3)$$

Sapendo che $\psi_n(q) = \langle q | n \rangle$ e supponendo $E_0 = 0$, allora il ground state dello stato finale ed iniziale sono:

$$|q_0 t_0\rangle = e^{+\frac{i}{\hbar} H t_0} |q_0\rangle \quad (4.1.4)$$

$$= e^{+\frac{i}{\hbar} H t_0} \sum_{n \geq 0} |n\rangle \langle n | q_0 \rangle \quad (4.1.5)$$

$$= \sum_{n \geq 0} e^{+\frac{i}{\hbar} E_n t_0} \psi_n^*(q_0) |n\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty(1-i\epsilon)} \psi_0^*(q_0) |0\rangle \quad (4.1.6)$$

$$\langle q_f t_f | = \langle q_f | e^{-\frac{i}{\hbar} H t_f} \quad (4.1.7)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar} H t_f} \sum_{n \geq 0} \langle q_f | n \rangle \langle n | \quad (4.1.8)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \langle n | e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t_f} \phi_n(q_f) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | \phi_0(q_f) \quad (4.1.9)$$

possiamo moltiplicare per una funzione d'onda arbitraria $\chi(q_0)$, per cui richiediamo $\langle \chi|0 \rangle \neq 0$, ed integriamo:

$$\int dq_0 \chi(q_0) |q_0 t_0 \rangle \xrightarrow[t \rightarrow -\infty(1-i\epsilon)]{} \int dq_0 \chi(q_0) \psi_0^*(q_0) |0 \rangle = \langle \chi|0 \rangle \langle 0| \quad (4.1.10)$$

se facciamo la stessa cosa per gli stati finali con una funzione d'onda $\xi(q_f)$, allora possiamo scrivere il ground state come (riassorbendo $\chi(q_0)$ e $\xi(q_f)$ nella costante di normalizzazione):

$$\begin{aligned} \langle 0|0 \rangle &= \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow +\infty}} \frac{\text{cost}}{\langle \xi|0 \rangle \langle 0|\chi \rangle} \int dq_0 \dots dq_{N+1} \int dp_0 \dots dp_N \times \\ &\quad \times \chi(q_0) \xi^*(q_f) \exp \left\{ i \int_{t_0}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(q, p)) \right\} \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}_q \int \mathcal{D}_p \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - H(q, p)) \right\} \quad (4.1.12)$$

pertanto, aggiungendo i termini di sorgente, abbiamo:

$$\langle 0|0 \rangle_{f,g} = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H(q, p) + fq + gp) \right\}. \quad (4.1.13)$$

Possiamo supporre:

$$H = H_0 + H_{int} \quad (4.1.14)$$

e per cui:

$$\langle 0|0 \rangle_{f,g} = \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H_0 - H_{int} + fq + gp) \right\} \quad (4.1.15)$$

sviluppando il termine di interazione in serie di potenze:

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt H_{int} \right\} = \sum c_{nm} q^n p^m \quad (4.1.16)$$

dunque abbiamo:

$$\langle 0|0 \rangle_{f,h} = \sum c_{nm} (-i\hbar)^{n+m} \frac{\delta^n}{\delta f^n} \frac{\delta^m}{\delta g^m}. \quad (4.1.17)$$

$$\cdot \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H_0 + fq + gp) \right\} \quad (4.1.18)$$

$$\begin{aligned} &= \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt H_{int} \left(\frac{i\delta}{\hbar \delta f}, \frac{i\delta}{\hbar \delta g} \right) \right\} \times \\ &\quad \times \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H_0 + fq + gp) \right\} \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

se ponessimo $H_{int} \rightarrow \lambda H_{int}$ con λ piccolo, allora potremmo sviluppare perturbativamente il primo termine.

4.2 Spazio delle coordinate

Questo conto lo possiamo fare anche nello spazio delle coordinate, integriamo il primo termine della lagrangiana per parti:

$$\mathcal{L}_J = \mathcal{L}_0 + J\phi = -\frac{1}{2}\phi (\square + m^2) \phi + J\phi \quad (4.2.1)$$

e poi completiamo il quadrato:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_J = -\frac{1}{2} \left[\phi - J (\square + m^2)^{-1} \right] (\square + m^2) \left[\phi - J (\square + m^2)^{-1} \right] + \\ + \frac{1}{2} J (\square + m^2)^{-1} J \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

però possiamo ricordarci che l'inverso di un operatore è la sua funzione di Green:

$$(\square + m^2) \Delta(x-y) = -i\delta^4(x-y) \quad (4.2.3)$$

che abbiamo già calcolato ed è uguale al propagatore (??) e quindi:

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \exp\{i\langle \mathcal{L}_0 + J\phi \rangle\} \quad (4.2.4)$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2} \langle J_x \Delta(x-y) J_y \rangle_{x,y}\right\}. \quad (4.2.5)$$

4.3 Rotazione di Wick

Facendo la *rotazione di Wick*:

$$x_0 = -i\bar{x}_0 \quad (4.3.1)$$

ovviamente tutte le quantità si modificano, ma si può vedere l'Appendice ?? per le relazioni. Notiamo che abbiamo una trasformazione analoga anche per l'impulso:

$$k_0 = -i k_0^E \quad (4.3.2)$$

che implica:

$$k^2 = -k_E^2 \quad (4.3.3)$$

e che:

$$x^\mu p_\mu = Et - \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (4.3.4)$$

$$= (-iE_E) (-i\tau) - \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (4.3.5)$$

$$= -x_\mu^E p_\mu^E \quad (4.3.6)$$

in cui possiamo mettere entrambi gli indici bassi poiché nello spazio euclideo non cambia nulla la posizione degli indici.

Continuiamo i nostri conti:

$$I = iS + i\langle\phi J\rangle \quad (4.3.7)$$

$$= -S_E + \langle\phi J\rangle_E \quad (4.3.8)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x_E \left[-\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2 + 2J\phi \right] \quad (4.3.9)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x_E \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'_E}{(2\pi)^4} \left[(p_\mu p'_\mu - m^2) \tilde{\phi}(p) \phi(p') + \right. \\ \left. + \tilde{\phi}(p) \tilde{J}(p') + \tilde{\phi}(p') \tilde{J}(p) \right] e^{-ix(p+p')} \quad (4.3.10)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \left[- (p_\mu p_\mu + m^2) \tilde{\phi}(p) \phi(-p) + \tilde{\phi}(p) \tilde{J}(-p) + \tilde{\phi}(-p) \tilde{J}(p) \right] \quad (4.3.11)$$

possiamo porre per brevità $\phi(\pm p) = \phi_\pm$, ma anche:

$$K = - (p^2 + m^2) \quad (4.3.12)$$

e cambiamo variabile:

$$\tilde{\phi}(p) \longrightarrow \tilde{\phi}(p) - K^{-1} \tilde{J}(p) \quad (4.3.13)$$

continuando i conti:

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \left\{ K \left[\tilde{\phi}_+ - K^{-1} \tilde{J}_+ \right] \left[\tilde{\phi}_- - K^{-1} \tilde{J}_- \right] + \right. \\ \left. + \left[\tilde{\phi}_+ - K^{-1} \tilde{J}_+ \right] \tilde{J}_- + \left[\tilde{\phi}_- - K^{-1} \tilde{J}_- \right] \tilde{J}_+ \right\} \quad (4.3.14)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \left[K \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(-p) - K^{-1} \tilde{J}(p) \tilde{J}(-p) \right] \quad (4.3.15)$$

$$= -S_E - \frac{1}{2} \int d^4x_E d^4y_E \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \left[J(x) J(y) \frac{e^{ip(x-y)}}{-(p^2 + m^2)} \right] \quad (4.3.16)$$

$$= -S_E + \frac{1}{2} \int d^4x_E d^4y_E J(x) J(y) \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} \quad (4.3.17)$$

da cui concludiamo:

$$Z_0^E[J] = e^{-W_0[J]} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J(x) J(y) \Delta(x-y) \rangle_{x,y} \right\}. \quad (4.3.18)$$

Se torniamo nello spazio di Minkowski, richiedendo $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$ per la convergenza, otteniamo:

$$I = iS + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[J(x) J(y) \frac{i e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (4.3.19)$$

Nota di E. Chiarotto (tra l'altro il 9 febbraio 2023): Non mi torna il segno, dovrebbe essere $-1/2$, ma il passaggio prima è uguale a quello che ha scritto il professore.

4.4 Esempio $\lambda\phi^4$

Dopo la rinormalizzazione, l'energia libera W ha solo diagrammi in cui tutte le particelle interagiscono tra di loro e collegate alle n gambe esterne:

$$W[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle J_1 \dots J_n G_c^{(n)} \rangle_{x_1 \dots x_n} \quad (4.4.1)$$

invertendo troviamo:

$$G_c^{(n)} = (-1)^n \frac{\delta^n}{\delta J_1 \dots \delta J_n} W[J] \Big|_{J=0}. \quad (4.4.2)$$

Puoi vedere i vari termini delle funzioni di Green nella figura 4.1.

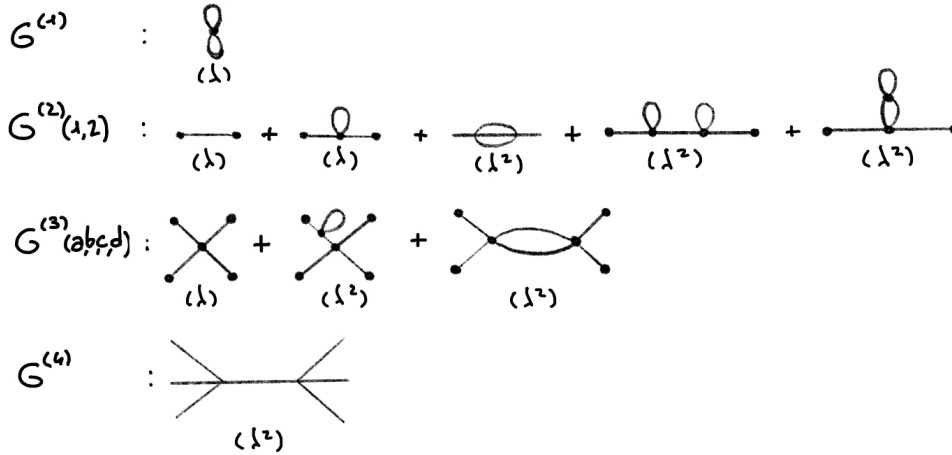


Figure 4.1

Ciascuno è un esempio di tanti processi equivalenti. Ad esempio quelli in figura 4.2.

Quindi ogni vertice è associato a $-\lambda$ (siamo nell'eulideo), inoltre per ogni vertice (che non abbia solo gambe esterne) dobbiamo fare degli integrali perché le derivate:

$$\frac{\delta J_1}{\delta J_2} = \delta(x_1 - x_2) \quad (4.4.3)$$

ci permettono di semplificare soltanto gli integrali delle gambe esterne.

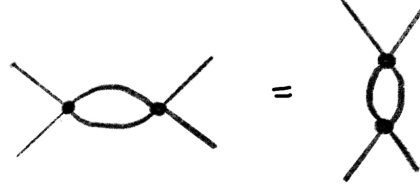


Figure 4.2

Consideriamo il termine di ordine λ in $G^{(2)}$ e lo chiamiamo (A), mentre quello in ordine λ^2 lo chiamiamo (B):

$$(A) = -\frac{\lambda}{2} \int d^4x \Delta(x_1 - x) \Delta(x - x_2) \Delta(x - x) \quad (4.4.4)$$

$$(B) = -\frac{\lambda^2}{3} \int d^4x d^4y \Delta(x_1 - x) \Delta^3(x - y) \Delta(y - x_2). \quad (4.4.5)$$

In δ_2 avevamo un termine:

$$\frac{1}{12} \langle J_x \Delta_{ax} \Delta_{xy}^3 \Delta_{yb} J_y \rangle_{xy} \quad (4.4.6)$$

che se derivato diventa:

$$\lambda^2 \frac{2}{12} \langle \Delta_{ax} \Delta_{xy}^3 \Delta_{yb} \rangle_{xy}. \quad (4.4.7)$$

Ovviamente possiamo rifare il conto nello spazio degli impulsi:

$$(A) = -\frac{\lambda}{2} \int d^4x \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i e^{ip_1(x_1-x)}}{p_1^2 + m^2} \frac{i e^{ip_2(x-x_2)}}{p_2^2 + m^2} \frac{i}{k^2 + m^2} \quad (4.4.8)$$

integriamo in x e usiamo le δ

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1 x_1} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{-ip_2 x_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2) \times \\ &\quad \times \frac{i}{p_1^2 + m^2} \frac{i}{p_2^2 + m^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 + m^2} \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

vedendo così:

$$\tilde{G}(p_1, p_2) = -\frac{\lambda}{2} \delta^4(p_1 - p_2) \frac{i}{p_1^2 + m^2} \frac{i}{p_2^2 + m^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 + m^2}. \quad (4.4.10)$$

Chapter 5

Il modello standard

Vediamo in questo capitolo la trattazione del modello standard delle particelle elementari.

5.1 La lagrangiana di Fermi

Per la QED sappiamo di avere:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} (i\not{D} - e\not{A} + m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (5.1.1)$$

ma le particelle possono interagire anche tramite la forza debole e la forza forte. La descrizione di Fermi per la forza debole descrive l'interazione tramite la corrente:

$$\mathcal{L}_F = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J^\mu J_\mu^\dagger \quad \text{con} \quad J^\mu = L^\mu + H^\mu \quad (5.1.2)$$

con all'interno i termini che chiamiamo **corrente leptonica** e **corrente adronica**, la costante di Fermi è:

$$G_F = 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}. \quad (5.1.3)$$

Le due correnti vengono costruite in analogia con la QED:

$$L^\mu \sim H^\mu \sim \bar{\psi} (G_V V^\mu - G_A A^\mu) \psi \quad (5.1.4)$$

dove V è la corrente vettoriale ed A è la corrente assiale $A^\mu \sim \gamma^\mu \gamma_5$, il fatto che ci sia $V - A$ è legato al fatto che solo la componente Left partecipa all'interazione.

Notiamo che siccome vale:

$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5 \quad , \quad (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad , \quad (\gamma^0)^2 = \mathbb{1} \quad (5.1.5)$$

abbiamo che:

$$j_\mu = \bar{\chi} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \xi \quad (5.1.6)$$

$$\Rightarrow j_\mu^\dagger = \xi^\dagger \left(1 - \gamma_5^\dagger\right) \gamma_\mu^\dagger (\gamma^0)^\dagger \chi \quad (5.1.7)$$

$$= \xi^\dagger (1 - \gamma_5) (\gamma^0 \gamma_\mu) \chi \quad (5.1.8)$$

$$= \xi^\dagger (\gamma^0 \gamma_\mu) (1 - \gamma_5) \chi \quad (5.1.9)$$

$$= \bar{\xi} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \chi. \quad (5.1.10)$$

Le costanti G_V , G_A sono diverse in base al tipo di particella che interagisce, sperimentalmente si trova $G_V = G_A = 1$ per le particelle elementari/puntiformi. Tuttavia questa teoria è valida anche per protoni e neutroni (entro un certo range di energia) con $G_V \approx 1$, $G_A = \alpha \approx 1.24$.

Scriviamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F \sim \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e \right) \left(\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e \right) + \\ + \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{p} \gamma^\mu (1 - \alpha \gamma_5) n \right) \left(\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu \right) \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

dove ν_e è lo spinore di Dirac per il neutrino elettronico, mentre e è il campo di Dirac per l'elettrone, e la presenza della γ_5 esprime il fatto che non viene conservata la parità.

Se facciamo l'analisi dimensionale:

$$[S] = [\mathcal{L}] \cdot L^4 = 1 \quad (5.1.12)$$

dunque:

- Per gli spinori:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi \quad (5.1.13)$$

dunque:

$$[\mathcal{L}] \sim [\psi]^2 L^{-1} = L^{-4}$$

che implica:

$$[\psi] = L^{-3/2}.$$

- Per gli scalari:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (5.1.14)$$

e per i bosoni vettori:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (5.1.15)$$

dunque:

$$[\mathcal{L}] \sim [\phi]^2 L^{-2} = L^{-4}$$

che implica:

$$[\phi] = [A_\mu] = L^{-1}.$$

Ciò implica che la costante di accoppiamento $g = e$ della QED sia adimensionale:

$$[\mathcal{L}] = [g] [\psi]^2 [A_\mu] = [g] L^{-3} L^{-1} = L^{-4} \implies [g] = 1. \quad (5.1.16)$$

Mentre nella lagrangiana di Fermi:

$$[\mathcal{L}] = [G_F] [\psi]^4 = [G_F] L^{-6} = L^{-4} \quad (5.1.17)$$

ovvero:

$$[G_F] = L^2 = M^{-2}. \quad (5.1.18)$$

Vedremo che G_F è dimensionale perché nasconde al suo interno il propagatore dei bosoni vettori a basse energia.

5.1.1 Validità della teoria di Fermi

Nel limite di basse energie la teoria di Fermi è valida, mentre ad alte energie σ cresce con l'energia del centro di massa e la teoria non è più unitaria. Se studiamo l'interazione, vedi in particolare il processo:

$$e + \bar{\nu}_e \longrightarrow e + \bar{\nu}_e$$

nel diagramma in figura 5.1, allora abbiamo 4 gambe esterne e l'elemento di matrice S ridotta è:

$$M = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_2 \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_4 \right) \left(\bar{u}_3 \gamma_\mu (a - b \gamma_5) u_1 \right) \quad (5.1.19)$$

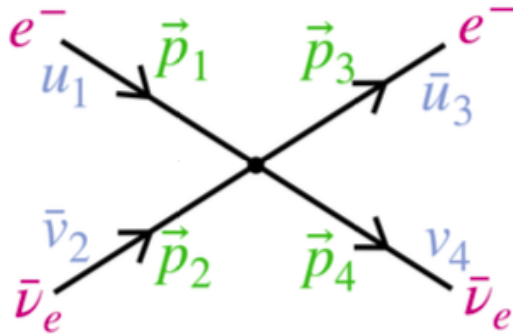


Figure 5.1: Raffigurazione processo $e + \bar{\nu}_e \longrightarrow e + \bar{\nu}_e$.

e dunque:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spin} |M|^2 \quad (5.1.20)$$

$$= \frac{G_F^2}{8} \sum_{spin} \left(\bar{\nu}_2 \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_4 \right) \left(\bar{\nu}_4 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \nu_2 \right) \times \\ \times \left(\bar{u}_3 \gamma_\mu (a - b \gamma_5) u_1 \right) \left(\bar{u}_1 \gamma_\nu (a - b \gamma_5) u_3 \right) \quad (5.1.21)$$

$$= \frac{G_F^2}{8} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu (a - b \gamma_5) (\not{p}_3 + m_e) \gamma_\mu (a - b \gamma_5) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_4 - m_\nu) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) (\not{p}_2 - m_\nu) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \right\} \quad (5.1.22)$$

$$\approx \frac{G_F}{8} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1) \gamma_\nu (a - b \gamma_5) (\not{p}_3) \gamma_\mu (a - b \gamma_5) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_4) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) (\not{p}_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \right\} \quad (5.1.23)$$

$$= \frac{G_F^2}{8} (p_1)^\alpha (p_3)^\beta (p_2)_\rho (p_4)_\sigma \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu (a - b \gamma_5)^2 \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu (1 - \gamma_5)^2 \right\} \quad (5.1.24)$$

$$= \frac{G_F^2}{8} (p_1)^\alpha (p_3)^\beta (p_2)_\rho (p_4)_\sigma \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu (a^+ b^2 - 2a b \gamma_5) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu (2 - 2 \gamma_5) \right\} \quad (5.1.25)$$

$$= 4 G_F^2 (p_1)^\alpha (p_3)^\beta (p_2)_\rho (p_4)_\sigma \left[(a^2 + b^2) (\eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} + \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu}) + \right. \\ \left. + 2iab \varepsilon_{\alpha\nu\beta\mu} \right] \left[\eta^{\sigma\nu} \eta^{\rho\mu} + \eta^{\sigma\mu} \eta^{\rho\nu} - \eta^{\sigma\rho} \eta_{\mu\nu} + i\varepsilon^{\sigma\nu\rho\mu} \right] \quad (5.1.26)$$

possiamo analizzare i termini separatamente:

$$\left(\eta^{\sigma\nu} \eta^{\rho\mu} + \eta^{\sigma\mu} \eta^{\rho\nu} - \eta^{\sigma\rho} \eta_{\mu\nu} \right) \left(\eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} + \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \right) = 2 \left(\delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho + \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right) \\ \varepsilon^{\sigma\nu\rho\mu} \varepsilon_{\alpha\nu\beta\mu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -2 \left(\delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma - \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho \right) = 2 \left(\delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho - \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right) \\ (\eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} + \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu}) \varepsilon^{\sigma\nu\rho\mu} = (\eta^{\sigma\nu} \eta^{\rho\mu} + \eta^{\sigma\mu} \eta^{\rho\nu} - \eta^{\sigma\rho} \eta_{\mu\nu}) \varepsilon_{\alpha\nu\beta\mu} = 0$$

in cui l'ultima equazione è dovuta al fatto che ε è anti-simmetrico per scambio

di μ, ν , mentre il termine tra parentesi è simmetrico. Continuando i conti:

$$= 8 G_F^2 (p_1)^\alpha (p_3)^\beta (p_2)_\rho (p_4)_\sigma \left[(a^2 + b^2) \left(\delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho + \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right) - 2ab \left(\delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho - \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right) \right] \quad (5.1.27)$$

$$= 8 G_F^2 \left[(a^2 + b^2 - 2ab) (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) + (a^2 + b^2 + 2ab) (p_1 \cdot p_2) (p_3 \cdot p_4) \right] \quad (5.1.28)$$

$$= 2 G_F^2 \left[(a - b)^2 u^2 + (a + b)^2 s^2 \right] \quad (5.1.29)$$

$$= 2 G_F^2 s^2 \left[\frac{1}{4} (a - b)^2 (1 + \cos \theta)^2 + (a + b)^2 \right]. \quad (5.1.30)$$

La sezione d'urto totale è:

$$\sigma = \frac{1}{32\pi s} \int d(\cos \theta) |\mathcal{M}|^2 \quad (5.1.31)$$

$$= \frac{2 G_F^2 s}{32 s} f(a, b) \quad (5.1.32)$$

$$\propto s = (p_1 + p_2)^2 \quad (5.1.33)$$

dunque, questa teoria non è consistente ad alte energie perché le probabilità crescono in maniera indefinita, tuttavia è una buona approssimazione ad energia dell'ordine dell'energia di Fermi. L'unica dipendenza del momento in questa teoria viene fuori dalla media sulle polarizzazioni, per avere un andamento più ragionevole bisogna introdurre delle particelle che mediano l'interazione, tuttavia queste interazioni sono a corto raggio ($\sim 10^{-15}$ m), quindi non possiamo usare i fotoni come nella QED ma dobbiamo usare una particella massiva e il potenziale di Yukawa:

$$V \sim \frac{1}{r} e^{-mr} \quad (5.1.34)$$

dove m è la massa della particella. Quindi dobbiamo introdurre un campo massivo che si accoppi con la corrente di Fermi:

$$j_\mu B^\mu \quad (5.1.35)$$

dove il campo B ha un propagatore:

$$\frac{i}{p^2 + m_B^2} \quad (5.1.36)$$

e ciò fa in modo che la probabilità non cresca troppo ad alte energie, mentre a basse energie il campo B non si propaga:

$$\frac{1}{p^2 + m_B^2} \approx \frac{1}{m_B^2}. \quad (5.1.37)$$

Si potrebbe pensare di introdurre un campo vettore massivo usando la lagrangiana di Proca:

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m_B^2}{2} B_\mu B^\mu \quad (5.1.38)$$

che però non è invariante di gauge e questo fa sì che la teoria non sia rinormalizzabile; per evitare questo problema si usa il *meccanismo di Higgs*.

5.2 Rottura spontanea di simmetria (Wigner e Nambu-Goto)

In Meccanica Quantistica una simmetria è una mappa:

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha'\rangle = U |\alpha\rangle \quad (5.2.1)$$

tale per cui:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha'|\beta'\rangle \quad (5.2.2)$$

quindi U dev'essere un operatore unitario. Inoltre ricordiamo che per il teorema di Noether ogni simmetria corrisponde una corrente conservata:

$$\delta S \sim \int d^4x (\partial_\mu j^\mu) = 0 \quad (5.2.3)$$

da cui ricaviamo la carica conservata:

$$Q^a = \int d^4x j^{0a} \quad (5.2.4)$$

inoltre abbiamo che:

$$[H, Q^a,] = 0 \quad (5.2.5)$$

e per questo possiamo esprimere:

$$U = e^{i a^a Q^a}. \quad (5.2.6)$$

Una simmetria può agire su una teoria in due modi diversi in base a come agisce sul vuoto: *realizzazione alla Wigner* o *realizzazione di Nambu-Goto*. Per Wigner abbiamo:

$$U |0\rangle = |0\rangle \quad , \quad Q_0 |0\rangle = 0 \quad (5.2.7)$$

pertanto tutto lo spettro è caratterizzato da multipletti del gruppo di simmetria ovvero di Q_a , quindi per esempio se abbiamo due stati degeneri allora:

$$|\alpha\rangle = Q_a |\alpha\rangle. \quad (5.2.8)$$

Per Nambu-Goto invece abbiamo:

$$U |0\rangle \neq |0\rangle \quad (5.2.9)$$

cioè il vuoto non è invariante, e con un abuso di notazione si dice che la *simmetria è spontaneamente rotta* (U continua a commutare con H).

5.3 Rottura della simmetria e spettro di massa

Consideriamo un campo reale scalare ϕ^a con $a = \{1, 2\}$ e:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - V(\phi^a) \quad (5.3.1)$$

dunque per cui abbiamo:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^a)^2 + \frac{1}{2} (\nabla_i \phi^a)^2 + V(\phi^a) \quad (5.3.2)$$

tuttavia la teoria dev'essere invariante di Poincarè (Lorentz e traslazioni nello spazio-tempo), quindi il vuoto della teoria è dato dalla condizione che estremizza del potenziale, cioè dobbiamo avere:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi^a} = 0. \quad (5.3.3)$$

Studiamo le conseguenze di queste due realizzazioni per lo spettro di massa della teoria. Nella lagrangiana non abbiamo scritto un termine di massa esplicito ma lo ritroviamo quando espandiamo in un intorno del vuoto:

$$V(\phi^a) = V(\langle \phi^a \rangle) + \frac{\partial V}{\partial \phi^a} (\phi^a - \langle \phi^a \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \Big|_{\langle \phi \rangle} (\phi^a - \langle \phi^a \rangle) (\phi^b - \langle \phi^b \rangle) \quad (5.3.4)$$

la derivata prima è nulla nel vuoto, il termine costante è l'energia di punto zero che può essere ignorata e dunque rimane solamente:

$$M_{ab}^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \Big|_{\phi^a = \langle \phi^a \rangle}. \quad (5.3.5)$$

Consideriamo una trasformazione:

$$\delta \phi^a = R_b^a \phi^b \quad (5.3.6)$$

di $SO(2)$, per la quale il potenziale trasforma con:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \phi^a} \delta \phi^a = \frac{\partial V}{\partial \phi^a} R_b^a \phi^b. \quad (5.3.7)$$

Tuttavia se ipotizziamo che $\mathcal{L}$ sia invariante di $SO(2)$, abbiamo che:

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial \phi^a} R_b^a \phi_b \right)_{\langle \phi^b \rangle} = 0 \quad (5.3.8)$$

quindi:

$$\frac{\partial}{\partial \phi^c} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi^a} R_b^a \phi^b \right)_{\langle \phi^b \rangle} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^c} R_b^a \langle \phi^b \rangle + \frac{\partial V}{\partial \phi^a} R_b^a \delta_c^b \right)_{\langle \phi^b \rangle} \quad (5.3.9)$$

$$= M_{ac}^2 R_b^a \langle \phi_b \rangle \quad (5.3.10)$$

$$= 0. \quad (5.3.11)$$

Dunque, ricordando che la variazione del vuoto è:

$$\delta\langle\phi^a\rangle = \alpha R_b^a \langle\phi^b\rangle \quad (5.3.12)$$

possiamo avere:

- La realizzazione alla Wigner se:

$$\delta\langle\phi^a\rangle R_a^b \langle\phi_b\rangle = 0 \quad (5.3.13)$$

che implica la *preservazione del vuoto*:

$$U |0\rangle = |0\rangle \quad (5.3.14)$$

che non dà informazioni aggiuntive sulle particelle.

- La realizzazione alla Nambu-Goto se:

$$\delta\langle\phi^a\rangle R_a^b \langle\phi_b\rangle \neq 0 \quad (5.3.15)$$

che implica la *"rottura" del vuoto*:

$$U |0\rangle \neq |0\rangle \quad (5.3.16)$$

in questo caso la matrice di massa M_{ab}^2 ha un autovalore nullo, dunque esiste sempre una particella a massa nulla, che prende il nome di **bosone di Goldstone**.

5.4 Teorema di Goldstone

Sia G un gruppo di simmetria ($\dim G = n_A + n_\alpha$) con: n_α generatori H^α che preservano il vuoto ($(H^\alpha)_b^a \langle\phi^b\rangle = 0$ (Wigner); n_A generatori "rotti" K^A che non preservano il vuoto ($(K^A)_b^a \langle\phi^b\rangle \neq 0$ (Nambu-Got). Per ognuno di questi generatori rotti esiste un autovettore:

$$v_a^A = (K^A)_b^a \langle\phi^b\rangle \quad (5.4.1)$$

calcolato rispetto ad M_{ac}^2 con autovalore nullo, ovvero per cui abbiamo:

$$M_{ac}^2 v_a^A = 0 \quad (5.4.2)$$

quindi a ciascun generatore rotto associamo una particella a massa nulla, detta **bosone di Goldstone**.

Nota. non vale l'inverso di questo teorema, per esempio se abbiamo $V = 0$ $\phi = \text{cost}$ e questo restituisce un vuoto, abbiamo delle simmetrie e abbiamo delle particelle mass-less, ma questo è una conseguenza del fatto che $V = 0$, non c'entra con Goldstone.

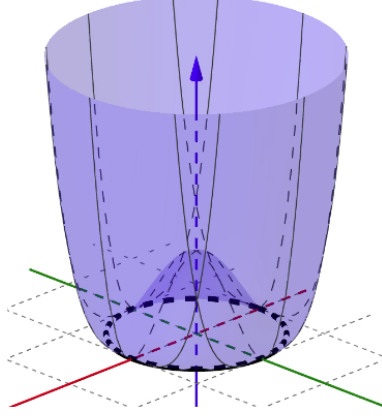


Figure 5.2

5.5 Esempio di rottura della simmetria

I riferimenti sono p. 348 del Peskin Science is not a collection of truths. It is a continuing exploration of mysteries. Peskin.

Studiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{b=1,2} \left(\partial_\mu \phi^b \right) \left(\partial^\mu \phi^b \right) - V(\phi^b) \quad (5.5.1)$$

in cui scegliamo:

$$V(\phi^a) = \frac{\lambda}{4!} \left(\sum_{b=1,2} \frac{1}{2} \phi^b \phi^b - a^2 \right)^2. \quad (5.5.2)$$

Passiamo ad un campo complesso:

$$\phi = \frac{\phi^1 + i \phi^2}{\sqrt{2}} \quad (5.5.3)$$

ed otteniamo:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger - \frac{\lambda}{4!} \left(\phi \phi^\dagger - a^2 \right)^2 \quad (5.5.4)$$

e possiamo osservare che abbiamo un'invarianza di fase globale. Se vogliamo calcolare il vuoto della teoria dobbiamo studiare:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \phi^\dagger} = 0 \quad (5.5.5)$$

da cui otteniamo:

$$\langle \phi \rangle = \langle \phi^\dagger \rangle = a \quad (5.5.6)$$

oppure:

$$\langle \phi \rangle = \langle \phi^\dagger \rangle = 0. \quad (5.5.7)$$

Se abbiamo $a^2 \leq 0$ abbiamo un'unica soluzione:

$$\langle \phi \rangle = 0 \quad (5.5.8)$$

dunque:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det M^2 \neq 0. \quad (5.5.9)$$

Se $a^2 > 0$ abbiamo un massimo in $\langle \phi \rangle = 0$ ed un minimo in $\langle \phi \rangle = a$, infatti se andiamo a studiare la matrice di massa abbiamo:

$$\partial_\phi^2 V = \bar{\phi}^2 \longrightarrow a^2 \quad (5.5.10)$$

$$\partial_{\bar{\phi}}^2 V = \phi^2 \longrightarrow a^2 \quad (5.5.11)$$

$$\partial_{\phi, \bar{\phi}}^2 V = 2\phi\bar{\phi} = 2\phi\bar{\phi} - a^2 \longrightarrow a^2 \quad (5.5.12)$$

dunque abbiamo:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 \end{pmatrix}, \quad \det M^2 = 0 \quad (5.5.13)$$

quindi uno degli autovalori è nullo, dunque il vuoto rompe spontaneamente la simmetria, infatti in questo caso il vuoto realizza la simmetria alla Nambu-Goto.

5.5.1 Sostituzione 1

Prendendo (5.5.4) studiamo:

$$\phi = \rho e^{i\theta} \quad (5.5.14)$$

per cui abbiamo:

$$\partial_\mu \phi = (\partial_\mu \rho + i\rho \partial_\mu \theta) e^{i\theta} \quad (5.5.15)$$

$$\partial_\mu \phi^\dagger = (\partial_\mu \rho - i\rho \partial_\mu \theta) e^{-i\theta} \quad (5.5.16)$$

da cui:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{4!} (\rho^2 - a^2)^2 \quad (5.5.17)$$

il potenziale non dipende più da θ (che può essere il bosone di Goldstone) e per cui:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\lambda}{6} (\rho^2 - a^2) \rho = 0 \quad (5.5.18)$$

che implica:

$$\langle \rho \rangle = 0 \quad (\text{massimo}) \quad (5.5.19)$$

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 = \pm a \quad (\text{minimo}). \quad (5.5.20)$$

Espandendo il potenziale intorno al vuoto, ignorando l'energia di punto zero, abbiamo:

$$V(\rho) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} (\rho - \rho_0)^2 \quad (5.5.21)$$

$$= \frac{\lambda}{6} a^2 (\rho - \rho_0)^2. \quad (5.5.22)$$

Se poniamo $\xi = \rho - \rho_0$ otteniamo:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi + \rho_0)^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{6} a^2 \xi^2 + \dots \quad (5.5.23)$$

se trascuriamo anche i termini di accoppiamento (infatti per determinare lo spettro di massa ci bastano i termini quadratici) abbiamo che:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \rho_0^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{6} a^2 \xi^2 + \dots \quad (5.5.24)$$

quindi θ è il bosone di Goldstone, mentre ξ è un campo massivo. Infine, dobbiamo rinormalizzare i due campi:

$$\xi \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \xi \quad , \quad \rho_0 \theta \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \theta \quad (5.5.25)$$

in questo modo otteniamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{12} a^2 \xi^2 + \dots \quad (5.5.26)$$

5.5.2 Sostituzione 2

Ripartendo da (5.5.4), ma trasliamo rispetto al vuoto:

$$\phi = \frac{\xi + i\theta}{\sqrt{2}} + \langle \phi \rangle \quad , \quad \langle \phi \rangle = a \quad (5.5.27)$$

in questo modo otteniamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{4 \cdot 4!} \left(\xi^2 + \theta^2 + 2\sqrt{2} a \xi \right)^2 \quad (5.5.28)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{4 \cdot 4!} \left(\xi^4 + \theta^4 + 8a^2 \xi^2 + 2\xi^2 \theta^2 + 4\sqrt{2} a \xi^3 + 4\sqrt{2} a \xi \theta^2 \right)^2 \quad (5.5.29)$$

dunque ξ ha massa:

$$m_\xi^2 = \frac{\lambda}{6} a^2 \quad (5.5.30)$$

mentre θ resta massless e rappresenta il bosone di Goldstone.

Osservazione Dopo aver fatto una traslazione rispetto al vuoto, se volessimo fare una traslazione di fase infinitesima per mantenere la lagrangiana invariante dovremmo studiare una trasformazione non lineare. **forse a lezione (21) si fa un esempio.**

5.6 Fotone massivo tramite Goldstone

Consideriamo la simmetria $U(1)$ (di fase) locale:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi \phi^\dagger) \quad (5.6.1)$$

in cui abbiamo:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + ie A_\mu) \phi \quad (5.6.2)$$

e studiamo:

$$V(\phi \phi^\dagger) = \frac{\lambda}{4!} (\phi \phi^\dagger - a^2)^2 \quad (5.6.3)$$

con $\langle \phi \rangle = \langle \phi^\dagger \rangle = a$ e $a^2 > 0$. Osserviamo che i gradi di libertà totali sono 4 (due dallo scalare complesso ϕ e due dal fotone A).

5.6.1 Sostituzione

Consideriamo $\phi = \rho e^{i\theta}$, per cui:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu \rho + i\rho \partial_\mu \theta + ie A_\mu \rho) e^{i\theta} \quad (5.6.4)$$

$$= (\partial_\mu \rho + i\rho (\partial_\mu \theta + e A_\mu)) e^{i\theta} \quad (5.6.5)$$

e conseguentemente:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 (\partial_\mu \theta + e A_\mu)^2 - \frac{\lambda}{4!} (\rho^2 - a^2)^2 \quad (5.6.6)$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{4!} (\rho^2 - a^2)^2 \quad (5.6.7)$$

in cui nell'ultimo passaggio abbiamo fatto la trasformazione di gauge:

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \quad (5.6.8)$$

in questo modo il bosone di Goldstone è stato riassorbito nel fotone che ha acquistato massa:

$$m_A^2 = 2 a^2 e^2. \quad (5.6.9)$$

Espandendo intorno al vuoto ponendo:

$$\xi = \rho - \rho_0 \quad (5.6.10)$$

in cui:

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 = \pm a \quad (5.6.11)$$

otteniamo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi + \rho_0)^2 e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{4!} \left((\xi + \rho_0)^2 - \rho_0^2 \right)^2 \quad (5.6.12)$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi^2 + 2\rho_0 \xi + \rho_0^2) e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{4!} \left[\xi^2 + 2\rho_0 \xi \right]^2 \quad (5.6.13)$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \rho_0^2 e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{6} \rho_0^2 \xi^2 + \mathcal{L}_{int} \quad (5.6.14)$$

in cui poniamo:

$$\mathcal{L}_{int} = \left(\xi^2 + 2\rho_0 \xi \right) e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{4!} \left[\xi^4 + 4\rho_0 \xi^3 \right]. \quad (5.6.15)$$

Infine, dobbiamo rinormalizzare:

$$\xi \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \xi \quad (5.6.16)$$

e sostituiamo $\rho_0^2 = a^2$, così otteniamo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + a^2 e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{12} a^2 \xi^2 + \mathcal{L}_{int} \quad (5.6.17)$$

dunque, che sta descrivendo un campo ξ reale con la stessa massa vista in precedenza:

$$m_\xi^2 = \frac{\lambda}{6} a^2 \quad (5.6.18)$$

ed un campo vettoriale massivo con:

$$M_A^2 = 2 a^2 e^2. \quad (5.6.19)$$

Osservazione. Il risultato assomiglia alla lagrangiana di Proca (i termini quadratici sono uguali, ma i termini di interazione sono diversi) ma sta volta è rinormalizzabile; la rottura spontanea della simmetria preserva i gradi di libertà e li riorganizza: un grado di libertà appartiene a ξ (particella di Higgs) e 3 appartengono al bosone massivo A , in più la trasformazione di gauge equivale a inglobare il bosone di Goldstone dentro A e in particolare la polarizzazione longitudinale di A coincide con il bosone di Goldstone.

Nota. Non si può fare un discorso analogo con il campo spinoriale perché dovremmo fissare l'invarianza per rotazione e quindi l'invarianza di Lorentz/Poincaré!

5.7 Struttura del modello standard (Glashow-Weisberg-Salam)

Possiamo descrivere la fisica utilizzando:

- **Particelle di materia**, descritte da campi spinoriali (Dirac/Weyl), che si separano in:
 - *Leptoni* (elettrone, muone, tau e neutrini), che sono particelle elementari, ovvero senza ulteriori strutture interne.
 - *Adroni*, costituiti da quark (up/down, charm/strange, top/bottom) che sono particelle fondamentali.
- **Interazioni** (elettromagnetica, debole e forte, ignoriamo la gravità), descritte da campi di gauge (vettoriali), legati alla simmetria di gauge. Queste interazioni fanno parte del gruppo di gauge: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, in cui il termine $SU(3)$ riguarda la carica di colore (*Quantum Chromo-Dynamics*, che non trattiamo), il termine $SU(2)$ è l'isospin, $SU(3)$ è l'ipercarica e inoltre $SU(2) \times U(1)$ unifica elettromagnetismo e forza debole (notiamo che da solo $U(1)$ non è l'elettromagnetismo).
- **Settore di Higgs**, descritto da un campo scalare che è responsabile della generazione dei termini di massa della materia (che non posso aggiungere direttamente).

Modello Standard delle Particelle Elementari

tre generazioni della materia (fermioni)						mediatori delle forze / interazioni (bosoni)	
I			II			III	
massa carica spin	$\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	$\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	$\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	0 $\frac{2}{3}$ 1	$\approx 124.97 \text{ GeV}/c^2$ 0 0		
QUARK	u up	c charm	t top	g gluone	H higgs		
	$\approx 4.7 \text{ MeV}/c^2$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$	$\approx 96 \text{ MeV}/c^2$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$	$\approx 4.18 \text{ GeV}/c^2$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$	0 0 1	γ fotone		
	d down	s strange	b bottom				
LEPTONI	$\approx 0.511 \text{ MeV}/c^2$ -1 $\frac{1}{2}$	$\approx 105.66 \text{ MeV}/c^2$ -1 $\frac{1}{2}$	$\approx 1.7768 \text{ GeV}/c^2$ -1 $\frac{1}{2}$	$\approx 91.19 \text{ GeV}/c^2$ 0 1	Z bosone Z		
	e elettrone	μ muone	τ tauone				
	$< 1.0 \text{ eV}/c^2$ 0 $\frac{1}{2}$	$< 0.17 \text{ MeV}/c^2$ 0 $\frac{1}{2}$	$< 18.2 \text{ MeV}/c^2$ 0 $\frac{1}{2}$	$\approx 80.39 \text{ GeV}/c^2$ ± 1 1	W bosone W		
	ν_e neutrino elettronico	ν_μ neutrino muonico	ν_τ neutrino tauonico				
				BOSONI DI GAUGE BOSONI VETTORI		BOSONI SCALARI	

Figure 5.3

Se si rompono esplicitamente (non spontaneamente) le simmetrie di gauge allora si ottengono delle equazioni che non sono consistenti, quindi bisogna

verificare che le simmetrie di gauge vengono conservate dalla quantizzazione. Se abbiamo delle anomalie, ovvero le simmetrie non sono conservate dalla quantizzazione la teoria perde di senso. Nel modello standard per evitare anomalie nelle simmetrie di gauge il numero di famiglie dei quark devono essere uguali al numero di famiglie dei leptoni e sono 3 ciascuno (elettrone e neutrino elettronico fanno parte della stessa famiglia, idem per gli μ , τ , analogamente up/down, top/bottom e charm/strange).

La lagrangiana del modello standard è costituita da un termine di Yang-Mills (bosoni vettori che mediano le interazioni), un termine di Higgs, un termine di materia (descrivono leptoni e quark) e delle interazioni di Yukawa. Andiamo a studiare prima il settore leptonico, per cui abbiamo solo interazioni elettrodeboli, dopodiché trattiamo i termini di Yang-Mills e di Higgs, infine studiamo le interazioni elettrodeboli del settore adronico: costruiamo la parte di interazione debole in analogia al settore leptonico e analizziamo il mixing dei quark.

5.8 Termini cinetici di Yang-Mills rispetto ad generatori

Il termine di Yang-Mills è dato da $SU(3)_C \times SU(2)_{I_3} \times U(1)_Y$ con numeri quantici di colore (C), isospin (I_3) e ipercarica (Y). Il gruppo $SU(3)$ descrive le interazioni di QCD tra i quark mediati dai gluoni, mentre $SU(2) \times U(1)$ descrivono le interazioni elettrodeboli mediate dai bosoni $W_\mu^\pm$ (corrente debole carica), Z_μ (corrente debole neutra) e A_μ (corrente elettromagnetica).

Introduciamo inoltre le costanti di accoppiamento g_3 , g_2 , g_1 , rispettivamente per l'interazione di colore $SU(3)_C$, l'interazione di isospin $SU(2)_{I_3}$ e l'interazione di ipercarica $U(1)_Y$.

Per il gruppo $SU(3)_C$ abbiamo i generatori:

$$T^B = \frac{1}{2} \lambda^B \quad B \in \{1, \dots, 8\} \quad (5.8.1)$$

in cui λ sono le **matrici di Gell-Mann-Low** ed i bosoni vettori sono i gluoni: G_μ^B .

Il termine cinetico per la QCD è:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} \sum_{B=1}^8 G_{\mu\nu}^B G^{\mu\nu B} \quad (5.8.2)$$

che in realtà non utilizzeremo, ma l'abbiamo citata solo per completezza, e in cui definiamo:

$$G_{\mu\nu}^B = \partial_\mu G_\nu^B - \partial_\nu G_\mu^B - g_3 f^{BCD} G_\mu^C G_\nu^D. \quad (5.8.3)$$

Per il gruppo $SU(2)_{I_3}$ abbiamo i generatori:

$$T^a = \frac{1}{2} \sigma^a \quad a \in \{1, 2, 3\} \quad (5.8.4)$$

in cui σ sono le **matrici di Pauli** ed i bosoni vettori sono: W_μ^a .

Il termine cinetico è:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 W_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (5.8.5)$$

cui definiamo:

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g_2 \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c. \quad (5.8.6)$$

Per il gruppo $U(1)_Y$ abbiamo un unico generatore (l'identità) ed un bosone vettore B_μ . Il termine cinetico è:

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (5.8.7)$$

in cui definiamo:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (5.8.8)$$

5.9 Settore leptónico

Dai risultati sperimentali (di Madame Wu) si osserva che le interazioni deboli violano la parità, dunque le componenti L e R si comportano diversamente e perciò conviene usare gli spinori di Weyl anziché quelli di Dirac.

Una famiglia contiene una particella (e, μ, τ) e il suo neutrino associato, nel modello standard $e/\mu/\tau$ hanno una componente L e una R, mentre i neutrini sono massless ed esistono solo nella chiralità L (negli esperimenti si osserva che oscillano e hanno una massa molto piccola $\ll 1$ eV).

Le componenti Left formano un doppietto di $SU(2)$ che indichiamo come:

$$L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad (5.9.1)$$

mentre le componenti Right sono dei singoletti di $SU(2)$ che indichiamo come l_R, ν_R . Vedremo che il neutrino Right è completamente disaccoppiato, ovvero non interagisce.

5.9.1 Bosoni fisici e costanti di accoppiamento

Per comodità possiamo definire:

$$W_\mu = W_\mu^a \sigma^a \quad (5.9.2)$$

$$= \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - i W_\mu^2 \\ W_\mu^1 + i W_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (5.9.3)$$

$$= \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^\dagger \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (5.9.4)$$

in cui abbiamo posto:

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp i W_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (5.9.5)$$

e quindi usiamo:

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2} (\sigma_1 \pm i \sigma_2) \quad (5.9.6)$$

dunque:

$$W_\mu^+ \sigma_+ + W_\mu^- \sigma_- = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 + i \sigma_2) (W_\mu^1 - i W_\mu^2) + (\sigma_1 - i \sigma_2) (W_\mu^1 + i W_\mu^2) \right] \quad (5.9.7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \sigma_1 + W_\mu^2 \sigma_2). \quad (5.9.8)$$

Sappiamo che $SU(2) \times SU(1)$ descrive la corrente elettro-debole, che è composta da una corrente debole carica, una debole neutra e la corrente elettromagnetica.

Possiamo usare $W_\mu^\pm$ per mediare la corrente debole carica e vogliamo utilizzare una combinazione lineare dei due bosoni rimanenti per mediare la corrente debole neutra e l'elettromagnetismo, per ciò introduciamo una matrice di rotazione R ortogonale ($R^T R = \mathbb{1}$):

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & \sin \theta_w \\ -\sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (5.9.9)$$

$$\begin{cases} A_\mu = \sin \theta_w W_\mu^3 + \cos \theta_w B_\mu \\ Z_\mu = \cos \theta_w W_\mu^3 - \sin \theta_w B_\mu \end{cases} \quad (5.9.10)$$

che invertendo abbiamo:

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & \sin \theta_w \\ -\sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \quad (5.9.11)$$

$$\begin{cases} B_\mu = \cos \theta_w A_\mu - \sin \theta_w Z_\mu \\ W_\mu^3 = \sin \theta_w A_\mu + \cos \theta_w Z_\mu \end{cases} \quad (5.9.12)$$

nata che vale $\theta_w \approx 28^\circ$, detto *angolo di Weinberg*, oppure angolo di weak mixing. Questa scelta per Z e A è giustificata anche dal fatto che nella rottura di simmetria tramite Higgs la combinazione che forma Z acquisisce massa, mentre A rimane massless.

Dafiniamo la derivata covariante come:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu + \frac{i}{2} g_2 W_\mu^a \sigma^a \quad (5.9.13)$$

in cui il primo fattore $1/2$ è una convenzione, mentre il secondo è dovuto al fatto che il generatore di $SU(2)$ sia $T^a = \sigma^a/2$. Questa scelta di derivata covariante rende la lagrangiana invariante rispetto a trasformazioni locali di $SU(2) \times U(1)$, inoltre bisogna ricordare che quando applichiamo questa derivata covariante un un singoletto di $SU(2)$, il termine con W è nullo.

Le costanti di accoppiamento verranno fissate imponendo la carica elettrica di elettrone e neutrino Left, tramite lo studio della derivata covariante per il doppietto Left:

$$D_\mu L = \partial_\mu L + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} + \frac{i}{2} g_2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \quad (5.9.14)$$

$$= \partial_\mu L + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} g_1 Y B_\mu + g_2 W_\mu^3 & \sqrt{2} g_2 W_\mu^+ \\ \sqrt{2} g_2 W_\mu^- & g_1 Y B_\mu - g_2 W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \quad (5.9.15)$$

$$= \partial_\mu L + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} (g_1 Y B_\mu + g_2 W_\mu^3) \nu_L + (\sqrt{2} g_2 W_\mu^+) l_L \\ (g_1 Y B_\mu - g_2 W_\mu^3) l_L + (\sqrt{2} g_2 W_\mu^-) \nu_L \end{pmatrix}. \quad (5.9.16)$$

Anche:

$$\bar{L} \not{D} L = \bar{L} \not{\partial} L + \bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{ew} L + \bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{cc} L \quad (5.9.17)$$

$$= \bar{L} \not{\partial} L + \frac{i}{2} \left[\bar{\nu}_L \gamma^\mu (g_1 Y B_\mu + g_2 W_\mu^3) \nu_L + \bar{l}_L \gamma^\mu (g_1 Y B_\mu - g_2 W_\mu^3) l_L \right] + \frac{i}{2} \sqrt{2} g_2 \left(\bar{\nu}_L \gamma^\mu W_\mu^+ l_L + \bar{l}_L \gamma^\mu W_\mu^- \nu_L \right). \quad (5.9.18)$$

Studiamo la corrente elettrodebole:

$$\bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{ew} L = \frac{i}{2} \left[\bar{\nu}_L \gamma^\mu (g_1 Y B_\mu + g_2 W_\mu^3) \nu_L + \bar{l}_L \gamma^\mu (g_1 Y B_\mu - g_2 W_\mu^3) l_L \right] \quad (5.9.19)$$

$$= \frac{i}{2} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \left[(g_1 Y \cos \theta_w + g_2 \sin \theta_w) A_\mu - (g_1 Y \sin \theta_w - g_2 \cos \theta_w) Z_\mu \right] \nu_L + \frac{i}{2} \bar{l}_L \gamma^\mu \left[(g_1 Y \cos \theta_w - g_2 \sin \theta_w) A_\mu - (g_1 Y \sin \theta_w + g_2 \cos \theta_w) Z_\mu \right] l_L \quad (5.9.20)$$

siccome A media la corrente elettromagnetica, quindi dobbiamo imporre la carica elettrica:

$$\begin{cases} \nu_L : & \frac{1}{2} (g_1 Y \cos \theta_w + g_2 \sin \theta_w) = 0 \\ l_L : & \frac{1}{2} (g_1 Y \cos \theta_w - g_2 \sin \theta_w) = e \end{cases} \quad (5.9.21)$$

ovvero:

$$-g_2 \sin \theta_w = g_1 Y \cos \theta_w = e \quad (5.9.22)$$

se imponiamo che l'ipercarica del doppietto Left sia $Y(L) = -1$, allora:

$$g_2 \sin \theta_w = g_1 \cos \theta_w = -e \quad (5.9.23)$$

ovvero:

$$g_1 = -\frac{e}{\cos \theta_w} \quad , \quad g_2 = -\frac{e}{\sin \theta_w} \quad (5.9.24)$$

che se sostituite nella corrente elettrodebole:

$$\begin{aligned} \bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{ew} L &= ie \bar{l}_L \gamma^\mu A_\mu l_L - \frac{i}{2} \left[\bar{\nu}_L \gamma^\mu (g_1 Y \sin \theta_w - g_2 \cos \theta_w) \nu_L + \right. \\ &\quad \left. + \bar{l}_L \gamma^\mu (g_1 Y \sin \theta_w + g_2 \cos \theta_w) l_L \right] Z_\mu \end{aligned} \quad (5.9.25)$$

$$\begin{aligned} &= ie \bar{l}_L \gamma^\mu A_\mu l_L + \frac{ie}{2 \sin \theta_w \cos \theta_w} \left[-\bar{\nu}_L \gamma^\mu (\sin^2 \theta_w + \cos^2 \theta_w) \nu_L + \right. \\ &\quad \left. + \bar{l}_L \gamma^\mu (\sin^2 \theta_w - \cos^2 \theta_w) l_L \right] Z_\mu \end{aligned} \quad (5.9.26)$$

$$\begin{aligned} &= -ie \left[-\bar{l}_L (\gamma^\mu A_\mu) l_L + \frac{1}{\sin(2\theta_w)} \bar{\nu}_L (\gamma^\mu Z_\mu) \nu_L - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\tan(2\theta_w)} \bar{l}_L (\gamma^\mu Z_\mu) l_L \right]. \end{aligned} \quad (5.9.27)$$

5.9.2 Numeri quantici e campi

Possiamo riscrivere la matrice di Pauli in funzione dell'isospin:

$$I_3 = \frac{1}{2} \sigma_3 \quad (5.9.28)$$

e ciò ci permette di ricavare la formula di Gell-Mann e Nishijima:

$$Q = \frac{Y}{2} + I_3 \quad (5.9.29)$$

che usiamo per ricavare l'ipercarica (Y) che è uguale per tutti i membri dello stesso multipletto. Ricordiamo che per i singoletti l'isospin vale $I_3 = 0$, mentre per i doppietti è:

$$I_3 = +\frac{1}{2} \quad (5.9.30)$$

per la prima componente e:

$$I_3 = -\frac{1}{2} \quad (5.9.31)$$

per la seconda. Abbiamo:

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \quad (5.9.32)$$

è un doppietto rispetto a $SU(2)$ ed è carico rispetto ad $U(1)$; l_R è un singoletto rispetto ad $SU(2)$ ($I_3 = 0$) ed è carico rispetto ad $U(1)$. Il campo di Higgs è un doppietto di $SU(2)$ ed è carico rispetto ad $U(1)$, pertanto lo definiamo come:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (5.9.33)$$

dove ϕ^+ , ϕ^0 sono due campi complessi e ϕ^+ ha carica $+1$.

Riassumiamo il tutto nella tabella 5.4.

	Higgs		Leptoni				Quarks			
	ϕ^+	ϕ^0	ν_L	l_L	ν_R	l_R	u_L	d_L	u_R	d_R
Q	$+1$	0	0	-1	0	-1	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
I_3	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
Y	$+1$	$+1$	-1	-1	0	-2	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Figure 5.4

5.9.3 Lagrangiana massless dei leptoni

Riassumendo, per il doppietto Left abbiamo:

$$\bar{L} \not{D} L = \bar{L} \not{\partial} L + \bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{ew} L + \bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{cc} L \quad (5.9.34)$$

in cui:

$$\bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{ew} L = -ie \left[-\bar{l}_L (\gamma^\mu A_\mu) l_L + \frac{1}{\sin(2\theta_w)} \bar{\nu}_L (\gamma^\mu Z_\mu) \nu_L - \frac{1}{\tan(2\theta_w)} \bar{l}_L (\gamma^\mu Z_\mu) l_L \right] \quad (5.9.35)$$

$$\bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{cc} L = -\frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \left(\bar{\nu}_L \gamma^\mu W_\mu^+ l_L + \bar{l}_L \gamma^\mu W_\mu^- \nu_L \right) \quad (5.9.36)$$

mentre per i singoletti Right abbiamo:

$$\bar{l}_R \not{D} l_R = \bar{l}_R \not{\partial} l_R + i e \bar{l}_R \gamma^\mu \left(A_\mu - \tan \theta_w Z_\mu \right) l_R \quad (5.9.37)$$

il neutrino Right è completamente disaccoppiato, nel senso che non abbiamo interazioni elettrodeboli.

Infine osserviamo che nei termini puramente cinetici la parte L e quella la R sono identiche, quindi possiamo scriverli come:

$$\bar{l}_L \not{\partial} l_L + \bar{\nu}_L \not{\partial} \nu_L + \bar{l}_R \not{\partial} l_R + \bar{\nu}_R \not{\partial} \nu_R = \bar{l} \not{\partial} l + \bar{\nu} \not{\partial} \nu. \quad (5.9.38)$$

Possiamo scrivere la lagrangiana del settore leptónico come:

$$\mathcal{L}_{lep} = i \bar{L} \not{D} L + i \bar{l}_R \not{D} l_R + i \bar{\nu}_R \not{D} \nu_R \quad (5.9.39)$$

$$\begin{aligned} &= i \bar{l} \not{\partial} l + i \bar{\nu} \not{\partial} \nu - e \left(\bar{l} \gamma^\mu l \right) A_\mu + e \left[\frac{1}{\sin(2\theta_w)} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\tan(2\theta_w)} \bar{l}_L \gamma^\mu l_L + \tan \theta_w \bar{l}_R \gamma^\mu l_R \right] Z_\mu + \\ &\quad + \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \left(\bar{\nu}_L \gamma^\mu W_\mu^+ l_L + \bar{l}_L \gamma^\mu W_\mu^- \nu_L \right) \end{aligned} \quad (5.9.40)$$

in cui il primo termine sono i termini *cinetici e di corrente elettromagnetica*, il secondo la *corrente debole neutra* e l'ultimo la *corrente debole carica*. Osserviamo che le correnti deboli (neutre e cariche) si accoppiano in modo diverso con le componenti left e right, questo è sintomo del fatto che le interazioni deboli violano la parità.

Riscriviamo la lagrangiana usando i proiettori Left e Right:

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad (5.9.41)$$

e per entrambi vale $(P_{L,R})^2 = P_{L,R}^\dagger = P_{L,R}$. Osserviamo che:

$$\bar{\psi}_L (\gamma^\mu B_\mu) \phi_L = \psi^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\mu B_\mu P_L \phi \quad (5.9.42)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu (P_L)^2 B_\mu \phi \quad (5.9.43)$$

$$= \bar{\psi} \gamma^\mu P_L B_\mu \phi \quad (5.9.44)$$

e analogamente per R. Scriviamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{lep} &= i \bar{l} \not{\partial} l + i \bar{\nu} \not{\partial} \nu - e \left(\bar{l} \gamma^\mu l \right) A_\mu + \\ &\quad + \frac{e}{2 \sin 2\theta_w} \left[\bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu + \bar{l} \gamma^\mu (4 \sin^4 \theta_w - 1 + \gamma_5) l \right] Z_\mu + \\ &\quad + \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_w} \left(\bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^+ l + \bar{l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^- \nu \right). \end{aligned} \quad (5.9.45)$$

Annotazioni. Nel studiare il settore leptónico abbiamo un po' barato, nel senso che se teniamo le componenti L/R esplicite non dovremmo utilizzare γ^μ (matrici 4x4) bensì le σ^μ (matrici 2x2) per le componenti R e le $\bar{\sigma}^\mu$ (matrici 2x2) per le componenti L. Ricordiamo che $\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma})$ e $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$, inoltre in rappresentazione di Weyl abbiamo:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9.46)$$

e possiamo osservare che:

$$\gamma^0 \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix}. \quad (5.9.47)$$

In più, nel nostro disorso abbiamo utilizzato un abuso di notazione per cui:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (5.9.48)$$

questo abuso è compatibile con le relazioni dei proiettori:

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi, \quad \psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \quad (5.9.49)$$

inoltre:

$$\psi = \psi_R + \psi_L \quad (5.9.50)$$

che ci giustifica l'uso della γ . Riarrangiando i termini ritroviamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L}_K = L^\dagger \bar{\sigma}^\mu i D_\mu L + l_R^\dagger \sigma^\mu i D_\mu l_R + \nu_R^\dagger \sigma^\mu i D_\mu \nu_R \quad (5.9.51)$$

$$= i \left(l_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu l_L + l_R^\dagger \sigma^\mu D_\mu l_R \right) + i \left(\nu_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \nu_L + \nu_R^\dagger \sigma^\mu D_\mu \nu_R \right) \quad (5.9.52)$$

$$= \begin{pmatrix} l_L^\dagger & l_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} (i D_\mu) \begin{pmatrix} l_L \\ l_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_L^\dagger & \nu_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} (i D_\mu) \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R \end{pmatrix} \quad (5.9.53)$$

$$= \begin{pmatrix} l_L^\dagger & l_R^\dagger \end{pmatrix} \gamma^0 \gamma^\mu (i D_\mu) \begin{pmatrix} l_L \\ l_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_L^\dagger & \nu_R^\dagger \end{pmatrix} \gamma^0 \gamma^\mu (i D_\mu) \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R \end{pmatrix} \quad (5.9.54)$$

$$= \bar{l} (i \gamma^\mu D_\mu) l + \bar{\nu} (i \gamma^\mu D_\mu) \nu. \quad (5.9.55)$$

5.10 Trasformazione di carica e di parità

Ricordiamo ancora che $\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$ e che nella rappresentazione di Weyl:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (5.10.1)$$

ma anche che, nella stessa rappresentazione:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Mentre in quella di Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La parità (P) in generale agisce come:

$$\psi(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} \psi^P(t, \vec{x}) = \gamma^0 \psi(t, -\vec{x}). \quad (5.10.2)$$

La coniugazione di carica è:

$$C = i\gamma^0 \gamma^2 = -i\gamma^2 \gamma^0 \quad (5.10.3)$$

e in generale agisce come:

$$\psi \xrightarrow{C} \psi^C = C \psi C^\dagger \quad (5.10.4)$$

in base al tipo di campo a cui lo applichiamo abbiamo una trasformazione diversa rispetto C . Vediamo i diversi casi.

Spinore chiriale. La coniugazione di carica agisce come:

$$\psi \xrightarrow{C} \psi^C = \eta_C C(\bar{\psi})^T \quad (5.10.5)$$

ovvero:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \xrightarrow{C} \psi^C = \eta_C C(\bar{\psi})^T \quad (5.10.6)$$

$$= \eta_C C \gamma^0 \psi^* \quad (5.10.7)$$

$$= -i\eta_C \gamma^2 \psi^* \quad (5.10.8)$$

$$= \eta_C \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L^* \\ \psi_R^* \end{pmatrix} \quad (5.10.9)$$

$$= \eta_C \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \psi_L^*(t, -\vec{x}) \\ +i\sigma^2 \psi_R^*(t, -\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (5.10.10)$$

per brevità richiediamo che la fase sia $\eta_C = 1$.

Scalare complesso. La coniugazione restituisce:

$$\Phi \xrightarrow{C} \Phi^C = \Phi^* \quad (5.10.11)$$

dunque per PC abbiamo:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} \xrightarrow{CP} \Phi^{CP} = \Phi^*(t, -\vec{x}) = \begin{pmatrix} \phi_A^* \\ \phi_B^* \end{pmatrix}. \quad (5.10.12)$$

Bosone vettore neutro. Abbiamo:

$$A_\mu \xrightarrow{C} A_\mu^C = -A_\mu \quad (5.10.13)$$

dunque per PC otteniamo:

$$B_\mu^{CP} = (B_0^{CP}, B_i^{CP}) = (-B_0, B_i) \quad (5.10.14)$$

$$(W_\mu^3)^{CP} = ((W_0^3)^{CP}, (W_i^3)^{CP}) = (-W_0^3, W_i^3). \quad (5.10.15)$$

Bosone vettore carico Abbiamo:

$$A_\mu^\pm \xrightarrow{C} (A_\mu^\pm)^C = -A_\mu^\pm \quad (5.10.16)$$

dunque per PC otteniamo:

$$(W_\mu^\pm)^{CP} = ((W_0^\pm)^{CP}, (W_i^\pm)^{CP}) = (-W_0^\mp, W_i^\mp). \quad (5.10.17)$$

Invarianza della parte leptonica sotto CP. Dimostriamo che la parte leptonica del modello standard è invariante sotto CP:

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi = i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu + \frac{i}{2} g_2 W_\mu^a \sigma^a \right) \psi \xrightarrow{CP} \quad (5.10.18)$$

$$\xrightarrow{CP} -i(\psi^{CP})^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \left[\partial_\mu^{CP} - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu^{CP} - \frac{i}{2} g_2 (W_\mu^3 \sigma^3 + W_\mu^+ \sigma^+ + W_\mu^- \sigma^-)^{CP} \right] \psi^{CP} \quad (5.10.19)$$

$$\begin{aligned} &= -i(-i\gamma^2 \psi^*)^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \left[+\partial_0 + ig_1 \frac{Y}{2} B_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} g_2 (W_0^3 \sigma^3 + W_0^- \sigma^+ + W_0^+ \sigma^-) \right] (-i\gamma^2 \psi^*) + \\ &\quad + -i(-i\gamma^2 \psi^*)^\dagger \gamma^0 \gamma^i \left[-\partial_i - ig_1 \frac{Y}{2} B_i - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} g_2 (W_i^3 \sigma^3 + W_i^- \sigma^+ + W_i^+ \sigma^-) \right] (-i\gamma^2 \psi^*) \quad (5.10.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= +i\psi^T \gamma^2 (\gamma^0 \gamma^0) \gamma^2 \left[\partial_0 + ig_1 \frac{Y}{2} B_0 + \frac{i}{2} g_2 (W_0^3 \sigma^3 + W_0^- \sigma^+ + W_0^+ \sigma^-) \right] \psi^* - \\ &\quad - i\psi^T \gamma^2 (\gamma^0 \gamma^i) \gamma^2 \left[\partial_i + ig_1 \frac{Y}{2} B_i + \frac{i}{2} g_2 (W_i^3 \sigma^3 + W_i^- \sigma^+ + W_i^+ \sigma^-) \right] \psi^* \quad (5.10.21) \end{aligned}$$

abbiamo che $C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T$, ma siccome $C = i\gamma^0\gamma^2$ e $C^{-1} = C^T = -C^\dagger = -C$, otteniamo che:

$$-(\gamma^0\gamma^2)\gamma^\mu(\gamma^0\gamma^2) = (\gamma^\mu)^T. \quad (5.10.22)$$

Pertanto, oltre a $(\gamma^2)^2 = -1$, abbiamo:

$$\gamma^2\gamma^0\gamma^i\gamma^2 = -C\gamma^iC\gamma^0 = -(\gamma^i)^T\gamma^0 = -(\gamma^0\gamma^i)^T. \quad (5.10.23)$$

Trasporre la matrice W equivale a scambiare i bosoni carichi, B resta uguale. Dunque abbiamo:

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi = i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ig_1\frac{Y}{2}B_\mu + \frac{i}{2}g_2W_\mu^a\sigma^a\right)\psi \xrightarrow{CP} \quad (5.10.24)$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{CP} & -i\psi^T(\gamma^0\gamma^0)^T\left[\partial_0 + \frac{i}{2}(g_1YB_0 + g_2(W_0^3\sigma^3 + W_0^+\sigma^+W_0^-\sigma^-))\right]^T(\psi^\dagger)^T + \\ & + i\psi^T(\gamma^i)^T(\gamma^0)^T\left[\partial_i + \frac{i}{2}(g_1YB_i + \right. \\ & \left. + g_2(W_i^3\sigma^3 + W_i^+\sigma^+W_i^-\sigma^-))\right]^T(\psi^\dagger)^T \end{aligned} \quad (5.10.25)$$

$$= \dots \quad (5.10.26)$$

La parte leptonica del modello standard è invariante sotto CP:

$$e_R^\dagger\sigma^\mu iD_\mu e_R = ie_R^\dagger\sigma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{i}{2}g''B_\mu\right)e_R \xrightarrow{CP} \quad (5.10.27)$$

$$\xrightarrow{CP} -i(e_R^{CP})^\dagger\sigma^\mu\left(\partial_\mu^{CP} - \frac{i}{2}g''B_\mu^{CP}\right)e_R^{CP} \quad (5.10.28)$$

$$\begin{aligned} & = -i(-ie_R^T\sigma^2)\sigma^0\left(\partial_0 - \frac{i}{2}g''(-B_0)\right)(i\sigma^2e_R^*) - \\ & \quad - i(-ie_R^T\sigma^2)\sigma^i\left(-\partial_i - \frac{i}{2}g''B_i\right)(i\sigma^2e_R^*) \end{aligned} \quad (5.10.29)$$

$$\begin{aligned} & = -ie_R^T(\sigma^2\sigma^0\sigma^2)\left(\partial_0 + \frac{i}{2}g''B_0\right)e_R^* + \\ & \quad + ie_R^T(\sigma^2\sigma^i\sigma^2)\left(\partial_i + \frac{i}{2}g''B_i\right)e_R^* \end{aligned} \quad (5.10.30)$$

ma abbiamo che $\sigma^2 \sigma^0 \sigma^2 = \sigma^0 = (\sigma^0)^T$ e $\sigma^2 \sigma^i \sigma^2 = (\sigma^i)^T$, per cui:

$$= -ie_R^T (\sigma^0)^T \left(\partial_0 + \frac{i}{2} g'' B_0 \right) e_R^* + ie_R^T (\sigma^i)^T \left(\partial_i + \frac{i}{2} g'' B_i \right) e_R^* \quad (5.10.31)$$

aggiungiamo la derivata totale

$$= -ie_R^T (\sigma^\mu)^T \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} g'' B_\mu \right) e_R^* + i \partial_\mu (e_R^T (\sigma^\mu)^T e_R^*) \quad (5.10.32)$$

siccome è un numero abbiamo che $(\dots) = (\dots)^T$

$$= \left[-ie_R^T (\sigma^\mu)^T \frac{i}{2} g'' B_\mu e_R + i \partial_\mu (e_R^T (\sigma^\mu)^T e_R) \right]^T \quad (5.10.33)$$

$$= ie_R^+ \sigma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g'' B_\mu \right) e_R. \quad (5.10.34)$$

5.10.1 Decadimento del muone

Il muone decade tramite il bosone W , quindi usiamo la corrente carica:

$$\mathcal{L} = \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_w} \left(\bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^+ l + \bar{l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^- \nu \right) \quad (5.10.35)$$

inoltre ricordiamo che la costante di Fermi vale:

$$G_F = \frac{e^2}{4\sqrt{2} \sin^2 \theta_w M_w^2}. \quad (5.10.36)$$

Abbiamo la situazione raffigurata in figura 5.5.

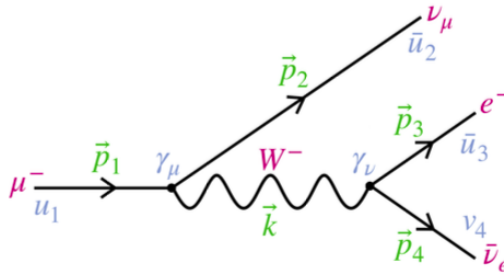


Figure 5.5: Processo di decadimento del muone.

Abbiamo:

$$\mathcal{A} = \frac{(ie)^2}{8 \sin^2 \theta_w} \langle \psi_\mu | \bar{\psi}_\mu \gamma^\rho (1 - \gamma_5) W_\rho^- \psi_{\nu_\mu} \cdot \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\sigma (1 - \gamma_5) W_\sigma^+ \psi_e | \bar{\psi}_{\nu_\mu} \bar{\psi}_e \psi_{\nu_e} \rangle \quad (5.10.37)$$

così che:

$$M = \frac{(ie)^2}{8 \sin^2 \theta_w} \bar{u}_2 \gamma^\rho (1 - \gamma_5) u_1 \frac{(-i\eta_{\rho\sigma})}{s - M_w^2} \bar{u}_3 \gamma^\sigma (1 - \gamma_5) \nu_4 \quad (5.10.38)$$

$$= \frac{ie^2}{8 \sin^2 \theta_w (s - M_w^2)} \bar{u}_2 \gamma^\rho (1 - \gamma_5) u_1 \cdot \bar{u}_3 \gamma_\rho (1 - \gamma_5) \nu_4 \quad (5.10.39)$$

e di conseguenza:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2^7 \sin^4 \theta_w (s - M_w^2)^2} \sum_{spin} \left(\bar{u}_2 \gamma^\rho (1 - \gamma_5) u_1 \right) \left(\bar{u}_3 \gamma_\rho (1 - \gamma_5) \nu_4 \right) \times \\ \times \left(\bar{u}_1 \gamma^\sigma (1 - \gamma_5) u_2 \right) \left(\bar{\nu}_4 \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) \nu_3 \right) \quad (5.10.40)$$

$$= \frac{M_w^4 G_F^2}{4 (s - M_w^2)^2} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m_\mu) \gamma^\sigma (1 - \gamma_5) (\not{p}_2) \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_3 + m_e) \gamma_\rho (1 - \gamma_5) (\not{p}_4) \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) \right\} \quad (5.10.41)$$

$$= \frac{M_w^4 G_F^2}{(s - M_w^2)^2} (p_2)_\beta (p_4)^\tau \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m_\mu) \gamma^\sigma \gamma^\beta \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_3 + m_e) \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) \right\} \quad (5.10.42)$$

$$= \frac{M_w^4 G_F^2}{(s - M_w^2)^2} (p_1)_\alpha (p_2)_\beta (p_3)^\epsilon (p_4)^\tau \text{Tr} \left\{ \gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma^\beta \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ \gamma_\epsilon \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) \right\} \quad (5.10.43)$$

$$= \frac{2^4 M_w^4 G_F^2}{(s - M_w^2)^2} (p_1)_\alpha (p_2)_\beta (p_3)^\epsilon (p_4)^\tau \left[\eta^{\alpha\sigma} \eta^{\beta\rho} + \eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\sigma} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\sigma\rho} - i\varepsilon^{\alpha\sigma\beta\rho} \right] \times \\ \times \left[\eta_{\epsilon\sigma} \eta_{\tau\rho} + \eta_{\epsilon\rho} \eta^{\tau\sigma} - \eta_{\epsilon\tau} \eta_{\sigma\rho} - i\varepsilon_{\epsilon\rho\tau\sigma} \right] \quad (5.10.44)$$

$$= \frac{2^4 M_w^4 G_F^2}{(s - M_w^2)^2} (p_1)_\alpha (p_2)_\beta (p_3)^\epsilon (p_4)^\tau \left[\left(\eta^{\alpha\sigma} \eta^{\beta\rho} + \eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\sigma} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\sigma\rho} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\eta_{\epsilon\sigma} \eta_{\tau\rho} + \eta_{\epsilon\rho} \eta^{\tau\sigma} - \eta_{\epsilon\tau} \eta_{\sigma\rho} \right) - \varepsilon^{\alpha\sigma\beta\rho} \varepsilon_{\epsilon\rho\tau\sigma} \right] \quad (5.10.45)$$

$$= \frac{2^4 M_w^4 G_F^2}{(s - M_w^2)^2} (p_1)_\alpha (p_2)_\beta (p_3)^\epsilon (p_4)^\tau \left[2 \left(\delta_\epsilon^\alpha \delta_\tau^\beta + \delta_\tau^\alpha \delta_\epsilon^\beta \right) - \right. \\ \left. - 2 \left(\delta_\epsilon^\alpha \delta_\tau^\beta - \delta_\tau^\alpha \delta_\epsilon^\beta \right) \right] \quad (5.10.46)$$

$$= \frac{2^4 M_w^4 G_F^2}{(s - M_w^2)^2} 4 (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) \quad (5.10.47)$$

$$= \frac{2^4 M_w^4 G_F^2}{(s - M_w^2)^2} t^2. \quad (5.10.48)$$

5.11 Settore di Higgs

I riferimenti sono p. 527-530 dello Srednicki Science is not a collection of truths. It is a continuing exploration of mysteries. Srednicki.

Per definizione l'Higgs si trasforma in maniera non banale rispetto $SU(2) \times SU(1)$, come:

$$\Phi \longrightarrow e^{-i\theta} U \Phi \quad (5.11.1)$$

mentre non interagisce con i quark essendo essi doppietti di $SU(3)$. Consideriamo:

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (5.11.2)$$

che è invariante per trasformazioni locali di $SU(2) \times SU(1)$ se definiamo la derivata covariante come:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu + \frac{i}{2} g_2 W_\mu^a \sigma^a \quad (5.11.3)$$

dove il primo fattore $1/2$ è una convenzione, mentre il secondo è dovuto al fatto che il generatore di $SU(2)$ è $T^a = \sigma^a/2$, inoltre abbiamo visto che $Y(\Phi) = +1$. Ricordiamo che abbiamo definito:

$$W_\mu = W_\mu^a \sigma^a \quad (5.11.4)$$

$$= \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (5.11.5)$$

$$= \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (5.11.6)$$

in cui avevamo posto:

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (5.11.7)$$

ossia utilizziamo $\sigma^\pm$ anziché σ_1 e σ_2 . Con questa Sostituzione i termini cinetici diventano:

$$\begin{cases} F_{\mu\nu}^1 = \partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1 - g_2 (W_\mu^2 W_\nu^3 - W_\mu^3 W_\nu^2) \\ F_{\mu\nu}^2 = \partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2 - g_2 (W_\mu^1 W_\nu^3 - W_\mu^3 W_\nu^1) \\ F_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 - g_2 (W_\mu^1 W_\nu^2 - W_\mu^2 W_\nu^1) \end{cases} \quad (5.11.8)$$

cioè:

$$\begin{cases} F_{\mu\nu}^+ = \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+ - g_2 (W_\mu^3 W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^3) \\ F_{\mu\nu}^- = \partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^- + g_2 (W_\mu^3 W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^3) \\ F_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 - g_2 (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-) \end{cases} \quad (5.11.9)$$

quindi per la parte $SU(2) \times SU(1)$ (forza elettrodebole di YM) e la parte di Higgs abbiamo:

$$\mathcal{L}_{YMH} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^3 F^{3,\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^+ F^{-,\mu\nu} + (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi). \quad (5.11.10)$$

5.11.1 Rottura della simmetria tramite Higgs

Possiamo scegliere:

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2} \left(\Phi^\dagger \Phi - \phi_0^2 \right)^2 \geq 0 \quad (5.11.11)$$

la scelta di questo potenziale fa sì che tutta la lagrangiana sia invariante rispetto a $SU(2) \times SU(1)$ locali. Vogliamo studiare il vuoto di questa teoria, siccome il potenziale è definito positivo abbiamo che il minimo del potenziale si trova per:

$$\Phi^\dagger \Phi - \phi_0^2 = |\Phi_A|^2 + |\Phi_B|^2 - \phi_0^2 = 0 \quad (5.11.12)$$

una delle soluzioni (quella che si prende convenzionalmente) è:

$$\langle \Phi_A \rangle = 0 \quad , \quad \langle \Phi_B \rangle = \phi_0 \quad (5.11.13)$$

ovvero la configurazione di vuoto è:

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (5.11.14)$$

e siccome $\phi_0 \neq 0$ rispetta le simmetrie di Poincarè. Possiamo espandere rispetto al vuoto considerando $\Phi = \langle \Phi \rangle + \phi$, in cui:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} \quad (5.11.15)$$

sono le oscillazioni di vuoto e ha 4 gradi di libertà (2 per ogni componente).

Vogliamo anche verificare quali simmetrie sono preservate dal vuoto. Per $\sigma^\pm$ abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (5.11.16)$$

cioè il vuoto rompe spontaneamente i generatori σ^1 e σ^2 di $SU(2)$, analogamente per σ^3 abbiamo:

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (5.11.17)$$

e per $U(1)$ abbiamo:

$$e^{-i\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \quad \forall \theta \neq 0. \quad (5.11.18)$$

Quindi apparentemente il vuoto rompe tutti i generatori, tuttavia se combiniamo le due trasformazioni σ^3 e $U(1)$, abbiamo che:

$$e^{-i\theta} U \Phi = \begin{pmatrix} \exp\{-i(\theta - \frac{1}{2}\epsilon^3)\} & 0 \\ 0 & \exp\{-i(\theta + \frac{1}{2}\epsilon^3)\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (5.11.19)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \exp\{-i(\theta + \frac{1}{2}\epsilon^3)\} \phi_0 \end{pmatrix} \quad (5.11.20)$$

questa trasformazione lascia il vuoto invariato nel caso in cui $\theta = -\frac{1}{2}\epsilon^3$. Quindi dei 4 generatori soltanto uno preserva il vuoto, pertanto abbiamo 3 bosoni di Goldstone che possono essere riassorbiti nei bosoni di gauge e quindi abbiamo 3 bosoni massivi: $W_\mu^\pm$ e un'unica combinazione di W_μ^3 e B_μ che chiameremo Z_μ (combinazione ortogonale alla scelta $\theta = -1/2\epsilon^3$), infine abbiamo la particella mass-less che preserva il vuoto e rappresenta l'elettromagnetismo (A_μ).

5.11.2 Calcolo del potenziale

Ci possiamo porre nel gauge unitario dove mettiamo i bosoni di Goldstone a zero perché li possiamo riassorbire tramite una trasformazione di gauge, quindi:

$$\Phi = \langle \Phi \rangle + \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (5.11.21)$$

in cui h è il campo scalare reale di Higgs (già correttamente normalizzato). Abbiamo:

$$\Phi^\dagger \Phi = \left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (5.11.22)$$

$$= \phi_0^2 + \sqrt{2} \phi_0 h + \frac{1}{2} h^2 \quad (5.11.23)$$

$$= \phi_0^2 + \sqrt{2} \phi_0 \left(1 + \frac{h}{2\sqrt{2}\phi_0} \right) h \quad (5.11.24)$$

e anche:

$$V = \frac{m^2}{2\phi_0^2} \left(\Phi^\dagger \Phi - \phi_0^2 \right)^2 \quad (5.11.25)$$

$$= m^2 h^2 \left(1 + \frac{h}{2\sqrt{2}\phi_0} \right)^2 \quad (5.11.26)$$

$$= m^2 h^2 + \frac{m^2 h^3}{\sqrt{2}\phi_0} + \frac{m^2 h^4}{8\phi_0^2} \quad (5.11.27)$$

quindi la massa di Higgs è $m_h^2 = 2m^2$ e possiamo osservare che ha interazioni h^3 e h^4 , dunque possiamo avere un vertice con 3 o 4 gambe esterne.

5.11.3 Calcolo della derivata covariante

Per calcolare il termine cinetico studiamo la derivata covariante. Per semplicità poniamo:

$$\eta = \frac{h}{\sqrt{2}} \quad (5.11.28)$$

e possiamo vedere:

$$D_\mu \Phi = \left[\partial_\mu + \frac{i}{2} g_1 B_\mu + \frac{i}{2} g_2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + \eta \end{pmatrix} \quad (5.11.29)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \eta \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} g_1 B_\mu + g_2 W_\mu^3 & \sqrt{2} g_2 W_\mu^+ \\ \sqrt{2} g_2 W_\mu^- & g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\phi_0 + \eta) \quad (5.11.30)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \eta \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} g_2 W_\mu^+ \\ g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3 \end{pmatrix} (\phi_0 + \eta) \quad (5.11.31)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} g_2 (\phi_0 + \eta) W_\mu^+ \\ \partial_\mu \eta + \frac{i}{2} (\phi_0 + \eta) (g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3) \end{pmatrix} \quad (5.11.32)$$

insieme a:

$$(D_\mu \Phi)^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} g_2 (\phi_0 + \eta) W_\mu^- & , & \partial_\mu \eta - \frac{i}{2} (\phi_0 + \eta) (g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3) \end{pmatrix} \quad (5.11.33)$$

conseguentemente:

$$(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{4} \left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 \left[2g_2^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + (g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3)^2 \right] \quad (5.11.34)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{4} \left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 \left[2g_2^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \right] \quad (5.11.35)$$

con:

$$Z_\mu = \frac{g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (5.11.36)$$

5.11.4 Lagrangiana di Higgs e masse dei bosoni vettori

Abbiamo:

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (5.11.37)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{4} \left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 \left[2g_2^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \right] -$$

$$- m^2 h^2 - \frac{m^2 h^3}{\sqrt{2} \phi_0} - \frac{m^2 h^4}{8 \phi_0^2} \quad (5.11.38)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} m_h^2 h^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} -$$

$$- \frac{1}{4} \left(\frac{h^2}{2} + \sqrt{2} \phi_0 h \right) \left[2g_2^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \right] -$$

$$- \frac{m^2 h^3}{\sqrt{2} \phi_0} - \frac{m^2 h^4}{8 \phi_0^2} \quad (5.11.39)$$

in cui la prima riga di (5.11.39) sono il termine cinetico per h e la masse dei bosoni, mentre la seconda e terza riga rappresentano le interazioni. Le masse dei bosoni di gauge sono:

$$m_H^2 = 2m^2 \quad , \quad m_W^2 = \frac{\phi_0^2 g_2^2}{2} \quad , \quad m_Z^2 = \frac{\phi_0^2}{2} (g_1^2 + g_2^2) \quad (5.11.40)$$

e se sostituiamo:

$$g_1 = -\frac{e}{\cos \theta_w} \quad , \quad g_2 = -\frac{e}{\sin \theta_w} \quad (5.11.41)$$

otteniamo:

$$m_W^2 = \frac{e^2 \phi_0^2}{2 \cos^2 \theta_w} \quad , \quad m_Z^2 = \frac{e^2 \phi_0^2}{2}. \quad (5.11.42)$$

5.12 Lagrangiana di Yang-Mills-Higgs

Possiamo riscrivere:

$$\sin \theta_w = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad , \quad \cos \theta_w = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (5.12.1)$$

in cui θ_w è detto *angolo di Weinberg*. Dunque abbiamo:

$$\begin{cases} A_\mu = \sin \theta_w W_\mu^3 + \cos \theta_w B_\mu \\ Z_\mu = \cos \theta_w W_\mu^3 - \sin \theta_w B_\mu \end{cases} \quad (5.12.2)$$

ovvero:

$$\begin{cases} B_\mu = \cos \theta_w A_\mu - \sin \theta_w Z_\mu \\ W_\mu^3 = \sin \theta_w A_\mu + \cos \theta_w Z_\mu \end{cases} \quad (5.12.3)$$

in cui Z media la corrente debole neutra e A media l'interazione elettromagnetica. Definiamo inoltre:

$$\begin{cases} A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu \\ W_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm \end{cases} \quad (5.12.4)$$

che sostituiamo nei termini cinetici di Yang-Mills. Abbiamo:

$$F_{\mu\nu}^\pm = W_{\mu\nu}^\pm \mp ig_2 \left[\sin \theta_w (A_\mu W_\nu^\mp - W_\mu^\mp A_\nu) + \cos \theta_w (Z_\mu W_\nu^\mp - W_\mu^\mp Z_\nu) \right] \quad (5.12.5)$$

$$F_{\mu\nu}^3 = \left[\sin \theta_w A_{\mu\nu} + \cos \theta_w Z_{\mu\nu} \right] - ig_2 (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-) \quad (5.12.6)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu = \cos \theta_w A_{\mu\nu} - \sin \theta_w Z_{\mu\nu}. \quad (5.12.7)$$

Sostituendo otteniamo la lagrangiana che descrive i bosoni di gauge ed Higgs:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YMH} = & -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^3 F^{3,\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^+ F^{-,\mu\nu} + (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \\ & (5.12.8) \\ = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W_{\mu\nu}^- + \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} m_h^2 h^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} - \\ & - \frac{1}{4} \left(\frac{h^2}{2} + \sqrt{2} \phi_0 h \right) \left[2g_2^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \right] - \\ & - \frac{m^2 h^3}{\sqrt{2} \phi_0} - \frac{m^2 h^4}{8 \phi_0^2} + \\ & + ig_2 \left[\sin \theta_w (W_{\mu\nu}^+ W_-^\mu A^\nu - W_{\mu\nu}^- W_+^\mu A^\nu + F_{\mu\nu} W_+^\mu W_-^\nu) + \right. \\ & + \cos \theta_w (W_{\mu\nu}^+ W_-^\mu Z^\nu - W_{\mu\nu}^- W_+^\mu Z^\nu + Z_{\mu\nu} W_+^\mu W_-^\nu) \left. \right] + \\ & + \frac{g_2^2}{2} (2g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \left[W_\mu^+ W_\nu^- (A_\rho A_\sigma \sin^2 \theta_w + \right. \\ & + Z_\rho Z_\sigma \cos^2 \theta_w + 2A_\rho Z_\sigma \sin \theta_w \cos \theta_w) - \\ & \left. - \frac{1}{2} W_\mu^+ W_\nu^+ W_\rho^- W_\sigma^- \right]. \quad (5.12.9) \end{aligned}$$

Osservazione. I parametri della teoria sono "liberi", ovvero non vengono fissati dalla teoria e devono essere determinati dagli esperimenti.

5.13 Masse dei leptoni tramite Higgs

Nel modello standard l'elettrone è massivo, mentre il neutrino è considerato massless, inoltre il termine di massa deve rispettare tutte le simmetrie (Lorentz e gauge). Per fare in modo di avere un oggetto invariante per Lorentz e per $SU(2) \times U(1)$ dobbiamo considerare $L^+ \Phi e_R + e_R^+ \Phi^\dagger L$, espandiamo la teoria intorno al vuoto e verifichiamo che questo è un termine di massa (nota: Φ è il campo di Higgs ed è un doppietto, moltiplicare due doppietti ci permette di ottenere un singoletto). Vediamo:

$$L^+ \Phi e_R + e_R^+ \Phi^\dagger L = \begin{pmatrix} \nu_e^+ & e_L^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e_R + e_R^+ \begin{pmatrix} 0 & \phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \quad (5.13.1)$$

$$= \left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right) \left(e_L^+ e_R + e_R^+ e_L \right) \quad (5.13.2)$$

che contiene il termine di massa (a meno di una costante moltiplicativa). Definiamo:

$$L^a = \left\{ \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu_L \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau_L \end{pmatrix} \right\} , \quad l_R^a = (e_R, \mu_R, \tau_R) \quad (5.13.3)$$

dunque la lagrangiana per i leptoni è:

$$\mathcal{L}_{lep} = \sum_a \left[(L^a)^+ \bar{\sigma}^\mu i D_\mu L^a + (l_R^a)^+ \sigma^\mu i D_\mu l_R^a - c^a \left((L^a)^+ \Phi l_R^a + (l_R^a)^+ \Phi^\dagger L^a \right) \right]. \quad (5.13.4)$$

5.14 Adroni e quark

Sperimentalmente si osserva e:

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e \\ p^+ &\longrightarrow n + e^+ + \nu_e \end{aligned}$$

il protone ($p = u u d$) e il neutrone ($n = d d u$) sono degli adroni, ovvero degli stati legati di quark, quindi bisogna inserire dei termini di interazione tra i quark e i bosoni di gauge. Per ora consideriamo solo i quark up ($q_u = \frac{2}{3} e$) e down ($q_d = -\frac{1}{3} e$), che possono esistere sia come particelle left sia come right, siccome l'interazione debole rompe la parità, definiamo i doppietti left e i singoletti right per $SU(2)$:

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} , \quad Q_R = \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} \quad (5.14.1)$$

dove u e d (sia L sia R) sono spinori di Weyl. Possiamo descrivere l'interazione elettrodebole come per i leptoni:

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2} g_2 W_\mu + \frac{i}{2} g_1 Y B_\mu \quad (5.14.2)$$

$$= \partial_\mu + \frac{i}{2} g_2 \sqrt{2} (W_\mu^+ \sigma_+ + W_\mu^- \sigma_-) + i \left(g_2 I_3 W_\mu^3 + g_1 \frac{Y}{2} B_\mu \right) \quad (5.14.3)$$

sostituiamo:

$$\begin{cases} B_\mu = \cos \theta_w A_\mu - \sin \theta_w Z_\mu \\ W_\mu^3 = \sin \theta_w A_\mu + \cos \theta_w Z_\mu \end{cases} \quad (5.14.4)$$

$$g_1 = -\frac{e}{\cos \theta_w} \quad , \quad g_2 = -\frac{e}{\sin \theta_w} \quad , \quad Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (5.14.5)$$

così otteniamo il termine:

$$g_2 I_3 W_\mu^3 + g_1 \frac{Y}{2} B_\mu = -e \left(Q A_\mu + \frac{\cos \theta_w}{\sin \theta_w} I_3 Z_\mu - \frac{\sin \theta_w}{\cos \theta_w} \frac{Y}{2} Z_\mu \right) \quad (5.14.6)$$

$$= -e Q A_\mu - \frac{e}{\tan \theta_w} \left(I_3 - \tan^2 \theta_w \frac{Y}{2} \right) Z_\mu \quad (5.14.7)$$

$$= -e Q A_\mu - \frac{e}{\sin \theta_w \cos \theta_w} \left(\cos^2 \theta_w I_3 - \sin^2 \theta_w \frac{Y}{2} \right) Z_\mu \quad (5.14.8)$$

$$= -e Q A_\mu - \frac{2e}{\sin(2\theta_w)} \left(I_3 - \sin^2 \theta_w Q \right) Z_\mu \quad (5.14.9)$$

per cui l'interazione (5.14.3) è:

$$iD_\mu = i\partial_\mu + e Q A_\mu + \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} (W_\mu^+ \sigma_+ + W_\mu^- \sigma_-) + \frac{2e}{\sin(2\theta_w)} (I_3 - \sin^2 \theta_w Q) Z_\mu \quad (5.14.10)$$

e di conseguenza:

$$\begin{aligned} i\bar{Q}_L \not{D} Q_L &= i\bar{Q}_L \not{\partial} Q_L + e \left(\frac{2}{3} \bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \frac{1}{3} \bar{d}_L \gamma^\mu d_L \right) A_\mu + \\ &+ \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} (\bar{u}_L \gamma^\mu W_\mu^+ d_L + \bar{d}_L \gamma^\mu W_\mu^- u_L) + \\ &+ \frac{2e}{\sin(2\theta_w)} \left[\bar{u}_L \gamma^\mu \left(+\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_L + \right. \\ &\left. + \bar{d}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_L \right] Z_\mu \quad (5.14.11) \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} i\bar{u}_R \not{D} u_R + i\bar{d}_R \not{D} d_R &= i\bar{u}_R \not{\partial} u_R + i\bar{d}_R \not{\partial} d_R + \\ &+ e \left(\frac{2}{3} \bar{u}_R \gamma^\mu u_R - \frac{1}{3} \bar{d}_R \gamma^\mu d_R \right) A_\mu - \\ &- \frac{2e}{\sin(2\theta_w)} \left(\frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \bar{u}_R \gamma^\mu u_R - \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \bar{d}_R \gamma^\mu d_R \right) Z_\mu. \end{aligned} \quad (5.14.12)$$

La lagrangiana massless di interazione debole per il settore dei quark è:

$$\mathcal{L}_{quark} = i\bar{Q}_L \not{D} Q_L + i\bar{u}_R \not{D} u_R + i\bar{d}_R \not{D} d_R \quad (5.14.13)$$

$$\begin{aligned} &= i\bar{u} \not{\partial} u + i\bar{d} \not{\partial} d + e \left(\frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu d \right) A_\mu + \\ &+ \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_w} \left(\bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^+ d + \bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^- u \right) + \\ &+ \frac{e}{2 \sin(2\theta_w)} \left[\bar{u} \gamma^\mu \left(1 - \gamma_5 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_w \right) u - \right. \\ &\left. - \bar{d} \gamma^\mu \left(1 - \gamma_5 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w \right) d \right] Z_\mu. \end{aligned} \quad (5.14.14)$$

Volendo si può partire dalla derivata covariante generica:

$$D_\mu Q_L = \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} g_2 W_\mu + \frac{i}{2} g' B_\mu \right) Q_L \quad (5.14.15)$$

$$D_\mu u_R = \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} g'' B_\mu \right) u_R \quad (5.14.16)$$

$$D_\mu d_R = \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} g''' B_\mu \right) d_R. \quad (5.14.17)$$

Come prima s'intende $W_\mu = W_\mu^a \sigma^a$, g_2 è già fissata (vedi la sezione §5.14.1), mentre le costanti g' , g'' , g''' sono arbitrarie e verranno fissate imponendo le cariche dei quark¹. Inoltre, la parte cinetica della lagrangiana la possiamo anche scrivere nella forma:

$$\mathcal{L}_{K,q} = Q_L^\dagger i \bar{\sigma}^\mu D_\mu Q_L + u_R^\dagger i \sigma^\mu D_\mu u_R + d_R^\dagger i \sigma^\mu D_\mu d_R. \quad (5.14.18)$$

Notiamo anche che $\bar{\sigma}^\mu$ e i campi sono dei numeri per $SU(2)$, ma non lo sono per Lorentz.

5.14.1 Nota sulle costanti di accoppiamento

Se consideriamo una trasformazione per cui la derivata covariante è:

$$D_\mu \Psi = \left(\partial_\mu + i A_\mu^a T^a \right) \Psi \quad (5.14.19)$$

¹**Nota.** Questa g' non c'entra nulla con quella dei leptoni

allora abbiamo:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (\partial_\mu + i A_\mu^a T^a) \Psi - \frac{1}{4g_2^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (5.14.20)$$

in cui abbiamo:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]. \quad (5.14.21)$$

Non possiamo mettere una costante arbitraria dentro la derivata covariante, altrimenti la lagrangiana non sarebbe più invariante! Tuttavia possiamo fare una trasformazione:

$$A_\mu \longrightarrow g_2 A_\mu \quad (5.14.22)$$

dunque:

$$F_{\mu\nu} = g_2 (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i g_2 [A_\mu, A_\nu]) \quad (5.14.23)$$

cioè:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (\partial_\mu + i g_2 A_\mu^a T^a) \Psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (5.14.24)$$

ricordiamo che la rappresentazione del gruppo di gauge (fondamentale, aggiunta) fissa la forma della derivata covariante ma non cambia il valore di g_2 . Per una trasformazione abeliana $U(1)$, cambiare la rappresentazione è equivalente ad assegnare la carica: il campo trasforma come:

$$\Psi \longrightarrow e^{iqa} \Psi \quad (5.14.25)$$

dunque la derivata covariante è:

$$D_\mu = \partial_\mu + iq A_\mu. \quad (5.14.26)$$

Assegnare un valore a g' , g'' , g''' equivale ad assegnare il valore di ipercarica per le varie componenti.

5.15 Mixing dei quark

Come i leptoni, esistono 3 famiglie per i quark, tuttavia diversamente dai leptoni (almeno per il modello standard) i quark possono mischiarsi; questo veniva direttamente dalle osservazioni sperimentali. Negli anni '60 vengono scoperti dei processi elettro-deboli che portano alla formazione del quark strange, ciò avviene tramite la corrente:

$$j^\mu = \bar{u} \bar{\sigma}^\mu d \cos \theta_c + \bar{u} \bar{\sigma}^\mu s \sin \theta_c \quad (5.15.1)$$

dove θ_c è detto **angolo di Cabibbo** (sperimentalmente si trova $\sin \theta_c \approx 0.22$).

Il quark down e strange non sono autostati di interazione, quindi Cabibbo propose di riscrivere il doppietto come:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix}. \quad (5.15.2)$$

Se studiamo solo la parte di corrente neutra:

$$\begin{aligned} & \left(d_L^+ \cos \theta_c + s_L^+ \sin \theta_c \right) \bar{\sigma}^\mu \frac{e}{3 \sin(2\theta_w)} \left(2 + \cos(2\theta_w) \right) Z_\mu \left(d_L \cos \theta_c + s_L \sin \theta_c \right) = \\ & = \frac{2}{3} e \frac{1 + \cos(2\theta_w)}{\sin(2\theta_w)} Z_\mu \sin \theta_c \cos \theta_c \left(s_L^+ \bar{\sigma}^\mu d_L + d_L^+ \bar{\sigma}^\mu s_L \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.15.3)$$

Questa è la parte di corrente di mixing tra down e strange, tuttavia sperimentalmente si osservava che i processi con $\Delta Q = 0$ (carica elettrica), $\Delta s = 1, 2$ (strangeness) erano molto soppressi e non venivano spiegati dall'ipotesi di Cabibbo.

Nel '70 viene proposto il meccanismo GIM (Glashow-Iliopoulos-Maiani) che richiede l'esistenza del quark charm, che ha carica $\frac{2}{3}e$ e che forma un doppietto con il quark strange, e per cui il mixing viene scritto tramite una matrice di rotazione:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (5.15.4)$$

tale per cui abbiamo:

$$\begin{cases} d' = d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \\ s' = -d \sin \theta_C + s \cos \theta_C \end{cases} \quad (5.15.5)$$

in cui d' e s' sono gli autostati di interazione.

Successivamente sono stati scoperti anche top e bottom, dunque possiamo generalizzare:

$$Q_L^a = \begin{pmatrix} u_L^a \\ d_L^a \end{pmatrix}, \quad Q_R^a = \begin{pmatrix} u_R^a \\ d_R^a \end{pmatrix} \quad a = \{1, 2, 3\} \quad (5.15.6)$$

che non sono i quark fisici, ma le loro combinazioni lineari. La parte cinetica è:

$$\mathcal{L}_K = \sum_a \mathcal{L}_K(u^a, d^a) \quad (5.15.7)$$

come in precedenza. Nei termini di massa non possiamo mettere direttamente $u_L^+ u_R + u_R^+ u_L$ perchè non è invariante per $SU(2)$ (L è un doppietto,

R è un singoletto), ma possiamo usare il doppietto di Higgs, in questo modo abbiamo:

$$Q_L'^+ \Phi' = (U Q_L)^+ (U \Phi) = Q_L^+ U^+ U \Phi = Q_L^+ \Phi \quad (5.15.8)$$

con $U \in SU(2)$. Quindi abbiamo che:

$$\mathcal{L}_m(d) = - \sum_{a,b=1}^3 \left[G_{ab}^{(d)} (Q_L^a)^+ \Phi d_R^b + \tilde{G}_{ab}^{(d)} \left(d_R^b \right)^+ \Phi^+ Q_L^a \right] \quad (5.15.9)$$

in cui $G_{ab}^{(d)}$ è una matrice complessa 3x3 che permette il mixing.

In corrispondenza del vuoto ritroviamo i termini di massa, ma solo per il quark down:

$$Q_L^+ \Phi = \begin{pmatrix} u^+ & d^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \phi_0 d_L^+ \quad (5.15.10)$$

quindi:

$$\mathcal{L}_m(d) = -\phi_0 \sum_{a,b=1}^3 \left[G_{ab}^{(d)} (d_L^a)^+ d_R^b + \tilde{G}_{ab}^{(d)} \left(d_R^b \right)^+ d_L^a \right] \quad (5.15.11)$$

$$= - (D_L d_L)^+ M^{(d)} (D_R d_R)^+ M^{(d)} (D_L d_L) \quad (5.15.12)$$

in cui abbiamo diagonalizzato:

$$\phi_0 G^{(d)} = D_L^+ M^{(d)} D_R \quad (5.15.13)$$

in cui qui le D sono due matrici unitarie ed $M^{(d)}$ è diagonale con elementi reali. Inoltre, i termini D_L , d_L , D_R e d_R sono i quark fisici per la componente down.

Osserviamo che δ_{AB} è invariante per $SU(2)$, infatti:

$$(U_B^A)^+ \delta_A^C U_C^D = U^+ U = \mathbb{1} \quad (5.15.14)$$

ma anche il tensore anti-simmetrico (ε_{AB}) è invariante, infatti:

$$Q_L^+ \varepsilon \Phi \longrightarrow Q_L^+ U^+ \varepsilon U \Phi = Q^+ \Phi \quad (5.15.15)$$

poiché:

$$U^+ \varepsilon U = 1. \quad (5.15.16)$$

Quindi possiamo scrivere il termine di massa per il quark up come segue:

$$\mathcal{L}_m(u) = - \sum_{a,b=1}^3 \left[G_{ab}^{(u)} \left((Q_L^a)^+ \varepsilon \Phi^* \right) u_R^b - \tilde{G}_{ab}^{(u)} \left(u_R^b \right)^+ (\Phi^T \varepsilon Q_L^a) \right] \quad (5.15.17)$$

in cui il segno negativo relativo viene dal fatto che ε è antisimmetrico.

Se studiamo il vuoto:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (5.15.18)$$

abbiamo che:

$$\begin{cases} (Q_L^a)^+ \varepsilon \Phi^* = \begin{pmatrix} (u_L^a)^+ & (d_L^a)^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \phi_0 (u_L^a)^+ \\ \Phi^T \varepsilon Q_L^a = \begin{pmatrix} 0 & \phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L^a \\ d_L^a \end{pmatrix} = -\phi_0 u_L^a \end{cases} \quad (5.15.19)$$

sostituendo nella lagrangiana, il segno negativo relativo si semplifica:

$$\mathcal{L}_m(u) = - \sum_{a,b=1}^3 \left[G_{ab}^{(u)} (u_L^a)^+ u_R^b - \tilde{G}_{ab}^{(u)} \left(u_R^b \right)^+ u_L^a \right] \quad (5.15.20)$$

$$= - \left[(U_L u_L)^+ M^{(u)} (U_R u_R) + (U_R u_R)^+ M^{(u)} (U_L u_L) \right] \quad (5.15.21)$$

in cui abbiamo diagonalizzato come prima tramite:

$$\phi_0 G^{(u)} = U_L^+ M^{(u)} U_R \quad (5.15.22)$$

inoltre, i quark fisici sono U_L , u_L , U_R e u_R .

Quindi riassumendo i quark fisici sono:

$$\begin{cases} \tilde{d}_L^a = D_{L,ab} d_L^b \\ \tilde{d}_R^a = D_{R,ab} d_R^b \end{cases}, \quad \begin{cases} \tilde{u}_L^a = U_{L,ab} u_L^b \\ \tilde{u}_R^a = U_{R,ab} u_R^b \end{cases} \quad (5.15.23)$$

inoltre consideriamo:

$$M^{(d)} = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix}, \quad M^{(u)} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \quad (5.15.24)$$

per comodità di seguito indicheremo i quark fisici come:

$$u_L, \quad u_r, \quad d_L, \quad d_R \quad (5.15.25)$$

cioè rinominiamo:

$$\tilde{u} \longrightarrow u \quad (5.15.26)$$

$$\tilde{d} \longrightarrow d. \quad (5.15.27)$$

La lagrangiana completa dei quark è:

$$\mathcal{L}_q = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{qA} + \mathcal{L}_{qZ} + \mathcal{L}_{qW} + \mathcal{L}_{qH} \quad (5.15.28)$$

in cui abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{qA} = \sum_{a=1}^3 i \left[u_{L,a}^+ \bar{\sigma}^\mu \left(\partial_\mu + i \frac{2}{3} e A_\mu \right) u_{L,a} + u_{R,a}^+ \sigma^\mu \left(\partial_\mu + i \frac{2}{3} e A_\mu \right) u_{R,a} + \right. \\ \left. + d_{L,a}^+ \bar{\sigma}^\mu \left(\partial_\mu - i \frac{1}{3} e A_\mu \right) d_{L,a} + d_{R,a}^+ \sigma^\mu \left(\partial_\mu - i \frac{1}{3} e A_\mu \right) d_{R,a} \right] \quad (5.15.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{qZ} = \sum_{a=1}^3 \frac{e}{\sin(2\theta_w)} \left[- \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_{L,a}^+ \bar{\sigma}^\mu u_{L,a} + \left(\frac{4}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_{R,a}^+ \sigma^\mu u_{R,a} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_{L,a}^+ \bar{\sigma}^\mu d_{L,a} - \left(\frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_{R,a}^+ \sigma^\mu d_{R,a} \right] Z_\mu \quad (5.15.30) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{qW} = - \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \left(u_L^+, c_L^+, t_L^+ \right) \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu d_L \\ \bar{\sigma}^\mu s_L \\ \bar{\sigma}^\mu b_L \end{pmatrix} W_\mu^+. \quad (5.15.31)$$

Dove definiamo la matrice CKM (Cabibbo-Kobayashi-Moskawa) come $V = U_L D_L^+$, inoltre si osserva che:

$$V^+ V = (U_L D_L^+)^+ (U_L D_L^+) = D_L U_L^+ U_L D_L^+ = D_L D_L^+ = 1. \quad (5.15.32)$$

Osserviamo che in teoria V contiene 9 parametri, ma 5 di questi parametri sono delle fasi e possono essere riassorbite nella definizione dei quark fisici. Quindi, abbiamo 4 parametri indipendenti: 3 angoli reali (θ_{12} , θ_{13} , θ_{23}) e una fase complessa (δ) che devono essere determinati sperimentalmente. Possiamo riscrivere V in funzione dei 4 parametri indipendenti (notazione $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$):

$$\begin{aligned} V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\delta}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.15.33) \end{aligned}$$

La parità è esplicitamente rotta, ma potremmo avere un'invarianza per la simmetria CP, ricordiamo che per CP abbiamo:

$$W_0^+ \longrightarrow -W_0^+ \quad (5.15.34)$$

$$W_i^+ \longrightarrow W_i^+ \quad (5.15.35)$$

$$q_L \longrightarrow -i\sigma^2 q_L^+ \quad (5.15.36)$$

$$q_R \longrightarrow i\sigma^2 q_R^+ \quad (5.15.37)$$

dunque:

$$\mathcal{L}_{qW} = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \sum_{a,b=1}^3 \left[u_{L,a}^+ \bar{\sigma}^\mu V_{ab} d_{L,b} W_\mu^+ + d_{L,b}^+ V_{ab}^* \bar{\sigma}^\mu u_{L,a} W_\mu^- \right] \quad (5.15.38)$$

si trasforma come:

$$\mathcal{L}_{qW}^{CP} = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \sum_{a,b=1}^3 \left[-u_{L,a}^T (\bar{\sigma}^\mu)^T V_{ab} d_{L,b}^* W_\mu^- - d_{L,b}^T (\bar{\sigma}^\mu)^T V_{ab}^* u_{L,a}^* W_\mu^+ \right] \quad (5.15.39)$$

$$= -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \sum_{a,b=1}^3 \left[d_{L,b}^+ \bar{\sigma}^\mu V_{ab} u_{L,a} W_\mu^- + u_{L,a}^+ \bar{\sigma}^\mu V_{ab}^* d_{L,b} W_\mu^+ \right] \quad (5.15.40)$$

pertanto abbiamo l'invarianza di CP solo se $V = V^*$, nel 1964 viene osservata la violazione di CP per le interazioni deboli.

Bibliography

- [1] John Iliopoulos and Theodore N. Tomaras. *Elementary Particle Physics*. Oxford University Press, 2021.
- [2] Tom Lancaster and Stephen J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 2014.
- [3] Horatiu Nastase. *Introduction to Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1970.
- [4] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.
- [5] Pierre Ramond. *Field theory: a modern primer*. 1981.
- [6] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.
- [7] M. Srednicki. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 2007.