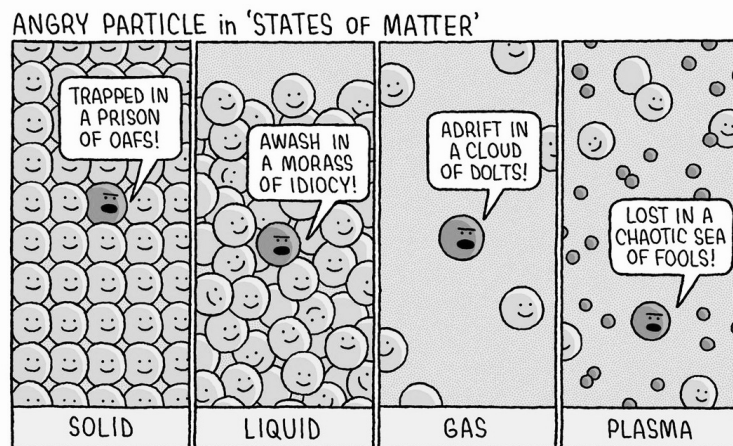


Appunti del corso di:

Fisica della Materia Condensata

Gabriele Cembalo

A.A. 2025-2026



Università degli Studi di Torino
Dipartimento di Fisica
Via Giuria, 1, Torino (TO)

Most important part of doing
physics is the knowledge of
approximation.

Lev Landau

Prefazione

In questo documento intendo raccogliere i miei appunti basati sul materiale del corso “**Fisica della Materia Condensata**”, tenuto dal Prof. R. Tateo e seguito presso *Università degli Studi di Torino* nell’anno accademico 2025-2026. Durante il corso sono stati consigliati diversi libri (elencati in Bibliografia), e cercherò di indicare i riferimenti corrispondenti all’inizio di ogni capitolo.

Questi appunti sono una versione riscritta delle note prese durante le lezioni, quindi la fonte principale è il materiale presentato dal professore. Declino ogni responsabilità e rimando alla mia pagina personale per saperne di più su questi appunti e sul fatto che non hanno natura né accademica né didattica.

Questi appunti vanno chiaramente intesi come note personali, riscritte in maniera ordinata a partire dalle lezioni. Eventuali sviste, errori o imprecisioni sono dovuti ai miei limiti. Inoltre, ho scritto questi appunti principalmente per “spiegare” a me stesso l’argomento, quindi alcune sezioni potrebbero risultare eccessivamente dettagliate o, al contrario, troppo superficiali a seconda del lettore. In ogni caso, spero possano comunque essere utili a qualcuno. Spero anche di essere riuscito a produrre un documento chiaro e ben strutturato.

Una raccolta dei miei appunti è disponibile sulla mia pagina GitHub personale: gCembalo.github.io.

Eventuali errori o refusi possono essere segnalati alla mia email personale: g70362643@gmail.com.

Last update: 09/09/2026

Indice

1	Superfluidità	1
1.1	Elio II e la transizione λ	1
1.1.1	Le forze di Van der Waals	2
1.1.2	Densità, calore specifico e diagramma di fase dell'elio fluido	4
1.1.3	Elio superfluido	7
1.1.4	Lunghezza d'onda termica di de Broglie	7
1.1.5	Modello a due fluidi	8
1.2	Elio liquido (altre proprietà)	9
1.2.1	Effetto termomeccanico	11
1.2.2	Esperimento del beaker	13
1.2.3	Conducibilità termica infinita e secondo suono	16
1.2.4	Viscosità nulla e velocità critica	18
1.3	Lo stato quantistico macroscopico	21
1.3.1	Elio II in rotazione e quantizzazione della circuitazione	23
1.3.2	Vortici con circuitazione quantizzata	25
1.3.3	Energia di un vortice	26
1.3.4	Velocità critica dei vortex rings	27
1.4	Equazione di Schrödinger non lineare, equazione di Gross- Pitaevskii	30
1.4.1	Rottura spontanea di simmetria	33
1.4.2	Le pseudoparticelle di Bogoliubov	34
1.4.3	Il solitone	37
1.5	Quantizzazione canonica	43
1.5.1	L'oscillatore armonico come teoria di campo in 0+1 dim.	44
1.5.2	Stati coerenti	46
1.5.3	Principio di indeterminazione $N \leftrightarrow \theta$	51
1.6	Quantizzazione dell'equazione GP	54
1.6.1	Stato ad una particella	56
1.6.2	Stato a due particelle	57
1.6.3	Operatore numero di particelle $\hat{N}$	60
1.6.4	Spazio dei momenti	61
1.6.5	Approssimazione di Bogoliubov	64

1.6.6	Trasformazione di Bogoliubov (bosoni)	67
1.6.7	Diagonalizzazione di $\hat{H}_B$	69
1.6.8	Coefficienti u_k e v_k	70
1.6.9	Deplezione quantistica	72
2	Superconduttività	75
2.1	Effetto Meissner-Ochsenfeld	77
2.2	Superconduttori di tipo I	79
2.2.1	Corrente critica	80
2.3	Superconduttori di tipo II	80
2.4	Termodinamica dei superconduttori	81
2.5	Le equazioni di London	84
2.5.1	Lunghezza di penetrazione	86
2.6	Il modello di Landau-Ginzburg	87
2.6.1	Teoria di Landau-Ginzburg per sistemi inhomogenei	90
2.6.2	Interfaccia nei superconduttori	91
2.6.3	Teoria di Landau-Ginzburg in campo magnetico	94
2.6.4	Simmetria di gauge	96
2.7	Quantizzazione del flusso	98
2.7.1	Effetto Josephson	100
2.7.2	Interferenza quantistica	103
2.8	Il modello di Cooper, teoria BCS	105
2.8.1	Coppie di Cooper	106
2.8.2	L'effetto isotopico	109
2.8.3	Lo stato fondamentale BCS e la seconda quantizzazione (fermioni)	110
2.8.4	Hamiltoniana	114
2.8.5	Autovettori delle matrici $M(\Delta)$ e $M(-\Delta)$	119
2.8.6	Il gap di energia Δ e le quasi-particelle	119
2.8.7	Il gap di energia a temperatura finita	124
2.8.8	Temperatura critica	125
2.8.9	Dipendenza del gap Δ dalla temperatura	126
2.8.10	Densità degli stati	127
2.8.11	Andreev scattering	128
2.8.12	La corrente	131
3	Effetto Hall quantistico	133
3.1	Introduzione	133
3.2	Effetto Hall classico	134
3.2.1	I livelli di Landau	137
3.2.2	Gauge di Landau	138
3.2.3	Degenerazione e fattore di riempimento	140
3.2.4	Splitting dei livelli di energia	142
3.2.5	La formula di von Klitzing	145

3.3	La carica delle pseudoparticelle e il "Gedanken experiment" di Laughlin	146
3.4	Gauge simmetrico	148
3.4.1	Lo stato $\nu = 1$ a molti elettroni	151
3.4.2	Effetto Hall frazionario	157
	Appendici	161
A	Gas di Bose-Einstein ideale	163
A.1	Gas di Bose ideale	163
	Bibliografia	172

Capitolo 1

Superfluidità

Vediamo in questo capitolo la trattazione della superfluidità.

1.1 Elio II e la transizione λ

L'elio fu scoperto nel 1868 dall'astronomo francese Janssen durante un'eclisse totale in India, in cui osservò una linea dello spettro di emissione di una stella molto pronunciata, non corrispondente ad altri elementi della tavola periodica all'ora conosciuta. Nel 1895 fu osservato da Ramsay, Cleve e Langlet all'interno di un minerale, la clevite, contenente materiale radioattivo come uranio e torio. Sappiamo, sapevano, che il decadimento α non è altro che l'emissione di atomi di He, per cui una volta che il materiale decadeva, "bastava" frantumare il minerale per isolarlo. Fu l'ultimo gas a essere stato liquefatto (a causa della sua bassissima temperatura di fusione); ciò è avvenuto la prima volta nel 1908 grazie a Kamerlingh Onnes nei laboratori a Leiden, in Olanda. Le sue caratteristiche principali sono:

- Gas nobile, leggero e inerte alla temperatura ambiente, senza colore, odore e sapore: esso non si combina molto facilmente e sfugge dalla gravitazione terrestre, quello che esiste proviene da decadimenti radioattivi; è più facile trovarlo nei giacimenti di gas naturale fino al 7% e nelle rocce.
- Elemento più abbondante nell'Universo dopo l'idrogeno.
- Ha due isotopi stabili (${}^4\text{He} \rightarrow$ bosone con spin nucleare $I = 0$; in quanto tale ha transizione di fase del tipo condensazione di Bose-Einstein; ${}^3\text{He} \rightarrow$ fermione con spin nucleare $I = 1/2$; si ha una transizione di fase simile alla superconduttività) e due isotopi instabili (${}^6\text{He} \rightarrow$ tempo di dimezzamento $T_{1/2} \sim 0,82$ s e ${}^8\text{He} \rightarrow$ tempo di dimezzamento $T_{1/2} \sim 0,12$ s).

1.1.1 Le forze di Van der Waals

L'He ha tutte le shell elettroniche piene e ha delle interazioni molto sopresse, comunque presenti, e per essere osservate c'è bisogno di abbassare notevolmente la temperatura. Le interazioni che sente l'He sono di tipo dipolo-dipolo.

La simmetria del dipolo è perfettamente sferica; le interazioni dipolo-dipolo sono molto deboli, quindi non ha un momento di dipolo permanente, ma ci sono fluttuazioni di dipolo che gli permettono di passare, per esempio, dallo stato gassoso a quello liquido.

Le transizioni di fase sono causate dalle forze di Van der Waals; il potenziale usato per descrivere queste forze ha la forma del potenziale standard di Lennard-Jones; data r la distanza tra un atomo di elio ed un altro:

$$\phi(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \quad (1.1.1)$$

dove: la prima componente è repulsiva a corto raggio, la seconda, legata alle forze di Van der Waals, è attrattiva e si hanno le costanti $\epsilon/k_B = 10.2$ K, $\sigma = 2.56$ Å e k_B è la costante di Boltzmann. Se volessimo fare una trattazione più accurata dovremmo utilizzare un andamento esponenziale per la parte repulsiva a corto range, ed un andamento a potenze di ordine 8, etc. per la parte attrattiva.

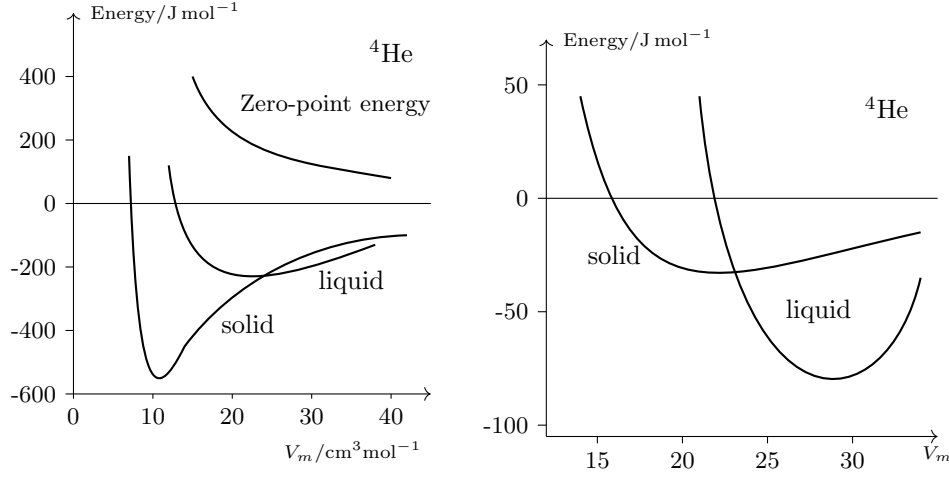
L'energia potenziale si ottiene calcolando, in coordinate sferiche:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dr n(r) 4\pi r^2 \phi(r) \quad (1.1.2)$$

$$= \frac{A}{V_m^4} - \frac{B}{V_m^2} \quad (1.1.3)$$

Il fattore $1/2$ è introdotto per evitare il doppio conteggio degli atomi; $n(r)$ è la densità radiale degli atomi; V_m è il volume molare, ottenuto facendo opportune considerazioni dimensionali. Questa formula vale sia per lo stato gassoso che per lo stato liquido: la competizione tra i due volumi molari nei due stati determina qual è lo stato più stabile a bassa temperatura (nei sistemi standard), o meglio la differenza di energia potenziale nel liquido e nel solido dipende dalla densità $n(r)$ nelle due fasi. I due coefficienti A e B sono due parametri fissabili dagli esperimenti. Si può vedere i corrispondente diagramma nella figura 1.1.

In generale a temperature basse, lo stato solido ha un punto di minimo che corrisponde a uno stato che minimizza l'energia; in questo regime è soppresso il comportamento termodinamico, legato al variare della temperatura, ed emergono fenomeni quantistici: una particella in una buca di potenziale ha un'energia minima diversa da zero che dipende dal volume a disposizione della particella (per il principio di indeterminazione di Heisenberg).



(a) Energia di punto zero e il potenziale in solido e liquido dell' ^4He a $T = 0$ K in funzione del volume molare. (b) Energia totale di ^4He a $T = 0$ K in funzione del volume molare.

Figura 1.1

Supponiamo quindi $T = 0$, dove i fenomeni quantistici sono dominanti: data una particella in una scatola di lato L con condizioni fisse al bordo, la sua energia sarà:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\pi(n_i + 1)}{L} \right)^2. \quad (1.1.4)$$

Se consideriamo l'energia del punto zero, ovvero lo stato fondamentale $n_i = 0$:

$$E_0 = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2m V_m^{2/3}} \sim \frac{1}{V_m^{2/3}}. \quad (1.1.5)$$

L'energia E_0 tende a zero per grandi V_m , quindi "alza" la curva legata alla fase solida: quindi a $T = 0$, e a pressione atmosferica, la fase liquida è più stabile di quella solida, con un volume molare di circa $28 \text{ cm}^3/\text{mol}$. Si veda la tabella 1.1.

	^3He	^4He
boiling temperature at normal pressure T_b (K)	3.19	4.21
critical temperature T_c (K)	3.32	5.19
critical pressure p_c (bar)	1.16	2.29
density for $T \rightarrow 0$ ρ_0 (gcm^{-3})	0.076	0.145
density at boiling point ρ_0 (gcm^{-3})	0.055	0.125

Tabella 1.1: Alcuni importanti parametri di ^3He e ^4He .

1.1.2 Densità, calore specifico e diagramma di fase dell'elio fluido

Heike Kamerlingh Onnes scoprì che la densità dell'elio fluido è eccezionalmente piccola. In aggiunta, egli fece una scoperta sorprendente: trovò che la densità dell'elio ^4He , così come ci si aspettava, aumentava al diminuire della temperatura, ma che aveva un massimo a circa $T = 2$ K e che si espandeva di nuovo a temperature più basse, zona in cui hanno il sopravvento i termini quantistici, come si vede in figura 1.2. Infatti, in quel dato punto c'è una sovrapposizione di fluttuazioni classiche e quantistiche.

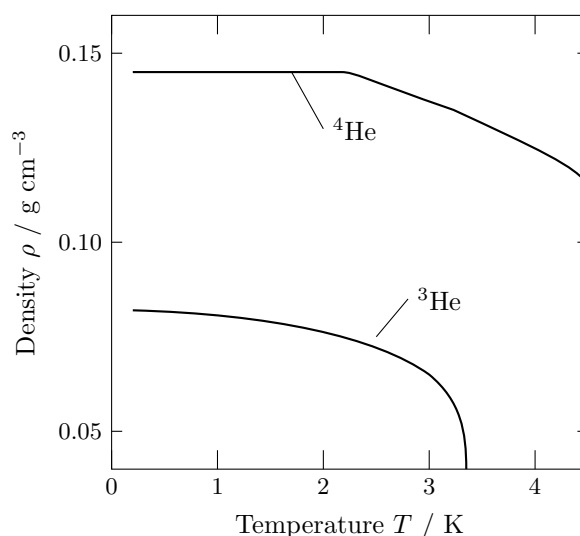


Figura 1.2: Dipendenza dalla temperatura della densità del liquido di ^3He e ^4He .

Nel 1923 Dana e Kamerlingh Onnes scoprirono (in realtà pensarono inizialmente ad un errore sperimentale) una crescita vertiginosa del calore specifico attorno a $T = 2$ K, si veda la figura 1.3. Nel 1932 Keesom e K. Clausius confermarono la scoperta, fissando a $T = 2.17$ K la temperatura a cui avviene la transizione all'interno dello stato liquido del sistema. La natura di questa transizione di fase (di secondo ordine, dunque continua) rimase sconosciuta per molto tempo. Infatti, non si sapeva come spiegare tale dato, poiché si era in una fase liquida sia prima che dopo la temperatura critica. Per cui le due fasi dell'elio liquido ^4He vennero battezzate:

- Elio I quando $T > 2.17$ K.
- Elio II quando $T < 2.17$ K.

Questa *temperatura critica* è indicata con $T_\lambda (\equiv 2.17 \text{ K})$, perchè (con poca fantasia) dal plot del calore specifico la sua forma ricorda una λ . Per lungo

tempo si pensò che l'elio II fosse una fase "solida" tipo cristallo liquido. Dal grafico (figura 1.3) si nota che a T basse, la curva cresce come $\sim T^3$ (gas di fononi), poi ha un picco e successivamente decresce in modo asimmetrico.

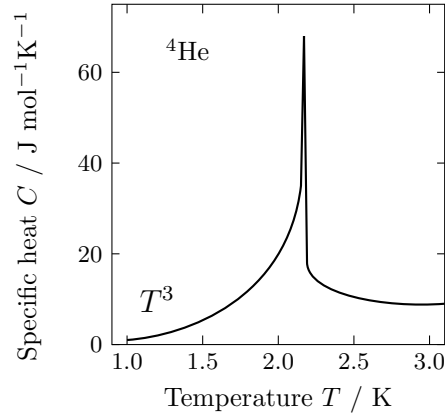


Figura 1.3: Dipendenza dalla temperatura del calore specifico molare di ${}^4\text{He}$. Ci si trova a pressione atmosferica.

Al contrario di ciò che si pensava inizialmente, C_V non tende a infinito, ma si può modellizzare come:

$$C_V \approx \begin{cases} C(T) + A_+ |T - T_\lambda|^{-\alpha} & , \quad T > T_\lambda \\ C(T) + A_- |T - T_\lambda|^{-\alpha} & , \quad T < T_\lambda \end{cases} \quad (1.1.6)$$

in cui $A_\pm$ sono costanti legate alla classe di universalità del sistema; $\alpha \sim -0.009$ è un esponente critico ottenuto tramite esperimenti, oppure tramite l'universalità delle transizioni di fase del 2° ordine (se fosse 0, avremmo un comportamento di tipo logaritmico); in particolare l'elio superfluido è nella stessa classe di universalità del modello xy in tre dimensioni, con simmetria $U(1)$; nel caso in due dimensioni corrisponde a un reticolo di Ising con spin che giace nel piano xy , con simmetria 1.

Dunque come sappiamo, sfruttando la classe di universalità, possiamo al posto di studiare il modello complicato dell' ${}^4\text{He}$ ricavarci l'esponente critico da altri modelli più semplici da trattare (ad esempio simulazioni Montecarlo).

Essendo una transizione del secondo ordine, considerando l'energia libera di Gibbs G , si hanno:

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p, \quad C_V = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_p \quad (1.1.7)$$

ed entrambe sono continue.

Analizziamo ora il diagramma di fase di un gas standard, per esempio CO_2 , e quello dell' ${}^4\text{He}$. Vedi la figura 1.4.

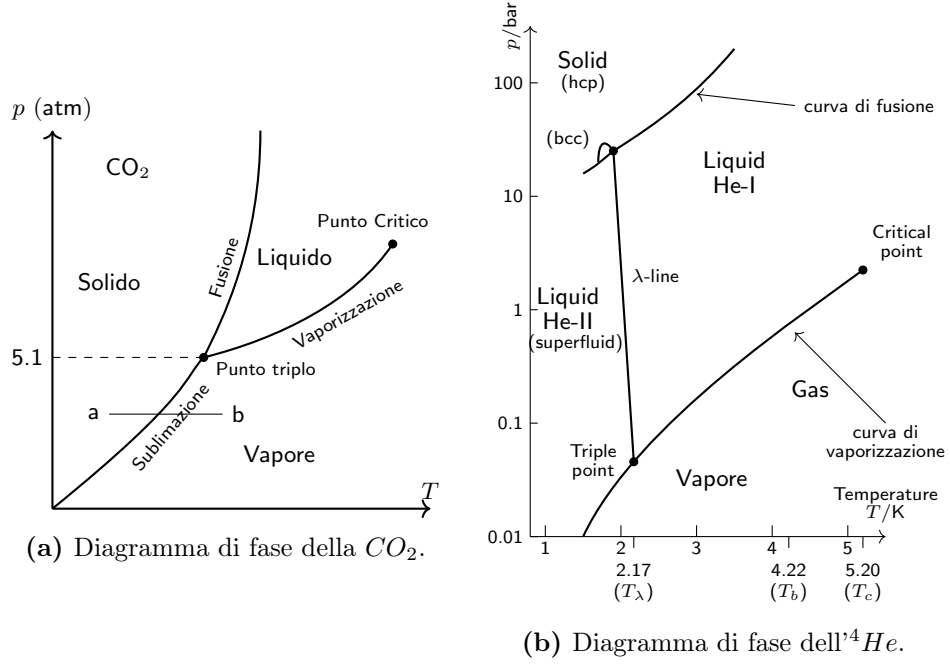


Figura 1.4

Si può notare come per 4He , in corrispondenza del punto triplo solido-liquido-vapore, abbiamo una linea critica, detta λ -line, che appunto è una linea di transizione del secondo ordine che separa l'elio II dall'elio I (liquidi).

Il fatto particolare è che a $T = 0.8$ K la curva di fusione ha un minimo (poco pronunciato) e incomincia a crescere al diminuire della temperatura per $T < 0.8$ K. Ora, supponendo di muoverci sulla linea di transizione di fase del primo ordine (la curva di fusione), partendo dall'energia libera di Gibbs, ricaviamo di nuovo l'equazione di Clausius-Clapeyron. Abbiamo $G_l = G_s$, con $G = \mu N$, quindi se è una linea di transizione del primo ordine in cui stato liquido e stato solido sono in equilibrio, i potenziali chimici sono uguali. Abbiamo:

$$G(T, p) \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial T} = -S \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial p} = V \quad (1.1.8)$$

per cui:

$$\left(\frac{\partial G_l}{\partial T} \right) \delta T + \left(\frac{\partial G_l}{\partial p} \right) \delta p = \left(\frac{\partial G_s}{\partial T} \right) \delta T + \left(\frac{\partial G_s}{\partial p} \right) \delta p \quad (1.1.9)$$

$$V_l \delta p - S_l \delta T = V_s \delta p - S_s \delta T \quad (1.1.10)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta p}{\delta T} = \frac{dp}{dT} = \frac{S_s - S_l}{V_s - V_l} \quad (1.1.11)$$

dove la relazione appena ottenuta è la già nota *equazione di Clausius-Clapeyron*; poichè $V_l > V_s$ (se non consideriamo effetti quantistici, la distanza media tra

le particelle nel liquido è maggiore rispetto che nel solido), e visto che $\frac{dp}{dT} < 0$ per $T < 0.8$ K, allora abbiamo che $S_s > S_l$: l'entropia dell'elio liquido (elio II) è minore di quella nella fase solida. Quest'ultima relazione tra le entropie è poco intuitiva, ma è giustificata dalla presenza di una componente ad entropia nulla e ci dice che il solido è più disordinato rispetto il liquido.

1.1.3 Elio superfluido

Una delle caratteristiche più importanti dell'elio II è quella di passare attraverso i capillari senza attrito; questa proprietà detta **superfluidità**, fu scoperta da Kapitza e indipendentemente da Allen e Misener.

Nel 1938 F. London suggerì che la superfluidità sia legata a una condensazione di Bose-Einstein; adottando questo punto di vista, Tisza formulò la teoria fenomenologica chiamata *modello a due fluidi*.

Prima di cominciare a descrivere le proprietà dell'elio superfluido, occorre ripassare la trattazione della condensazione di Bose-Einstein per un gas di bosone non interagente (vedi l'Appendice A), che ovviamente non è il caso dell'elio. Nell'elio superfluido la condensazione di Bose-Einstein è mascherata dalla forte interazione degli atomi. Per comprendere bene la fisica del condensato è necessario realizzare dei gas molto diluiti con interazioni molto deboli e lavorare a bassissime temperature: nel 1995 Cornell-Wieman-Ketterle studiarono *i sistemi di atomi freddi*, dove gli atomi (circa un migliaio di bosoni) vengono intrappolati con metodi ottici (laser in buche di potenziale) e raffreddate a $T \sim 10^{-13}$ K.

1.1.4 Lunghezza d'onda termica di de Broglie

Per definizione, la lunghezza d'onda termica di de Broglie è $\lambda = h/p$, dove h è la costante di Planck e $p = mv$ la quantità di moto.

La teoria cinetica dei gas perfetti lega la velocità quadratica media con la temperatura del sistema:

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T \quad \longrightarrow \quad \langle p^2 \rangle = 3mk_B T \quad \longrightarrow \quad \langle p \rangle = \sqrt{3mk_B T}. \quad (1.1.12)$$

Quindi la lunghezza d'onda di de Broglie sarà:

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{\langle p \rangle} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}} \quad (1.1.13)$$

che è la lunghezza d'onda media di un gas in un sistema a fissata temperatura (lunghezza d'onda termica). A parte dei fattori numerici (che derivano dalle derivazioni più termodinamiche) è la stessa che si è vista nel corso di Meccanica Statistica. Abbiamo i valori numerici riportati nella tabella 1.2.

Quando la temperatura tende a zero, la lunghezza d'onda di de Broglie diventa paragonabile alla distanza interatomica; gli atomi perdono la loro

T	v	λ_{DB}
300 K	500 m/s	10^{-8} cm
10^{-8} K	mm/s	10^{-3} cm

Tabella 1.2

identità e si comportano come onde. Dunque, abbiamo le situazioni a diverse temperature:

- Scatola a $T_1 (\equiv T_{amb})$: il gas ivi contenuto è costituito da particelle puntiformi classiche.
- A $T_2 < T_1$, λ_{DB} aumenta ed emerge il comportamento "ondulatorio" delle particelle.
- A $T_3 < T_2 < T_1$, se le particelle sono bosoniche, esse si dispongono tutte su uno stato a minore energia (più il sistema è freddo, più viene sottratta energia), a cui associamo un'onda macroscopica quantistica di materia.
- A $T = 0$ abbiamo raggiunto lo stato di energia minimale $p = 0$, in cui tutte le particelle siedono sullo stato fondamentale: il sistema è descritto da un'onda macroscopica di materia che definisce il vuoto quantistico del sistema, a cui possiamo fornire un po' di energia per creare stati eccitati.

1.1.5 Modello a due fluidi

È un modello proposto da Tisza nel 1938. L'idea è di considerare l'elio II come composto da un mix di due fluidi completamente interpenetranti con proprietà diverse.

Anche se questa interpretazione non è totalmente corretta (non è possibile che nell'elio II vi siano atomi appartenenti ad un fluido normale e altri appartenenti al superfluido: gli atomi sono indistinguibili e la funzione d'onda totale deve essere completamente simmetrica per lo scambio dei numeri quantici di tutte le particelle), il modello funziona molto bene.

Supponiamo quindi che la densità dell'elio II si possa separare in due componenti:

$$\rho = \rho_n + \rho_s \quad (1.1.14)$$

dove ρ è la densità totale, $\rho_n(T)$ è la densità del fluido normale e $\rho_s(T)$ è la densità del superfluido. Nel nostro modello consideriamo che a $T = 0$, l'elio II sia composto solo da superfluido, mentre a $T \geq T_\lambda$ vi è solo componente normale. La densità ρ dipende anche da T , ma sono piccole variazioni nel range di temperatura che stiamo considerando. Vedi la figura 1.5 e la tabella 1.3.

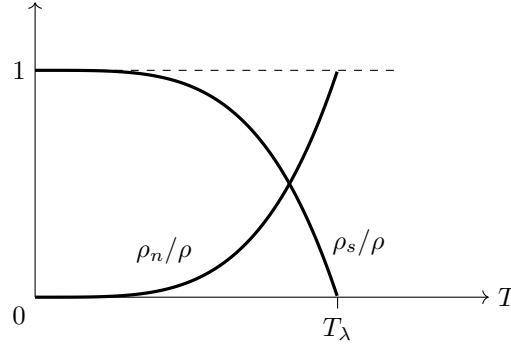


Figura 1.5

	Densità	Viscosità	Entropia
Componente normale	ρ_n	$\eta_n \neq 0$	$S_n = S \neq 0$
Componente superfluida	ρ_s	$\eta_s = 0$	$S_s = 0$, come se $T = 0$

Tabella 1.3

Nel caso di bosoni liberi, avevamo $\rho_s = \rho_0$ ($k = 0$); nel caso dell'elio la situazione è più complicata a causa dell'interazione; gli atomi perdono la loro identità: ciò che conta davvero sono le eccitazioni collettive (fononi, vortici, rotoni). Anche a $T = 0$, $\rho_s \neq \rho_0$: non tutte le particelle giacciono nello stato con $k = 0$, portando al fenomeno della *deplezione quantistica*. Conviene quindi identificare ρ_n con la densità di eccitazioni collettive.

Si noti che il calore specifico dell'elio II a $T \sim 0$ K cresce come T^3 : a bassissima temperatura, il sistema si comporta come un gas di fononi non interagenti.

1.2 Elio liquido (altre proprietà)

A temperature $T > T_\lambda$ l'elio liquido si comporta essenzialmente come un gas molto denso, ma a $T_\lambda = 2.17$ K quasi tutte le proprietà dell'elio cambiano drasticamente. In particolare si vede:

1. Si può fare riferimento alla figura 1.6. Se seguiamo la linea di ebollizione/vaporizzazione, il fluido normale ($^4\text{He-I}$) si comporta come un fluido ordinario, con bollicine di gas che si formano sulle pareti riscaldate del recipiente e salgono lungo il fluido. Come fosse un fluido normale a bollore. A $T < T_\lambda$ tutto si ferma, non si vedono più bolle di gas che risalgono verso la superficie, come se la ebollizione si fosse fermata. Questo perchè la conducibilità termica diventa enorme ($\rightarrow \infty$), 5 ordini di grandezza superiore a quello dell'elio I: non è possibile impostare un gradiente di temperatura in un superfluido (come non è possibile

impostare una differenza di potenziale ai capi di un superconduttore o di un conduttore ideale, con resistenza $R = 0$, poiché la corrente crescerebbe esponenzialmente e si brucerebbe).

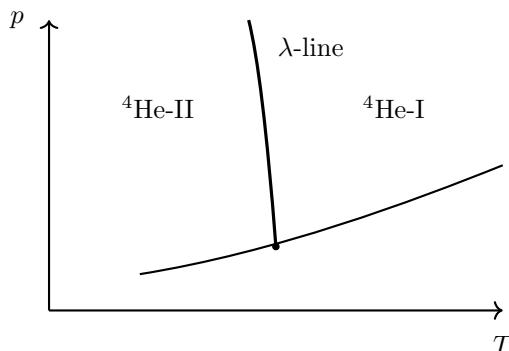


Figura 1.6

2. Il fluido fuoriesce da piccole fratture del contenitore e scende lungo capillari sottilissimi senza alcun ritardo:

viscosità nulla $\longleftrightarrow$ superfluido

3. *Effetto meccano-calorico*: se abbiamo due recipienti (considerati adiabatici) contenenti elio alla stessa temperatura $T_A = T_B$, considerata $T < T_\lambda$, e pressione $p_A = p_B$ e collegati da un capillare sottilissimo (il livello del fluido è uguale nei due recipienti se pressioni e temperature sono uguali). Se incrementiamo la pressione in A ($p_A > p_B$), allora il livello in A si abbassa e quello in B si alza (fluido incompressibile). Vedi la figura 1.7. Corrispondentemente la temperatura si abbassa in B , mentre aumenta in A ($T_A > T_B$): il che vuol dire che passa solo la componente superfluida a entropia nulla.

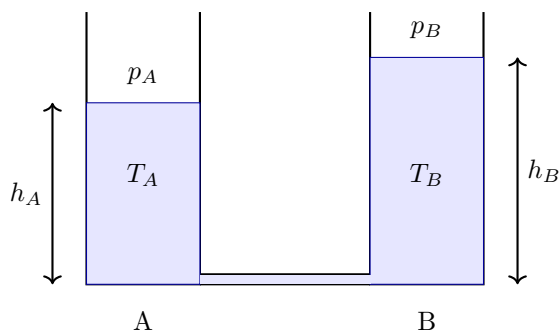


Figura 1.7

4. *Effetto termomeccanico*: è l'effetto inverso rispetto quello meccanocalorico, si aumenta la temperatura in A e si osserva una differenza di livello nei due recipienti ($h_A > h_B$); per raggiungere l'equilibrio termodinamico, bisognerebbe far passare una parte di superfluido dal contenitore B al contenitore A, proprio per compensare questa differenza di potenziale chimico.
5. *Esperimento del beaker*: supponendo di immergere parzialmente un beaker in un recipiente di elio a $T < T_\lambda$, sebbene il superfluido abbia viscosità nulla, possiede una tensione superficiale non nulla dovuta alle forze di Van der Waals e riesce ad "arrampicarsi" sulle pareti del recipiente, fintanto che il livello del fluido dentro e fuori dal beaker sia uguale, in modo da rendere costante il potenziale chimico di tutte le componenti del sistema. Ovviamente, una volta raggiunto l'equilibrio e lo stesso livello del liquido, se noi alziamo o abbassiamo il beaker l'elio esce o entra per livellare le due parti.
6. *Secondo suono*: nell'elio II, si osservano onde di temperatura (di calore) che si propagano ad una velocità caratteristica. Poiché la propagazione è simile a quella del suono ordinario, ossia onde di compressione, vennero denominate "secondo suono".

1.2.1 Effetto termomeccanico

Questo effetto è una conseguenza dell'equazione $dp = \frac{s}{v} dT$ ottenuta imponendo $d\mu = 0$ all'equilibrio. Supponiamo di avere due contenitori di ${}^4\text{He}$ (A e B) a $T < T_\lambda$. I contenitori sono completamente isolanti (adiabatici e rigidi), ma collegati tra loro da un capillare che fa passare solo la componente superfluida. Se non avvengono processi irreversibili, l'entropia totale S_T del sistema $A + B$ è costante. Infatti, poiché attraverso il capillare può passare solo la componente superfluida con $S = 0$, allora anche l'entropia all'interno dei due contenitori è costante: $S_A = \text{costante}$, $S_B = \text{costante}$. La situazione è in figura 1.8.

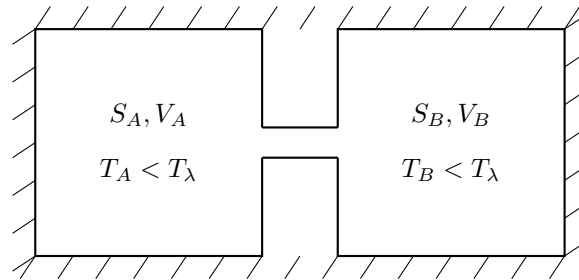


Figura 1.8

Denotiamo con U_T l'energia interna totale e con u_l ($l = A, B$) l'energia interna per chilogrammo:

$$U_T = \sum_{l=A,B} M_l u_l \quad (1.2.1)$$

dove M_l è la massa di ${}^4\text{He}$ nel caso $l = A, B$. All'equilibrio termodinamico l'energia interna totale è minima:

$$\delta U_T = 0 = \sum_{l=A,B} \left(u_l \delta M_l + M_l \delta u_l \right). \quad (1.2.2)$$

Poichè anche l'entropia S_l è costante (s_l = entropia per unità di massa):

$$\delta S_l = s_l \delta M_l + M_l \delta s_l = 0 \implies \delta s_l = -s_l \frac{\delta M_l}{M_l} \quad (1.2.3)$$

pure il volume $V_l = M_l V_l / M_l = M_l \cdot v_l$ è anch'esso costante (v_l = volume specifico per unità di massa):

$$\delta v_l = -v_l \frac{\delta M_l}{M_l}. \quad (1.2.4)$$

Sviluppiamo ora per $\delta u_l(s, v)$:

$$\delta u_l = \left(\frac{\partial u_l}{\partial s_l} \right)_{v_l} \delta s_l + \left(\frac{\partial u_l}{\partial v_l} \right)_{s_l} \delta v_l \quad (1.2.5)$$

che se messo in (1.2.2) ci porta a:

$$\delta U_T = 0 \quad (1.2.6)$$

$$= \sum_l \left(u_l \delta M_l + M_l \left[\left(\frac{\partial u_l}{\partial s_l} \right)_{v_l} \delta s_l + \left(\frac{\partial u_l}{\partial v_l} \right)_{s_l} \delta v_l \right] \right) \quad (1.2.7)$$

$$= \sum_l u_l \delta M_l + M_l \left[T_l \delta s_l - p_l \delta v_l \right] \quad (1.2.8)$$

$$= \sum_l \left(u_l - s_l T_l + v_l p_l \right) \delta M_l \quad (1.2.9)$$

$$\implies \sum_l \mu_l \delta M_l = 0. \quad (1.2.10)$$

Quindi, con una doppia trasformata di Legendre abbiamo ottenuto il potenziale chimico μ_l . Poichè la massa è conservata, cioè $\delta M_A = -\delta M_B$, si ottiene che:

$$\mu_A(T_A, p_A) = \mu_B(T_B, p_B). \quad (1.2.11)$$

Anche per $T_A \neq T_B$, si raggiunge l'equilibrio $\mu_A = \mu_B$ attraverso lo scambio di atomi a entropia nulla (modificando quindi p_A e p_B).

Nel caso in cui $T_A = T_B + \delta T$ e $p_A = p_B + \delta p$, sviluppiamo al primo ordine:

$$\mu_A(T_B, p_B) + \left(\frac{\partial \mu_A}{\partial T_A} \right) \delta T + \left(\frac{\partial \mu_A}{\partial p_A} \right) \delta p = \mu_B(T_B, p_B) \quad (1.2.12)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \mu_A}{\partial T_A} \right) \delta T + \left(\frac{\partial \mu_A}{\partial p_A} \right) \delta p = 0 \quad (1.2.13)$$

$$\Rightarrow \delta p = \frac{s_A}{v_A} \delta T \quad (1.2.14)$$

cioè l'*equazione di London*, simile all'equazione di Clausius-Clapeyron; se aumenta la differenza di temperatura ($\delta T = T_A - T_B > 0$) aumenta proporzionalmente anche la differenza di pressione ($\delta p = p_A - p_B > 0$) a causa di un flusso di atomi della componente superfluida che attraversa il capillare da $B \rightarrow A$.

Questo è chiamato **effetto termomeccanico** che si osserva nell'elio II nell'esperimento della fontanella. Vedi la figura 1.9. Inizialmente la temperatura del contenitore e del capillare è la stessa. Successivamente l'elio viene riscaldato nella zona del gomito da un fascio molto tenue di luce. In questo modo aumenta il potenziale chimico nel tubo capillare. Per raggiungere l'equilibrio, e quindi cercare di eguagliare il potenziale chimico, l'elio superfluido entra (fluisce) nel tubo attraverso il filtro capillare, ma questo fa aumentare il livello dell'elio nel tubo verticale che fuoriesce dall'apertura superiore creando una fontanella.

Nota. Il flusso può avvenire solo dal contenitore al tubo e non viceversa poiché attraverso il filtro capillare può passare solo un superfluido, a temperatura nulla. Infatti noi abbiamo scaldato il tubo capillare, che conterrà quindi una parte di liquido a temperatura non nulla.

Attraverso il filtro capillare si instaura quindi un flusso spontaneo dal contenitore *freddo* all'interno del tubo *caldo*. Poiché il superfluido non trasporta entropia, questo processo non viola il secondo principio della termodinamica.

Fontanelle stazionarie di circa 30 cm sono state ottenute in questo modo. Di solito il flusso è turbolento, ma in certe condizioni (fonti di calore poco potenti, basse temperature) le fontanelle possono essere prive di turbolenza (*pure potential flow*)¹.

1.2.2 Esperimento del beaker

La spiegazione del comportamento straordinario dell'elio liquido nell'esperimento del beaker può essere spiegato utilizzando i potenziali chimici. L'elio forma una pellicola sottile sulla superficie del recipiente sopra il livello dell'elio liquido.

¹Puoi vedere il [video YouTube](#).

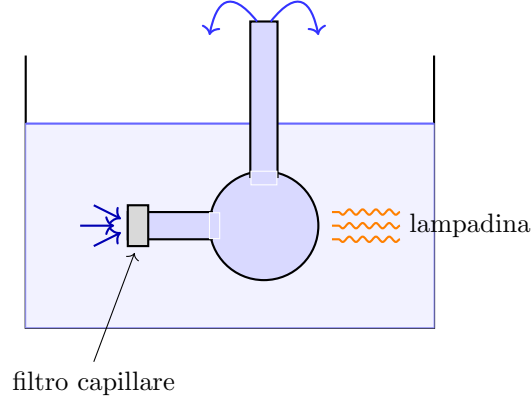


Figura 1.9

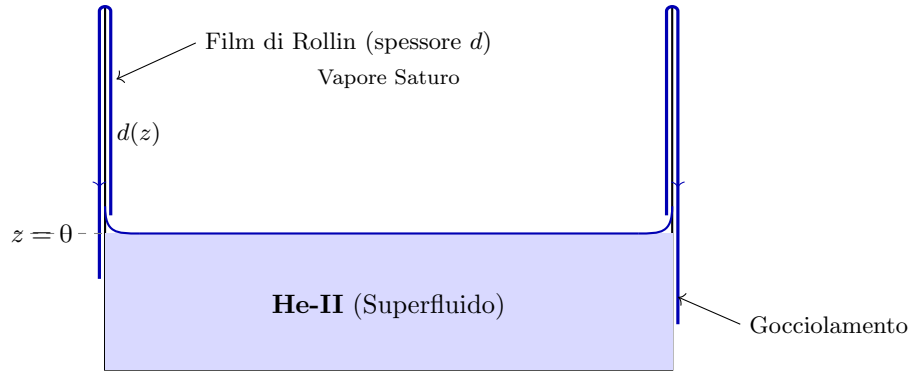


Figura 1.10

La pellicola si forma a causa dell'interazione di Van der Waals tra gli atomi di elio e le pareti del contenitore. All'equilibrio si ha:

$$\mu_f(z) = \mu_v = \mu_l(z=0) \quad (1.2.15)$$

con il pedice f che indica *film* e v indica il vapore saturo dell'ambiente. Il potenziale chimico deve essere uguale in tutti i punti del sistema. Poichè ci sono forze esterne, ossia Van der Waals (elio $\leftrightarrow$ recipiente) e la forza di gravità, questi sono potenziali chimici totali:

$$\mu_f(z) = \mu_l(z=0) + \mu_{grav}(z) + \mu_{VDW}(z) = \mu_l(z=0) \quad (1.2.16)$$

$$\implies \mu_{grav} = -\mu_{VDW} \quad (1.2.17)$$

dove $\mu_{grav} = gz$ e in cui abbiamo utilizzato la relazione (1.2.15) precedente. Il potenziale chimico di Van der Waals μ_{VDW} si ottiene integrando il potenziale $\phi(r) \propto -1/r^6$.

Lo spessore della parete di film è $\sim$ mm, ovvero molto più grande delle distanze interatomiche, quindi è come se fosse di spessore infinito. Possiamo

dividere lo spazio nella parete di destra in corone circolari, con sezione dx e dz , e raggio z , come si vede in figura 1.11.

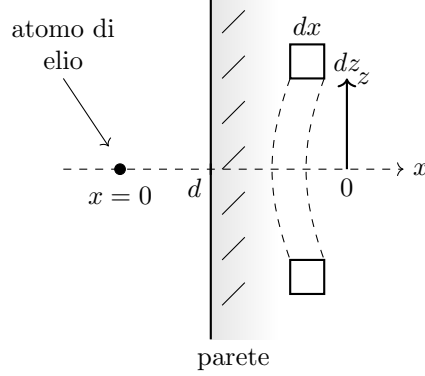


Figura 1.11

Facendo poi il cambio di variabile $y = z^2$, $dy = 2zdz$:

$$\mu_{VDW} \propto - \int_d^\infty dx \int_0^\infty dz \frac{2\pi z}{(z^2 + x^2)^3} \quad (1.2.18)$$

$$= - \int_d^\infty dx \int_0^\infty dy \frac{\pi}{(x^2 + y)^3} \quad (1.2.19)$$

$$= - \int_d^\infty dx \left[-\frac{\pi}{2} (x^2 + y)^{-2} \right]_0^\infty \quad (1.2.20)$$

$$= -\frac{\pi}{2} \int_d^\infty \frac{dx}{x^4} \quad (1.2.21)$$

$$= -\frac{\pi}{6} \frac{1}{d^3} \quad (1.2.22)$$

$$= -\frac{\alpha}{d^3} \quad (1.2.23)$$

dove α è la costante di Hamaker, è ottenuta dalle proprietà dielettriche dell'elio e delle pareti del recipiente misurate sperimentalmente. Ricaviamo lo spessore del film d dall'equazione (1.2.17):

$$gz - \frac{\alpha}{d^3} = 0 \quad \implies \quad d = \left(\frac{\alpha}{gz} \right)^{1/3}. \quad (1.2.24)$$

Abbiamo ottenuto quella che si chiama *equazione del menisco*. Per $z = 0$, abbiamo che $d \rightarrow \infty$. All'equilibrio (vapore saturo) si trova che a $z = 10$ cm e lo spessore del film è $d = 200 \text{ \AA}$.

Un fluido normale non potrebbe scorrere in un capillare di queste dimensioni. Le proprietà superfluide dell'elio non sono importanti per determinare lo spessore del film, ma sono importantissime perchè possa scorrere all'interno del film senza attrito. L'elio superfluido si diffonde su tutte le pareti per

minimizzare il potenziale chimico dappertutto.

Nota. Noi abbiamo fatto il calcolo per un fluido generico, ma abbiamo trovato che le dimensioni del film sono tali da essere compatibili solamente con il passaggio di un superfluido.

1.2.3 Conducibilità termica infinita e secondo suono

Le variazioni di temperatura in un sistema omogeneo si propagano nel mezzo in accordo con l'*equazione di propagazione del calore* (detta anche equazione di diffusione):

$$\Delta T = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.2.25)$$

dove Δ è il laplaciano e $T(\vec{x}, t)$ denota la temperatura nel punto $\vec{x}$ al tempo t . Il punto è che nell'elio II la conducibilità termica D (o coefficiente di diffusione) diventa infinita, quindi l'equazione precedente non è più valida, poiché diverrebbe:

$$\Delta T = 0 \quad (1.2.26)$$

che non è ragionevole, poiché abbiamo supposto di avere delle variazioni di temperatura, per cui abbiamo bisogno di una propagazione dinamica per raggiungere l'equilibrio.

Si può pensare per il membro di destra di (1.2.25) sia in realtà il primo termine di uno sviluppo in serie di Taylor in t , per cui se il primo termine è zero, il termine successivo, con la derivata seconda, non è più trascurabile. Perciò ci si aspetta che l'equazione venga modificata nel modo seguente:

$$\Delta T = \frac{1}{(v_2)^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (1.2.27)$$

che rappresenta la propagazione per onde delle variazioni di temperatura. Dunque nell'*He-II* ci aspettiamo due tipi di propagazione delle onde:

- Il *suono*, cioè la propagazione di onde di pressione, o di densità, descritta dall'equazione di d'Alembert:

$$\Delta \rho = \frac{1}{(v_1)^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \quad (1.2.28)$$

dove $\rho = \rho_n + \rho_s$. In questa visione le due densità sono indistinguibili e quindi oscillano in fase; si trova che $v_1 \sim 238$ m/s.

- Il *secondo suono*, cioè onde termiche o di entropia, legate a variazioni locali di ρ_n (o di ρ_s indipendentemente); ρ_n e ρ_s oscillano in opposizione di fase. Una variazione locale di ρ_n (oppure di ρ_s) corrisponde a una variazione locale della temperatura.

Nell'ambito del modello a due fluidi, è facile derivare l'equazione di propagazione del secondo suono nel caso del gas di fononi (*He-II* a $T \sim 0$). Indichiamo con $u = U/V$ l'energia per unità di volume del gas di fononi (densità di fononi $\sim \rho_n$). Infatti, avevamo visto che nell'*He-II* C_V ha un andamento iniziale $\sim T^3$, dunque, a temperature bassissime, ciò che conta nell'elio II sono le fluttuazioni fononiche: in un gas di fononi possiamo avere una distribuzione uniforme di energia, oppure piccole variazioni di pressione e di densità; queste ultime sono legate alla creazione di fluttuazioni di temperatura del sistema.

L'equazione della meccanica $\vec{F} = m\vec{a}$, si traduce per un fluido nell'equazione, dove $\vec{q}$ è la quantità di moto per unità di volume:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = -\vec{\nabla}p \quad (1.2.29)$$

cioè l'impulso per unità di volume è il gradiente della pressione con il segno negativo. D'altra parte l'equazione di continuità per l'energia si scrive:

$$\frac{1}{(v_1)^2} \frac{du}{dt} + \vec{\nabla}\vec{q} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (v_1)^2 \Delta p \quad (1.2.30)$$

dove v_1 è la velocità del primo suono nel mezzo. Però per un gas di fononi, la termodinamica ci permette di fissare la relazione tra la pressione p e la densità di energia u tramite la relazione:

$$p = - \left(\frac{\partial F(T, V)}{\partial V} \right)_T, \quad F(T, V, N) = U(S, V, N) - \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right) S \quad (1.2.31)$$

in cui F è l'energia libera di Helmholtz. Un'altra proprietà che conosciamo è:

$$F = -\frac{U}{3} = -\frac{V\sigma T^4}{3} \quad \implies \quad p = \frac{\sigma T^4}{3} = \frac{u}{3} \quad (1.2.32)$$

nel corpo nero σ è la costante di Stefan-Boltzmann. Infine, combinando (1.2.30) con (1.2.32), e confrontandola con (1.2.27), otteniamo che:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{(v_1)^2}{3} \Delta u = 0 \quad \implies \quad v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{3}} \quad (1.2.33)$$

e vediamo $v_2 \sim 137$ m/s che è la velocità del secondo suono. Le fluttuazioni della densità dei fononi si propagano con una velocità caratteristica v_2 .

Fluttuazioni di u corrispondono a fluttuazioni di T ($\delta u \propto T^{-3} \delta T$). Ricordiamo che tutta questa trattazione è valida per $T \approx 0$; quando ci spingiamo verso lo zero assoluto, la densità di fononi diminuisce e questo fa sì che verificare che $v_2 \sim 137$ m/s sia abbastanza difficile. Da un punto di vista teorico, si è fatto accoppiare il primo suono con il secondo attraverso l'entropia, dando come risultato la curva illustrata nel grafico in figura 1.12.

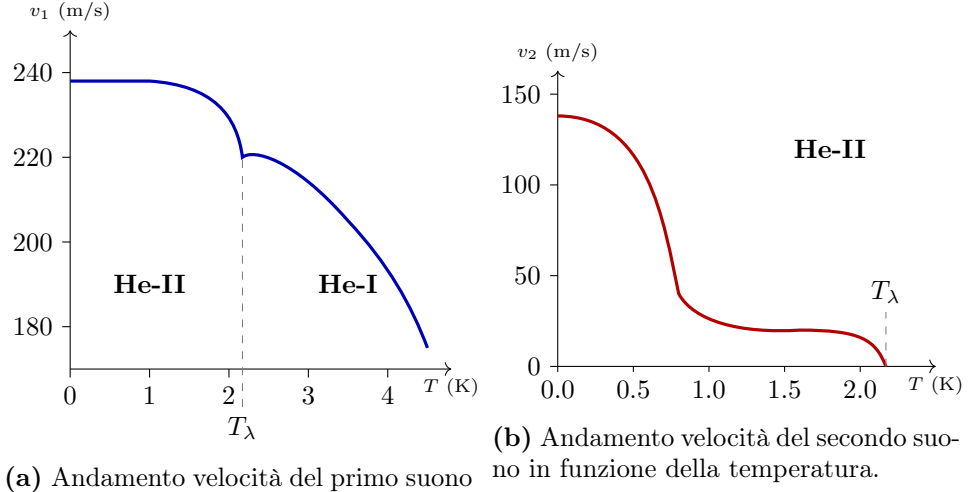


Figura 1.12: Andamento delle velocità di primo e secondo suono in funzione della temperatura. Si consideri che non sono riportati i dati sperimentali, ma nel caso della figura 1.12a i dati si adattano bene alla curva, mentre per la figura 1.12b non sono presenti dati per $T < 0.5$ K, ma sull'altra parte della curva si adattano bene al modello.

1.2.4 Viscosità nulla e velocità critica

La viscosità è la manifestazione macroscopica dello scambio di energia tra un fluido in scorrimento e la parete lungo cui scorre. Poiché questo scambio avviene in quanti (queste eccitazioni sono dette *quasiparticelle*, eccitazioni collettive) può succedere che per ragioni cinematiche un fluido a temperatura zero, che scorre a una velocità inferiore a un valore critico, non possa produrre quasiparticelle nell'interazione con la parete, non perde quindi energia e ha allora viscosità nulla (dunque è superfluido). Il tutto dipende dalla relazione di dispersione che lega l'energia ϵ all'impulso $q = |\vec{q}|$ delle quasiparticelle.

Nell'elio superfluido, la diffusione inelastica con fasci di neutroni permette di stabilire che la curva di dispersione ha approssimativamente la forma data dal grafico in figura 1.13.

In particolare dalla figura 1.13 si vede che:

- Inizialmente l'andamento è lineare: per piccoli valori di q (grandi lunghezze d'onda) si ha $\epsilon(q) = v_1 q$, dove v_1 è la velocità del primo suono a $T = 0$; eccitazioni di questo tipo sono dette *fononi*, che sono i quanti del suono (classicamente onde di compressione e rarefazione). I fononi sono le eccitazioni più importanti per il comportamento termico del fluido a $T < 0.5$ K.
- In più entra in gioco il fatto che l'elio II sia interagente (eccitazione

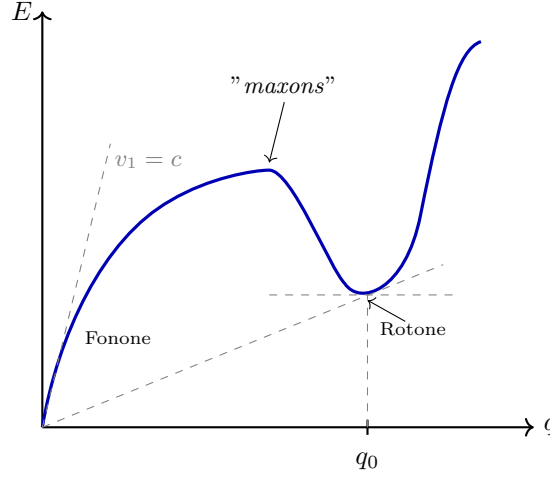


Figura 1.13: Curva di dispersione a $T = 0$.

ad alta energia corrisponde a quella di un atomo di elio isolato). Per estrarre l'atomo dobbiamo superare una barriera di potenziale, per Landau è il potenziale di estrazione μ , quindi la curva ha la forma di una parabola: $\epsilon(q) \approx q^2 + \mu$.

- Al di sopra di $T = 0.5$ K, entra in gioco un altro tipo di particelle, il *rotone*, che corrisponde al minimo locale della curva di dispersione (particelle generate dallo scattering di neutroni, variando l'energia dei neutroni incidenti), mentre al punto massimo abbiamo il *maxone* (che fa parte di pseudoparticelle instabili).

Vediamo ora quali sono i vincoli cinematici per la produzione di una particella di impulso $\vec{q}$, ed energia $\epsilon(q)$, da parte di un fluido di massa M che scorre, con velocità $\vec{v}$, lungo una parete. Si veda la figura 1.14.

Date M (macroscopica), $\epsilon(q)$ (energia della quasiparticella), $\vec{q}$ (impulso della quasiparticella, microscopico), $\vec{v}$ (velocità iniziale) e $\vec{v}'$ (velocità finale), la conservazione dell'impulso e dell'energia sono date da:

$$M\vec{v} = M\vec{v}' + \vec{q} \quad , \quad \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M(v')^2 + \epsilon(q) \quad (1.2.34)$$

Sostituiamo l'espressione di $\vec{v}'$ ricavata dalla conservazione dell'impulso in quella della conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{q^2}{2M} + \frac{1}{2}Mv^2 - \vec{v} \cdot \vec{q} + \epsilon(q) \quad \implies \quad \vec{v} \cdot \vec{q} - \frac{q^2}{2M} = \epsilon(q) \quad (1.2.35)$$

però se $M \rightarrow \infty$, allora il termine quadratico in q è trascurabile, allora si ha:

$$\vec{v} \cdot \vec{q} > \epsilon(q) \quad \implies \quad v \cos \theta q > \epsilon(q) \quad \implies \quad v > \frac{\epsilon(q)}{q} \quad (1.2.36)$$

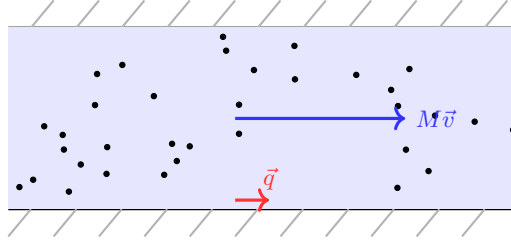


Figura 1.14

se non vale questa uguaglianza (cioè $\vec{v} \cdot \vec{q} < \epsilon(q)$), allora non possiamo creare la quasiparticella, il fluido non può interagire con le pareti, dunque perdere energia con questa interazione, e quindi non può far altro che rimanere superfluido.

Esiste quindi una velocità critica v_c al di sotto della quale il fluido ha viscosità nulla:

$$v_c = \min_q \frac{\epsilon(q)}{q} \quad (1.2.37)$$

la velocità v_c è chiamata *velocità critica di Landau*. In conclusione, ogni sostanza che è liquida a $T = 0$ e ha uno spettro di eccitazioni formato, a bassa energia, da fononi, è necessariamente superfluida a $T = 0$, perchè esiste una velocità critica $v_c > 0$.

Per lungo tempo si pensò che la superfluidità fosse legata all'esistenza di un gap di energia (come per la superconduttività), ma ciò non è possibile a causa dei fononi che possono avere un'energia arbitrariamente piccola.

Però cosa succede per $T > 0$? Il ragionamento continua a valere, ma ora il liquido contiene gas di fononi (o più in generale di quasiparticelle) che possono interagire con le pareti dando luogo a un comportamento viscoso.

Le velocità critiche sono:

$$v_c(\text{fononi}) \approx 238 \text{ m/s} = v_1 \quad (1.2.38)$$

$$v_c(\text{rotoni}) \approx 60 \text{ m/s} = \frac{\epsilon(q_0)}{q_0}. \quad (1.2.39)$$

Landau pensava che la velocità critica osservata negli esperimenti fosse determinata dai rotoni. Risulta invece che a pressione ambiente, vortici ad anello possono essere creati a velocità considerevolmente inferiori a quella critica dei rotoni. Nel gas di Bose ideale per particella libera si ha:

$$\epsilon(q) = \frac{q^2}{2m} \implies \frac{\epsilon(q)}{q} = \frac{q}{2m} \implies \min_q \frac{q}{2m} = 0 \implies v_c = 0 \quad (1.2.40)$$

quindi il gas di Bose ideale non è superfluido! L'interpretazione microscopica dei fononi e dei rotoni è molto diversa:

- A piccoli valori di q , un atomo di elio è fortemente accoppiato agli altri atomi del condensato e i fononi corrispondono alle tipiche onde di compressione e rarefazione nei fluidi e nei solidi.
- Per q molto grandi, le particelle si muovono quasi liberamente nel condensato e la curva di dispersione cresce con q^2 ; sapendo che m^* è la massa efficace:

$$\epsilon(q) \approx \frac{q^2}{2m^*} + \mu \quad , \quad q \gg 0. \quad (1.2.41)$$

- Per valori intermedi dell'impulso, un atomo in movimento è fortemente accoppiato solo con i primi vicini; quando avanza, quelli che lo precedono si spostano lateralmente per poi passargli dietro; l'effetto netto è simile a quello di un anello vorticoso. Vedi la figura 1.15.

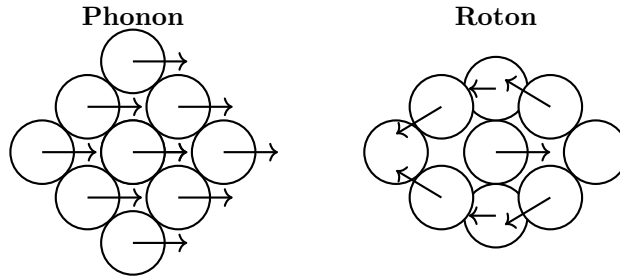


Figura 1.15

1.3 Lo stato quantistico macroscopico

Tramite alcune considerazioni qualitative, avevamo visto che a basse T gli atomi si condensano allo stato fondamentale (essendo tutti bosoni, non c'è principio di esclusione, quindi man mano che togliamo energia essi si siedono sullo stato fondamentale).

L'equazione di Schrödinger per un insieme di $N(\sim N_A)$ bosoni identici, indipendenti, non relativistici e con spin zero è:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = \hat{H}_N \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \quad (1.3.1)$$

con l'hamiltoniana del sistema data da:

$$\hat{H}_N = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + V_{ext}(\vec{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j;i \neq j}^N V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (1.3.2)$$

dove: il fattore $1/2$ è introdotto per evitare il doppio conteggio, $\{\vec{r}_i\}$ è l'insieme delle coordinate delle particelle, $V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ è il potenziale interatomico e $V_{ext}(\vec{r}_i)$ è il potenziale esterno (qui lo prendiamo = 0).

La funzione d'onda $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$ deve essere simmetrica rispetto a qualsiasi permutazione delle coordinate:

$$\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_N, t) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_N, t). \quad (1.3.3)$$

Nel caso in cui tutte le particelle siano nello stato fondamentale quantistico ($T = 0$, $N \rightarrow N_0$) possiamo introdurre l'ansatz di Hartree-Fock per la funzione d'onda ϕ_0 a molti corpi:

$$\phi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{N_0}) = \prod_{i=1}^{N_0} \frac{\psi_0(\vec{r}_i)}{\sqrt{N_0}} \quad (1.3.4)$$

dove le ψ_0 sono tutte identiche (se costruiamo un oggetto di questo genere, ψ_0 è automaticamente simmetrico per lo scambio dei numeri quantici di tutte le particelle). In più, vale la seguente normalizzazione:

$$\int d^3r \psi_0^*(\vec{r}) \psi_0(\vec{r}) = \int d^3r \frac{\rho_s(\vec{r})}{m} \quad (1.3.5)$$

$$= \int d^3r \frac{\rho_s(\vec{r})}{m} \quad (1.3.6)$$

$$= \int d^3r n_s(\vec{r}) \quad (1.3.7)$$

$$= N_0 \quad (1.3.8)$$

$$\equiv N_s. \quad (1.3.9)$$

Nell'approssimazione di Hartree-Fock (approssimazione di campo medio), lo stato quantistico macroscopico presente nell'elio II, e nei condensati BEC, a $T = 0$ può essere descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi_0(\vec{r}) = |\psi_0(\vec{r})| e^{i\phi(\vec{r})} = \sqrt{n_s(\vec{r})} e^{i\phi(\vec{r})} \quad (1.3.10)$$

la fase della funzione d'onda macroscopica è legata alla velocità del superfluido. Possiamo infatti introdurre la densità di corrente conservata ($\vec{j}_s = 0$ se ψ_0 è banale):

$$\vec{j}_s(\vec{r}) = -\frac{i\hbar}{2m} [\psi_0^* \vec{\nabla} \psi_0 - \psi_0 \vec{\nabla} \psi_0^*] \quad (1.3.11)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m} [\sqrt{n_s} e^{-i\phi} \vec{\nabla} (\sqrt{n_s} e^{i\phi}) - \sqrt{n_s} e^{i\phi} \vec{\nabla} (\sqrt{n_s} e^{-i\phi})] \quad (1.3.12)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m} [\sqrt{n_s} \vec{\nabla} \sqrt{n_s} + n_s i \vec{\nabla} \phi + n_s i \vec{\nabla} \phi - \sqrt{n_s} \vec{\nabla} \sqrt{n_s}] \quad (1.3.13)$$

$$= n_s \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \quad (1.3.14)$$

$$= n_s(\vec{r}) \cdot \vec{v}_s(\vec{r}) \quad (1.3.15)$$

in cui: $\psi_0(\vec{r})$ in BEC è l'equivalente dei campi $(\vec{E}, \vec{B})$ classici in elettrodinamica quantistica, e l'equazione di Schrödinger per $\psi_0(\vec{r})$ è l'equivalente in BEC delle equazioni di Maxwell. Poichè $\vec{v}_s = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \phi(\vec{r})$, verifichiamo che il campo vettoriale delle velocità è irrotazionale, perchè il rotore del gradiente è nullo ($\phi(\vec{r})$ è potenziale):

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \right) = 0 \implies \vec{\nabla} \times \vec{v}_s = 0 \quad (1.3.16)$$

quindi *non vi è turbolenza* nei superfluidi. La velocità della componente superfluida è determinata dalla fase della funzione d'onda. La fase è costante per $\vec{v}_s = 0$ e cambia uniformemente per $\vec{v}_s = \text{costante}$. Per esempio:

$$\vec{v}_s = (v_x, 0, 0) \iff \phi(\vec{r}) = \phi(x) = x \frac{m}{\hbar} v_x + \text{cost.} \quad (1.3.17)$$

La fase della funzione d'onda è una quantità ben definita in tutto il superfluido (modulo 2π). Possiamo pensare agli atomi di elio superfluido come a particelle che si comportano in modo *coerente*. Una proprietà del tutto simile alla coerenza di fase nei fasci laser.

Nota. Questi risultati sono validi in generale, nonostante li abbiamo ricavati utilizzando l'approssimazione di campo medio.

1.3.1 Elio II in rotazione e quantizzazione della circuitazione

Nel 1941, Landau suggerì un test per verificare l'irrotazionalità della componente superfluida dell'elio II utilizzando un contenitore in rotazione. Successivamente, nel 1955, pensando all'ambiguità 2π della fase nella funzione d'onda, Feynmann suggerì la *quantizzazione della circuitazione*.

La prima verifica sperimentale della quantizzazione della circuitazione fu ottenuta da Vinen nel 1961.

Assumiamo inizialmente di essere a $T > T_\lambda$ e, come in un corpo rigido in rotazione, sappiamo che la velocità della componente normale del fluido in un vaso in rotazione è $v_n = \omega r$, dove ω indica la velocità angolare ed r è la distanza radiale dall'asse di rotazione. La forma della superficie (menisco) del liquido è descritta dal paraboloide:

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h \quad (1.3.18)$$

rappresentato in figura 1.16.

L'idea è che, a $T < T_\lambda$, cominci a formarsi una parte di superfluido non trascurabile che non partecipa alla rotazione e che quindi si poggia sul fondo del contenitore, portando all'appiattimento del menisco al centro. Ciò è una conseguenza del fatto che $\vec{\nabla} \times \vec{v}_s = 0$.

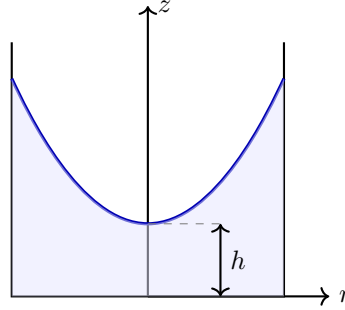


Figura 1.16

Se integriamo su una regione circolare A_c di raggio R centrata su $r = 0$ e usiamo il teorema di Stokes, assumendo che $\rho_s \neq 0$ ovunque in A_c (regione semplicemente connessa), allora:

$$0 = \int_{A_c} \vec{\nabla} \times \vec{v}_s \cdot d\vec{\Sigma} \quad (1.3.19)$$

$$= \oint_C \vec{v}_s \cdot d\vec{l} \quad (1.3.20)$$

$$= 2\pi R v_s \iff v_s = 0 \quad , \quad v_n = \omega R \neq 0. \quad (1.3.21)$$

La componente superfluida non può ruotare assieme a ρ_n . Ma allora la componente superfluida è a riposo?

Nel 1950, esperimenti con vasi rotanti vennero condotti da Osborne che studiò la curvatura della superficie. Nel caso in cui ρ_s non partecipi alla rotazione, poichè la forza di gravità agisce su entrambe le componenti, il menisco dovrebbe appiattirsi per $T < T_\lambda$ man mano che la temperatura diminuisce. Si dovrebbe raggiungere una situazione del tipo quella in figura 1.17.

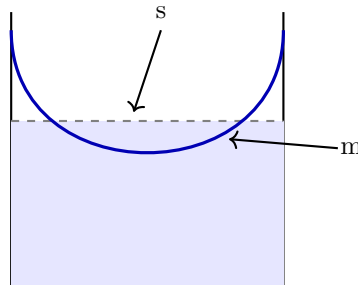


Figura 1.17

Al contrario Osborne non registrò nessun cambiamento; il superfluido non è fermo, ma partecipa alla rotazione. Il punto in cui abbiamo "sbagliato" è quando abbiamo assunto che nella nostra superficie di integrazione non

ci fossero buchi, considerandola semplicemente connessa. Quindi sarebbe sbagliato, poiché si vede che si creano *vortici* nel superfluido, scrivere il passaggio da (1.3.18) a (1.3.19).

Per poter interpretare questo risultato, consideriamo un altro esperimento in cui l'elio è contenuto in un recipiente a forma di anello (toro), come in figura 1.18. La circuitazione ("flusso" o "forza" del vortice) è:

$$k = \oint_L \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \frac{\hbar}{m} \delta\phi_L \quad (1.3.22)$$

dove $\delta\phi_L$ denota la differenza di fase lungo il cammino L all'interno dell'anello. Poiché la funzione d'onda $\psi(\vec{r})$ è ad un solo valore, la fase finale può differire dalla fase iniziale solo per multipli interi di 2π :

$$\delta\phi = 2\pi n \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.3.23)$$

$$k = \frac{\hbar}{2\pi m} 2\pi n = \frac{\hbar}{m} n = \oint_L \vec{v}_s \cdot d\vec{l} \neq 0. \quad (1.3.24)$$

Questo appena visto è il **teorema di circuitazione di Feynman**, secondo cui la circuitazione è quantizzata, che è stato verificato sperimentalmente da Vinen nel 1961.

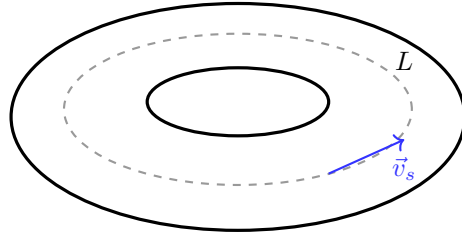


Figura 1.18

1.3.2 Vortici con circuitazione quantizzata

Abbiamo visto che in una regione non semplicemente connessa, la circuitazione della componente superfluida può essere diversa da zero, ma deve essere quantizzata. Torniamo quindi alla questione che la componente superfluida sembra partecipare alla rotazione anche in regioni semplicemente connesse come un contenitore in rotazione.

La ragione è che vi sono dei vortici nel superfluido, questi vortici hanno un nucleo di fluido normale: quindi, dal punto di vista della componente superfluida, la regione all'interno del recipiente non è semplicemente connessa. Come per un vortice in un liquido classico, la velocità del fluido aumenta con $1/r$ avvicinandosi al centro del vortice. Quindi, per piccoli valori di r , la velocità è maggiore della velocità critica e il fluido transisce dallo stato superfluido allo stato normale.

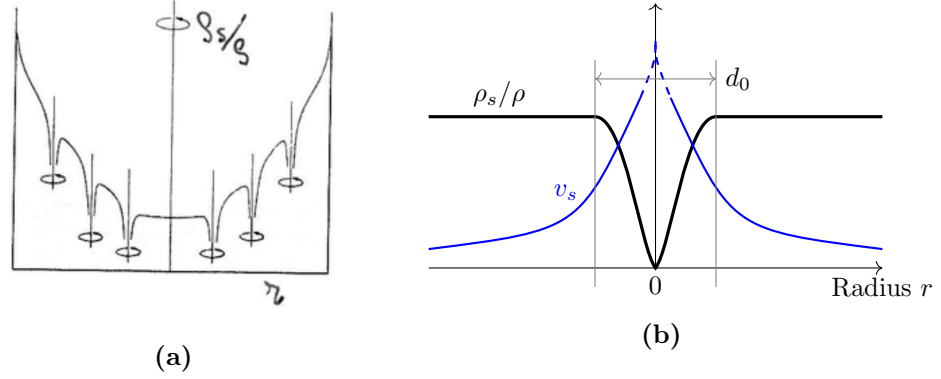


Figura 1.19

Un vortice con simmetria cilindrica di questo tipo è descritto da un campo di velocità:

$$\vec{v}_s(r) = (v_x, v_y) = \frac{k}{2\pi r^2} (-y, x) \quad (1.3.25)$$

$$v_s(r) = \frac{k}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi r} \frac{h}{m} = \frac{1.58 \cdot 10^{-8}}{r} n \left[\frac{m}{s} \right] \quad (1.3.26)$$

per $r \rightarrow 0$, $v_s \rightarrow \pm\infty$. Possiamo stimare il diametro d_0 del nucleo del vortice di fluido normale $v_s\left(\frac{d_0}{2}\right) \sim v_c(\text{rotone}) \sim 60 \text{ m/s}$. In questo modo si trova $d_0 \sim \dot{A}$, cioè dell'ordine delle distanze interatomiche.

Per $T \rightarrow T_\lambda$, $d_0(T) \rightarrow \infty$, quindi andiamo verso una transizione di fase a partire da temperature basse. Il raggio del nucleo del vortice si chiama anche lunghezza di healing o lunghezza di correlazione; essa cresce fino a valori macroscopici per $T \sim T_\lambda$.

1.3.3 Energia di un vortice

L'energia E_v per unità di lunghezza di un vortice può essere calcolata integrando l'energia cinetica per unità di volume associata alla rotazione di ρ_s :

$$E_v = \int_{a_0}^b \frac{\rho_s v_s^2}{2} 2\pi r dr \quad (1.3.27)$$

dove $a_0 \sim d_0/2$ e b è metà della distanza tra i vortici o il raggio R del recipiente in rotazione. Poichè:

$$v_s = \frac{k}{2\pi r} \quad (1.3.28)$$

$$\text{con } k = \frac{\hbar}{m} n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.3.29)$$

$$E_v = \int_{a_0}^b \frac{\rho_s}{2} \frac{k^2}{(2\pi r)^2} (2\pi r) dr \quad (1.3.30)$$

$$= \frac{k^2 \rho_s}{4\pi} \log \left(\frac{b}{a_0} \right) \quad (1.3.31)$$

$$= n^2 \frac{\hbar^2}{m^2} \frac{\rho_s}{4\pi} \log \left(\frac{b}{a_0} \right) \quad (1.3.32)$$

$$= \pi n^2 \rho_s \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 \log \left(\frac{b}{a_0} \right). \quad (1.3.33)$$

Quindi $E_v \propto n^2$ e la creazione di molti vortici con vorticità minima ($n = \pm 1$, il segno dipende dalla direzione in cui ruota il vortice) è energeticamente favorita rispetto, per esempio, alla creazione di un unico vortice macroscopico centrale con vorticità $k = nh/m$.

L'asse del vortice non è necessariamente una retta, ma una linea che può terminare sulle pareti del contenitore o richiudersi su se stessa: vortex ring o vortice ad anello. Questi moti collettivi sono delle pseudoparticelle perchè hanno, come vedremo, energia e impulsi fissati.

I vortex ring sono soluzioni a energia finita delle equazioni del moto dell'elio superfluido. A causa della quantizzazione della circuitazione di $\vec{v}_s$ (teorema di Feynman), queste soluzioni sono stabili, non possono perdere energia per dissipazione.

I vortici si possono creare attraverso l'introduzione di un eccesso di carica (elettroni). Gli elettroni vengono intrappolati nel nucleo del vortice e mettendo un campo elettrico si possono raccogliere sulla superficie. I vortici tendono a formare un reticolo triangolare (Abrikosov lattice).

1.3.4 Velocità critica dei vortex rings

All'interno di un capillare molto stretto di sezione circolare si fa scendere, grazie alla forza di gravità, il fluido, sapendo ora che si possono formare dei vortici ad anello con una velocità critica più bassa rispetto a quella dei rotoni a cui Landau pensava riguardo alla superfluidità.

L'anello, di raggio r_0 , si muove in direzione perpendicolare al suo piano a una velocità:

$$v_0 = \frac{\hbar}{2m r_0} n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.3.34)$$

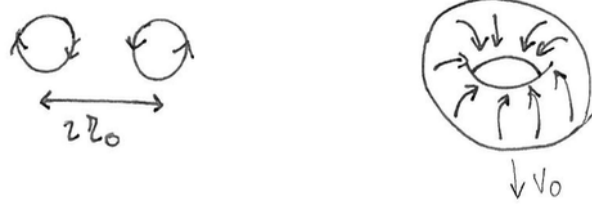


Figura 1.20

per evitare di collassare a zero o di espandersi all'infinito e dissiparsi. Anelli vorticosi con raggio minore hanno velocità maggiore, e viceversa. Per ottenere questo valore, ricordiamo che un vortice possiede un campo di velocità con:

$$v = \frac{k}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi r} \frac{h}{m} n = \frac{\hbar}{rm} n. \quad (1.3.35)$$

Seziono il toro e considero due punti A e B , dove A è al centro dei due vortici e B a una stessa distanza dal centro di uno dei vortici. Se mi metto nel sistema di riferimento del vortice, allora è come se nel centro di quest'ultimo passasse un superfluido con velocità v_0 .

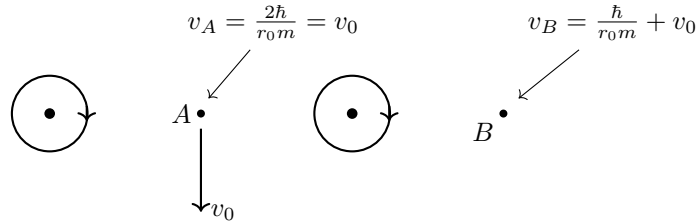


Figura 1.21

Quindi $v_A = \frac{2\hbar}{r_0 m} - v_0$, cioè il campo di velocità dovuto alla presenza del vortice di destra più il campo di velocità dovuto al vortice di sinistra, meno v_0 , perchè sono nel riferimento in cui il vortice è in quiete. $v_B = \frac{\hbar}{r_0 m} + v_0$, quindi il punto B sente solo l'influenza di un vortice.

Per Bernoulli, velocità diverse corrispondono a pressioni diverse, portando a una contrazione e ad un allargamento del vortice, quindi devo bilanciare le due velocità in modo che non si verifichi l'effetto Magnus:

$$\frac{2\hbar}{r_0 m} - v_0 = \frac{\hbar}{r_0 m} + v_0 \implies v_0 = \frac{\hbar}{2r_0 m}. \quad (1.3.36)$$

L'energia trasportata dal vortice si può calcolare approssimativamente applicando la formula del vortice a simmetria cilindrica per un anello di lunghezza

$l = 2\pi r$, dove $b = r$ (distanza tra i centri di due vortici) e $n = 1$:

$$\epsilon(r) = 2\pi r E_v \quad (1.3.37)$$

$$= \frac{k^2 \rho_s}{4\pi} (2\pi r) \log \left(\frac{r}{a_0} \right) \quad (1.3.38)$$

$$= \frac{k^2 \rho_s}{2} r \log \left(\frac{r}{a_0} \right). \quad (1.3.39)$$

Quando l'elio scorre con velocità $\vec{v}_s$ lungo un capillare di raggio R , può produrre dei vortici di raggio $r < R$, purchè valga la condizione di Landau:

$$v_s \geq v_{crit} = \min_q \left(\frac{\epsilon(q)}{q} \right). \quad (1.3.40)$$

Per determinare l'impulso q del vortice usiamo il fatto che la derivata di $\epsilon(q)$ nel punto q coincide con la velocità di gruppo della corrispondente quasiparticella.

$$\frac{d\epsilon}{dq} = v = \frac{\hbar}{2mr} \quad (1.3.41)$$

$$\frac{dq}{d\epsilon} = \frac{dq}{dr} \frac{dr}{d\epsilon} = \frac{2mr}{\hbar} \implies \frac{dq}{dr} = \frac{2mr}{\hbar} \frac{d\epsilon}{dr} \quad (1.3.42)$$

$$\frac{d\epsilon}{dr} = \frac{k^2 \rho_s}{2} \log \left(\frac{r}{a_0} \right) + \frac{k^2 \rho_s}{2} = \frac{k^2 \rho_s}{2} \left(\log \left(\frac{r}{a_0} \right) + 1 \right) \quad (1.3.43)$$

$$\frac{dq}{dr} = \frac{2mr}{\hbar} \frac{d\epsilon}{dr} = \frac{k^2 \rho_s}{2} \frac{2m}{\hbar} \left(r \log \left(\frac{r}{a_0} \right) + r \right) \quad (1.3.44)$$

integrando tra a_0 e r_0 e usando la formula:

$$\int_0^r x \log x \, dx = \frac{1}{4} \int_0^r \log x^2 \, dx^2 \quad (1.3.45)$$

$$= \frac{1}{4} \left[r^2 \log r^2 - r^2 \right] \quad (1.3.46)$$

$$= \frac{r^2}{2} \log r - \frac{r^2}{4} \quad (1.3.47)$$

si ha quindi:

$$q(r_0) = \frac{k^2 \rho_s m}{\hbar} \int_{a_0}^{r_0} \left(r \log r + r (1 - \log a_0) \right) dr \quad (1.3.48)$$

$$= \frac{k^2 \rho_s m}{\hbar} \left(\frac{r_0^2 \log r_0}{2} - \frac{r_0^2}{4} - \frac{a_0^2}{2} \log a_0 + \frac{a_0^2}{4} + \frac{r_0^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} \log a_0 - \frac{a_0^2}{2} + \frac{a_0^2}{2} \log a_0 \right) \quad (1.3.49)$$

$$= \frac{k^2 \rho_s m}{\hbar} \left(\frac{r_0^2}{2} \log \left(\frac{r_0}{a_0} \right) + \frac{r_0^2}{4} - \frac{a_0^2}{4} \right) \quad (1.3.50)$$

tralasciando il termine a_0^2 (perchè è dell'ordine di qualche $\text{\AA}$) abbiamo:

$$\frac{\epsilon(r_0)}{q(r_0)} = \frac{\frac{k^2 \rho_s}{2} r_0 \log\left(\frac{r_0}{a_0}\right)}{k^2 \frac{\rho_s m}{\hbar} \left(\frac{r_0^2}{2} \log\left(\frac{r_0}{a_0}\right) + \frac{r_0^2}{4}\right)} \quad (1.3.51)$$

$$= \frac{\hbar}{mr_0} \frac{\log\left(\frac{r_0}{a_0}\right)}{\frac{1}{2} + \log\left(\frac{r_0}{a_0}\right)} \quad (1.3.52)$$

$$\sim \frac{\hbar}{mr_0} \quad (1.3.53)$$

$$\Rightarrow v_{\text{critica}}(\text{vortice}) = \frac{\hbar}{mR} \frac{\log\left(\frac{R}{a_0}\right)}{\frac{1}{2} + \log\left(\frac{R}{a_0}\right)} \sim \frac{\hbar}{mR} \quad (1.3.54)$$

che è minimo per $r_0 \gg a_0$, $r_0 \rightarrow R$. Si formano quindi dei vortici ad anello delle dimensioni del capillare. Per diametri $2R \sim 10^{-5}$ m, la velocità critica è di qualche mm/s, molto minore rispetto alla velocità critica del rotone. Infatti questa è la velocità che caratterizza i superfluidi negli esperimenti standard.

1.4 Equazione di Schrödinger non lineare, equazione di Gross-Pitaevskii

L'equazione di Schrödinger a molti corpi associata al nostro sistema è:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = \hat{H}_N \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \quad (1.4.1)$$

con l'hamiltoniana del sistema data da:

$$\hat{H}_N = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + V_{\text{ext}}(\vec{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j;i \neq j}^N V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (1.4.2)$$

La funzione d'onda ϕ è completamente simmetrica sotto una permutazione qualsiasi $r_i \leftrightarrow r_j$. Sostituendo l'ansatz di Hartree-Fock:

$$\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \sim \prod_i \frac{\phi(\vec{r}_i, t)}{\sqrt{N}} \quad , \quad \text{con} \quad \int d^3r \phi^*(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) = N. \quad (1.4.3)$$

Non necessariamente lo stato fondamentale $k = 0$, anche se l'idea è proprio che $\phi(\vec{r}, t)$ descriva solo la componente superfluida: $N \equiv N_s = N_0$. Si trova

che l'energia totale del sistema è:

$$E = \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \dots d^3\vec{r}_N \phi^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \hat{H}_N \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \quad (1.4.4)$$

$$= T + V_{ext} + V \quad (1.4.5)$$

$$= \int d^3\vec{r} \phi^*(\vec{r}, t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi(\vec{r}, t) \quad (1.4.6)$$

$$T = \sum_{i=1}^N \int d^3\vec{r}_i \frac{\phi^*(\vec{r}_i, t)}{\sqrt{N}} \left(-\frac{\hbar^2 \Delta_i}{2m} \right) \frac{\phi(\vec{r}_i, t)}{\sqrt{N}} \prod_{j \neq i} \int d^3\vec{r}_j \frac{\phi^*(\vec{r}_j, t)}{\sqrt{N}} \frac{\phi(\vec{r}_j, t)}{\sqrt{N}} \quad (1.4.7)$$

$$= \int d^3\vec{r} \phi^*(\vec{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} \right) \phi(\vec{r}, t) \quad (1.4.8)$$

$$V_{ext} = \int d^3\vec{r} \phi^*(\vec{r}, t) V_{ext}(\vec{r}) \phi(\vec{r}, t) \quad (1.4.9)$$

$$V = \frac{1}{2} \frac{N(N-1)}{N^2} \int d^3\vec{r} d^3\vec{r}' \phi^*(\vec{r}, t) \phi^*(\vec{r}', t) V(\vec{r} - \vec{r}') \phi(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}', t) \quad (1.4.10)$$

dove N rappresenta i modi di scegliere la particella i , $N-1$ rappresenta i modi di scegliere la particella j ; le funzioni d'onda che contengono $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_j$ son quattro, quindi ognuno di esse contribuisce con $1/N$; $N(N-1)/N^2 \sim 1$ perchè $N \gg 1$.

Se impongo che ϕ minimizzi l'azione A :

$$A = \int dt \left[\left(\int d^3\vec{r} \phi^*(\vec{r}, t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi(\vec{r}, t) \right) - (T + V_{ext} + V) \right] \quad (1.4.11)$$

$$\implies \frac{\delta A}{\delta \phi^*(\vec{r})} = 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{\delta A}{\delta \phi} = 0 \quad (1.4.12)$$

sapendo che l'azione è legata all'hamiltoniana del sistema tramite la trasformata di Legendre ($H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$) ($A = \int dt d^3\vec{r} L$). Si ottiene cos' l'equazione di Schrödinger non lineare (NLS):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\vec{r}) + \int d^3\vec{r}' \phi^*(\vec{r}', t) V(\vec{r} - \vec{r}') \phi(\vec{r}', t) \right] \phi(\vec{r}, t). \quad (1.4.13)$$

Il caso generale con "autointerazione" $V(\vec{r} - \vec{r}')$ non locale si può solo trattare numericamente; studieremo solo il caso limite degli atomi freddi (gas diluiti), con g costante di accoppiamento:

$$V(\vec{r} - \vec{r}') = g \delta(\vec{r} - \vec{r}') = g \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad (1.4.14)$$

che corrisponde all'**equazione di Gross-Pitaevskii** (locale e non lineare):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\vec{r}) + g |\phi(\vec{r}, t)|^2 \right] \phi(\vec{r}, t) \quad (1.4.15)$$

essa descrive un sistema a molti corpi in approssimazione di campo medio, dove tutte le particelle hanno la stessa funzione d'onda. L'azione di GP è, integrando per parti:

$$A = - \int dt d^3\vec{r} \left(-i\hbar \phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi|^2 + V_{ext}(\vec{r}) |\phi|^2 + \frac{g}{2} |\phi|^4 \right). \quad (1.4.16)$$

L'equazione di GP stazionaria si ottiene sostituendo:

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) \exp \left\{ -i \frac{\mu}{\hbar} t \right\} \quad , \quad \mu = \frac{\partial E}{\partial N} \quad (1.4.17)$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\vec{r}) + g |\phi(\vec{r})|^2 \right] \phi(\vec{r}) = \mu \phi(\vec{r}) \quad (1.4.18)$$

in cui ci limiteremo al caso $V_{ext} = 0$; giustificheremo il fatto che l'evoluzione temporale di ϕ è data dal potenziale chimico μ e non da E quando parleremo di stati coerenti. L'equazione di GP stazionaria si ottiene minimizzando l'energia a fissato numero di particelle:

$$N = \int d^3\vec{r} \phi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \quad (1.4.19)$$

$$E = \int d^3\vec{r} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi|^2 + \frac{g}{2} |\phi|^4 \right) \quad (1.4.20)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta(E - \mu N)}{\delta \phi^*(\vec{r})} = 0 \quad (1.4.21)$$

dove $E - \mu N$ è l'energia gran canonica. Abbiamo:

- L'equazione GP può essere considerata l'equivalente delle equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo, dove ϕ gioca il ruolo del campo elettromagnetico.
- Nell'equazione GP compare $\hbar$: questo è legato alla diversa legge di dispersione; in Maxwell:

$$E = cp \quad , \quad \omega = ck \quad (1.4.22)$$

in GP:

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \quad , \quad \omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad (1.4.23)$$

tra fotoni e particelle non relativistiche.

- Tramite la seconda quantizzazione, si passa da GP all'equazione di Schrödinger a molti corpi originaria. Poichè la fase della funzione d'onda macroscopica è diversa da zero, ma l'azione A di GP ha simmetria $U(1)$ per rotazioni di gauge globali:

$$\phi(\vec{r}, t) \longrightarrow \phi(\vec{r}, t) e^{i\alpha} \quad (1.4.24)$$

con α costante, tale simmetria deve essere rotta. Vedremo che la condensazione di Bose-Einstein, e la concomitante comparsa di eccitazioni fononiche, è legata alla rottura spontanea di simmetria $U(1)$.

1.4.1 Rottura spontanea di simmetria

Consideriamo lo stato fondamentale in cui il fluido non ha fluttuazioni: $\phi(\vec{r}) = \phi_0 = \text{costante}$. Siamo interessati alla soluzione di GP stazionaria che minimizza l'energia E a fissato numero di particelle. Sostituisco ϕ_0 in $E - \mu N$; il termine cinetico è nullo, quindi è tutto costante e posso integrare sul volume V :

$$E - \mu N = V \left(\frac{g}{2} |\phi_0|^2 - \mu |\phi_0|^2 \right) \quad (1.4.25)$$

dove possiamo notare che il potenziale dipende solo dal modulo di ϕ_0 .

$E - \mu N$ ha la forma di un cappello messicano ($\phi = \phi_1 + i\phi_2$), dove abbiamo un numero infinito di minimi di potenziale corrispondente alla simmetria di rotazione $U(1)$, come si vede in figura 1.22.

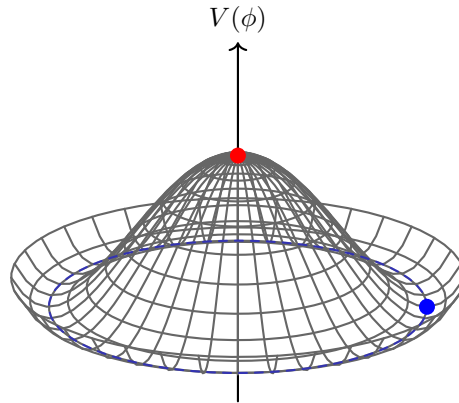


Figura 1.22

Il minimo si ha per:

$$\frac{\delta(E - \mu N)}{\delta |\phi_0|^2} = 0 \implies g |\phi_0|^2 - \mu = 0 \quad (1.4.26)$$

$$\implies |\phi_0|^2 = \frac{\mu}{g} = n_0 = \frac{\rho_0}{m} \quad (1.4.27)$$

cioè la fase di ϕ_0 è arbitraria, mentre il modulo è fisso! In questo modo troviamo anche la relazione tra il potenziale chimico, la costante di accoppiamento g e la densità delle particelle:

$$\mu = \frac{g \rho_0}{m} = g |\phi_0|^2. \quad (1.4.28)$$

In conclusione: l'azione della teoria possiede una simmetria globale $U(1)$, poichè è invariante sotto l'aggiunta di un fattore costante nella fase della funzione d'onda. Lo stato fondamentale non possiede invece questa simmetria: la teoria possiede un continuo di vuoti degeneri e la funzione d'onda macroscopica per lo stato fondamentale:

$$\psi(\vec{r}) \equiv \phi_0 = |\phi_0| e^{i\alpha} \quad (1.4.29)$$

ha una fase ben definita. Per un sistema relativisticamente invariante è abbastanza semplice dimostrare che esistono due tipi di eccitazioni legate al meccanismo della rottura spontanea di simmetria $U(1)$:

- Un bosone a massa nulla (*Bosone di Goldstone*) associato alle variazioni di fase della funzione d'onda.
- Un bosone massivo (*Bosone di Anderson-Higgs*) associato ad oscillazioni del modulo $|\phi|$.

Nel caso non relativistico la situazione è più complicata e conviene analizzare il problema in dettaglio.

1.4.2 Le pseudoparticelle di Bogoliubov

Una classe importante di soluzioni dell'equazione GP corrisponde a oscillazioni di piccola ampiezza, dove le variazioni nello spazio e nel tempo di ϕ , rispetto alla configurazione omogenea, ϕ_0 , sono piccole:

$$\phi(\vec{r}, t) = \left[\phi_0 + \theta(\vec{r}, t) \right] e^{-\frac{i}{\hbar} \mu t} \quad (1.4.30)$$

in cui:

$$|\phi_0|^2 = \frac{N}{V} = \frac{N_0}{V} = \frac{\mu}{g} \quad (1.4.31)$$

siamo a $T = 0$ e trascuriamo il fenomeno dello svuotamento quantistico. Poniamo:

$$\theta(\vec{r}, t) = u_k e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + v_k e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.4.32)$$

che comprende la variazione di modulo e/o fase. Quindi:

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \mu t} + \left[u_k e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega + \frac{\mu}{\hbar})t)} + v_k e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega - \frac{\mu}{\hbar})t)} \right] \quad (1.4.33)$$

che sostituiamo in:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi(\vec{r}, t) = g |\phi(\vec{r}, t)|^2 \phi(\vec{r}, t) \quad , \quad O(1) : \mu = g |\phi_0|^2 \quad (1.4.34)$$

il contributo al primo ordine a sinistra dell'uguale è:

$$\left((\hbar\omega + \mu) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) u_k e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega + \frac{\mu}{\hbar})t)} + \left((\mu - \hbar\omega) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) v_k e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega - \frac{\mu}{\hbar})t)} \quad (1.4.35)$$

ponendo:

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \mu t} + \delta\phi \quad (1.4.36)$$

$$\phi^*(\vec{r}, t) = \phi_0 e^{\frac{i}{\hbar} \mu t} + \delta\phi^* \quad (1.4.37)$$

possiamo riassorbire la fase di ϕ_0 traslando opportunamente t :

$$g |\phi_0|^2 \phi = g \left(\phi_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \mu t} + \delta\phi \right) \left(\phi_0 e^{\frac{i}{\hbar} \mu t} + \delta\phi^* \right) \left(\phi_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \mu t} + \delta\phi \right) \quad (1.4.38)$$

$$= g_0 \phi_0^3 e^{-\frac{i}{\hbar} \mu t} + 2g \phi_0^2 \delta\phi + g \phi_0^2 e^{-2\frac{i}{\hbar} \mu t} \delta\phi^* + \mathcal{O}(\delta\phi^2) \quad (1.4.39)$$

dove compare il termine di ordine zero, che non consideriamo; il termine $\mathcal{O}(\delta\phi)$ è quindi:

$$2\mu \delta\phi + \mu e^{-2\frac{i}{\hbar} \mu t} \delta\phi^* = 2\mu \left(u_k e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega + \frac{\mu}{\hbar})t)} + v_k e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega - \frac{\mu}{\hbar})t)} \right) + \mu e^{-2\frac{i}{\hbar} \mu t} \left(u_k^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega + \frac{\mu}{\hbar})t)} + v_k^* e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega - \frac{\mu}{\hbar})t)} \right) \quad (1.4.40)$$

$$= \mu(2u_k + v_k^*) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega + \frac{\mu}{\hbar})t)} + \mu(2v_k + u_k^*) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega - \frac{\mu}{\hbar})t)} \quad (1.4.41)$$

e cioè, separando i termini e prendendo il complesso coniugato nella seconda espressione:

$$\begin{cases} \left((\hbar\omega + \mu) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) u_k = 2\mu u_k + \mu v_k^* \\ \left((\mu - \hbar\omega) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) v_k^* = 2\mu v_k^* + \mu u_k \end{cases} \quad (1.4.42)$$

essa si può scrivere in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \hbar\omega - \mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} & -\mu \\ -\mu & -\mu - \hbar\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k^* \end{pmatrix} = 0 \quad (1.4.43)$$

questo sistema di equazioni lineari possiede soluzioni non banali se e solo se il determinante della matrice è uguale a zero:

$$\left(\hbar\omega - \mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) \left(-\mu - \hbar\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) - \mu^2 = 0 \quad (1.4.44)$$

$$\Rightarrow \left(-\hbar^2\omega^2 + \left(\mu + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2\right) - \mu^2 = 0 \quad (1.4.45)$$

$$\Rightarrow \hbar^2\omega^2 = \left(\mu + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2 - \mu^2 \quad (1.4.46)$$

$$\Rightarrow \hbar\omega = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\mu\right)} \quad (1.4.47)$$

quindi si arriva all'importantissimo risultato dato dalla **legge di dispersione di Bogoliubov**:

$$\epsilon(k) = \sqrt{\epsilon_0(k) (\epsilon_0(k) + 2\mu)} \quad (1.4.48)$$

dove $\epsilon_0(k) = \hbar^2 k^2 / (2m)$ è la legge di dispersione per particelle libere. La soluzione negativa di $\hbar\omega$ corrisponde a scambiare $u_k \leftrightarrow v_{-k}$: le due soluzioni rappresentano lo stesso tipo di oscillazione fisica. Abbiamo:

- Per $k \sim 0$:

$$\epsilon(k) = \hbar\omega \sim \sqrt{\frac{\mu}{m}} \hbar k = v_1 q \quad , \quad v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{m}} = \sqrt{\frac{g n_0}{n}} \quad \text{fonone} \quad (1.4.49)$$

quindi la pseudoparticella di Bogoliubov corrispondente a questa legge di dispersione è un caso particolare di *particella di Goldstone per un condensato di particelle bosoniche debolmente interagenti*.

- Per grandi k :

$$\epsilon(k) = \epsilon_0(k) \sqrt{1 + \frac{2\mu}{\epsilon_0(k)}} \sim \epsilon_0(k) + \mu \quad (1.4.50)$$

quindi la legge di dispersione tende asintoticamente, a meno della costante μ , a quella di una *particella libera*.

L'interazione caratterizzata dal parametro $g > 0$ è responsabile della rottura spontanea di simmetria e della comparsa delle eccitazioni di Bogoliubov. Quello che non eravamo riusciti a calcolare con l'elio superfluido, ora invece è stato possibile, ottenendo una legge di dispersione che è un ibrido tra quella del fonone (interpretato come una particella di Goldstone) e quella di particella libera. $\theta(\vec{r}, t)$ può corrispondere ad oscillazioni di fase e modulo: non esiste una pseudoparticella di Anderson-Higgs distinta dal bosone di Goldstone nei condensati BEC.

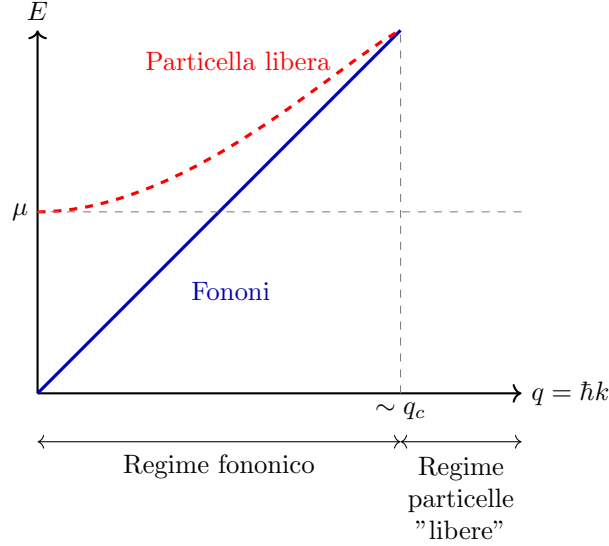


Figura 1.23

1.4.3 Il solitone

Considereremo ora delle soluzioni speciali dell'equazione di Gross-Pitaevskii dipendenti dal tempo chiamate **solitoni**. Nel caso repulsivo ($g > 0$), queste soluzioni corrispondono a modulazioni della densità localizzate che si muovono nel condensato con velocità costante e preservando la loro forma nel tempo.

Il profilo del solitone nella regione perturbata è caratterizzato da una diminuzione della densità ρ_0 rispetto al valore di bulk (*solitone grigio*). L'esistenza del solitone grigio è direttamente legata alla non linearità dell'equazione GP, il cui effetto compensa il termine quantistico di pressione associato all'energia cinetica. L'estensione spaziale del solitone è caratterizzata dalla *lunghezza di healing*:

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m g n_0}} \quad , \quad n_0 = \frac{N_0}{V} = \frac{N}{V}. \quad (1.4.51)$$

Consideriamo soluzioni dell'equazione GP non stazionaria:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + g |\phi(\vec{r}, t)|^2 \right] \phi(\vec{r}, t) \quad (1.4.52)$$

della forma:

$$\phi(\vec{r}, t) = \sqrt{n_0} f(z, t) e^{-\frac{i}{\hbar} \mu t} = \phi_{\text{sol}}(\vec{r}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} \mu t} \quad , \quad \mu = gn_0 \quad (1.4.53)$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(z, t) + \mu f(z, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + gn_0 |f(z, t)|^2 \right] f(z, t) \quad (1.4.54)$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(z, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z, t) + gn_0 (|f(z, t)|^2 - 1) f(z, t) \right] \quad (1.4.55)$$

si nota che siamo in fase con rottura spontanea di simmetria. Cerco soluzioni del tipo $f(z - vt)$, divido tutto per gn_0 :

$$-\frac{i\hbar}{gn_0} v \frac{df(z - vt)}{d(z - vt)} = -\frac{\hbar^2}{2m gn_0} \frac{d^2}{d(z - vt)^2} f(z - vt) + (|f|^2 - 1) f(z - vt) \quad (1.4.56)$$

introducendo la lunghezza di healing:

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m gn_0} \quad , \quad \gamma = \frac{z - vt}{\xi} \quad (1.4.57)$$

abbiamo:

$$-i\hbar \frac{v}{gn_0} \frac{\sqrt{gn_0 2m}}{\hbar} \frac{df(\gamma)}{d\gamma} = -\frac{d^2}{d\gamma^2} f(\gamma) + (|f(\gamma)|^2 - 1) f(\gamma). \quad (1.4.58)$$

La velocità del suono nel condensato è:

$$v_1 = \sqrt{\frac{gn_0}{m}} \quad (1.4.59)$$

quindi posso scrivere che:

$$\frac{v}{gn_0} \sqrt{gn_0 2m} = v\sqrt{2} \sqrt{\frac{m}{gn_0}} \quad (1.4.60)$$

$$= \frac{v}{v_1} \sqrt{2} \quad (1.4.61)$$

$$= 2U \quad (1.4.62)$$

dobbiamo risolvere la seguente equazione:

$$2iU \frac{df}{d\gamma} = \frac{d^2 f}{d\gamma^2} + f(1 - |f|^2) \quad , \quad \gamma = \frac{z - vt}{\xi} \quad (1.4.63)$$

con l'obiettivo di trovare una soluzione localizzata che soddisfa le condizioni asintotiche:

$$|f| \rightarrow 1 \quad , \quad \frac{df}{d\gamma} \rightarrow 0 \quad , \quad \gamma \rightarrow \pm\infty. \quad (1.4.64)$$

Moltiplichiamo (1.4.63) per f^* e sottraiamo l'equazione complessa coniugata:

$$\begin{cases} 2iU f^* \frac{df}{d\gamma} = f^* \frac{d^2 f}{d\gamma^2} + |f|^2 (1 - |f|^2) \\ -2iU f \frac{df^*}{d\gamma} = f \frac{d^2 f^*}{d\gamma^2} + |f|^2 (1 - |f|^2) \end{cases} \quad (1.4.65)$$

$$\implies 2iU \left(f^* \frac{df}{d\gamma} + f \frac{df^*}{d\gamma} \right) = f^* \frac{d^2 f}{d\gamma^2} - f \frac{d^2 f^*}{d\gamma^2} \quad (1.4.66)$$

e integrando:

$$\int_{\gamma}^{\infty} 2iU \left(\frac{d}{d\gamma'} f^* f \right) d\gamma' = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{d}{d\gamma'} \left(f^* \frac{df}{d\gamma} - f \frac{df^*}{d\gamma} \right) d\gamma' \quad (1.4.67)$$

$$2iU(1 - |f|^2) + f^* \frac{df}{d\gamma} - f \frac{df^*}{d\gamma} = 0 \quad (1.4.68)$$

che non è altro che l'equazione di continuità per una densità di corrente conservata. Essa è consistente con le condizioni al bordo.

Una seconda equazione si ottiene prendendo la parte immaginaria dell'equazione (1.4.63):

$$2U \frac{df_1}{d\gamma} = \frac{d^2 f_2}{d\gamma^2} + f_2(1 - f_1^2 - f_2^2) \quad , \quad f = f_1 + if_2 \quad (1.4.69)$$

se consideriamo le soluzioni con $f_1 = f_2 = \text{costante}$, allora l'equazione diventa:

$$2U \frac{df_1}{d\gamma} = f_2(1 - f_1^2 - f_2^2) \quad (1.4.70)$$

mentre l'equazione di continuità:

$$-2iU(1 - f_1^2 - f_2^2) = (f_1 - if_2) \frac{d}{d\gamma}(f_1 + if_2) - (f_1 + if_2) \frac{d}{d\gamma}(f_1 - if_2) \quad (1.4.71)$$

$$= -2if_2 \frac{d}{d\gamma} f_1 \quad (1.4.72)$$

$$f_2 \frac{df_1}{d\gamma} = U(1 - f_1^2 - f_2^2) \quad (1.4.73)$$

l'equazione (1.4.70) e (1.4.73) coincidono se $f_2 = \sqrt{2}U = v/v_1$:

$$\frac{2U}{f_2} = \frac{f_2}{U} \implies \sqrt{2} \frac{df_1}{d\gamma} = \left(1 - \frac{v^2}{v_1^2} - f_1^2 \right) \quad (1.4.74)$$

$$\implies \frac{d \left(\frac{f_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}}} \right)}{d \left(\frac{\gamma \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}}}{\sqrt{2}} \right)} = \left(1 - \left(\frac{f_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}}} \right)^2 \right) \quad (1.4.75)$$

se la confrontiamo con:

$$\frac{d}{dx} \tanh(x) = 1 - (\tanh(x))^2 \implies f_1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}} \tanh\left(\frac{\gamma \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}}}{\sqrt{2}}\right) \quad (1.4.76)$$

$$f(z, t) = f_1 + i f_2 \quad (1.4.77)$$

allora si ottiene il **gray soliton**:

$$\phi_{\text{sol}}(z - vt) = \sqrt{n_0} f(z, t) \quad (1.4.78)$$

$$= \sqrt{n_0} \left[i \frac{v}{v_1} + \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}} \tanh\left(\frac{z - vt}{\sqrt{2} \xi} \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}}\right) \right] \quad (1.4.79)$$

Il profilo di densità $n(z - vt) = |\phi_{\text{sol}}|^2$ ha la forma di una campana capovolta. Come si vede in figura 1.24. Il minimo di $n(z - vt)$ si ha per $z - vt = 0 \leftrightarrow \tanh(0) = 0$:

$$n(0) = |\phi_{\text{sol}}|^2 = n_0 \left| i \frac{v}{v_1} \right|^2 = n_0 \frac{v^2}{v_1^2}. \quad (1.4.80)$$

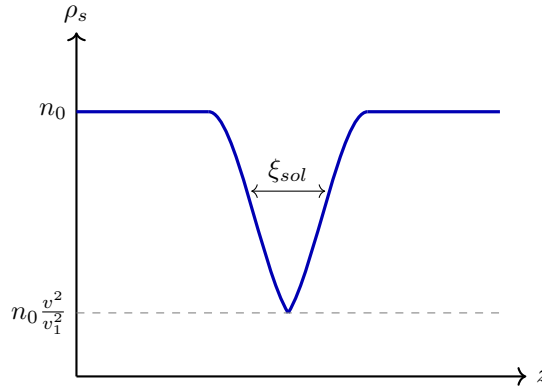


Figura 1.24

Per un solitone fermo abbiamo $n(0) = 0$: **dark soliton**; il profilo si abbassa e tocca 0 e la parte di sinistra è disconnessa da quella di destra. Abbiamo:

- La fase della funzione d'onda subisce una variazione finita tra $z = -\infty$

e $z = +\infty$ ($\tanh \rightarrow 1$):

$$\phi_{\text{sol}}(-\infty) = i\sqrt{n_0} \left(\frac{v}{v_1} + i \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}} \right) \quad (1.4.81)$$

$$\phi_{\text{sol}}(+\infty) = i\sqrt{n_0} \left(\frac{v}{v_1} - i \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}} \right) \quad (1.4.82)$$

$$\frac{\phi_{\text{sol}}(-\infty)}{\phi_{\text{sol}}(+\infty)} = e^{i\Delta\phi} = \left(\frac{v}{v_1} - i \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}} \right)^2 \quad (1.4.83)$$

$$\implies \Delta\phi = 2 \arccos \left(\frac{v}{v_1} \right) \quad (1.4.84)$$

per un dark soliton, ϕ_{sol} è reale e dispari, quindi il cambiamento di fase e $\Delta\phi = \pi$: difetto topologico. Non solo si ha zero densità al centro del solitone, ma la fase a destra deve essere $\pi/2$ e quella a sinistra $-\pi/2$.

- La larghezza del solitone è legata alla lunghezza di healing ξ , ma amplificata di un fattore:

$$\xi_{\text{sol}} = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}}} \rightarrow \infty, \quad v \rightarrow v_1. \quad (1.4.85)$$

- L'energia del solitone ϵ_{sol} , per unità di superficie, è (ricordando che $\mu = gn_0$):

$$\epsilon_{\text{sol}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left| \frac{d\phi_{\text{sol}}}{dz} \right|^2 + \left(\frac{g}{2} |\phi_{\text{sol}}|^4 - \mu |\phi_{\text{sol}}|^2 \right) \right] - \left[\frac{g}{2} |\phi_0|^4 - \mu |\phi_0|^2 \right] \quad (1.4.86)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left| \frac{d\phi_{\text{sol}}}{dz} \right|^2 + \left(\frac{g}{2} |\phi_{\text{sol}}|^4 - gn_0 |\phi_{\text{sol}}|^2 \right) \right] - \left[\frac{g}{2} |\phi_0|^4 - gn_0 |\phi_0|^2 \right] \quad (1.4.87)$$

dove possiamo notare che il secondo termine dell'integrando è l'energia dello stato imperturbato, che può essere scritto come:

$$gn_0 = |\phi_0|^2 g \implies \left[\frac{g}{2} |\phi_0|^4 - gn_0 |\phi_0|^2 \right] \equiv -\frac{g}{2} |\phi_0|^4 = -\frac{g}{2} n_0^2 \quad (1.4.88)$$

così che:

$$\epsilon_{\text{sol}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left| \frac{d\phi_{\text{sol}}}{dz} \right|^2 + \left(\frac{g}{2} |\phi_{\text{sol}}|^4 - gn_0 |\phi_{\text{sol}}|^2 \right) \right] + \frac{g}{2} n_0^2 \quad (1.4.89)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left| \frac{d\phi_{\text{sol}}}{dz} \right|^2 + \frac{g}{2} \left(|\phi_{\text{sol}}|^2 - n_0 \right)^2 \right]. \quad (1.4.90)$$

Considero prima la parte del potenziale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{g}{2} \left(|\phi_{\text{sol}}|^2 - n_0 \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{g}{2} n_0^2 \left(|f^2| - 1 \right)^2 \quad (1.4.91)$$

$$\sqrt{2} \frac{df_1}{d\gamma} = \left(1 - |f^2| \right) \implies \int_{-\infty}^{+\infty} dz g n_0^2 \left(\frac{df_1}{d\gamma} \right)^2 \quad (1.4.92)$$

per quanto riguarda la parte cinetica:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\hbar^2}{2m} \left| \frac{d\phi_{\text{sol}}}{dz} \right|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\hbar^2}{2m} n_0 \left| \frac{df}{dz} \right|^2 \quad (1.4.93)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\hbar^2 n_0^2 g}{2m g n_0} \left(\frac{df_1}{dz} \right)^2 \quad (1.4.94)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \xi^2 n_0^2 g \left(\frac{df_1}{dz} \right)^2 \quad (1.4.95)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dz n_0^2 g \left(\frac{df_1}{d\gamma} \right)^2 \quad (1.4.96)$$

sommiamo i due termini e otteniamo:

$$\epsilon_{\text{sol}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz 2n_0^2 g \left(\frac{df_1}{d\gamma} \right)^2 \quad (1.4.97)$$

$$= \int_{f_1(-\infty)}^{f_1(+\infty)} \frac{dz}{d\gamma} 2 g n_0^2 \frac{df_1}{d\gamma} df_1 \quad (1.4.98)$$

$$= \int_{f_1(-\infty)}^{f_1(+\infty)} (2g n_0^2) \frac{\xi}{2} \left(1 - \frac{v^2}{v_1^2} - f_1^2 \right) df_1 \quad (1.4.99)$$

$$= \int_{f_1(-\infty)}^{f_1(+\infty)} df_1 2g n_0^2 \frac{\hbar}{\sqrt{2m g n_0}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{v^2}{v_1^2} - f_1^2 \right) \quad (1.4.100)$$

$$= n_0 \hbar \sqrt{\frac{g n_0}{m}} \int_{f_1(-\infty)}^{f_1(+\infty)} df_1 \left(1 - \frac{v^2}{v_1^2} - f_1^2 \right) \quad (1.4.101)$$

$$= n_0 \hbar v_1 \left[\left(1 - \frac{v^2}{v_1^2} \right) (f_1(+\infty) - f_1(-\infty)) - \frac{f_1^3(+\infty)}{3} + \frac{f_1^3(-\infty)}{3} \right] \quad (1.4.102)$$

e poichè abbiamo che:

$$f_1(+\infty) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}} \quad , \quad f_1(-\infty) = -\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_1^2}} \quad (1.4.103)$$

troviamo infine:

$$\epsilon_{\text{sol}} = n_0 \hbar v_1 \left[2 \left(1 - \frac{v^2}{v_1^2} \right)^{3/2} - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{v^2}{v_1^2} \right)^{3/2} \right] \quad (1.4.104)$$

$$= \frac{4}{3} n_0 \hbar v_1 \left(1 - \frac{v^2}{v_1^2} \right)^{3/2} \quad (1.4.105)$$

dove si può notare la differenza tra le energie grancanoniche in presenza e in assenza del solitone. A $v = 0$, l'energia è al massimo; se aumento v , l'energia diminuisce ($v \rightarrow v_1$, $\epsilon_{\text{sol}} \rightarrow 0$). Per piccoli valori di v :

$$\epsilon_{\text{sol}} \sim \frac{4}{3} n_0 \hbar v_1 - 2 \hbar v_1 n_0 \frac{v^2}{v_1^2} \quad (1.4.106)$$

$$= \frac{4}{3} \hbar v_1 n_0 + \frac{1}{2} \left(-4 \hbar \frac{n_0}{v_1} \right) v^2. \quad (1.4.107)$$

Il solitone si comporta come una particella di massa negativa:

$$m_s = -4 \hbar \frac{n_0}{v_1} \quad (1.4.108)$$

in accordo con il fatto che la modulazione di densità corrisponde a una "buca" piuttosto che a una "particella" ($\partial \epsilon / \partial k$ e k sono antiparalleli).

La velocità del solitone aumenta al decrescere dell'energia: questo vuol dire che in presenza di dissipazione dovuta alle collisioni con fononi a $T > 0$ il solitone accelera per eventualmente scomparire quando $v \rightarrow v_1$.

Il solitone è instabile per fluttuazioni nelle direzioni trasverse (x, y) e negli esperimenti con atomi freddi l'instabilità viene soppressa diminuendo le dimensioni trasversali delle trappole magnetiche.

1.5 Quantizzazione canonica

Da un punto di vista formale, la Meccanica Quantistica può essere interpretata come una deformazione della meccanica classica, in cui variabili classiche f, g vengono sostituite da operatori $\hat{f}, \hat{g}$ e le parentesi di Poisson:

$$\{f, g\}_P = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (1.5.1)$$

da parentesi di commutazione:

$$\{f, g\}_P \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}] \quad (1.5.2)$$

dove $\{q_i\}$ e $\{p_i\}$ sono le variabili canonicamente coniugate:

$$\{q_k, p_j\}_P = \sum_i \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \right) = \delta_{k,j} \implies [\hat{q}_k, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{k,j}. \quad (1.5.3)$$

L'evoluzione classica di una funzione f è:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \quad (1.5.4)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}_P \quad (1.5.5)$$

$$\implies \frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{H}] \quad (1.5.6)$$

dove $H(\vec{q}, \vec{p})$ è l'hamiltoniana del sistema, con equazioni del moto:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (1.5.7)$$

Possiamo introdurre la lagrangiana:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(\vec{q}, \vec{p}). \quad (1.5.8)$$

Il momento canonicamente coniugato a q_i è:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.5.9)$$

1.5.1 L'oscillatore armonico come teoria di campo in 0+1 dim.

Consideriamo l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico:

$$H(\phi, \pi) = \frac{(\pi(t))^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (\phi(t))^2 \quad (1.5.10)$$

$$\equiv \frac{1}{2}m \left(\frac{d\phi(t)}{dt} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} (\phi(t))^2 \quad (1.5.11)$$

dove ϕ e π sono variabili canonicamente coniugate

$$\frac{\partial H}{\partial \pi} = \frac{\pi(t)}{m} = \frac{d}{dt} \phi(t) \quad (1.5.12)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = m\omega^2 \phi(t) = -\frac{d}{dt} \pi(t). \quad (1.5.13)$$

Ci sono due modi equivalenti per quantizzare l'oscillatore armonico:

$$\phi(t), \pi(t) \longrightarrow \hat{\phi}(t), \hat{\pi}(t) \quad (1.5.14)$$

$$[\hat{\phi}, \hat{\pi}] = i\hbar \longrightarrow \hat{\pi} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \phi \longrightarrow \phi \quad (1.5.15)$$

dove ϕ rimane classico; in questo modo si arriva all'equazione di Schrödinger:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{m}{2} \omega^2 \phi^2 \right) \psi(\phi, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\phi, t). \quad (1.5.16)$$

Questo formalismo può essere utilizzato anche in teoria dei campi, cioè quando $\phi = \phi(\vec{r}, t)$ dipende da un'indice continuo $\vec{r}$ (Functional Schrödinger equation method): una tecnica non molto popolare a causa della perdita esplicita, nel caso di teorie invarianti relativistiche, della covarianza relativistica e delle difficoltà tecniche associate ad una trattazione rigorosa di equazioni alle derivate funzionali:

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \longrightarrow \frac{\delta^2}{\delta \phi^2}. \quad (1.5.17)$$

In alternativa, possiamo dividere il campo $\phi(t)$ in due "campi" complessi:

$$\phi(t) = \frac{a(t) + a^*(t)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \implies a(t) = \frac{i\pi(t)}{\sqrt{2\hbar m\omega}} + \phi(t) \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \quad (1.5.18)$$

$$\pi(t) = \frac{a(t) - a^*(t)}{i\sqrt{2}} \sqrt{\hbar m\omega} \implies a^*(t) = \frac{-i\pi(t)}{\sqrt{2\hbar m\omega}} + \phi(t) \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \quad (1.5.19)$$

per cui:

$$H = \frac{\pi^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \phi^2 \quad (1.5.20)$$

$$= \hbar\omega \left(\frac{\pi^2}{2m\omega\hbar} + \frac{m\omega^2}{2\hbar} \phi^2 \right) \quad (1.5.21)$$

$$= \hbar\omega \left(\phi \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} - i \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega m}} \right) \left(\phi \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} + i \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega m}} \right) \quad (1.5.22)$$

$$= \hbar\omega a^*(t) a(t). \quad (1.5.23)$$

Risulta facile verificare che il cambiamento di variabile:

$$\{\phi, \pi\} \longrightarrow \{a, i\hbar a^*\} \quad (1.5.24)$$

corrisponde a una trasformazione canonica:

$$\{a, i\hbar a^*\}_P = i\hbar \{a, a^*\}_P \quad (1.5.25)$$

$$= i\hbar \left(\frac{\partial a}{\partial \phi} \frac{\partial a^*}{\partial \pi} - \frac{\partial a}{\partial \pi} \frac{\partial a^*}{\partial \phi} \right) \quad (1.5.26)$$

$$= i\hbar \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\frac{-i}{\sqrt{2\hbar\omega m}} \right) - \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega m}} \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \right) \quad (1.5.27)$$

$$= 1 \quad (1.5.28)$$

per quantizzare la teoria:

$$i\hbar\{a, a^*\}_P = 1 \implies [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (1.5.29)$$

troviamo anche:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right] \quad (1.5.30)$$

$$= \hbar\omega \left[\hat{N} + \frac{1}{2} \right] \quad (1.5.31)$$

dove $\hat{N}$ è l'operatore *numero di quanti di energia/(pseudo)particelle*. In teoria dei campi, l'idea è di identificare le (pseudo)particelle del sistema con gli autostati dell'hamiltoniana quantistica e cioè con le eccitazioni del campo ad energia definita (stati stabili o asintotici). $\hat{a}$ è l'operatore di distruzione di particella con energia $\hbar\omega$; $\hat{a}^\dagger$ è l'operatore di creazione di una particella con energia $\hbar\omega$. Questi operatori agiscono sugli stati dello spazio di Fock a numero finito di particelle. Indicando con $|0\rangle$ lo stato di minima energia (nessuna particella), allora:

$$\hat{a} |0\rangle = 0 \quad (1.5.32)$$

$$|1\rangle = \hat{a}^\dagger |0\rangle \quad (1.5.33)$$

$$|N\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle \quad (1.5.34)$$

$$\hat{a} |N\rangle = \sqrt{N} |N-1\rangle \quad (1.5.35)$$

$$\hat{N} |N\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a} \frac{(\hat{a}^\dagger)^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)}{\sqrt{N!}} \left(\hat{a} (\hat{a}^\dagger)^N - (\hat{a}^\dagger)^N \hat{a} \right) |0\rangle = N \frac{(\hat{a}^\dagger)^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle = N |N\rangle \quad (1.5.36)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato:

$$\left[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^N \right] = N (\hat{a}^\dagger)^{N-1} \quad (1.5.37)$$

$\hat{N}$ conta il numero di particelle in una scatola.

1.5.2 Stati coerenti

Nel corso di Meccanica Quantistica sappiamo che lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico minimizza il principio di indeterminazione; valor medio sullo stato a zero particelle è uguale a:

$$\langle (\Delta\hat{\phi})^2 \rangle_0 \langle (\Delta\hat{\pi})^2 \rangle_0 = \frac{\hbar^2}{4} \quad (1.5.38)$$

dove il valore di aspettazione di una certa quantità è il valor medio di questa quantità preso tra lo stato di vuoto: $\langle \cdot \rangle_0 = \langle 0 | \cdot | 0 \rangle$; $\Delta \hat{\phi} = \hat{\phi} - \langle \hat{\phi} \rangle_0 = \hat{\phi}$ perchè il valor medio di ϕ sullo stato 0 è zero e $\Delta \hat{\pi} = \hat{\pi} - \langle \hat{\pi} \rangle_0 = \hat{\pi}$.

Si può dimostrare facilmente che lo stato a N particelle non minimizza il principio di indeterminazione:

$$\langle N | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | N \rangle = \langle N | \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} | N \rangle \quad (1.5.39)$$

$$= \langle N | 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] | N \rangle \quad (1.5.40)$$

$$= 2N + 1 \quad (1.5.41)$$

i termini che contengono $(\hat{a}^\dagger)^2$ e $(\hat{a})^2$ danno contributo zero, perchè lo stato iniziale e lo stato finale hanno lo stesso numero di particelle, $(\hat{a})^2$ distruggerebbe due particelle sullo stato a destra, per esempio, e noi sappiamo che $\langle N | N' \rangle = 0$ se $N \neq N'$.

$$\langle N | (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) | N \rangle = -(2N + 1) \quad (1.5.42)$$

li abbiamo calcolati poiché:

$$\begin{cases} \hat{a} - \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{\pi}}{\sqrt{m\omega\hbar}} \sqrt{2} i \\ \hat{a} + \hat{a}^\dagger = \hat{\phi} \sqrt{m\omega\hbar} \frac{\sqrt{2}}{\hbar} \end{cases} \quad (1.5.43)$$

e quindi si ottiene:

$$\langle (\Delta \hat{\phi})^2 \rangle_N \langle (\Delta \hat{\pi})^2 \rangle_N = \frac{\hbar^2}{4} (2N + 1)^2. \quad (1.5.44)$$

Questo dimostra che la parte a destra dell'uguaglianza dipende da N , ed è minima per $N = 0$: il principio di indeterminazione non è minimizzato se faccio valori medi sullo stato a fissato numero di particelle N . Per il vuoto funziona, perchè $\hat{a} | 0 \rangle = 0 | 0 \rangle$, cioè $| 0 \rangle$ è autostato di $\hat{a}$. Vediamo cosa succede se consideriamo un autostato generico di $\hat{a}$ con autovalore $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\hat{a} | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle \quad , \quad \langle \alpha | \alpha \rangle = 1 \quad , \quad \langle \alpha | \hat{a}^\dagger = \alpha^* \langle \alpha |. \quad (1.5.45)$$

Gli stati coerenti minimizzano il principio di indeterminazione; dal nostro punto di vista è importante, perchè se interpretiamo $\hat{a}$ come il campo $\hat{\phi}$ dell'equazione di Gross-Pitaevskii, il valore di aspettazione di $\hat{a}$ deve essere diverso da zero ($\langle \hat{a} \rangle \neq 0$) come deve essere quello di $\hat{\phi}$ ($\langle \hat{\phi} \rangle \neq 0$), e devo ottenere $\langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha$ (per i condensati $\langle \phi | \hat{p} \hat{h} i | \phi \rangle = \phi$). Quindi abbiamo

che:

$$\langle \alpha | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle = (\alpha + \alpha^*) \quad (1.5.46)$$

$$\langle \alpha | (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle = (\alpha - \alpha^*) \quad (1.5.47)$$

$$\langle \alpha | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} | \alpha \rangle \quad (1.5.48)$$

$$= \alpha^2 + (\alpha^*)^2 + 2\alpha^*\alpha + 1 \quad (1.5.49)$$

$$= (\alpha + \alpha^*)^2 + 1 \quad (1.5.50)$$

$$\langle \alpha | (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} | \alpha \rangle \quad (1.5.51)$$

$$= (\alpha - \alpha^*)^2 - 1 \quad (1.5.52)$$

dove abbiamo usato la regola di commutazione:

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 \quad , \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (1.5.53)$$

Quindi:

$$\langle (\Delta\hat{\phi})^2 \rangle_\alpha = \langle (\hat{\phi})^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{\phi} \rangle_\alpha^2 \quad (1.5.54)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \left((\alpha + \alpha^*)^2 + 1 - (\alpha + \alpha^*)^2 \right) \quad (1.5.55)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \quad (1.5.56)$$

$$\langle (\Delta\hat{\pi})^2 \rangle_\alpha = \langle (\hat{\pi})^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{\pi} \rangle_\alpha^2 \quad (1.5.57)$$

$$= -\frac{\hbar m\omega}{2} \left((\alpha - \alpha^*)^2 - 1 - (\alpha - \alpha^*)^2 \right) \quad (1.5.58)$$

$$= \frac{\hbar m\omega}{2} \quad (1.5.59)$$

quindi $|\alpha\rangle$ minimizza il principio di indeterminazione, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$. In questo caso abbiamo posto $t = 0$, ma il risultato finale vale $\forall t$: la coerenza si mantiene nel tempo. Ora lo stato coerente $|\alpha\rangle$ può essere rappresentato come una somma infinita (con particolari coefficienti) della base dello spazio di Fock:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle \quad , \quad 0! = 1 \quad (1.5.60)$$

dove $e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$ è un fattore di normalizzazione; adesso applico l'operatore di distruzione, tenendo conto che ora la sommatoria parte da $N = 1$, perchè

$\hat{a} |0\rangle = 0$:

$$\hat{a} |\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\alpha^N \sqrt{N}}{\sqrt{(N-1)!} \sqrt{N}} |N-1\rangle \quad (1.5.61)$$

$$= \alpha e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\alpha^{N-1}}{\sqrt{(N-1)!}} |N-1\rangle \quad (1.5.62)$$

$$= \alpha |\alpha\rangle \quad (1.5.63)$$

$$\Rightarrow \hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (1.5.64)$$

Si può scrivere alternativamente:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle \quad (1.5.65)$$

$$\equiv e^{\alpha \hat{a}^\dagger + \alpha^* \hat{a}} |0\rangle \quad (1.5.66)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_N \frac{\alpha^N (\hat{a}^\dagger)^N}{N!} |0\rangle \quad (1.5.67)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_N \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle \quad (1.5.68)$$

dove abbiamo usato l'identità di Campbell-Baker-Hausdorff:

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} \longleftrightarrow e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle \quad (1.5.69)$$

dove la prima uguaglianza è valida se $[\hat{A}, \hat{B}]$ commutano con gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ (questi due non sono commutanti). $e^{-\alpha^* \hat{a}}$ corrisponde a $1 - \alpha^* \hat{a}$, cioè potenze dell'operatore di distruzione, che applicate allo stato $|0\rangle$, mi restituisce solo 1.

Infine analizziamo l'evoluzione temporale dell'operatore $\hat{a}$:

$$\hat{a}(t) = \hat{a} e^{-i\omega t} = \hat{a} \exp\left\{-i \frac{\partial E}{\partial N} \frac{t}{\hbar}\right\} = \hat{a} \exp\left\{-i\mu \frac{t}{\hbar}\right\} \quad (1.5.70)$$

quindi è il potenziale chimico e non l'energia $E = \hbar\omega (N + \frac{1}{2})$, che determina l'evoluzione temporale dello stato coerente:

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N} = \hbar\omega. \quad (1.5.71)$$

L'operatore:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} \quad , \quad \hat{D}(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle \quad (1.5.72)$$

è detto **operatore di spostamento di Glauber**.

Due stati coerenti $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ (per cui $\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle = 1$) non sono ortogonali:

$$\langle\alpha|\beta\rangle \neq 0 \quad \text{con} \quad \alpha \neq \beta \quad (1.5.73)$$

invece $\langle N|N+1\rangle = 0$ e possiamo dimostrarlo:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left\{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2}\right\} \sum_N \sum_{N'} \frac{(\alpha^*)^N}{\sqrt{N!}} \frac{(\beta)^{N'}}{\sqrt{N'!}} \langle N|N'\rangle \quad (1.5.74)$$

$$= \exp\left\{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} - \alpha^*\beta\right\} \quad (1.5.75)$$

usando $\langle N|N'\rangle \rightarrow \delta_{N,N'} = 1$ abbiamo:

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \exp\{-|\alpha|^2 - |\beta|^2 + \alpha^*\beta + \alpha\beta^*\} \quad (1.5.76)$$

$$= \exp\{-|\alpha - \beta|^2\} \quad (1.5.77)$$

ma per $|\alpha| = |\beta| \rightarrow \infty$, $\alpha \neq \beta$, allora $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \rightarrow 0$. Finora abbiamo parlato solo di modulo, quindi introduciamo anche la fase:

$$\alpha = |\alpha| e^{i\theta} \quad (1.5.78)$$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_N \frac{(|\alpha|)^N}{\sqrt{N!}} e^{i\theta N} |N\rangle \quad (1.5.79)$$

$$|N\rangle \propto \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i\theta N} |\alpha(\theta)\rangle \quad (1.5.80)$$

cioè N e θ sono variabili canonicamente coniugate:

- $|N\rangle$: N fissato $\leftrightarrow \theta$ "massimalmente indeterminato".
- $|\alpha\rangle$: θ fissato (mod 2π) $\leftrightarrow N$ indeterminato.

Supponiamo di avere l'oscillatore armonico con un potenziale $V(\phi)$ quadratico (parabola) centrato in $\phi = 0$; lo stato fondamentale è una funzione d'onda gaussiana, con zero nodi e gli stati eccitati sono caratterizzati da un nodo al centro, antisimmetrici.

$$\langle\phi|0\rangle = e^{-\frac{\phi^2}{2}} \quad , \quad \hat{H}_0 = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{d\phi^2} + \phi^2 \right) \quad (1.5.81)$$

$$[m = \hbar = \omega = 1]. \quad (1.5.82)$$

Consideriamo un'hamiltoniana associata a un altro sistema, dove α indica un parametro di traslazione:

$$\hat{H}_\alpha = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\phi - \sqrt{2}\alpha \right)^2 \right). \quad (1.5.83)$$

Supponiamo di avere lo stesso potenziale, ma traslato rispetto all'origine di una quantità $\sqrt{2}\alpha$; stessi autovalori, le autofunzioni sono collegate in modo semplice, ma non sono identiche; scriviamo la proiezione di α su ϕ , così da vedere come vediamo il nuovo stato fondamentale (quello traslato) $|\alpha\rangle$, rispetto quello originario:

$$\langle\phi|\alpha\rangle = \exp\left\{-\frac{(\phi - \sqrt{2}\alpha)^2}{2}\right\} \quad (1.5.84)$$

$$= e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \left(\exp\left\{-\frac{(\phi - \sqrt{2}\alpha)^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\right\} \right) \quad (1.5.85)$$

$$= e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{H_n(\phi)}{(\sqrt{2})^n} e^{-\frac{\phi^2}{2}} \quad (1.5.86)$$

$$= e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.5.87)$$

compare un termine gaussiano che caratterizza le soluzioni dell'oscillatore armonico, incluso anche il termine legato agli stati eccitati (in particolare in (1.5.85) l'esponenziale è la funzione generatrice dei polinomi di Hermite, in cui gli zeri corrispondono a quelli della funzione d'onda). Alla fine del calcolo ricompare lo stato coerente.

1.5.3 Principio di indeterminazione $N \leftrightarrow \theta$

Gli stati che minimizzano il principio di indeterminazione tra $\hat{\phi}$ e $\hat{\pi}$ sono stati coerenti:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_N \frac{(\alpha)^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle \quad , \quad \hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (1.5.88)$$

cioè stati a numero di particelle non determinato $\langle(\Delta\hat{N})^2\rangle_\alpha \neq 0$. Nella cavità di un dispositivo laser, fotoni coerenti vengono continuamente assorbiti ed emessi dagli atomi del gas all'interno della cavità. In un condensato BEC, possiamo immaginare che particelle entrino ed escano dallo stato fondamentale (ovvero si trovano in uno stato metastabile). **Vedi male come funziona un laser.** L'utilizzo del laser è un modo per ottenere tantissimi fotoni coerenti tra loro. I fotoni se becca un atomo non eccitato, lo fa andare in uno stato eccitato, ma poi scompare; dunque il nostro stato fondamentale sarà coerente, ma non a numero di particelle fissato. In meccanica statistica, nella descrizione grancanonica il numero di particelle del sistema non è fissato; fissiamo solo $\langle\hat{N}\rangle_\alpha$; quindi abbiamo:

$$\langle\hat{N}\rangle_\alpha = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2 \quad \longrightarrow \quad |\alpha| = \sqrt{\langle\hat{N}\rangle_\alpha} \quad (1.5.89)$$

mentre:

$$\langle \hat{N}^2 \rangle_\alpha = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle \quad (1.5.90)$$

$$= \langle \alpha | \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) \hat{a} | \alpha \rangle \quad (1.5.91)$$

$$= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 \quad (1.5.92)$$

$$= \langle \hat{N} \rangle_\alpha^2 + \langle \hat{N} \rangle_\alpha. \quad (1.5.93)$$

La deviazione standard è:

$$\sigma_N = \sqrt{\langle (\Delta \hat{N})^2 \rangle_\alpha} \quad (1.5.94)$$

$$= \sqrt{\langle \hat{N}^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{N} \rangle_\alpha^2} \quad (1.5.95)$$

$$= \sqrt{\langle \hat{N} \rangle_\alpha} \quad (1.5.96)$$

$$= |\alpha|. \quad (1.5.97)$$

Poichè $|\alpha\rangle$ non è uno stato a numero ben definito di particelle, la deviazione standard non è zero. Dubbio: ma se, nello stato $|\alpha\rangle$, la fase di $\hat{a}$ è completamente determinata, come mai la deviazione standard non è infinita? Il motivo è che l'operatore quantistico associato alla fase θ ($\hat{\theta}$) non è hermitiano, cioè non è un'osservabile. Infatti, possiamo scrivere:

$$\hat{a} = e^{i\hat{\theta}} \sqrt{\hat{N}} = \hat{U} \sqrt{\hat{N}} \quad (1.5.98)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\hat{N}} e^{-i\hat{\theta}^\dagger} = \sqrt{\hat{N}} \hat{U}^\dagger \quad (1.5.99)$$

l'azione di $\hat{U}$ porta a:

$$\hat{a} |N\rangle = \sqrt{N} |N-1\rangle \quad (1.5.100)$$

$$\hat{a}^\dagger |N\rangle = \sqrt{N+1} |N+1\rangle. \quad (1.5.101)$$

Ora cerchiamo di capire se $\hat{U}$ è unitario ($\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$), allora:

$$\begin{cases} \hat{U} |n\rangle = |n-1\rangle & n > 0 \\ \hat{U} |0\rangle = 0 & n = 0 \end{cases} \implies \hat{U}^\dagger |n\rangle = |n+1\rangle \quad (1.5.102)$$

quindi:

$$\langle m | \hat{U} \hat{U}^\dagger | n \rangle = \delta_{m,n} \quad (1.5.103)$$

$$\langle m | \hat{U}^\dagger \hat{U} | n \rangle = \delta_{m,n} \quad \text{per } m, n > 0 \quad (1.5.104)$$

ma abbiamo:

$$\langle 0 | \hat{U}^\dagger \hat{U} | 0 \rangle = 0 \implies \hat{U} \hat{U}^\dagger = 1 \neq \hat{U}^\dagger \hat{U} \quad (1.5.105)$$

e cioè $\hat{\theta}$ non commuta con $\hat{\theta}^\dagger$: $\hat{\theta} \neq \hat{\theta}^\dagger$, quindi non è un'osservabile. Il problema diventa marginale se $\langle \hat{N} \rangle_\alpha \gg 1$:

$$|\langle 0 | \alpha \rangle|^2 = e^{-\langle \hat{N} \rangle_\alpha} \longrightarrow 0 \quad (1.5.106)$$

$$|\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-\langle \hat{N} \rangle_\alpha} \frac{\langle \hat{N} \rangle_\alpha^n}{n!} \longrightarrow 0 \quad (1.5.107)$$

dove nel primo sopravvive solo l'esponenziale nella definizione di α , mentre il secondo è calcolato su un numero finito di particelle. Per $n \ll \langle \hat{N} \rangle_\alpha$, allora $\hat{\theta} \sim \hat{\theta}^\dagger$. In questo caso:

$$\sigma_N \cdot \sigma_\theta \geq \frac{1}{2} \longrightarrow \sigma_\theta \sim \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{N} \rangle}} \quad (1.5.108)$$

e la fase diventa localizzata (phase locking) per $\langle \hat{N} \rangle \rightarrow \infty$ ed osservabile: la posso trattare come una variabile classica. Inoltre:

$$\sigma_{|\alpha|} \sim \frac{\partial |\alpha|}{\partial \langle \hat{N} \rangle} \sigma_N \sim \frac{1}{2} = \mathcal{O}(1) \gg \sqrt{\langle \hat{N} \rangle} \longleftrightarrow \frac{\langle \hat{N} \rangle}{V} \quad (1.5.109)$$

cioè piccole fluttuazioni di densità. Posso sostituire ad $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ i valori classici corrispondenti (Bogoliubov):

$$\hat{a} = \sqrt{\hat{N}} e^{i\hat{\theta}} \longrightarrow a = \sqrt{\langle \hat{N} \rangle} e^{i\theta} \quad (1.5.110)$$

$$\hat{a}^\dagger \longrightarrow a^* = \sqrt{\langle \hat{N} \rangle} e^{-i\theta} \quad (1.5.111)$$

con $N \rightarrow \infty$. In conclusione:

- Gli stati coerenti permettono il phase-locking.
- Permettono di trattare l'operatore $\hat{a}$ come una quantità classica quando $\langle \hat{N} \rangle \gg 1$: $\hat{a} \rightarrow \sqrt{\langle \hat{N} \rangle} e^{i\theta}$.
- Il valore di aspettazione del campo $\hat{a}$ è zero sul vuoto $|0\rangle$ ($\langle 0|0\rangle \hat{a} |0\rangle = 0$), ma è diverso da zero sul "vuoto coerente" $|\alpha\rangle$: $\langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha$ con $\alpha = \sqrt{N_0} e^{i\theta} \leftrightarrow$ rottura spontanea di simmetria.
- L'operatore che crea lo stato coerente agendo su $|0\rangle$ è l'operatore $\hat{D}(\alpha)$ di traslazione di campo.
- Gli stati coerenti emergono in modo naturale quando cerchiamo di descrivere lo stato di minima energia nella fase a simmetria rotta $\langle \hat{\phi}(\vec{r}, t) \rangle \neq 0$ usando come base gli stati dello spazio di Fock del sistema a simmetria non rotta $\langle \hat{\phi}(\vec{r}, t) \rangle = 0$.

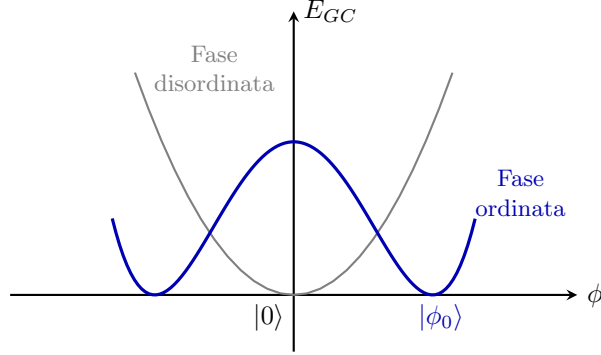


Figura 1.25

1.6 Quantizzazione dell'equazione GP

L'equazione GP in seconda quantizzazione si ottiene, come nel caso dell'oscillatore armonico, individuando coppie di variabili classiche canonicamente coniugate e promuovendole al rango di operatori. La (densità di) lagrangiana di GP è ($A = \int dt d^3\vec{r} L$):

$$L = i\hbar \phi^*(\vec{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \phi^*(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) + \frac{g}{2} |\phi|^4 \right) \quad (1.6.1)$$

quindi:

$$\pi(\vec{r}, t) = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) \right)} = i\hbar \phi^*(\vec{r}, t) \quad (1.6.2)$$

allora $\phi(\vec{r}, t)$ e $\pi(\vec{r}, t) = i\hbar \phi^*(\vec{r}, t)$ sono campi canonicamente coniugati:

$$\left[\hat{\phi}(\vec{r}, t), \hat{\phi}^\dagger(\vec{r}', t) \right] = \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad (1.6.3)$$

$$\left[\hat{\phi}(\vec{r}, t), \hat{\phi}(\vec{r}', t) \right] = 0 \quad (1.6.4)$$

$$\left[\hat{\phi}^\dagger(\vec{r}, t), \hat{\phi}^\dagger(\vec{r}', t) \right] = 0 \quad (1.6.5)$$

quindi i campi $\hat{\phi}^\dagger(\vec{r}, t)$ e $\hat{\phi}(\vec{r}, t)$ sono detti operatori di campo bosonici.

Se $|\Omega\rangle$ è lo stato di vuoto, cioè lo stato senza (pseudo)particelle (per esempio gli atomi bosonici), allora:

$$\hat{\phi}^\dagger(\vec{r}) |\Omega\rangle = |\vec{r}\rangle \quad (1.6.6)$$

e cioè $\hat{\phi}^\dagger(\vec{r})$ crea una particella nella posizione $\vec{r}$. Lo stato a due particelle è:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\phi}^\dagger(r_1) \hat{\phi}^\dagger(r_2) |\Omega\rangle = |r_1, r_2\rangle \quad (1.6.7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\phi}^\dagger(r_2) \hat{\phi}^\dagger(r_1) |\Omega\rangle \quad (1.6.8)$$

$$= |r_2, r_1\rangle \quad (1.6.9)$$

dunque:

$$|r_1, r_2\rangle = |r_2, r_1\rangle. \quad (1.6.10)$$

Per evitare di appesantire troppo la notazione: $\vec{r} \rightarrow r$ e $d^3\vec{r} \rightarrow dr$.

Lo stato $|r_1, r_2, \dots, r_N\rangle$ è completamente simmetrico sotto lo scambio di due particelle (statistica bosonica):

$$|r_1, r_2, \dots, r_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\phi}^\dagger(r_1) \dots \hat{\phi}^\dagger(r_N) |\Omega\rangle. \quad (1.6.11)$$

Il campo $\hat{\phi}(r)$ è invece un operatore di distruzione: esso distrugge una particella nella posizione $\vec{r}$. Si ha anche:

$$\hat{\phi}(r) |\Omega\rangle = 0. \quad (1.6.12)$$

L'hamiltoniana GP di seconda quantizzazione è:

$$\hat{H}_{GP} = \int dr \left[\hat{\phi}^\dagger(r) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{\phi}(r) + \frac{g}{2} \left(\hat{\phi}^\dagger(r) \right)^2 \left(\hat{\phi}(r) \right)^2 \right] \quad (1.6.13)$$

esso è costruito in modo tale da annichilire il vuoto $|0\rangle$:

$$\hat{H}_{GP} |\Omega\rangle = 0. \quad (1.6.14)$$

Un generico stato fisico $|\Phi(t)\rangle$ deve essere soluzione dell'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi(t)\rangle = \hat{H}_{GP} |\Phi(t)\rangle \quad (1.6.15)$$

calcoliamo il commutatore $\hat{H}_{GP}$ con $\hat{\phi}^\dagger(r)$, integrando per parti e sapendo che:

$$\left[\hat{\phi}(r_1), \hat{\phi}^\dagger(r) \right] = \delta(r_1 - r) \quad (1.6.16)$$

per cui abbiamo:

$$\left[\hat{H}_{GP}, \hat{\phi}^\dagger(r) \right] = \int dr_1 \left[\hat{\phi}^\dagger(r_1) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 \right) \hat{\phi}(r_1) + \frac{g}{2} \left(\hat{\phi}^\dagger(r_1) \right)^2 \left(\hat{\phi}(r_1) \right)^2, \hat{\phi}(r) \right] \quad (1.6.17)$$

$$= \int dr_1 \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 \hat{\phi}^\dagger(r_1) \right) + \frac{g}{2} \left(\hat{\phi}^\dagger(r_1) \right)^2 \left(\hat{\phi}(r_1) \right)^2, \hat{\phi}^\dagger(r) \right] \quad (1.6.18)$$

$$= \int dr_1 \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 \hat{\phi}^\dagger(r_1) \left[\hat{\phi}(r_1), \hat{\phi}^\dagger(r) \right] + \frac{g}{2} 2 \left(\hat{\phi}^\dagger(r_1) \right)^2 \hat{\phi}(r_1) \left[\hat{\phi}(r_1), \hat{\phi}^\dagger(r) \right] \right\} \quad (1.6.19)$$

$$= \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \hat{\phi}^\dagger(r) + g \left(\hat{\phi}^\dagger(r) \right)^2 \hat{\phi}(r) \right\} \quad (1.6.20)$$

Si ottiene così l'**equazione di Gross-Pitaevskii** per $\hat{\phi}^\dagger$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}^\dagger = - \left[\hat{H}_{GP}, \hat{\phi}^\dagger(r) \right]. \quad (1.6.21)$$

1.6.1 Stato ad una particella

Consideriamo ora lo stato ad una particella:

$$|r\rangle = \hat{\phi}^\dagger(r) |\Omega\rangle \quad (1.6.22)$$

calcoliamo la norma di questo stato, sapendo che Ω è normalizzato a 1:

$$\langle r_1 | r \rangle = \langle \Omega | \hat{\phi}(r_1) \hat{\phi}^\dagger(r) | \Omega \rangle \quad (1.6.23)$$

$$= \langle \Omega | \left[\hat{\phi}(r_1), \hat{\phi}^\dagger(r) \right] | \Omega \rangle \quad (1.6.24)$$

$$= \langle \Omega | \delta(r_1 - r) | \Omega \rangle \quad (1.6.25)$$

$$= \delta r_1 - r. \quad (1.6.26)$$

La relazione di completezza è:

$$\int dr |r\rangle \langle r| = \mathbb{1}. \quad (1.6.27)$$

Uno stato fisico $|\Phi(t)\rangle$ ad una particella può essere quindi rappresentato utilizzando la base $|r\rangle$:

$$|\Phi(t)\rangle = \int dr |r\rangle \langle r | \Phi(t) \rangle \quad (1.6.28)$$

$$= \int dr \Phi(r, t) |r\rangle \quad (1.6.29)$$

dove $\Phi(r, t)$ è la funzione (complessa) che determina la particolare sovrapposizione di autostati di posizione $|r\rangle$ che compongono $|\Phi(t)\rangle$.

Vogliamo dimostrare che $\Phi(r, t)$ soddisfa l'equazione di Schrödinger ad una particella:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Phi(r, t). \quad (1.6.30)$$

Partiamo da:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi(t)\rangle = \int dr i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(r, t) |r\rangle = \hat{H}_{GP} |\Phi(t)\rangle \quad (1.6.31)$$

$$= \int dr \Phi(r, t) \hat{H}_{GP} \hat{\phi}^\dagger(r) |\Omega\rangle \quad (1.6.32)$$

$$= \int dr \Phi(r, t) [\hat{H}_{GP}, \hat{\phi}^\dagger(r)] |\Omega\rangle \quad (1.6.33)$$

$$= \int dr \Phi(r, t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \hat{\phi}^\dagger(r) + \right. \\ \left. + g \left(\hat{\phi}^\dagger(r) \right)^2 \hat{\phi}(r) \right] |\Omega\rangle \quad (1.6.34)$$

$$= \int dr \Phi(r, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \hat{\phi}^\dagger(r) \right) |\Omega\rangle \quad (1.6.35)$$

$$= \int dr \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Phi(r, t) \right) |r\rangle \quad (1.6.36)$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo integrato per parti e posto $\hat{\phi}^\dagger(r) |0\rangle = |r\rangle$; quest'ultimo costituisce una base ortonormale completa. In totale:

$$\int dr \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(r, t) \right] |r\rangle = \int dr \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Phi(r, t) \right) |r\rangle \quad (1.6.37)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Phi(r, t) \quad (1.6.38)$$

che non è altro che l'equazione di Schrödinger per una particella libera di massa m .

1.6.2 Stato a due particelle

Consideriamo ora lo stato a due particelle:

$$|r_1, r_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\phi}^\dagger(r_1) \hat{\phi}^\dagger(r_2) |\Omega\rangle \quad (1.6.39)$$

ne calcoliamo la norma:

$$\langle r_1, r_2 | r'_1, r'_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \Omega | \hat{\phi}(r_2) \hat{\phi}(r_1) \hat{\phi}^\dagger(r'_1) \hat{\phi}^\dagger(r'_2) | \Omega \rangle \quad (1.6.40)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \Omega | \hat{\phi}(r_2) \left(\left[\hat{\phi}(r_1), \hat{\phi}^\dagger(r'_1) \right] + \hat{\phi}^\dagger(r'_1) \hat{\phi}(r_1) \right) \hat{\phi}^\dagger(r'_2) | \Omega \rangle \quad (1.6.41)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \Omega | \hat{\phi}(r_2) \left(\delta(r_1 - r'_1) + \hat{\phi}^\dagger(r'_1) \hat{\phi}(r_1) \right) \hat{\phi}^\dagger(r'_2) | \Omega \rangle \quad (1.6.42)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \Omega | \hat{\phi}(r_2) \delta(r_1 - r'_1) \hat{\phi}^\dagger(r'_2) | \Omega \rangle + \frac{1}{2} \langle \Omega | \hat{\phi}(r_2) \hat{\phi}^\dagger(r'_1) \left[\hat{\phi}(r_1), \hat{\phi}^\dagger(r'_2) \right] | \Omega \rangle \quad (1.6.43)$$

$$= \frac{1}{2} \delta(r_1 - r'_1) \delta(r_2 - r'_2) + \frac{1}{2} \delta(r_2 - r'_1) \delta(r_1 - r'_2) \quad (1.6.44)$$

Questa norma suggerisce che stiamo studiando un sistema due particelle identiche: la norma è diversa da zero per $r_2 = r'_2$ e $r_1 = r'_1$, ma anche per $r_2 = r'_1$ e $r_1 = r'_2$. Questa norma rispetta la statistica bosonica.

Uno stato $|\Phi(t)\rangle$ a due particelle può quindi essere sviluppato sulla base $|r_1, r_2\rangle$ come:

$$|\Phi(t)\rangle = \int dr_1 dr_2 \Phi(r_1, r_2, t) |r_1, r_2\rangle \quad (1.6.45)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int dr_1 dr_2 \Phi(r_1, r_2, t) \hat{\phi}^\dagger(r_1) \hat{\phi}^\dagger(r_2) | \Omega \rangle \quad (1.6.46)$$

poiché $[\hat{\phi}^\dagger(r_1), \hat{\phi}^\dagger(r_2)] = 0$, l'integrale su r_1 e r_2 è simmetrico sotto lo scambio $r_1 \leftrightarrow r_2$, quindi $\Phi(r_1, r_2, t) = \Phi(r_2, r_1, t)$. Così:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi(t)\rangle = \int dr_1 dr_2 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(r_1, r_2, t) \right) |r_1, r_2\rangle \quad (1.6.47)$$

$$= \hat{H}_{GP} |\Phi(t)\rangle \quad (1.6.48)$$

a destra dell'equazione di Schrödinger abbiamo (nella seconda parte della

terza riga ho usato $\hat{H} |\Omega\rangle = 0$:

$$\hat{H}_{GP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int dr_1 dr_2 \Phi(r_1, r_2, t) \hat{H}_{GP} \hat{\phi}^\dagger(r_1) \hat{\phi}^\dagger(r_2) |\Omega\rangle \quad (1.6.49)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int dr_1 dr_2 \Phi(r_1, r_2, t) \left(\left[\hat{H}_{GP}, \hat{\phi}^\dagger(r_1) \right] + \hat{\phi}^\dagger(r_1) \hat{H}_{GP} \right) \hat{\phi}^\dagger(r_2) |\Omega\rangle \quad (1.6.50)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int dr_1 dr_2 \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 \hat{\phi}^\dagger(r_1) + g \left(\hat{\phi}^\dagger(r_1) \right)^2 \hat{\phi}(r_1) \right) \Phi(r_1, r_2, t) \hat{\phi}^\dagger(r_2) |\Omega\rangle + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \int dr_1 dr_2 \Phi(r_1, r_2, t) \hat{\phi}^\dagger(r_1) \left[\hat{H}_{GP}, \hat{\phi}^\dagger(r_2) \right] |\Omega\rangle \quad (1.6.51)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int dr_1 dr_2 \left\{ \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 \Phi(r_1, r_2, t) \right) \hat{\phi}^\dagger(r_1) + g \Phi(r_1, r_2, t) \left(\hat{\phi}^\dagger(r_1) \right)^2 \hat{\phi}(r_1) \right\} \hat{\phi}^\dagger(r_2) |\Omega\rangle + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \int dr_1 dr_2 \hat{\phi}^\dagger(r_1) \Phi(r_1, r_2, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_2 \hat{\phi}^\dagger(r_2) + g \left(\hat{\phi}^\dagger(r_2) \right)^2 \hat{\phi}(r_2) \right) |\Omega\rangle \quad (1.6.52)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int dr_1 dr_2 \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 \Phi(r_1, r_2, t) \right) \hat{\phi}^\dagger(r_1) \hat{\phi}^\dagger(r_2) |\Omega\rangle + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \int dr_1 dr_2 g \left(\hat{\phi}^\dagger(r_1) \right)^2 \delta(r_1 - r_2) \Phi(r_1, r_2, t) |\Omega\rangle + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \int dr_1 dr_2 \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_2 \Phi(r_1, r_2, t) \right) \hat{\phi}^\dagger(r_1) \hat{\phi}^\dagger(r_2) |\Omega\rangle \quad (1.6.53)$$

$$= \int dr_1 dr_2 \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_2 \right] \Phi(r_1, r_2, t) |r_1, r_2\rangle + \\ + \int dr_1 dr_2 g \delta(r_1 - r_2) \Phi(r_1, r_2, t) \frac{\hat{\phi}^\dagger(r_1) \hat{\phi}^\dagger(r_2)}{\sqrt{2}} |\Omega\rangle \quad (1.6.54)$$

dove si è usata la proprietà:

$$\hat{\phi}^\dagger(r_1) \hat{\phi}^\dagger(r_2) \delta(r_1 - r_2) = \left(\hat{\phi}^\dagger(r_1) \right)^2 \delta(r_1 - r_2). \quad (1.6.55)$$

In totale:

$$\int dr_1 dr_2 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(r_1, r_2, t) \right) |r_1, r_2\rangle = \\ = \int dr_1 dr_2 \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_2 + g \delta(r_1 - r_2) \right) \Phi(r_1, r_2, t) |r_1, r_2\rangle \quad (1.6.56)$$

che porta all'equazione di Schrödinger a due corpi con potenziale a δ di Dirac:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(r_1, r_2, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_2 + g \delta(r_1 - r_2) \right) \Phi(r_1, r_2, t). \quad (1.6.57)$$

Un risultato simile sarebbe stato ottenuto con un potenziale più generale $g \delta(r_1 - r_2) \rightarrow V(r_1 - r_2)$. La simmetria di Φ è conseguenza immediata della proprietà $[\hat{\phi}^\dagger(r), \hat{\phi}^\dagger(r')] = 0$.

Riassumendo:

- Abbiamo dimostrato che l'hamiltoniana in seconda quantizzazione $\hat{H}_{GP}$, quando ristretta al sottospazio con N fissato, è equivalente a un'equazione di Schrödinger a molti corpi con interazione deltiforme e statistica bosonica.
- Per sistemi non relativistici, la seconda quantizzazione è solo un modo più conveniente per formulare la Meccanica Quantistica a molti corpi.
- In Meccanica Quantistica relativistica il numero di particelle non è in generale conservato e il formalismo della seconda quantizzazione è l'unico utilizzabile.

Lo schema che abbiamo seguito è il seguente:

1. *Equazione di Schrödinger a N corpi con potenziale deltiforme.*
2. (Per $N \gg 1$, approssimazione di Hartree-Fock di campo medio) *Equazione di Gross-Pitaevskii "classica".*
3. (quantizzazione canonica del campo GP) *Equazione di Gross-Pitaevskii in seconda quantizzazione.*
4. (sottospazio con N fisso) *Equazione di Schrödinger a N corpi con potenziale deltiforme.*

1.6.3 Operatore numero di particelle $\hat{N}$

Il numero totale di particelle in un determinato stato $|\Phi(t)\rangle$ è un autovalore dell'operatore:

$$\hat{N} = \int dr \hat{\phi}^\dagger(r) \hat{\phi}(r) \quad , \quad \hat{N} |\Omega\rangle = 0. \quad (1.6.58)$$

Questo risultato è probabilmente ovvio se pensiamo all'analogia con l'oscillatore armonico, ma lo dimostriamo lo stesso. Abbiamo:

$$[\hat{N}, \hat{\phi}(r)] = \int dr_1 [\hat{\phi}^\dagger(r_1) \hat{\phi}(r_1), \hat{\phi}(r)] \quad (1.6.59)$$

$$= \int dr_1 (-\delta(r_1 - r)) \hat{\phi}(r_1) \quad (1.6.60)$$

$$= -\hat{\phi}(r) \quad (1.6.61)$$

$$[\hat{N}, \hat{\phi}^\dagger(r)] = \int dr_1 [\hat{\phi}^\dagger(r_1) \hat{\phi}(r_1), \hat{\phi}^\dagger(r)] \quad (1.6.62)$$

$$= \int dr_1 \delta(r_1 - r) \hat{\phi}^\dagger(r_1) \quad (1.6.63)$$

$$= \hat{\phi}^\dagger(r) \quad (1.6.64)$$

possiamo scrivere questi commutatori come:

$$\begin{cases} \hat{N} \hat{\phi}^\dagger(r) = \hat{\phi}^\dagger(r) (\hat{N} + 1) \\ \hat{N} \hat{\phi}(r) = \hat{\phi}(r) (\hat{N} - 1) \end{cases} \quad (1.6.65)$$

Abbiamo quindi:

$$\hat{N} |r_1, \dots, r_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{N} \hat{\phi}^\dagger(r_1) \dots \hat{\phi}^\dagger(r_n) |\Omega\rangle \quad (1.6.66)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{\phi}^\dagger(r_1) \dots \hat{\phi}^\dagger(r_n) (\hat{N} + n) |\Omega\rangle \quad (1.6.67)$$

$$= n |r_1, \dots, r_n\rangle. \quad (1.6.68)$$

1.6.4 Spazio dei momenti

Probabilmente è più intuitivo considerare operatori di creazione e distruzione nello spazio dei momenti, poichè l'hamiltoniana è diagonale nello spazio dei momenti in assenza di potenziale di interazione $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Supponiamo che il sistema sia in un recipiente cubico di volume $V = L^3$ con condizioni periodiche al bordo (normalizzazione in una scatola). Possiamo quindi sviluppare il campo $\hat{\phi}(r)$ in serie di Fourier:

$$\hat{\phi}(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \hat{a}_k e^{ikr} \quad , \quad k \equiv \vec{k} \quad , \quad r \equiv \vec{r} \quad (1.6.69)$$

dove $\hbar k = \frac{2\pi\hbar}{L}(n_x, n_y, n_z)$ con $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$. La trasformazione inversa è:

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{V}} \int dr \hat{\phi}(r) e^{-ikr}. \quad (1.6.70)$$

Possiamo calcolare il commutatore:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_q^\dagger] = \frac{1}{V} \int dr dr_1 [\hat{\phi}(r) e^{-ikr}, \hat{\phi}^\dagger(r_1) e^{iqr_1}] \quad (1.6.71)$$

$$= \frac{1}{V} \int dr dr_1 \delta(r - r_1) e^{-ikr} e^{iqr_1} \quad (1.6.72)$$

$$= \frac{1}{V} \int dr e^{-i(k-q)r} \quad (1.6.73)$$

$$= \delta_{k,q} \quad (1.6.74)$$

questa non è altro che la relazione di commutazione canonica tra $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ dell'oscillatore armonico. Valgono naturalmente anche:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_q] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_q^\dagger] = 0. \quad (1.6.75)$$

Riscriviamo l'hamiltoniana $\hat{H}_{GP}$ nello spazio dei momenti:

$$\hat{H}_{GP} = \int dr \left\{ \hat{\phi}^\dagger(r) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{\phi}(r) + \frac{g}{2} \left(\hat{\phi}^\dagger(r) \right)^2 \left(\hat{\phi}(r) \right)^2 \right\} \quad (1.6.76)$$

con:

$$\hat{T}_{GP} = \int dr \hat{\phi}^\dagger(r) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{\phi}(r) \quad (1.6.77)$$

$$= \int dr \frac{1}{V} \sum_{q,k} \hat{a}_q^\dagger e^{-iqr} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{a}_k e^{ikr} \quad (1.6.78)$$

$$= \sum_{q,k} \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_k \int \frac{dr}{V} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) e^{-i(q-k)r} \quad (1.6.79)$$

$$= \sum_{q,k} \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_k \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) \delta_{q,k} \quad (1.6.80)$$

$$= \sum_k \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_k \quad (1.6.81)$$

$$= \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{N}_k \quad (1.6.82)$$

$\hat{T}$ conta semplicemente le particelle con momento $\vec{k}$ e gli assegna l'energia $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (numero infinito di oscillatori di frequenza $\hbar\omega_k = \hbar^2 k^2/(2m)$).

Abbiamo anche:

$$\hat{V}_{GP} = g \int dr \frac{1}{2} \hat{\phi}^\dagger(r) \hat{\phi}^\dagger(r) \hat{\phi}(r) \hat{\phi}(r) \quad (1.6.83)$$

$$= \frac{g}{2V^2} \sum_{k_1, k_2, q_1, q_2} \int dr \hat{a}_{q_2}^\dagger \hat{a}_{q_1}^\dagger \hat{a}_{k_2} \hat{a}_{k_1} \exp\{i(q_2 + q_1 - k_1 - k_2)r\} \quad (1.6.84)$$

$$= \frac{g}{2V} \sum_{k_1, k_2, q_1, q_2} \hat{a}_{q_2}^\dagger \hat{a}_{q_1}^\dagger \hat{a}_{k_2} \hat{a}_{k_1} \delta_{k_1+k_2, q_1+q_2}. \quad (1.6.85)$$

Quindi l'interpretazione dell'hamiltoniana nello spazio dei momenti è:

$$\hat{H}_{GP} = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{g}{2V} \sum_{k_1, k_2, q_1, q_2} \hat{a}_{q_2}^\dagger \hat{a}_{q_1}^\dagger \hat{a}_{k_2} \hat{a}_{k_1} \delta_{k_1+k_2, q_1+q_2} \quad (1.6.86)$$

la parte cinetica conta il numero di particelle con impulso $\hbar \vec{k}$ e associa un'energia cinetica $\hbar^2 k^2 / (2m)$ ad ognuna di esse. Il termine di potenziale causa lo scattering annichilando due particelle con impulso $\vec{k}_1$ e $\vec{k}_2$ e creando due particelle con impulso $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$ conservando il momento totale: $\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$. Il termine di potenziale può anche essere riscritto, agendo sulla delta:

$$\hat{V}_{GP} = \frac{g}{2V} \sum_{k_1, k_2, q} \hat{a}_{k_2+q}^\dagger \hat{a}_{k_1-q}^\dagger \hat{a}_{k_2} \hat{a}_{k_1} \quad (1.6.87)$$

vedi la figura 1.26.

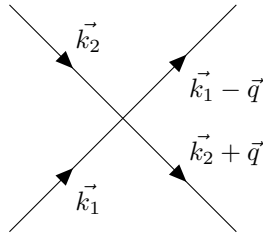


Figura 1.26

Gli operatori $\hat{a}_k$ e $\hat{a}_k^\dagger$ sono operatori che agiscono sugli stati dello spazio di Fock:

$$\hat{a}_k^\dagger |\Omega\rangle = |k\rangle \quad \text{oppure} \quad |1\rangle_k \quad (1.6.88)$$

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'}^\dagger |\Omega\rangle = |k, k'\rangle \quad \text{oppure} \quad |1\rangle_k |1\rangle_{k'} \quad (1.6.89)$$

$$\left(\hat{a}_k^\dagger\right)^n \hat{a}_0^\dagger |\Omega\rangle = |0, k, k, \dots, k\rangle \quad \text{oppure} \quad |1\rangle_0 |n\rangle_k \quad (1.6.90)$$

$$(1.6.91)$$

viene creata una particella di impulso k .

1.6.5 Approssimazione di Bogoliubov

Dobbiamo capire cosa fare con le basse temperature in fase di rottura di simmetria, e quindi collegare le informazioni che abbiamo ottenuto quando abbiamo parlato di stati coerenti legati all'oscillatore armonico a quello che corrisponde alla situazione fisica dei condensati di Bose-Einstein. L'**approssimazione di Bogoliubov** è legata all'osservazione di Einstein secondo cui a basse temperature una frazione finita di particelle si condensa nello stato a $k = 0$; immaginiamo di essere a temperatura zero e il massimo numero possibile di particelle condensato va preso letteralmente, perché l'interazione è legata a un fenomeno (deplezione o svuotamento quantistico) che fa sì che non tutte le particelle stiano sullo stato a $k = 0$.

Separiamo la parte corrispondente allo stato fondamentale $\hat{a}_0$ e $\hat{a}_0^\dagger$ dalla parte con $\hat{a}_k$ con $k \neq 0$, tenendo solo i termini quadratici in $\hat{a}_k$ ($k \neq 0$):

$$\hat{H}_{GP} = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{g}{2V} \sum_{k \neq 0} \left(4\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-k} \hat{a}_k \right) \quad (1.6.92)$$

più i termini con 3 e 4 operatori con $k \neq 0$ (scattering tra particelle fuori dal condensato). Infatti:

$$\sum_{k_1, k_2, q} \hat{a}_{k_2+q}^\dagger \hat{a}_{k_1-q}^\dagger \hat{a}_{k_2} \hat{a}_{k_1} \quad (1.6.93)$$

vi sono 6 termini con due operatori $\hat{a}_0$ ($\hat{a}_0$):

- (1) $(k_1 = 0, k_2 = 0) \rightarrow \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_{-q}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0$.
- (2) $(k_1 = 0, k_1 - q = 0) \rightarrow (k_1 = 0, k_1 = q = 0) \rightarrow \hat{a}_{k_2}^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{k_2} \hat{a}_0$.
- (3) $(k_1 = 0, k_2 + q = 0) \rightarrow \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \hat{a}_{k_2} \hat{a}_0$.
- (4) $(k_2 = 0, k_1 - q = 0) \rightarrow \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_{k_1}$.
- (5) $(k_2 = 0, k_2 + q = 0) \rightarrow \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_{k_1}$.
- (6) $(k_1 - q = 0, k_2 + q = 0) \rightarrow \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-k_1} \hat{a}_{k_1}$.
- (2)+(3)+(4)+(5) $\rightarrow \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_k$; (1) $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0$; (6) $\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-k} \hat{a}_k$.

Ora diamo una rappresentazione grafica a questi termini in figura 1.27.

Abbiamo:

- (A) $\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_k$: al vertice una particella di momento $\vec{k}$ viene distrutta assieme a una particella di momento 0 del condensato; vengono create due particelle, una di momento $\vec{k}$ e una di momento 0: scattering elastico tra una particella $\vec{k} \neq 0$ e una del condensato; la conservazione del momento è imposta con la delta di Kronecker, $\vec{k}$ in ingresso è uguale

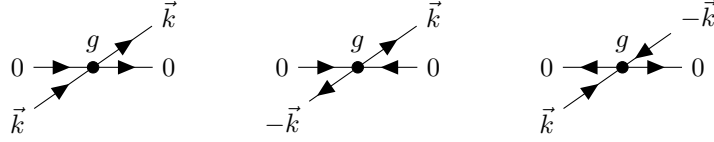


Figura 1.27

a $\vec{k}$ in uscita, quindi il momento totale è conservato, così come l'energia totale.

- (B) $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0$: due particelle dello stato $k = 0$ interagiscono ($\propto g$) e dal condensato escono due particelle con momenti opposti $\vec{k}$ e $-\vec{k}$: processo che fa sì che nel condensato il numero di particelle non sia fissato, idea di stato coerente; si passa da uno stato a energia cinetica uguale a zero a uno stato con energia cinetica diversa da zero.
- (C) $\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-k} \hat{a}_k$: due particelle, una con impulso $\vec{k}$ e una con impulso $-\vec{k}$ si urtano e si annichilano, passando nel condensato, da esse quindi fuoriescono due particelle con momento 0; qui si passa da energia cinetica diversa da zero a uno stato con energia cinetica uguale a zero.

In (B) e (C) non c'è contraddizione con il principio di conservazione dell'energia, perchè c'è energia potenziale diversa da zero e gli stati di particella libera non corrispondono agli autostati dell'equazione di GP, cioè non sono autofunzioni di $\hat{H}_{GP}$.

Ora supponiamo che lo stato con $\vec{k} = 0$, su cui agiscono gli operatori $\hat{a}_0^\dagger$ e $\hat{a}_0$, sia uno stato coerente occupato (in media) dalla quasi totalità delle particelle ($N_0 \sim N$, e voglio esprimere tutto in funzione di N):

$$\hat{N} = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \sum_{k \neq 0} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (1.6.94)$$

$$= \hat{N}_0 + \sum_{k \neq 0} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (1.6.95)$$

$$\implies \hat{N}_0 = \hat{N} - \sum_{k \neq 0} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (1.6.96)$$

dove, nell'espressione di N_0 , il primo termine è di ordine zero, mentre il secondo rappresenta la correzione al primo ordine. Tornando all'espressione di $\hat{H}_{GP}$:

$$\frac{g}{2V} \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 \sim \frac{g}{2V} \left((\hat{N})^2 - 2\hat{N} \sum_{k \neq 0} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) + \dots \quad (1.6.97)$$

poi sostituisco a $\hat{N}$ il suo valor medio $N \equiv \langle \hat{N} \rangle$:

$$\frac{g}{2V} \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 \sim \frac{g}{2V} \left(N^2 - 2N \sum_{k \neq 0} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) + \dots \quad (1.6.98)$$

. Nell'ansatz di Bogoliubov si sostituisce in:

$$\frac{g}{2V} \sum_{k \neq 0} \left(4\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-k} \hat{a}_k \right) \quad (1.6.99)$$

dove $\hat{a}_0$ e $\hat{a}_0^\dagger$ con $\sqrt{N_0} = \sqrt{N} + \dots$, dove i termini successivi non li considero, perchè ho già dei contributi $\hat{a}_k \hat{a}_k$:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{GP} \sim & \frac{gN^2}{2V} + \sum_{k \neq 0} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \frac{2gN}{2V} \sum_{k \neq 0} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \\ & + \frac{g}{2V} \sum_{k \neq 0} \left(4\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-k} \hat{a}_k \right) \end{aligned} \quad (1.6.100)$$

$$\sim \frac{gN^2}{2V} + \sum_{k \neq 0} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{gN}{V} \right) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{gN}{2V} \sum_{k \neq 0} \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger + \hat{a}_{-k} \hat{a}_k \right) \quad (1.6.101)$$

$$\equiv \hat{H}_B. \quad (1.6.102)$$

Abbiamo i termini:

- $\frac{gN^2}{2V}$: termine proporzionale a g associato all'energia potenziale della parte di condensato.
- $\sum_{k \neq 0} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{gN}{V} \right) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$: abbiamo cambiato la legge di dispersione, cioè il termine che compare davanti all'operatore numero di particelle.
- $\frac{gN}{2V} \sum_{k \neq 0} \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger + \hat{a}_{-k} \hat{a}_k \right)$: termine di interazione che coinvolge coppie di operatori di creazioni con coppie di operatori di distruzione, è un termine quadratico come il primo.

L'hamiltoniana originaria aveva termini non lineari, mentre $\hat{H}_B$ può essere diagonalizzata attraverso la trasformazione di Bogoliubov, e poi eventualmente si può applicare la teoria perturbativa. La possibile fase:

$$\hat{a}_0 = \sqrt{N_0} e^{i\alpha} \quad , \quad \hat{a}_0^\dagger = \sqrt{N_0} e^{-i\alpha} \quad (1.6.103)$$

può essere riassorbita ridefinendo opportunamente gli operatori $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$ in $\hat{H}_B$:

$$\hat{a}_{\pm k}^\dagger \longrightarrow \hat{a}_{\pm k}^\dagger e^{-i\alpha} \quad , \quad \hat{a}_{\pm k} \longrightarrow \hat{a}_{\pm k} e^{i\alpha} \quad (1.6.104)$$

nella fase con simmetria $U(1)$ spontaneamente rotta, tutti i vuoti sono equivalenti.

1.6.6 Trasformazione di Bogoliubov (bosoni)

Considero l'hamiltoniana quantistica nella forma:

$$\hat{h} = \bar{\epsilon}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) + \lambda(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2 \hat{a}_1) \quad (1.6.105)$$

dove $\bar{\epsilon}$ e λ sono coefficienti; il primo termine è diagonale, mentre il secondo corrisponde a un mix di operatori di creazione e distruzione. Nel nostro caso $k \equiv 1$, $-k \equiv 2$. L'hamiltoniana $\hat{h}$ è ancora bilineare e può essere diagonalizzata utilizzando la trasformazione di Bogoliubov. Si introducono due coppie di operatori di distruzione e creazione $(\hat{d}_1, \hat{d}_1^\dagger)$ e $(\hat{d}_2, \hat{d}_2^\dagger)$ legati agli operatori $(\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger)$, $(\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger)$ attraverso una trasformazione canonica ($[\hat{d}_1, \hat{d}_1^\dagger] = [\hat{d}_2, \hat{d}_2^\dagger] = 1$); definiamo con $u, v \in \mathbb{R}$ quindi:

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = u \hat{d}_1 + v \hat{d}_2^\dagger \\ \hat{a}_1^\dagger = u \hat{d}_1^\dagger + v \hat{d}_2 \end{cases} \quad \xleftrightarrow{1 \leftrightarrow 2} \quad \begin{cases} \hat{a}_2 = u \hat{d}_2 + v \hat{d}_1^\dagger \\ \hat{a}_2^\dagger = u \hat{d}_2^\dagger + v \hat{d}_1 \end{cases} \quad (1.6.106)$$

si ha quindi:

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = [u \hat{d}_1 + v \hat{d}_2^\dagger, u \hat{d}_1^\dagger + v \hat{d}_2] \quad (1.6.107)$$

$$= u [\hat{d}_1, u \hat{d}_1^\dagger + v \hat{d}_2] + v [\hat{d}_2, u \hat{d}_1^\dagger + v \hat{d}_2] \quad (1.6.108)$$

$$= u^2 [\hat{d}_1, \hat{d}_1^\dagger] + v^2 [\hat{d}_2, \hat{d}_2^\dagger] \quad (1.6.109)$$

$$= u^2 - v^2 \quad (1.6.110)$$

$$= 1 \quad (1.6.111)$$

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] = u^2 [\hat{d}_2, \hat{d}_2^\dagger] + v^2 [\hat{d}_1^\dagger, \hat{d}_1] \quad (1.6.112)$$

$$= u^2 - v^2 \quad (1.6.113)$$

$$= 1 \quad (1.6.114)$$

utilizziamo la parametrizzazione:

$$u = \cosh \alpha, \quad v = \sinh \alpha \quad (1.6.115)$$

con α da fissare in modo da diagonalizzare $\hat{h}$. Si useranno le proprietà $u^2 + v^2 = \cosh(2\alpha)$ e $2uv = \sinh(2\alpha)$. Riscriviamo $\hat{h}$ in notazione matriciale:

$$\hat{h} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon} & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \bar{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\epsilon} & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \bar{\epsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2^\dagger \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_1^\dagger \end{pmatrix} - \bar{\epsilon} \quad (1.6.116)$$

dove si può notare che la matrice 4x4 è diagonale a blocchi. Infatti, considerando la parte diagonale:

$$\Rightarrow \frac{\bar{\epsilon}}{2} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger & \hat{a}_2 & \hat{a}_2^\dagger & \hat{a}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2^\dagger \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_1^\dagger \end{pmatrix} = \frac{\bar{\epsilon}}{2} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \end{pmatrix} \quad (1.6.117)$$

$$= \bar{\epsilon} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \end{pmatrix} + \bar{\epsilon} \quad (1.6.118)$$

per la parte non diagonale, concentriamoci su uno dei due blocchi 2x2:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger & \hat{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger & \hat{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \hat{a}_2^\dagger \\ \lambda \hat{a}_1 \end{pmatrix} \quad (1.6.119)$$

$$= \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2 \hat{a}_1 \end{pmatrix} \quad (1.6.120)$$

poichè operatori con indici diversi commutano, il risultato del blocco 2 è identico (a parte $\hat{a} \leftrightarrow \hat{a}^\dagger$ e $1 \leftrightarrow 2$).

$$\Rightarrow \bar{\epsilon} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2 \hat{a}_1 \end{pmatrix}. \quad (1.6.121)$$

Partiamo dal blocco:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger & \hat{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon} & \lambda \\ \lambda & \bar{\epsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix} \quad (1.6.122)$$

e scriviamo la trasformazione di Bogoliubov come:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2^\dagger \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger & \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{d}_1^\dagger & \hat{d}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} \quad (1.6.123)$$

sostituendo:

$$\begin{pmatrix} \hat{d}_1^\dagger & \hat{d}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon} & \lambda \\ \lambda & \bar{\epsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2^\dagger \end{pmatrix} \quad (1.6.124)$$

si trova:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \hat{d}_1^\dagger & \hat{d}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon} u + \lambda v & \bar{\epsilon} v + \lambda u \\ \bar{\epsilon} v + \lambda u & \bar{\epsilon} u + \lambda v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2^\dagger \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \hat{d}_1^\dagger & \hat{d}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}(u^2 + v^2) + 2\lambda uv & 2\bar{\epsilon} uv + \lambda(u^2 + v^2) \\ 2\bar{\epsilon} uv + \lambda(u^2 + v^2) & \bar{\epsilon}(u^2 + v^2) + 2\lambda uv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2^\dagger \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.6.125)$$

per cancellare i termini fuori dalla diagonale, fissiamo:

$$2\bar{\epsilon}uv + \lambda(u^2 + v^2) = 0 \quad (1.6.126)$$

$$\implies -\frac{\lambda}{\bar{\epsilon}} = \frac{\sinh(2\alpha)}{\cosh(2\alpha)} = \tanh(2\alpha) \quad (1.6.127)$$

$$\implies \lambda = -\bar{\epsilon} \tanh(2\alpha). \quad (1.6.128)$$

I termini della diagonale diventano:

$$\bar{\epsilon} \cosh(2\alpha) - \bar{\epsilon} \frac{\sinh(2\alpha)}{\cosh(2\alpha)} = \frac{\bar{\epsilon}}{\cosh(2\alpha)} \quad (1.6.129)$$

$$= \bar{\epsilon} \sqrt{1 - \tanh^2(2\alpha)} \quad (1.6.130)$$

$$= \bar{\epsilon} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\bar{\epsilon}^2}} \quad (1.6.131)$$

quindi:

$$\begin{pmatrix} \hat{d}_1^\dagger, \hat{d}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\bar{\epsilon}^2 - \lambda^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\bar{\epsilon}^2 - \lambda^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{d}_1^\dagger, \hat{d}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2^\dagger \end{pmatrix} \quad (1.6.132)$$

$$\text{con } \epsilon = \sqrt{\bar{\epsilon}^2 - \lambda^2} \quad (1.6.133)$$

poichè il secondo blocco 2x2 è identico:

$$\hat{h} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{d}_1^\dagger, \hat{d}_2, \hat{d}_2^\dagger, \hat{d}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2^\dagger \\ \hat{d}_2 \\ \hat{d}_1^\dagger \end{pmatrix} - \bar{\epsilon} \quad (1.6.134)$$

$$= \frac{\bar{\epsilon}}{2} \left(\hat{d}_1^\dagger \hat{d}_1 + \hat{d}_2 \hat{d}_2^\dagger + \hat{d}_2^\dagger \hat{d}_2 + \hat{d}_1 \hat{d}_1^\dagger \right) - \bar{\epsilon} \quad (1.6.135)$$

$$= \epsilon \left(\hat{d}_1^\dagger \hat{d}_1 + \hat{d}_2^\dagger \hat{d}_2 \right) + (\epsilon - \bar{\epsilon}). \quad (1.6.136)$$

1.6.7 Diagonalizzazione di $\hat{H}_B$

Abbiamo:

$$\hat{H}_B = \frac{gN^2}{2V} + \sum_{k \neq 0} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g \frac{N}{V} \right) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{gN}{2V} \sum_{k \neq 0} \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger + \hat{a}_{-k} \hat{a}_k \right) \quad (1.6.137)$$

$$= \frac{gN^2}{2V} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \left[\bar{\epsilon} \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k} \right) + \frac{gN}{V} \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger + \hat{a}_{-k} \hat{a}_k \right) \right] \quad (1.6.138)$$

dove abbiamo:

$$\bar{\epsilon}(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g \frac{N}{V} \quad , \quad \lambda = g \frac{N}{V} \equiv \mu. \quad (1.6.139)$$

Il risultato della trasformazione di Bogoliubov è:

$$\epsilon(k) = \sqrt{(\bar{\epsilon}(k))^2 - \lambda^2} \quad (1.6.140)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g \frac{N}{V}\right)^2 - g^2 \frac{N^2}{V^2}} \quad (1.6.141)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) 2g \frac{N}{V}\right)} \quad (1.6.142)$$

$$= \sqrt{\epsilon_0^2(k) + 2\mu\epsilon_0(k)} \quad (1.6.143)$$

in cui:

$$\epsilon_0(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (1.6.144)$$

e cioè abbiamo ottenuto la **legge di dispersione di Bogoliubov**, che coincide con quella ottenuta a livello classico. Se sostituisco nell'hamiltoniana $\hat{H}_B$ troviamo:

$$\hat{H}_B = E_0 + \sum_{k \neq 0} \epsilon(k) \hat{d}_k^\dagger \hat{d}_k \quad (1.6.145)$$

con:

$$E_0 = \frac{1}{2} g \frac{N^2}{V} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} (\epsilon(k) - \bar{\epsilon}(k)) \quad (1.6.146)$$

dove il primo termine di E_0 rappresenta l'energia potenziale (interazione repulsiva); tutto questo è legato al fatto che abbiamo una transizione di fase e anche lo stato fondamentale cambia. Questo risultato ha un significato fisico molto profondo: il sistema originario composto da particelle interagenti può essere descritto da un'hamiltoniana di quasi-particelle libere (eccitazioni collettive) con legge di dispersione $\epsilon(k)$.

1.6.8 Coefficienti u_k e v_k

Scriviamo ora in forma esplicita i coefficienti u_k e v_k , a partire dalle equazioni fondamentali:

$$u^2 - v^2 = 1 \quad (1.6.147)$$

$$2\bar{\epsilon}uv + \lambda(u^2 + v^2) = 0 \quad (1.6.148)$$

la relazione (1.6.147) è soddisfatta dalla parametrizzazione:

$$\begin{cases} u^2 = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \\ v^2 = \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \quad , \quad u^2 > 1 \iff \gamma > 1 \quad (1.6.149)$$

sostituendo in (1.6.148):

$$2\bar{\epsilon} \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \frac{1}{4}} \right) = -\lambda \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \right) \quad (1.6.150)$$

$$= -\lambda\gamma \quad (1.6.151)$$

$$\implies \bar{\epsilon} \sqrt{\gamma^2 - 1} = -\lambda\gamma \quad (1.6.152)$$

$$\implies (\bar{\epsilon})^2 (\gamma^2 - 1) = \lambda^2 \gamma^2 \quad (1.6.153)$$

$$\implies ((\bar{\epsilon})^2 - \lambda^2) \gamma^2 = \bar{\epsilon}^2 \quad (1.6.154)$$

$$\implies \gamma = \frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{(\bar{\epsilon})^2 - \lambda^2}} > 1. \quad (1.6.155)$$

Infine otteniamo i due coefficienti, che devono essere di segno opposto per verificare la (1.6.148):

$$u_k = \sqrt{\frac{\bar{\epsilon}}{2\sqrt{(\bar{\epsilon})^2 - \lambda^2}} + \frac{1}{2}} \quad , \quad v_k = -\sqrt{\frac{\bar{\epsilon}}{2\sqrt{(\bar{\epsilon})^2 - \lambda^2}} - \frac{1}{2}} \quad (1.6.156)$$

con:

$$\lambda = g \frac{N}{V} \quad , \quad \bar{\epsilon}(k) = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g \frac{N}{V} \right) \quad (1.6.157)$$

$$\mu = \frac{\partial E_0}{\partial N} = g \frac{N}{V} \quad , \quad \epsilon(k) = \sqrt{(\bar{\epsilon})^2 - \lambda^2} \equiv \sqrt{(\bar{\epsilon})^2 - \mu^2}. \quad (1.6.158)$$

Consideriamo due limiti particolari:

- $g \sim 0$, k finito:

$$\bar{\epsilon}(k) \sim \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) \quad , \quad \epsilon(k) \sim \bar{\epsilon}(k) \quad , \quad \lambda \sim 0 \quad (1.6.159)$$

$$\longrightarrow u_k \sim 1 \quad , \quad v_k \sim 0. \quad (1.6.160)$$

quindi si ha il limite di particella libera, perchè:

$$\hat{a}_k^\dagger = u_k \hat{d}_k^\dagger + v_k \hat{d}_{-k} \quad \longrightarrow \quad \hat{a}_k^\dagger \sim \hat{d}_k^\dagger. \quad (1.6.161)$$

- $k \sim 0$, g finito:

$$\bar{\epsilon}(k) \sim g \frac{N}{V} = \mu \quad , \quad \epsilon(k) \sim v_1 \hbar k \quad (1.6.162)$$

$$\longrightarrow u_k \sim \sqrt{\frac{\mu}{2v_1 \hbar k}} \sim \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\sqrt{\frac{\mu}{2v_1 \hbar}} \right) \sim -v_k \quad (1.6.163)$$

ne dedurremo che una particella reale a piccoli $\vec{k}$ corrisponde ad oscillazioni di densità di fononi:

$$\hat{a}_k^\dagger \sim \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\hat{d}_k^\dagger - \hat{d}_{-k} \right) \left(\sqrt{\frac{\mu}{2v_1 \hbar}} \right) \quad (1.6.164)$$

$$\implies \hat{a}_k(t) \sim \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\hat{d}_k^\dagger e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon t} - \hat{d}_{-k} e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon t} \right) \left(\sqrt{\frac{\mu}{2v_1 \hbar}} \right). \quad (1.6.165)$$

1.6.9 Deplezione quantistica

Lo stato di vuoto, per la teoria di gas di bosoni interagenti con potenziale deltiforme, nell'approssimazione di Bogoliubov è definito da:

$$\hat{d}_k |B\rangle = 0 \quad \forall k \quad (1.6.166)$$

cioè lo stato di vuoto è caratterizzato dall'assenza totale di quasiparticelle. In $|B\rangle$ vale anche $\hat{a}_k |B\rangle = 0 \quad \forall k \neq 0$? In altri termini, $|B\rangle$ è composto solo da particelle di massa m nello stato con energia cinetica e momento nulli? Definiamo l'operatore numero di pseudoparticelle con impulso $\vec{k}$:

$$\hat{N}_k^B = \hat{d}_k^\dagger \hat{d}_k. \quad (1.6.167)$$

Poichè le pseudoparticelle sono ancora di tipo bosonico, cioè:

$$[\hat{d}_k^\dagger, \hat{d}_{k'}^\dagger] = 0 \quad (1.6.168)$$

a temperature $T \neq 0$ abbiamo:

$$N_k^B = \langle \hat{N}_k^B \rangle_T = \langle \hat{d}_k^\dagger \hat{d}_k \rangle_T = \frac{1}{e^{\beta \epsilon(k)} - 1} \quad (1.6.169)$$

non bisogna confondere N_k^B con $N_k = \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle_T$ numero medio di particelle reali di massa m che compongono il gas. Usando la trasformazione di Bogoliubov:

$$\begin{cases} \hat{a}_k = u_k \hat{d}_k + v_k \hat{d}_{-k}^\dagger \\ \hat{a}_k^\dagger = u_k \hat{d}_k^\dagger + v_k \hat{d}_{-k} \end{cases} \quad (1.6.170)$$

abbiamo quindi:

$$N_k = \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle_T \quad (1.6.171)$$

$$= \langle (u_k \hat{d}_k^\dagger + v_k \hat{d}_{-k}) (u_k \hat{d}_k + v_k \hat{d}_{-k}^\dagger) \rangle_T \quad (1.6.172)$$

$$= u_k^2 \langle \hat{d}_k^\dagger \hat{d}_k \rangle_T + v_k^2 \langle \hat{d}_{-k} \hat{d}_{-k}^\dagger \rangle_T + u_k v_k \langle \hat{d}_k^\dagger \hat{d}_{-k}^\dagger \rangle_T + v_k u_k \langle \hat{d}_{-k} \hat{d}_k \rangle_T \quad (1.6.173)$$

$$= u_k^2 \langle \hat{d}_k^\dagger \hat{d}_k \rangle_T + v_k^2 \langle \hat{d}_{-k}^\dagger \hat{d}_{-k} \rangle_T + v_k^2 \quad (1.6.174)$$

$$= (u_k^2 + v_k^2) \langle \hat{d}_k^\dagger \hat{d}_k \rangle_T + v_k^2 \quad (1.6.175)$$

dove si è sfruttata la simmetria $k \leftrightarrow -k$ e posto

$$\langle \hat{d}_k^\dagger \hat{d}_k \rangle_T = \langle \hat{d}_{-k}^\dagger \hat{d}_{-k} \rangle_T, \quad \langle \hat{d}_k \hat{d}_{-k} \rangle_T = \langle \hat{d}_k \rangle_T \langle \hat{d}_{-k} \rangle_T = 0 \quad (1.6.176)$$

per uno stato all'equilibrio termico. In altri termini, se ho

$$\langle * \rangle_T = \frac{1}{Z} \sum_n \langle n | * | n \rangle e^{-E_n \beta} \quad (1.6.177)$$

se ho operatori che cambiano il numero di particelle, la media sullo stato n vale zero (nel caso di $\hat{d}$, i termini non diagonali vanno a zero). Abbiamo quindi:

$$\hat{N}_0 = \hat{N} - \sum_{k \neq 0} \hat{N}_k \quad \Rightarrow \quad \langle N_0 \rangle_T = \langle \hat{N} \rangle_T - \sum_{k \neq 0} \langle \hat{N}_k \rangle_T \quad (1.6.178)$$

con:

$$N_0 = N - \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\vec{k} \left(v^2(k) + \frac{v^2(k) + u^2(k)}{e^{\beta\epsilon(k)} - 1} \right) \quad (1.6.179)$$

$$= N - \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\vec{k} v^2(k) - \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\vec{k} \left(\frac{v^2(k) + u^2(k)}{e^{\beta\epsilon(k)} - 1} \right) \quad (1.6.180)$$

dove il secondo termine indica la deplezione quantistica e il terzo la deplezione termica. A $T = 0$:

$$N_0 = N - \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\vec{k} v^2(k) \quad (1.6.181)$$

una frazione finita di particelle di gas si trova in uno stato con $k \neq 0$ e non fa quindi parte del condensato, sebbene non vi siano pseudoparticelle e tutto il gas sia superfluido. Questo effetto svanisce nel limite $g \rightarrow 0$ ed è chiamato **deplezione quantistica**.

- Nell'elio II, la percentuale di particelle nello stato $\vec{k} = 0$, misurata sperimentalmente è solo dell'8%. Nonostante questo, la componente normale dell'elio II (fononi, rotoni e vortici) è nulla a $T = 0$.

Nei moderni esperimenti con gas rarefatti a bassa temperatura si arriva a percentuali prossime al 100%.

- Va però notato che i gas reali diluiti a bassa temperatura sono metastabili: il vero stato fondamentale è solido. Nonostante questo, lo stato metastabile sopravvive per tempi sufficientemente lunghi da permettere la raccolta di tutti i dati sperimentali di interesse fisico.
- A temperature più alte, il terzo termine diventa dominante (deplezione termica).
- Negli esperimenti bisogna operare a bassa temperatura per evitare la deplezione termica, con gas rarefatti per diminuire il valore efficace della costante g e ridurre al minimo la deplezione quantistica.

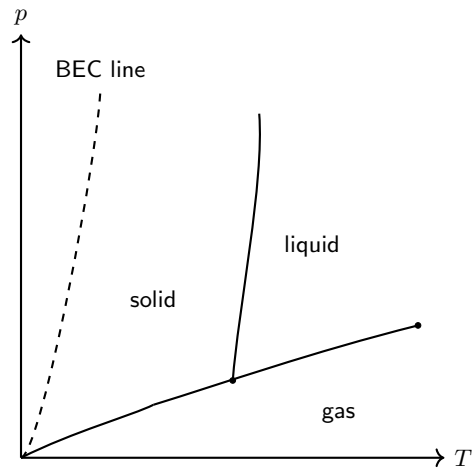


Figura 1.28: Tipico diagramma pressione-temperatura. La linea BEC individua dove il sistema, all'equilibrio, sia solido. Il condensato di Bose-Einstein del gas può per questo esistere solo in condizioni di metastabilità.

Capitolo 2

Superconduttività

La superconduttività fu scoperta nel 1911 da Kamerling Onnes durante lo studio della resistività dei metalli puri a bassa temperatura; egli osservò che la resistività del mercurio scende drasticamente a temperature sotto i 4.2 K.

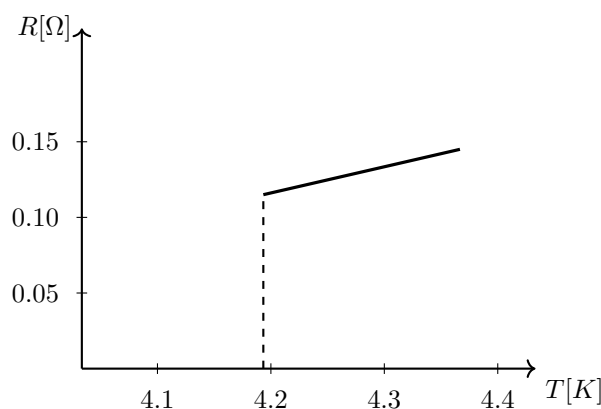


Figura 2.1

I valori di resistenza anche molto piccoli possono essere misurati attraverso la diminuzione della corrente in un conduttore ad anello. La corrente nell'anello dovrebbe diminuire secondo la legge:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (\text{circuito RL}) \quad (2.0.1)$$

dove L è l'induttanza e R la resistenza dell'anello: da esperimenti di questo tipo si può concludere che la resistività è crollata di almeno 16 ordini di grandezza, passando da $T > T_c$ a $T < T_c$. La corrente sopravviverebbe all'interno di un anello superconduttore per alcuni milioni di anni dopo la sua generazione; questo dimostra che la resistività di un superconduttore non è solo piccola, ma è virtualmente nulla.

- La temperatura di transizione dipende dalla natura del superconduttore e varia in un range molto ampio. Vedi la tabella 2.1. Ci sono

Elemento	T_c [K]
Al	1.19
Hg	4.15
Ga	1.09

Tabella 2.1

superconduttori ad alta temperatura con $T_c = 135$ K.

- La struttura reticolare dei materiali superconduttori non è importante. Cristalli puri, leghe, metalli amorfi possono diventare superconduttori. Persino il silicio diventa superconduttore ad alte pressioni e basse temperature.
- Molti metalli diventano superconduttori sotto i 10 K.
- Composti metallici possono arrivare a temperature di transizione attorno ai 20 K, alcuni anche fino a 39 – 40 K.
- Buoni conduttori come l'oro, il rame, l'argento rimangono conduttori normali fino a bassissime temperature.
- In generale, le impurità non influenzano il comportamento superconduttore; le impurità magnetiche sono un'eccezione: tendono a intrappolare elettroni (effetto Kondo) e ad annullare la superconduttività.
- Il ferro che ha, a pressione ambiente, reticolo cubico a corpo centrato, alla pressione di 15 GPa e temperatura ~ 2 K cambia struttura cristallina (esagonale compatta), il ferromagnetismo viene soppresso e può diventare superconduttore (2001) (il cambiamento di struttura cristallina e superconduttività non avvengono necessariamente simultaneamente).
- La transizione di fase a superconduttore avviene senza un cambiamento della struttura reticolare.
- I composti possono essere superconduttori sebbene i loro singoli costituenti rimangano normali conduttori.
- Il volume atomico sembra giocare un ruolo importante: i volumi atomici grandi sono sfavoriti.

2.1 Effetto Meissner-Ochsenfeld

Nel 1933, Meissner e Ochsenfeld scoprirono che la transizione a superconduttore non corrisponde solo all'assenza di resistenza, ma anche a un diamagnetismo ideale. C'è una differenza importante tra un conduttore ideale con resistenza nulla e un superconduttore. Dalla legge di Faraday abbiamo:

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (2.1.1)$$

in cui abbiamo:

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \quad (2.1.2)$$

Una variazione del flusso magnetico attraverso un cammino chiuso induce un campo elettrico $\vec{E}$. In un conduttore ideale e in un superconduttore la resistenza è nulla, non vi possono essere differenze di potenziale e cioè non vi può essere campo elettrico $\vec{E} \rightarrow \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$: all'interno di un conduttore ideale e di un superconduttore non vi può essere variazione nel tempo del campo magnetico.

Considero un corpo con resistenza nulla e con campo magnetico inizialmente nullo; a un certo istante applichiamo un campo magnetico esterno $\vec{B}_a$ al nostro campione: questo campo esterno non può penetrare all'interno del dispositivo, questo perchè sulla superficie del materiale si formano delle correnti (di schermo), che generano un campo magnetico nel materiale che bilancia completamente il campo magnetico imposto dall'esterno (questo succede sia nel conduttore ideale che nel superconduttore). Vedi la figura 2.2.

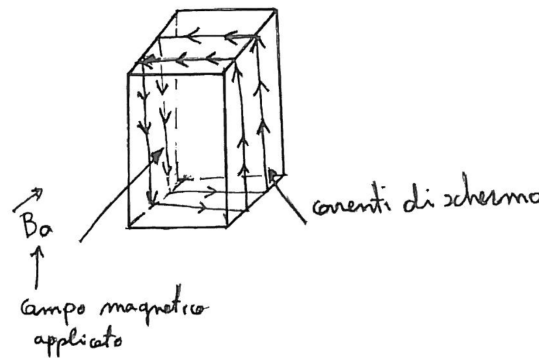


Figura 2.2

Consideriamo un esperimento ideale in cui confrontiamo il comportamento di un conduttore ideale con quello di un superconduttore e facciamo riferimento alla figura 2.3.

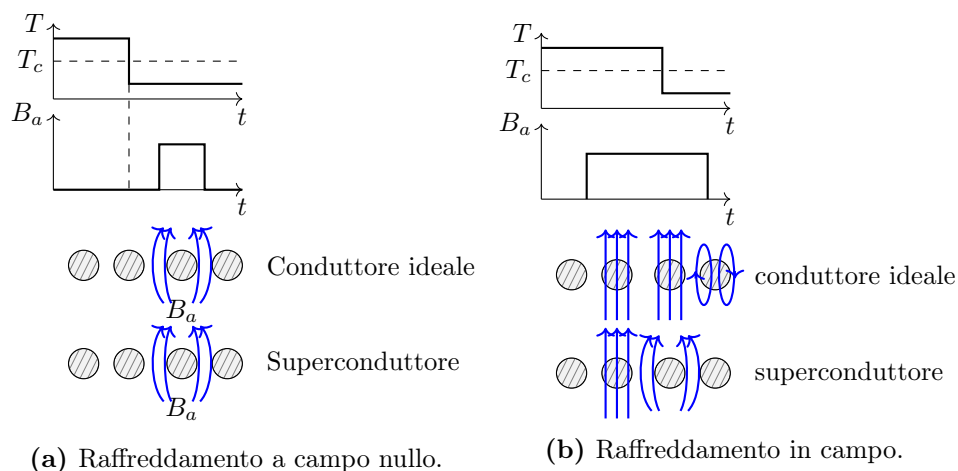


Figura 2.3

- Figura 2.3a. In entrambi i casi il campo magnetico non può penetrare all'interno del conduttore: $\vec{B}_a$ è schermato dalle correnti alla superficie dei campioni. Poiché la resistenza è nulla, la corrente schermante non si dissipa e l'interno dei conduttori rimane sempre schermato.
- Figura 2.3b. Secondo esperimento in cui prima accendiamo il campo magnetico e poi abbassiamo la temperatura (sotto quella critica).

Nel superconduttore, il campo magnetico viene espulso e quando $\vec{B}_a$ ritorna a zero, il campione di superconduttore ritorna allo stato iniziale: all'interno di un superconduttore (di tipo I) il campo magnetico non può mai penetrare.

Nel conduttore ideale, invece, per la legge di Faraday-Lenz rimane un campo magnetico all'interno del conduttore: il conduttore ideale intrappola il campo magnetico, mentre il superconduttore lo espelle e abbiamo quello che chiamiamo **effetto Meissner-Ochsenfeld**.

- Lo stato di un superconduttore non dipende dalla storia: lo stato superconduttivo corrisponde ad uno stato di equilibrio termodinamico (termodinamica dei superconduttori).
- L'effetto Meissner-Ochsenfeld permette la levitazione magnetica.
- Le correnti superconduttrici sono correnti di "superficie" (per questo si usano cavi molto sottili).

2.2 Superconduttori di tipo I

Un forte campo magnetico distrugge la superconduttività e ristabilisce lo stato normale di conduzione; a seconda del tipo di transizione, possiamo distinguere tra superconduttori di tipo I e di tipo II. I metalli puri come il piombo, il mercurio e l'alluminio sono **superconduttori di tipo I**. Il comportamento di un superconduttore di tipo I immerso in un campo magnetico esterno $\vec{B}_a$ è quello in figura 2.4.

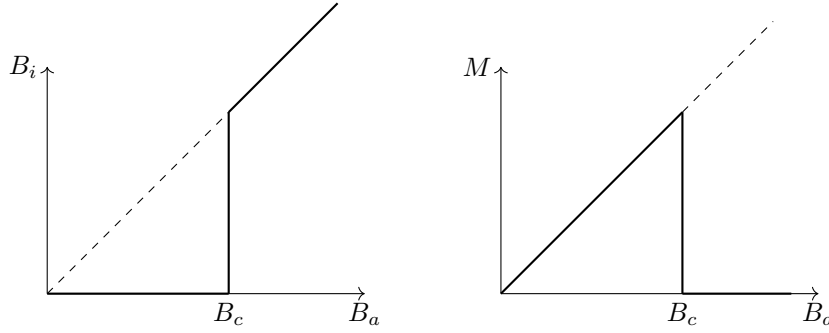


Figura 2.4

con:

$$B_i = B_a + \mu_0 M = \mu_0 (H_a + M) \quad (2.2.1)$$

dove B_a è il campo magnetico applicato, B_i è il campo magnetico interno, B_c è il campo magnetico critico, al di sopra del quale il campo esterno penetra nel materiale superconduttore, M è la magnetizzazione/densità di momento di dipolo magnetico e μ_0 è il coefficiente di suscettibilità magnetica nel vuoto. Per $T < T_c$ si ha:

$$B_i = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \chi = \mu_0 \left. \frac{\partial M}{\partial B_a} \right|_{B_a=0} = \mu_0 \frac{M}{B_a} = -1. \quad (2.2.2)$$

Questo risultato esprime il fatto che i superconduttori di tipo I sono diamagnetici ideali.

Se il campo magnetico esterno viene incrementato, la schermatura si rompe a un valore critico $B_a = B_c$, e il conduttore ritorna allo stato normale. Il valore di campo critico dipende dalla temperatura; la legge empirica è del tipo:

$$B_c(T) = B_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (2.2.3)$$

rappresentata in figura 2.5.

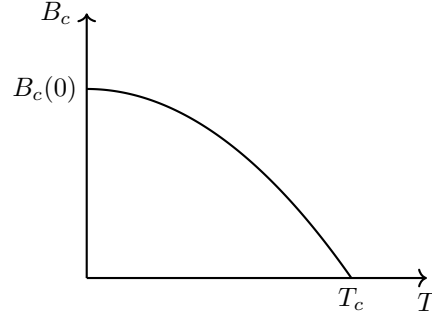


Figura 2.5

2.2.1 Corrente critica

Quando un superconduttore è percorso da una corrente elettrica $I > I_c$, il campione transisce alla fase normale.

Per determinare il valore critico I_c , dobbiamo considerare che in nessuna regione del superconduttore la corrente può superare il valore I_c : non ha importanza che questa sia la corrente di schermaggio o causata da un generatore di corrente ai capi del superconduttore.

Consideriamo quindi un cavo di raggio R , il campo magnetico sulla superficie del cavo è:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi R} \quad (2.2.4)$$

in cui B non può essere maggiore di B_c , e quindi si ha transizione da superconduttore a conduttore normale indipendentemente dal fatto che B sia applicato dall'esterno o indotto dalla corrente che passa nel superconduttore; di conseguenza la corrente critica è:

$$I_c = \frac{2\pi R}{\mu_0} B_c. \quad (2.2.5)$$

Abbiamo comunque dei valori di soglia. La corrente critica aumenta linearmente con $2\pi R$ e non con la sezione πR^2 .

2.3 Superconduttori di tipo II

Alcune leghe, ceramiche, niobio, vanadio e altri metalli di transizione (dal gruppo di riempimento orbitale d) appartengono alla famiglia dei superconduttori di tipo II. Come nei superconduttori di tipo I, il campo magnetico viene espulso completamente fino a quando il valore del campo è inferiore a un valore critico B_{c1} . A valori superiori si formano canali di conduttore normale che permettono al campo B_a di penetrare nella forma di filamenti sottili, chiamati linee di flusso o vortici (tali filamenti sono veri e propri vortici di supercorrente). Vedremo che il flusso del campo magnetico, per ognuno

di questi filamenti (o equivalentemente la circuitazione delle supercorrenti) è quantizzato. I quanti del flusso magnetico sono:

$$\phi_0 = \frac{h}{2e} \quad (2.3.1)$$

con e carica dell'elettrone.

L'esistenza di due tipi di superconduttore è legata all'energia di interfaccia normale-superconduttore, che è positiva nei superconduttori di tipo I, ma negativa in quella di tipo II, favorendo così la formazione di regione di conduzione normale all'interno del conduttore. Il campo magnetico e la magnetizzazione all'interno del superconduttore di tipo II, in funzione del campo magnetico applicato, hanno la forma in figura 2.6, in cui B_{c1} valore critico inferiore, B_{c2} valore critico superiore e $B_{c,th}$ valore critico teorico. Il valore critico del campo magnetico B_{c2} nei superconduttori di tipo II può essere 100 volte più grande del valore B_c nei superconduttori di tipo I (i superconduttori di tipo II "tradizionali" sono i più usati per le applicazioni tecnologiche).

I valori di B_{c1} e B_{c2} dipendono dalla temperatura con un andamento ($\sim$) parabolico simile a quello che descrive $B_c(T)$ nei superconduttori di tipo I.

Nei cristalli perfetti, le linee di flusso sono sistemate in modo regolare e formano un reticolo triangolare (reticolo di Abrikosov).

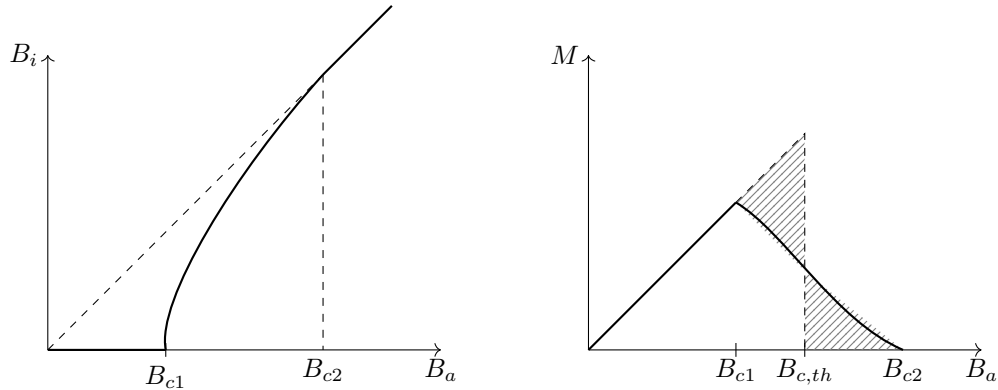


Figura 2.6

2.4 Termodinamica dei superconduttori

La termodinamica è basata su principi generali e non dipende dalla descrizione microscopica del modello: è quindi in grado di fornire risultati universali.

Consideriamo il campo magnetico esterno $\vec{B} = \vec{B}_a = \mu_0 \vec{H}$ come variabile indipendente e descriviamo il sistema utilizzando (T, P, B) , cioè usiamo

l'energia libera di Gibbs G :

$$G = U - TS + PV - \vec{m} \cdot \vec{B} \quad (2.4.1)$$

dove $\vec{m}$ è il momento magnetico. Poichè $\vec{m}$ e $\vec{B}$ sono paralleli, possiamo ignorare le loro proprietà vettoriali e tenere conto solo del segno del momento magnetico m . La variazione dG dell'energia libera è:

$$dG = -SdT + VdP - mdB \quad (2.4.2)$$

ricordando:

$$dU = TdS - PdV + Bdm. \quad (2.4.3)$$

Vogliamo confrontare l'energia libera di Gibbs della fase normale e la fase superconduttiva. Questa differenza è intimamente connessa con la natura della transizione di fase. Supponiamo che il fattore di demagnetizzazione D sia nullo e trascuriamo i cambiamenti dovuti alla variazione di pressione. Scriviamo, per il superconduttore:

$$M = \frac{m}{V} = -\frac{B}{\mu_0} \quad (2.4.4)$$

dove M è la magnetizzazione, troviamo:

$$dG = -SdT + VdP - mdB \quad (2.4.5)$$

$$= -SdT + \frac{BV}{\mu_0} dB \quad (2.4.6)$$

e integrando:

$$G_S(B, T) = G_S(0, T) + \int_0^B \frac{V}{\mu_0} B' dB' \quad (2.4.7)$$

$$= G_S(0, T) + \frac{VB^2}{2\mu_0} \quad (2.4.8)$$

dove l'ultimo termine è il volume moltiplicato per la densità di energia del campo magnetico; esso è positivo, indicando che l'energia necessaria per espellere il campo magnetico è positiva.

Nel metallo normale, trascuriamo le variazioni di energia dovute al campo magnetico, poichè le variazioni di magnetizzazione dovute alla superconduttività sono molto più grandi rispetto al para/diamagnetismo dei conduttori normali:

$$G_n(B, T) \sim G_n(0, T) \quad (2.4.9)$$

in accordo con:

$$G_S(B, T) = G_S(0, T) + \frac{VB^2}{2\mu_0} \quad (2.4.10)$$

e vediamo che l'energia libera di Gibbs aumenta all'aumentare di B . Ad un certo punto $G_S(B, T) \geq G_n(B, T)$ e lo stato superconduttore diventa instabile; il materiale torna allo stato normale:

$$G_S(B_c, T) = G_n(B_c, T) \sim G_n(0, T) \quad (2.4.11)$$

$$\Rightarrow G_s(B_c, T) = G_S(0, T) + \frac{VB_c^2}{2\mu_0} = G_n(0, T) \quad (2.4.12)$$

$$\Rightarrow G_n(0, T) - G_S(0, T) = \frac{V(B_c(T))^2}{2\mu_0}. \quad (2.4.13)$$

Poiché $G_n = G_S$ a $T = T_c$, $B_c \rightarrow 0$ per $T \rightarrow T_c$ (vai a rivedere l'andamento di $B_c(T)$). L'energia di condensazione:

$$G_{\text{con}} = \frac{V(B_c(T))^2}{2\mu_0} \quad (2.4.14)$$

è una quantità importante nella teoria della superconduttività. Dalla differenza di energia libera, tra il conduttore normale e il superconduttore, possiamo determinare la differenza di entropia ricordando:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right) = -S \quad (2.4.15)$$

e per cui:

$$\Delta S = S_n(0, T) - S_S(0, T) \quad (2.4.16)$$

$$= -\frac{V}{\mu_0} B_c \frac{dB_c}{dT} \quad (2.4.17)$$

$$\sim \frac{2V(B(0))^2}{\mu_0 T_c^2} \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right) T \quad (2.4.18)$$

vediamo che:

- Per $T \rightarrow T_c$, $B_c(T) \rightarrow 0$ e $\Delta S \rightarrow 0$: il calore latente $\Delta Q = T_c(S_n - S_S) = 0$, quindi la transizione è al secondo ordine (per $B = 0$).
- Per $T \rightarrow 0$, ancora $\Delta Q \rightarrow 0$ ($S_n, S_S \rightarrow 0$) come ci si aspetta dal terzo principio della termodinamica.
- Per $0 < T < T_c$, $\frac{dB_c(T)}{dT} < 0$ e $\Delta S = S_n - S_S > 0$: il superconduttore è più ordinato del conduttore normale.

Vedi la figura 2.7.

Vediamo che S_n cresce ~ linearmente con T a basse temperature e che S_n e S_S si incontrano a T_c . Poiché abbiamo:

$$\Delta G(B, T) = G_n(B, T) - G_S(B, T) \quad (2.4.19)$$

$$\sim G_n(0, T) - G_S(0, T) - \frac{VB^2}{2\mu_0} \quad (2.4.20)$$

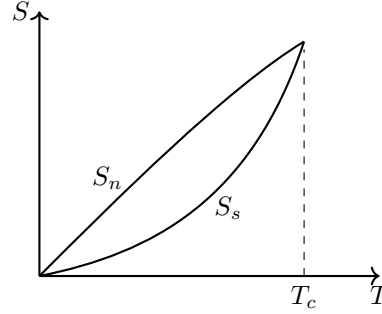


Figura 2.7: Grafico Entropia vs Temperatura.

allora abbiamo:

$$\left. \frac{\partial \Delta G}{\partial T} \right|_{B=\text{cost}} = \Delta S(B, T) \approx \Delta S(0, T) \neq 0 \quad \text{per } 0 < T < T_c \quad (2.4.21)$$

e la transizione di fase, al variare del campo magnetico B sulla linea $B = B_c(T)$, è al primo ordine ($\Delta Q \neq 0$), vedi la figura 2.8.

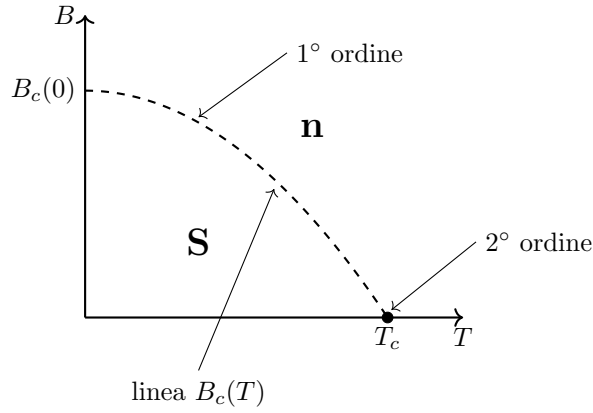


Figura 2.8

2.5 Le equazioni di London

L'effetto Meissner-Ochsenfeld è il punto di partenza per la derivazione delle equazioni di London. In un conduttore ideale, la resistenza è nulla e le collisioni elettrone-elettrone e elettrone-reticolo sono nulle.

La seconda legge di Newton per un elettrone di massa m è:

$$m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = (-e)\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau} \quad (2.5.1)$$

dove l'ultimo termine compare solo nel modello di Drude (τ = tempo di collisione); elettrico e $\vec{v}$ la velocità degli elettroni. La densità di corrente è:

$$\vec{j} = -ne\vec{v}. \quad (2.5.2)$$

Quindi l'equazione del moto può essere riscritta come:

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}. \quad (2.5.3)$$

Questa equazione è valida nel caso di portatori di carica "liberi", cioè anche per un superconduttore:

$$\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = \frac{n_s e_s^2}{m_s} \vec{E}. \quad (2.5.4)$$

Vedremo che $n_s = \frac{n}{2}$, $m_s = 2m_e$, $e_s = 2e$ (coppie di Cooper). Questa è la **prima equazione di London**.

Diversamente da un conduttore normale, non è la corrente che è proporzionale al campo elettrico (legge di Ohm), ma la sua derivata. La prima equazione di London dà l'impressione che la corrente di un superconduttore possa crescere indefinitamente. In realtà, poichè la resistenza è nulla, anche il campo elettrico $\vec{E}$ si annulla allo stato stazionario.

La variazione temporale di $\vec{j}_s$ si annulla: la corrente rimane costante ed è esclusivamente determinata dalla sorgente.

Per derivare la seconda equazione di London, usiamo la terza equazione di Maxwell e la prima equazione di London:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.5.5)$$

$$\frac{n_s e_s^2}{m_s} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{n_s e_s^2}{m_s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{j}_s + \frac{n_s e_s^2}{m_s} \vec{B} \right) = 0 \quad (2.5.6)$$

(l'ultima espressione vale per un conduttore ideale e per un superconduttore); all'interno di un conduttore ideale, il flusso attraverso un circuito arbitrario non può variare nel tempo. Ma per un superconduttore, il campo magnetico all'interno non solo è costante, ma è proprio zero:

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_s + \frac{n_s e_s^2}{m_s} \vec{B} = 0 \quad (2.5.7)$$

Questa è la **seconda equazione di London** che lega la supercorrente al campo magnetico $\vec{B}$.

Consideriamo ora la terza e la quarta equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.5.8)$$

Partiamo dalla quarta equazione e moltiplichiamo entrambi i membri per $\vec{\nabla} \times$ e usiamo la formula:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{f} = \nabla (\nabla \cdot \vec{f}) - \Delta \vec{f} \quad (2.5.9)$$

per cui:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \left(\mu_0 \vec{j}_s + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (2.5.10)$$

$$-\Delta \vec{B} + \nabla (\nabla \cdot \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j}_s + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (2.5.11)$$

$$-\Delta \vec{B} = -\mu_0 \frac{n_s e_s^2}{m_s} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} \quad (2.5.12)$$

$$\square \vec{B} = \mu_0 \frac{n_s e_s^2}{m_s} \vec{B} \quad (2.5.13)$$

in cui abbiamo indicato:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (2.5.14)$$

Se confrontiamo questa equazione con quella di Klein-Gordon (legata a campi scalari massivi) $\square \phi = \frac{c^2}{\hbar^2} M^2 \phi$, si scopre che il fotone all'interno di $\vec{B}$ del superconduttore ha acquisito una massa, questo lo chiamiamo **effetto Meissner-Ochsenfeld**:

$$M_{ph} = \sqrt{\frac{\mu_0 n_s e_s^2}{m_s}} \frac{\hbar}{c} \neq 0. \quad (2.5.15)$$

Questo spiega perchè $\vec{B}$ non si propaga nel superconduttore. Il meccanismo di Higgs-Anderson spiega in modo molto elegante questo effetto.

2.5.1 Lunghezza di penetrazione

Una delle applicazioni più importanti della seconda equazione di London è la descrizione dello schermaggio nei superconduttori nello stato di Meissner.

Fino ad ora abbiamo sostenuto che il campo magnetico fosse completamente espulso nello stato di Meissner. Se ciò fosse corretto, una corrente di densità infinita dovrebbe circolare alla superficie del superconduttore, quindi il campo magnetico penetra la superficie. Vedi la figura 2.9.

Per discutere questo fenomeno, assumiamo che il superconduttore occupi lo spazio $x > 0$, e un campo magnetico $\vec{B} = (0, 0, B_{0,z})$ sia orientato nella direzione z . Se inseriamo la seconda equazione di London nell'equazione di Maxwell ($\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \leftrightarrow$ regime stazionario, i campi non possono fluttuare):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} + \frac{\mu_0 n_s e_s^2}{m_s} \vec{B} = 0 \quad (2.5.16)$$

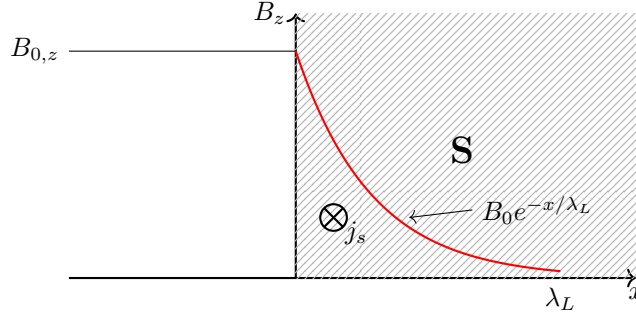


Figura 2.9: Grafico dell'effetto Meissner e penetrazione del campo.

usando (2.5.9) e $\nabla \vec{B} = 0$ abbiamo:

$$\Delta \vec{B} - \frac{\mu_0 n_s e_s^2}{m_s} \vec{B} = 0 \implies \frac{d^2}{dx^2} B_z(x) - \frac{\mu_0 n_s e_s^2}{m_s} B_z(x) = 0 \quad (2.5.17)$$

$$\implies \frac{d^2 B_z}{dx^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} B_z(x) = 0 \implies \lambda_L = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n_s e_s^2}} = \frac{\hbar}{c M_{ph}} \quad (2.5.18)$$

in cui λ_L è la lunghezza di penetrazione di London. La soluzione dell'equazione sarà:

$$B_z(x) = B_{0,z} e^{-x/\lambda_L} \quad (2.5.19)$$

dove la soluzione positiva è irrilevante. Inserendo questo risultato in:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \quad (2.5.20)$$

troviamo la variazione spaziale della corrente di screening:

$$j_{s,y}(x) = j_{0,y} e^{-x/\lambda_L} = \frac{B_{0,z}}{\mu_0 \lambda_L} e^{-x/\lambda_L}. \quad (2.5.21)$$

Sia il campo magnetico che la densità di corrente decrescono esponenzialmente all'interno del superconduttore con una lunghezza di penetrazione caratteristica λ_L data dall'inverso della massa del fotone nel mezzo.

Inoltre, il campo magnetico applicato e la corrente sono proporzionali con coefficiente $\mu_0 \lambda_L$:

$$B_{0,z} = \mu_0 \lambda_L j_{0,y}. \quad (2.5.22)$$

2.6 Il modello di Landau-Ginzburg

La teoria di LG per la superconduttività è stata formulata utilizzando l'approccio generale, sviluppato da Landau, alle transizioni di fase del secondo ordine.

La teoria di Landau per le transizioni di fase è caratterizzata da un parametro d'ordine il cui valore all'equilibrio è nullo nella fase disordinata a

$T \geq T_c$, ma diventa diverso da zero per $T < T_c$. Per la superconduttività, Landau e Ginzburg postulano l'esistenza di un parametro d'ordine ψ ; questo caratterizza lo stato superconduttore nello stesso modo in cui la magnetizzazione caratterizza lo stato di ferromagnetismo. Si assume quindi all'equilibrio:

$$\psi = \psi_0(T) = \begin{cases} 0 & \text{per } T \geq T_c \\ \neq 0 & \text{per } T < T_c \end{cases} \quad (2.6.1)$$

GL postulano che il parametro d'ordine ψ sia complesso: pensavano ad una funzione d'onda macroscopica per il superconduttore analoga alla ψ dell'elio II, solo che qui abbiamo a che fare con elettroni, e quindi per il principio di esclusione di Pauli, non possono finire tutti nello stato fondamentale.

Inizialmente, il significato fisico di ψ non era chiaro, ma con lo sviluppo della teoria macroscopica BCS si capì che era legata alla densità delle coppie di Cooper.

Si assume che l'energia libera del superconduttore dipenda in modo smooth dal parametro d'ordine. Inoltre, poichè ψ è complessa, l'energia libera deve dipendere solo da $\psi\psi^* = |\psi|^2$:

$$f_s(T) - f_n(T) = a(T) |\psi|^2 + \frac{1}{2} b(T) |\psi|^4 + \mathcal{O}(|\psi|^6) \quad (2.6.2)$$

in cui $f = \frac{F}{V}$ è la densità di energia libera di Helmholtz e f_s e f_n sono le densità di energia libera per lo stato superconduttore e lo stato normale. I parametri $a(T)$ e $b(T)$ sono parametri fenomenologici che dipendono in modo smooth dalla temperatura T . I termini di ordine superiore vengono trascurati in prossimità di T_c . $b(T)$ deve essere maggiore di zero, altrimenti $f_s(T) - f_n(T)$ non sarebbe limitata inferiormente. Se plottiamo $f_s - f_n$ in funzione di $|\psi|$, vedi la figura 2.10, è facile vedere che ci sono due possibili andamenti legati al segno di $a(T)$:

- $a(T) > 0$: la curva ha un minimo a $|\psi|^2 = |\psi_0|^2 = 0$ e $f_s > f_n$.
- $a(T) < 0$: la curva ha un minimo a $|\psi|^2 = |\psi_0|^2 = -\frac{a(T)}{b(T)}$.

Si noti che è F e non G il potenziale termodinamico appropriato:

$$dU = TdS + d\vec{M} \cdot \vec{B} \quad , \quad F = U - TS \quad (2.6.3)$$

$$dG = -SdT - d\vec{B} \cdot \vec{M} \quad , \quad G = F - \vec{M} \cdot \vec{B} \quad (2.6.4)$$

$$dF = -SdT + d\vec{M} \cdot \vec{B} \quad , \quad (P, V = \text{cost}). \quad (2.6.5)$$

Nel modello di LG, si assume che:

$$\begin{cases} a(T) > 0 & \text{per } T > T_c \\ a(T) = 0 & \text{per } T = T_c \\ a(T) < 0 & \text{per } T < T_c \end{cases} \quad (2.6.6)$$

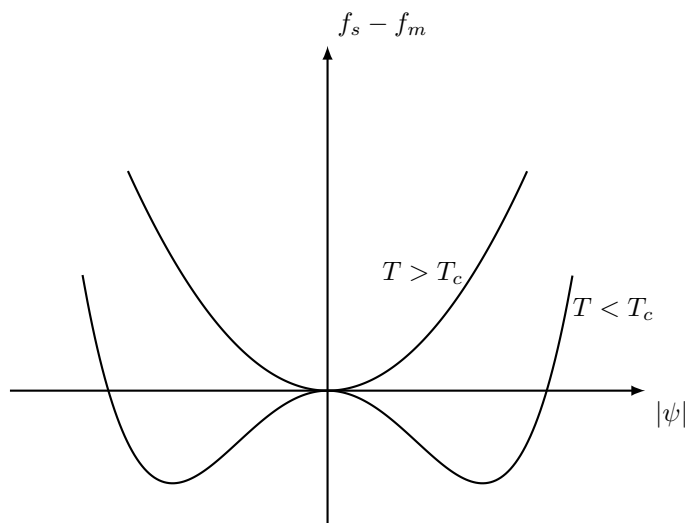


Figura 2.10

e che $b(T)$ vari lentamente attorno a $T = T_c$:

$$\begin{cases} a(T) \sim \dot{a}(T - T_c) \\ b(T) \sim b \end{cases} \longrightarrow |\psi_0| = \begin{cases} 0 & \text{per } T \geq T_c \\ \left(\frac{\dot{a}}{b}\right)^{1/2} (T_c - T)^{1/2} & \text{per } T < T_c \end{cases} \quad (2.6.7)$$

dove $|\psi_0|$ minimizza $\Delta f = f_s - f_n$, vedi la figura 2.11.

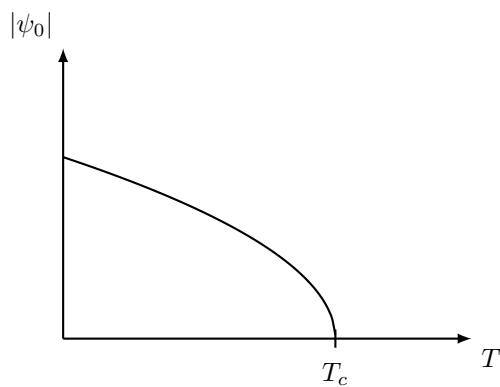


Figura 2.11

Sostituendo:

$$|\psi|^2 = |\psi_0|^2 = \frac{\dot{a}(T_c - T)}{b} \quad (2.6.8)$$

abbiamo:

$$f_s(T) - f_n(T) = \dot{a}(T - T_c) \left(\frac{\dot{a}}{b} \right) (T_c - T) + \frac{1}{2} b \left(\frac{\dot{a}}{b} \right)^2 (T_c - T)^2 \quad (2.6.9)$$

$$= -\frac{\dot{a}^2}{2b} (T - T_c)^2. \quad (2.6.10)$$

Poichè:

$$G_n(0, T) - G_s(0, T) = \frac{B_c^2(T) V}{2\mu_0} \quad (2.6.11)$$

$$= \frac{\mu_0 H_c^2(T) V}{2} \quad (2.6.12)$$

$$= F_n - F_s + \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{M} \quad (2.6.13)$$

$$= F_n - F_s \quad (2.6.14)$$

$$\Rightarrow F_s(0, T) - F_n(0, T) = -\mu_0 V \frac{H_c^2}{2} \quad (2.6.15)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_0 H_c^2}{2} = \frac{\dot{a}^2}{2b} (T - T_c)^2 \quad (2.6.16)$$

$$\Rightarrow H_c = \frac{\dot{a}}{(\mu_0 b)^{1/2}} (T_c - T) \quad (2.6.17)$$

che coincide con l'approssimazione lineare a $T \approx T_c$ di:

$$H_c(T) = H_c(0) \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right) \quad (2.6.18)$$

$$= \frac{H_c(0)}{T_c^2} (T_c - T)(T_c + T) \quad (2.6.19)$$

$$\approx 2 \frac{H_c(0)}{T_c} (T_c - T). \quad (2.6.20)$$

Dal confronto di questi due risultati, possiamo fissare alcune costanti in termini dei parametri $\dot{a}, b$.

2.6.1 Teoria di Landau-Ginzburg per sistemi inomogenei

Per completare la teoria LG per la superconduttività, permettiamo a ψ (parametro d'ordine) di dipendere anche dalla posizione: $\psi = \psi(r)$. Il tutto incomincia a somigliare alla teoria dei superfluidi:

$$f_s(T, \vec{r}) - f_n(T, \vec{r}) = \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla \psi(\vec{r})|^2 + a(T) |\psi(\vec{r})|^2 + \frac{b(T)}{2} |\psi(\vec{r})|^4 \quad (2.6.21)$$

ponendo $\psi(\vec{r}) = \psi = \text{cost}$, si ritorna al caso precedente. Il parametro $m^* = 2m_e$, che ha le dimensioni di una massa, determina il costo di energia associata a gradienti non nulli di $\psi(\vec{r})$. m^* gioca il ruolo di massa effettiva

nel sistema quantistico con funzione d'onda macroscopica $\psi(\vec{r})$. L'energia libera totale del sistema è:

$$F_s(T) = F_n(T) + \int_V d^3\vec{r} \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \psi^* \Delta \psi + a(T) \psi^* \psi + \frac{b}{2} (\psi^* \psi)^2 \right). \quad (2.6.22)$$

La configurazione di equilibrio termodinamico si ha per:

$$\frac{\delta \Delta F_s}{\delta \psi^*} = 0 \quad (2.6.23)$$

cioè quando la funzione integranda è minimizzata:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta + (a + b |\psi(\vec{r})|^2) \right] \psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.6.24)$$

che coincide all'equazione stazionaria di GP per gas diluiti a bassa temperatura.

2.6.2 Interfaccia nei superconduttori

L'equazione non lineare di Schrödinger ha svariate applicazioni: può essere usata per studiare la risposta del parametro d'ordine ad una perturbazione esterna.

Consideriamo quindi un modello semplice di interfaccia tra un superconduttore e un conduttore normale. Dobbiamo risolvere l'equazione:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + a(T) \psi(x) + b \psi^3(x) = 0 \quad (2.6.25)$$

dove il coefficiente $a(T) = -|a(T)|$, perchè dobbiamo considerare il sistema nella fase in cui la simmetria è spontaneamente rotta. Valgono le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \psi(x) \neq 0 & \text{per } x > 0 \\ \psi(x) = 0 & \text{per } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.6.26)$$

vedi la figura 2.12.

Ricordando l'equazione soddisfatta da $f(z) = \tanh(z)$:

$$\frac{df(z)}{dz} = 1 - f^2(z) \quad (2.6.27)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dz^2} f(z) = -2f(z) \frac{d}{dz} f(z) \quad (2.6.28)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dz^2} f(z) = -2f(z) (1 - f^2(z)) = -2f(z) + 2f^3(z) \quad (2.6.29)$$

$$\Rightarrow -\frac{d^2}{dz^2} f(z) - 2f(z) + 2f^3(z) = 0. \quad (2.6.30)$$

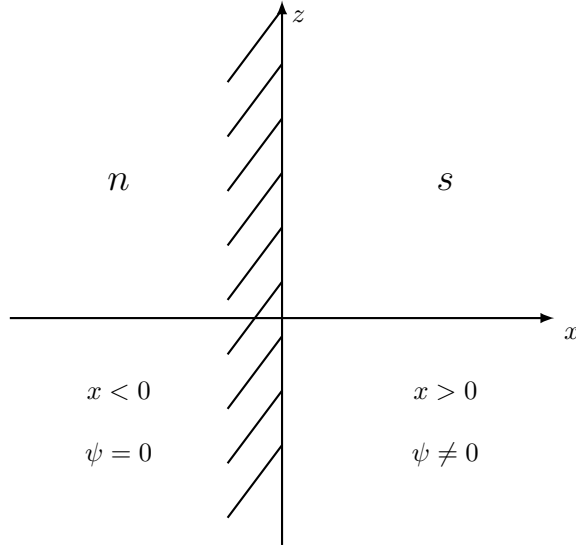


Figura 2.12

Possiamo ricondurre la nostra equazione a questa forma usando l'ansatz $\psi(x) = \alpha \phi(x\beta)$ e fissando i parametri α e β in modo opportuno (devono valere 2):

$$-\frac{\hbar^2 \beta^2 \alpha}{2m^*} \frac{d^2 \phi(x\beta)}{d(x\beta)^2} - |a| \alpha \phi(x\beta) + \alpha^3 b \phi^3(x\beta) = 0 \quad (2.6.31)$$

cioè:

$$-\frac{d^2 \phi(x\beta)}{d(x\beta)^2} - \frac{|a|}{\left(\frac{\hbar^2 \beta^2}{2m^*}\right)} \phi(x\beta) + \frac{\alpha^2 b}{\left(\frac{\hbar^2 \beta^2}{2m^*}\right)} \phi^3(x\beta) = 0 \quad (2.6.32)$$

per cui:

$$\begin{cases} |a| = \frac{\hbar^2 \beta^2}{m^*} \\ \alpha^2 b = \frac{\hbar^2 \beta^2}{m^*} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} |a| = \alpha^2 b \\ \frac{|a|}{b} = \frac{\hbar^2 \beta^2}{m^*} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{|a|}{b}} \\ \beta = \sqrt{\frac{|a| m^*}{\hbar^2}}. \end{cases} \quad (2.6.33)$$

Attraverso questi due parametri abbiamo trovato il passaggio dall'equazione iniziale (GP stazionario per i superconduttori) e l'equazione per la tangente iperbolica:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{|a|}{b}} \phi\left(x \frac{\sqrt{|a| m^*}}{\hbar}\right) \quad (2.6.34)$$

$$= \psi_0 \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2} \xi(T)}\right) \quad (2.6.35)$$

dove abbiamo la lunghezza di coerenza ($\approx$ lunghezza di healing):

$$\xi(T) = \frac{\hbar}{\sqrt{|a| m^* 2}} \quad (2.6.36)$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2\dot{a} |T - T_c| m^*}}. \quad (2.6.37)$$

Essa ci dice quanto la funzione d'onda cambia all'interfaccia rispetto allo stato lontano dall'interfaccia che tende a ψ_0 . Vedi la figura 2.13. Si può

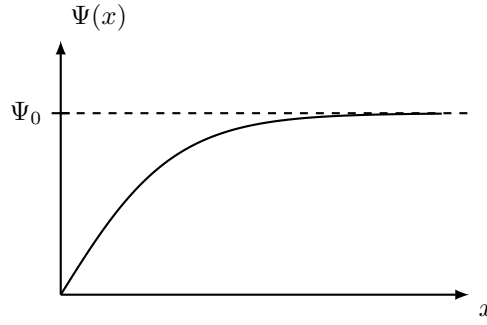


Figura 2.13

notare che $\xi(T) \sim |T - T_c|^{-1/2}$, cioè la lunghezza di coerenza diverge alla temperatura critica con esponente critico $-1/2$ (stiamo facendo un'approssimazione di campo medio). In altri termini, man mano che incrementiamo T a partire da $T = 0$, la quantità tende a infinito, cioè diventa sempre più piatta, penetra completamente e fa in modo che il superconduttore sia transito allo stato normale quando arriviamo a $T \geq T_c$.

Da questo risultato è possibile ottenere l'energia associata alla penetrazione dell'interfaccia all'interno del superconduttore ($x > 0$).

A causa della presenza dello stato normale a sinistra, abbiamo una deviazione dello stato fondamentale che dipende da x in modo non banale; questo significa che parte del superconduttore è transito allo stato normale e questo fa sì che la configurazione di campo corrisponda a uno stato di energia più elevata rispetto allo stato omogeneo.

Vogliamo determinare la differenza di energia libera tra le configurazioni in figura 2.14.

L'energia libera di bulk (associata allo stato di vuoto) nel volume $V = Sx_0$, dove S ($\rightarrow \infty$) è la superficie ortogonale al foglio e x_0 è un punto

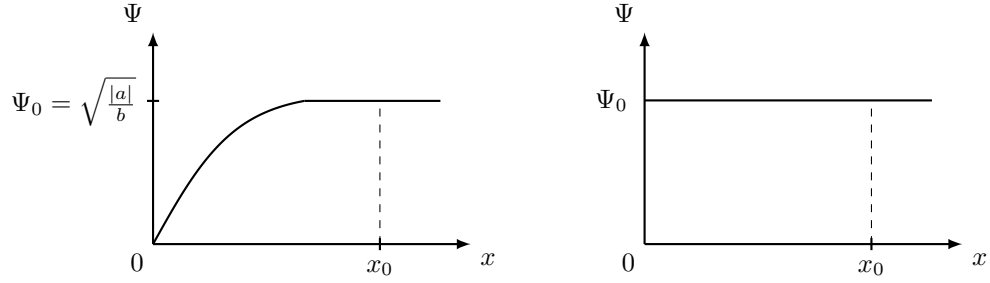


Figura 2.14

qualsiasi sull'asse delle x , è:

$$F_s(0, T) - F_n(0, T) = -\mu_0 \frac{V H_c^2}{2} \quad (2.6.38)$$

$$= -\mu \frac{V}{2} \left(\frac{|a|}{\sqrt{\mu b}} \right)^2 \quad (2.6.39)$$

$$= -\frac{a^2}{2b} s x_0 \quad x_0 \rightarrow \infty \quad (2.6.40)$$

a cui corrisponde un'energia per unità di superficie (la densità di energia è molto lontana dalle condizioni al bordo, cioè dall'interfaccia tra superconduttore e conduttore normale):

$$\sigma_{\text{bulk}} = \frac{F_s(0, T) - F_n(0, T)}{S} = - \int_0^{x_0} dx \mu_0 \frac{H_c^2}{2} \quad (2.6.41)$$

e una differenza di energia:

$$\sigma = \sigma_\psi - \sigma_{\text{bulk}} \quad (2.6.42)$$

$$= \int_0^\infty dx \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + a \psi^2(x) + \frac{b}{2} \psi^4(x) + \frac{1}{2} \mu_0 H_c^2 \right) \left[\frac{J}{m^2} \right]. \quad (2.6.43)$$

Questo contributo fu determinato da deGennes nel 1960:

$$\sigma \approx \frac{1}{2} \mu_0 H_c^2 \cdot (1.89) \xi(T) > 0 \quad (2.6.44)$$

il fatto che sia positivo indica che corrisponde a uno stato eccitato.

2.6.3 Teoria di Landau-Ginzburg in campo magnetico

La vera potenzialità dell'approccio di LG ai superconduttori diventa evidente solo quando si inserisce il contributo del campo magnetico. Il modello

studiato fino ad ora non include gli effetti legati al fatto che il superfluido non è neutro, ma è una supercorrente.

LG postulano che l'accoppiamento tra $\psi(\vec{r})$ e $\vec{B}$ si ottenga dalla sostituzione (accoppiamento minimale):

$$-i\hbar\vec{\nabla} \longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A} \quad (2.6.45)$$

cioè, come se $\psi(\vec{r})$ fosse la funzione d'onda di particelle cariche, con carica q . Si trovò:

$$q = e_s = 2e \quad , \quad \vec{\nabla} \longrightarrow \vec{\nabla} - \frac{2ei}{\hbar} \vec{A} \quad (2.6.46)$$

$$-i\hbar\vec{\nabla} \longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla} - 2e\vec{A} \quad , \quad m^* = 2m_e \quad (2.6.47)$$

per tutti i superconduttori conosciuti.

Di nuovo, alla spiegazione di questo fatto si arrivò solo più tardi con lo sviluppo della teoria BCS e con la comprensione del legame tra BCS e LG (Gorkov).

L'energia libera di LG diventa (e qui è fondamentale che sia l'energia libera di Helmholtz e non quella di Gibbs, perchè c'è scambio di energia tra $\vec{B}$ e le cariche del sistema):

$$f_s(T) - f_n(T) = \frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\vec{\nabla} - 2e\vec{A} \right) \psi \right|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2} |\psi|^4 \quad (2.6.48)$$

(densità di energia libera del superconduttore). Questa espressione contiene l'accoppiamento tra la funzione d'onda del condensato e il campo magnetico attraverso il potenziale vettore $\vec{A}$, con $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Ma a questo punto non possiamo separare completamente il condensato dal campo magnetico e nel calcolo dell'energia libera bisogna includere anche questo termine:

$$\Delta F_{\vec{B}} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{spazio}} d^3\vec{r} B^2(\vec{r}) \quad (2.6.49)$$

si ottiene (con V volume del superconduttore):

$$F_s(T) = F_n(T) + \int_V d^3\vec{r} \left(\frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\vec{\nabla} - 2e\vec{A} \right) \psi \right|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2} |\psi|^4 \right) + \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{spazio}} d^3\vec{r} B^2(\vec{r}) \quad (2.6.50)$$

per cui ΔF è quindi composta da 3 contributi:

$$\Delta F = \Delta F_\psi + \Delta F_{\vec{B}} + \Delta F_{\text{int}} \quad (2.6.51)$$

$$\Delta F_\psi = \int_V d^3r \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi|^2 + a |\psi|^2 + \frac{b}{2} |\psi|^4 \right) \quad (2.6.52)$$

$$\Delta F_{\text{int}} = \int_V \frac{d^3r}{2m^*} \left(i\hbar \vec{\nabla}\psi^* (-2e\vec{A}\psi) + (-i\hbar \vec{\nabla}\psi)(-2e\vec{A}\psi)^* + (2e)^2 |\psi|^2 \vec{A}\vec{A} \right) \quad (2.6.53)$$

$$= \int_V d^3r \left[\frac{2ie\hbar}{2m^*} \left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^* \right) \vec{A} + \frac{(2e)^2}{2m^*} |\psi|^2 \vec{A}\vec{A} \right]. \quad (2.6.54)$$

L'energia di interazione può essere sempre scritta come:

$$\Delta F_{\text{int}} = - \int_V d^3r \vec{j}_s \cdot \vec{A} \quad (2.6.55)$$

ovvero

$$\frac{\delta \Delta F_{\text{int}}}{\delta \vec{A}} = -\vec{j}_s \quad (2.6.56)$$

$$\Rightarrow \vec{j}_s = -\frac{2ie\hbar}{2m^*} \left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^* \right) - \frac{(2e)^2}{m^*} |\psi|^2 \vec{A}. \quad (2.6.57)$$

Ponendo:

$$\psi(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})| e^{i\theta(\vec{r})} \quad \Rightarrow \quad \psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^* = 2i|\psi|^2 \vec{\nabla}\theta \quad (2.6.58)$$

e otteniamo l'espressione della densità di supercorrente:

$$\vec{j}_s = \frac{2e\hbar}{m^*} |\psi|^2 \vec{\nabla}\theta - \frac{(2e)^2}{m^*} |\psi|^2 \vec{A} \quad (2.6.59)$$

$$= \frac{(2e)^2}{m^*} |\psi|^2 \left(\frac{\hbar}{2e} \vec{\nabla}\theta - \vec{A} \right) \quad (2.6.60)$$

essa è proporzionale alla carica degli elettroni al quadrato; se $\psi = 0$, allora $\vec{j}_s \rightarrow 0$, perchè devo avere portatori di carica per generare correnti. Il parametro d'ordine è soluzione dell'equazione di Gross-Pitaevskii con accoppiamento minimale:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\vec{\nabla} - \frac{2ie}{\hbar} \vec{A} \right)^2 \psi(r) + (a + b|\psi|^2) \psi(\vec{r}) = 0. \quad (2.6.61)$$

2.6.4 Simmetria di gauge

Il parametro d'ordine dei superconduttori $\psi(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})| e^{i\theta(\vec{r})}$ possiede un'ampiezza e una fase (qui $\vec{r} \equiv r$). Da questo punto di vista la situazione è molto simile a quella dei superfluidi (particelle neutre), ma, a differenza di questi,

qualcosa di molto interessante succede quando si considera la trasformazione di gauge:

$$\vec{A}(r) \longrightarrow \vec{A}(r) + \frac{\hbar}{2e} \vec{\nabla} \chi. \quad (2.6.62)$$

Consideriamo l'operatore momento:

$$\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla} - 2e\vec{A} \quad (2.6.63)$$

se cambiamo la fase di $\psi(r)$:

$$\psi(r) \longrightarrow \psi(r) e^{i\chi(r)} \quad (2.6.64)$$

allora:

$$\hat{p} \psi(r) e^{i\chi(r)} = e^{i\chi(r)} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - 2e\vec{A} \right) \psi(r) + \psi(r) e^{i\chi(r)} \hbar \vec{\nabla} \chi(r) \quad (2.6.65)$$

$$= e^{i\chi(r)} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - 2e \left(\vec{A} - \frac{\hbar}{2e} \vec{\nabla} \right) \right) \psi(r). \quad (2.6.66)$$

Da questa espressione si vede che l'energia libera, dove compaiono solo termini $|\hat{p}\psi|^2$, rimane invariata se cambiamo simultaneamente:

$$\begin{cases} \psi(r) & \longrightarrow \psi(r) e^{i\chi(r)} \\ \vec{A}(r) & \longrightarrow \vec{A}(r) + \frac{\hbar}{2e} \vec{\nabla} \chi(r) \end{cases} \quad (2.6.67)$$

questo mostra che la teoria possiede un'invarianza di gauge locale: sia la fase della funzione d'onda che il potenziale vettore $\vec{A}$ dipendono dalla scelta del gauge, ma tutte le osservabili (energia libera, campo magnetico, correnti) sono invarianti.

Ora consideriamo la corrente:

$$\vec{j}_s = \frac{(2e)^2}{m^*} |\psi|^2 \left(\frac{\hbar}{2e} \vec{\nabla} \theta - \vec{A} \right) \quad (2.6.68)$$

essa è invariante sotto la trasformazione combinata (2.6.67), mentre i due termini in (2.6.68) non lo sono separatamente.

Poichè $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$, se $|\psi|^2 = |\psi_0|^2 = \text{costante}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_s = 0 - \frac{(2e)^2}{m^*} |\psi_0|^2 \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.6.69)$$

$$= -\frac{(2e)^2}{m^*} |\psi_0|^2 \vec{B} \quad (2.6.70)$$

(già rotta la simmetria di gauge globale), che coincide con la seconda equazione di London:

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_s = -\frac{n_s e_s^2}{m_s} \vec{B} \quad (2.6.71)$$

a patto di identificare: $m^* = m_s (= 2m_e)$, $e_s = 2e$ e $|\psi_0|^2 = n_s$ (densità dei portatori di supercorrente). Poichè l'equazione di London è equivalente all'effetto di Meissner-Ochsenfeld, abbiamo verificato che il modello di LG descrive la fisica dei superconduttori.

Inoltre, poichè $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ (regime stazionario) e in assenza di correnti esterne, abbiamo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j}_s \quad (2.6.72)$$

per cui:

$$\Delta \vec{B} = -\mu_0 \frac{(2e)^2}{m^*} |\psi_0|^2 \vec{B} \implies \Delta \vec{B} + \frac{c^2}{\hbar^2} M_{ph}^2 \vec{B} = 0 \quad (2.6.73)$$

$$\implies M_{ph} = \frac{\hbar}{c} \sqrt{\frac{\mu_0 |\psi_0|^2 (2e)^2}{m^*}} = \frac{\hbar}{c} |\psi_0| (2e) \sqrt{\frac{\mu_0}{m^*}}. \quad (2.6.74)$$

Vediamo:

- La massa del fotone è proporzionale al modulo del parametro d'ordine all'equilibrio (meccanismo di Anderson-Higgs).

Possiamo fare la stessa cosa per $\vec{A}$ nel caso omogeneo $\theta = \text{costante}$ e nel gauge di London $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

Ci sono fluttuazioni del campo scalare quando ψ dipende da r ed eventualmente dal tempo; queste fluttuazioni sono associate alle particelle di Higgs.

- In (2.6.68), se cambiamo la fase della funzione d'onda, questo cambiamento longitudinale può essere assorbito da $\vec{A}$; nel vuoto il campo è ortogonale alla direzione di propagazione, facendo in modo che il campo acquisisca un grado di libertà longitudinale, passando da due a tre gradi di libertà: per questo il fotone può acquisire massa.

2.7 Quantizzazione del flusso

La fase $\theta(\vec{r})$ della funzione d'onda macroscopica nei superconduttori è ben definita a meno di multipli di 2π . La differenza $\Delta\theta$ tra due punti del conduttore si ottiene calcolando l'integrale sulla curva L :

$$\Delta\theta = \int_L \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{l} \quad (2.7.1)$$

imponendo che la funzione d'onda sia ad un solo valore:

$$\Delta\theta = \oint_L \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{l} = 2\pi n \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.7.2)$$

Per dimostrare la quantizzazione del flusso del campo magnetico, consideriamo un superconduttore a forma toroidale, quindi un corpo non semplicemente connesso, con un buco al centro. Immergo il superconduttore in un campo magnetico esterno, che passa attraverso il foro, mentre all'esterno viene deviato (come ben sappiamo); vedi la figura 2.15.

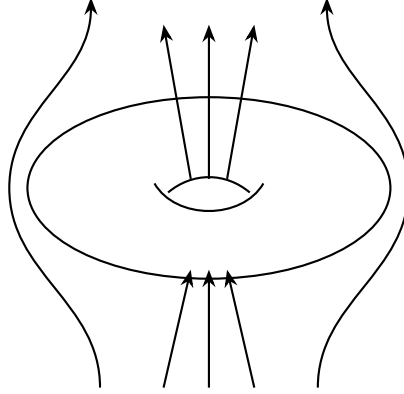


Figura 2.15

L'esistenza di una funzione d'onda macroscopica ha una conseguenza importante per il flusso del campo magnetico all'interno del foro. Consideriamo l'espressione della supercorrente:

$$\vec{j}_s = \frac{(2e)^2}{m^*} |\psi|^2 \left(\frac{\hbar}{2e} \vec{\nabla} \theta - \vec{A} \right) \quad (2.7.3)$$

integrando $\vec{j}_s$ su un cammino chiuso all'interno del superconduttore dove $\vec{j}_s = 0$, si ha (usando $|\psi|^2 = |\psi_0|^2 = \text{costante}$):

$$\oint_L \left(\vec{A} - \frac{\hbar}{2e} \vec{\nabla} \theta \right) d\vec{l} = 0 \quad (2.7.4)$$

in cui:

$$\oint_L \frac{\hbar}{2e} \vec{\nabla} \theta d\vec{l} = \frac{\hbar}{2e} \Delta \theta = \frac{\hbar}{2e} n \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.7.5)$$

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \Phi \quad (2.7.6)$$

ovvero $\Phi = \frac{\hbar}{2e} n = \Phi_0 n$; il flusso totale all'interno del foro è un multiplo intero di un quanto di flusso (quantizzazione del flusso del campo magnetico):

$$\Phi_0 = \frac{\hbar}{2e} = 2.05 \cdot 10^{-15} \text{ Tm}^2. \quad (2.7.7)$$

2.7.1 Effetto Josephson

Nel 1962 Josephson fece una previsione teorica: tra due materiali superconduttori separati da una piccola barriera di isolante si instaura una corrente continua spontanea: $I_s = I_c \sin(\Delta\theta_0)$, dove $\Delta\theta_0$ è la differenza di fase tra le due funzioni d'onda.

Quello che si cerca di capire una volta ipotizzato che ai superconduttori possa essere associata una funzione d'onda macroscopica complessa, è la prova dell'esistenza o meno di una fase. Quindi prendo due campioni di superconduttore inizialmente separati e abbasso la temperatura sotto quella critica, allora la funzione d'onda acquisisce un valore di aspettazione non nullo nello stato fondamentale: $\theta_1 \neq \theta_2$ se i due materiali sono posti a debita distanza.

Riducendo lo spessore dello strato isolante tra due superconduttori a circa $10 \text{ \AA}$, si ottiene una sovrapposizione non nulla delle funzioni d'onda macroscopiche e si instaura la corrente.

Se invece instaurò una differenza di potenziale tra i due materiali, si genera una supercorrente alternata con frequenza $\omega = 2e\Delta V/\hbar$.

L'apparato sperimentale consiste nel porre a contatto due cavi superconduttori, tra i quali si deposita uno strato di ossido molto sottile, perché voglio che le due funzioni d'onda si sovrappongano nelle vicinanze di questa giunzione isolante (giunzione Josephson).

Consideriamo l'equazione di Schrödinger per due superconduttori accoppiati attraverso il link debole:

$$\begin{cases} i\hbar\dot{\psi}_1 = \mu_1\psi_1 + \bar{k}\psi_2 \\ i\hbar\dot{\psi}_2 = \mu_2\psi_2 + \bar{k}\psi_1 \end{cases} \quad (2.7.8)$$

dove μ_1 e μ_2 rappresentano i potenziali chimici dei due superconduttori, mentre la costante $\bar{k}$ riflette l'intensità dell'accoppiamento.

In assenza di giunzione, le due funzioni d'onda sono descritte dalle leggi: $\psi_i(t) = \psi_{0i} e^{-\frac{i}{\hbar}\mu_i t}$, con $i = 1, 2$.

I potenziali chimici sono identici se non vi è alcuna differenza di potenziale: $\mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow \Delta V = 0$.

Una differenza di potenziale $\Delta V \neq 0$, sposta i livelli di Fermi dei due superconduttori: $\mu_2 - \mu_1 = -2e\Delta V$, dove $e_s = 2e$. Per semplificare la trattazione, assumiamo che i due superconduttori siano dello stesso materiale e abbiano la stessa densità di portatori di supercorrente: $n_{s1} = n_{s2} = n_s$. Se inseriamo $\psi_i = \sqrt{(n_s(t))_i} e^{i\theta_i(t)}$ ($i = 1, 2$) e $(n_s)_1 = (n_s)_2$, nelle equazioni di Schrödinger accoppiate e separiamo la parte immaginaria dalla parte reale,

otteniamo:

$$\begin{cases} i\hbar \left(\dot{\sqrt{n_s}} \right) e^{i\theta_1} - \hbar \dot{\theta}_1 \sqrt{n_s} e^{i\theta_1} = \mu_1 \sqrt{n_s} e^{i\theta_1} + \bar{k} \sqrt{n_s} e^{i\theta_2} \\ i\hbar \left(\dot{\sqrt{n_s}} \right) e^{i\theta_2} - \hbar \dot{\theta}_2 \sqrt{n_s} e^{i\theta_2} = \mu_2 \sqrt{n_s} e^{i\theta_2} + \bar{k} \sqrt{n_s} e^{i\theta_1} \end{cases} \quad (2.7.9)$$

$$\begin{cases} \frac{i\hbar}{2} (\dot{n_s})_1 - \hbar \dot{\theta}_1 n_s = \mu_1 n_s + \bar{k} n_s e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \\ \frac{i\hbar}{2} (\dot{n_s})_2 - \hbar \dot{\theta}_2 n_s = \mu_2 n_s + \bar{k} n_s e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \end{cases} \quad (2.7.10)$$

separando:

$$\text{Re} : \begin{cases} \dot{\theta}_1 = -\frac{\mu_1}{\hbar} - \frac{\bar{k}}{\hbar} \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ \dot{\theta}_2 = -\frac{\mu_2}{\hbar} - \frac{\bar{k}}{\hbar} \cos(\theta_2 - \theta_1) \end{cases} \quad \text{Im} : \begin{cases} (\dot{n_s})_s = \frac{2\bar{k}}{\hbar} n_s \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ (\dot{n_s})_2 = -(\dot{n_s})_1 \end{cases} \quad (2.7.11)$$

dunque:

$$\begin{cases} \dot{n_{s1}} = \frac{2\bar{k}}{\hbar} n_s \sin(\theta_2 - \theta_1) = -\dot{n_{s2}} \\ \hbar (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = -(\mu_2 - \mu_1) = 2e\Delta V. \end{cases} \quad (2.7.12)$$

Consideriamo prima il caso $\Delta V = 0$: la differenza di fase è indipendente dal tempo. In questo caso, $\dot{n_{s1}}$ è anche costante e una corrente continua (DC) fluirà attraverso la giunzione. Poichè la corrente attraverso il contatto è proporzionale a $\dot{n_{s1}}$, possiamo scrivere:

$$I_s = I_c \sin(\theta_2 - \theta_1). \quad (2.7.13)$$

Questo fatto sorprendente, cioè che la corrente fluisca attraverso un contatto isolante senza generare alcuna differenza di potenziale, è chiamato **effetto Josephson DC**. Negli esperimenti si opera, di solito, imponendo una corrente I_s attraverso la giunzione e misurando ΔV : dove $\Delta V = 0$ per $I_s < I_c$, mentre $\Delta V \neq 0$ per $I_s > I_c$. Vedi la figura 2.16.

La corrente critica I_c dipende dalla densità n_s , dall'area di contatto A e dalla costante di accoppiamento k : $I_c \propto n_s \cdot k \cdot A$.

Il motivo per cui è chiamata corrente critica è chiarito dalla figura 2.17, che rappresenta una giunzione Josephson formata da due cavetti di superconduttore separati da un contatto isolante. Finchè la corrente è minore del valore critico I_c , non si osserva sperimentalmente alcuna differenza di potenziale alla giunzione. Incrementando la corrente oltre I_c , la differenza di potenziale balza ad un valore finito, che dipende dalle caratteristiche della giunzione: vi è un passaggio di corrente normale.

Ma nel caso in cui $I > I_c$, Josephson scoprì una seconda conseguenza dell'effetto tunnel della giunzione: una differenza di potenziale tra i due superconduttori significa che le funzioni d'onda diventano dipendenti dal tempo. Integrando la seconda equazione: $\theta_2 - \theta_1 = \frac{2e\Delta V}{\hbar} t + \theta_0 = \omega_j t + \theta_0$; quindi la differenza di fase cresce linearmente nel tempo e si ha $I_s = I_c \sin(\omega_j t + \theta_0) \rightarrow$ **effetto Josephson AC**.

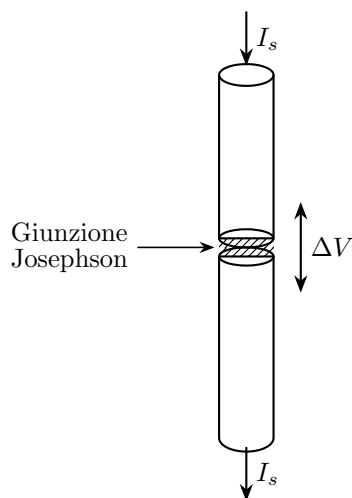


Figura 2.16

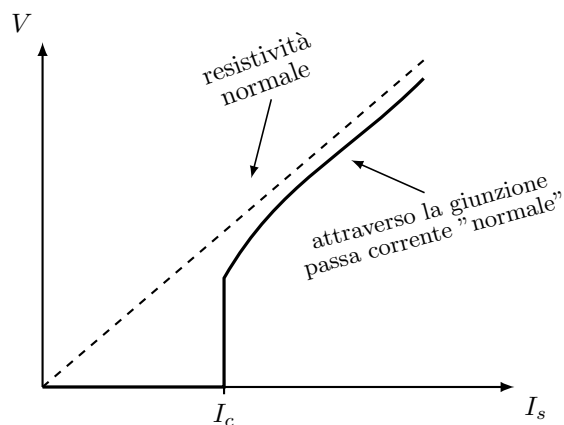


Figura 2.17

La frequenza $\omega_j/(2\pi)$ è molto elevata: ≈ 48 GHz per $\Delta V = 100$ μ V. Questa corrente si sovrappone alla corrente normale e non è disegnata nella figura 2.18. A $T = 0$, in una giunzione ideale, ci si aspetta un comportamento del tipo quello in figura 2.18.

dove ΔE è l'energia necessaria per rompere una coppia di Cooper. Si ha:

- Per $I_s < I_c$, la corrente attraverso la giunzione è una supercorrente che non genera alcuna differenza di potenziale.
- Per $I_s > I_c$, la corrente attraverso la giunzione è di tipo normale: le coppie di Cooper si spezzano.

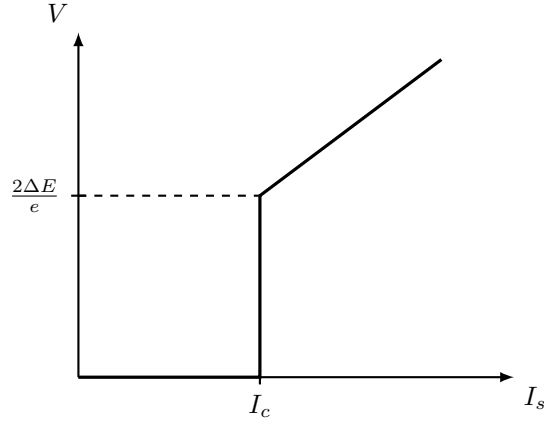


Figura 2.18

2.7.2 Interferenza quantistica

L'effetto Josephson è importante in molte applicazioni pratiche della superconduttività. Uno tra i dispositivi più semplici da realizzare è l'anello SQUID (Superconducting-Quantum-Interference-Device): è semplicemente un anello superconduttore con due giunzioni. Ognuna delle due metà è connessa a un cavo esterno, vedi la figura 2.19.

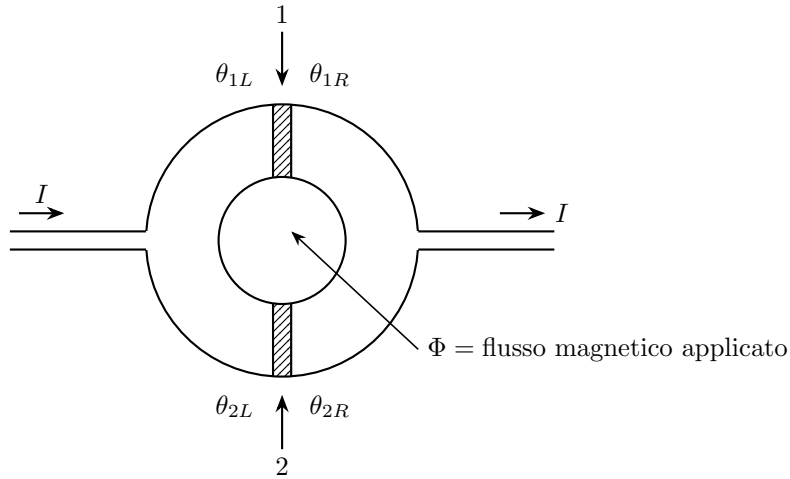


Figura 2.19

La corrente attraverso le due giunzioni è:

$$\begin{cases} I_1 = I_{c1} \sin(\Delta\theta_1) & , \quad \Delta\theta_1 = \theta_{1R} - \theta_{1L} \\ I_2 = I_{c2} \sin(\Delta\theta_2) & , \quad \Delta\theta_2 = \theta_{2R} - \theta_{2L}. \end{cases} \quad (2.7.14)$$

Supponendo che le giunzioni siano identiche, abbiamo:

$$I = I_c [\sin(\Delta\theta_1) + \sin(\Delta\theta_2)] \quad (2.7.15)$$

$$= 2I_c \cos\left(\frac{\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2}{2}\right). \quad (2.7.16)$$

Se le due giunzioni sono perfettamente bilanciate e applichiamo una corrente $I < I_c$, allora ci aspettiamo una differenza di fase identica $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2$ con:

$$\Delta\theta = \sin^{-1}\left(\frac{I}{2I_c}\right) \neq 0. \quad (2.7.17)$$

Questo è vero solo se non vi è campo magnetico all'interno dell'anello; in questo caso la differenza $\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2$ dipende dal flusso magnetico Φ attraverso il dispositivo. Per determinare questa quantità, procediamo come per la quantizzazione del flusso magnetico in un superconduttore toroidale: consideriamo dei cammini all'interno del superconduttore, dove $\vec{B} = 0$ e $\vec{j}_s = 0$ (tenendo a mente $\int_L \vec{j}_s \cdot d\vec{l} = 0$). Facciamo riferimento alla figura 2.20.

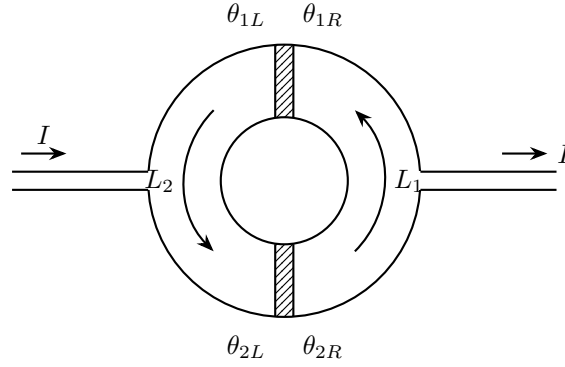


Figura 2.20

Troviamo:

$$\theta_{1R} - \theta_{2R} = \frac{2e}{\hbar} \int_{L_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2.7.18)$$

$$\theta_{2L} - \theta_{1L} = \frac{2e}{\hbar} \int_{L_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2.7.19)$$

sommandole otteniamo (Φ è il flusso totale del campo magnetico, non neces-

sariamente quantizzato; trascuriamo il campo alle giunzioni):

$$\theta_{1R} - \theta_{2R} + \theta_{2L} - \theta_{1L} = \Delta\theta_1 - \Delta\theta_2 \quad (2.7.20)$$

$$= \frac{2e}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2.7.21)$$

$$= \frac{2e}{\hbar} \Phi \quad (2.7.22)$$

$$= 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (2.7.23)$$

Si noti che $\Delta\theta_1$ e $\Delta\theta_2$ sono diversi da zero: il dispositivo ha un comportamento molto diverso da un anello superconduttore. Abbiamo:

$$I = 2I_c \sin\left(\frac{\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2}{2}\right) \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \quad (2.7.24)$$

la corrente critica è:

$$I_c(\Phi) = 2I_c \left| \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \right|. \quad (2.7.25)$$

Vedi l'andamento in figura 2.21.

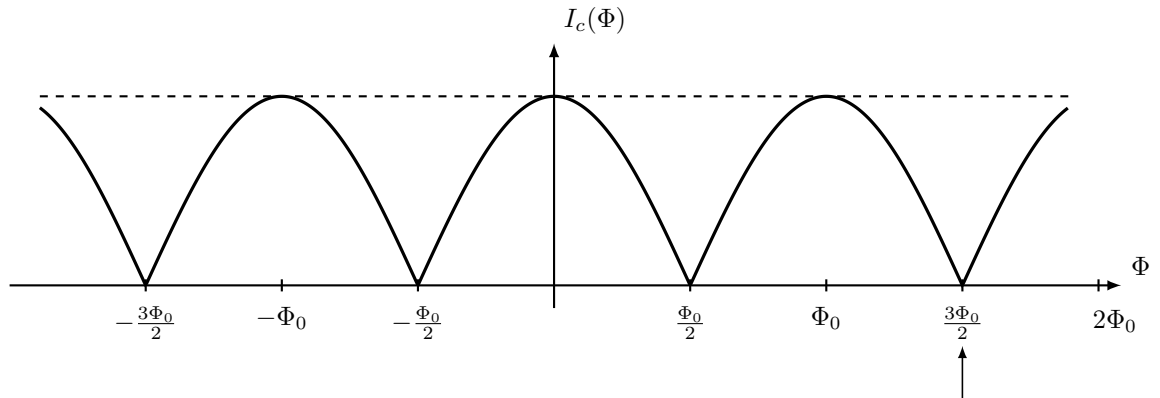


Figura 2.21

Dove $I_c = 0$, una piccolissima corrente I genera una differenza di potenziale ai capi della giunzione. Questo dispositivo permette di misurare piccolissime variazioni di flusso del campo magnetico, con precisioni fino a variazioni del campo magnetico dell'ordine di 10^{-10} T attraverso la misura di differenza di potenziale ai capi delle giunzioni quando $I_c \sim 0$ e $I \neq 0$.

2.8 Il modello di Cooper, teoria BCS

La teoria di LG, sviluppata nel 1950, nonostante sia una teoria fenomenologica, descrive con grande successo molti degli aspetti e proprietà dei

superconduttori. Il grande limite della teoria LG è che non spiega l'origine microscopica della superconduttività. Nel 1957 Bardeen, Cooper e Schrieffer (BCS), proposero una teoria microscopica della superconduttività che prevede quantitativamente molte delle proprietà dei superconduttori "classici". La teoria LG può essere derivata dalla teoria BCS con l'extra bonus che, in modo naturale, $e_s = 2e$, $m^* = m_s = 2m_e$.

Con la scoperta dei superconduttori ad alta temperatura, non è più chiaro se la teoria BCS sia ancora la teoria giusta per tutti i tipi di superconduttore. La questione è ancora aperta, nonostante sia già chiaro che molte delle proprietà dei superconduttori ad alta temperatura sono consistenti con il formalismo BCS.

2.8.1 Coppie di Cooper

Un anno prima della pubblicazione della teoria BCS, Cooper dimostrò che lo studio fondamentale normale di un gas di elettroni è instabile rispetto alla formazione di "stati legati" di coppie di elettroni. "Stati legati" è tra virgolette, perchè la coppia di elettroni non è legata nel modo usuale e la presenza di un "mare" di Fermi è essenziale per l'esistenza di questo stato.

Lo stato è in realtà uno stato a molti elettroni. A $T = 0$, nello stato fondamentale normale, tutti gli orbitali macroscopici degli elettroni in un metallo sono occupati fino a $E < \epsilon_F$, i restanti sono vuoti. L'idea di Cooper è di considerare un mare di Fermi "congelato" più una coppia di elettroni con $E > \epsilon_F$ con potenziale efficace a due corpi attrattivo $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) < 0$.

Cooper pensava a un'interazione molto debole tra i due elettroni $U \sim 0$: in queste condizioni ci si aspetterebbe che l'eccesso di energia cinetica $\Delta E_k = E_{k1} + E_{k2} - 2\epsilon_F > 0$ non possa essere compensato dalla diminuzione di energia potenziale $\Delta E_U < 0$. L'equazione di Schrödinger corrispondente è:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_1 + \Delta_2) + U(r_1, r_2) \right] \psi(r_1, r_2) = (\Delta E + 2\epsilon_F) \psi(r_1, r_2). \quad (2.8.1)$$

La parte della funzione d'onda legata allo spin può essere o nello stato di singoletto o di tripletto; nella maggior parte dei superconduttori le coppie di Cooper corrispondono a stati di singoletto:

$$\psi_{\sigma_1, \sigma_2}^{\text{spin}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (2.8.2)$$

$\psi_{\sigma_1, \sigma_2}^{\text{spin}}$ è antisimmetrica per lo scambio $1 \leftrightarrow 2$; $\psi(r_1, r_2)$ è simmetrica. L'autovalore ΔE è definito relativamente al livello di Fermi $2\epsilon_F$. Separiamo il centro di massa $\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$ dalle coordinate relative $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (avendo $\mu_r = m/2$):

$$\left[-\frac{\hbar^2}{4m} \Delta_R - 2 \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_r \right] \psi(\vec{R}, \vec{r}) + U(\vec{r}) \psi(\vec{R}, \vec{r}) = (\Delta E + 2\epsilon_F) \psi(\vec{R}, \vec{r}) \quad (2.8.3)$$

la funzione d'onda si separa:

$$\psi(\vec{R}, \vec{r}) = \Phi(\vec{R}) \psi(\vec{r}) \quad (2.8.4)$$

con $\Phi(\vec{R}) = e^{i\vec{Q}\cdot\vec{R}}$ e:

$$\left[-2 \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_r + U(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = \left(\Delta E + 2\epsilon_F + \frac{\hbar^2 Q^2}{4m} \right) \psi(\vec{r}). \quad (2.8.5)$$

Per il momento siamo interessati allo stato con $\vec{Q} = 0$; gli stati con $\vec{Q} \neq 0$ sono necessari per descrivere un flusso di corrente stazionario. Supponiamo ora che $\psi(\vec{r})$ sia una sovrapposizione su tutti gli stati con $|\vec{k}| > k_F$:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k > k_F} a(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2.8.6)$$

dove $\sum_{k > k_F}$ indica la somma su tutti i numeri d'onda $|\vec{k}| > k_F$; sostituendo nell'equazione di Schrödinger, dove $\epsilon_k = \hbar k^2/(2m)$:

$$\sum_{k > k_F} \left[2(\epsilon_k - \epsilon_F) - \Delta E \right] a(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \sum_{k > k_F} U(\vec{r}) a(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0 \quad (2.8.7)$$

moltiplichiamo per $\frac{1}{V} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}}$ ed integriamo su r :

$$\left[2(\epsilon_{k'} - \epsilon_F) - \Delta E \right] a(k') + \sum_{k > k_F} a(k) \int \frac{d^3}{V} U(\vec{r}) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} = 0 \quad (2.8.8)$$

$$\Rightarrow \left[2(\epsilon_{k'} - \epsilon_F) - \Delta E \right] a(k') + \sum_{k > k_F} a(k) U(\vec{k}, \vec{k}') = 0 \quad (2.8.9)$$

per procedere si assume che:

$$U(\vec{k}, \vec{k}') = \begin{cases} -V_0 \\ 0 \end{cases} \quad (2.8.10)$$

$$0 \leq \epsilon_k - \epsilon_F \leq \hbar\omega_D, \quad 0 \leq \epsilon_{k'} - \epsilon_F \leq \hbar\omega_D \quad (2.8.11)$$

dove $\hbar\omega_D$ è un cutoff che formalizza l'assunzione che solo gli elettroni in una banda attorno al livello di Fermi contribuiscono allo scattering: un processo $(\vec{k}_i, \vec{k}'_i) \rightarrow (\vec{k}_f, \vec{k}'_f)$ è possibile solo se $|\vec{k}_i|, |\vec{k}'_i|, |\vec{k}_f|, |\vec{k}'_f|$ sono maggiori di k_F . $\hbar\omega_D$ è l'**energia di Debye**, cioè l'energia massima di un fonone. Questo riflette l'idea che l'interazione tra elettroni emerga attraverso lo scambio di fononi (reticolari). Troviamo:

$$\sum_{k > k_F} a(k) U(\vec{k}, \vec{k}') = \begin{cases} -V_0 \sum'_{k > k_F} a(k) \\ 0 \end{cases}, \quad \text{se } 0 \leq \epsilon_{k'} - \epsilon_F \leq \hbar\omega_D \quad (2.8.12)$$

dove $\sum'$ indica la sommatoria ristretta a $0 \leq \epsilon_k - \epsilon_F \leq \hbar\omega_D$. Si ha:

$$\left[2(\epsilon_{k'} - \epsilon_F) - \Delta E\right] - V_0 \sum'_{k > k_F} a(k) = 0 \quad (2.8.13)$$

$$\Rightarrow a(k') = V_0 \frac{\sum'_{k > k_F} a(k)}{2(\epsilon_{k'} - \epsilon_F) - \Delta E} \quad (2.8.14)$$

sommando su k' , per eliminare $\sum'_{k > k_F} a(k)$, si trova:

$$\frac{1}{V_0} = \sum'_{k > k_F} \frac{1}{2(\epsilon_k - \epsilon_F) - \Delta E} \quad (2.8.15)$$

questa somma può essere trasformata in un integrale se introduciamo la densità degli stati $D(\epsilon_k)$:

$$1 = V_0 \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \hbar\omega_D} d\epsilon \frac{D(\epsilon)}{2(\epsilon - \epsilon_F) - \Delta E} \quad (2.8.16)$$

se $\hbar\omega_D \ll 1$:

$$D(\epsilon) \sim D(\epsilon_F) \quad (2.8.17)$$

$$1 \sim V_0 D(\epsilon_F) \frac{1}{2} \log \left(2(\epsilon - \epsilon_F) - \Delta E \right) \Big|_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \hbar\omega_D} = \frac{1}{2} V_0 D(\epsilon_F) \log \left(\frac{\Delta E - 2\hbar\omega_D}{\Delta E} \right) \quad (2.8.18)$$

risolviamo per ΔE :

$$1 - \frac{2\hbar\omega_D}{\Delta E} = \exp \left\{ \frac{2}{V_0 D(\epsilon_F)} \right\} \Rightarrow \Delta E = - \frac{2\hbar\omega_D}{e^{\frac{2}{V_0 D(\epsilon_F)}} - 1} \quad (2.8.19)$$

nel limite di interazione debole $V_0 D(\epsilon_F) \ll 1$, l'esponenziale domina a denominatore e si ha:

$$\Delta E \sim -2\hbar\omega_D \exp \left\{ -\frac{2}{V_0 D(\epsilon_F)} \right\} \quad (2.8.20)$$

$$\Rightarrow \Delta E + 2\epsilon_F \sim 2\epsilon_F - 2\hbar\omega_D \exp \left\{ -\frac{2}{V_0 D(\epsilon_F)} \right\} < 2\epsilon_F \quad (2.8.21)$$

Questo corrisponde al risultato importantissimo ottenuto da Cooper. C'è uno stato legato con energia negativa, rispetto alla superficie di Fermi costituito da elettroni con $|\vec{k}| > k_F$, cioè con energia cinetica superiore a ϵ_F . Lo stato composto da elettroni accoppiati in questo modo, avrà sempre un'energia minore dello stato fondamentale anche per V_0 arbitrariamente piccolo. Questo è il motivo per cui si dice che lo stato fondamentale "normale" è instabile rispetto alla formazione di coppie di Cooper.

Il punto $V_0 = 0$ corrisponde a una singolarità essenziale; questo risultato non può essere ottenuto con metodi perturbativi sviluppando in potenze di V_0 . Questo fatto ha rallentato molto lo sviluppo della teoria.

L'espressione ottenuta per ΔE mette in evidenza una gerarchia di energie $\epsilon_F \gg \hbar\omega_D \gg |\Delta E|$; se assumiamo che $|\Delta E| \sim k_B T_c$, tale gerarchia spiega come mai la transizione a superconduttore avviene a temperature così basse rispetto alla temperatura di Debye: $T_D = \hbar\omega_D/k_B$, con $T_D \sim 428$ K per l'alluminio e 105 K per il piombo.

Se una coppia di Cooper abbassa l'energia di ΔE , chiaramente molte coppie abbasserebbero l'energia del sistema di molto e si potrebbe pensare che tutti gli elettroni debbano condensare in coppie di Cooper. Se questo accadesse, l'intero stato fondamentale normale collasserebbe.

2.8.2 L'effetto isotopico

L'idea che l'attrazione tra elettroni sia conseguenza dell'interazione elettrone-fonone è confermata dall'effetto isotopico $T_c \propto M^{-\alpha}$, dove M è la massa dello ione nel reticolo cristallino. Si misura T_c cambiando solo il tipo di isotopo del materiale. Nei metalli puri come il mercurio e il piombo si trova sperimentalmente $\alpha \sim 0.5$. La teoria delle vibrazioni nei cristalli prevede che le frequenze di vibrazione $\omega(q)$ siano proporzionali a $\sqrt{K/M}$, dove K è la costante elastica del potenziale classico d'interazione fra tutte le coppie (adiacenti) di ioni che compongono il reticolo. Poichè:

$$k_B T_c \approx |\Delta E| \propto \hbar\omega_D \propto \sqrt{\frac{K}{M}}. \quad (2.8.22)$$

Si trova $T_c \propto M^{-1/2}$ che è il valore osservato sperimentalmente nel piombo e nel mercurio. Fu Fröhlich che nel 1950 suggerì che fossero importanti le interazioni elettrone-reticolo: al passaggio di un elettrone, il reticolo tende a deformarsi creando un eccesso di carica locale, come in figura 2.22, che può attrarre un altro elettrone (interazione ritardata). Gli elettroni interagiscono a distanza attraverso il reticolo; interazione attrattiva causata dallo scambio di fononi. Nei superconduttori ad alta temperatura l'effetto isotopico non si verifica. Questo potrebbe indicare che non sono i fononi i responsabili del gap di energia.

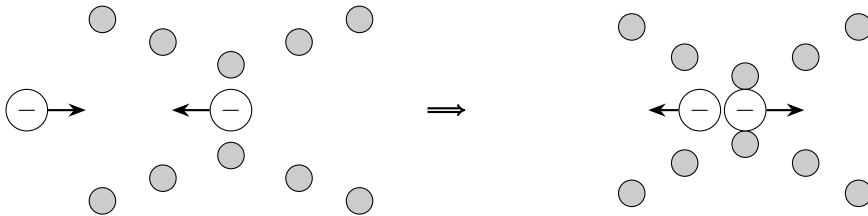


Figura 2.22

2.8.3 Lo stato fondamentale BCS e la seconda quantizzazione (fermioni)

Abbiamo dimostrato che il mare di Fermi è instabile per la formazione di coppie di Cooper, quando l'interazione effettiva tra due elettroni è attrattiva. Ci si aspetta una condensazione di coppie fino a quando non si sia raggiunto uno stato di equilibrio. Questo avviene dopo che lo stato di Fermi è cambiato così tanto che l'aggiunta di un'altra coppia di Cooper non è più associata ad una diminuzione dell'energia.

Evidentemente non è facile studiare uno stato interagente così complicato a meno di un apparato matematico avanzato non venga introdotto: la seconda quantizzazione e la funzione d'onda BCS. Per introdurre il formalismo della seconda quantizzazione per fermioni (elettroni) si procede in modo del tutto simile al caso bosonico sostituendo però parentesi di commutazione con parentesi di anticommutazione:

$$[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a} \longrightarrow \{\hat{a}, \hat{b}\} = \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}. \quad (2.8.23)$$

Questo permette di passare dalla statistica di Bose-Einstein alla statistica di Fermi-Dirac. Conviene lavorare, fin dall'inizio, nello spazio degli impulsi introducendo coppie di operatori di creazione e di distruzione:

- $\hat{C}_{k\sigma}^\dagger$ ($\sigma = \uparrow, \downarrow$): operatore di creazione di un fermione con numero d'onda $\vec{k}$ e terza componente di spin σ .
- $\hat{C}_{k\sigma}$ ($\sigma = \uparrow, \downarrow$): operatore di distruzione di un fermione con numero d'onda $\vec{k}$ e terza componente di spin σ .

Indicheremo con $|\Omega\rangle$ lo stato di vuoto corrispondente alla totale assenza di elettroni:

$$\hat{C}_{k\sigma} |\Omega\rangle = 0. \quad (2.8.24)$$

Gli operatori $\hat{C}$ e $\hat{C}^\dagger$ soddisfano le seguenti regole di commutazione:

$$\{\hat{C}_{k\sigma}^\dagger, \hat{C}_{k'\sigma'}\} = \hat{C}_{k\sigma}^\dagger \hat{C}_{k'\sigma'} + \hat{C}_{k'\sigma'} \hat{C}_{k\sigma}^\dagger = \delta_{k,k'} \delta_{\sigma,\sigma'} \quad (2.8.25)$$

$$\{\hat{C}_{k\sigma}^\dagger, \hat{C}_{k'\sigma'}^\dagger\} = \{\hat{C}_{k\sigma}, \hat{C}_{k'\sigma'}\} = 0. \quad (2.8.26)$$

Applicando le stringhe di operatori di creazione $\hat{C}^\dagger |\Omega\rangle$ si creano stati a molti elettroni:

$$\hat{C}_{k\sigma}^\dagger |\Omega\rangle = |k\sigma\rangle \longleftrightarrow |1_{k\sigma}\rangle. \quad (2.8.27)$$

Gli stati a N fermioni sono automaticamente antisimmetrici per lo scambio di particelle. Infatti:

$$\hat{C}_{k\sigma}^\dagger \hat{C}_{k'\sigma'}^\dagger |\Omega\rangle = |1_{k\sigma}, 1_{k'\sigma'}\rangle \quad (2.8.28)$$

$$\hat{C}_{k'\sigma'}^\dagger \hat{C}_{k\sigma}^\dagger |\Omega\rangle = |1_{k'\sigma'}, 1_{k\sigma}\rangle = -\hat{C}_{k\sigma}^\dagger \hat{C}_{k'\sigma'}^\dagger |\Omega\rangle \quad (2.8.29)$$

$$\implies |1_{k\sigma}, 1_{k'\sigma'}\rangle = -|1_{k'\sigma'}, 1_{k\sigma}\rangle \quad (2.8.30)$$

se $(k, \sigma) = (k', \sigma')$, allora $|2_{k\sigma}\rangle = -|2_{k\sigma}\rangle$ e dunque $|2_{k\sigma}\rangle = 0$, o equivalentemente:

$$\left(\hat{C}_{k\sigma}^\dagger\right)^2 = \left(\hat{C}_{k\sigma}\right)^2 = 0 \quad (2.8.31)$$

questa proprietà corrisponde al principio di esclusione di Pauli.

L'operatore $\hat{N}_{k\sigma} = \hat{C}_{k\sigma}^\dagger \hat{C}_{k\sigma}$ è l'operatore "numero di elettroni" con numero d'onda $\vec{k}$ e terza componente di spin σ . Valgono infatti le seguenti regole di commutazione:

$$\left[\hat{N}_{k\sigma}, \hat{C}_{k\sigma}^\dagger\right] = \hat{C}_{k\sigma}^\dagger \hat{C}_{k\sigma} \hat{C}_{k\sigma}^\dagger - \hat{C}_{k\sigma}^\dagger \hat{C}_{k\sigma}^\dagger \hat{C}_{k\sigma} \quad (2.8.32)$$

$$= \hat{N}_{k\sigma} \hat{C}_{k\sigma}^\dagger \quad (2.8.33)$$

$$= -\hat{C}_{k\sigma}^\dagger \hat{C}_{k\sigma}^\dagger \hat{C}_{k\sigma} + \hat{C}_{k\sigma}^\dagger \quad (2.8.34)$$

$$\implies \hat{N}_{k\sigma} \hat{C}_{k\sigma}^\dagger = \hat{C}_{k\sigma}^\dagger (\hat{N}_{k\sigma} + 1) \quad (2.8.35)$$

e anche:

$$\left[\hat{N}_{k\sigma}, \hat{C}_{k\sigma}\right] = \hat{C}_{k\sigma}^\dagger \hat{C}_{k\sigma} \hat{C}_{k\sigma} - \hat{C}_{k\sigma} \hat{C}_{k\sigma}^\dagger \hat{C}_{k\sigma} \quad (2.8.36)$$

$$= \hat{C}_{k\sigma} \hat{C}_{k\sigma} \hat{C}_{k\sigma}^\dagger - \hat{C}_{k\sigma} \quad (2.8.37)$$

$$\implies \hat{N}_{k\sigma} \hat{C}_{k\sigma} = \hat{C}_{k\sigma} (\hat{N}_{k\sigma} - 1). \quad (2.8.38)$$

Se applichiamo $\hat{N}_{k\sigma}$ su uno stato generico $|S\rangle$, allora:

$$\hat{N}_{k\sigma} |S\rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } |S\rangle = |\dots, 0_{k\sigma}, \dots\rangle \\ 1 & \text{se } |S\rangle = |\dots, 1_{k\sigma}, \dots\rangle \end{cases} \longrightarrow \left(\hat{N}_{k\sigma}\right)^2 = \hat{N}_{k\sigma}. \quad (2.8.39)$$

L'operatore "numero totale" di elettroni è:

$$\hat{N} = \sum_{k\sigma} \hat{N}_{k\sigma}. \quad (2.8.40)$$

In meccanica quantistica non relativistica per fermioni, il formalismo della seconda quantizzazione permette di evitare l'introduzione degli ingombranti determinanti di Slater. A fissato numero di particelle, i due approcci sono però perfettamente equivalenti.

La funzione d'onda per la coppia di Cooper è:

$$\psi_{tot} = \psi_{\sigma_1, \sigma_2}^{spin} \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \right) \psi(r_1, r_2) \quad (2.8.41)$$

$$\psi(r_1, r_2) = N \sum_{k > k_F} a(k) e^{ik(r_1 - r_2)} \quad (2.8.42)$$

nello spazio degli impulsi, con il formalismo della seconda quantizzazione:

$$N \sum_{k > k_F} a(k) |1_{k\uparrow}, 1_{-k\downarrow}\rangle_F = N \sum_{k > k_F} a(k) \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger |F\rangle \quad (2.8.43)$$

(non sono elettroni isolati). Conviene quindi introdurre l'operatore di creazione di coppie di Cooper:

$$\hat{P}_k^\dagger = \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger, \quad \hat{P}_k = \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow} \quad (2.8.44)$$

sebbene siano operatori composti da due operatori di tipo fermionico non sono totalmente equivalenti ad operatori bosonici. Valgono le seguenti proprietà di commutazione:

- Per prima:

$$[\hat{P}_k^\dagger, \hat{P}_{k'}^\dagger] = [\hat{P}_k, \hat{P}_{k'}] = 0. \quad (2.8.45)$$

- Il principio di esclusione di Pauli:

$$\hat{P}_k^\dagger \hat{P}_k^\dagger = \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \quad (2.8.46)$$

$$= -\hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \quad (2.8.47)$$

$$= 0 \quad (2.8.48)$$

$$\Rightarrow (\hat{P}_k^\dagger)^2 = 0. \quad (2.8.49)$$

- Come ultima abbiamo:

$$[\hat{P}_k, \hat{P}_k^\dagger] = \hat{P}_k \hat{P}_k^\dagger \quad (2.8.50)$$

$$= \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger - \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow}. \quad (2.8.51)$$

Possiamo sostituire le espressioni:

$$\hat{C}_{k\uparrow} \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger = 1 - \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{k\uparrow} \quad (2.8.52)$$

$$\hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow} = 1 - \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \quad (2.8.53)$$

ottenendo:

$$[\hat{P}_k, \hat{P}_k^\dagger] = \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger - \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{k\uparrow} - \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{k\uparrow} \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger + \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \hat{C}_{k\uparrow} \quad (2.8.54)$$

$$= 1 - \hat{N}_{-k\downarrow} - \hat{N}_{k\uparrow} - \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{k\uparrow} \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger + \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \hat{C}_{k\uparrow} \quad (2.8.55)$$

$$= 1 - \hat{N}_{-k\downarrow} - \hat{N}_{k\uparrow} \quad (2.8.56)$$

$$\neq 1. \quad (2.8.57)$$

Quindi $\hat{P}_k$ e $\hat{P}_k^\dagger$ non sono operatori canonicamente coniugati. Se agiamo con quel commutatore su $|\Omega\rangle$, allora abbiamo:

$$[\hat{P}_k, \hat{P}_k^\dagger] |\Omega\rangle = |\Omega\rangle \quad (2.8.58)$$

$$\hat{P}_k \hat{P}_k^\dagger |\Omega\rangle = |\Omega\rangle. \quad (2.8.59)$$

Il passo successivo è quello di costruire lo stato fondamentale $|\psi_{BCS}\rangle$ che descrive il superconduttore a $T = 0$ in presenza di un condensato di coppie di Cooper. In analogia con i condensati BEC Schrieffer propose come stato fondamentale lo stato "coerente":

$$|\psi_{BCS}\rangle = \overline{N} \prod_k e^{\alpha_k \hat{P}_k^\dagger} |\Omega\rangle \quad , \quad (\alpha_k \in \mathbb{C}, \alpha_{-k} = \alpha_k) \quad (2.8.60)$$

dove $\overline{N}$ è una costante di normalizzazione complessa; poichè $\left(\hat{P}_k^\dagger\right)^2 = 0$:

$$|\psi_{BCS}\rangle = \overline{N} \prod_k \left(1 + \alpha_k \hat{P}_k^\dagger\right) |\Omega\rangle. \quad (2.8.61)$$

I parametri $\{\alpha_k\}$ saranno fissati in modo da minimizzare la (grand) energia dell'hamiltoniana BCS. Determiniamo prima la costante di normalizzazione $\overline{N}$, sapendo che $\langle\Omega|\Omega\rangle = 1$, in modo che:

$$\langle\psi_{BCS}|\psi_{BCS}\rangle = 1 \quad (2.8.62)$$

usiamo la proprietà:

$$\langle\Omega|\hat{P}_k\hat{P}_{k'}^\dagger|\Omega\rangle = 0 \quad \text{se } k \neq k' \quad (2.8.63)$$

$$\langle\Omega|\hat{P}_k\hat{P}_{k'}^\dagger|\Omega\rangle = \delta_{k,k'} \quad \text{altrimenti} \quad (2.8.64)$$

e:

$$\langle\Omega|\hat{P}|\Omega\rangle = \langle\Omega|\hat{P}^\dagger|\Omega\rangle = 0 \quad (2.8.65)$$

in modo che:

$$1 = |\overline{N}|^2 \prod_{k,k'} \langle\Omega| \left(1 + \alpha_k^* \hat{P}_k\right) \left(1 + \alpha_{k'} \hat{P}_{k'}^\dagger\right) |\Omega\rangle \quad (2.8.66)$$

$$= |\overline{N}|^2 \prod_{k,k'} \left(\langle\Omega|\Omega\rangle + \langle\Omega| \alpha_k^* \alpha_{k'} \hat{P}_k \hat{P}_{k'}^\dagger |\Omega\rangle \right) \quad (2.8.67)$$

$$= |\overline{N}|^2 \prod_{k,k'} \left(1 + \alpha_k^* \alpha_{k'} \langle\Omega| \hat{P}_k \hat{P}_{k'}^\dagger |\Omega\rangle \right) \quad (2.8.68)$$

$$= |\overline{N}|^2 \prod_{k,k'} \langle\Omega| \left(1 + \alpha_k^* \hat{P}_k\right) \left(1 + \alpha_k \hat{P}_k^\dagger\right) |\Omega\rangle \quad (2.8.69)$$

$$= |\overline{N}|^2 \prod_{k,k'} \langle\Omega| \left(1 + |\alpha_k|^2 \hat{P}_k \hat{P}_k^\dagger + \alpha_k^* \hat{P}_k + \alpha_k \hat{P}_k^\dagger\right) |\Omega\rangle \quad (2.8.70)$$

$$= |\overline{N}|^2 \prod_{k,k'} \langle\Omega| 1 + |\alpha_k|^2 \left(1 - \hat{N}_{-k\downarrow} - \hat{N}_{k\uparrow} + \hat{P}_k^\dagger \hat{P}_k\right) |\Omega\rangle \quad (2.8.71)$$

$$= |\overline{N}|^2 \prod_{k,k'} (1 + |\alpha_k|^2) \quad (2.8.72)$$

$$\Rightarrow |\overline{N}| = \prod_k \frac{1}{\sqrt{1 + |\alpha_k|^2}} \quad (2.8.73)$$

quindi abbiamo che:

$$|\psi_{BCS}\rangle = \prod_k \left(\frac{e^{i\theta_k}}{\sqrt{1+|\alpha_k|^2}} + \frac{\alpha_k e^{i\theta_k}}{\sqrt{1+|\alpha_k|^2}} \hat{P}_k^\dagger \right) |\Omega\rangle \quad (2.8.74)$$

$$= \prod_k \left(u_k^* + v_k^* \hat{P}_k^\dagger \right) |\Omega\rangle \quad (2.8.75)$$

dove abbiamo una possibile fase overall e le condizioni:

$$|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1 \quad (2.8.76)$$

$$|u_k|^2 = |u_{-k}|^2 \quad (2.8.77)$$

$$|v_k|^2 = |v_{-k}|^2. \quad (2.8.78)$$

Lo stato $|\psi_{BCS}\rangle$ è stato definito rispetto al vuoto $|\Omega\rangle$, possiamo risolverlo partendo dallo stato di Fermi $|F\rangle$; usiamo le proprietà:

$$\hat{P}_k \hat{P}_k^\dagger |\Omega\rangle = \left(\hat{P}_k^\dagger \hat{P}_k + 1 - \hat{N}_{-k\downarrow} - \hat{N}_{k\uparrow} \right) |\Omega\rangle = |\Omega\rangle \quad (2.8.79)$$

per riscrivere:

$$|\psi_{BCS}\rangle = \prod_k \left(u_k^* + v_k^* \hat{P}_k^\dagger \right) \prod_{k < k_F} \hat{P}_k \hat{P}_k^\dagger |\Omega\rangle \quad (2.8.80)$$

$$= \prod_k \left(u_k^* + v_k^* \hat{P}_k^\dagger \right) \prod_{k < k_F} \hat{P}_k |F\rangle \quad (2.8.81)$$

$$= \prod_{k > k_F} \left(u_k^* + v_k^* \hat{P}_k^\dagger \right) \prod_{k < k_F} \left(\left(u_k^* + v_k^* \hat{P}_k^\dagger \right) \hat{P}_k \right) |F\rangle \quad (2.8.82)$$

$$= \prod_{k > k_F} \left(u_k^* + v_k^* \hat{P}_k^\dagger \right) \prod_{k < k_F} \left(u_k^* \hat{P}_k + v_k^* \right) |F\rangle \quad (2.8.83)$$

in cui in (2.8.82) abbiamo utilizzato il fatto che $\hat{P}_k^\dagger \hat{P}_k |F\rangle = |F\rangle$. Il termine $v_k^* \hat{P}_k^\dagger$ rappresentano le coppie di Cooper e $u_k^* \hat{P}_k$ le lacune di Cooper. Vedi la figura 2.23.

Vi è una (quasi) dualità buca/particella, tipica dei sistemi fermionici: tolgo particelle sotto il livello di Fermi, la densità diminuisce in questa regione e le porto sopra il livello di Fermi. La distribuzione di Fermi viene cambiata nell'intorno del livello di Fermi; si notano i due cutoff, uno sopra e uno sotto il livello di Fermi.

2.8.4 Hamiltoniana

La nostra hamiltoniana di partenza ha formalmente la stessa forma dell'hamiltoniana GP con interazione deltiforme introdotta per descrivere i gas diluiti a bassa temperatura. A parte, naturalmente, la sostituzione di operatori

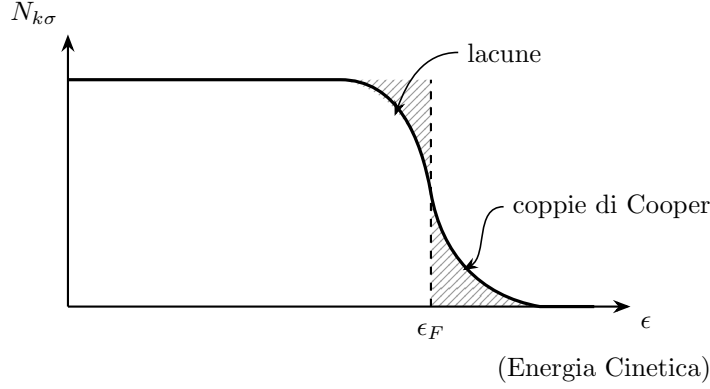


Figura 2.23

bosonici con operatori fermionici:

$$\hat{H} = \sum'_{k,\sigma} \epsilon_k \hat{C}_{k,\sigma}^\dagger \hat{C}_{k,\sigma} - |g| \sum_{\substack{k_1, k_2, q \\ \sigma_1, \sigma_2}} \hat{C}_{k_1+q, \sigma_1}^\dagger \hat{C}_{k_2-q, \sigma_2}^\dagger \hat{C}_{k_1, \sigma_1} \hat{C}_{k_2, \sigma_2} \quad (2.8.84)$$

dove il primo è il termine cinetico; $\sum'$ indica la sommatoria ristretta alla regione:

$$\epsilon_F - \hbar\omega_D \leq \epsilon_k \leq \epsilon_F + \hbar\omega_D. \quad (2.8.85)$$

Se ora assumiamo che l'interazione rilevante per la superconduttività coinvolga solo le coppie di Cooper:

$$\hat{H} = \sum'_{k,\sigma} \epsilon_k \hat{C}_{k,\sigma}^\dagger \hat{C}_{k,\sigma} - |g| \sum_{k,k'} \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k'\uparrow} \quad (2.8.86)$$

$$= \sum'_{k,\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{N}_{k\sigma} - |g| \sum_{k,k'} \hat{P}_k^\dagger \hat{P}_{k'} \quad (2.8.87)$$

questa hamiltoniana non si riesce ancora a diagonalizzare in modo esatto. Useremo il fatto che la funzione d'onda $|\psi_{BCS}\rangle$ contiene i parametri u_k^* e v_k^* che possono essere trattati con il metodo variazionale. Fisseremo u_k^* e v_k^* richiedendo che l'energia $E = \langle \psi_{BCS} | \hat{H} | \psi_{BCS} \rangle$ sia minima con il vincolo che $N = \langle \psi_{BCS} | \hat{N} | \psi_{BCS} \rangle$ sia fissata e il vincolo $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$ sia soddisfatto. Consideriamo prima il termine cinetico:

$$\hat{T} = \sum'_{k\sigma} \epsilon_k \hat{N}_{k\sigma} \quad (2.8.88)$$

$$= \sum_k \epsilon_k \left(\hat{N}_{k\uparrow} + \hat{N}_{-k\downarrow} \right) \quad (2.8.89)$$

sapendo che $\hat{N}_{k\uparrow}^\dagger = \hat{N}_{k\uparrow}$, abbiamo:

$$\langle \hat{N}_{k\uparrow} \rangle = \langle \psi_{BCS} | \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{k\uparrow} | \psi_{BCS} \rangle \quad (2.8.90)$$

$$= \langle \Omega | \left(u_k + v_k \hat{P}_k \right) \hat{N}_{k\uparrow} \left(u_k^* + v_k^* \hat{P}_k^\dagger \right) | \Omega \rangle \quad (2.8.91)$$

$$= |u_k|^2 \langle \Omega | \hat{N}_{k\uparrow} | \Omega \rangle + |v_k|^2 \langle \Omega | \hat{P}_k \hat{N}_{k\uparrow} \hat{P}_k^\dagger | \Omega \rangle + v_k u_k^* \langle \Omega | \hat{P}_k \hat{N}_{k\uparrow} | \Omega \rangle +$$

$$+ u_k v_k^* \langle \Omega | \hat{N}_{k\uparrow} \hat{P}_k^\dagger | \Omega \rangle \quad (2.8.92)$$

$$= |v_k|^2 \langle \Omega | \hat{P}_k \hat{N}_{k\uparrow} \hat{P}_k^\dagger | \Omega \rangle \quad (2.8.93)$$

possiamo utilizzare la proprietà $[\hat{N}_{k\uparrow}, \hat{P}_k^\dagger] = \hat{P}_k^\dagger$:

$$\langle \hat{N}_{k\uparrow} \rangle_{BCS} = |v_k|^2 \langle \Omega | \hat{P}_k \hat{P}_k^\dagger \hat{N}_{k\uparrow} | \Omega \rangle + |v_k|^2 \langle \Omega | \hat{P}_k \hat{P}_k^\dagger | \Omega \rangle \quad (2.8.94)$$

$$= |v_k|^2 \quad (2.8.95)$$

e in modo simile si ottiene $\langle \hat{N}_{-k\downarrow} \rangle_{BCS} = |v_k|^2$. Quindi:

$$N = \langle \hat{N} \rangle_{BCS} \quad (2.8.96)$$

$$= 2 \sum_k' |v_k|^2 \quad (2.8.97)$$

$$= \sum_k' (|v_k|^2 - |u_k|^2 + 1) \langle \sum_{k\sigma} \epsilon_k \hat{C}_{k\sigma}^\dagger \hat{C}_{k\sigma} \rangle_{BCS} = 2 \sum_k' \epsilon_k |v_k|^2 \quad (2.8.98)$$

$$= \sum_k' \epsilon_k (|v_k|^2 - |u_k|^2 + 1). \quad (2.8.99)$$

Per quanto riguarda la parte di interazione:

$$\langle \hat{P}_k^\dagger \hat{P}_{k'} \rangle_{BCS} = \langle \Omega | \left(u_{k'} + v_{k'} \hat{P}_{k'} \right) \left(u_k + v_k \hat{P}_k \right) \left(\hat{P}_k^\dagger \hat{P}_{k'} \right) \times$$

$$\times \left(u_{k'}^* + v_{k'}^* \hat{P}_{k'}^\dagger \right) \left(u_k^* + v_k^* \hat{P}_k^\dagger \right) | \Omega \rangle \quad (2.8.100)$$

$$= \langle \Omega | \hat{P}_k \hat{P}_k^\dagger \hat{P}_{k'} \hat{P}_{k'}^\dagger | \Omega \rangle v_k v_{k'}^* u_{k'} u_k^* \quad (2.8.101)$$

$$= v_k v_{k'}^* u_{k'} u_k^*. \quad (2.8.102)$$

Il valor medio di $\hat{H}$ espresso in funzione dei parametri v_k e u_k è:

$$E = 2 \sum_k' \epsilon_k |v_k|^2 - |g| \sum_{k,k'}' v_k v_{k'}^* u_{k'} u_k^* \quad (2.8.103)$$

$$= \sum_k' \epsilon_k (|v_k|^2 - |u_k|^2 + 1) - |g| \sum_{k,k'}' v_k v_{k'}^* u_{k'} u_k^* \quad (2.8.104)$$

le condizioni di minimo sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u_k^*} \left[E - \mu N + \sum_k' E_k (|u_k|^2 + |v_k|^2 - 1) \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v_k^*} \left[E - \mu N + \sum_k' E_k (|u_k|^2 + |v_k|^2 - 1) \right] = 0 \end{cases} \quad [|u_k|^2 + |v_k|^2 \equiv 1] \quad (2.8.105)$$

dove μ è il moltiplicatore di Lagrange di N e E_k è il moltiplicatore di Lagrange dei vincoli $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$. Abbiamo:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial N}{\partial u_k^*} = -\mu u_k & , & \frac{\partial \Sigma}{\partial u_k^*} = E_k u_k \\ \frac{\partial E}{\partial u_k^*} = -\epsilon_k u_k - |g| v_k \sum_{k'}' v_{k'}^* u_{k'} = -\epsilon_k u_k - \Delta v_k \end{cases} \quad (2.8.106)$$

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial N}{\partial v_k^*} = \mu v_k & , & \frac{\partial \Sigma}{\partial v_k^*} = E_k v_k \\ \frac{\partial E}{\partial v_k^*} = \epsilon_k v_k - |g| u_k \sum_{k'}' v_{k'}^* u_{k'} = \epsilon_k v_k - \Delta^* u_k \end{cases} \quad (2.8.107)$$

dove abbiamo introdotto il parametro di gap BCS Δ :

$$\Delta = |g| \sum_k' v_k^* u_k \quad , \quad \Delta^* = |g| \sum_k' v_k u_k^* \quad (2.8.108)$$

troviamo:

$$\begin{cases} (\epsilon_k - \mu) u_k + \Delta v_k = E_k u_k \\ \Delta^* u_k - (\epsilon_k - \mu) v_k = E_k v_k. \end{cases} \quad (2.8.109)$$

Nella teoria BCS, il parametro Δ ha un importante significato fisico, infatti:

$$\langle \hat{P}_k \rangle_{BCS} \equiv \langle \Omega | (u_k + v_k \hat{P}_k) \hat{P}_k (u_k^* + v_k^* \hat{P}_k^\dagger) | \Omega \rangle \quad (2.8.110)$$

$$= u_k v_k^* \langle \Omega | \hat{P}_k \hat{P}_k^\dagger | \Omega \rangle \quad (2.8.111)$$

$$= u_k v_k^* \quad (2.8.112)$$

quindi:

$$\Delta = |g| \sum_k' \langle \hat{P}_k \rangle_{BCS} \quad (2.8.113)$$

Δ è legato al valore di aspettazione delle coppie di Cooper sullo stato fondamentale $|\psi_{BCS}\rangle$. Per trovare Δ bisogna risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_k - \mu & \Delta \\ \Delta^* & -(\epsilon_k - \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \quad (2.8.114)$$

$$M(\Delta) \equiv \begin{pmatrix} \epsilon_k - \mu & \Delta \\ \Delta^* & -(\epsilon_k - \mu) \end{pmatrix} \quad (2.8.115)$$

che ha soluzione non banale se e solo se:

$$\det\{M - \mathbb{1}E_k\} = \det \begin{pmatrix} \epsilon_k - \mu - E_k & \Delta \\ \Delta^* & -(\epsilon_k - \mu) - E_k \end{pmatrix} \quad (2.8.116)$$

$$= 0 \quad (2.8.117)$$

$$\implies E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2 - |\Delta|^2 = 0 \quad (2.8.118)$$

troviamo quindi due autovalori per $M(\Delta)$:

$$\begin{cases} E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + |\Delta|^2} \\ E'_k = -E_k. \end{cases} \quad (2.8.119)$$

Vedremo che E_k corrisponde all'energia di un quasi-elettrone, mentre $E'_k = -E_k$ all'energia di una (quasi)lacuna. Partendo da:

$$\begin{cases} v_k^*((\epsilon_k - \mu)u_k + \Delta v_k) = E_k u_k v_k^* \\ u_k(\Delta u_k^* - (\epsilon_k - \mu)v_k^*) = E_k v_k^* u_k \end{cases} \quad (2.8.120)$$

e sommandole otteniamo:

$$u_k v_k^* = \frac{\Delta}{2E_k} \quad (2.8.121)$$

e anche:

$$\begin{cases} (\epsilon_k - \mu) \frac{\Delta}{2E_k} + \Delta |v_k|^2 = \frac{\Delta}{2} \\ \Delta |u_k|^2 - (\epsilon_k - \mu) \frac{\Delta}{2E_k} = \frac{\Delta}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} |v_k|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k - \mu}{E_k} \right) \\ |u_k|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_k - \mu}{E_k} \right) \end{cases} \quad (2.8.122)$$

Consideriamo per prima l'equazione (2.8.121) con:

$$\Delta = |g| \sum_k' u_k v_k^* = |g| \sum_k' \frac{\Delta}{2E_k} \implies 1 = \frac{|g|}{2} \sum_k' \frac{1}{[(\epsilon_k - \mu)^2 + |\Delta|^2]^{1/2}} \quad (2.8.123)$$

questa equazione è centrale nella teoria BCS, perchè determina il parametro di gap $|\Delta|$ a $T = 0$. Per valutare questa quantità operiamo la sostituzione:

$$\sum_k' \longrightarrow D(\epsilon_k) \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\epsilon = 2D(\epsilon_F) \int_0^{\hbar\omega_D} d\epsilon \quad (2.8.124)$$

dove abbiamo $\epsilon = \epsilon_k - \mu$. Si ottiene:

$$1 = \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{(\epsilon^2 + |\Delta|^2)^{1/2}} \quad (2.8.125)$$

con $\lambda = |g|D(\epsilon_F)$. Poichè:

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{2} \log a^2 + \log \left(b + \sqrt{a^2 + b^2} \right) \quad (2.8.126)$$

troviamo:

$$1 = \lambda \left[-\frac{1}{2} \log |\Delta|^2 + \log \left(\hbar\omega_D + \sqrt{|\Delta|^2 + (\hbar\omega_D)^2} \right) \right] \quad (2.8.127)$$

$$\Rightarrow 1 \sim \lambda \log \left(\frac{2\hbar\omega_D}{|\Delta|} \right) \quad (2.8.128)$$

$$\Rightarrow |\Delta| \sim 2\hbar\omega_D e^{-1/\lambda} \quad (2.8.129)$$

questa è la famosa **formula BCS per il parametro di gap Δ a zero temperatura**.

2.8.5 Autovettori delle matrici $M(\Delta)$ e $M(-\Delta)$

La matrice:

$$M(\Delta) \equiv \begin{pmatrix} \epsilon_k - \mu & \Delta \\ \Delta^* & -(\epsilon_k - \mu) \end{pmatrix} \quad (2.8.130)$$

possiede due autovalori distinti E_k e $E'_k = -E_k$, gli autovettori corrispondenti sono, rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_k^* \\ -u_k^* \end{pmatrix}. \quad (2.8.131)$$

Infatti, prendendo il complesso coniugato del sistema (2.8.109):

$$\begin{cases} (\epsilon_k - \mu) u_k^* + \Delta^* v_k^* = E_k u_k^* \\ \Delta u_k^* - (\epsilon_k - \mu) v_k^* = E_k v_k^* \end{cases} \quad (2.8.132)$$

scambiando le due relazioni:

$$\begin{cases} -(\epsilon_k - \mu) v_k^* + \Delta u_k^* = E_k v_k^* \\ \Delta^* v_k^* + (\epsilon_k - \mu) u_k^* = E_k u_k^* \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (\epsilon_k - \mu) (-v_k^*) + \Delta u_k^* = E_k (-v_k^*) \\ \Delta^* (-v_k^*) - (\epsilon_k - \mu) u_k^* = -E_k (u_k^*) \end{cases}. \quad (2.8.133)$$

Dalla relazione (2.8.121) si vede anche che gli autovettori di $M(-\Delta)$ sono:

$$\begin{pmatrix} u_k \\ -v_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_k^* \\ u_k^* \end{pmatrix}. \quad (2.8.134)$$

2.8.6 Il gap di energia Δ e le quasi-particelle

La funzione d'onda BCS è un esempio brillante di stato fondamentale per un sistema altamente correlato. Come sarà chiarito nel seguito, lo stato BCS è lo stato fondamentale in approssimazione di campo medio. Nel limite in cui $\lambda \rightarrow 0$, la soluzione tende a quella esatta. Avendo ottenuto $|\psi_{BCS}\rangle$ con metodi variazionali, il passo successivo è quello di fare delle predizioni sulle proprietà fisiche dei superconduttori. Discuteremo l'estensione del modello

agli stati eccitati e a temperatura finita. Il metodo utilizzato per trovare gli stati eccitati è simile a quello usato nei superfluidi, cioè attraverso la trasformazione di Bogoliubov.

L'idea è quella di considerare $|\psi_{BCS}\rangle$ come stato di riferimento e di considerare eccitazioni a bassa energia relativamente a questo stato. Il metodo è basato sull'approssimazione:

$$\hat{P}_k^\dagger \hat{P}_{k'} \approx \langle \hat{P}_k^\dagger \rangle_{BCS} \hat{P}_{k'} + \hat{P}_k^\dagger \langle \hat{P}_{k'} \rangle_{BCS} \quad (2.8.135)$$

otteniamo così l'hamiltoniana efficace:

$$\hat{H} = \sum_{k\sigma} (\epsilon_k - \mu) \hat{C}_{k\sigma}^\dagger \hat{C}_{k\sigma} - |g| \sum_{kk'} \left(\langle \hat{P}_k^\dagger \rangle_{BCS} \hat{P}_{k'} + \hat{P}_k^\dagger \langle \hat{P}_{k'} \rangle_{BCS} \right). \quad (2.8.136)$$

Poiché:

$$\Delta = |g| \sum_k \langle \hat{P}_k \rangle_{BCS} \quad , \quad \Delta^* = |g| \sum_k \langle \hat{P}_k^\dagger \rangle_{BCS} \quad (2.8.137)$$

possiamo scrivere:

$$\hat{H} = \sum_{k\sigma} (\epsilon_k - \mu) \hat{C}_{k\sigma}^\dagger \hat{C}_{k\sigma} - \sum_k \left(\Delta^* \left(\hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow} \right) + \Delta \left(\hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \right) \right) \quad (2.8.138)$$

questa hamiltoniana è quadratica negli operatori $\hat{C}$ e può essere diagonalizzata facilmente. Il modo più semplice per procedere è di scrivere:

$$\hat{H} = \sum_k' \begin{pmatrix} \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger & \hat{C}_{-k\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_k - \mu & -\Delta \\ -\Delta^* & -(\epsilon_k - \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{C}_{k\uparrow} \\ \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.8.139)$$

$$M(-\Delta) = \begin{pmatrix} \epsilon_k - \mu & -\Delta \\ -\Delta^* & -(\epsilon_k - \mu) \end{pmatrix}. \quad (2.8.140)$$

Gli autovalori di $M(-\Delta)$ e $M(\Delta)$ sono gli stessi:

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + |\Delta|^2} \quad , \quad E'_k = -E_k \quad , \quad E_k \quad (2.8.141)$$

è la **legge di dispersione di Bogoliubov per le eccitazioni sullo stato BCS**. Queste eccitazioni sono chiamate "quasi-elettroni" o "coppie di Cooper spezzate".

Conoscendo gli autovettori di $M(-\Delta)$ è immediato riscrivere $\hat{H}$ in forma diagonale. Introduciamo la trasformazione unitaria U che diagonalizza

$M(-\Delta)$:

$$U^\dagger M(-\Delta) U = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix} \quad (2.8.142)$$

$$U = \begin{pmatrix} u_k & v_k^* \\ -v_k & u_k^* \end{pmatrix} \quad (2.8.143)$$

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} u_k^* & -v_k^* \\ v_k & u_k \end{pmatrix} \quad (2.8.144)$$

$$U U^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1} \quad (2.8.145)$$

$$\hat{H} = \sum_k' \begin{pmatrix} \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger & \hat{C}_{-k\downarrow} \end{pmatrix} U U^\dagger M(-\Delta) U U^\dagger \begin{pmatrix} \hat{C}_{k\uparrow} \\ \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.8.146)$$

possiamo quindi introdurre gli operatori fermionici $\hat{b}$ e $\hat{b}^\dagger$ che diagonalizzano l'hamiltoniana:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_{k\uparrow} \\ \hat{b}_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = U^\dagger \begin{pmatrix} \hat{C}_{k\uparrow} \\ \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.8.147)$$

o esplicitamente:

$$\begin{cases} \hat{b}_{k\uparrow} = u_k^* \hat{C}_{k\uparrow} - v_k^* \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \\ \hat{b}_{-k\downarrow}^\dagger = v_k \hat{C}_{k\uparrow} + u_k \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \end{cases} \quad (2.8.148)$$

e l'hamiltoniana diventa:

$$\hat{H} = \sum_k' \left(E_k \hat{b}_{k\uparrow}^\dagger \hat{b}_{k\uparrow} - E_k \hat{b}_{-k\downarrow} \hat{b}_{-k\downarrow}^\dagger \right) \quad (2.8.149)$$

$$= - \sum_k' E_k + \sum_k' E_k \left(\hat{b}_{k\uparrow}^\dagger \hat{b}_{k\uparrow} + \hat{b}_{-k\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-k\downarrow} \right) \quad (2.8.150)$$

o semplicemente, riportando l'energia del vuoto a zero:

$$\hat{H} = \sum_k' E_k \left(\hat{b}_{k\uparrow}^\dagger \hat{b}_{k\uparrow} + \hat{b}_{-k\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-k\downarrow} \right). \quad (2.8.151)$$

Qual è il significato fisico di questi operatori? Si noti che la trasformazione è unitaria, e questo fa sì che le relazioni di commutazione rimangano invariate:

$$\left\{ \hat{b}_{k\sigma}, \hat{b}_{k'\sigma'}^\dagger \right\} = \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'} \quad (2.8.152)$$

$$\left\{ \hat{b}_{k\sigma}^\dagger, \hat{b}_{k'\sigma'}^\dagger \right\} = 0 \quad (2.8.153)$$

$$\left\{ \hat{b}_{k\sigma}, \hat{b}_{k'\sigma'} \right\} = 0. \quad (2.8.154)$$

Inoltre le particelle create e annichilate da questi operatori non sono presenti nello stato $|\psi_{BCS}\rangle$:

$$\begin{cases} \hat{b}_{k\uparrow} |\psi_{BCS}\rangle = 0 \\ \hat{b}_{-k\downarrow} |\psi_{BCS}\rangle = 0 \end{cases} \quad (2.8.155)$$

infatti:

$$\begin{aligned} (u_k^* \hat{C}_{k\uparrow} - v_k^* \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger) (u_k^* + v_k^* \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger) |\Omega\rangle &= ((u_k^*)^2 \hat{C}_{k\uparrow} - (v_k^*)^2 \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger) |\Omega\rangle + \\ &+ (u_k^* v_k^* \hat{C}_{k\uparrow} \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger - v_k^* u_k^* \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger) |\Omega\rangle \end{aligned} \quad (2.8.156)$$

$$= u_k^* v_k^* (\hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger - \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger) |\Omega\rangle \quad (2.8.157)$$

$$= 0. \quad (2.8.158)$$

Lo stato $|\psi_{BCS}\rangle$ è lo stato di vuoto per queste pseudoparticelle. Gli stati eccitati corrispondono a stati a 1, 2, ... pseudoparticelle $\hat{b}_{k\uparrow}^\dagger |\psi_{BCS}\rangle$. Nel caso di un gas di Fermi normale, possiamo eccitare il sistema facendo transire una particella dallo stato a energia negativa (rispetto a $\mu = \epsilon_F$):

$$E_k^{(n)} = \epsilon_k - \mu \quad (2.8.159)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} (k - k_F)(k + k_F) \quad (2.8.160)$$

$$\sim \frac{\hbar^2 k_F}{m} (k - k_F) < 0 \quad (2.8.161)$$

a uno stato con energia positiva $E_{k'}^{(n)} = \epsilon_{k'} - \mu > 0$ con un dispendio di energia $\Delta E^{(n)} = E_{k'}^{(n)} - E_k^{(n)}$ piccolo a piacere ($k \sim k'$). Non c'è gap energetico. Nel caso BCS, la legge di dispersione è:

$$E_k = \pm \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + |\Delta|^2} \quad (2.8.162)$$

vedi la figura 2.24.

Dalla figura 2.24 possiamo notare:

1. Energia di un (quasi)elettrone con $k < k_F$.
2. Energia di un (quasi)elettrone con $k > k_F$.
3. Energia di una (quasi)lacuna con $k < k_F$.
4. Energia di una (quasi)lacuna con $k > k_F$.

Per un (quasi)elettrone, $v_{gruppo} > 0$; per una (quasi)lacuna, $v_{gruppo} < 0$. Quindi per creare una buca (spezzare una coppia di Cooper) e una pseudoparticella con $E_k > 0$, si ha un dispendio minimo di energia pari a: $2|\Delta| \leftrightarrow$

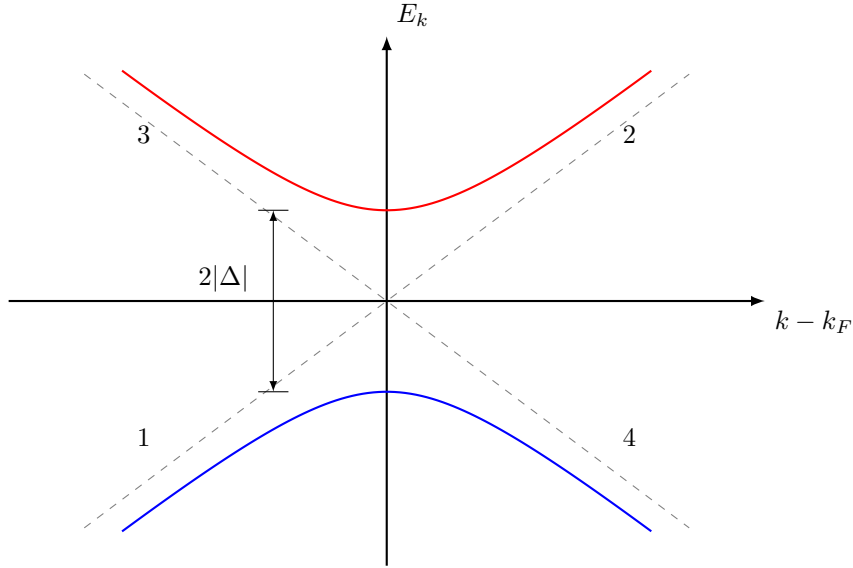


Figura 2.24

gap di energia BCS $\leftrightarrow$ valore di aspettazione delle coppie di Cooper. (Per la conservazione della quantità di moto $\vec{K}_{q-e} = -\vec{K}_{q-l} \rightarrow K_{q-e} = K_{q-l}$). Vediamo ora l'andamento di:

$$|v_k|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k - \mu}{E_k} \right) \quad , \quad |u_k|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_k - \mu}{E_k} \right) \quad (2.8.163)$$

raffigurato in figura 2.25.

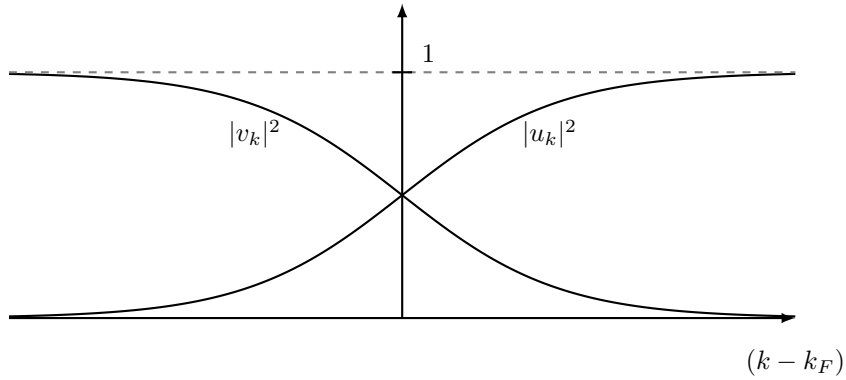


Figura 2.25

In cui possiamo notare:

- Per $k - k_F \gg 0$: l'operatore di distruzione di un elettrone è:

$$\hat{b}_{k\uparrow} = u_k^* \hat{C}_{k\uparrow} - v_k^* \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \sim u_k^* \hat{C}_{k\uparrow} \quad (2.8.164)$$

l'operatore di creazione di un elettrone è:

$$\hat{b}_{-k\downarrow}^\dagger = v_k \hat{C}_{k\uparrow} - u_k \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \sim u_k^* \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \quad (2.8.165)$$

per questo motivo le pseudoparticelle sono chiamate "pseudoelettroni".

- Per $k - k_F \ll 0$: l'operatore di distruzione di una lacuna è:

$$\hat{b}_{k\uparrow} \sim -v_k^* \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \quad (2.8.166)$$

l'operatore di creazione di una lacuna è:

$$\hat{b}_{-k\downarrow}^\dagger \sim v_k \hat{C}_{k\uparrow}. \quad (2.8.167)$$

Gli operatori $\hat{b}^\dagger$ e $\hat{b}$ sono quindi un mix di operatori di creazione di elettroni e di lacune: gli stati che creano non sono nè elettroni nè buche, ma una loro sovrapposizione quantistica. Quindi i quasieletroni non hanno una carica definita. Infatti, u_k e v_k hanno un'interpretazione probabilistica. Dato lo stato ad una pseudoparticella:

$$\hat{b}_{k\uparrow}^\dagger |\psi_{BCS}\rangle = u_k \hat{C}_{k\uparrow}^\dagger |\psi_{BCS}\rangle - v_k \hat{C}_{-k\downarrow} |\psi_{BCS}\rangle \quad (2.8.168)$$

$|u_k|^2$ è la probabilità di trovare un elettrone se si effettua una misura di carica, $|v_k|^2$ è la probabilità di trovare una buca (e^+). Si ha ancora una interessante analogia con la fisica delle particelle elementari: i mesoni K^0 e $\bar{K}^0$ (kaoni) sono formati da una coppia di quark $d\bar{s}$ e $s\bar{d}$. Essi sono autostati dell'interazione forte (sono distinti) e sono prodotti attraverso l'urto di protoni su un target, ma non sono autostati dell'interazione debole che non conserva il numero quantico di stranezza. Mentre si propagano si hanno oscillazioni $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$.

2.8.7 Il gap di energia a temperatura finita

A temperatura finita T , le quasiparticelle hanno un numero di occupazione dato da:

$$\langle \hat{b}_{k\uparrow}^\dagger \hat{b}_{k\uparrow} \rangle_T = \frac{1}{e^{\beta E_k} + 1} = f(E_k) \quad , \quad \langle \hat{b}_{-k\downarrow} \hat{b}_{-k\downarrow}^\dagger \rangle_T = 1 - f(E_k) \quad (2.8.169)$$

dove il primo rappresenta la distribuzione di Fermi-Dirac. Poichè:

$$\begin{pmatrix} \hat{C}_{k\uparrow} \\ \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \hat{b}_{k\uparrow} \\ \hat{b}_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k & v_k^* \\ -v_k & u_k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_{k\uparrow} \\ \hat{b}_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.8.170)$$

allora:

$$\begin{cases} \hat{C}_{k\uparrow} = u_k \hat{b}_{k\uparrow} + v_k^* \hat{b}_{-k\downarrow}^\dagger \\ \hat{C}_{-k\downarrow}^\dagger = -v_k \hat{b}_{k\uparrow} + u_k^* \hat{b}_{-k\downarrow}^\dagger \end{cases} \longrightarrow \hat{C}_{-k\downarrow} = -v_k^* \hat{b}_{k\uparrow}^\dagger + u_k \hat{b}_{-k\downarrow} \quad (2.8.171)$$

e possiamo calcolare:

$$\langle \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow} \rangle_T = \langle \left(-v_k^* \hat{b}_{k\uparrow}^\dagger + u_k \hat{b}_{-k\downarrow} \right) \left(u_k \hat{b}_{k\uparrow} + v_k^* \hat{b}_{-k\downarrow}^\dagger \right) \rangle_T \quad (2.8.172)$$

$$= \langle -v_k^* u_k \hat{b}_{k\uparrow}^\dagger \hat{b}_{k\uparrow} + u_k v_k^* \hat{b}_{-k\downarrow} \hat{b}_{-k\downarrow}^\dagger \rangle_T \quad (2.8.173)$$

$$= v_k^* u_k (-f(E_k) + 1 - f(E_k)) \quad (2.8.174)$$

$$= v_k^* u_k (1 - 2f(E_k)) \quad (2.8.175)$$

quindi:

$$\Delta(T) = |g| \sum_k \langle \hat{C}_{-k\downarrow} \hat{C}_{k\uparrow} \rangle_T \quad (2.8.176)$$

$$= |g| \sum_k u_k v_k^* (1 - 2f(E_k)) \quad (2.8.177)$$

che generalizza il risultato per $T = 0$. Poichè, in prima approssimazione:

$$u_k v_k^* = \frac{\Delta}{2E_k(\Delta)} \quad (2.8.178)$$

con:

$$\Delta = |g| \sum_k' \frac{\Delta}{2E_k} \left(1 - \frac{2}{e^{\beta E_k} + 1} \right) \quad (2.8.179)$$

$$= |g| \sum_k' \frac{\Delta}{2E_k} \frac{e^{\beta \frac{E_k}{2}} - e^{-\beta \frac{E_k}{2}}}{e^{\beta \frac{E_k}{2}} + e^{-\beta \frac{E_k}{2}}} \quad (2.8.180)$$

$$= |g| \sum_k' \frac{\Delta}{2E_k} \tanh \left(\frac{E_k}{2k_B T} \right). \quad (2.8.181)$$

Procedendo in modo simile al caso $T = 0$:

$$1 = D(\epsilon_F) \frac{|g|}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{1}{E(\xi)} \tanh \left(\frac{E(\xi)}{2k_B T} \right) \quad (2.8.182)$$

$$1 = \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{E(\xi)} \tanh \left(\frac{E(\xi)}{2k_B T} \right) \quad (2.8.183)$$

dove abbiamo $\xi = \epsilon - \mu$, $E(\xi) = \sqrt{\xi^2 + |\Delta|^2}$ e $\lambda = |g|D(\epsilon_F)$. Abbiamo ottenuto quindi l'equazione per il gap $\Delta(T)$ nella teoria BCS.

2.8.8 Temperatura critica

Una stima della temperatura critica T_c si ottiene sostituendo $T = T_c$, $\Delta(T_c) = 0$ e $E(\xi) = \xi$ in (2.8.183):

$$1 = \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\xi} \tanh \left(\frac{\xi}{2k_B T_c} \right) \quad (2.8.184)$$

$$= \lambda \int_0^{\beta_c \frac{\hbar\omega_D}{2}} \frac{dz}{z} \tanh(z) \quad (2.8.185)$$

per dare una stima dell'integrale $\int_0^y \frac{\tanh z}{z} dz$ (per $y \gg 0$), integriamo per parti:

$$\int_0^y \frac{\tanh z}{z} dz = \log y \tanh y - \int_0^y \frac{\log y}{\cosh^2(z)} dz \quad (2.8.186)$$

$$\sim \log y - \int_0^\infty \frac{\log z}{\cosh^2(z)} dz \quad (2.8.187)$$

$$= \log y - \left(-\gamma + \log\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \quad (2.8.188)$$

$$= \log\left(y e^\gamma \frac{4}{\pi}\right) \quad (2.8.189)$$

dove $\gamma = 0.577 \dots$ è la costante di Eulero-Mascheroni. Quindi:

$$\int_0^{\beta_c \frac{\hbar\omega_D}{2}} \frac{\tanh z}{z} dz \sim \log(A \hbar\omega_D \beta_c) \quad (2.8.190)$$

$$\sim \log\left(\frac{1.13 \hbar\omega_D}{k_B T_c}\right) \quad (2.8.191)$$

in cui abbiamo:

$$A = \frac{2e^\gamma}{\pi} \longrightarrow k_B T_c \sim 1.13 \hbar\omega_D e^{-1/\lambda}. \quad (2.8.192)$$

Prendendo il rapporto con $\Delta(0) \sim 2\hbar\omega_D e^{-1/\lambda}$:

$$\frac{\Delta(0)}{k_B T_c} \sim \frac{2}{1.13} = 1.76 \quad (2.8.193)$$

che dà una stima di $\Delta(0)/k_B T_c$ indipendente dal cutoff $\hbar\omega_D$. $\Delta(0)$ e T_c possono essere misurati sperimentalmente in modo indipendente e il rapporto $\Delta(0)/k_B T_c$ misurato varia da 1.6 a 2.3 nei superconduttori "tradizionali" con una distribuzione che si addensa molto all'interno del valore teorico (2.8.193).

2.8.9 Dipendenza del gap Δ dalla temperatura

Dall'integrale:

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + |\Delta|^2}} \tanh\left(\frac{1}{2}\beta\sqrt{\xi^2 + |\Delta|^2}\right) = 1 \quad (2.8.194)$$

$\Delta(T)$ può essere determinato numericamente. Per i superconduttori con $k_B T_c \ll \hbar\omega_D$, $|\Delta(T)|/|\Delta(0)|$ è una funzione universale di T/T_c che decresce monotonicamente da 1 a $T = 0$ fino a zero per $T = T_c$. Abbiamo:

- Vicino a $T = 0$, la variazione è molto lenta, poichè $e^{-\Delta/(k_B T)} \sim 0$ e la tangente iperbolica ~ 1 : $\Delta(T)$ è essenzialmente costante fino a quando un grande numero di pseudoparticelle è stato eccitato termicamente.

- Per $T \sim T_c$, $\Delta(T)$ scende a zero con tangente verticale $|\Delta(T)| \propto \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}$ ($T \sim T_c$). Il comportamento critico di tipo radice quadrata è una caratteristica di tutte le teorie di campo medio.

Vedi le figure 2.26 e 2.27.

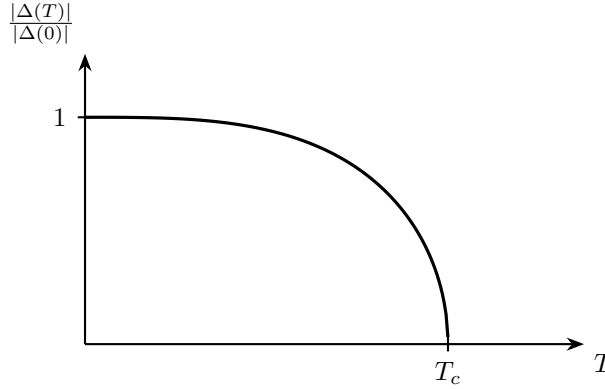


Figura 2.26

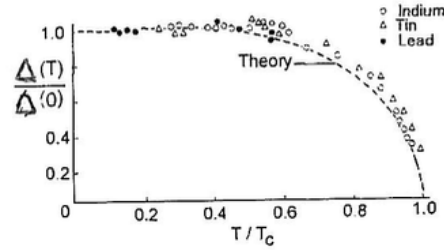


Figure 1 0.7. Variation of the measured energy gap $\epsilon_g(T)$ with temperature.

Figura 2.27

2.8.10 Densità degli stati

Le pseudoparticelle BCS sono fermioni creati dagli operatori $\hat{b}_{k\sigma}^\dagger$ e $\hat{b}_{k\sigma}$. Tali operatori sono legati a $\hat{C}_{k\sigma}^\dagger$ e $\hat{C}_{k\sigma}$ attraverso una trasformazione unitaria. Possiamo quindi ottenere la densità degli stati D_{BCS} nell'intorno dell'energia di Fermi come:

$$D_{BCS}(E) dE \sim D(\epsilon_F) d(\epsilon - \mu) \quad (2.8.195)$$

$$= D(\epsilon_F) \frac{d(\epsilon - \mu)}{dE} dE \quad (2.8.196)$$

con:

$$E(\epsilon - \mu) = \begin{cases} -\sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + |\Delta|^2} & \text{per } \epsilon - \mu < 0 \\ \sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + |\Delta|^2} & \text{per } \epsilon - \mu > 0 \end{cases} \quad (2.8.197)$$

e invertendo queste relazioni:

$$\epsilon(E) - \mu = \begin{cases} -\sqrt{E^2 - |\Delta|^2} & \text{per } E < -|\Delta| \\ 0 & \text{per } -|\Delta| \leq E \leq |\Delta| \\ \sqrt{E^2 - |\Delta|^2} & \text{per } E > |\Delta| \end{cases} \quad (2.8.198)$$

si vedano le figure 2.28.

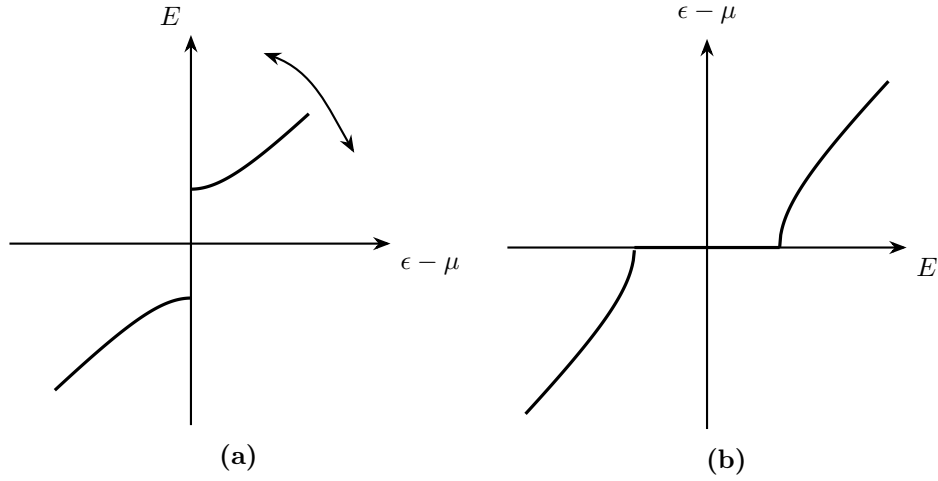


Figura 2.28

Stiamo considerando il ramo 1 e 2 dei quasielettroni nella figura 2.24. Si ottiene:

$$\frac{d(\epsilon - \mu)}{dE} = \begin{cases} -\frac{E}{\sqrt{E^2 - |\Delta|^2}} & \text{per } E < -|\Delta| \\ 0 & \text{per } -|\Delta| \leq E \leq |\Delta| \\ \frac{E}{\sqrt{E^2 - |\Delta|^2}} & \text{per } E > |\Delta|. \end{cases} \quad (2.8.199)$$

Vedi la figura 2.29.

2.8.11 Andreev scattering

Un'ulteriore conferma dell'esistenza delle coppie di Cooper e del gap di energia si ottiene attraverso lo scattering di elettroni nel passaggio tra un metallo normale e un superconduttore.

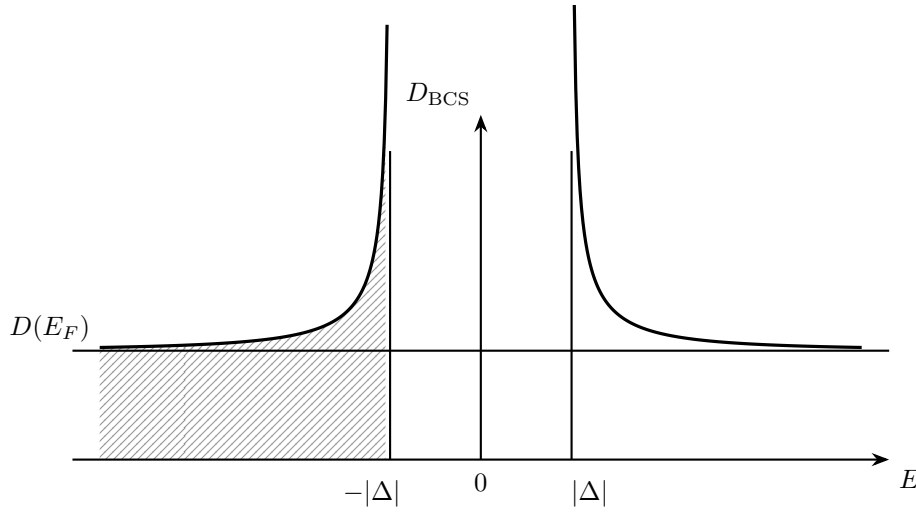


Figura 2.29

Consideriamo un elettrone che si muove nel metallo (n) con impulso $\vec{k}$, energia ϵ_k e la terza componente di spin σ . Se l'energia ϵ_k è minore di $|\Delta| + \epsilon_F$, allora l'elettrone non dovrebbe potersi propagare nel superconduttore (assenza di stati accessibili) e dovrebbe quindi essere riflesso all'interfaccia n/s . Vedi le figure 2.30 e 2.31.

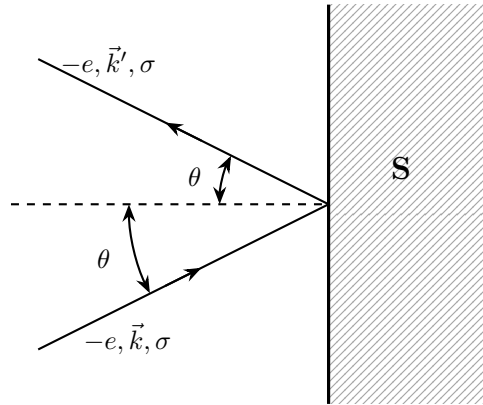


Figura 2.30

Il superconduttore si comporta come un isolante. Nell'urto si conserva la carica, l'energia e lo spin, mentre l'impulso non si conserva. Andreev (nel 1964) osservò che nei superconduttori un altro processo è possibile: l'elettrone può combinarsi con un altro elettrone nel metallo con impulso $-\vec{k}$ e spin $-\sigma$ per formare una coppia di Cooper e propagarsi nel superconduttore sottoforma di supercorrente. Si veda la figura 2.32. Nel conduttore normale rimane però una lacuna con carica $+e$, momento $\vec{k}$, spin σ e velocità di

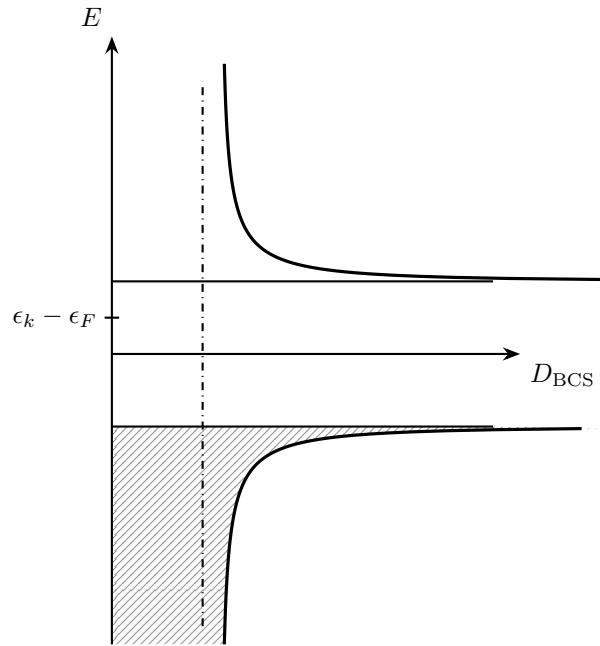


Figura 2.31

gruppo:

$$-\frac{\partial}{\partial \vec{k}} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right) = -\frac{\hbar^2 \vec{k}}{m}. \quad (2.8.200)$$

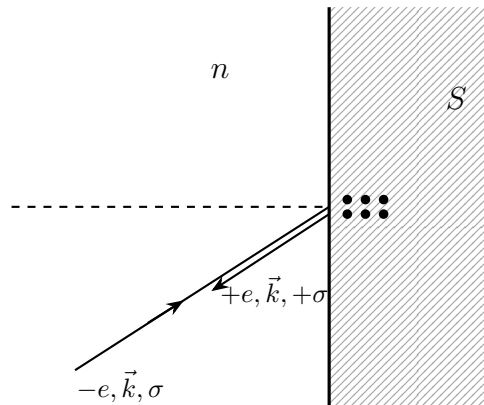


Figura 2.32

Un'evidenza diretta di questo tipo di scattering si può ottenere iniettando una corrente all'interfaccia con un superconduttore. Poichè la lacuna che torna indietro trasporta carica $+e$, la corrente che passa nel superconduttore

per effetto tunnel risulta essere il doppio rispetto a quella ottenibile per $\Delta = 0$ o per $\epsilon_k > |\Delta| + \epsilon_F$.

2.8.12 La corrente

La corrente trasportata dallo stato $|\psi_{BCS}\rangle$ è zero. Infatti:

$$\hat{j}_s = \sum_k \frac{\hbar \vec{k}}{m} [\hat{N}_{k\uparrow} - \hat{N}_{-k\downarrow}] \quad (2.8.201)$$

$$\hat{j}_s = \langle \psi_{BCS} | \hat{j}_s | \psi_{BCS} \rangle \quad (2.8.202)$$

$$= \sum_k \frac{\hbar \vec{k}}{m} (\langle \hat{N}_{k\uparrow} \rangle_{BCS} - \langle \hat{N}_{-k\downarrow} \rangle_{BCS}) \quad (2.8.203)$$

$$= \sum_k \frac{\hbar \vec{k}}{m} (|v_k|^2 - |v_{-k}|^2) \quad (2.8.204)$$

$$= 0. \quad (2.8.205)$$

Bisognerebbe dimostrare che il gap di energia esiste anche quando le coppie di Cooper si muovono collettivamente:

$$|\psi_{BCS}\rangle \longrightarrow |\psi_{BCS}, \vec{Q}\rangle \quad (2.8.206)$$

dove:

$$|\psi_{BCS}, \vec{Q}\rangle = \prod_k \left(u_k^* + v_k^* \hat{C}_{k+Q,\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k+Q,\downarrow}^\dagger \right) |\Omega\rangle \quad (2.8.207)$$

questo stato corrisponde ad una soluzione consistente di campo medio dell'hamiltoniana BCS con:

$$\Delta Q = |g| \sum_k \langle \hat{C}_{-k+Q,\downarrow} \hat{C}_{k+Q,\uparrow} \rangle_{BCS} \quad (2.8.208)$$

$$\Delta^* Q = |g| \sum_k \langle \hat{C}_{k+Q,\uparrow}^\dagger \hat{C}_{-k+Q,\downarrow}^\dagger \rangle_{BCS} \quad (2.8.209)$$

l'hamiltoniana risultante può essere diagonalizzata e le eccitazioni di quasi-elettroni sopra questo stato possiedono una legge di dispersione "deformata", ma vi è ancora un gap di energia:

$$\Delta E \sim 2|\Delta_0| - \frac{2\hbar^2 Q k_F}{m}. \quad (2.8.210)$$

Capitolo 3

Effetto Hall quantistico

3.1 Introduzione

L'effetto Hall classico fu scoperto dal fisico americano Edwin H. Hall nel 1879. Consideriamo un nastro conduttore lungo e sottile percorso da una corrente I , come quello in figura 3.1. Se immergiamo questo sistema in un campo magnetico perpendicolare al nastro, gli elettroni vengono sottoposti alla forza di Lorentz che tende a farli deviare verso uno dei due bordi. L'effetto di questo movimento è la comparsa di una differenza di potenziale trasversale V_H (o imponendo V si ha I). V_H è legata alla resistenza di Hall:

$$E_H = \frac{V_H}{I} \quad (3.1.1)$$

che, come vedremo, è proporzionale al campo magnetico che l'ha prodotta. Questo fenomeno ha avuto notevoli applicazioni pratiche e in particolare è stato sfruttato per costruire sonde in grado di misurare campi magnetici attraverso semplici misure di tensione elettrica.

Nel 1980, poco più di un secolo dopo la scoperta di Hall, il fisico tedesco K. von Klitzing notò che i sistemi ($\sim 2D$) a bassissime temperature (qualche grado Kelvin) e in presenza di campi magnetici intensi (dell'ordine di 10

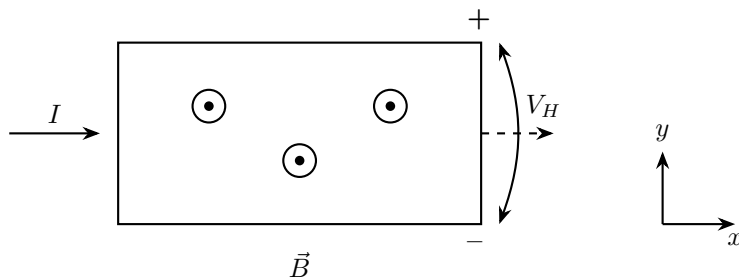


Figura 3.1

Tesla o più), la resistenza R_H ha un comportamento radicalmente diverso da quello classico o 3D (spessore piccolo, ma non trascurabile); quando si riduce di una dimensione il sistema e gli effetti quantistici sono dominanti a causa delle basse temperature, si crea un gap tra uno stato eccitato e l'altro molto ampio.

In queste condizioni estreme, lo spin 'è completamente "congelato" e R_H non varia più con continuità rispetto al campo magnetico applicato, ma assume soltanto un insieme discreto di valori:

$$R_H = \frac{h}{\nu e^2} = \frac{1}{\nu} R_k \quad , \quad \nu \in \mathbb{Z} \quad (3.1.2)$$

con R_k costante di von Klitzing. Questo andamento universale è stato verificato sperimentalmente con precisioni $\sim 10^{-9}$.

La spiegazione teorica di questo fenomeno fu proposta da R.B. Laughlin che, nel 1981, fornì una brillante interpretazione dei dati sperimentali basata sulle proprietà quantistiche universali che i singoli elettroni hanno quando sono confinati in due dimensioni e in un campo magnetico perpendicolare.

In queste condizioni, come previsto da Landau nel 1930, gli elettroni possiedono uno spettro discreto descritto da un opportuno oscillatore armonico: il numero di livelli completamente occupati è proprio il numero quantico intero ν trovato da von Klitzing (premio Nobel nel 1985). Da alcuni anni, per la sua precisione straordinaria, viene usato come standard per le resistenze.

Nel 1982 Tsui, Stormer e Gossard scoprirono l'effetto Hall frazionario:

$$R_H = \frac{1}{\nu} R_k \quad (3.1.3)$$

con ν frazionario.

La resistenza e la resistività ρ sono legate dalla relazione $R = \rho L/A$, dove L è la lunghezza del campione e A è la sua sezione. In un ipercubo di lato L :

$$R = \rho \frac{L}{L^{(D-1)}} = \rho L^{(2-D)} \quad (3.1.4)$$

2D è quindi un caso speciale perchè qui R è invariante di scala ($(e^2/h)R$ è adimensionale). Questo fatto è importantissimo per l'universalità dei risultati: non c'è bisogno di misurare le dimensioni del campione con una precisione 10^{-9} per ottenere la resistività a quella precisione.

3.2 Effetto Hall classico

L'equazione del moto di un elettrone di carica $-e$, massa m e velocità $\vec{v}$, soggetta alla forza di Lorentz dovuta a un campo magnetico $\vec{B}$ è:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.2.1)$$

se $\vec{B}$ è parallelo all'asse z e la velocità iniziale $\vec{v}(t=0)$ è nel piano xy , il moto è confinato nel piano xy e il problema è bidimensionale. Se infatti moltiplichiamo scalarmente per $\vec{B}$:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2.2)$$

cioè $\vec{v} \cdot \vec{B}$ è costante del moto $\leftrightarrow v_z = 0$ costante.

Dette x_i e v_i le coordinate ($x_1 = x$, $x_2 = y$) e le componenti della velocità della particella ($v_1 = v_x$, $v_2 = v_y$), possiamo introdurre il tensore antisimmetrico: ϵ_{ij} con $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$, $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 1$; le equazioni del moto diventano:

$$m \frac{dv_i}{dt} = -e B \epsilon_{ij} v_j = -m \omega_c \epsilon_{ij} v_j \quad (3.2.3)$$

dove $\omega_c = eB/m$ è la frequenza di ciclotrone o di Larmor. L'equazione precedente si scrive nella forma:

$$\frac{d}{dt} (p_i + m \omega_c \epsilon_{ij} x_j) = 0 \quad (3.2.4)$$

che mostra che il problema possiede due costanti del moto. Possiamo definire:

$$Q_i = p_i + m \omega_c \epsilon_{ij} x_j \quad , \quad i = 1, 2. \quad (3.2.5)$$

Introducendo la combinazione complessa:

$$p = p_1 + ip_2 \quad (3.2.6)$$

possiamo vedere:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -\omega_c p_2 = i(\omega_c p_2) \\ i \frac{dp_2}{dt} = \omega_c p_1 \end{cases} \implies \frac{dp}{dt} = i\omega_c p \implies p(t) = p_0 e^{i\omega_c t} \quad (3.2.7)$$

perciò, dividendo per m e integrando la velocità:

$$x(t) = x_1(t) + ix_2(t) \quad (3.2.8)$$

$$= \frac{v_0 e^{i\omega_c t}}{i\omega_c} + x_0 - \frac{v_0}{i\omega_c} \quad (3.2.9)$$

Il moto della particella è circolare uniforme con velocità angolare ω_c e raggio $v_0 m / eB$. Se ora accendiamo un campo elettrico $\vec{E}$ costante, parallelo al piano xy . L'equazione del moto diventa:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{v} \times \vec{B} - e\vec{E} \quad (3.2.10)$$

o in forma complessa con $E = E_1 + iE_2$:

$$\frac{dp}{dt} = i\omega_c p - eE \quad (3.2.11)$$

$$= i\omega_c \left(p - \frac{eE}{i\omega_c} \right) \quad (3.2.12)$$

$$\Rightarrow \frac{d\xi}{dt} = i\omega_c \xi \quad , \quad \left(\xi = p - \frac{eE}{i\omega_c} \right) \quad (3.2.13)$$

da cui ricaviamo, integrando:

$$v(t) = \frac{p}{m} \quad (3.2.14)$$

$$= v_0 e^{i\omega_c t} + \frac{e}{im\omega_c} E \quad (3.2.15)$$

$$= v_0 e^{i\omega_c t} + \frac{E}{iB} \quad (3.2.16)$$

Il primo termine indica la componente che ruota, il secondo termine è la velocità di trascinamento v_T degli elettroni dovuta al campo elettrico e quindi la densità di corrente è, indicando con n_e la densità di elettroni:

$$j = -e n_e v_T = -e n_e \frac{E}{iB} \quad (3.2.17)$$

in componenti:

$$j_x = -e n_e \frac{E_y}{B} \quad , \quad j_y = e n_e \frac{E_x}{B}. \quad (3.2.18)$$

Quindi la densità di corrente è ortogonale al campo elettrico: questo è l'aspetto caratteristico dell'effetto Hall.

In generale, in un conduttore qualsiasi, esiste una relazione lineare tra la densità di corrente e il campo $\vec{E}$ che si può scrivere nella forma:

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (3.2.19)$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} \quad (3.2.20)$$

dove possiamo notare la matrice legata alla conduttività e quella legata alla resistività; nell'effetto Hall si ha (siamo nel vuoto o in un conduttore ideale) $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, $\rho_{xx} = \rho_{yy} = 0$ e la conduttività di Hall è:

$$\sigma_H = \sigma_{yx} = -\sigma_{xy} = \frac{n_e e}{B} \quad \longrightarrow \quad j_x = -\sigma_H E_y. \quad (3.2.21)$$

In un conduttore a forma di nastro, indicando con L la larghezza del nastro, con $V_y = -E_y L$ la caduta di potenziale tra i bordi del nastro e con $I_x = j_x L$ la corrente nella direzione x del nastro, possiamo scrivere:

$$\sigma_H = \frac{I_x}{V_y} = -\frac{j_x L}{E_y L} = n_e \frac{e}{B} \quad \longrightarrow \quad R_H = \frac{B}{en_e} \quad (3.2.22)$$

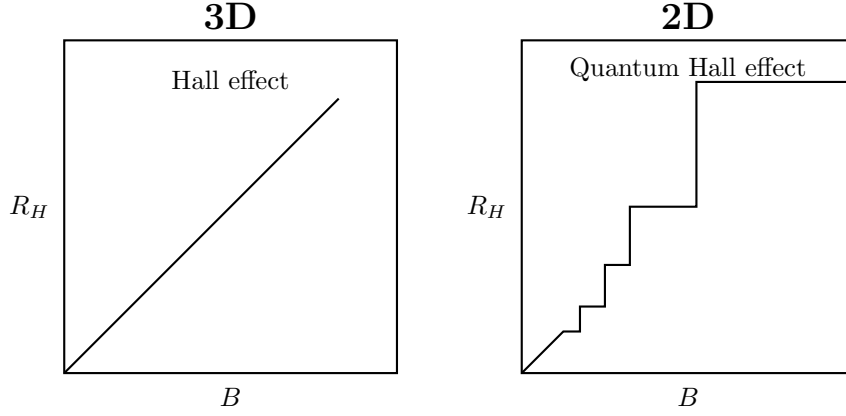
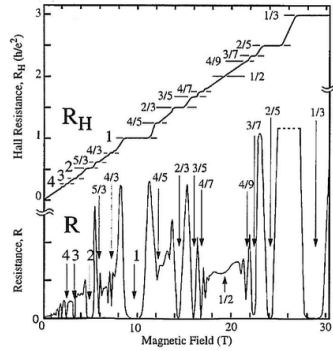


Figura 3.2: Schematic difference between the Hall effect in three and two dimensions.



dove $\hat{P}$ è il momento canonico/fisico, mentre $e\vec{A}$ rappresenta l'accoppiamento con il campo magnetico esterno. C'è una differenza di convenzione nella definizione dell'accoppiamento minimale, tra quella che è la convenzione di Laughlin e quella che abbiamo utilizzato per i superconduttori, cioè una differenza di segno che può essere assorbita scambiando la funzione d'onda della materia con la sua coniugata. Se il campo magnetico è costante, il potenziale vettore $\vec{A}$ ($\vec{\nabla} \times \vec{A} = B\hat{z}$) è lineare nelle coordinate x, y . Questo implica che l'equazione (3.2.23) sia l'hamiltoniana di un oscillatore armonico (in una dimensione o due, a seconda della scelta di gauge che stiamo facendo per $\vec{A}$) e può essere diagonalizzata in modo esatto.

L'equazione di Schrödinger $\hat{H}\psi = E\psi$ è invariante per trasformazioni di gauge, a causa della presenza di $\vec{B}$:

$$\vec{A}(\vec{r}) \longrightarrow \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\xi(\vec{r}) \quad (3.2.24)$$

$$\psi(\vec{r}) \longrightarrow e^{-\frac{i}{\hbar}e\xi(\vec{r})}\psi(\vec{r}). \quad (3.2.25)$$

I calcoli sono spesso eseguiti fissando il gauge, in base alla geometria del problema. I due gauge più popolari sono il gauge di Landau (per un dispositivo a nastro) e il gauge simmetrico (per un dispositivo ad anello). Le autofunzioni sono molto diverse ma legate, per sistemi di taglia infinita, da una trasformazione unitaria. Molte delle proprietà essenziali del problema possono essere derivate in modo indipendente dal gauge.

3.2.2 Gauge di Landau

Il gauge di Landau è $\vec{A} = B(-y, 0, 0)$, dove si nota che la componente x è proporzionale a y e la costante di proporzionalità è B . Dato che con questa scelta di gauge $\vec{A}$ dipende solo da y e non da x , l'hamiltoniana non contiene x , ma può eventualmente avere il suo momento coniugato, quindi commuta con p_x ; questo implica che $p_x = \hbar k_x$ è un buon numero quantico e la funzione d'onda totale ha la forma:

$$\eta(x, y) = e^{ik_x x} \phi(y). \quad (3.2.26)$$

Conviene introdurre le seguenti quantità adimensionali, dove l ha le dimensioni di una lunghezza:

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \quad (3.2.27)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p'_y = \frac{lp_y}{\hbar} = \frac{p_y}{\sqrt{\hbar eB}} \\ y' = \frac{y}{l} - lk_x = \sqrt{\frac{eB}{\hbar}} \left(y - \frac{\hbar}{eB} k_x \right) = \frac{1}{\sqrt{\hbar eB}} (eBy - \hbar k_x) \end{cases} \quad (3.2.28)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} p_y = \sqrt{\hbar eB} p'_y \\ \sqrt{\hbar eB} y' = (eBy - \hbar k_x) \end{cases} \quad (3.2.29)$$

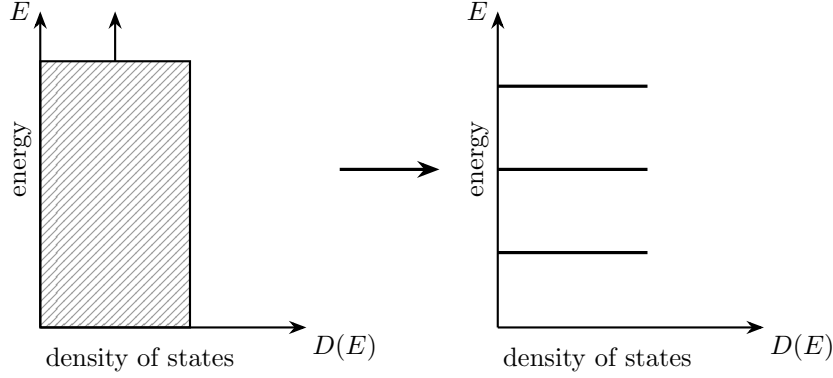


Figura 3.4: The Fermi sea splits into equally spaced, degenerate Landau levels upon the application of a magnetic field.

l'hamiltoniana diventa:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[(p_y)^2 + (\hbar k_x - eBy)^2 \right] \quad (3.2.30)$$

$$= \hbar\omega_c \left[\frac{1}{2} (p'_y)^2 + \frac{1}{2} (y')^2 \right], \quad \left(\omega_c = \frac{eB}{m} \right) \quad (3.2.31)$$

i livelli di energia quantizzati (autovalori di $\hat{H}$) sono quindi $E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)$ con $n = 0, 1, 2, \dots$; l'energia cinetica è quindi quantizzata e, in quanto tale, è impossibile per un elettrone confinato in un certo livello di Landau variare in modo continuo la sua energia cinetica. Quindi la conservazione dell'energia vincola il moto dell'elettrone su linee equipotenziali. Si ricordi che il campo magnetico non compie lavoro, quindi non induce una variazione di energia cinetica. $n = 0$ è il primo livello di Landau (lowest) e $n = 1$ è il secondo livello di Landau e così via. Vedi la figura 3.4.

Quindi, inserendo un campo magnetico, si passa da un continuo a un numero discreto infinito di stati accessibili; ogni livello di Landau associato a queste linee orizzontali è infinitamente occupato, se il sistema è di taglia infinita. Si nota che:

- L'energia non dipende da k_x . Autostati che differiscono solo in k_x e non in n , sono degeneri.
- La posizione del centro dell'oscillatore dipende da k_x . Infatti le autofunzioni sono:

$$\eta_{n,k_x} = N e^{ik_x x} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{y}{l} - lk_x \right)^2 \right\} H_n \left(\frac{y}{l} - lk_x \right) \quad (3.2.32)$$

lungo la direzione x ho un'onda piana, mentre lungo la direzione y l'elettrone è localizzato e la traiettoria è una linea retta centrata in

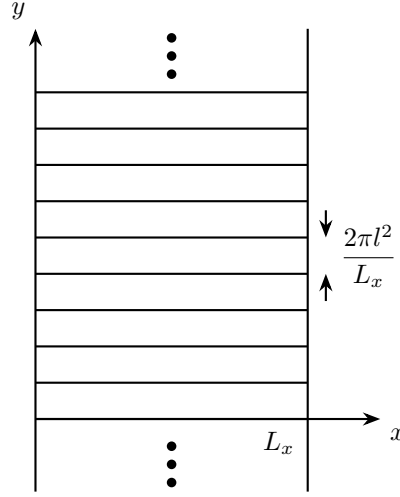


Figura 3.5

$y = l^2 k_x = y_0(k_x)$. Cambiare k_x significa spostare la traiettoria verso l'alto e verso il basso; possiamo vedere i momenti nello spazio delle coordinate. Se la direzione x è periodica con lunghezza L_x , allora:

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x \quad , \quad n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2.33)$$

e i centri delle gaussiane sono distanziati di:

$$\Delta y_0 = \frac{2\pi l^2}{L_x} \quad (3.2.34)$$

Raffigurati in figura 3.5.

3.2.3 Degenerazione e fattore di riempimento

Introducendo un campo magnetico ortogonale al dispositivo, siamo passati da un continuo di livelli energetici a un discreto (livelli di Landau): il livello $n = 0$ (quello dell'oscillatore armonico) diventa infinitamente popolato se il volume del dispositivo è infinito, ma nel caso in cui questo sia finito, dato che i momenti corrispondono a posizioni, posso dedurre che ogni livello di Landau non sia infinitamente popolato, ma avrà una degenerazione, cioè un numero di stati accessibili massimo. Nel gauge di Landau, gli orbitali degeneri sono etichettati dai numeri quantici k_x e $n = 0, 1, 2, \dots$. La degenerazione per unità di area è la stessa in ogni livello di Landau, ma dipende dal campo magnetico B . Per trovare la degenerazione consideriamo una geometria ad anello, come in figura 3.6.

Imponiamo le condizioni periodiche sull'onda piana, allora $e^{ik_x(x+L_x)} = e^{ik_x x}$ e gli stati permessi sono quindi $k_x = 2\pi \frac{n_x}{L_x}$; poichè il centro della

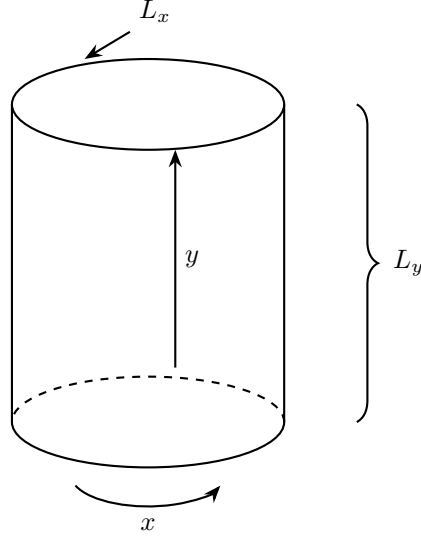


Figura 3.6

gaussiana si trova a $y = y_0 = k_x l^2$, solo gli stati con $0 < y_0 < L_y$ sono permessi. Per $y_0 = L_y$ abbiamo:

$$\frac{L_y}{l^2} = k_x^{max} = \frac{2\pi}{L_x} n_x^{max} \quad \longrightarrow \quad n_x^{max} = \frac{L_y L_x}{2\pi l^2} \quad (3.2.35)$$

n_x^{max} è quindi il numero di stati nell'area $L_x L_y$ e la degenerazione per unità di area è:

$$\frac{n_x^{max}}{L_x L_y} = \frac{1}{2\pi l^2} = \frac{eB}{\hbar 2\pi} = \frac{B}{\phi_0} \quad \longrightarrow \quad n_x^{max} = \frac{\Phi}{\phi_0}. \quad (3.2.36)$$

Aumentando B , aumentano gli stati disponibili; ϕ_0 è un quanto di flusso magnetico. In un livello di Landau ci può stare al più un elettrone per quanto di flusso elementare.

Il **fattore di riempimento** è definito come:

$$\nu = \frac{n_e \phi_0}{B} = \frac{n_e L_x L_y \phi_0}{B L_x L_y} = \frac{\# \text{ elettroni}}{\# \text{ quantidi flusso}} \quad (3.2.37)$$

diminuendo B , ν aumenta: si alza così il livello di Fermi. $\nu = 1$ è il primo livello di Landau pieno, $\nu = 2$ è il secondo livello di Landau pieno; $\Phi = B L_x L_y$. Sostituendo $B = \frac{n_e \phi_0}{\nu} = \frac{n_e \hbar}{e \nu}$ nell'espressione per R_H :

$$R_H = \frac{B}{e n_e} = \frac{n_e \hbar}{e \nu} \frac{1}{e n_e} = \frac{\hbar}{\nu e^2} \quad (3.2.38)$$

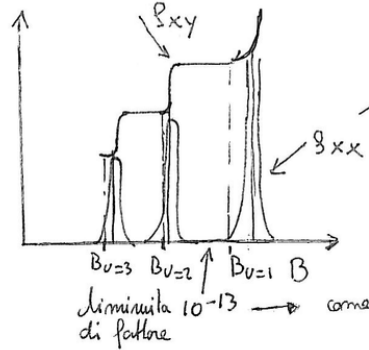


Figura 3.7

i valori di R_H osservati sperimentalmente in corrispondenza dei plateau, sono (per l'effetto Hall intero):

$$R_H = \frac{h}{ne^2} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2.39)$$

è come se il sistema, in corrispondenza dei plateau, avesse fattore di riempimento $\nu = \text{intero}$, anche se B sta variando!

Le transizioni tra un plateau e l'altro avvengono in corrispondenza di B_ν ; ρ_{xx} è molto piccolo, diminuisce di un fattore 10^{-13} e ha picchi in corrispondenza delle transizioni tra plateau. Vedi la figura 3.7.

3.2.4 Splitting dei livelli di energia

Quando il nastro è percorso da una corrente I_x , si manifesta una differenza di potenziale tra i due bordi $\Delta V = -E_y L_y$. Studiamo quindi l'effetto dell'inserzione di un campo elettrico E_y . L'hamiltoniana di singolo elettrone diventa:

$$\hat{H} \longrightarrow \hat{H} + eyE_y \quad (3.2.40)$$

e nel gauge di Landau assume la forma:

$$\hat{H} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{\omega_c^2}{2} m(y - y_0)^2 + eyE_y \right] \quad , \quad [ey = -e\phi(y)] \quad (3.2.41)$$

dove $y_0 = l^2 k_x = \frac{\hbar}{eB} k_x$. Questa è ancora l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico e ridefinendo il centro del sito di Landau $y_0 \rightarrow \tilde{y}_0 = y_0 - \frac{eE_y}{\omega_c^2 m}$, si ottiene:

$$\hat{H} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{\omega_c^2}{2} m(y - \tilde{y}_0)^2 + eE_y \tilde{y}_0(k_x) + \frac{m E_y^2}{2 B^2} \right] \quad (3.2.42)$$

lo spettro risulta quindi:

$$E_{n,k_x} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + eE_y \tilde{y}_0(k_x) + \frac{m}{2} \frac{E_y^2}{B^2}. \quad (3.2.43)$$

Lo spettro dei possibili livelli di energia del sistema dipende ora da entrambi i numeri quantici n e k_x : il campo elettrico E_y rimuove completamente la degenerazione dei livelli di Landau. L'energia dipende esplicitamente dalla coordinata $\tilde{y}_0(k_x)$ del sito di Landau. Vedi la figura 3.8.

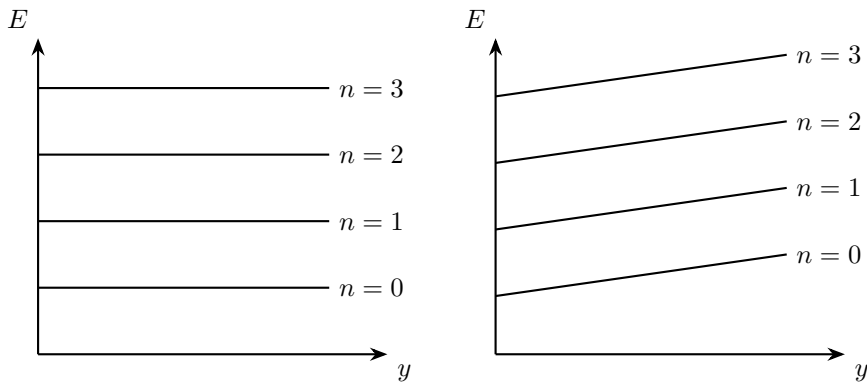


Figura 3.8

Per $B \gg E$, lo splitting dovuto a E_y è però trascurabile rispetto a $\hbar\omega_c = \frac{\hbar e B}{m}$ di solito si trascura la possibilità di avere livelli degeneri con n diverso. Nella geometria considerata, bisogna anche tener conto della deformazione dei livelli ai bordi del sistema:

- Poichè momenti di campo magnetico corrispondono a posizioni, i punti di intersezione tra il livello di Fermi e i livelli deformati di Landau corrispondono alla superficie di Fermi: canali di conduzione in prossimità dei bordi (canali di Landauer).

Gli elettroni si muovono in canali quasi 1D, in questo caso si ha un tipo di conduzione chiamata "balistica" (Landauer), simile alla trasmissione di fotoni in guide d'onda; è per questo motivo che la resistività ρ_{xx} sui plateau è quasi nulla e le correnti possono persistere per decine di minuti in conduttori di questo tipo; sono descritte da teorie chirali (conformi) in 1+1D.

La conduzione balistica differisce dalla superconduttività per l'assenza dell'effetto Meissner.

- Questa proprietà spiega il fatto che $\rho_{xx} \sim 0$, ma non la presenza dei plateau: per osservare la formazione di questi ultimi è necessario che si introducano le impurità nel sistema. Queste impurità contribuiscono

allo splitting dei livelli di Landau anche a $E_y = 0$ e generano degli stati localizzati tra i livelli di Landau.

Aumentano il fattore di riempimento, per esempio diminuendo B , elettroni si spostano su stati localizzati e non partecipano al trasporto della corrente $\nu = \text{costante}$.

Puoi fare riferimento alle figure 3.9 e 3.10.

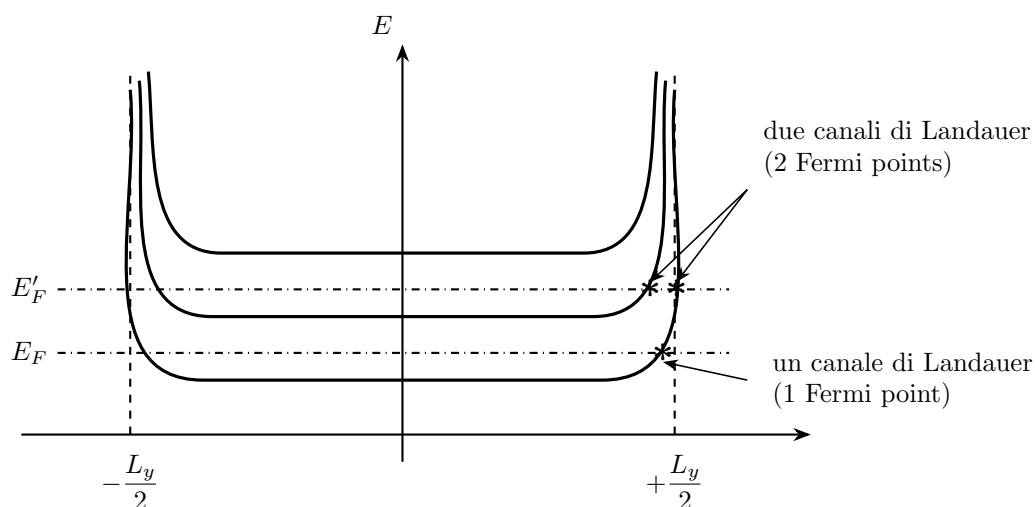


Figura 3.9

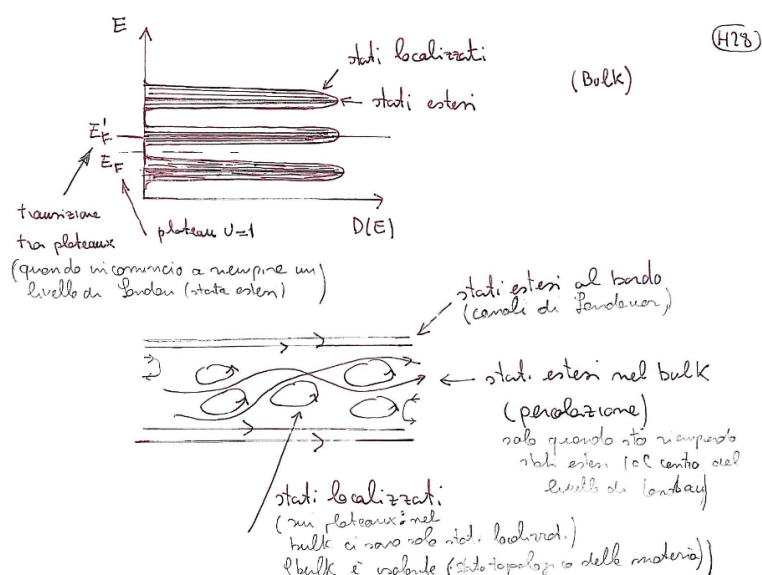


Figura 3.10

3.2.5 La formula di von Klintzing

A questo punto siamo in grado di derivare la formula di von Klintzing $I_H = \nu \frac{e^2}{h} V_H$ in presenza di impurità. Ci concentriamo sul caso $\nu = 1$. Per $E_y = 0$, (classicamente) il campo magnetico fa ruotare gli elettroni su orbite circolari con frequenza ω_c . Vedi la figura 3.11.

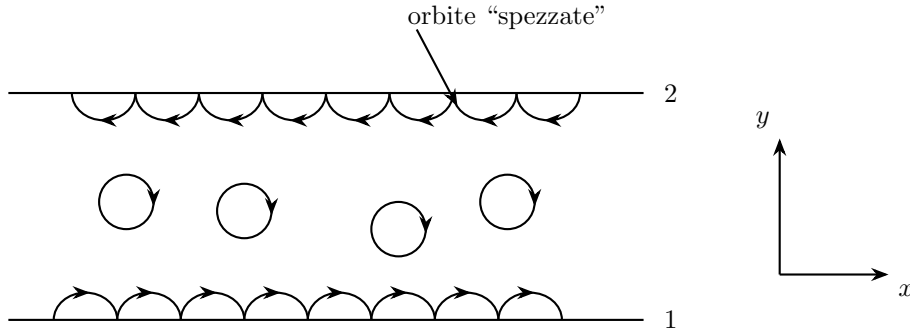


Figura 3.11

Si ha quindi trasporto netto di corrente solo sui bordi e se $V_H = 0$ le due correnti sono uguali e di segno opposto $\leftrightarrow I_H = 0$. Se $E_y = \text{costante}$, la legge di dispersione per il primo livello di Landau è:

$$\epsilon(k_x) = E_{0,k_x} = \frac{\hbar}{2} \omega_c + e \tilde{y}_0(k_x) E_x + \frac{m}{2} \left(\frac{E_y}{B} \right)^2 \quad (3.2.44)$$

$$\tilde{y}_0(k_x) = l^2 k_x - \frac{e E_y}{m \omega_c^2} \quad (3.2.45)$$

$$v_T = \left(\frac{E_y}{B} \right)^2 \quad (3.2.46)$$

la velocità di gruppo nella direzione x è:

$$v_{k_x} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon(k_x)}{\partial k_x} \quad (3.2.47)$$

$$= \frac{e E_y}{\hbar} \frac{\partial \tilde{y}_0(k_x)}{\partial k_x} \quad (3.2.48)$$

$$= \frac{e E_y}{\hbar} l^2 \quad (3.2.49)$$

$$= \frac{E_y}{B} \quad (3.2.50)$$

$$= v_T \quad (3.2.51)$$

coincide cioè con la velocità di trascinamento ed è indipendente da k_x . Consideriamo ora il caso in cui, a causa della presenza di impurità $E_y =$

$E_y(y)$:

$$\epsilon(k_x) = \frac{\hbar}{2}\omega_c + e\tilde{y}_0 E_y(\tilde{y}_0) + \frac{m}{2} \left(\frac{E_y(\tilde{y}_0)}{B} \right)^2 \quad (3.2.52)$$

con $\tilde{y}_0 = \tilde{y}_0(k_x)$. Anche in questo caso:

$$v_{k_x} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon(k_x)}{\partial k_x}. \quad (3.2.53)$$

La corrente trasportata dal dispositivo è, con $\eta_{k_x} = 1$ probabilità che lo stato k_x sia occupato:

$$I_H = -e \int \frac{dk_x}{2\pi} \left(\frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon(k_x)}{\partial k_x} \right) \eta_{k_x} \quad (3.2.54)$$

$$= -\frac{e}{\hbar} \epsilon \Big|_0^{L_y} \quad (3.2.55)$$

$$= -\frac{e}{\hbar} [\mu(L_y) - \mu(0)] \quad (3.2.56)$$

$$= \frac{e^2}{h} V_H \quad (3.2.57)$$

(potenziale chimico $\equiv$ energia potenziale); nel caso con ν generico:

$$\eta_{k_x} \longrightarrow \nu \eta_{k_x} \quad (3.2.58)$$

(2ν canali di Landauer) e il risultato diventa:

$$I_H = \nu \frac{e^2}{h} V_H. \quad (3.2.59)$$

Abbiamo così dimostrato la validità della formula di von Klitzing anche in presenza di disordine. La presenza di stati localizzati nel bulk è però importante per fare in modo che il potenziale chimico vari lentamente con la densità degli elettroni (campo magnetico/stati accessibili): gli elettroni "in eccesso" vengono catturati dalle impurità e non partecipano alla conduzione. Questo permette di poter misurare un valore universale per la conduttività con precisioni dell'ordine di 10^{-10} . La presenza dei canali di Landauer è essenziale per la consistenza dei risultati ($\sigma_{xx} = \rho_{xx} = 0$) anche in presenza di interazione tra gli elettroni.

3.3 La carica delle pseudoparticelle e il "Gedanken experiment" di Laughlin

Consideriamo un dispositivo di Hall a forma di disco. Immaginiamo di inserire al centro del disco un flusso magnetico Φ che incrementiamo adiabaticamente da 0 a $\Phi = h/e$. Vedi la raffigurazione 3.12.

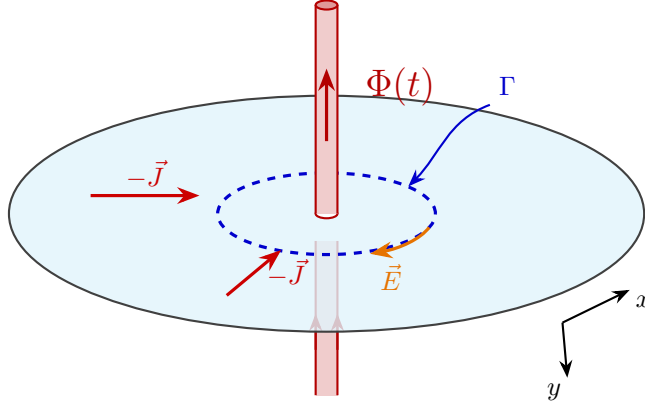


Figura 3.12

Per la legge di Faraday, un cambiamento di flusso magnetico induce un campo elettrico:

$$\oint_{\Gamma} d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (3.3.1)$$

dove Γ è il cammino chiuso attorno al tubo di flusso. Poichè non vi è dissipazione e $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \rho_{xx} = \rho_{yy} = 0$, il campo elettrico induce una densità di corrente:

$$\vec{E} = \rho_{xy} \vec{j} \times \hat{z} \quad (3.3.2)$$

$$= (\rho_{xy} j_y, 0, 0) \quad (3.3.3)$$

quindi:

$$\rho_{xy} \oint_{\Gamma} \vec{j} \cdot (\hat{z} \times d\vec{l}) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (3.3.4)$$

dove abbiamo usato la proprietà ciclica del prodotto misto. L'integrale a sinistra dell'uguale rappresenta la corrente (+e) totale che fluisce all'interno della regione delimitata da Γ :

$$\rho_{xy} \frac{dQ}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.3.5)$$

dopo che un quanto di flusso Φ_0 è stato aggiunto, la carica finale trasportata è:

$$\rho_{xy} Q = -\Phi_0 \quad \longrightarrow \quad Q = -\sigma_{xy} \Phi_0 = \frac{h}{e} \sigma_{xy} \quad (3.3.6)$$

L'inversione della matrice resistività cambia di segno gli elementi fuori dalla diagonale. Poichè sui plateau:

$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h} \quad (3.3.7)$$

abbiamo il risultato $Q = \nu e$. A causa di una variazione del campo magnetico all'interno del sistema, una corrente radiale ha trasportato una carica $Q = \nu e$ verso il bordo interno al dispositivo. Il passo finale è di notare che un quanto di flusso Φ_0 è totalmente invisibile agli elettroni:

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}e \oint_{\Gamma} \delta \vec{A} \cdot d\vec{l}\right\} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}e \oint_{\Gamma} \Phi_0 \frac{1}{2\pi r} r d\theta\right\} \quad (3.3.8)$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}e 2\pi \frac{\hbar}{e}\right\} \quad (3.3.9)$$

$$= \exp\{\pm 2\pi i\} \quad (3.3.10)$$

con:

$$\delta \vec{A} = \Phi_0 \frac{\hat{\theta}}{2\pi r}. \quad (3.3.11)$$

Rimuovere il flusso Φ_0 corrisponde a una trasformazione di gauge (singolare) che non ha nessun effetto fisico sugli elettroni. Poichè l'inserimento di un flusso magnetico è costato energia ($\Delta V = \nu e V_H$), il sistema si trova in uno stato eccitato. Il bulk è tornato nello stato iniziale e lo stato del sistema è completamente determinato dalla posizione della pseudoparticella (che è passata dal bordo esterno al bordo interno o viceversa).

Nel caso dell'effetto Hall frazionario questa discussione evidenzia l'esistenza di pseudoparticelle con carica frazionaria.

3.4 Gauge simmetrico

Il gauge simmetrico si riferisce alla scelta:

$$A = \frac{B}{2} (-y, x, 0). \quad (3.4.1)$$

Introducendo le variabili adimensionali:

$$y' = \frac{y}{l}, \quad x' = \frac{x}{l} \quad (3.4.2)$$

$$p'_x = \frac{lp_x}{\hbar}, \quad p'_y = \frac{lp_y}{\hbar} \quad (3.4.3)$$

$$(3.4.4)$$

dove:

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \quad (3.4.5)$$

si ottiene:

$$\hat{H}' = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega_c} = \frac{1}{2} \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{y'}{2} \right)^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{x'}{2} \right)^2 \right]. \quad (3.4.6)$$

Definiamo le variabili complesse:

$$z = x' - iy' = re^{-i\theta} \quad , \quad \bar{z} = x' + iy' = re^{i\theta} \quad (3.4.7)$$

$$x' = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad , \quad y' = i \frac{z - \bar{z}}{2} \quad (3.4.8)$$

la ragione per cui usiamo questa definizione e non $z = x' + iy'$ è che le funzioni d'onda per lo stato LLL (Lowest Landau Level) dipendono solo da z , a parte un fattore gaussiano $\exp\{-\frac{1}{4}z\bar{z}\}$. Le derivate sono:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x'} = -i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad (3.4.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} + i \frac{\partial}{\partial y'} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x'} - i \frac{\partial}{\partial y'} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (3.4.10)$$

riscriviamo $\hat{H}'$ come:

$$\begin{aligned} \hat{H}' = \frac{1}{2} \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{x'}{2} \right) - i \left(-i \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{y'}{2} \right) \right] \times \\ \times \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{x'}{2} \right) + i \left(-i \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{y'}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

possiamo vedere le due parentesi separate (numerandole 1 e 2):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{x'}{2} \right) - i \left(-i \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{y'}{2} \right) \right] \quad (3.4.12)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{\partial}{\partial x'} - i \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{x'}{2} + i \frac{y'}{2} \right] \quad (3.4.13)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-2 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\bar{z}}{2} \right) \quad (3.4.14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1) = \hat{a}^\dagger \quad (3.4.15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(2) = \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{x'}{2} \right) + i \left(-i \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{y'}{2} \right) \right] \quad (3.4.16)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial}{\partial x'} - i \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{x'}{2} - i \frac{y'}{2} \right] \quad (3.4.17)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{z}{2} \right) \quad (3.4.18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(2) = \hat{a} \quad (3.4.19)$$

$$(3.4.20)$$

da cui possiamo vedere:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad \longrightarrow \quad \hat{H}' = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}. \quad (3.4.21)$$

Sullo stato $n = 0$:

$$\hat{a} |\Omega\rangle = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \eta_r(z, \bar{z}) = 0 \quad (3.4.22)$$

$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \eta_r(z, \bar{z}) = -\frac{z}{4} \eta_r(z, \bar{z}) \quad (3.4.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log(\eta_r(z, \bar{z})) = -\frac{z}{4} \longrightarrow \eta_r(z, \bar{z}) = P(z) \frac{e^{-z\frac{\bar{z}}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.4.24)$$

dove $P(z)$ è una generica funzione analitica in $z \in \mathbb{C}$ (non singolare su $\mathbb{C}$), cioè una funzione intera che possiamo sviluppare sulla base $\{z^m\}$, con $m \geq 0$. A tale scopo, osserviamo che gli operatori:

$$\hat{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad , \quad \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\bar{z}}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.4.25)$$

commutano con $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{H}'$; in più vale $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$. Introduciamo quindi lo stato annichilato simultaneamente da forma (3.4.24):

$$\begin{aligned} \hat{b} |0, 0\rangle = 0 &\longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\bar{z}}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \eta_{0,0}(z, \bar{z}) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\bar{z}}{2} - \frac{\bar{z}}{2} \right) P(z) + \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial z} P(z) \right) \frac{e^{-z\frac{\bar{z}}{4}}}{\sqrt{2\pi}} = 0 \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

cioè $P(z) = 1$. Allora:

$$\hat{b}^\dagger |0, 0\rangle = |0, 1\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \eta_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} z \eta_{0,0} = \eta_{0,1} \quad (3.4.27)$$

o in generale:

$$\frac{(\hat{b}^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} |0, 0\rangle = |0, m\rangle \quad \leftrightarrow \quad \frac{(\hat{b}^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} \eta_{0,0}(z, \bar{z}) = \frac{z^m e^{-\frac{1}{4} z \bar{z}}}{\sqrt{2\pi} e^m m!} \quad (3.4.28)$$

$$= \eta_{0,m}(z, \bar{z}) \quad (3.4.29)$$

La componente del momento angolare nella direzione z è:

$$L' = \frac{L}{\hbar} = -i \frac{\partial}{\partial \theta} \longrightarrow - \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = - (\hat{b}^\dagger \hat{b} - \hat{a}^\dagger \hat{a}) \quad (3.4.30)$$

dove $\frac{\partial}{\partial z}$ è il momento angolare trasportato dalla parte olomorfa, mentre $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ è il momento angolare trasportato dalla parte antiolomorfa; $\hat{b}^\dagger$ aumenta m , $\hat{a}^\dagger$ aumenta n , ma diminuisce m . H e L commutano e possono essere diagonalizzate simultaneamente: $L' = -m$, con $m = -n, -n+1, \dots, 0, 1, 2, \dots$

(la funzione d'onda non può essere singolare a $z, \bar{z} = 0$). Vediamo:

$$L'\eta_{0,m}(z, \bar{z}) = N \left(\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(z^m e^{-\frac{1}{4}z\bar{z}} \right) \quad (3.4.31)$$

$$= N \left(-\frac{z^{m+1}}{4} \bar{z} - m z^m e^{-\frac{1}{4}z\bar{z}} + \frac{z^{m+1}}{4} \bar{z} \right) \quad (3.4.32)$$

$$= -m\eta_{0,m}(z, \bar{z}) \quad (3.4.33)$$

dove $\eta_{0,m}$ è autostato di L' con numero quantico m . Gli autostati di H' per m e n generici sono:

$$|n, m\rangle = \frac{(\hat{b}^\dagger)^{m+n}}{\sqrt{(m+n)!}} \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0, 0\rangle \quad (3.4.34)$$

$$\eta_{n,m}(z, \bar{z}) = N_{n,m} \left(\frac{z}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^{m+n} \left(\frac{\bar{z}}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right)^n e^{-\frac{z\bar{z}}{4}} \quad (3.4.35)$$

dove abbiamo:

$$N_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2^{m+2n} n! (m+n)!}} \quad (3.4.36)$$

che può essere scritta nella forma più familiare:

$$\eta_{n,m}(z, \bar{z}) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n!}{2^m (m+n)!}} e^{-\frac{r^2}{4}} z^m L_n^m \left(\frac{r^2}{2} \right) \quad (3.4.37)$$

dove L_n^m sono i polinomi di Legendre e $r^2 = z\bar{z}$.

3.4.1 Lo stato $\nu = 1$ a molti elettroni

Nel gauge simmetrico le funzioni d'onda a singolo elettrone sono:

$$\psi_m = z^m e^{-\frac{1}{4}|z|^2} \quad (3.4.38)$$

(ignoreremo nel seguito i fattori di normalizzazione). Proviamo a costruire la funzione d'onda a N particelle:

$$\psi^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \exp\left\{-\frac{1}{4}|z_1|^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{4}|z_2|^2\right\} \quad (3.4.39)$$

$$= -(z_1 - z_2) \exp\left\{-\frac{1}{4}(|z_1|^2 + |z_2|^2)\right\} \quad (3.4.40)$$

$$\psi^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 \end{vmatrix} \exp\left\{-\frac{1}{4}|z_1|^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{4}|z_2|^2\right\} \exp\left\{-\frac{1}{4}|z_3|^2\right\} \quad (3.4.41)$$

$$= \left[(z_2 z_3^2 - z_3 z_2^2) - (z_1 z_3^2 - z_3 z_1^2) + (z_1 z_2^2 - z_2 z_1^2)\right] \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{4}(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)\right\} \quad (3.4.42)$$

$$= -\prod_{i < j}^3 (z_i - z_j) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum_j |z_j|^2\right\} \quad (3.4.43)$$

$$= (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{4}(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)\right\} \quad (3.4.44)$$

$$= \left[(z_1^2 z_2 - z_1^2 z_3) + \dots\right] \cdot \exp\left\{-\frac{1}{4}(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)\right\} \quad (3.4.45)$$

(il segno non è importante e lo tralascieremo). Gli oggetti introdotti si chiamano *polinomi di Vandermonde*. In generale:

$$\psi = \psi^{(N)} = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum_j |z_j|^2\right\} \quad (3.4.46)$$

la probabilità non normalizzata per le particelle nel primo livello di Landau è:

$$|\psi|^2 = \prod_{i < j}^N |z_i - z_j|^2 \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N |z_j|^2\right\} \quad (3.4.47)$$

questo è un oggetto molto complicato: è chiaro che il termine polinomiale diventa grande se le particelle rimangono ben distanziate. D'altra parte il termine esponenziale tende a non farle disperdere troppo sfavorendo $|z|$ troppo grandi.

Anche a domande semplici come "è la densità delle particelle uniforme?" è difficile rispondere. Laughlin ha sviluppato una bellissima analogia con la fisica del plasma che chiarisce molte delle proprietà di questa funzione d'onda.

Introduciamo una funzione di partizione ipotetica:

$$Z = \int d^2 z_1 \cdots \int d^2 z_N |\psi|^2 \quad (3.4.48)$$

dove Z è la funzione di partizione di un problema classico di meccanica statistica con peso di Boltzmann:

$$|\psi|^2 = \exp \left\{ -\frac{z}{\beta} U_{class} \right\} \quad (3.4.49)$$

$$\psi = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^\beta \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_j |z_j|^2 \right\} \quad (3.4.50)$$

$$U_{class} = \left(\beta^2 \sum_{i < j}^N \left(-\log |z_i - z_j| + \frac{\beta}{4} \sum_k^N |z_k|^2 \right) \right) \quad (3.4.51)$$

$$= \beta^2 U_{int}^{(N)} + \frac{\beta}{4} U_B^{(N)} \quad (3.4.52)$$

per β dispari abbiamo la corretta simmetria sotto lo scambio di fermioni $\leftrightarrow \beta =$ momento angolare relativo. Il potenziale β è per ora uguale a 1 e coincide con la carica delle particelle che compongono il plasma.

A questo punto non è chiaro perchè questo sia un passo in avanti, ma in realtà lo è; il potenziale U_{class} corrisponde all'energia potenziale di un plasma classico (2D) composto da particelle di carica β in un background uniforme "neutralizzante". Possiamo quindi utilizzare il nostro intuito per sistemi classici di plasma per studiare le proprietà di $|\psi|^2$.

Introducendo coordinate complesse $z = (x - iy)^{\frac{1}{l}}$, il potenziale elettrostatico può essere riscritto nella forma:

$$\phi(z, \bar{z}) = Q \left(-\log \left(\frac{|z|}{r_0} l \right) \right) = -Q \log |z| \quad (3.4.53)$$

dove abbiamo:

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} = r_0. \quad (3.4.54)$$

L'energia di interazione tra due cariche Q poste a distanza $|z|$ è $U_{int}^{(2)} = -Q^2 \log |z|$; vediamo quindi che il termine $U_{int}^{(N)} = \beta^2 \sum_{i < j}^N (-\log |z_i - z_j|)$ può essere interpretato come l'energia potenziale di interazione di un gas di N particelle in 2D con carica β . Bisogna però sempre tenere in mente che non c'è nessun potenziale logaritmico nella nostra hamiltoniana di cui ψ è soluzione.

Per comprendere l'analogia con il plasma, dobbiamo considerare che la carica Q è data da:

$$\int d\vec{\Sigma} \cdot \vec{E} = 4\pi Q \quad (3.4.55)$$

(siamo in 3D); poichè l'area della sfera è $4\pi r^2$ otteniamo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = Q \frac{\hat{r}}{r^2} \quad , \quad \phi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} \quad (3.4.56)$$

con:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\Delta\phi. \quad (3.4.57)$$

In due dimensioni:

$$\int ds \vec{s} \cdot \vec{E} = 2\pi Q \quad (3.4.58)$$

quindi:

$$\vec{E}(\vec{r}) = Q \frac{\hat{r}}{r} \quad , \quad \phi(\vec{r}) = Q \left(-\log \left(\frac{r}{r_0} \right) \right). \quad (3.4.59)$$

Per comprendere meglio il significato del termine $U_B^{(N)}$ notiamo che:

$$l \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad l \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (3.4.60)$$

sempre con la stessa definizione (3.4.5) del parametro l . Quello che abbiamo è cioè:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{4}{l^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (3.4.61)$$

$$\Rightarrow -\Delta \frac{1}{4} |z|^2 = -\frac{1}{l^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z \bar{z} = -\frac{1}{l^2} = 2\pi \rho_B \quad (3.4.62)$$

dove:

$$\rho_B = -\frac{1}{2\pi l^2}. \quad (3.4.63)$$

L'equazione (3.4.62) può essere interpretata come l'equazione di Poisson associata a una distribuzione omogenea di carica ρ_B : $\phi_B(z, \bar{z}) = \frac{1}{4} |z|^2$ corrisponde al potenziale associato a questa distribuzione di carica. L'energia potenziale di una particella con carica Q a distanza $|z|$ dal centro del sistema è $U_B^{(1)} = \frac{Q}{4} |z|^2$.

Per evitare di confondersi, è conveniente pensare a un sistema a forma di disco (siamo nel gauge simmetrico). Per il teorema di Gauss, una particella con carica Q all'interno di un disco con distribuzione omogenea di carica ρ_B posta a distanza r dal centro possiede un'energia potenziale corrispondente solo alla carica $q(r) = \pi r^2 \rho_B$ contenuta in un disco di raggio r , vedi la figura 3.13, per cui:

$$\oint_r d\vec{l} \cdot \vec{E} = 2\pi q(r) = 2\pi (r^2 \pi \rho_B) \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = r \rho_B \pi \hat{r} \quad (3.4.64)$$

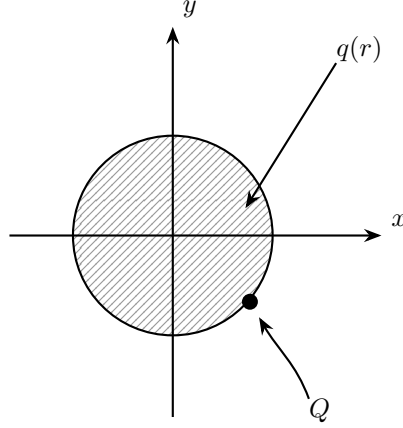


Figura 3.13

e integrando si trova l'energia potenziale:

$$Q \phi(r) = -Q \frac{\pi}{2} r^2 \rho_B = -Q \pi \frac{|z|^2 l^2}{2(l^2 2\pi)} = Q \frac{|z|^2}{4}. \quad (3.4.65)$$

Il termine:

$$U_B^{(N)} = \frac{\beta}{4} \sum_k |z_k|^2 \quad (3.4.66)$$

in U_{class} rappresenta quindi l'energia potenziale elettrostatica legata alla presenza di un background con densità di carica ρ_B . Notiamo che $2\pi l^2$ è precisamente l'area che contiene un quanto di flusso. Quindi ρ_B è esattamente B/Φ_0 : la densità del flusso magnetico in unità di Φ_0 :

$$\frac{1}{2\pi l^2} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (3.4.67)$$

con Φ flusso per unità di area. I plasmi sono considerati il quarto stato della materia: a temperature molto elevate gli atomi e le molecole si scindono nelle loro componenti primarie, cioè gli elettroni e gli ioni positivi, formando un gas ionizzato. I plasmi costituiscono il 95% della materia visibile dell'universo (stelle). Esempi di plasma sulla Terra sono i fulmini, l'aurora boreale, le lampade al plasma di Tesla e i Neon. Il plasma è caratterizzato da un'altissima conduttività elettrica che fa sì che anche piccole differenze locali di densità vengano immediatamente compensate: a causa delle interazioni a lungo raggio anche piccole variazioni di densità comportano grandissime fluttuazioni di energia. Nel nostro caso la carica di background ρ_B è uniformemente distribuita e imporre la neutralità del sistema implica:

$$n_e \cdot \beta + \rho_B = 0 \quad \longrightarrow \quad n_e = \frac{1}{2\pi\beta l^2} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{\beta} = n_e 2\pi l^2 \equiv \frac{n_e h}{B} = \nu \quad (3.4.68)$$

con n_e densità di elettroni. Per $\nu = 1$ ($\beta = 1$), questo è ovviamente il valore corretto per n_e , poichè ogni stato a singola particella è occupato e c'è uno stato per ogni quanto di flusso. Gli elettroni possono trovarsi in configurazioni che sono localmente random, ma variazioni di densità a grande distanza sono trascurabili: il sistema è in fase liquida.

Sappiamo inoltre che a $\nu = 1$, tutti gli stati sono occupati (un elettrone per quanto di flusso Φ_0) e vi è un gap energetico molto grande che separa i livelli di Landau: il liquido quantistico di Hall è incompressibile. Possiamo deformare una goccia di fluido solo al bordo e cioè mantenendo il suo volume costante.

Ritorniamo alla base di funzioni d'onda con momento angolare definito:

$$\psi_m = z^m e^{-\frac{1}{4}|z|^2}, \quad |\psi_m|^2 = |z|^{2m} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \quad (3.4.69)$$

il massimo di probabilità si ha per:

$$\frac{\partial |\psi_m|^2}{\partial |z|} = (2m |z|^{2m-1} - |z|^{2m+1}) e^{-\frac{1}{2}|z|^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad |z| = \sqrt{2m} \quad (3.4.70)$$

l'area delimitata dalla traiettoria è:

$$\pi r^2 = 2\pi m l^2 = m(2\pi l^2) \quad \longrightarrow \quad \pi r^2 \frac{1}{2\pi l^2} = m. \quad (3.4.71)$$

La traiettoria classica dell'elettrone racchiude m quanti di flusso Φ_0 . Questo è il motivo per cui la monodromia di ψ_m è:

$$\psi_m(z e^{2\pi i}) = e^{2\pi i m} \psi_m(z). \quad (3.4.72)$$

Si faccia riferimento alla figura 3.14. Supponendo ora di aggiungere un quanto di flusso Φ_0 adiabaticamente a $z = 0$ come nel Gedanken experiment di Laughlin, si ha:

$$\psi_m(z) \quad \longrightarrow \quad \psi_{m+1} = z^{m+1} e^{-\frac{1}{4}|z|^2} \quad (3.4.73)$$

cioè l'elettrone si è spostato sull'orbita successiva. Per il sistema a molti elettroni:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots \\ z_1 & z_2 & \dots \\ \vdots & & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \dots \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots \\ \vdots & & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \end{vmatrix} = z_1 z_2 \dots \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots \\ z_1 & z_2 & \dots \\ \vdots & & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (3.4.74)$$

cioè:

$$\Psi = \Psi^{(N)} = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j) \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_k |z_k|^2 \right\} \quad \longrightarrow \quad \left(\prod_k z_k \right) \Psi^{(N)}. \quad (3.4.75)$$

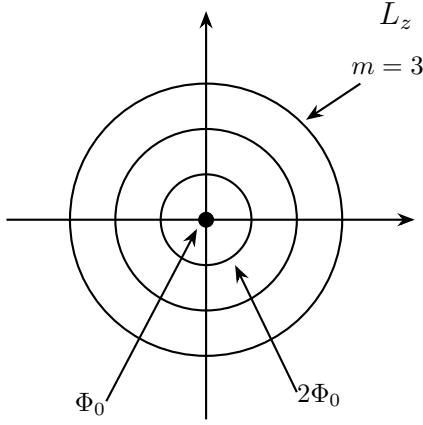


Figura 3.14

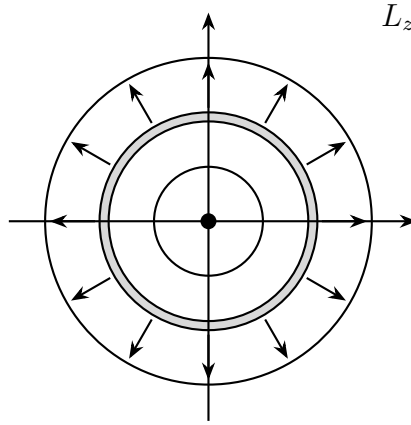


Figura 3.15

Il potenziale classico del plasma diventa ($z_0 = 0$, $\beta = 1$):

$$U'_{class} = \left(\beta^2 \sum_{i < j}^N \left(-\log(z_i - z_j) + \frac{\beta}{4} \sum_k^N |z_k|^2 \right) \right) - 1 \sum_{i=1}^N \log(z - z_0) \quad (3.4.76)$$

l'1 indica che abbiamo inserito solo un quanto di flusso. Il plasma schermanà completamente questa carica in eccesso spostando una frazione β di carica β su $z_0 = 0$. Poichè la carica degli elettroni è $-e$ e non β , questo equivale allo spostamento di una carica $Q = e/\beta$ nell'intorno di z_0 .

3.4.2 Effetto Hall frazionario

Se m è uguale a 1, questa corrisponde alla carica di una lacuna ma, dopo la scoperta dell'effetto Hall frazionario con fattore di riempimento $\nu = 1/3$, Laughlin intuì immediatamente che altri valori di β erano possibili ed erano in grado di descrivere il fluido quantistico di Hall a $\nu = 1/\beta$, con $\beta = 1, 3, 5, 7, \dots$. La funzione d'onda corrispondente è:

$$\Psi_{\beta}^{(N)} = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^{\beta} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_k^N |z_k|^2 \right\} \quad (3.4.77)$$

$\Psi_{\beta}^{(N)}$, per β dispari, è totalmente antisimmetrica ed è chiaramente sviluppabile sulla base:

$$\left\{ z^m \exp \left\{ -\frac{1}{4} |z|^2 \right\} \right\}^{\otimes N} \quad (3.4.78)$$

con $m = 0, 1, \dots$ delle funzioni d'onda del primo livello di Landau:

$$\prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\beta} \quad (3.4.79)$$

contiene solo fattori olomorfi $\{(z_i)^k\}$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, N$. Laughlin mostrò numericamente che le funzioni d'onda "variazionali" $\Psi_\beta^{(N)}$ approssimano quella vera dell'hamiltoniana con interazione coulombiana, logaritmica ed esponenziale con precisioni strabilianti (fino a 4-5 cifre significative). Per $m > 71$ il sistema cristallizza con struttura esagonale. Il motivo di questo strabilante accordo lo si può intuire studiando il caso $N = 2$.

Supponiamo di voler determinare la funzione d'onda a due elettroni con momento angolare del centro di massa M e momento angolare relativo m . Trascurando il mixing con i livelli di Landau $n \geq 1$: la funzione d'onda deve essere sviluppabile sulla base:

$$\left\{ z_1^{m_1} \exp\left\{-\frac{1}{4}|z_1|^2\right\}\right\} \otimes \left\{ z_2^{m_2} \exp\left\{-\frac{1}{4}|z_2|^2\right\}\right\} \quad (3.4.80)$$

e cioè, a parte l'esponenziale, deve essere olomorfa in z_1 e z_2 :

$$\Psi^{(2)} = F(z_1, z_2) \exp\left\{-\frac{1}{4}(|z_1|^2 + |z_2|^2)\right\}. \quad (3.4.81)$$

La funzione d'onda deve essere separabile in una parte corrispondente al moto del centro di massa e una parte legata al moto relativo:

$$\Psi_{m,M}^{(2)} = f(z_1 - z_2) g(z_1 + z_2) \exp\left\{-\frac{1}{4}(|z_1|^2 + |z_2|^2)\right\} \quad (3.4.82)$$

considerando la simmetria per rotazione:

$$\begin{cases} f((z_1 - z_2) e^{2\pi i}) = e^{2\pi i m} f(z_1 - z_2) \\ g((z_1 + z_2) e^{2\pi i}) = e^{2\pi i M} g(z_1 + z_2) \end{cases} \quad (3.4.83)$$

l'unica soluzione possibile è:

$$\Psi_{m,M}^{(2)} = (z_1 - z_2)^m (z_1 + z_2)^M \exp\left\{-\frac{1}{4}(|z_1|^2 + |z_2|^2)\right\} \quad (3.4.84)$$

dove m è intero dispari. Trascurando il mixing tra i livelli di Landau, questa è l'unica soluzione possibile indipendentemente dal tipo di potenziale di interazione, sia esso coulombiano, coulombiano schermato, logaritmico o gaussiano. Considerando anche l'interazione a due corpi, l'energia corrispondente a tale stato è:

$$E^{(2)} = \frac{\langle m, M | (\hat{H}_1 + \hat{H}_2 + V_{12}) | M, m \rangle}{\langle m, M | M, m \rangle} \quad (3.4.85)$$

$$= \hbar\omega_c + \frac{\langle m, M | V_{12} | M, m \rangle}{\langle m, M | M, m \rangle} \quad (3.4.86)$$

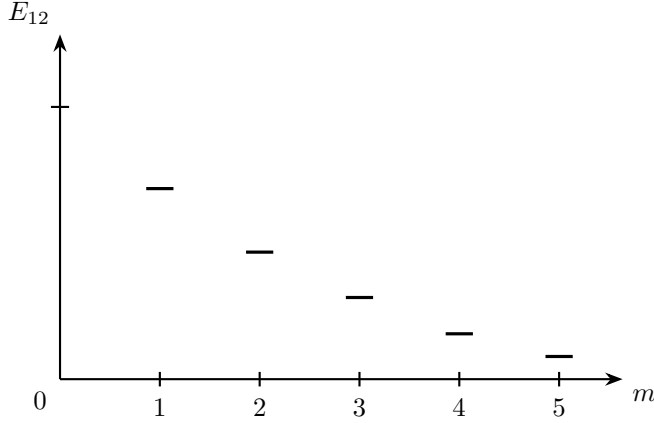


Figura 3.16

nel caso di interazione coulombiana:

$$E_{12}(m, M) = E_{12}(m) \quad (3.4.87)$$

$$= e^2 k \frac{\langle m, M | \frac{1}{|z|} | M, m \rangle}{\langle m, M | M, m \rangle} \quad (3.4.88)$$

$$= e^2 k \frac{(2m)! \sqrt{2}}{2^{2m+1} (m!)^2} \quad (3.4.89)$$

dove k è la costante di Coulomb; usando l'approssimazione di Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (3.4.90)$$

per $m \gg 1$, il risultato sarà $1/\sqrt{2m}$, dove $\sqrt{2m}$ è il raggio dell'orbita contenente m quanti di flusso Φ_0 . Vedi la figura 3.16.

Questo dimostra che i livelli energetici sono quantizzati come se fossero stati legati: in assenza di campo magnetico, la forza coulombiana repulsiva tende a far allontanare gli elettroni che perdono energia potenziale acquistando energia cinetica. In presenza di campo magnetico, l'energia cinetica è quantizzata e pari a $\frac{\hbar}{2}\omega_c$ per ogni elettrone nel primo livello di Landau: gli elettroni non possono quindi allontanarsi e formano stati legati con energia di legame E_{12} positiva.

In queste condizioni, a fissato fattore di riempimento $1/\beta = \nu = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$ il sistema presenta un gap di energia. Consideriamo, per esempio, $\nu = 1/3$: tutte le coppie di elettroni possiedono momento angolare relativo $m = 3$:

$$\Psi^{(N)} = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^3 \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_k |z_k|^2 \right\} \quad (3.4.91)$$

da cui possiamo vedere:

- Uno stato eccitato corrisponderebbe quindi a una transizione, per esempio: $m = 3 \rightarrow m = 5$ di una coppia di elettroni (12).
- Ma a fissato fattore di riempimento $\nu = 1/3$, un'altra coppia di elettroni deve transire: $m' = 3 \rightarrow m' = 1$ (si ricordi che m maggiore corrisponde a una densità minore e viceversa); poichè:

$$\Delta E = \Delta E_{12}(3 \rightarrow 5) + \Delta E_{12}(3 \rightarrow 1) > 0 \quad (3.4.92)$$

$$= E_{12}(5) - E_{12}(3) + E_{12}(1) - E_{12}(3) \quad (3.4.93)$$

$$= e^2 k \quad (3.4.94)$$

$$= e^2 k \sqrt{2\pi} \frac{31}{512} > 0. \quad (3.4.95)$$

Si ha un gap di energia e lo stato a $\nu = 1/3$ corrisponde quindi a un fluido incompressibile. La presenza di un gap di energia, come nel caso $\nu = 1$, è cruciale per avere $\rho_{xx} = \sigma_{xx} = \rho_{yy} = \sigma_{yy} = 0$.

Appendici

Appendice A

Gas di Bose-Einstein ideale

Vediamo in questa rapida Appendice un ripasso di un gas ideale di Bose-Einstein.

A.1 Gas di Bose ideale

Diversamente da un gas ideale classico, o da un gas di fermioni non interagenti, un gas ideale di bosoni presenta una transizione di fase termodinamica: la **condensazione di Bose-Einstein (BEC)**; essa è una conseguenza della statistica delle particelle, e non della loro mutua interazione.

A differenza della transizione standard, nel BEC le particelle condensate non sono separate nello spazio da quelle normali, ma sono separate nello spazio dei momenti. Le particelle condensate occupano tutto lo stato quantistico a zero momento (stato fondamentale), mentre quelle "normali" possiedono tutte un momento finito.

Usando la distribuzione di Bose-Einstein, il numero totale di particelle in una scatola di volume V è:

$$N = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} \quad , \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad , \quad \epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (\text{A.1.1})$$

Nel limite termodinamico, $V \rightarrow \infty$, i possibili valori di $\vec{k}$ diventano un continuo e, di solito, si può sostituire la somma con un integrale:

$$\sum_{\vec{k}} \longrightarrow \int d^3k \frac{V}{(2\pi)^3} \longrightarrow N = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} \quad (\text{A.1.2})$$

dove possiamo definire la *densità di particelle* come:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} \quad (\text{A.1.3})$$

e che possiamo riscrivere, in termini della densità degli stati $g(\epsilon)$ per unità di volume, utilizzando la relazione tra energia e momento:

$$k = \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}} \quad (\text{A.1.4})$$

$$dk = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} d\epsilon \implies d^3k = 4\pi k^2 dk = \frac{4\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{\epsilon} d\epsilon \quad (\text{A.1.5})$$

dunque:

$$n = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} \frac{4\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{\epsilon} d\epsilon \quad (\text{A.1.6})$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\epsilon} d\epsilon \quad (\text{A.1.7})$$

$$= \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} d\epsilon \quad (\text{A.1.8})$$

questa equazione definisce la densità di particelle $n(T, \mu)$ come funzione della temperatura e del potenziale chimico. In realtà, di solito, conosciamo la densità di particelle n e vogliamo determinare il potenziale chimico corrispondente: dobbiamo quindi interpretare questa equazione come una definizione implicita per $\mu(T, n)$.

Introduciamo la variabile adimensionale $z = e^{\beta\mu}$ (fugacità) e $x = \beta\epsilon$, conseguentemente:

$$dx = \beta d\epsilon \quad , \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad (\text{A.1.9})$$

così abbiamo:

$$n = \frac{(mk_B T)^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{z^{-1}e^x - 1} dx \quad (\text{A.1.10})$$

$$= \frac{(mk_B T)^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{z e^{-x}}{1 - z e^{-x}} \sqrt{x} dx \quad (\text{A.1.11})$$

per calcolare l'integrale sviluppiamo la serie geometrica:

$$\frac{z e^{-x}}{1 - z e^{-x}} = z e^{-x} (1 + z e^{-x} + z^2 e^{-2x} + \dots) \quad (\text{A.1.12})$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} z^p e^{-px} \quad (\text{A.1.13})$$

questo sviluppo converge per $|z e^{-x}| < 1$. Sostituiamo questa espressione e otteniamo una somma di integrali data da:

$$\int_0^\infty e^{-px} \sqrt{x} dx = \frac{1}{p^{3/2}} \int_0^\infty e^{-y} \sqrt{y} dy \quad (\text{A.1.14})$$

$$= \frac{1}{p^{3/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{A.1.15})$$

dove l'integrale unidimensionale è un caso particolare della funzione gamma di Eulero:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty y^{t-1} e^{-y} dy \quad , \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (\text{A.1.16})$$

La densità di particelle quindi sarà:

$$n = \left(\frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2}\right)^{3/2} g_{3/2}(z) \quad , \quad g_{3/2}(z) = \sum_{p=1}^\infty \frac{z^p}{p^{3/2}} = \text{PolyLog}\left[\frac{3}{2}, z\right] \quad (\text{A.1.17})$$

in cui notiamo che $g_{3/2}(z)$ è una rappresentazione in serie di una funzione nota, che è la *funzione polilogaritmica*, legata agli integrali sul logaritmo. Se $\text{Re}\{S\} > 1$, allora:

$$\text{PolyLog}[S, 1] = \zeta[S]. \quad (\text{A.1.18})$$

Se $\text{Re}\{S\} < 1$, il polilogaritmo sviluppa singolarità a $z = 1$, in particolare se S è intero negativo, la singolarità è del tipo:

$$\frac{1}{(z-1)^{-S-1}}. \quad (\text{A.1.19})$$

Usando il test del rapporto, si trova che la serie converge per $|z| < 1$, a $z = 1$ è ancora convergente:

$$g_{3/2}(1) = \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p^{3/2}} \quad (\text{A.1.20})$$

$$= \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \quad (\text{A.1.21})$$

$$= 2.612 \dots \quad (\text{A.1.22})$$

in cui $\zeta(S)$ è la zeta di Riemann, a cui adesso daremo due definizioni equivalenti, che differiscono solo per i raggi di convergenza:

$$\zeta(S) \equiv \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p^S} \equiv \prod_{p=\text{primi}} \left(\frac{1}{1-p^{-S}}\right). \quad (\text{A.1.23})$$

Chiarita la definizione di $\zeta(S)$, vediamo che a $z = 1$ abbiamo che:

$$\frac{dg_{3/2}(z)}{dz} = \frac{1}{z} \sum_{p=1}^\infty \frac{z^p}{p^{1/2}} \quad (\text{A.1.24})$$

$$= \frac{1}{z} \text{PolyLog}\left[\frac{1}{2}, z\right] \quad (\text{A.1.25})$$

qui il legame con ζ si perde, perchè $S = 1/2$, quindi minore di 1. Attorno a $z = 1$, quando $S = 1/2$, abbiamo un punto di diramazione:

$$\sim \frac{1}{\sqrt{z-1}} \quad (\text{A.1.26})$$

quindi:

$$\frac{dg_{3/2}(z)}{dz} \quad (\text{A.1.27})$$

divege a $z = 1$, come si vede in figura A.1.

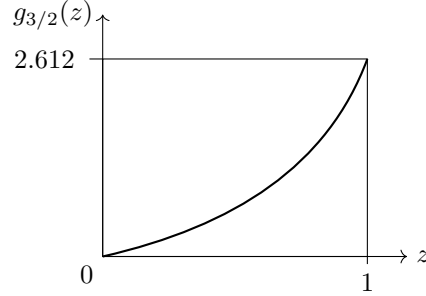


Figura A.1

Si può notare dal grafico che la funzione è monotona crescente, poi appare il punto di diramazione. Riscriviamo ora la funzione $g_{3/2}(z)$ come:

$$g_{3/2}(z) = \left(\frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{-3/2} n = \left(\frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2 n^{2/3}} \right)^{-3/2} \quad (\text{A.1.28})$$

per cui abbiamo:

- A $T \gg 1$ ($n \ll 1$), la parte a destra dell'uguale è molto piccola, e poichè $g_{3/2}(z) \sim z + \dots$ (è una funzione monotona crescente che parte da $z = 0$ in cui vale zero), si ottiene che:

$$\mu = \frac{1}{\beta} \log z \quad (\text{A.1.29})$$

$$\approx \frac{1}{\beta} \log (g_{3/2}(z)) \quad (\text{A.1.30})$$

$$= -\frac{3}{2} k_B T \log \left(\frac{m k_B T}{2\pi \hbar^2 n^{2/3}} \right) \quad (\text{A.1.31})$$

$$< 0 \quad (\text{A.1.32})$$

che corrisponde a un potenziale chimico negativo, visibile in figura A.2.

- Al diminuire della temperatura, il valore di z aumenta in modo continuo fino ad arrivare a $z = 1$, che corrisponde a $\mu = 0$. La temperatura

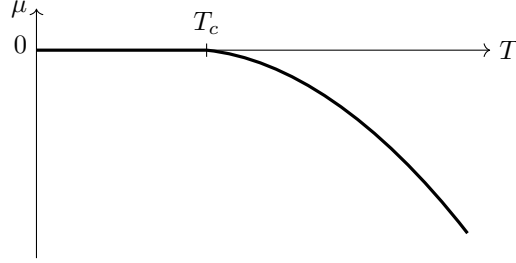


Figura A.2

a cui questo avviene è la temperatura critica T_c :

$$g_{3/2}(1) \equiv 2.612 \quad (\text{A.1.33})$$

$$= \left(\frac{2\pi\hbar^2 n^{2/3}}{m k_B T_c} \right)^{3/2} \quad (\text{A.1.34})$$

$$\Rightarrow T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{k_B m} \left(\frac{n}{2.612} \right)^{2/3}. \quad (\text{A.1.35})$$

Questa corrisponde alla *temperatura di condensazione di Bose-Einstein*.

Sostituendo i valori caratteristici dell'elio, si ottiene $T_c \sim 3.13$ K, un valore non troppo lontano da $T_\lambda = 2.17$ K.

Einstein notò che per $T < T_c$ a $\mu = 0$ il numero di particelle nello stato $\epsilon_k = 0$ diventa infinito. Più precisamente, possiamo affermare che se N è il numero totale di particelle del sistema, una frazione finita N_0/N di particelle occupa lo stato fondamentale, quello con $\vec{k} = 0$ (dove il pedice 0 per N_0 indica proprio che siamo nello stato $\vec{k} = 0$). Ponendo:

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \quad (\text{A.1.36})$$

$$e^{-\beta\mu} = \left(1 + \frac{1}{N_0} \right) \quad (\text{A.1.37})$$

$$\mu = -k_B T \log \left(1 + \frac{1}{N_0} \right) \quad (\text{A.1.38})$$

$$\sim -k_B \frac{T}{N_0} \quad (\text{A.1.39})$$

$$\rightarrow 0, \quad N_0 \rightarrow \infty. \quad (\text{A.1.40})$$

allora Einstein suggerì di considerare lo stato $\vec{k} = 0$ separatamente, e quindi di dividere il numero di particelle (A.1.1):

$$N = N_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{e^{\beta\epsilon_k} - 1} \quad (\text{A.1.41})$$

dove N_0 è il numero di particelle allo stato fondamentale, condensate, mentre il secondo termine indica il numero di particelle negli stati eccitati; qui abbiamo posto $\mu = 0$. Usiamo il limite termodinamico $V \rightarrow \infty$ e dividiamo per V , sostituendo la somma con l'integrale:

$$n = n_0 + \left(\frac{m k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \sqrt{x} dx \quad (\text{A.1.42})$$

$$= n_0(T) + 2.612 \left(\frac{m k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \quad (\text{A.1.43})$$

$$= n_0(T) + 2.612 \left(\frac{m k_B T_c}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (\text{A.1.44})$$

$$= n_0(T) + n(T_c) \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (\text{A.1.45})$$

$$= n_0 + n_n \quad (\text{A.1.46})$$

in cui $n(T_c) = n$, supponendo che il volume del sistema non vari al variare della temperatura. Quindi abbiamo ottenuto che n è la somma di n_0 (particelle "condensate") con n_n (particelle "normali"). La frazione di particelle condensate può essere scritta come:

$$\begin{cases} \frac{n_0}{n} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} & , \quad T < T_c \\ \frac{n_0}{n} = 0 & , \quad T > T_c \end{cases} \quad (\text{A.1.47})$$

che si può vedere in figura A.3.

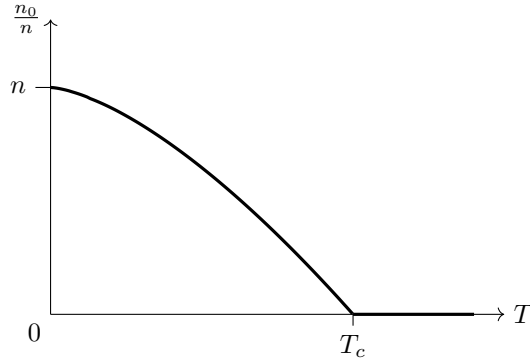


Figura A.3

Infatti abbiamo che:

- A $T = 0$: $n_0 = n$ e tutte le particelle sono nello stato fondamentale.
- Incrementando T , n_0 diminuisce monotonicamente.

- A $T \geq T_c$: $n_0 = 0$.

Possiamo determinare altre quantità termodinamiche, per esempio l'energia interna del sistema, dove ϵ è l'energia di particella singola. Facciamo una media sull'energia delle particelle:

$$U = V \int_0^\infty \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} g(\epsilon) d\epsilon \quad (\text{A.1.48})$$

$$= V (k_B T)^{5/2} \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2} \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{z e^{-x}}{1 - z e^{-x}} x^{3/2} dx \quad (\text{A.1.49})$$

$$= V (k_B T)^{5/2} \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2} \pi^2 \hbar^3} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) g_{5/2}(z) \quad (\text{A.1.50})$$

dividendo per $N = nV$, che è conservato e indipendente dalla temperatura:

$$N = nV = \begin{cases} V \left(\frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} g_{3/2}(z) & , \quad T \geq T_c \\ V \left(\frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} g_{3/2}(1) & , \quad T < T_c \end{cases} \quad (\text{A.1.51})$$

Abbiamo che la densità di energia interna è:

$$u = \frac{U}{N} = \begin{cases} \frac{3}{2} k_B T \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} & T \geq T_c \\ \frac{3}{2} k_B \frac{T^{5/2}}{T_c^{3/2}} \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} & T < T_c \end{cases} \quad (\text{A.1.52})$$

dove:

$$g_{5/2}(z) = \sum_{p=1}^\infty \frac{z^p}{p^{5/2}} \quad , \quad g_{5/2}(1) = \zeta\left(\frac{5}{2}\right) = 1.342 \quad (\text{A.1.53})$$

e da cui possiamo vedere:

- Quando $T \gg T_c$ ($z \approx 0$), $u \sim \frac{3}{2} k_B T$ (perchè $g_{5/2}(z) \approx z + \dots g_{3/2}(z) \approx z + \dots$), che è il risultato classico; la statistica di Bose-Einstein è irrilevante nel limite ad alte temperature:

$$C_V = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right) = \frac{3}{2} k_B. \quad (\text{A.1.54})$$

- Quando $T < T_c$ abbiamo:

$$C_V = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right) = \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} k_B. \quad (\text{A.1.55})$$

La capacità termica a volume costante presenta una cuspidè, segnalando che la transizione BEC è una transizione di fase termodinamica (ordine/disordine). Si veda la figura [A.4](#).

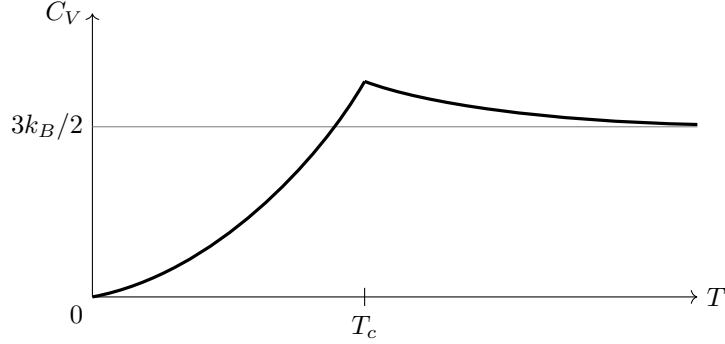


Figura A.4

Poiché:

$$C_V = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_P \quad (\text{A.1.56})$$

è continua, la BEC risulta essere una transizione di fase al secondo ordine. Definiamo la densità di entropia del sistema a $T < T_c$:

$$\frac{S}{N} = s(T) \quad (\text{A.1.57})$$

$$= \int_0^T dT' \frac{C_V}{T'} \quad (\text{A.1.58})$$

facciamo il cambio:

$$ds = \frac{du}{T} \quad , \quad du = C_V dT \quad (\text{A.1.59})$$

e otteniamo:

$$\frac{S}{N} = s(T) \quad (\text{A.1.60})$$

$$= \frac{15}{4} k_B \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \frac{2}{3} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (\text{A.1.61})$$

$$= \frac{5}{2} k_B \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (\text{A.1.62})$$

$$= s(T_c) \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (\text{A.1.63})$$

poichè:

$$\frac{N_n}{N} = \frac{N - N_0}{N} = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (\text{A.1.64})$$

possiamo scrivere:

$$S(T) = N s(T) \quad (\text{A.1.65})$$

$$= N_n s(T_c) + N_0 s(0) \quad , \quad s(0) = 0 \quad (\text{A.1.66})$$

questo risultato mostra che per $T < T_c$ il sistema è composto da una miscela statistica di N_0 particelle "condensate" con entropia $s(0) = 0$ e N_n particelle "normali" con entropia $s(T_c)$. Questo è il *modello a due fluidi* di Tisza (valido per la descrizione qualitativa dell'elio liquido).

Bibliografia

- [1] JF Annett. *Superconductivity, superfluids and condensates*. English. Oxford University Press, 2004. ISBN: 0198507550.
- [2] C. Enss e S. Hunklinger. *Low-Temperature Physics*. English. Springer Berlin, Heidelberg, 2010. ISBN: 9783642062162.
- [3] J. B. Ketterson e S. N. Song. *Superconductivity*. English. Cambridge University Press, 1999. ISBN: 0198507550.
- [4] L.P. Pitaevskii e S. Stringari. *Bose-Einstein Condensation*. International Series of Monographs on Physics. Clarendon Press, 2003. ISBN: 9780198507192.