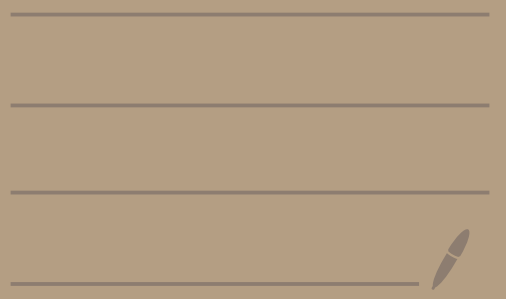
Metodi 2 - Esercitazioni



TRASFORMAZIONI LINEARI FRATTE

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

DEL TIPO $$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

AFFINCHÈ NON BANALE $ad - bc \neq 0$

↳ DETERMINANTE 2×2

COSÌ VETTORE a,b E c,d INDIPENDENTE E NON SONO MULTIPLI E SE $ad - bc = 0$ POTREI AVERE

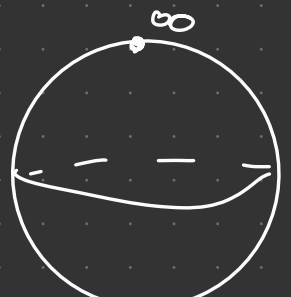
$$\begin{cases} c = \lambda a \\ d = \lambda b \end{cases} \quad \text{E} \quad f(z) = \text{COST}$$

È DIMOSTRABILE CHE LE f SONO TUTTE E SOLE LE MAPPE INVERTIBILI DA $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

CON $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$



$\sim$



$\overline{\mathbb{C}}$ SFERA DI RIEMANN

GUARDIAMO TRASFORMAZIONI ELEMENTARI

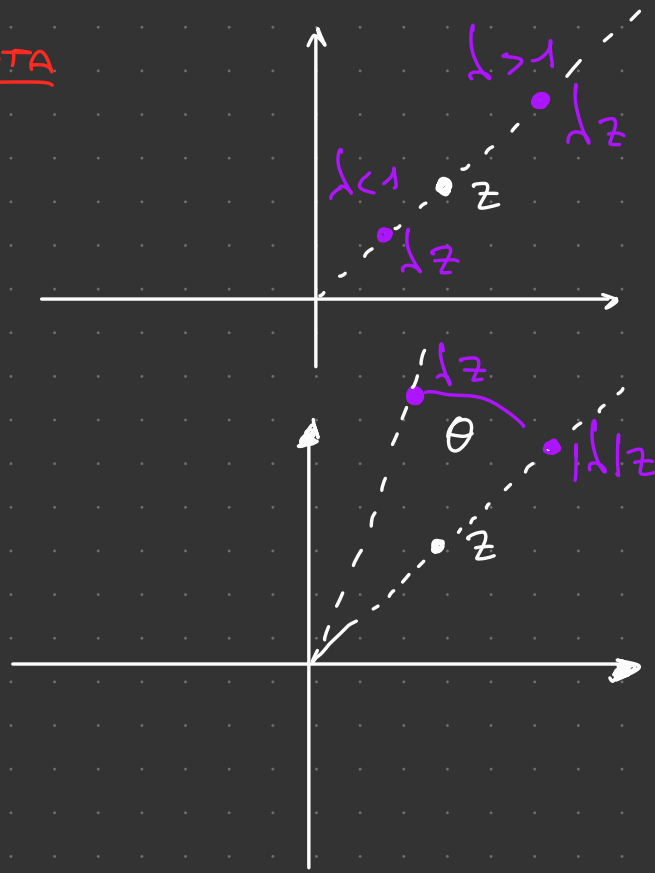
1) TRASLAZIONI $z \to z + a$ $(a \in \mathbb{C})$

$$T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

2) DILATAZIONI (COMPLESSE)

$$D : \begin{matrix} z \mapsto \lambda z \\ \mathbb{C} \to \mathbb{C} \end{matrix} \quad \lambda \in \mathbb{C}_* = \mathbb{C} - \{0\}$$

NOTA



$\lambda \in \mathbb{R} > 0$

$\lambda \in \mathbb{C}$

$\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$

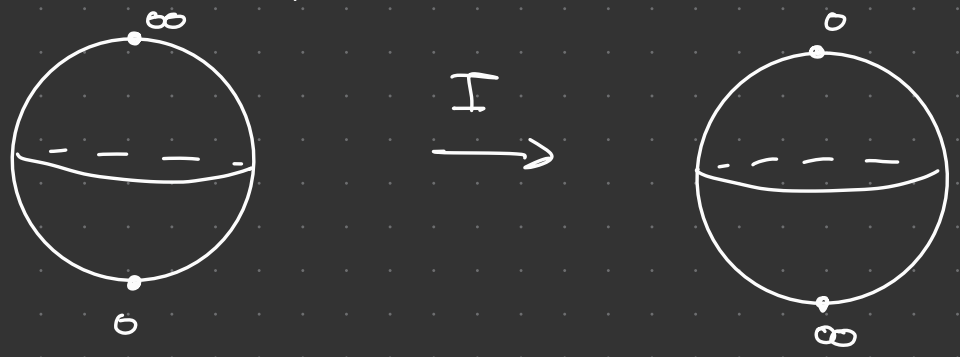
3) INVERSIONE $I : z \longmapsto \frac{1}{z}$

$$I(|z| e^{i\theta}) = |z|^{-1} e^{-i\theta}$$

IN PARTICOLARE $I : 0 \to \infty$

$\infty \to 0$

$I : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$



LE TRASFORMAZIONI LINEARI FRATTE SI OTTENGONO COMPONENDO QUESTE 3 TRASFORMAZIONI LINEARI

COMPOSIZIONE DI TRASFORMAZIONI ELEMENTARI

$$z \xrightarrow{T_a} z+a \xrightarrow{D_\lambda} \lambda(z+a) \xrightarrow{I} \frac{1}{\lambda z+\lambda a} \xrightarrow{T_b} \frac{1}{\lambda z+\lambda a}+b \quad (*)$$

$$(*) = \frac{1+b\lambda z+b\lambda a}{\lambda z+\lambda a} = \frac{(b\lambda)z+(1+b\lambda a)}{\lambda z+\lambda a}$$

CHE È QUALCOSA DELLA FORMA $\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$

HO TROVATO $f = T_b \circ I \circ D_\lambda \circ T_a$

E CI SONO 3 PARAMETRI COMPLESSI ASSOCIATI b, λ, a
MA NELL'ESPRESSIONE SEMBRANO 4 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$\Rightarrow$ C'È UNA RIDONDANZA

$$\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \cdot \frac{a}{a} = \frac{(\alpha a)z+(\beta a)}{(\gamma a)z+(\delta a)}$$

QUINDI DEVO TOGLIERE UN PARAMETRO E VALE L'EQUIVALENZA

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \sim (a\alpha, a\beta, a\gamma, a\delta)$$

$$\left(1, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$$

CHE SONO 3 PARAMETRI INDIPENDENTI

COMPOSIZIONE DI TRASFORMAZIONI LINEARI FRATTE

$$z \longrightarrow \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1} = w \longrightarrow \frac{\alpha_2 w + \beta_2}{\gamma_2 w + \delta_2} = \frac{(\alpha_2\alpha_1 + \beta_2\gamma_1) z + (\alpha_2\beta_1 + \beta_2\delta_1)}{(\gamma_2\alpha_1 + \delta_2\gamma_1) z + (\gamma_2\beta_1 + \delta_2\delta_1)}$$

ANCORA FRATTA → UNA TRASF. LINEARE

QUINDI LA COMPOSIZIONE DI T.L.F. È ANCORA UNA T.L.F.

BELLO PERCHÈ $f \in TLF$, $g \in TLF$

$$f \circ g \in TLF$$

$$g \circ f \in TLF$$

QUINDI CI SARÀ UNO SPAZIO (6 DIR $\mathbb{R}$ o 3 $\mathbb{C}$) → FUNZIONALE IN CUI ESISTE UN PRODOTTO CHE NON FA USCIRE DALLO SPAZIO, E VIENE DA PENSARE AD UN GRUPPO

REMARK GRUPPO: INSIEME DOTATO DI PRODOTTO

$$G \times G \to G$$
$$f^{\varphi} \quad g^{\varphi} \qquad f \cdot g \in G$$

① $\exists\, 1 \in G \quad f \cdot 1 = 1 \cdot f = f \quad \forall f \in G$

↳ IDENTITÀ

PER LE TLF: $1 : z \mapsto z = \dfrac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

② $\exists!$ INVERSA $\forall f \in G$

OVVERO, DATA f $\exists! f^{-1}$ tc $f^{-1} \cdot f = f \cdot f^{-1} = 1$

↳ INVERSA DESTRA E SINISTRA

PER LE TLF: $g(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = w$

DEVO VEDERE SE $\exists\, g^{-1}(w) = \dfrac{aw + b}{cw + d}$

$$g^{-1} \circ g(z) = \frac{a\,g(z)+b}{c\,g(z)+d} = \frac{(a\alpha+b\gamma)z+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+d\gamma)z+(c\beta+d\delta)}$$

DEVO DETERMINARE a, b, c, d tc $g^{-1} \circ g(z) = z$

$$\begin{cases} a\beta + b\delta = 0 \\ c\alpha + d\gamma = 0 \\ a\alpha + b\gamma = c\beta + d\delta \end{cases}$$

MA COSÌ CI PERDIAMO PEZZI

CORRISPONDENZA TRA TLF E MATRICI 2X2

CONSIDERIAMO

$$g_1(z) = \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = G_1$$

$$g_2(z) = \frac{\alpha_2 z + \beta_2}{\gamma_2 z + \delta_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = G_2$$

SE COMPONGO TROVO

$$g_2 \circ g_1(z) = \frac{(\alpha_2\alpha_1 + \beta_2\gamma_1)z + (\alpha_2\beta_1 + \beta_2\delta_1)}{(\gamma_2\alpha_1 + \delta_2\gamma_1)z + (\gamma_2\beta_1 + \delta_2\delta_1)}$$

E VEDO

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2\alpha_1 + \beta_2\gamma_1 & \alpha_2\beta_1 + \beta_2\delta_1 \\ \gamma_2\alpha_1 + \delta_2\gamma_1 & \gamma_2\beta_1 + \delta_2\delta_1 \end{pmatrix}$$

QUINDI SI VEDE $g_2 \circ g_1(z) \longrightarrow G_2 \cdot G_1$

QUINDI TROVO UN ISOMORFISMO TRA GRUPPI

C'È CORRISPONDENZA TRA LE TLF E LE MATRICI

CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA INSIEMI IN CUI SI PRESERVA IL PRODOTTO

E QUINDI CAPISCO

TLF $\longleftrightarrow$ MATRICI 2×2 INVERTIBILI $\det G \neq 0$

CHIAMATO $GL(2, \mathbb{C})$

GRUPPO LINEARE

DIM = 2

COEFF $\mathbb{C}$

ORA, CERCHIAMO L'INVERSA DI UNA TLF

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \longrightarrow F = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

DA GALI TROVO $$F^{-1} = \frac{1}{\det F}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

QUINDI POSSO TROVARE $f^{-1}(w)$ ANDANDO INDIETRO DA F^{-1}

$$f^{-1}(w) = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha} \longleftarrow F^{-1}$$

$\longrightarrow$ $\det F$ NON LO VEDO PERCHÈ SI SEMPLIFICA

PERÒ NON HO UN ISOMORFISMO TRA TLF E $GL(2,\mathbb{C})$ PERCHÈ NON MI INTERESSA COME SIA IL DETERMINATE (CHIEDERE CHE $\det \neq 0$ È RIDONDANTE)

MA IN $GL(2,\mathbb{C})$ POSSO IDENTIFICARE UN SOTTOGRUPPO $SL(2,\mathbb{C})$ OVVERO MATRICI 2×2 tc $\det = 1$

E POSSO VEDERE CHE È UN GRUPPO POICHÈ:

$A, B \in SL(2,\mathbb{C})$ $\quad \det A \cdot \det B = \det(A \cdot B)$

GRUPPO SPECIALE LINEARE

E SONO MATRICI DEL TIPO $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha\delta - \beta\gamma = 1$

QUINDI ORA POTREI AVER TROVATO L'ISOMORFISMO

$$TLF \longleftrightarrow SL(2,\mathbb{C})$$

$$f = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$

3 PARAMETRI COMPLESSI

DATA LA MATRICE HO UN'UNICA f

MA DATA f NON HO UN'UNICA MATRICE

POICHÈ

$$f = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \longrightarrow F = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad -F = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ AD UNA f CORRISPONDONO 2 MATRICI $\in SL(2,\mathbb{C})$ CON STESSO $\det$

MA POSSO RETTERLI IN QUALCOSA PIÙ PICCOLO DI $SL(2,\mathbb{C})$ OVVERO PRENDERE UN'OPERAZIONE CHE PERMETTA L'ISOMORFISMO:

IL QUOZIENTE $$\frac{SL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}$$

NOTA $\mathbb{Z}_2$ È UN GRUPPO DISCRETO $\{1, -1\}$

↳ CHIUSO RISPETTO IL PRODOTTO

L'IDEA È CHE $\mathbb{Z}_2$ AGISCE COME GRUPPO SU $SL(2,\mathbb{C})$

$$1 : F \to F \in SL(2,\mathbb{C})$$

$$-1 : F \to -F \in SL(2,\mathbb{C})$$

QUESTO MI PERMETTE DI DEFINIRE UNA RELAZIONE DI

EQUIVALENZA.

IN GENERALE, $\mathcal{G}$ GRUPPO CHE AGISCE SU G,

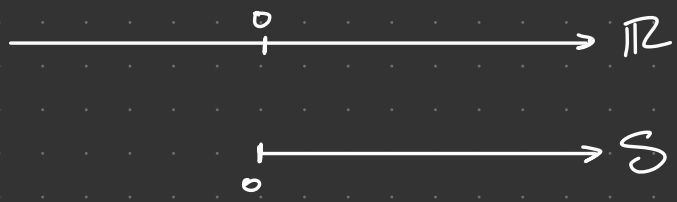
$$G_1 \sim G_2 \qquad G_1, G_2 \in G$$

$SL(2,\mathbb{C})$

SE $\exists\, \lambda \in \mathcal{G} \mid G_1 = \lambda G_2$

$\mathbb{Z}_2$

QUINDI NEL MIO SPAZIO HO UN'OPERAZIONE INTERNA CHE MI COLLEGA I PUNTI, AVENDOCELA POSSO FARE UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA E DIRE CHE 2 PUNTI COLLEGABILI TRAMITE L'AZIONE DI QUESTO GRUPPO LI CONSIDERO IDENTIFICATI. È LA STESSA COSA DEL PASSAGGIO RETTA $\leftrightarrow$ SEMIRETTA POICHÈ S È $\mathbb{R}$ QUOZIENTATO SU $\mathbb{Z}_2$



$$S = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}_2}$$

, DICO CHE SU $\mathbb{R}$ 2 PUNTI SONO IDENTIFICATI SE DIFFERISCONO DEL SEGNO.

E $\frac{G}{\mathcal{G}}$ È LO SPAZIO DELLE CLASSI DI EQUIVALENZA

TORNANDO AL NOSTRO CASO, CHIAMO

$$\frac{SL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2} = PSL(2,\mathbb{C})$$

↳ GRUPPO LINEARE SPECIALE PROIETTIVO

QUINDI HO TROVATO L'ISOMORFISMO

$$TLF \longleftrightarrow PSL(2,\mathbb{C})$$

↓

MATRICI 2×2 A $\det = 1$ IDENTIFICATE A MENO DI UN SEGNO

UN'ALTRA PROPRIETÀ:

UNA TLF È UNIVOCAMENTE DETERMINATA

$$(z_1, z_2, z_3) \longrightarrow (w_1, w_2, w_3)$$

↳ SE CONOSCO COME VENGONO MAPPATI 3 PUNTI

VEDI ESERCIZIO 2

UN'ALTRA PROPRIETÀ: LE TLF MANDANO RETTE E CERCHI IN RETTE E CERCHI

VEDI ESERCIZIO 3

ESERCIZI ① $g(z) = \frac{3z+4}{5z+i}$ $\quad h(z) = \frac{2z+4}{6z-i}$

VOGLIO $g \circ h(z)$ E DARNE UNA RAPPR. IN $PSL(2,\mathbb{C})$

È COMODO PASSARE A $PSL(2,\mathbb{C})$

$$g \to \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & i \end{pmatrix} \qquad h \to \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -i \end{pmatrix}$$

$$gh = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 12-4i \\ 10+6i & 21 \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C})$$

DEVO ANDARE IN $PSL(2,\mathbb{C})$

E DEVO CALCOLARE

$$\frac{1}{\sqrt{\det(\,\cdot\,)}}(\,\cdot\,) = \pm \frac{1}{\sqrt{486-32i}} \begin{pmatrix} 30 & 12-4i \\ 10+6i & 21 \end{pmatrix}$$

OSS IL FATTO CHE SIA $PSL(2,\mathbb{C})$ E NON $GL(2,\mathbb{C})$ VA A BRACCETTO CON IL FATTO CHE LA MATRICE HA DAVANTI UNA RADQ CHE SO ESSERE UNA $\mathbb{C}$ POLIDROMA, CHE HA 2 RAMI, CHE SONO DEFINITI A MENO DI UN SEGNO.

(2) $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \longrightarrow (0, 1, \infty)$

VOGLIO $\zeta_1 \to 0$

$\zeta_3 \to \infty$

$$\frac{(z-\zeta_1)}{(z-\zeta_3)}$$

ORA MANCA SOLO CHE $\zeta_2 \to 1$

$$\left.\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_3}\right|_{z=\zeta_2} = \frac{\zeta_2-\zeta_1}{\zeta_2-\zeta_3}$$

E QUINDI HO TROVATO

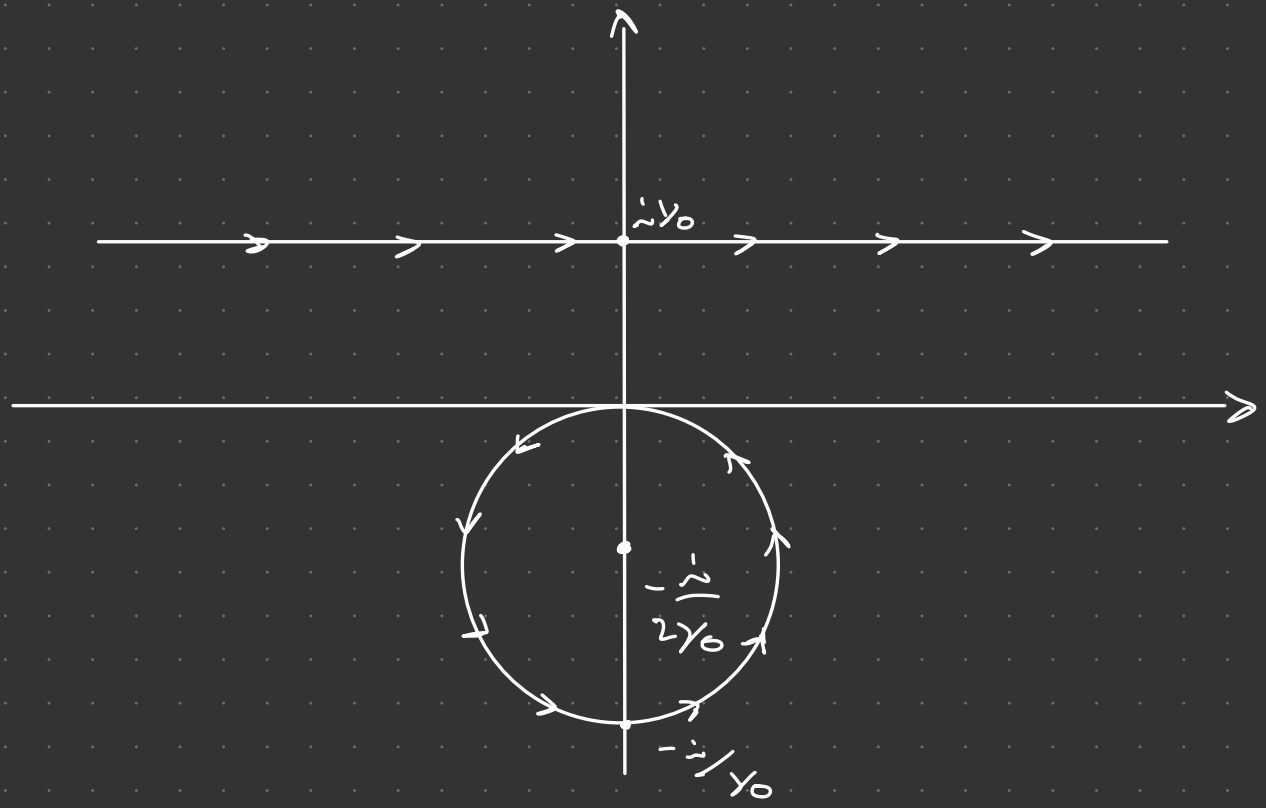
$$f(z) = \frac{\zeta_2-\zeta_3}{\zeta_2-\zeta_1}\,\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_3}$$

ESERCIZIO TROVA LA TLF $(0, 1, \infty) \to (1, \infty, 0)$

ANS: $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$

(3) CONSIDERIAMO $z(t) = t + i y_0$, $y_0 > 0$ $t \in \mathbb{R}$

↳ FISSATO



CONSIDERO L'INVERSIONE $I(z(t)) = \dfrac{1}{t + iy_0}$

CERCHIO CENTRATO IN $-\dfrac{i}{2y_0}$

ESERCIZIO DIMOSTRA $\dfrac{1}{t + iy_0}$ È UN CERCHIO

TIP SCRIVI $Re^{i\theta}$, $\dfrac{1}{t + iy_0} = -\dfrac{i}{2y_0} + \dfrac{1}{2y_0} e^{i\theta(y_0, t)}$

E TROVARE $e^{i\theta} = \gamma = \frac{\gamma_0 + it}{t + i\gamma_0}$

È UNA FASE POICHÈ $|\gamma|^2 = 1$

ESERCIZI PER CASA:

2) $\operatorname{Res}_{z=\infty} z^m e^{2/z}$

PENSA ES 6)

9) DISCUTERE $\operatorname{Res}_{z=1} \dfrac{1}{\ln\left(z^{\frac{1}{2\pi i}}\right)+1}$

ES 1 CALCOLA IL RESIDUO ALL'∞ DI

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}$$

CONVIENE ESPANDERE LA FUNZIONE IN $z=\infty$ $\left(\frac{1}{z-a}\right)$ E POI PRENDERE IL COEFFICIENTE DI $\frac{1}{z}$ CAMBIATO DI SEGNO

$$f(z) = \frac{e^z}{z^4\left(1-\frac{9}{z^2}\right)} = \frac{1}{z^4}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^{2m}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}z^m$$

$$= \sum_{m,m=0}^{\infty}\frac{9^m}{m!}\,\frac{1}{z^{4+2m-m}}$$

↳ VOGLIO $\frac{1}{z}$

QUINDI $\quad 4+2m-m=1 \rightsquigarrow m=4+2m-1$

$$\Rightarrow f(z) = \ldots + \left(\ldots\right)\frac{1}{z} + \ldots$$

$$\left(\ldots\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{9^m}{(4+2m-1)!}$$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z\to\infty} f(z) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{9^m}{(4+2m-1)!} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{2\pi}\sinh(3)$$

ES 3 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} e^{\frac{z}{1-z}}$

RISCRIVO $f(z) = e^{-1+\frac{1}{1-z}} = \frac{1}{e} e^{\frac{1}{1-z}}$

LO ESPANDO CON $\frac{1}{1-z}$

$$f(z) = \frac{1}{e}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\frac{1}{(1-z)^m} = \frac{1}{e}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\frac{1}{(z-1)^m}$$

VOGLIO IL COEFFICIENTE DI $\frac{1}{z-1}$ CAMBIATO DI SEGNO

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} = -\frac{1}{e}(-1)^1\frac{1}{1!} = \frac{1}{e}$$

POLIDROMIA

4) CONSIDERARE $f(z) = \sqrt{z}$ E :
- ESPANDERE $f(z)$ IN $z = 1$
- RAGGIO DI CONVERGENZA
- INTERPRETARE IL RISULTATO

NON VEDO LA POLIDROMIA

$$z = 1 + w \quad \Rightarrow \quad g(w) = \sqrt{1+w} = (1+w)^{1/2}$$

ESPANDO $g(w)$

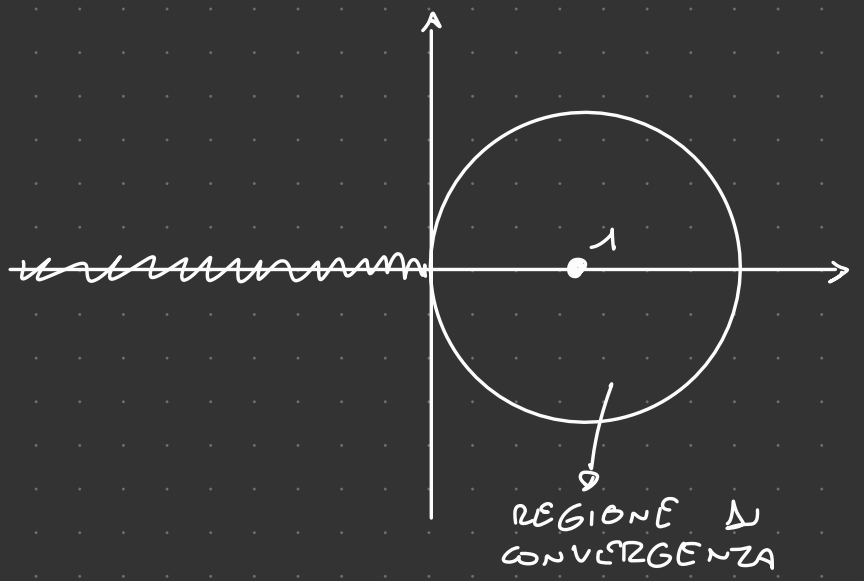
$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} w^n$$

DATA $\sum_n a_n (z - z_0)^n$ IL RAGGIO DI CONVERGENZA È

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{\binom{1/2}{n+1}}{\binom{1/2}{n}} = 1$$

QUINDI CAPISCO CHE IN $z=0$ HO UNA SINGOLARITÀ, MA NON POLO O SING. ESSENZIALE DI METODI I, MA È UN PUNTO DI DIRAMAZIONE DA CUI PARTE UN TAGLIO



5) STUDIARE LE DETERMINAZIONI DI

$$f(z) = (z^{1/2} - 1)(z^{1/3} - 1)$$

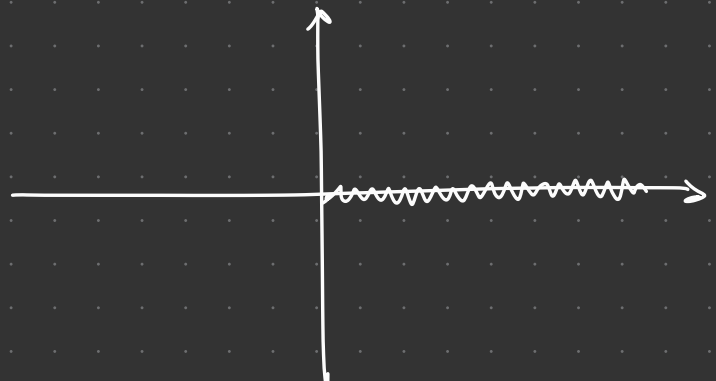
SO CHE HO POLIDROMIA

I PUNTI DI DIRAMAZIONE SONO DOVE $f(z)$ SI ANNULLA E DOVE FA ∞

PIANO $\longrightarrow$ PIANO TAGLIATO

$z \in \mathbb{C} \longrightarrow \tilde{z} \in \mathbb{C} \setminus \{\text{TAGLIO}\}$

FOGLIO DI RIEMANN



IN QUESTO CASO VUOL DIRE CHE

$$\tilde{z} = |\tilde{z}| e^{i\theta} \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

SU OGNI FOGLIO DI RIEMANN POSSO DEFINIRE

$$z_k = \tilde{z}\, e^{2\pi i k} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ DETERMINAZIONI = VALORI DELLA FUNZIONE POLIDROMA SU OGNI FOGLIO DI RIEMANN

$$f(z) \longrightarrow f_k(z) = f(\tilde{z}\, e^{2\pi i k})$$

↳ VALUTO LA f SUL k-ESIMO FOGLIO

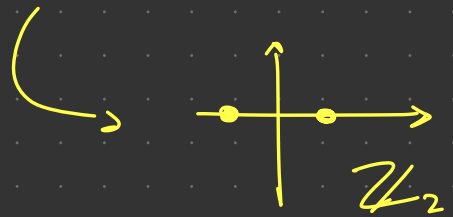
QUINDI

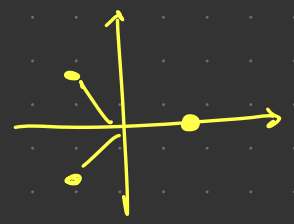
$$f_k(z) = \left((\tilde{z}\, e^{i 2\pi k})^{1/2} - 1 \right)\left((\tilde{z}\, e^{i 2\pi k})^{1/3} + 1 \right)$$

ORA LE AMBIGUITÀ SULLA POTENZA NON SONO AMBIGUE, PERÒ HO $e^{i 2\pi k}$

$$f_k(z) = \left(\tilde{z}^{1/2} e^{\pi i k} - 1 \right)\left(\tilde{z}^{1/3} e^{i\frac{2\pi}{3}k} + 1 \right)$$

$$= \left(\tilde{z}^{1/2} (-1)^k - 1 \right)\left(\tilde{z}^{1/3} e^{i\frac{2\pi}{3}k} + 1 \right)$$





RADICI $\sqrt[3]{}$ DELL'IDENTITÀ

$\mathbb{Z}_3$

HO 2 DETERMINAZIONI DALLA PRIMA $(\dots)$ E 3 DALLA SECONDA

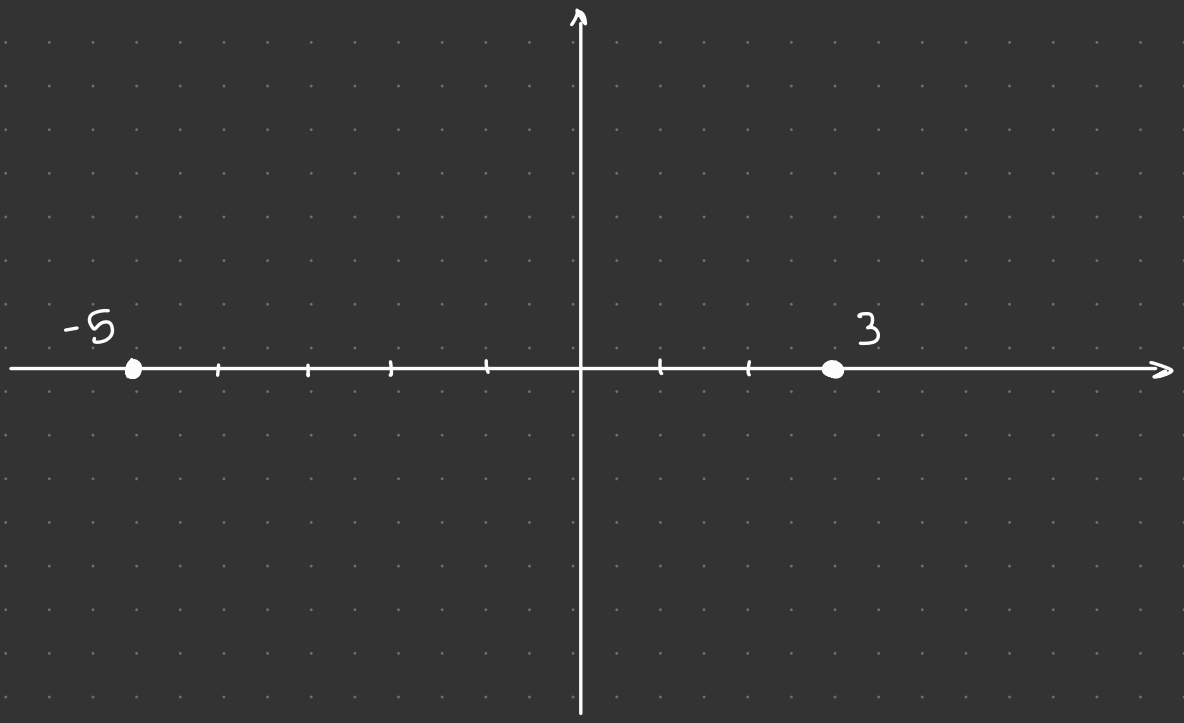
$\Rightarrow$ 6 DETERMINAZIONI

$\Rightarrow$ 6 FOGLI DI RIEMANN

6) $f(z) = \left(\frac{3-z}{5+z}\right)^{\alpha}$ $\quad \alpha \in \mathbb{C}$

α NON È INTERO $\Rightarrow$ HA ASPETTO POLIDROMIA

$\Rightarrow$ P.TI DIRAMAZIONE $z = 3 \ \vee \ z = -5$

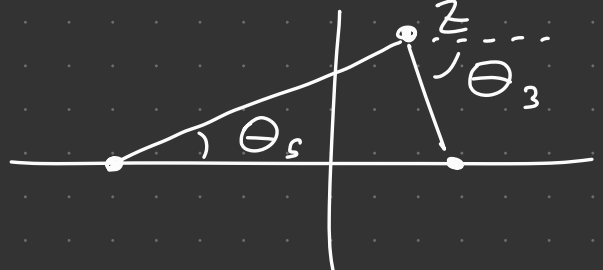


HO 2 SCELTE POSSIBILI PER METTERE IL TAGLIO

POSSO CONSIDERARE LE 2 QUANTITÀ

$(z-3)^{\alpha}$

$(5+z)^{\alpha}$

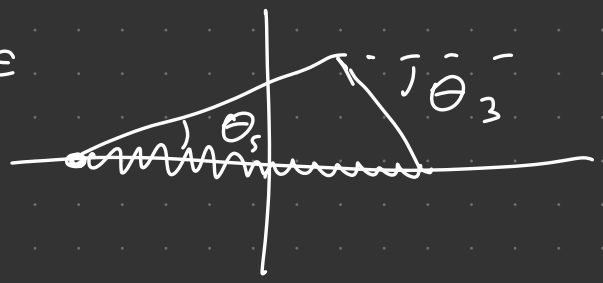


DARE CONDIZIONI SUL TAGLIO DO CONDIZIONI SU MODULO E FASE DI $z-3$ E $5+z$

SCRIVO $(z-3)^{\alpha} = |z-3| e^{i\theta_3}$

$(z-3)^{\alpha} = |5+z| e^{i\theta_5}$

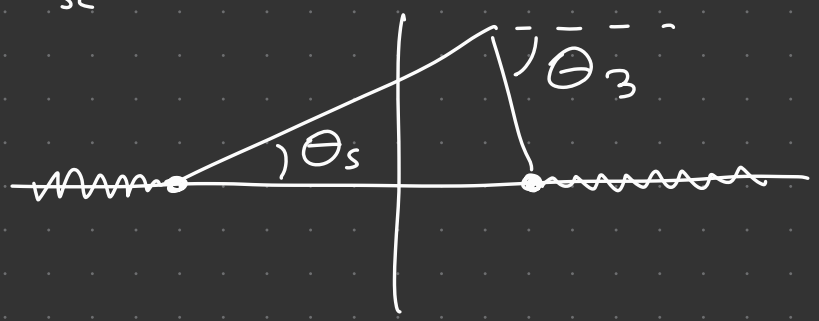
SE



$$\begin{bmatrix} 0 \le \theta_5 < 2\pi \\ -2\pi \le \theta_3 < 0 \end{bmatrix}$$

SE NON VALGONO I VINCOLI HO POLIDROMIA

SE



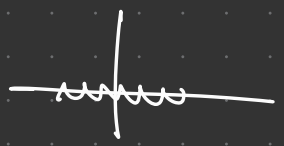
$$\begin{bmatrix} -\pi \le \theta_5 < \pi \\ -\pi \le \theta_3 < \pi \end{bmatrix}$$

CI SONO 2 - POSSIBILI CASI

① → GIRO ATTORNO AD UN SOLO PUNTO DI DIRAMAZIONE (GUARDO LA POLIDROMIA SOLO DI UNO DEI 2)

(2) → GIRO ATTORNO AD ENTRAMBI I PUNTI DI DIRAMAZIONE (GUARDO LA POLIDROMIA DI ENTRAMBI I PEZZI)

SE FACCIO 1. E 2. STO VIOLANDO I VINCOLI (SINGOLARMENTE O ENTRAMBI)

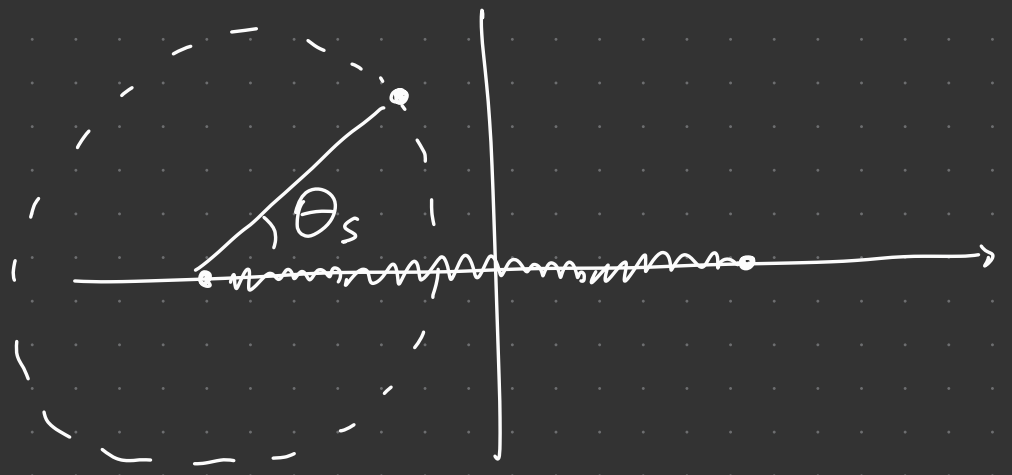
PRENDO  E GUARDO (1)

GIRO ATTORNO $z_* = -5$

$\Rightarrow \theta_5 \to \theta_5 + 2\pi$

MA $\theta_3 \to \theta_3$

$f(z) \to f(z) e^{i 2\pi \alpha}$

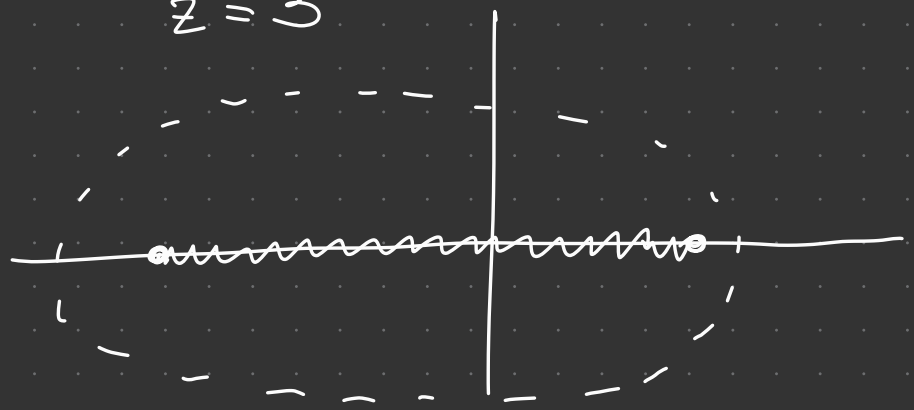


(2) → GIRO ATTORNO $z = -5$ $z = 3$

$\theta_5 \to \theta_5 + 2\pi$

$\theta_3 \to \theta_3 + 2\pi$

$f(z) \to e^{i\alpha(2\pi - 2\pi)} f(z) = f(z)$



MA POTREI DEFINIRE

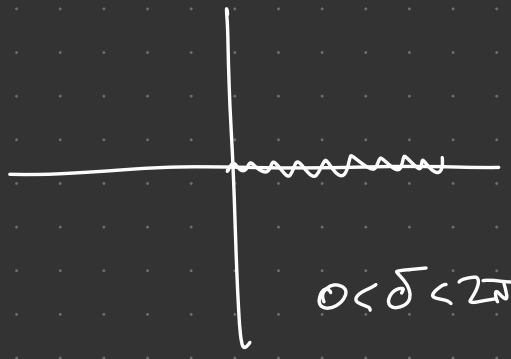
$$\frac{3-z}{5+z} = \left|\frac{3-z}{5+z}\right| e^{i(\theta_3-\theta_5)}$$

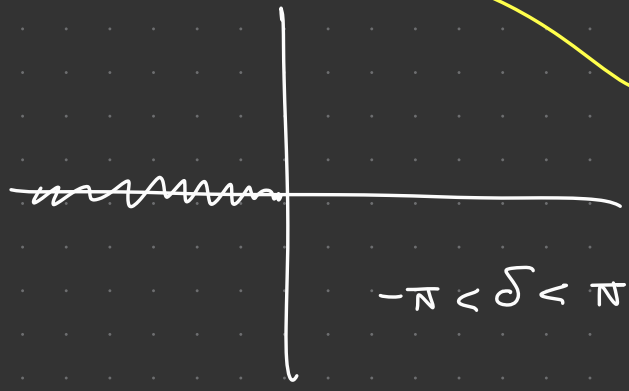
CHIAMO $\delta = \theta_3 - \theta_5$ E AVRÒ $0 < \delta < 2\pi$

$-\pi < \delta < \pi$

CHE SIGNIFICA DEFINIRE $w = \frac{z-3}{5+z}$ E DARE UNA FASE δ A w

E HO LE POSSIBILITÀ





$\in SL(2,\mathbb{C})$

E MANDA $z=3 \to 0$

$z=-5 \to \infty$

$$\text{f)}\quad f(z) = \left((3-z)(5+z)\right)^{\alpha}$$

SCRIVO $\quad (3-z)^{\alpha} = |3-z|^{\alpha} e^{i\alpha\theta_3}$

$\quad (5+z)^{\alpha} = |5+z|^{\alpha} e^{i\alpha\theta_5}$

$$f(z) = \left(|3-z||5+z|\right)^{\alpha} e^{i\alpha(\theta_3+\theta_5)}$$

ORA SE GIRO ATTORNO 3 O 5 PRENDO $e^{i2\pi\alpha}$

MA SE GIRO ATTORNO TUTTI E DUE PRENDO $e^{i2\pi\alpha \cdot 2}$

QUI HO 3 P.TI DI DIRAMAZIONE

PERÒ POTREI TROVARE α t.c. $f(z)$ ABBIA SOLO 2 P.TI DI DIRAMAZIONE

OVVERO $\quad e^{4\pi i\alpha} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

PERÒ MI SERVE CHE -5 E 3 SI RESTINO

QUINDI CHE $e^{i2\pi\alpha} \neq 1 \Rightarrow \alpha \neq 1$

QUINDI L'UNICO È $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots = \frac{2M+1}{2}$

IN GENERALE SE POSSO CONSIDERARE

$$f(z) = \left[\prod_{k=1}^{n} (z - z_k) \right]^M$$

NON HA SOLO AL P.TO FINITO DI DIRAMAZIONE ∞, MA NE HA

8) CALCOLA $\operatorname{Res}_{z=1/2} \frac{1}{1+(2z)^{1/4}}$

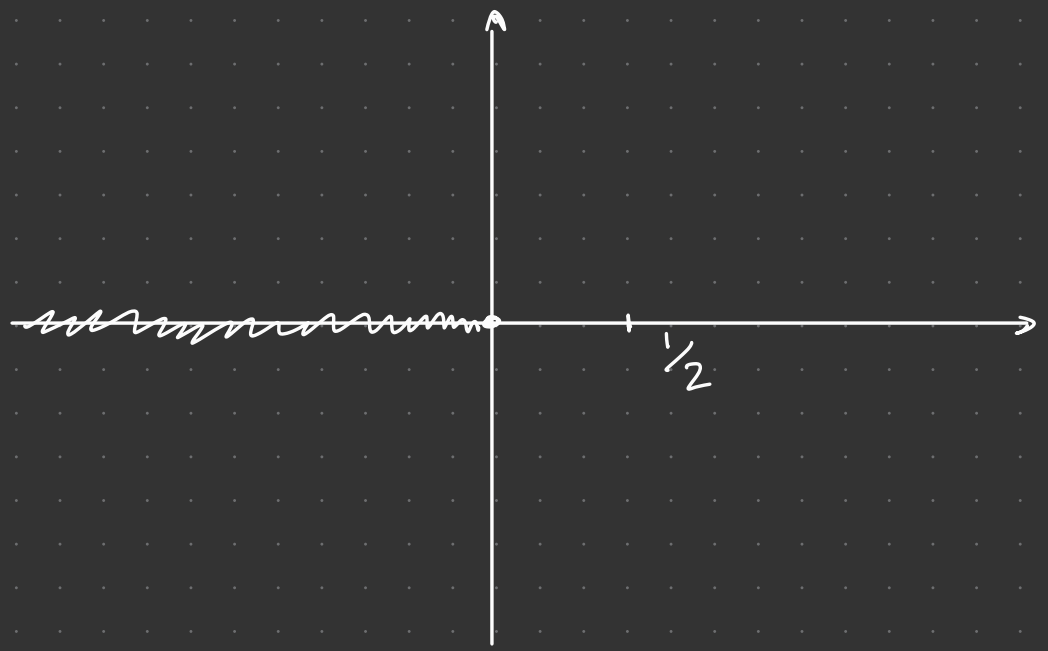
HO UNA FUNZIONE POLIDROMA

⇒ DEVO DETERMINARE IL RESIDUO SUI FOGLI IN CUI NON È NULLO (OVVERO DOVE HO POLI)

DEVO DETERMINARE LE DETERMINAZIONI

$z=0$, $z=\infty$ P.TI DI DIRAMAZIONE

SCELGO IL TAGLIO



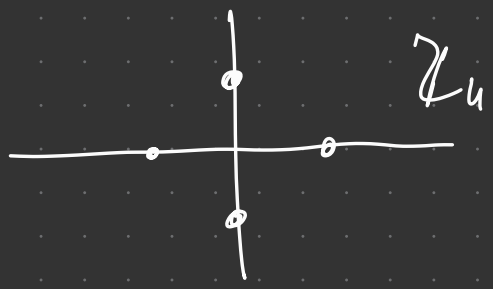
$\tilde{z} = |z| e^{i\theta} \qquad -\pi \leq \theta < \pi$

DETERMINAZIONI:

$z_k = \tilde{z}\, e^{i 2\pi k}$

$$f_k(z) = f(z_k) = \frac{1}{1 + \left(2\tilde{z}\, e^{-i2\pi k}\right)^{1/4}} = \frac{1}{1 + (2\tilde{z})^{1/4}\, e^{\frac{\pi i k}{2}}}$$

LE DETERMINAZIONI DIPENDONO DA CHE VALORI PUÒ ASSUMERE $e^{\frac{\pi i k}{2}}$ $\Rightarrow$ $k = 0, \dots, 3$



$\Rightarrow$ 4 FOGLI DI RIEMANN

TROVO RES $\neq 0$ DOVE IL DEN SI ANNULLA

$$\Rightarrow \tilde{z} = \frac{1}{2} e^{i0}$$

$$D\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 + (2\tilde{z})^{1/4} e^{\frac{\pi i k}{2}} = 1 + e^{\frac{\pi i k}{2}}$$

$$D\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0 \iff e^{i\frac{\pi k}{2}} = -1 \iff k = 2$$

QUINDI SUL FOGLIO 2

$$f_2(\tilde{z}) = \frac{1}{1 - (2\tilde{z})^{1/4}} \qquad \tilde{z} = |z| e^{i\theta} \qquad -\pi < \theta < \pi$$

DEVO CALCOLARE Res

$$\operatorname*{Res}_{\tilde{z}=1/2} f_2(z) = \oint_{1/2} \frac{d\tilde{z}}{2\pi i} \frac{1}{1-(2\tilde{z})^{1/4}} = \oint_0 \frac{dw}{2\pi i} \frac{1}{1-(2w+1)^{1/4}}$$

$$w = \tilde{z} - \frac{1}{2}$$

$$\xi = 2w \qquad = \frac{1}{2} \oint_0 \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{1}{1-(\xi+1)^{1/4}} \quad \circledast$$

STO GIRANDO ATTORNO $\xi = 0$ PICCOLO

ESPANDO

$$(\xi+1)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}\xi + O(\xi^2)$$

$$\circledast = \frac{1}{2} \oint \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{1}{1-1-\frac{1}{4}\xi+O(\xi^2)} = \frac{1}{2} \oint \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{-4}{\xi+O(\xi^2)}$$

QUINDI IL $\operatorname{Res} = \frac{-4}{2} = -2$

PER CASA: (SOL)

- $I(z) = \int_0^\infty dx \, \frac{x^{z-1}}{1+x^3} = \frac{\pi}{3} \sin\left(\pi \frac{z}{3}\right)$

- $I(\alpha) = \int_0^\infty dx \, \frac{\cosh(\alpha \ln x)}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\cos(\pi\alpha)}$

- $\int_0^\infty dx \, \frac{\ln^2 x}{1+x^2} = \frac{\pi^3}{8}$

$\int_0^\infty dx \, \frac{\ln^3 x}{1+x^2} = 0$

$\int_0^\infty dx \, \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{8}$

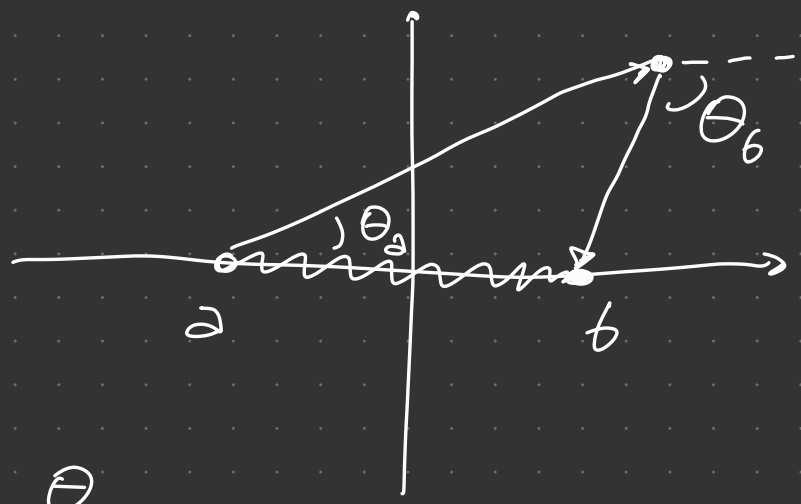
$\int_0^\infty dx \, \frac{\ln x}{(x+2)^3} = \frac{1}{8}(\ln 2 - 1)$

- $\int_{-2}^{-1} dx \, \frac{1}{(x-2)^2} \left(\frac{x+2}{-1-x}\right)^\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \frac{\alpha}{9} \left(\frac{4}{3}\right)^{\alpha-1}$

$$\bullet) \int_{-1}^{0} dx \; \frac{x+2}{x+3} \left(\frac{-1-x}{x} \right)^{\alpha} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{\alpha} - 1 + \alpha \right]$$

$$\text{ho} \quad \varphi(z) = \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{\alpha}$$

$$= \left|\frac{z-a}{b-z}\right|^{\alpha} e^{-i(\theta_a - \theta_b)}$$



MODO PER DARE I LIMITI DEI θ

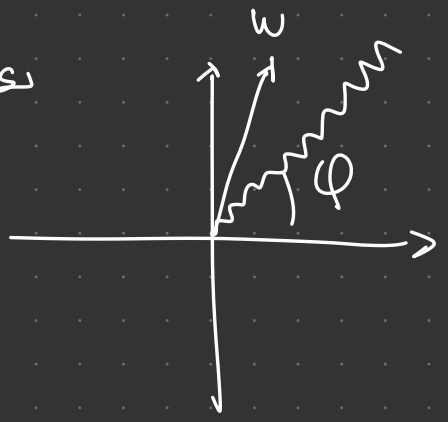
FACCIO UNA $SL(2,\mathbb{C})$ TRANSFORMATION

tc $a \to 0$

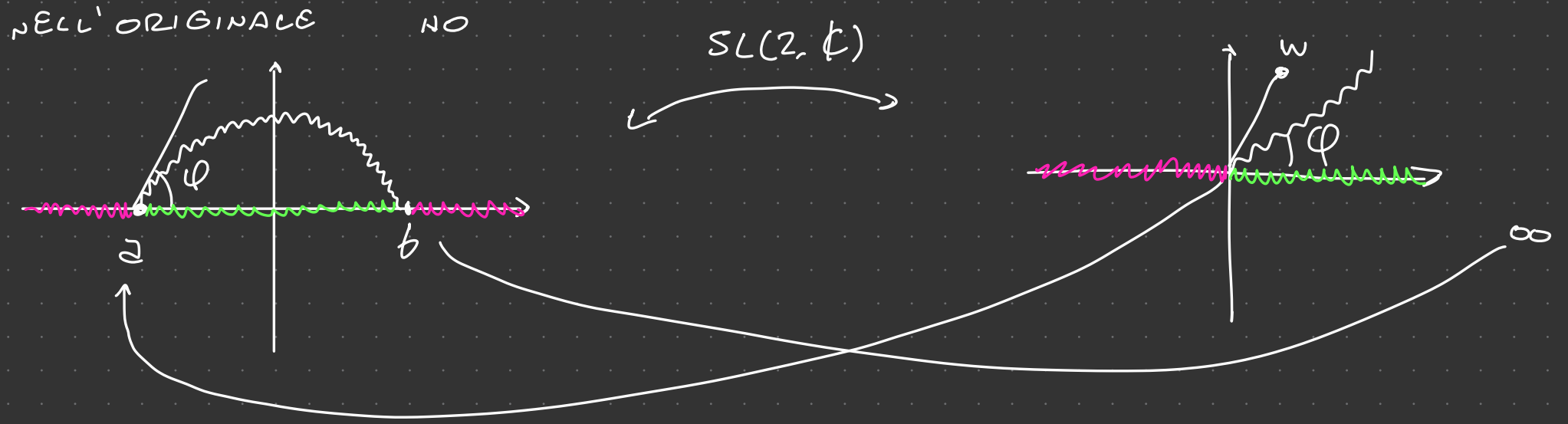
$b \to \infty$

$$w = \frac{z-a}{b-z} = |w| e^{-i\theta_w} \quad \rightsquigarrow \theta_w = \theta_a - \theta_b$$

SE SCEGLIESSI



$$\varphi \leq \theta_w < 2\pi + \varphi$$



IL TAGLIO DIVENTA UN ARCO DI CERCHIO ED ESSENDO $SL(2,\mathbb{C})$ UNA MAPPA CONFORME PRESERVA φ

NOTA I DUE TAGLI

$$0 < \theta_w < 2\pi$$

$$-\pi < \theta_w < \pi$$

1) $I(\alpha) = \int_0^\infty dx \frac{x^\alpha}{1+x^2}$ $\qquad \alpha \in \mathbb{C}$

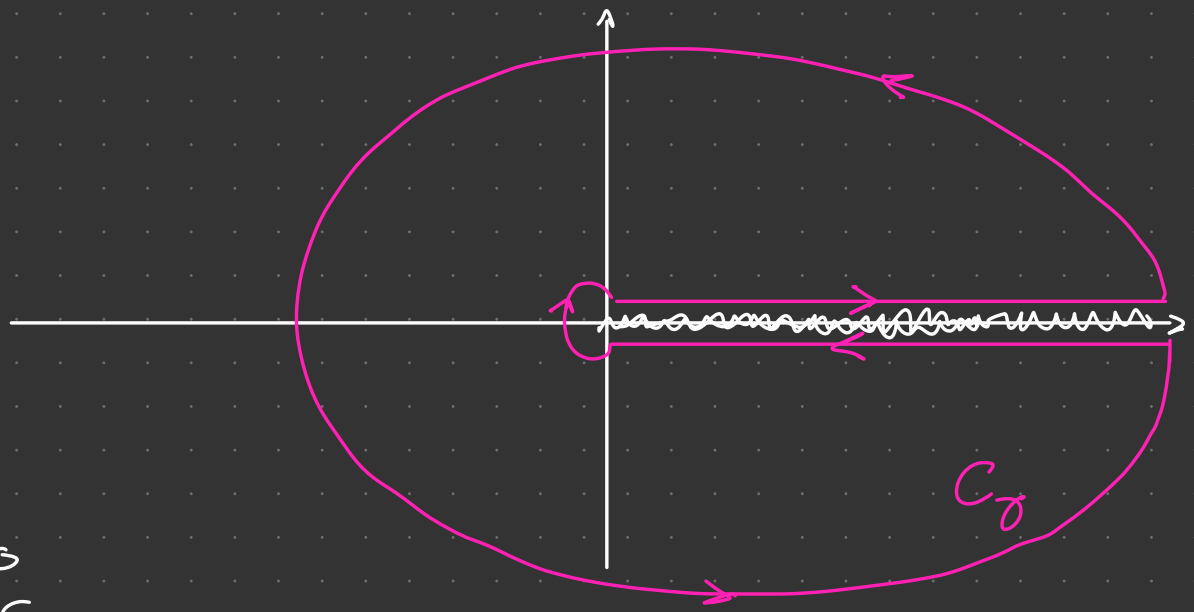
DEVO CONTROLLARE CHE CONVERGA

$x \to 0 \quad f(x) \sim x^\alpha$

$x \to \infty \quad f(x) \sim x^{\alpha-2}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$, $\mathrm{Re}\,\alpha < -1$ $\Rightarrow -1 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$

$f(z) = \frac{z^\alpha}{1+z^2}$



HA ∞ FOGLI, MA CERCO QUELLO t.c.

$f(z) = f(x)$

E POI METTO IL TAGLIO SULLA RETTA REALE t.c. SOPRA IL TAGLIO $f(z) = f(x)$

SCELGO IL CAMMINO DI INTEGRAZIONE

LA CONDIZIONE SU $\mathrm{Re}\,\alpha$ MI DICE CHE $\oint_C$ ATTORNO 0 E ∞ VANNO A 0

$$\oint_{C_\gamma} f(z)\,dz = I_+(\alpha) + I_-(\alpha)$$

$$I_+(\alpha) = I(\alpha)$$

SE $z = |z| e^{i\theta}$ SE VADO SOTTO IL TAGLIO $\theta = 2\pi$

$$I_-(\alpha) = \int_\infty^0 dx \, \frac{(x e^{i2\pi})^\alpha}{1 + x^2}$$

$\rightarrow z = |z| e^{i2\pi} = x e^{i2\pi}$

NON HO FASE PERCHÈ VIENE FUORI SOLO DA FUNZIONI POLIDROME

$$= - e^{i2\pi\alpha} I(\alpha)$$

$$\Rightarrow \oint_{C_\gamma} f(z) = (1 - e^{2\pi i}) I(\alpha)$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = \frac{1}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \oint_{C_\gamma} dz \, f(z) = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum \mathrm{Res} \, f(z)$$

Res CALCOLATI NELLE SINGOLARITÀ $\Rightarrow$ SOLO DOVE SI ANNULLA IL DENOMINATORE

$$= \frac{2\pi i}{1-e^{-i2\pi\alpha}} \operatorname*{Res}_{z=\pm i} \frac{z^\alpha}{(1-z)(1+z)} = \frac{2\pi i}{1-e^{-i2\pi\alpha}} \left(\lim_{z\to i} \frac{z^\alpha}{2i} + \lim_{z\to -i} \frac{z^\alpha}{-2i} \right)$$

SU CHE SONO SUL PIANO TAGLIATO → HO LIMITI SU θ

$z \to i$

VUOL DIRE $z \to |1| e^{i\pi/2}$

$z \to -i \quad \Rightarrow \quad z \to e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$$\Rightarrow I(\alpha) = \frac{2\pi i}{1-e^{-i2\pi\alpha}} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}}{2i} - \frac{e^{i\frac{3\pi}{2}\alpha}}{2i} \right) = \frac{\pi}{1-e^{-i2\pi\alpha}} \left(e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} - e^{i\frac{3\pi}{2}\alpha} \right)$$

$$= \frac{\pi\, e^{-i\pi\alpha}}{1-e^{-i2\pi\alpha}} \left(e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} - e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} \right)$$

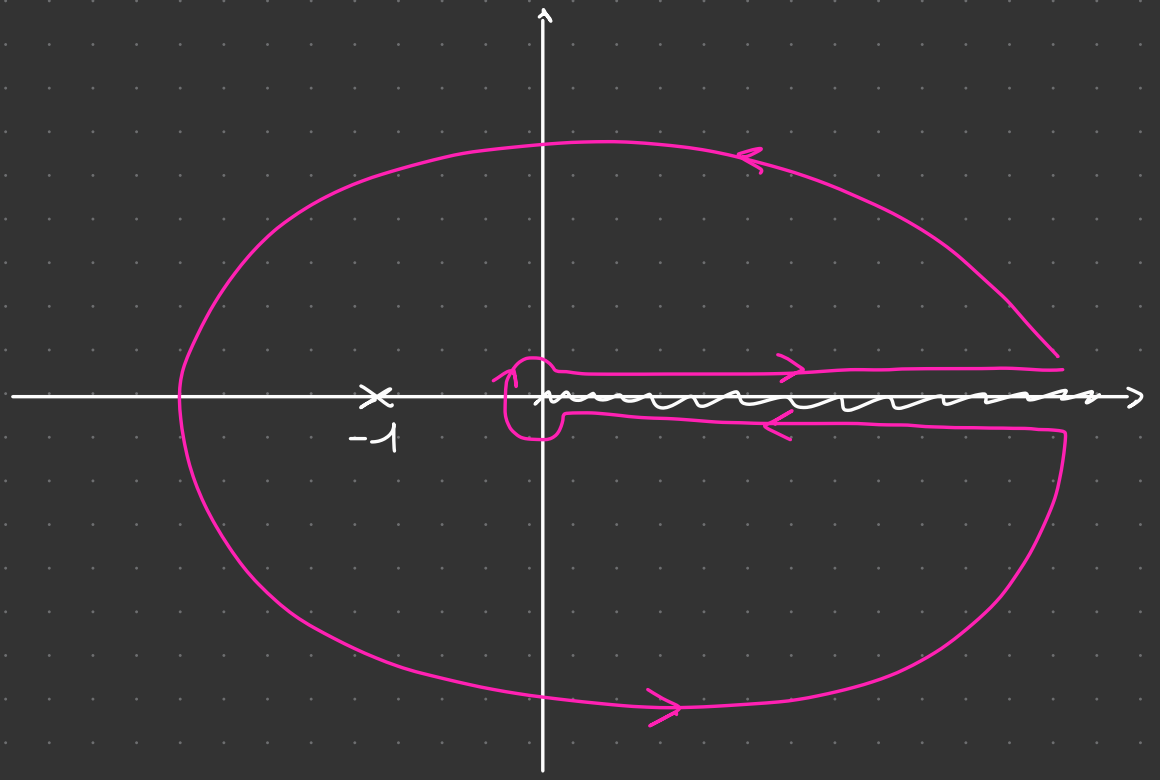
$$= \frac{\pi}{e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha}} \left(-2i \sin\frac{\pi}{2}\alpha \right)$$

$$= \frac{\pi}{-2i \sin\pi\alpha} \left(-2i \sin\frac{\pi}{2}\alpha \right) = \pi \frac{\sin\frac{\pi}{2}\alpha}{\sin\pi\alpha}$$

2) $$I(z) = \int_0^\infty dx \, \frac{x^{z-1}}{(1+x)^3}$$ → TRASFORMATA DI MELLIN DI $$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$$

CHIAMO $x \in \mathbb{C}$

HO UN POLO TRIPLO IN $x = -1$



$$I(z) = I_+$$

$$I_- = -e^{i2\pi z} I(z)$$

$$\Rightarrow I(z) = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi z}} \operatorname*{Res}_{x = e^{i\pi}} \frac{x^{z-1}}{(1+x)^3}$$

$$= \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi z}} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left(x^{z-1} \right) \Big|_{x = e^{i\pi}}$$

$$= \frac{\pi i}{1 - e^{-i2\pi z}} (z-1)(z-2) x^{z-3} \Big|_{x = e^{-i\pi}}$$

$$= \frac{\pi i}{1 - e^{-i2\pi z}} (z-1)(z-2) e^{-i\pi(z-3)}$$

$$= \frac{\pi i}{1 - e^{-i2\pi z}} (z-1)(z-2) e^{-i\pi z} (-1)$$

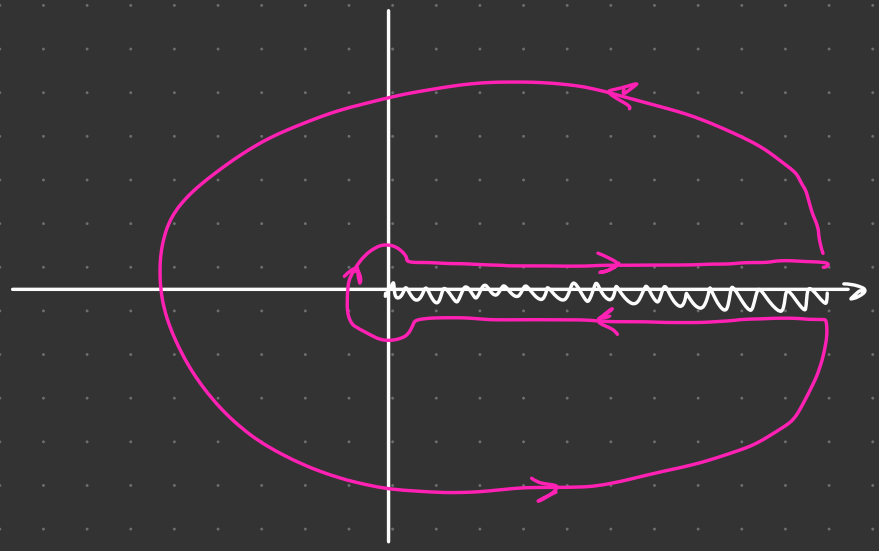
$$= \frac{\pi}{\sin(2\pi z)} (z-1)(z-2)$$

3) $I = \int_0^\infty dx \, \frac{\ln x}{1+x^2}$

$\ln x$ HA POLIDROMIA ∞

I) CONSIDERO $f(z) = \frac{\ln^2(z)}{1+z^2}$

SCELGO IL SOLITO TAGLIO E CAMMINO



HO POLI IN $z = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$z = e^{i\frac{\pi}{2}}$

CALCOLO

$$\oint_{C_\gamma} dz f(z) = I_+ + I_-$$

$$I_+ = \int_0^\infty dx \, \frac{\log^2 x}{1+x^2}$$

$$I_- = \int_\infty^0 dx \, \frac{\log^2(x e^{i2\pi})}{1+x^2} = -\int_0^\infty dx \, \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{1+x^2}$$

$$= -\int_0^\infty dx \, \frac{\log^2 x - 4\pi^2 + 4\pi i \log x}{1+x^2}$$

$$I_+ + I_2 = -4\pi i \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx + 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= -4\pi i \, I + 4\pi^2 \arctan x \Big|_0^\infty$$

$$= -4\pi i I + 4\pi^2 \frac{\pi}{2}$$

MA ANCHE

$$\oint = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z = e^{i\frac{\pi}{2}}, \; z = e^{i\frac{3\pi}{2}}} \frac{\ln^2 z}{(z-i)(z+i)}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\ln^2 \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)}{2i} + \frac{\ln^2 \left(e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)}{-2i} \right)$$

$$= \frac{2\pi i}{2i} \left(\left(i\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(i\frac{3\pi}{2}\right)^2 \right)$$

$$= \pi\left(-\frac{\pi^2}{4} + \frac{9\pi^2}{4}\right) = 2\pi^3$$

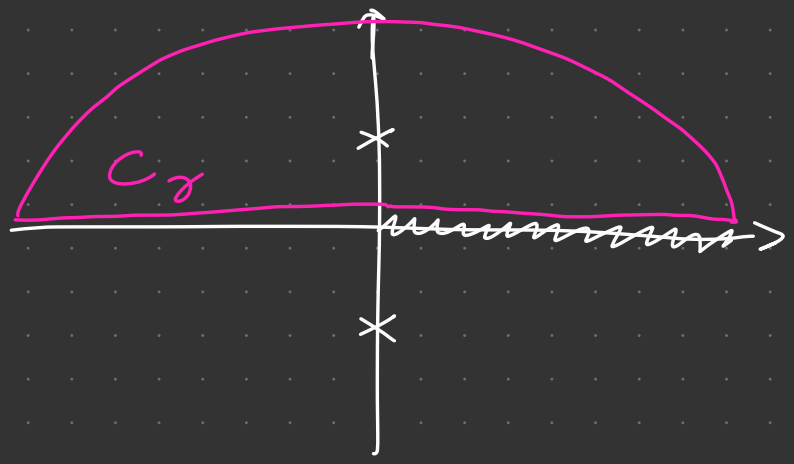
$$\Rightarrow \quad -4\pi i I + 2\pi^3 = 2\pi^3 \quad \Rightarrow \boxed{I = 0}$$

II) METODO PER $\displaystyle\int_0^\infty dx\, \ln(x)\, \mathcal{L}_2(x)$

CON $\mathcal{L}_2(x) = \mathcal{L}_2(-x)$ FUNZIONE PARI

HO $\displaystyle\int_0^\infty dx\, \frac{\ln x}{1+x^2}$ E PRENDO $\mathcal{L}(x) = \frac{\ln z}{1+z^2}$

MA PRENDO UN NUOVO CAMMINO



$$\oint_{C_\gamma} \mathcal{L}(z)\,dz = I + \int_{-\infty}^{0} dz\, \frac{\log(z)}{1+z^2}$$

→ CONTRIBUTO ∞ NULLO PACLA PER CONVERG. $\mathcal{L}(z)$

uso $z = x e^{i\pi} = -x$

$$= I + \int_{-\infty}^{0} d(-x)\, \frac{\log(x e^{i\pi})}{1+x^2}$$

$$= I + \int_{0}^{\infty} dx\, \frac{\log x + i\pi}{1+x^2} = 2I + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

OPPURE uso i RESIDUI

$$\oint = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=e^{i\pi/2}} \frac{\log(z)}{(z-i)(z+i)} = 2\pi i \cdot \frac{\log(e^{i\frac{\pi}{2}})}{2i} = i\frac{\pi^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2I + i\pi\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi^2}{2} \Rightarrow \boxed{I = 0}$$

III)

SE HO $\int_0^\infty dx \ln x \, R(x) = I$

OSSERVO CHE $\ln x = \frac{d}{d\alpha} x^\alpha \Big|_{\alpha=0}$

(MEGLIO $\ln^m x = \frac{d^m}{d\alpha^m} x^\alpha \Big|_{\alpha=0}$)

E COSÌ

$$I = \frac{d^m}{d\alpha^m} \int_0^\infty dx \, x^\alpha R(x)$$

NEL NOSTRO CASO

$$\int_0^\infty dx \frac{\ln x}{1+x^2} = \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty dx \frac{x^\alpha}{1+x^2} = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \right) \Big|_{\alpha=0} = 0$$

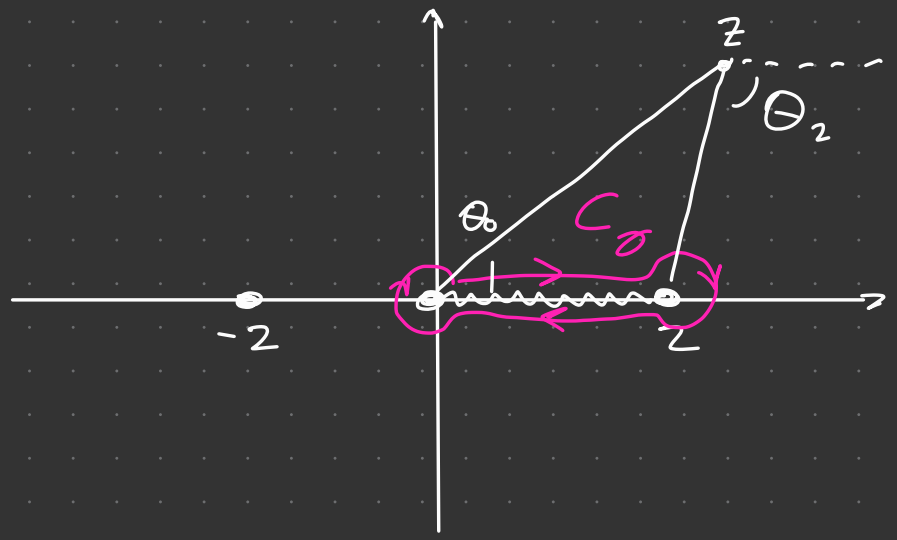
DAL PRIMO ESERCIZIO

4) $$I(\alpha) = \int_0^2 dx \, \frac{1}{x+2} \left(\frac{x}{2-x} \right)^{\alpha}$$

P.TI DI DIRAMAZIONE

$x = 0 \qquad x = 2$

POLO $\qquad x = -2$



SCELGO UN CAMMINO E CALCOLO

$$\oint_{C_\gamma} dz \, \frac{1}{z+2} \left(\frac{z}{2-z} \right)^{\alpha} = I_+ + I_-$$

PER CAPIRE CHI È I_- DEVO GUARDARE MEGLIO GLI ANGOLI θ_0 E θ_2

SOPRA IL TAGLIO $\qquad \theta_0 = 0 \qquad \theta_2 = 0$

(GIUSTIFICO $I_+ = I(\alpha)$)

SOTTO IL TAGLIO (HO 2 MODI PER ANDARCI

E DEVONO DARE LO STESSO RISULTATO)

(GIRANDO ATTORNO 0) $\quad \theta_0 = 2\pi \qquad \theta_2 = 0$

(GIRANDO ATTORNO 2) $\quad \theta_0 = 0 \qquad \theta_2 = -2\pi$

E IN ENTRAMBI I CASI $\quad \theta_0 - \theta_2 = 2\pi$

$$I_- = e^{i 2\pi \alpha} I(\alpha)$$

$$\Rightarrow \oint_{C_\gamma} = I(\alpha) - e^{i 2\pi \alpha} I(\alpha) = (1 - e^{i 2\pi \alpha}) I(\alpha)$$

VEDO IL CALCOLO CON IL Res

(ALLARGO C_γ CIRCONDO $z=-2$ IN SENSO ANTIOR QUINDI OK E $z \to \infty$ $f(z) \sim 1/z$ QUINDI HO $\mathrm{Res}_\infty \neq 0$)

$$\oint = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=-2} + \mathrm{Res}_{z=\infty} \right)$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = \frac{2\pi i}{1 - e^{-i2\pi\alpha}} \left(\operatorname*{Res}_{z=-2} + \operatorname*{Res}_{z=\infty} \right)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2} = \lim_{z \to -2} \left(\frac{z}{z-z} \right)^{\alpha} = \left| \frac{-2}{2-(-2)} \right|^{\alpha} e^{i\theta\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha}} e^{i\pi\alpha}$$

$$\theta_0 - \theta_2 = \pi$$

$$\theta_2 = 0$$

$$\theta_0 = \pi$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} = \text{PRENDO IL COEFF DELLO SVILUPPO} = -\lim_{\text{"}z \to \infty\text{"}} \left(\frac{z}{z-z} \right)^{\alpha}$$

$$f(z) \underset{z \to \infty}{\sim} \frac{1}{z} \left(\frac{z}{z-z} \right)^{\alpha}$$

MI SIEDO SU QUALUNQUE PUNTO DI UNA CURVA ALL'∞ E SO $\forall$ PUNTO HO STESSA

FASE

SCELGO DI ANDARE ALL'∞ SU $\mathbb{R}_+$

$\theta_0 = 0$ $\qquad$ $\theta_2 = -\pi$

$z \to +\infty$ $\qquad$ $\theta_0 - \theta_2 = \pi$

$$\operatorname*{Res}_{z\to\infty} = -\left|\frac{z}{z-z}\right|^{\alpha} e^{-i\theta\alpha} = -e^{-i\pi\alpha}$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = \frac{2\pi i}{1-e^{i2\pi\alpha}}\left(z^{-\alpha}e^{-i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}\right)$$

$$= \frac{2\pi i}{e^{-i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}\left(z^{-\alpha} - 1\right) = \frac{-\pi}{\sin\pi\alpha}\left(z^{-\alpha} - 1\right)$$

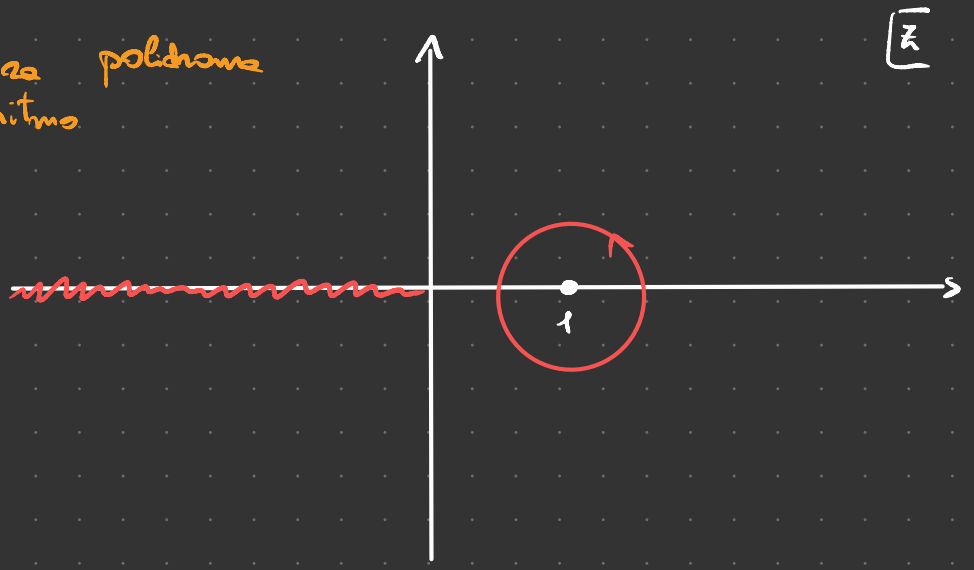
PER CASA:

② $f(t) = \dfrac{1}{\sinh(t)}$ · $\operatorname{Res}_{z=0} \Phi(z) = 0$

③ $f(t) = \dfrac{1}{\Gamma(t)}$ · $\operatorname{Res}_{z=-1} \phi(z) = -1$

GAMMA

① Calcola su ogni foglio di Riemann $\operatorname*{Res}_{z=1} \Gamma\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right)$ ← Ha la struttura polidroma del logaritmo



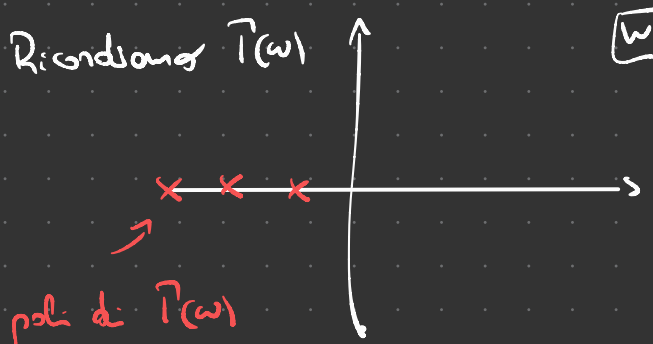
$\Rightarrow \tilde{z} = |z| e^{i\vartheta} \qquad -\pi < \vartheta \leq \pi$

Ho infinite determinazioni date dal logaritmo

$$\Rightarrow f_n(\tilde{z}) = f(\tilde{z} e^{2\pi i n}) = \Gamma\left(\frac{1}{2\pi i} \log(\tilde{z} e^{2\pi i n})\right) = \Gamma\left(\frac{\log \tilde{z} + 2\pi i n}{2\pi i}\right)$$

$$= \Gamma\left(\frac{\log z}{2\pi i} + n\right) \longrightarrow \text{Avrò poli per } n \leq 0$$

Ricordiamo $\Gamma(w)$



Prendo $n = -q \quad q \geq 0 \Rightarrow \operatorname*{Res}_{\tilde{z}=1} \Gamma\left(\frac{\log \tilde{z}}{2\pi i} - q\right) = \oint_1 \frac{d\tilde{z}}{2\pi i} \Gamma\left(\frac{\log \tilde{z}}{2\pi i} - q\right) = \circledast$

Cambio variabile $w = \frac{\ln \tilde{z}}{2\pi i} \Rightarrow \tilde{z} = e^{2\pi i w}$

↳ relazione 1:1

$$\circledast = \oint_0 \frac{dw}{2\pi i} 2\pi i e^{2i\pi w} \Gamma(w - q) = \frac{(-1)^q}{q!}$$

↳ sto calcolando in $w = 0$

Osservo $\quad \operatorname*{Res}_{z=-q} \Gamma(z) = \frac{(-1)^q}{q!}$

non è altro che il residuo attorno a zero

② $f(z) = \dfrac{\Gamma(z^2+4)}{z^2+4}$

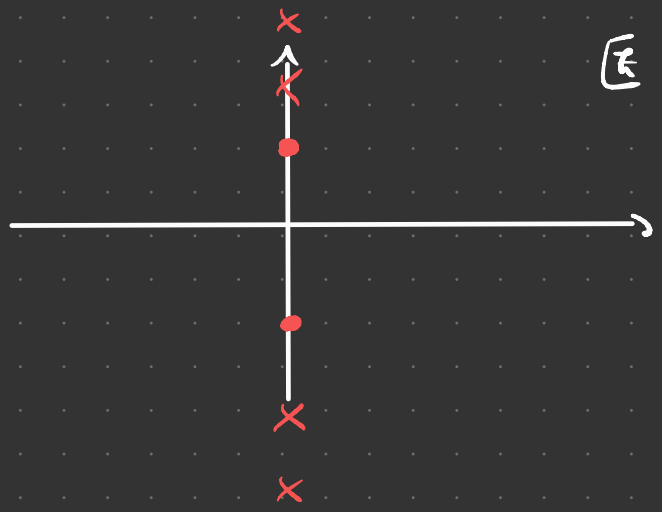
- Studio la struttura analitica
- Residuo in ogni polo

- **Struttura analitica**

f non è polidroma. Cerco i poli ⟶ $D=0 \iff z = \pm 2i$

$N = \infty \iff z^2+4 = -n \quad n \in \mathbb{N}$

$\iff z = \pm i\sqrt{n+4}$



$\Rightarrow$ Da cui
- $z = \pm 2i$ poli doppi per f
- $z = \pm i\sqrt{n+4}$, $n \neq 0$ poli semplici per f

Per calcolare i residui posso esplicitare i poli dalla Γ. So che vale $\Gamma(z) = \dfrac{1}{z}\Gamma(z+1) = \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{z+1}\cdots\dfrac{1}{z+n}\Gamma(z+n+1)$

$$\Rightarrow \Gamma(z^2+4) = \frac{1}{z^2+4}\Gamma(z^2+5) = \dots = \frac{1}{z^2+4}\frac{1}{z^2+5}\cdots\frac{1}{z^2+n+4}\Gamma(z^2+n+5)$$

↳ così posso calcolare il residuo nel polo n-esimo

Posso quindi scrivere $f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{z^2+(k+4)} \Gamma(z^2+n+5)$

$\Rightarrow$ Per $z \sim \pm i\sqrt{n+4}$ $\Rightarrow$ $f(z) \sim \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k-n} \frac{1}{[z+i\sqrt{n+4}][z-i\sqrt{n+4}]} \Gamma(1)$

↑ metto in evidenza i poli

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname*{Res}_{z=\pm i\sqrt{n+4}} f(z) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k-n}}{n^2} \frac{1}{\pm 2i\sqrt{n+4}} \qquad n \geq 1}$$

Mentre il residuo sui poli doppi:

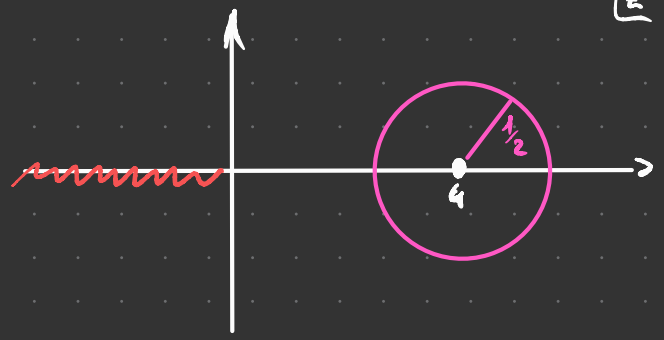
Scrivo $f(z) = \frac{1}{(z-2i)^2} \frac{1}{(z+2i)^2} \Gamma(z^2+5)$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname*{Res}_{z=+2i} f(z) = \frac{d}{dz}\left\{ \frac{1}{(z+2i)^2} \Gamma(z^2+5) \right\}\Big|_{z=+2i} = -\frac{i}{32}(1-8\gamma)} \quad \text{Analogamente} \quad \operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) = \frac{i}{32}(1-8\gamma)$$

$\Gamma'(1) = -\gamma$

③

$f(z) = \Gamma(\sqrt{z} + 2)$ • Calcola $I = \oint_{4, R=\frac{1}{2}} \frac{dz}{2\pi i} f(z)$



Devo trovare le determinazioni $\rightarrow \tilde{z} = |z| e^{i\vartheta} \quad |\vartheta| < \pi$

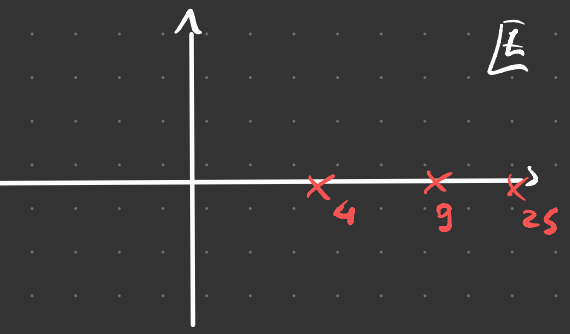
$\Rightarrow f_n(\tilde{z}) = f(\tilde{z} e^{2\pi i n}) = \Gamma((-1)^n \tilde{z}^{\frac{1}{2}} + 2)$

$\rightarrow$ (2 fgli di Riemann) $n = 0, 1$

Quando $\tilde{z} = 4 \Rightarrow z^{\frac{1}{2}} = 2$

Ho contributo al residuo solo quando ho $\ominus$ cioè quando $n = 1$ (per $n = 0$ non ho poli)

Mi metto in $n = 1 \longrightarrow f_1(\tilde{z}) = \Gamma(2 - \tilde{z}^{\frac{1}{2}})$ ho poli



$2 - \tilde{z}^{\frac{1}{2}} = -n \quad n \in \mathbb{N} \iff \tilde{z}^{\frac{1}{2}} = 2 + n \iff \tilde{z} = (2+n)^2$

$\Rightarrow$ Il raggio $\frac{1}{2}$ ci permette di aggirare solo un polo

Calcolo

$$\operatorname*{Res}_{\tilde{z}=4} T(2-\tilde{z}^{1/2}) = \operatorname*{Res}_{w=0} T(2-\sqrt{4+w})$$

$z = 4+w$ per calcolare l'integrale attorno a zero (sob condizioni)

Ora voglio espletare il pob $\longrightarrow$ Serie

$$f(w) = T(2-2\sqrt{1+\tfrac{w}{4}}) = T(2-2(1+\tfrac{1}{2}\tfrac{w}{4}+\mathcal{O}(w^2))) = T(-\tfrac{w}{4}+\mathcal{O}(w^2))$$

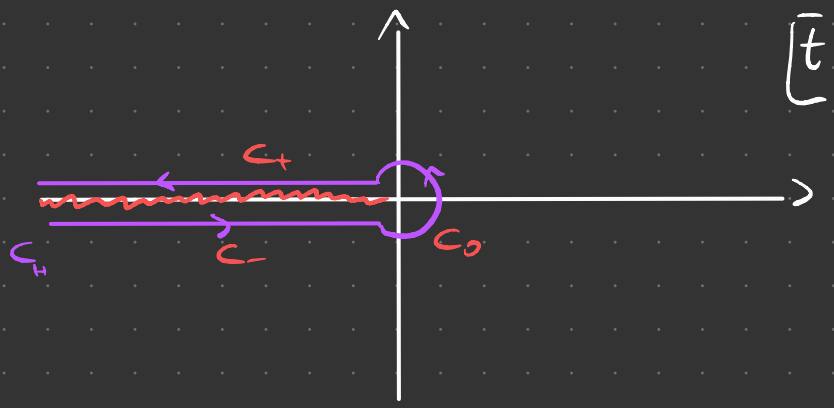
$\psi = -\frac{w}{4}$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{w=0} T(-\tfrac{w}{4}) = \oint_0 \frac{dw}{2\pi i} T(-\tfrac{w}{4}) = -4 \oint_0 \frac{d\psi}{2\pi i} T(\psi) = -4$$

$$= \operatorname*{Res}_{\psi=0} T(\psi) = 1$$

Integrali di contorno di Hankel

Considero $\Phi(z) = \int_0^\infty dt\, t^{z-1} f(t)$ e $J(z) = \int_{C_H} dt\, t^{z-1} f(-t)$



Determina la relazione che esiste tra J e Φ

Assumiamo di essere in una regione di z (parametro degli integrali)

Assumiamo $\boxed{\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{-t}} = \text{finito}}$ → CHIEDO DEFINITI INTEGRALI $\forall z$

⇒ $J(z)$ è una f.ne intera → OLOMORFA SUL CAMMINO

↓

Mi metto nella regione in cui J e Φ sono entrambe definite.

Per esempio $f(t) = e^{-t}$ ⇒ $\Phi(z)$ def per $\mathrm{Re}(z) > 0$ → Per $\mathrm{Re}(z) > 0$ ⇒ C_+, C_-, C_0 sono finiti singolarmente

(la somma è sempre ben definita ma non lo sono singolarmente)

⇒ $J(z) = \int_{C_+} + \int_{C_-} + \int_{C_0}$ → 0 perché su un impianto infinitesimo di qualcosa di integrabile

Calcolo $\int_{C_+} = \int_{0}^{-\infty} dt\, t^{z-1} f(-t) = \int_{0}^{-\infty} d(-|t|)\, |t|^{z-1} e^{i\pi(z-1)} f(|t|)$

↑ sopra il taglio $\Rightarrow t = |t| e^{i\pi}$

$$= -\int_{0}^{-\infty} dt\, |t|^{z-1} e^{-i\pi} e^{i\pi z} f(|t|) = e^{i\pi z} \Phi(z)$$

$$\int_{C_-} = \int_{-\infty}^{0} dt\, t^{z-1} f(-t) = \int_{-\infty}^{0} d(-t)\, |t|^{z-1} e^{+i\pi} e^{-i\pi z} f(|t|) = -e^{-i\pi z} \int_{0}^{\infty} dt\, |t|^{z-1} f(|t|) = -e^{-i\pi z} \Phi(z)$$

↓ sotto $\Rightarrow t = |t| e^{-i\pi}$

$\Rightarrow$ Da cui ricavo, nel dominio comune ($\mathrm{Re}(z) > 0$ per $\Gamma(z)$)

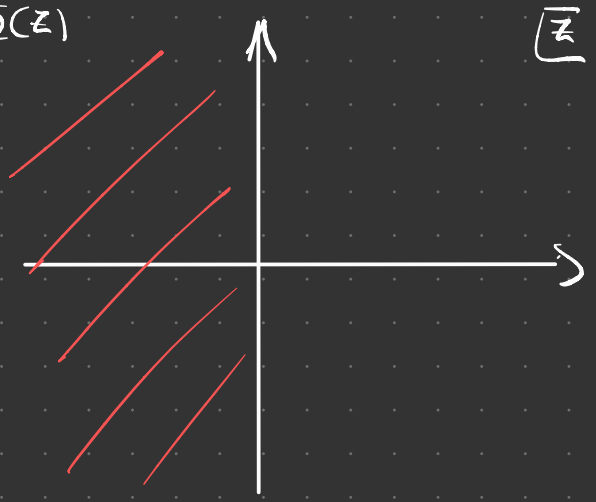
$$J(z) = \left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right) \Phi(z) = 2i \sin(\pi z)\, \Phi(z)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(z) = \frac{1}{2i \sin(\pi z)}\, J(z)$$

→ Dove $J(z)$ intera. Ho dato una continuazione analitica di $\Phi(z)$ in funzione di $J(z)$

④

Considera $f(t) = e^{-t}\frac{1}{1+t^2}$. Calcola $\operatorname{Res}_{z=-1} \Phi(z)$



$$\Rightarrow \Phi(z) = \int_0^\infty dt\, t^{z-1}\frac{e^{-t}}{1+t^2}$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Re}(z) > 0$ Ma vogliamo $\operatorname{Res}_{z=-1}$

$\Rightarrow$ Scrivo $\quad \bar{\Phi}(z) = \dfrac{1}{2i\sin(\pi z)} J(z)$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=-1} \Phi(z) = \operatorname*{Res}_{z=-1} \left\{ \frac{1}{2i}\frac{1}{-\pi(z+1)} J(-1) \right\} = \frac{1}{-2\pi i} J(-1)$$

$$\sin(\pi z)\Big|_{z=-1} \sim -\pi(z+1) + o[(z+1)^2]$$

$$\lim_{z\to -1} J(z) = \lim_{z\to -1} \int_{C_H} dt\, t^{z-1}\frac{e^t}{1+t^2} = \int_{C_H} dt\, t^{-2}\frac{e^t}{1+t^2}$$

non ho più polidromia $\Rightarrow$ C_+ e C_- si cancellano

$$= \oint_{\gamma} dt\, t^{-2} \frac{e^t}{1+t^2} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{t=0} t^{-2} \frac{e^t}{1+t^2} = 2\pi i \frac{d}{dt}\left\{\frac{e^t}{1+t^2}\right\}\Big|_{t=-1} = 2\pi i$$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=-1} \Phi(z) = \frac{1}{-2\pi i} 2\pi i = -1$$

① $f(z) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3z}\right)}{\sqrt{z} + 1}$

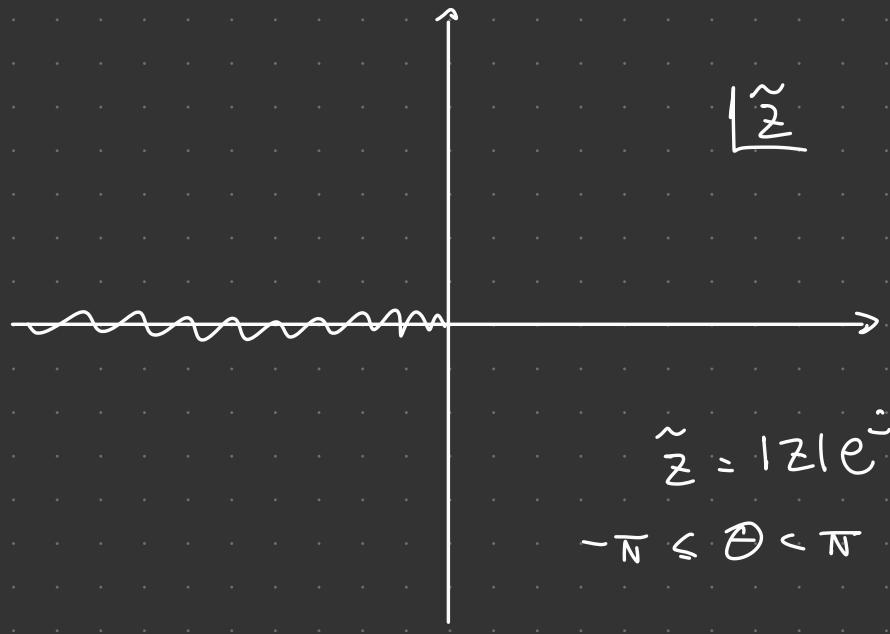
CALCOLA Res SU OGNI SINGOLARITÀ ISOLATA.

NUM: $\sin\frac{\pi}{3z}$ HO UNA SINGOLARITÀ ESSENZIALE IN $z=0$

DEN: $\sqrt{z}+1$ $z=0 \vee z=\infty$ SONO P.TI DI DIRAMAZIONE

QUINDI: $f(z)$ HA P.TO DI DIRAMAZIONE IN $z=0$ E $z=\infty$
(NON NO PIÙ SINGOLARITÀ ISOLATA IN ZERO)

HO $f_k(\tilde{z}) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3\tilde{z}}\right)}{(-1)^k \tilde{z}^{1/2} + 1}$



$\tilde{z} = |z| e^{i\theta}$

$-\pi \leq \theta < \pi$

HO 2 DETERMINAZIONI

$k=0$ $\quad f_0(\tilde{z}) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3\tilde{z}}\right)}{\sqrt{\tilde{z}} + 1}$

$k=1$ $\quad f_1(\tilde{z}) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3\tilde{z}}\right)}{-\sqrt{\tilde{z}} + 1}$

QUINDI SUL FOGLIO 1 HO UN POLO IN $\tilde{z} = 1$

$$\operatorname*{Res}_{\tilde{z}=1} f(\tilde{z})$$

$$f_1(\tilde{z}) = \sin\left(\frac{\pi}{3\tilde{z}}\right) \frac{1}{1 - \sqrt{1 + (\tilde{z}-1)}} = \sin\left(\frac{\pi}{3\tilde{z}}\right)\left(1 - \sqrt{1 + (\tilde{z}-1)}\right)^{-1}$$

$$\sqrt{1 + (\tilde{z}-1)} = 1 + \frac{1}{2}(\tilde{z}-1) + O(\tilde{z}-1)^2$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3\tilde{z}}\right)\left(1 - 1 - \frac{1}{2}(\tilde{z}-1) + O(\tilde{z}-1)^2\right)^{-1}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3\tilde{z}}\right) \frac{-2}{\tilde{z}-1} + O(1)$$

QUINDI

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(\tilde{z}) = -2 \sin\frac{\pi}{3}$$

(2) $f(z) = \dfrac{1}{\cos\sqrt{z} - 1}$

DISCUTERE PROPRIETÀ DI ANALITICITÀ E CALCOLA RESIDUO SULLA SINGOLARITÀ PIÙ VICINA ALL'ORIGINE.

MA COS SE LO SVILUPPO È UNA FUNZIONE DI SOLO POTENZE INTERE (PARI) DI z

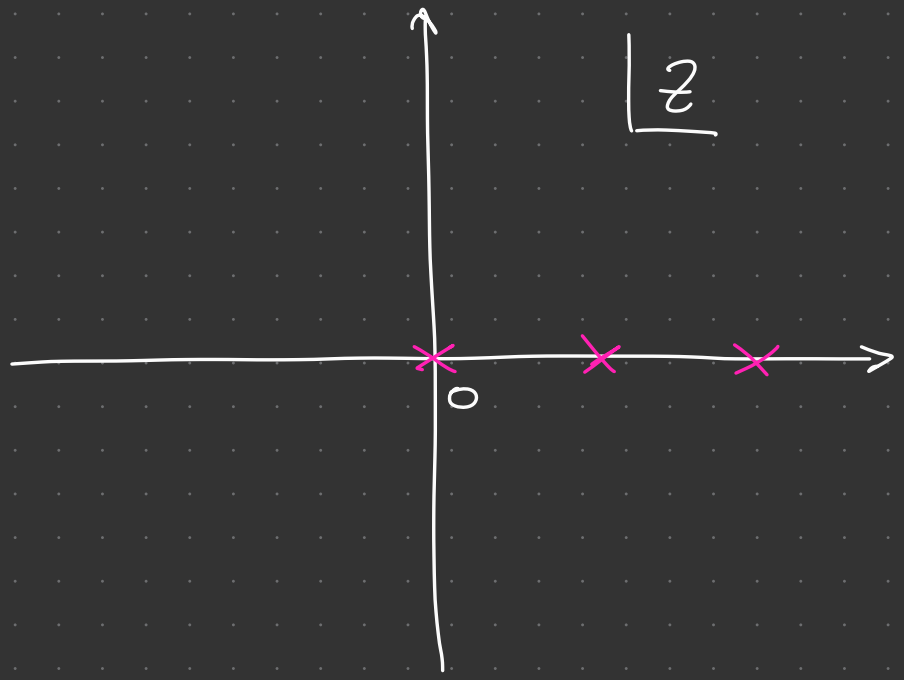
$\Rightarrow f(z)$ NON È POLIDROMA.

DEN $= 0 \Rightarrow \cos\sqrt{z} = 1$

$\sqrt{z} = 0 + 2k\pi$

$\Rightarrow z = 4k^2\pi^2$

$\Rightarrow z = 0, 4\pi^2, 16\pi^2 \ldots$



SVILUPPO

$$\cos\sqrt{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\sqrt{z})^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^k$$

$$f(z) \underset{z\to 0}{\sim} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z + O(z^2)\right) - 1} = \frac{-2}{z} + O(1)$$

QUINDI

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -2$$

(3) $f(z) = \dfrac{1 + z^{1/2}}{2 + z^{1/3}}$

CALCOLARE SU TUTTI I POSSIBILI FOGLI DI RIEMANN

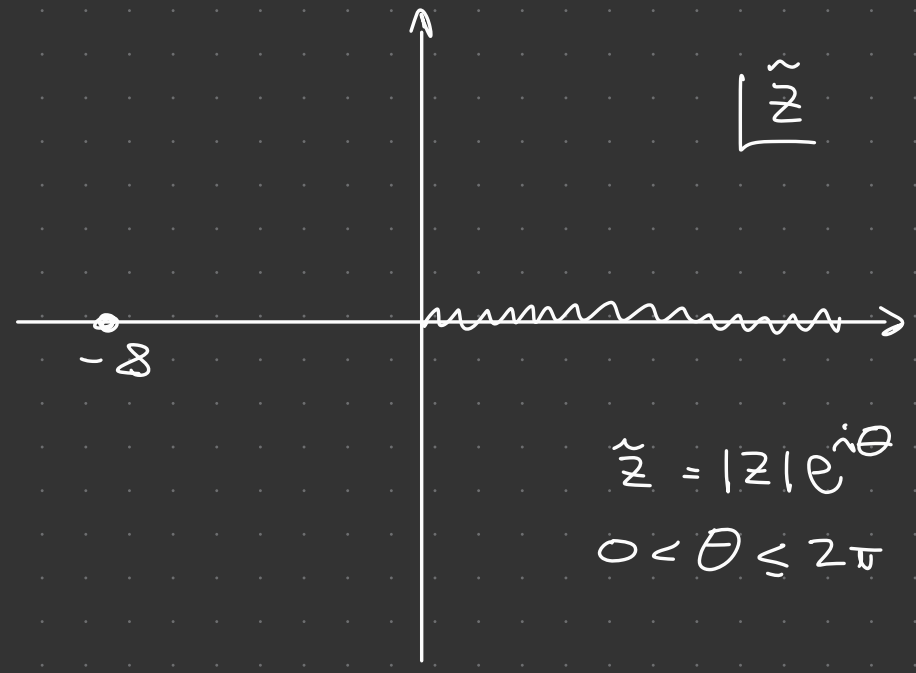
$$\operatorname*{Res}_{z=-8} f(z)$$

HO P.TI DI DIRAMAZIONE $z=0$ V $z=\infty$

AVRÒ 6 FOGLI DI RIEMANN

$$f_k(\tilde{z}) = f(\tilde{z} e^{2\pi k})$$

$$= \frac{1 + \tilde{z}^{1/2}(-1)^k}{2 + e^{\frac{2\pi k}{3}} \tilde{z}^{1/3}}$$



$$\tilde{z} = |z| e^{i\theta}$$

$$0 < \theta \leq 2\pi$$

GUARDO $\mathrm{DEN}_k(\tilde{z} = 8 e^{i\pi})$

$$= 2 + e^{i\frac{2\pi k}{3}} 2 e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}(1+2k)}\right)$$

HO POLO SE $\text{DEN}_k(\tilde{z}) = 0$

$\Rightarrow e^{i\frac{\pi}{3}(1+2k)} = -1$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3}(1+2k) = \pi + 2m\pi \qquad m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 1 + 2k = 3 + 6m$

$\Rightarrow k = 1 + 3m$

k → FOGLIO

$3m$ → FA GIRARE

DEVO VEDERE QUANDO PUÒ VERIFICARSI

$k = 1 \qquad 1 = 1 + 3m \Rightarrow m = 0$

$k = 2 \qquad 2 = 1 + 3m \Rightarrow$ NO

$k = 3 \qquad 3 = 1 + 3m \Rightarrow$ NO

$k = 4 \qquad 4 = 1 + 3m \Rightarrow m = 1$

NON NIENTE SE $k=0 \vee k=5$

QUINDI HO POLO SUI FOGLI $k=1$ E $k=4$

GUARDO $k=1$ $\quad f_1(\tilde z) = \dfrac{1-\tilde z^{1/2}}{2+e^{i\frac{2\pi}{3}}\tilde z^{1/3}}$

DEVO VEDERLA INTORNO A -8

DEVO ESPANDERLA IN $(\tilde z - z_*)$ $\qquad z_* = 8e^{i\pi}$

$$\tilde z^{1/3} = \left(z_* + \tilde z - z_*\right)^{1/3} = z_*^{1/3}\left(1+\frac{\tilde z - z_*}{z_*}\right)^{1/3}$$

$$\sim z_*^{1/3}\left(1+\frac{1}{3}\frac{\tilde z - z_*}{z_*} + O(\tilde z - z_*)^2\right)$$

così $\tilde z \to z_*$

$$f_1(\tilde z) \sim \frac{1-z_*^{1/2}}{2+e^{i\frac{2\pi}{3}}z_*^{1/3}\left(1+\frac{1}{3}\frac{\tilde z - z_*}{z_*}+O(\tilde z - z_*)^2\right)}$$

SOSTITUISCO $\qquad z_* = 8e^{i\pi}$

$$= \frac{1-8^{1/2}e^{i\pi/2}}{2+e^{i\frac{2\pi}{3}}8^{1/3}e^{i\pi/3}\left(1+\frac{1}{3}\frac{\tilde z+8}{-8}+O(\tilde z+8)^2\right)}$$

$$= \frac{1 - \dot{-}2\sqrt{2}}{2 - 2\left(1 - \frac{1}{24}(\tilde{z}+8) + O(\tilde{z}+8)^2\right)}$$

$$= \frac{1 - \dot{-}2\sqrt{2}}{\frac{1}{12}(\tilde{z}+8) + O(\tilde{z}+8)^2} = (1 - \dot{-}2\sqrt{2}) \frac{12}{\tilde{z}+8} + O(1)$$

QUINDI $\operatorname*{Res}_{\tilde{z}=-8} f_4(\tilde{z}) = 12(1 - \dot{-}2\sqrt{2})$

SOL $\operatorname*{Res}_{\tilde{z}=-8} f_4(\tilde{z}) = 12(1 + \dot{-}2\sqrt{2})$

④ DETERMINA PER QUALI VALORI $\alpha \notin \mathbb{Z}$

$$f(z) = \left[z^2 (1-z) \right]^\alpha$$

HA SOLO 2 PUNTI DI DIRAMAZIONE

STUDIO I 3 PUNTI:

$z = 0$, $f(z) \sim z^{2\alpha}$

VOGLIO REGOLARE SE $z=0$ $\Rightarrow$ $2\alpha = m$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = \frac{m}{2}}$

AVRÒ:

$$f(z) = z^m (1-z)^{m/2}$$

HA 2 P.TI DI DIRAMAZIONE $(1, \infty)$

SCRITTO REGOLO $m/2$ È DISPARI $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{2k+1}{2}$

PERCHÉ SE PARI NON È PIÙ POLIDROMA

$z = 1$ $\quad \alpha = n \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow$ MA SE α INTERO SCOMPARE LA POLIDROMIA

$z = \infty$ $\quad 3\alpha = n \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow \alpha = \frac{n}{3}$ CON n NON MULTIPLO DI 3

(5) CALCOLA $$I(z) = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(e^{-t} - e^{-zt}\right) = \log z$$

SI VEDE $I(1) = 0$

E $$I' = -\int_0^\infty \frac{dt}{t}(-t)e^{-zt} = \int_0^\infty dt\, e^{-zt} = \frac{1}{z}$$

IL PROBLEMA È CHE $I(z)$ SE SEPARO I TERMINI SONO DUE COSE CHE DIVERGONO

CONSIDERO UNA DEFORMAZIONE $(t^{-1} \to t^{s-1})$

$$I(z,s) = \int_0^\infty dt\, t^{s-1}\left(e^{-t} - e^{-zt}\right)$$

E SARÀ

$$I(z) = \lim_{s\to 0} I(z,s)$$

FACCIO IL CONTO NELLA ZONA DI CONVERGENZA DI $I(z,s)$, OTTENGO UNA FUNZIONE DI s E

POI FACCIO IL LIMITE.

SCRIVO

$$I(z,s) = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_0^\infty dt\, t^{s-1} e^{-t} = \Gamma(s)$$

$$I_2 = -\int_0^\infty dt\, t^{s-1} e^{-zt} = -\frac{1}{z^s}\int_0^{z\infty} d(zt)(zt)^{s-1} e^{-zt}$$

$z \in \mathbb{C}$

$z = |z| e^{-i\theta}$

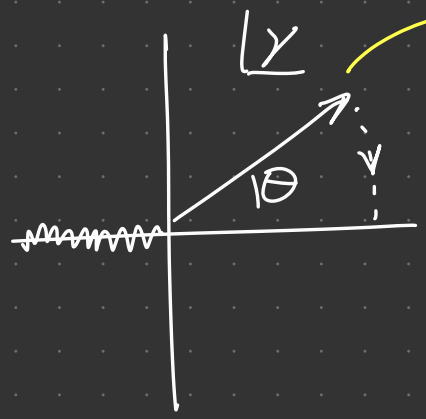
$z\infty$ VUOL DIRE ANDARE A ∞ CON UNA CERTA FASE

$$= -\frac{1}{z^s}\int_0^{\infty e^{-i\theta}} dy\, y^{s-1} e^{-y}$$

SE $\mathrm{Re}\, z > 0$

$$= -\frac{1}{z^s}\Gamma(s)$$

NOTA



STO ANDANDO A ∞ COME $z = e^{-i\theta}|z|$ E NELL'INTEGRALE QUELLO CHE LO FA CONVERGERE È e^{-y} QUINDI MI SERVE

$\mathrm{Re}\, z > 0$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

QUINDI

$$I(z,s) = \Gamma(s)\left(1 - z^{-s}\right)$$

$$I(z) = \lim_{s \to 0} I(z,s) = \lim_{s \to 0} \left(\frac{1}{s} + O(1)\right)\left(1 - 1 + s\ln z + O(s^2)\right)$$

SAREBBE $\infty \cdot 0$

QUINDI DEVO ESPANDERE

$$= \ln z$$

(5) $$I = \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-t} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right)$$

SE MI METTO AD ESPANDERLA IN 0

$$\propto \# t + O(t^2)$$

⇒ CONVERGE

FACCIO $t^{-1} \to t^{s-1}$

$$I(s) = \int_0^\infty dt\, t^{s-1} e^{-t} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right)$$

SPEZZO IN 3: 1 2 3

#1 :
$$I_1(s) = \int_0^\infty dt\, t^{s-1} \frac{e^{-t}}{e^t - 1}$$

$$\frac{1}{e^t - 1} - e^{-t}$$

RICORDO
$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty dt\, t^{s-1} \frac{1}{e^t - 1}$$

POICHÈ
$$\frac{1 - e^{-t}(e^t - 1)}{e^t - 1} = \frac{1 - 1 + e^{-t}}{e^t + 1}$$

QUINDI

$$I_1(s) = \Gamma(s)\zeta(s) - \Gamma(s)$$

$$= \Gamma(s)(\zeta(s) - 1)$$

#2:
$$I_2(s) = -\int_0^\infty dt\, t^{s-2} e^{-t} = -\Gamma(s-1)$$

$$= -\frac{\Gamma(s)}{s-1}$$

$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$

cosi

$(s-1)\Gamma(s-1)$

$=$

$\Gamma(s)$

#3:
$$I_3(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dt\, t^{s-1} e^{-t} = \frac{1}{2}\Gamma(s)$$

QUINDI

$$I(s) = I_1 + I_2 + I_3 = \Gamma(s)\left(\zeta(s) - 1 + \frac{1}{1-s} + \frac{1}{2}\right)$$

VEDO $s \to 0$

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} + O(1)$$

$$\zeta(s) = \zeta(0) + s\zeta'(0) + O(s^2) = -\frac{1}{2} + s\zeta'(0) + O(s^2)$$

SVILUPPO TAYLOR ESSENDO REGOLARE

$$\frac{1}{1-s} = 1 + s + O(s^2)$$

QUINDI

$$I(s) \underset{s\to 0}{\sim} \frac{1}{s}\left(-\frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} + s\left(\zeta'(0) + 1\right) + O(s^2)\right)$$

$$= 1 + \zeta'(0)$$

$$\left(\text{con } \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi)\right)$$

PER CASA:

3) $F(t) = \int_0^2 dx \, \frac{e^{-t(x^2-2x)}}{1+x^2}$ PER $t \to +\infty$

$$\left[\sim \frac{e^t}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\left(1+O\left(\tfrac{1}{t}\right)\right) \right]$$

6) $\int_0^\infty \frac{dx}{x} x^t e^{-\pi x}$ $\left[\underset{t\to+\infty}{\sim} \left(\frac{t}{\pi e}\right)^t \sqrt{\frac{2\pi}{t}}\left(1+O\left(\tfrac{1}{t}\right)\right) \right]$

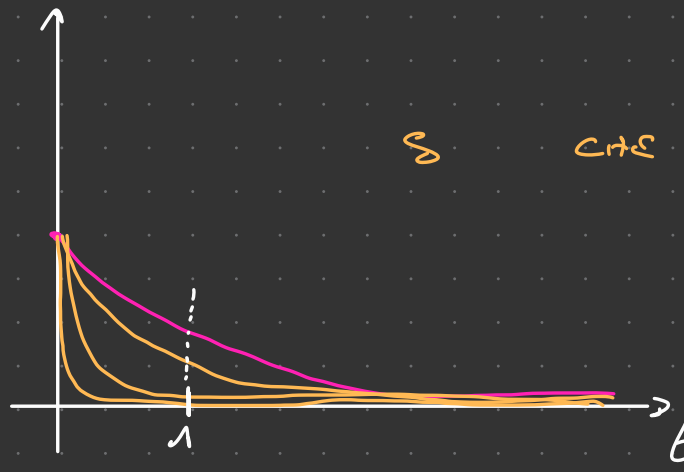
7) $\int_0^\infty dx \, e^{\frac{\sin tx}{x}}$ $\left[\underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2t} e^t \sqrt{\frac{6\pi}{t}}\left(1+O\left(\tfrac{1}{t}\right)\right) \right]$

1a) $F(s) = \int_0^1 dt \, \frac{e^{-st}}{\sqrt{1+t}}$

1b) $F(s) = \int_0^2 dt \, e^{-st^2} \cos t$

DETERMINA LO SVILUPPO ASINTOTICO PER $s \to +\infty$

SOL 1a)



s CHE CRESCE

$s \to +\infty$ L'INTEGRALE SI LOCALIZZA IN $t = 0$

SVILUPPO $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-1/2}{m} t^m$

NOTA anche $\binom{-a}{m} = \frac{\Gamma(-a+1)}{\Gamma(-a-m+1)\,m!} = \frac{-a(-a-1)\dots(-a-m+1)}{m!}$

$$= \frac{(-1)^m a(a+1)\dots(a+m-1)}{m!} = \frac{(-1)^m (a)_m}{m!}$$

SIMBOLO DI POCHHAMMER $\quad (a)_m = a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1)$

QUINDI $\quad f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)_m t^m}{m!}$

E AVRÒ $\quad F(s) = \int_0^1 dt\, e^{-st} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)_m t^m}{m!}$

UNIF CONV POICHÈ HA RAGGIO DI CONV. $= 1$, SINGOLARITÀ IN $t = -1$ E IO TANTO INTEGRO TRA 0, 1 E LA POSSO TIRARE FUORI

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)_m}{m!} \int_0^1 dt\, e^{-st} t^m$$

$$\underset{s\to+\infty}{\sim} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)_m}{m!} \underbrace{\int_0^{\infty} dt\, e^{-st}\, t^m}_{\mathcal{L}_s = \frac{m!}{s^{1+m}}}$$

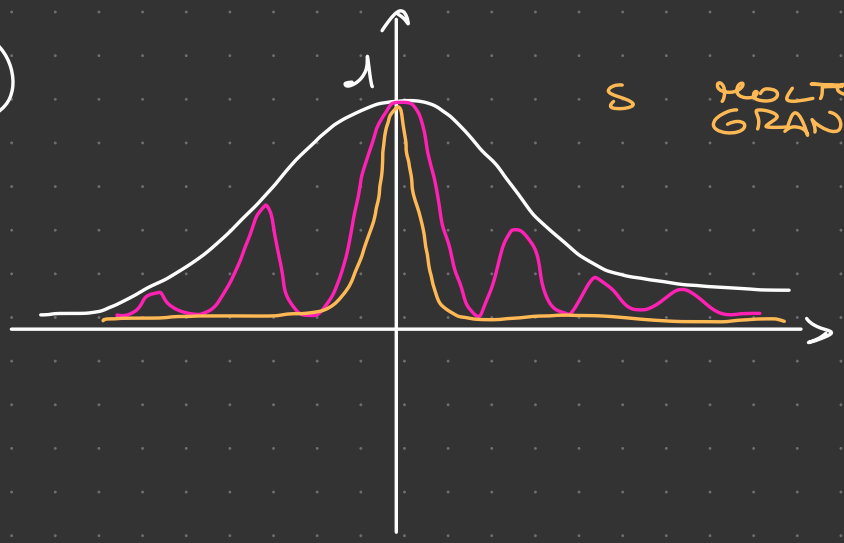
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)_m}{s^{1+m}}$$

QUINDI

$$F(s) \underset{s\to+\infty}{\sim} \sum_{m=0}^{N} (-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)_m \frac{1}{s^{1+m}} + o\left(\frac{1}{s^{1+N}}\right)$$

HA RAGGIO DI CONVERGENZA $=0$

16)



s MOLTO GRANDE $\sim \delta$ ALZA MA NON SI OLTRE 1

$s \to +\infty$ L'INTEGRALE SI LOCALIZZA IN $t \to 0$

PUNTO GAUSSIANO

VISTO CHE $t \to 0$ POSSO ESPANDERE

$$\cos t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!}$$

→ RAGGIO DI CONV. ∞

$$F(s) = \int_{-3}^{2} dt\, e^{-st^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!}$$

$$\underset{s \to +\infty}{\sim} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st^2} t^{2m}$$

$$\frac{\Gamma(m+1/2)}{s^{m+1/2}}$$

QUINDI

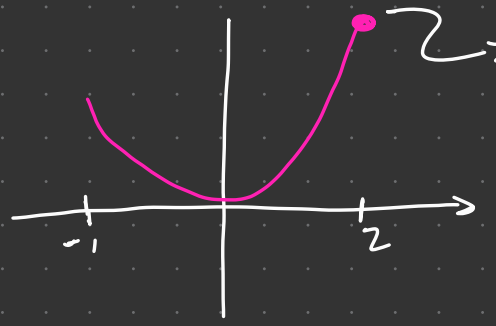
$$F(s) \overset{s\to+\infty}{\sim} \sum_{m=0}^{N} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \frac{\Gamma(m+1/2)}{s^{m+1/2}} + o\left(\frac{1}{s^{N+1/2}}\right)$$

2) $$F(s) = \int_{-1}^{2} dx\, e^{sx^2} \frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

a) DETERMINA IL TERMINE DOMINANTE PER $s \to +\infty$

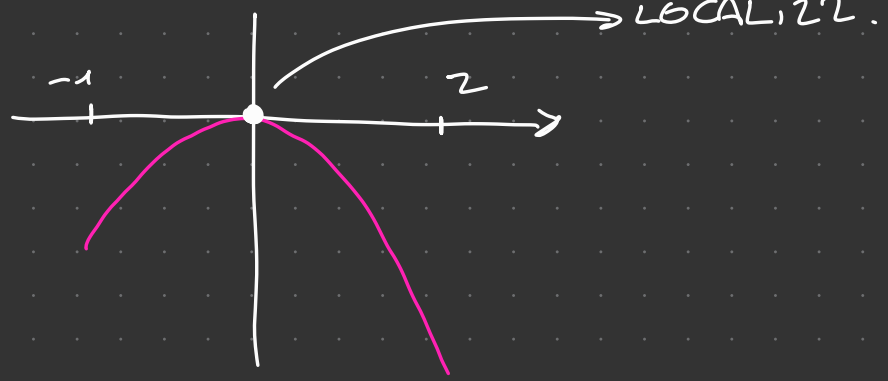
b) " " " " " $s \to -\infty$

— 0 —



a) $s > 0$ HO E HO LOCALIZZAZIONE SUL BORDO

b) $s<0$ HO



a) $s>0$ E CAMBIO $y = 2 - x$

$$I(s) = \int_0^3 dy\, e^{-s(y-2)^2} \frac{1}{\sqrt{y}}$$

→ HO LOCALIZZAZIONE IN ZERO

DA TEORIA SO

$$\int_0^a dx\, e^{s f(x)} g(x) \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{e^{s f_0} g_0 \Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1} |f_1|^{\nu+1}} + o\left(e^{s f_0} \frac{1}{s^{\nu+1}}\right)$$

→ $f'(0) \neq 0$

POICHÉ SCRIVO

$$f(x) \sim f_0 - |f_1| x + O(x^2)$$

$$g(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} g_m x^m$$

NEL NOSTRO CASO

$$f_0 = 4$$

$$g_0 = 1$$

$$\nu = -1/2$$

QUINDI AVRÒ

$$F(s) \sim \frac{e^{4s}\,\Gamma(1/2)}{(4s)^{1/2}} \left(1 + O(1/s)\right)$$

$$= \frac{e^{4s}\sqrt{\pi}}{(4s)^{1/2}} \left(1 + O(1/s)\right)$$

b) $$F(-|s|) = \int_{-1}^{2} dx\, e^{-|s|x^2} \frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

TEORIA

HO $$\int_{a<0}^{b>0} dx\, e^{|s| f(x)} g(x)$$

E $x=0$ MASSIMO PER $f(x)$, $f'(0)=0$

(CASO GAUSSIANO)

E TROVO

$$\int_a^b dx\, e^{|s| f(x)} g(x) \underset{s\to+\infty}{\sim} e^{s f(x_0)} g(0) \sqrt{\frac{2\pi}{s|f''(0)|}} \left(1 + O\left(\tfrac{1}{s}\right)\right)$$

NEL NOSTRO CASO

$$f(x) = -x^2$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

$$f(0) = 0$$

$$|f''(0)| = 2$$

$$g(0) = 1/\sqrt{2}$$

QUINDI

$$F(-|s|) \underset{s\to-\infty}{\sim} 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2\pi}{s\cdot 2}}\left(1+O(1/s)\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2s}}\left(1+O(1/s)\right)$$

4) $$I(t) = \int_0^\infty dx\; e^{\frac{\sin(t^2x)}{x}} \qquad t\to+\infty \quad , \quad t\in\mathbb{R}$$

CAMBIO $y = t^2x$, $x = \frac{y}{t^2}$ $dx = \frac{dy}{t^2}$

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{dy}{t^2}\, e^{\frac{\sin(y)}{y}t^2} = \frac{1}{t^2}\int_0^\infty dy\; e^{t^2\frac{\sin y}{y}}$$

CHIAMO $s = t^2$

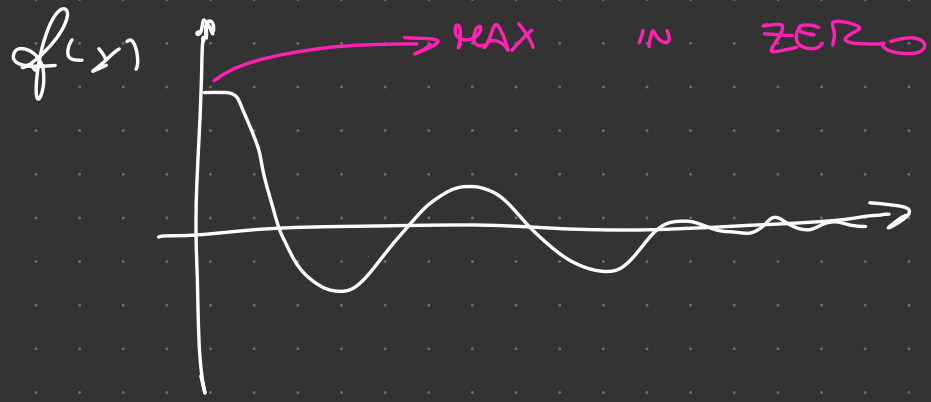
$$I(s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty dy\; e^{s\frac{\sin y}{y}}$$

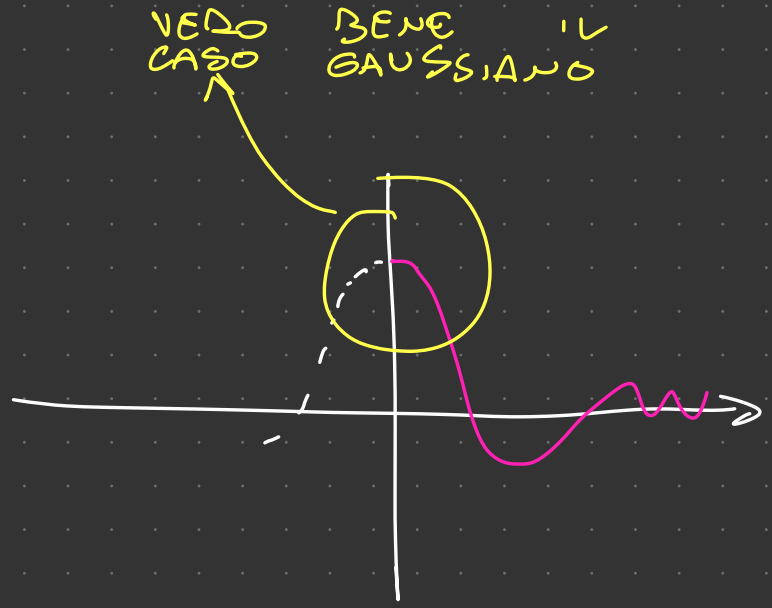
COSÌ HO DI NUOVO UNA COSA DEL TIPO

$$\int dy\, e^{s f(y)}\, g(x)$$

$$f(y) = \frac{\sin y}{y} \qquad g(y) = 1$$

E DEVO CAPIRE DOVE SI LOCALIZZA.





$I(s)$ È PARI

$$I(s) = \frac{1}{2s} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{s \frac{\sin y}{y}}$$

COSÌ

$$I(s) \overset{s \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2s} \left(e^{s} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(0)|\, s}} \right) \left(1 + O(1/s) \right)$$

N SERVE $|f''(0)|$

$$f'(y) = \frac{y\cos y - \sin y}{y^2} \qquad f'(y) = 0 \rightsquigarrow y = 0$$

$$f''(y) = -\frac{2y\cos y + (y^2-2)\sin y}{y^3}$$

$$f''(0) = -\frac{1}{3}$$

QUINDI

$$I(s) \sim \frac{1}{2s}\left(e^s\sqrt{\frac{2\pi}{\frac{1}{3}s}}\right)\left(1 + O(1/s)\right)$$

$s = t^2$

$$I(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{t^2}}{2t^3}\sqrt{6\pi}\left(1 + O(1/t^2)\right)$$

5) $I(t) = \int_0^\pi dx\ x^t\, e^{x^2 - tx(x-1)}$. $t \to +\infty$

MI SERVE ARRIVARE AD UNA FORMA $e^{t f(x)}\, g(x)$

$$= \int_0^\pi dx\, e^{t(\ln x - x(x-1))}\, e^{x^2}$$

GUARDO $f(x) = \ln x - x(x-1)$ DOVE HA MAX

$$f'(x) = \frac{1}{x} - (x-1) - x = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{1 - 2x^2 + x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow -2x^2 + x + 1 = 0 \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1/2 \end{cases} \longrightarrow \text{FUORI DAL CAMMINO}$$

$f''(1) = -3 \rightarrow f'' < 0$ È UNA GAUSSIANA

HO LOCALIZZAZIONE IN $x = 1$

QUINDI

$$I(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{tf(1)} g(1) \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(1)|}} \left(1 + O(1/t)\right)$$

$$f(1) = 0$$

$$g(1) = e$$

COSÌ

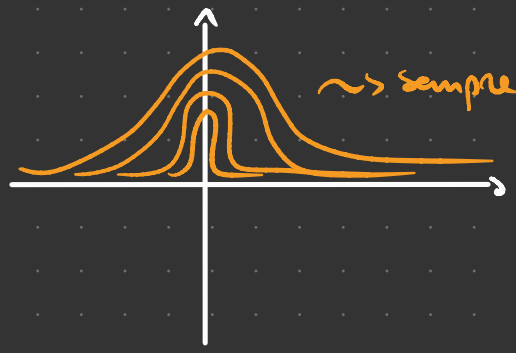
$$I(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e \sqrt{\frac{2\pi}{3t}} \left(1 + O(1/t)\right)$$

Metodo punto a sella

2. PASSO

Sviluppo asintotico $F(s) = \int_\gamma dz\, e^{sf(z)} g(z)$ $\quad s \in \mathbb{R}^+$ $\quad$ per $s \to \infty$

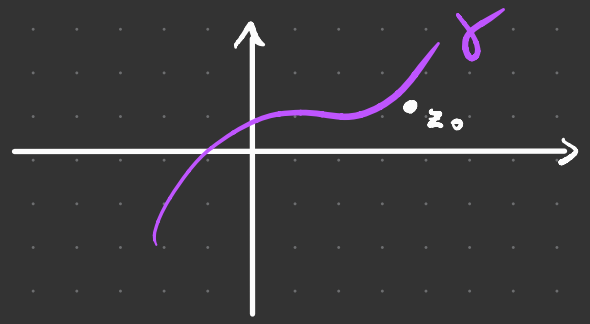
↳ non perdo generalità perché se $\notin$ mo assorbo la fase in $f(z)$



↝ sempre più strette per $s \to \infty$

L'idea è di ricondurci a un integrale gaussiano e nel piano z

Assumiamo che esista in prossimità di γ z_0 p.to di estremo per $f(z)$ ←



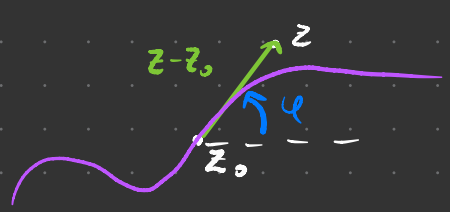
Sviluppando f in z_0

$$\Rightarrow f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z-z_0)^2 + O((z-z_0)^3) \qquad \text{dove} \quad f''(z_0) = |f''(z_0)| e^{i\alpha}$$

$$(z-z_0) = |z-z_0| e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2} |f''(z_0)|\, |z-z_0|^2\, e^{i(\alpha+2\varphi)}$$

↝
- α dato dal probl.
- φ fase di $z-z_0$



è l'inclinazione con cui γ passo per z_0 è arbitraria perché posso deformare il cammino a meno di poli

Consideriamo che vogliamo che $e^{\frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2} \sim e^{-sAx^2}$ $A>0$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}s|f''(z_0)||z-z_0|^2 e^{i(\alpha+2\varphi)}} \rightsquigarrow$

- $|z-z_0| \equiv x$ distanza tra i due punti
- $A = \frac{1}{2}|f''(z_0)|$
- $e^{i(\alpha+2\varphi)} = -1$ può solo venire dalla fase

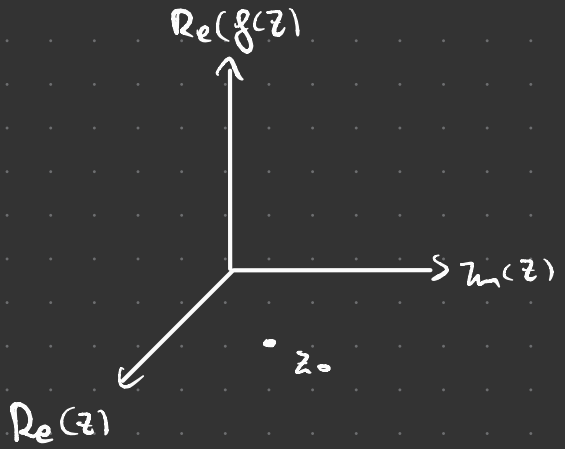
$\Leftrightarrow \alpha + 2\varphi = \pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi - \alpha}{2}$

} in questo modo ho RIADATTATO il cammino

$f(z) \rightsquigarrow z_0$ punto a sella è t.c. $f'(z_0) = 0$

Studiamo $Re(f(z))$ per $z \sim z_0$ dove $f'(z_0) = 0 \Rightarrow f(z) \underset{z_0}{\sim} f(z_0) + \underbrace{\frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2}_{\frac{1}{2}|f''(z_0)||z-z_0|^2 e^{i(\alpha+2\varphi)}}$

$\Rightarrow Re(f(z)) = Re(f(z_0)) + \frac{1}{2}|f''(z_0)||z-z_0|^2 \cos(\alpha+2\varphi)$



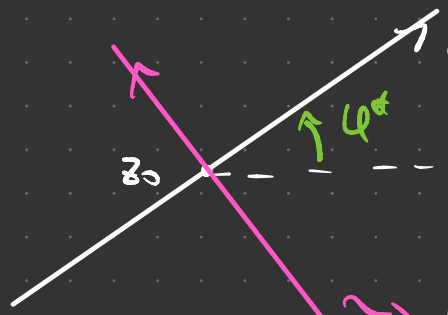
Per le f.mi analitiche esistono solo punti a sella, infatti:



$\rightarrow$ Muovendomi in cerchio attorno a z_0 $|\cdot|$ costante ma cambia sempre la fase

Quando $\cdot \cos(\alpha + 2\varphi) = -1$ mi da $\cap$ → massimo (perché $\mathrm{Re}(f(z)) \sim -\chi^2$)

$\cdot \cos(\alpha + 2\varphi) = 1$ mi da $\cup$ → minimo (perché $\mathrm{Re}(f(z)) \sim \chi^2$)



$$\varphi^* = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

$\rightsquigarrow \cap$ scrivendo in questa direzione trovo max

$\rightsquigarrow \cup$ scrivendo da questa direzione trovo minimo

In base a cosa scelgo il cammino?

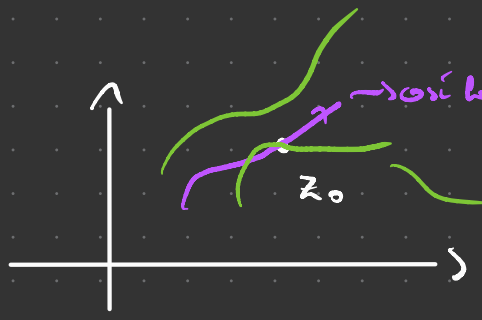
$e^{\frac{1}{2} f''(z_0)(z-z_0)^2}$ ef posso scriverla come $e^{\mathbb{R}} e^{i\mathbb{R}} \rightarrow e^{\frac{i}{2} s^2 \mathrm{Im}(f''(z_0)(z-z_0)^2)}$, $\in \mathbb{R}$

Se ho $\left. \int dx\, g(x)\, e^{i s \sin(\alpha x)} \right|_{s \to +\infty} = 0$ perché ho termine oscillante

Nel nostro caso se mi sposto dal cammino di massima pendenza ottengo un termine nell'esponenziale che mi annulla l'integrale e quindi non da contributo

Tornando al caso generale

$$F(s) = \int_\gamma dz\, e^{s f(z)} g(z)$$



→ così ho contributo

→ in questi casi non ho contributo

⇒ il risultato è dato da quello che succede nel resto del cammino

Se scelgo cammino max pendenza l'integrale si localizza in z_0 come gaussiano

Ricordando $f'(z_0) = 0$ $\quad f''(z_0) = |f''(z_0)| e^{i\alpha}$

$$z - z_0 = |z - z_0| e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad \varphi^* = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

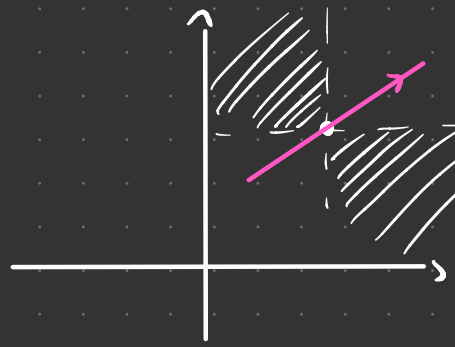
$|z - z_0| = |x|$

$z = z_0 + |x| e^{i\varphi}$

→ cammino di max pendenza (Teorema primo)

Cambiando variabile e l'integrale diventa

$$F(s) \underset{s\to+\infty}{\sim} \int dz = e^{i\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{s\left[f(z_0) + \frac{1}{2}|f''(z_0)|x^2 + o(x^3)\right]} \left[g(z_0) + o((z-z_0)^2)\right] = \boxed{e^{i\varphi} e^{s f(z_0)} g(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{s|f''(z_0)|}} \left(1 + o\left(\frac{1}{s}\right)\right)}$$



→ zone proibite, in queste zone ho una gaussiana capovolta ($+sx^2$) che esplode a ∞ e non mi dà nessun contributo nel punto a sella

Stirling complesso

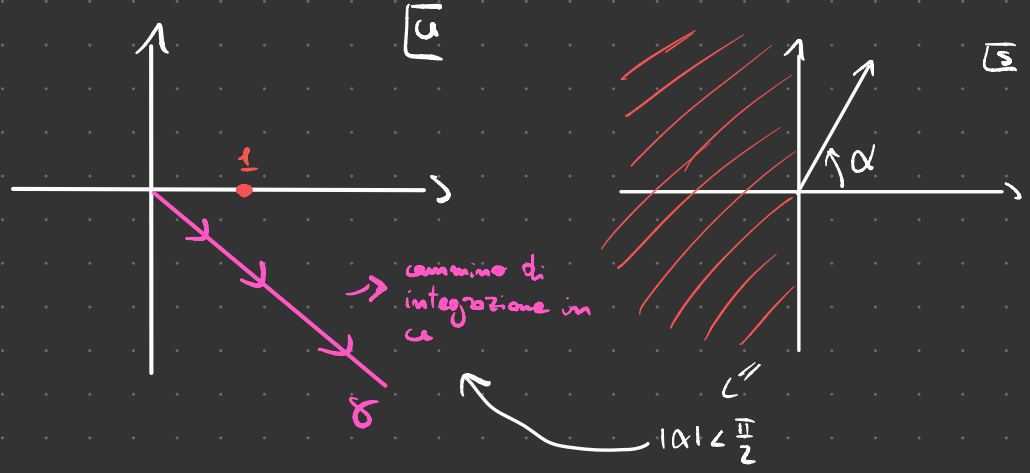
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty dt\, t^{s-1} e^{-t} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

pongo $t = s u$ $\rightsquigarrow$ $s^s \int_\gamma \frac{du}{u} u^s e^{-su}$

$t \in \mathbb{R} \Rightarrow u \in \mathbb{C}$ perdi

$s \in \mathbb{C}$

Scrivo $s = |s| e^{i\alpha} \Rightarrow u = \frac{t}{s} = \frac{t}{|s|} e^{-i\alpha}$



scrivo $u^s = e^{s \log u}$ ottenendo

$$s^s \int_\gamma^\infty \frac{du}{u} e^{s(\ln u - u) e^{i\alpha}} \sim \int_\gamma du\, e^{s f(u)} g(u)$$

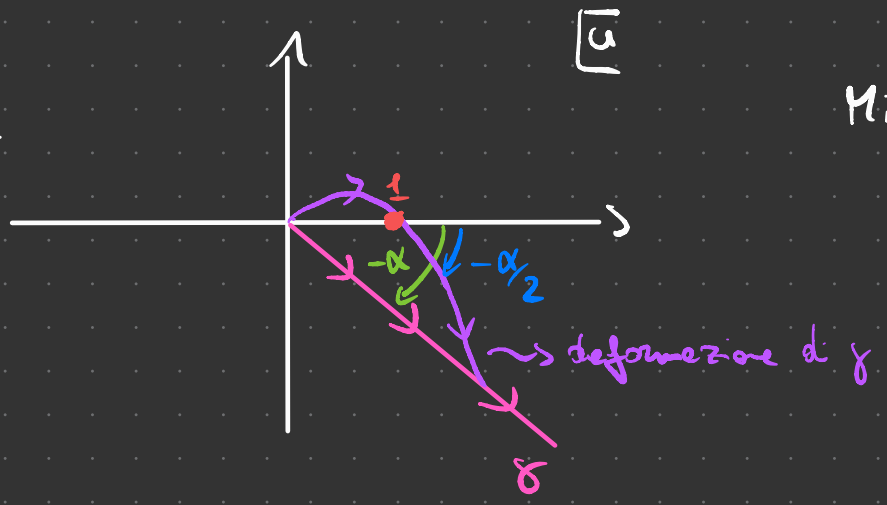
dove $\begin{cases} f(u) = (\ln u - u) e^{i\alpha} \\ g(u) = \frac{1}{u} \end{cases}$ $\rightarrow$ singolare in $u = 0$ ma non è un problema perché la convergenza dell'integrale in $u = 0$ dalla condizione $\mathrm{Re}(s) > 0$

Osservo $f'(u) = \left(\frac{1}{u} - 1\right) e^{i\alpha} = 0 \iff \boxed{u = 1}$ è punto a sella

$$f''(u) = e^{i\alpha}\left(-\frac{1}{u^2}\right) = -\frac{e^{i\alpha}}{u^2} \Rightarrow \boxed{f''(1) = -e^{i\alpha}} = e^{i(\alpha + \pi)}$$

↳ quello che prima chiamavamo α

$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi - (\alpha + \pi)}{2} = -\frac{\alpha}{2}$



Mi serve ancora $f(1) = e^{i\alpha}(-1) = -e^{i\alpha}$

Da cui

$$\Gamma(s) \underset{s\to+\infty}{\sim} s^s e^{-i\frac{\alpha}{2}} \underbrace{e^{|s|(-e^{i\alpha})}}_{e^{-s}} \sqrt{\frac{2\pi}{|s|}} \left(1 + o\left(\tfrac{1}{|s|}\right)\right) = s^s e^{-s}\sqrt{\frac{2\pi}{s}} \qquad s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 0$$

$|s|^{-1/2}$

$s = |s| e^{i\alpha}$

$|s|^{-1/2} e^{-i\frac{\alpha}{2}} = s^{-1/2}$

$$\Rightarrow \Gamma(s) \underset{|s|\to+\infty}{\sim} \left(\frac{s}{e}\right)^s \sqrt{\frac{2\pi}{s}} = \gamma(s)$$

- Dimostro $\gamma(s) \underset{|s|\to+\infty}{\sim} \gamma(s+1)\frac{1}{s}$

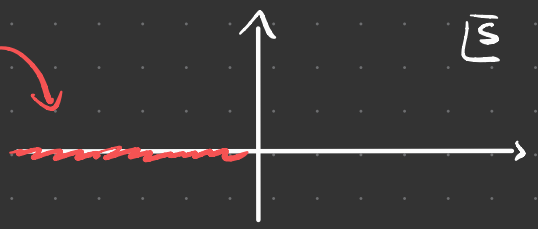
$$\gamma(s+1) = \left(\frac{s+1}{e}\right)^{s+1}\sqrt{\frac{2\pi}{s+1}} = \left(\frac{s+1}{e}\right)\left(\frac{s+1}{e}\right)^s\sqrt{\frac{2\pi}{s+1}}$$

$$= s\left(\frac{1+1/s}{e}\right)\left(\frac{s}{e}\right)^s\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\sqrt{\frac{2\pi}{s+1}} \underset{|s|\to+\infty}{\sim} s\left(\frac{1}{e}\right)\left(\frac{s}{e}\right)^s\sqrt{\frac{2\pi}{s}} = s\left(\frac{s}{e}\right)^s\sqrt{\frac{2\pi}{s}} = \gamma(s)\,s$$

$\sim$ deriva da $\left(1+\frac{1}{s}\right)^s$ per $s\to\infty$

$\Rightarrow \Gamma(s) \underset{|s|\to+\infty}{\sim} \gamma(s) \underset{|s|\to+\infty}{\sim} \frac{\gamma(s+1)}{s}$ e quindi $\Gamma(s) \underset{|s|\to+\infty}{\sim} \gamma(s)$

su tutto $\mathbb{C}$ tranne dove ha i poli di $\Gamma(s)$



Mentre $\Gamma(s)$ ha i poli su $\mathbb{R}^-$ $\gamma(s)$ ha un taglio che emerge come una sorta di "accumulazione di poli"

Esercizi

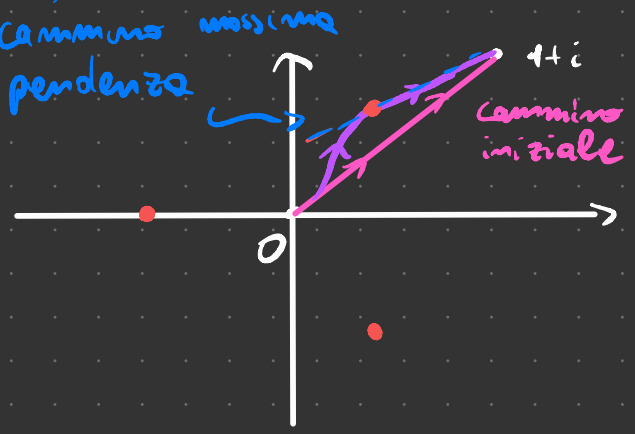
1) $F(t) = \int_0^{1+i} dz\, e^{t(z^4+4z)} \frac{1}{z^4-1}$ $\quad t \to +\infty$ Ho $\begin{cases} f(z) = z^4+4z \\ g(z) = \frac{1}{z^4-1} \end{cases}$

$\Rightarrow f'(z) = 4z^3 + 4 = 0 \iff z^3 = -1 \iff z = \begin{cases} e^{i\pi/3} \\ -1 \\ e^{-i\pi/3} \end{cases}$

Capiamo come è messo l'asse della sella in $e^{i\pi/3}$

$f''(z) = 12z^2 \Rightarrow f''(e^{i\pi/3}) = 12e^{i\frac{2}{3}\pi} \Rightarrow \begin{cases} |f''(e^{i\pi/3})| = 12 \\ \alpha = \frac{2}{3}\pi \end{cases} \Rightarrow \psi = \frac{\pi-\alpha}{2} = \frac{\pi}{6}$

$f(e^{i\pi/3}) = 3e^{i\pi/3} = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



$$\Rightarrow \boxed{F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{i\frac{\pi}{6}} e^{3t\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \frac{1}{e^{i\frac{4}{3}\pi}-1} \sqrt{\frac{2\pi}{t\,12}} \left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)}$$

② $$F(t) = \int_{-1}^{2e^{i\frac{\pi}{3}}} dz\; e^{t(z^3+3z)}\,(1-z^2) \qquad t \to +\infty$$

③ $$F(t) = \int_{-1-i}^{1+i} dz\; e^{t(iz^2+1)}\,\cos(z) \qquad t \to +\infty$$

Integrali di Fresnel

④ $F(s) = \int_0^s dx \cos(x^2) \qquad s \to \infty$

$x = st \Rightarrow F(s) = \int_0^1 dt\, s \cos(s^2 t^2)$

$\frac{1}{2}(e^{is^2t^2} - e^{-is^2t^2})$

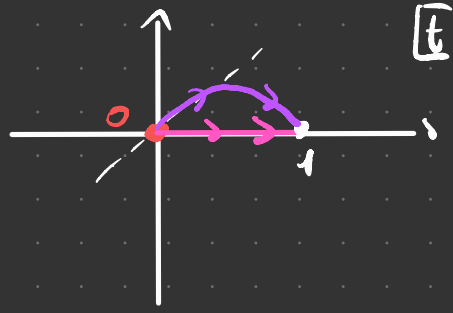
#1 #2

#1

$I_1(s) = \frac{s}{2} \int_0^1 dt\, e^{is^2t^2}$

$f(t) = it^2 \Rightarrow t = 0$ p.to a sella ↓ sull' estremo di integr.

$g(t) = 1$



$f''(0) = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi - 0}{2} = \frac{\pi}{4}$

Partendo dal punto focale sub $\frac{1}{2}$ integrale Gaussiano

$\Rightarrow I_1(s) \underset{s \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{s}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{s^2 2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{i\pi/4} \left(1 + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)$

#2

$$I_2(s) \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-i\pi/4}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right)\right) \qquad \text{analogamente a prima}$$

$$\Rightarrow F(s) \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{4} 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right)\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{2}{\sqrt{2}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right)\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)}$$

5) $$F(s) = \int_0^s dx\, \sin(x^2) \underset{s\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)$$

(1) $(z^2-1)^2 w''(z) + (z+1)(z+\alpha) w'(z) + \frac{1}{4}(z-1)(\beta z^2 + z + 1) w(z) = 0$

1 α, β / EQ. TOTALMENTE FUCHSIANA

2 DETERMINA SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONE

3 DETERMINA SE POSSIBILE ANDAMENTO LOGARITMICO A ∞

— o —

SCRIVO IN FORMA NORMALE PER STUDIARE P, Q

$$w''(z) + \frac{(z+1)(z-\alpha)}{(z^2-1)^2} w'(z) + \frac{\frac{1}{4}(z-1)(\beta z^2 + z + 1)}{(z^2-1)^2} w(z) = 0$$

(1)

$$P(z) = \frac{(z-\alpha)}{(z-1)^2(z+1)} \qquad Q(z) = \frac{1}{4}\frac{(\beta z^2 + z + 1)}{(z+1)^2(z-1)}$$

VEDO CHI SONO LE SINGOLARITÀ: $\Rightarrow z=-1, z=1, z=\infty$

$z=1$) VOGLIO P POLO SEMPLICE $\Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow P(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$

SU P NON POSSO FARE ALTRO

$z \to \infty$ $\quad Q(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \beta/z$ $\quad$ IO VOGLIO $\lim_{z\to\infty} z^2 Q(z) = \text{FINITO}$

$\Rightarrow \beta = 0 \quad \Rightarrow Q(z) = \frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)(z-1)}$

NON POSSO FARE PIÙ NIENTE NEANCHE SU Q E NO FINITO

(2) DEVO CALCOLARE GLI INDICI ATTORNO LE SINGOLARITÀ.

$\xi_1 = -1$	$\xi_2 = 1$	$\xi_3 = \infty$
$p_0 = -1/2$	$p_0 = 1/2$	$p_0 = 0$
$q_0 = 0$	$q_0 = 0$	$q_0 = 1/4$

VOGLIO GLI INDICI $\longrightarrow$ DEVO RISOLVERE L'EQ. INDICIALE

$\rho^2 - \frac{3}{2}\rho = 0$	$\rho^2 - \frac{1}{2}\rho = 0$	$\rho^2 - \rho + \frac{1}{4} = 0$
$\rho_1 = 0$	$\rho_1 = 0$	$\rho = -1/2$
$\rho_2 = 3/2$	$\rho_2 = 1/2$	$\rho = -1/2$

SIGNIFICATO INDICI

↳ GENERICA SOL COME $(z-\xi_i)^{\alpha}$ NELL'INTORNO DI ξ_i SI COMPORTA E L'ALTRA SOL $(z-\xi_i)^{\beta}$

↳ DIFFERENZA INDICI $\in \mathbb{Z} \Rightarrow$ HO SOL CON log

$$P\left\{\begin{matrix} -1 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -1/2 & z \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 & \end{matrix}\right\}$$

M. DEVO RICONDURRE AD UN P DI UN IPERGEOMETRICA (CHE POI SO RISOLVERE)

RIP OVVERO EQ. TOTALMENTE FUCHSIANA CON SING. $0, 1, \infty$ A 3 PARAMETRI LIBER. + VINCOLO Σ INDICI $= 1$ CON COEFF IN 0 E 1 UNO DI LORO È SEMPRE 0

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{pmatrix}$$

P STA A SIGNIFICARE UN SISTEMA FONDAMENTALE DI SOL, OVVERO, UNA C.L. DI SOL

↳ PENSA P COME UN PIANO IN UNO SPAZIO FUNZIONALE, IN CUI PRENDO 2 VETTORI L.I. CHE CORRISPONDONO A 2 SOL DELLA EQ. DIFF. PERÒ DA P VEDO CHE C'È SEMPRE UN INDICE $=0 \rightarrow$ NELL'INTORNO DELL'ORIGINE IN QUESTO PIANO UNA DIREZIONE RAPPRESENTA UN VETTORE CHE È

REGOLARE IN 0 E DO ESSERE L'UNICO POICHÈ L'ALTRO CI VA COME z^{1-c} CHE CON $c \notin \mathbb{Z}$ MI DÀ UN TAGLIO TRA $0,\infty$

PER SOL c GENERICO REGOLARE QUESTO IDENTIFICA UNIVOCAMENTE L'UNICA NELL'ORIGINE $\Leftrightarrow$ FUNZIONE IPERGEOMETRICA

NELL'ORIGINE HO UNA SOL $F(a,b,c,z)$ / $\lim_{z \to 0} F = 1$

VOGLIO $\{-1, 1, \infty\} \longrightarrow \{0, 1, \infty\}$
z w

$$w = \frac{z+1}{z}$$

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -1/2 & \frac{z+1}{z} \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 & \end{Bmatrix}$$

QUINDI IO HO $u(z) = F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{z+1}{z}\right)$

PER TROVARE L'ALTRA SOL USO LE PROPRIETÀ DI P E MI VIENE COMODO PRENDERE QUELLA INTORNO A 0 CON IL SECONDO INDICE (DA FUCHS SO CHE QUESTA SOL VA COME $\left(\frac{z+1}{2}\right)^{3/2}$ • QUALCOSA DI REGOLARE IN ZERO)

$$u_2(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^{3/2} P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ -3/2 & 0 & 1 & \frac{z+1}{2} \\ 0 & 1/2 & 1 & \end{matrix}\right\}$$

REGOLARE IN $z=-1$ $\hookrightarrow z=0$

$$u_2(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^{3/2} F\left(1, 1, \tfrac{5}{2}, \frac{z+1}{2}\right)$$

2 ABBIAMO $u_1(z)$ E $u_2(z)$ CHE RISOLVONO UN'EQ. IPERGEOMETRICA

$u_1(z) \equiv$ POLINOMIO DI 2° GRADO

$$\begin{cases} u_2(z) \sim C_1 z^{1/6}, & z \to 0 \\ u_2(z) \sim C_2 (z-1)^{-1/2}, & z \to 1 \end{cases}$$

DETERMINA $u_1(z)$ E $u_2(z)$

SFRUTTO CHE P DI UN IPERG. È MOLTO VINCOLATO E HO 4 SCOT CHE VOGLIO RIEMPIRE CON LE POCHE INFO CHE HO

POL. DI GRADO 2 $\Rightarrow$ ALL'∞ HO UN ANDAMENTO -2

LE INFO DI u_2 SONO BANALI

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -2 & z \\ 1/6 & -1/2 & 10/3 & \end{matrix}\right\}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{2} - 2 + X = 1 \rightarrow X = \frac{10}{3}$$

REGOLARE IN ZERO HO IL POLINOMIO, QUINDI μ_1 È F CHE PRENDO DA P

$$\mu_1(z) = F\left(-2, \frac{10}{3}, \frac{5}{6}, z\right) = 1 - 8z + \frac{104}{11} z^2$$

PER μ_2 POTREI (PIÙ COMODO $1/6$) O TIRARE FUORI $1/6$ O $-1/2$

$$\mu_2(z) = z^{1/6} P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ -\frac{1}{6} & 0 & -2+\frac{1}{6} & z \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{10}{3}+\frac{1}{6} & \end{matrix} \right\} \Big| \text{REG IN } z=0$$

$$= z^{1/6} F\left(\frac{7}{2}, -\frac{11}{6}, \frac{7}{6}, z\right)$$

(3) $P\left\{\begin{matrix} \alpha & \infty & -\infty \\ \infty\alpha & \infty & 2/3 & z \\ -\infty & 1/3 & \alpha^2 \end{matrix}\right\}$

a) DETERMINA α / CI SIANO 3 SING. FUCHSIANE

b) DETERMINA SISTEMA COMPLETO DI SOLUZIONI

(a) VEDO LA SOMMA DEGLI INDICI

$$\infty\alpha + \infty + \frac{2}{3} - \infty + \frac{1}{3} + \alpha^2 = \infty\alpha + 1 + \alpha^2 \underset{\text{DEVE}}{=} 1$$

$$\alpha^2 + \infty\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = -\infty \end{cases} \longrightarrow$$ NON ACCETTABILE PERCHÈ HO GIÀ $-\infty$ COME SINGOLARITÀ

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & -\infty \\ 0 & \infty & 2/3 & z \\ -\infty & 1/3 & 0 \end{matrix}\right\}$$

(6) VORREI $\{0, i, -i\}_z \longrightarrow \{0, \infty, 1\}_w$

IN i HO z INDICI, COMODO MANDARE $i \to \infty$

$$w = A \frac{z}{z - i}$$

$$w(-i) = A \frac{-i}{-2i} = \frac{A}{2} \overset{!}{=} 1 \Rightarrow A = 2$$

$$w = \frac{2z}{z - i}$$

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & i & \frac{2z}{z-i} \\ -i & 2/3 & 1/3 & \end{Bmatrix}$$

IMMEDIATO

$$u_1(z) = F\left(i, \frac{1}{3}, 1 + i, \frac{2z}{z-i}\right)$$

PER LA SECONDA USO ANCORA LE PROPRIETÀ DI P

$$\left(\frac{2z}{z-i}\right)^{-i} P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ i & 0 & 0 & \frac{2z}{z-i} \\ 0 & 2/3 & \frac{1}{3}-i & \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow u_2(z) = \left(\frac{2z}{z-i}\right)^{-i} F\left(0, \frac{1}{3}-i, 1-i, \frac{2z}{z-i}\right)$$

(4) $u_1(z) = \sqrt{\frac{z^5}{z-1}}$ RISOLVE EQ. IPERGEOMETRICA

a) DETERMINA P

b) DETERMINA $u_2(z)$ L.I. DA $u_1(z)$

c) ASSUNTO u_2 POLINOMIO VERIFICA $\exists$ 2 C.L. DI u_1, u_2 IL CUI ANDAMENTO A ∞ È DATO DAGLI INDICI DI P

—— O ——

(2)

PER RISOLVERE SFRUTTO ANALIZZO LA RIGIDITÀ DI u_1 IN $0, 1, \infty$ E P

$u_1 \underset{\infty}{\sim} z^{-2}$

$u_1 \underset{0}{\sim} z^{5/2}$

$u_1 \underset{0}{\sim} z^{-1/2}$

FUCHS CI DICE CHE IL SUO ANDAMENTO SONO GLI INDICI

FISSO 3 PARAMETRI

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -2 & z \\ 5/2 & -1/2 & 1 & \end{pmatrix}$$

(b)

u_1 NON È REGOLARE IN $z=0$ $\Rightarrow$ NON È LA F IPERGEOM.

$$\Rightarrow u_2 = F(-2, 1, -\tfrac{3}{2}, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2)_m (1)_m}{(-\frac{3}{2})_m m!} z^m = 1 + \frac{4}{3}z + \frac{8}{3}z^2$$

(c) $u_1 \underset{\infty}{\sim} z^2$ $\quad u_2 \underset{\infty}{\sim} z^2$ $\longrightarrow$ POICHÈ POLINOMIO

QUINDI u_1 E u_2 SEMBRANO LEGATI SOLO ALL'INDICE -2

VOGLIO $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ /

$$v_2(z) \underset{z\to+\infty}{\sim} \alpha z^2$$

$$v_1(z) \underset{z\to+\infty}{\sim} \frac{\beta}{z}$$

MI SERVIREBBE $u_1(z)$ IN ∞

$$u_1(z) = z^2\sqrt{\frac{z}{z-1}} = z^2\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{z}}} = z^2\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1/2}$$

$$= z^2\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-1/2}{m}(-1)^m z^{-m} = z^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_m(-1)^m}{m!}(-1)^m z^{-m}$$

$$= z^2\left(1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_1}{1}\frac{1}{z}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_2}{2}\frac{1}{z^2}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right)$$

$$= z^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{z}+\frac{3}{8}\frac{1}{z^2}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right)$$

$$= z^2+\frac{1}{2}z+\frac{3}{8}+O\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= \frac{3}{8}\underbrace{\left(\frac{8}{3}z^2+\frac{4}{3}z+1\right)}_{u_2(z)}+O\left(\frac{1}{z}\right)$$

QUINDI LA SOLUZIONE CHE HA L'ANDAMENTO GIUSTO DEGLI INDICI È L'ESPANSIONE ALL'∞ DI u_1 E u_2 A CUI TOLGO I PRIMI 3 TERMINI

(5) $z^2(z^2-1)u'' + z(z+1)(\alpha z - 1)u' + \frac{1}{9}u = 0$

a) DET. α / SIA TOTALMENTE FUCHSIANA CON 3 SINGOLARITÀ

SI CHIAMA DI PAPPERITZ - RIEMANN

b) TROVARE SISTEMA COMPLETO DI SOLUZIONI

---

a) $P(z) = \frac{z(z+1)(\alpha z-1)}{z^2(z^2-1)} = \frac{\alpha z - 1}{z(z-1)}$

$Q(z) = \frac{1/9}{z^2(z^2-1)} = \frac{1}{9}\frac{1}{z^2(z-1)(z+1)}$

SINGOLARITÀ $z = 0, \pm 1, \infty$

MA AL FINITO NON POSSO SCEGLIERE α !
SOLO 3 SING

$$P(z) \underset{\infty}{\sim} \alpha/z$$

$$Q(z) \underset{\infty}{\sim} 1/z^4$$

SO P.TO REG ALL'∞ SSE $P(z) \sim \frac{z}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$

$$Q(z) \sim O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$\Rightarrow$ $\alpha = 2$ ∞ DIVENTA REGOLARE

COSÌ $P(z) = \dfrac{2z-1}{z(z-1)}$ $\qquad Q(z) = \dfrac{1}{9z^2(z-1)(z+1)}$

$z = -1$ $\qquad$ $z = 0$ $\qquad$ $z = 1$

$p_0 = 0$ $\qquad$ $p_0 = 1$ $\qquad$ $p_0 = 1$

$q_0 = 0$ $\qquad$ $q_0 = -1/9$ $\qquad$ $q_0 = 0$

$\rho^2 - \rho = 0$

$\rho = 0$

$\rho = 1$

$\rho^2 - \frac{1}{9} = 0$

$\rho = \frac{1}{3}$

$\rho = -\frac{1}{3}$

$\rho^2 = 0$

$\rho = 0$

$\rho = 0$

$$P\left\{\begin{matrix} -1 & 0 & 1 & \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & z \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \end{matrix}\right\}$$

FACCIO $\{0, -1, 1\} \longrightarrow \{\infty, 0, 1\}$

z $\qquad$ w

$$w = \frac{1}{2}\frac{z+1}{z}$$

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\frac{z+1}{z} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \end{matrix}\right\}$$

↳ SCRITTO COSÌ ESCE UN log

SCAMBIO $0, \infty$

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 1/3 & 0 & 0 & \frac{zz}{z+1} \\ -1/3 & 0 & 1 & \end{matrix}\right\}$$

→ ORA HO 2 COSE C.I

QUINDI

$$\mu_1(z) = \left(\frac{zz}{z+1}\right)^{1/3} P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & 1/3 & \frac{zz}{z+1} \\ -2/3 & 0 & 4/3 & \end{matrix}\right\}\Bigg|_{REG}$$

$$= \left(\frac{zz}{z+1}\right)^{1/3} F\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{zz}{z+1}\right)$$

LA μ_2 LA TROVO TIRANDO FUORI L'ALTRA SING

$$\mu_2 = \left(\frac{zz}{z+1}\right)^{-1/3} P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 2/3 & 0 & -1/3 & \frac{zz}{z+1} \\ 0 & 0 & 2/3 & \end{matrix}\right\}$$

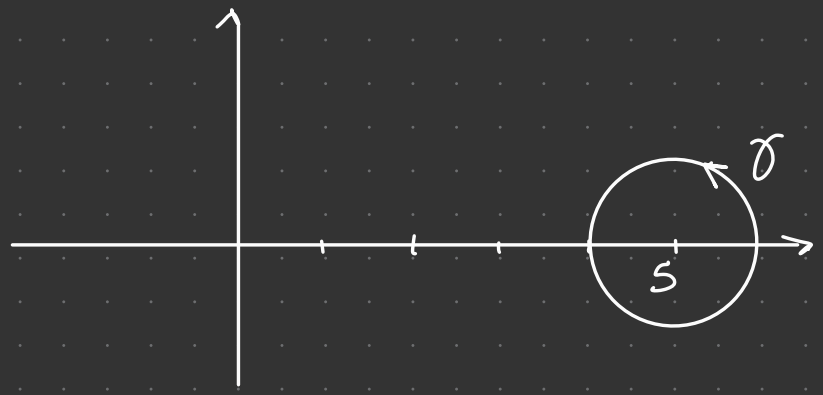
$$= \left(\frac{2z}{z+1}\right)^{-1/3} F\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2z}{z+1}\right)$$

TESTI

(1) $$f(z) = \frac{1}{(z-2i)(z^2-i)}$$

a) PROPRIETÀ DI ANALITICITÀ

b) CALCOLA $\oint_\gamma f(z)\,dz$, γ = CIRCONFERENZA DI RAGGIO 1 E CENTRATA IN (5,0)



(2) $$I(\alpha) = \int_{-1}^{1} dx \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} \frac{x+2}{x^2+1}$$

(3) $$F(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dx\, e^{-s\left(\frac{x^3}{3}-x\right)}$$

a) TERMINE DOMINANTE PER $s \to +\infty$

b) PRIMA CORREZIONE AL TERMINE DOMINANTE

(4) $u(z) = (z-a)^{1/3}(z-1)^{1/5}$, $a \in \mathbb{R}$

a) PER QUALI VALORI DI a $u(z)$ RISOLVE EQ. IPERGEOM.

b) PER $a=0$ DETERMINA SIST COMPLETO DI SOL

c) PER $a=-1$ DET IL GENERICO SIMBOLO DI RIEMANN

d) DETERMINA X IN MODO TALE CHE $u_2(z)$ SIA UN POLINOMIO DI GRADO 2 E SIA DETERMINARE TALE POLINOMIO IN $(1-z)$

Sol

① SCRIVO $z^i = e^{i \ln z}$

POLIDROMIA $\longrightarrow \infty$ FOGLI

METTO IL TAGLIO $\tilde{z} = |z| e^{i\theta} \quad |\theta| < \pi$

VEDO GIÀ UN POLO IN $z = 2i$

MA DEVO STUDIARE CHE SUCCEDE PER

$D = z^i - i$

DEVO STUDIARE LE DETERMINAZIONI

$$f_m(\tilde{z}) = f(\tilde{z} e^{2\pi i m}) \qquad m \in \mathbb{Z}$$

$$D \longrightarrow D_m(\tilde{z}) = e^{i[\ln \tilde{z} + 2\pi i m]} - i$$

$$= e^{i \ln \tilde{z} - 2\pi m} - i = e^{i \ln z - 2\pi m} - e^{i\pi/2}$$

QUINDI, VEDO LE ∞ DETERM.

MI CHIEDO $D_m = 0$?

$$e^{i \ln \tilde{z} - 2\pi m} = e^{i\pi/2}$$

exp UGUALI $\Rightarrow$ ARG UGUALI A MENO DI $2\pi i k$

$$i \ln \tilde{z} - 2\pi m + 2\pi i k = i\frac{\pi}{2} \qquad m, k \in \mathbb{Z}$$

RICORDO $\tilde{z} = |\tilde{z}| e^{i\theta}$

$$i \ln|\tilde{z}| - \theta - 2\pi m = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

VEDO PART Re ED Im

Re: $\theta = -2\pi m$

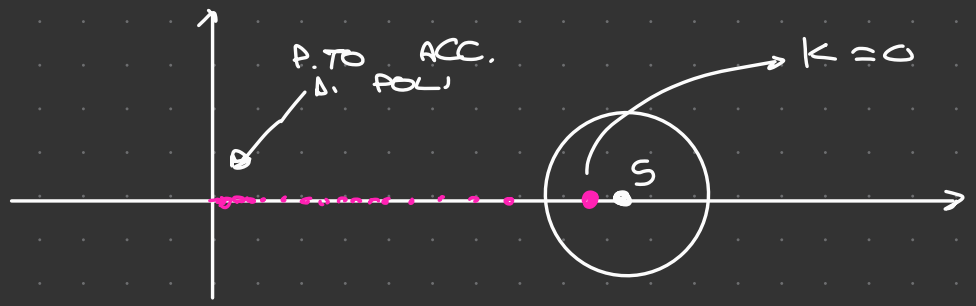
MA $-\pi < \theta < \pi$, QUINDI UNICA POSSIBILITÀ $\boxed{m=0}$

$\Rightarrow D = 0$ SSE $m = 0 \Rightarrow \theta = 0$

QUINDI I POLI SONO SUL FOGLIO $m=0$ SULL'ASSE POSITIVO.

VEDO Im: $\ln|\tilde{z}| = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$|\tilde{z}| = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$



$|\tilde{z}| = e^{\frac{\pi}{2}} \sim 4{,}81$

QUINDI

$$I = \oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{\tilde{z}=e^{\pi/2}} f_{n=0}(\tilde{z})$$

VORREI $f(\tilde{z}) = \dfrac{d_{-1}}{\tilde{z} - e^{\pi/2}} + \dots$ COSÌ $d_{-1} = \operatorname{Res}$

CERCO DI FARE LO SVILUPPO DI $D(z)$ ATTORNO $\tilde{z} = e^{\pi/2} = z_0$

$$e^{i \ln z} - i = g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + O((z-z_0)^2)$$

$$g'(z) = i z^{i-1}$$

$$g'(e^{\pi/2}) = i (e^{\pi/2})^{i-1} = i e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}} = -e^{-\frac{\pi}{2}}$$

COSÌ

$$g(z) = -e^{-\frac{\pi}{2}}(z - e^{\pi/2}) + O((z - e^{\pi/2})^2)$$

QUINDI

$$f(z) \underset{z \to e^{\pi/2}}{\sim} \frac{1}{(e^{\pi/2} - 2i)\left(-e^{-\frac{\pi}{2}}(z - e^{\pi/2}) + O((z-e^{\pi/2})^2)\right)}$$

QUINDI ATTORNO AL POLO AVRÒ

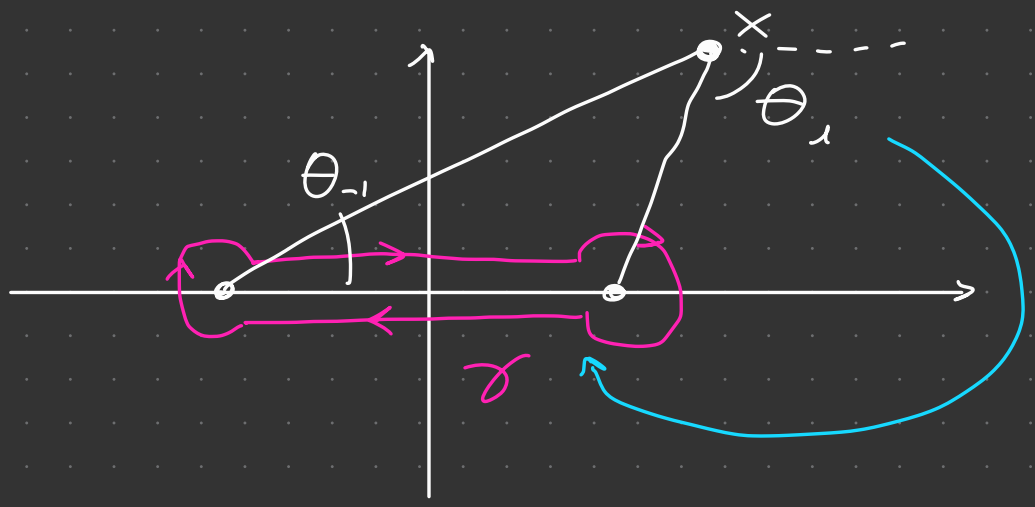
$$\sim \frac{\frac{-e^{\pi/2}}{e^{\pi/2}-2i}}{z-e^{\pi/2}} + O(1)$$

$$\text{Res} = \frac{-e^{\pi/2}}{e^{\pi/2}-2i}$$

QUINDI

$$I = 2\pi i \frac{e^{\pi/2}}{2i-e^{\pi/2}}$$

(2) $$I(\alpha) = \int_{-1}^{1} dx \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} \frac{x+2}{x^2+1}$$



PASSO A DX DI $x = 1$

GIRANDO $\theta_{-1} \to \theta_{-1}$

$\theta_1 \to \theta_1 + 2\pi$

LA FASE IN PIÙ CE L'HO AL NUM

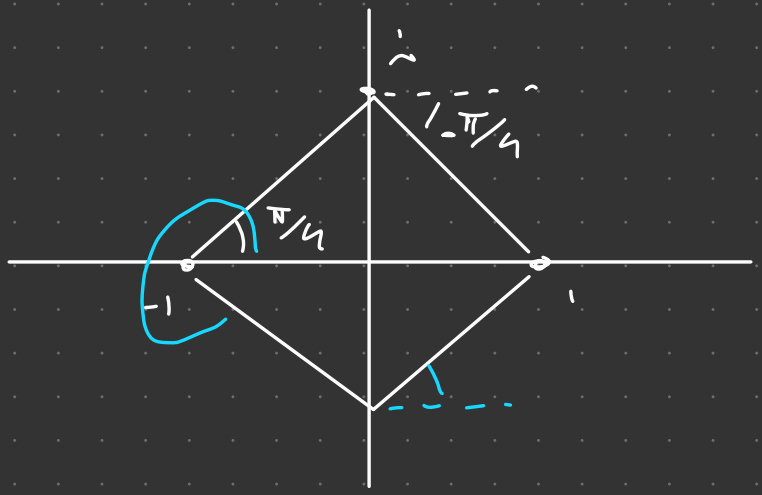
COSÌ

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = I(\alpha) - e^{-2\pi i\alpha} I(\alpha)$$

$$= (1 - e^{-2\pi i\alpha})\, I(\alpha)$$

DAL SECONDO PEZZO VEDO POLI IN $z = \pm i$, $z = \infty$

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{\substack{z=\pm i \\ z=\infty}} f(z)$$



i: $\theta_1 = -\pi/4$ $\quad \theta_{-1} = \pi/4$

$-i$: $\theta_1 = \pi/4$ $\quad \theta_{-1} = \frac{7\pi}{4}$

QUINDI $\operatorname*{Res}_{x=i} f(z) = \lim_{x\to i} \frac{x+2}{x+i}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} = \frac{i+2}{2i}\left|\frac{1-i}{1+i}\right|^{\alpha} e^{i\alpha(\theta_1-\theta_{-1})}$

(θ_1, θ_{-1}; $\alpha = 1$)

$= \frac{i+2}{2i} e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha}$

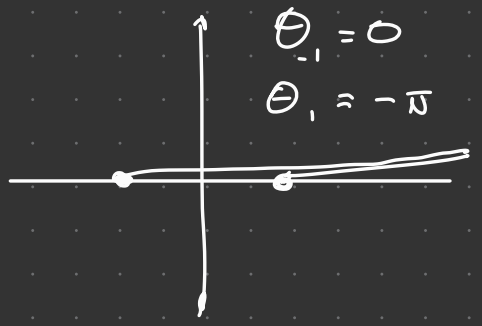
$$\operatorname*{Res}_{x=-i} f(z) = \lim_{x\to -i} \frac{x+2}{x-i}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} = \frac{-i+2}{-2i} e^{i\alpha(\theta_1-\theta_{-1})}$$

$$= \frac{i-2}{2i} e^{-\frac{3i\pi}{2}\alpha}$$

ALL'∞ LA FUNZ VA COME $1/z$, VOGLIO IL COEFF DI $1/z$ CAMBIATO DI SEGNO

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{x+2}{x^2+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}$$

$\underbrace{\qquad}_{1}$



$$= -\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} = -e^{i\alpha(\theta_1-\theta_{-1})} = -e^{-i\alpha\pi}$$

CONCLUDENDO

$$I(\alpha) = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i\alpha}}\left(\frac{i+2}{2i}e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}} + \frac{i-2}{2i}e^{-\frac{3i\alpha\pi}{2}} - e^{-i\alpha\pi}\right)$$

$$= \frac{2\pi i\, e^{-i\alpha\pi}}{1-e^{-2\pi i\alpha}}\left(\frac{i+2}{2i}e^{i\alpha\frac{\pi}{2}} + \frac{i-2}{2i}e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}} - 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\left(2\,\mathrm{Re}\left(\frac{i+2}{2i}\right) - 1\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

(3)

$$F(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dx\, e^{-is\left(\frac{x^3}{3}-x\right)}$$

$$\int_\gamma dx\, e^{sf(x)}\, g(x)$$

$$g(x) = 1$$

$$f(x) = -i\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$$

$$f'(x) = 0 = -i(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

QUINDI 2 POSSIBILI P.TI A SELLA, GUARDO LA f''

$$f''(x) = -2x$$

$$f''(-1) = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} \longrightarrow |f''| = 2 \qquad \alpha = -\frac{\pi}{2}$$

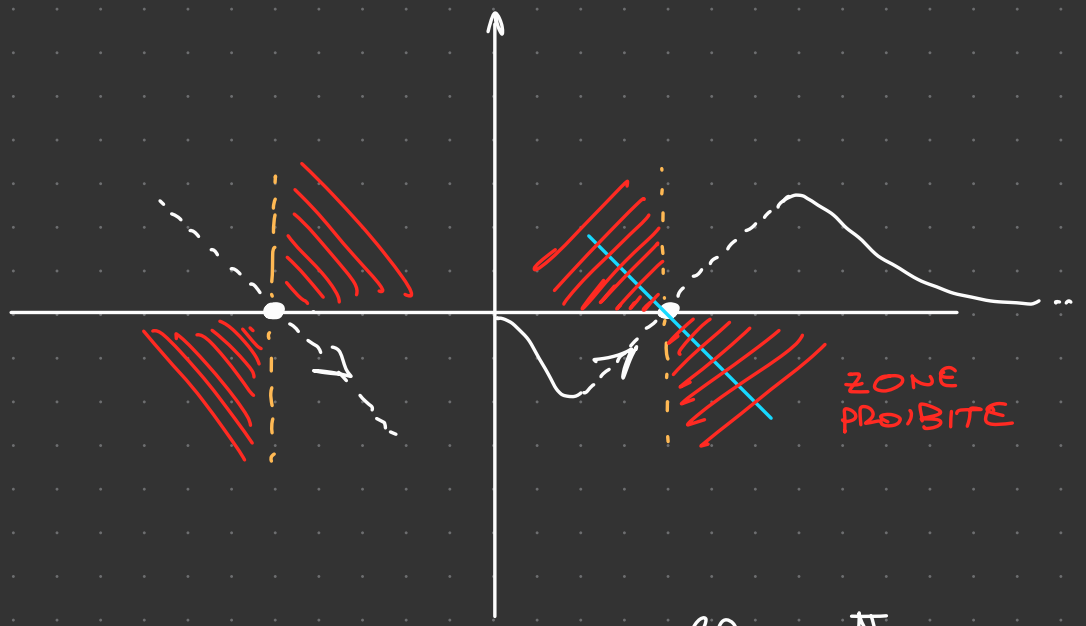
$$f''(1) = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \longrightarrow |f''| = 2 \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

IL CAMMINO DI MASSIMA PENDENZA SARÀ

$$\varphi = \frac{\pi - \alpha}{2} + k\pi$$

-1 : $\varphi = \frac{\pi + \frac{\pi}{2}}{2} + k\pi = \frac{3}{4}\pi + k\pi$

1 : $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi$



IL VERSO È DATO DA k

ZONE PROIBITE FORZANO UN VERSO

AVENDO $\int_0^\infty$ PER FORZA DEVO USARE $x = 1$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad k = 0$$

NON USO LA FORMULETTA CUS. VERO IL 1° TERMINE

$$F(s) \underset{s \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} e^{s f(1)} \int_0^\infty e^{s\left(\frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{6} f'''(1)(x-1)^3\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}s} \int_0^\infty e^{-\sqrt{2}s(x-1)^2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{3}s(x-1)^3}$$

FACCIO UN CAMBIO DI VARIABILE

$$x - 1 = y\, e^{i\varphi} = y\, e^{i\pi/4}$$

$$dx = dy\, e^{i\pi/4}$$

→ L'INTEGRALE SI LOCALIZZA E $\int dy$ È ASINTOT. EQUIV AD UN INT GAUSSIANO

$$\underset{s\to\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{2is}{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-sy^2} e^{-\frac{s}{3}y^3 e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$$

DEVO ESPANDERE IL TERZO exp IN $y = 0$

$$\sim \frac{1}{\pi} e^{-\frac{2is}{3}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-sy^2} \left(1 + i\frac{s}{3}y^3 e^{-\frac{3i\pi}{4}} - \frac{1}{18}s^2 y^6 + \dots\right)$$

SE MI FERMASSI QUA QUESTO TERMINE NON DA CONTRIBUTO E QUINDI IL 1° TERMINE CORRETTIVO È QUELLO SUCCESSIVO

$$\sim \frac{1}{\pi} e^{-\frac{2is}{3}} e^{i\pi/4} \left(\sqrt{\frac{\pi}{s}} - \frac{s\sqrt{\pi}}{48 s^{\frac{1}{2}+1}} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{2is}{3}} e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{s}} \left(1 - \frac{s}{48}\frac{1}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right)$$

(4) a) VANNO BENE $a = -1 \vee a = 0$ POICHÈ SO EQ. IP. HA SING. IN $0, 1, \infty$

b) $u_1(z) = z^{1/3}(z-1)^{1/5}$

VERSO $u_1(z) \underset{z\to\infty}{\sim} z^{1/3+1/5} = z^{8/15}$ ⇝ INDICE ALL'∞ $= -\frac{8}{15}$

POSSO TROVARE

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -\frac{8}{15} & z \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 1 & \end{Bmatrix}$$

$x + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{8}{15} = 1 \Rightarrow x = 1$

QUINDI

$$u_2(z) = F\left(-\frac{8}{15}, 1, \frac{2}{3}, z\right)$$

c) $a = -1 \Rightarrow u(z) = (z-1)^{8/15}$

HA SOLO 2 SINGOLARITÀ $\rightsquigarrow$ NON RIESCO A PARAMETRIZZARE P DI UN EQ. IPERG.

SCRIVO CON x GENERICO $\in \mathbb{C}$

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & x \\ 1-x & 8/15 & -8/15 \end{matrix}\right\} \quad z$$

d) SI PUÒ FARE UNA $SL(2,\mathbb{C})$: $z \longrightarrow 1-z$

$\infty \rightarrow \infty$

$0 \leftrightarrow 1$

COSÌ

$$P\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & \infty \\ 0 & 0 & x \\ 1-x & 8/15 & -8/15 \end{matrix}\right\} \quad 1-z \quad = P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & x \\ 8/15 & 1-x & -8/15 \end{matrix}\right\} \quad 1-z$$

AVRÒ POLINOMIO DI GRADO 2 SE ALL'∞ VA COME $-z \Rightarrow x = -2$

$$u_2(z) = F\left(x, -\frac{8}{15}, \frac{7}{15}, 1-z\right)$$

SE $x = -2$ u_2 È UN POLINOMIO DI GRADO 2

$$u_2(z) = F\left(2, -\frac{8}{15}, \frac{7}{15}, 1-z\right)$$

$$= 1 + \frac{176}{77}(1-z) - \frac{28}{77}(1-z)^2$$