

# Particelle Elementari 1,

## esercizi d'esame

Gabriele Cembalo

A.A. 2025-2026

### Disclaimer

Raccolgo in questo breve documento gli esercizi che ho svolto in preparazione dell'esame di *Particelle Elementari 1*. Ovviamente tutti i testi degli esercizi sono reperibili nei canali ufficiali e tutto ciò che è scritto su questi appunti è materiale scritto da uno studente, e per ciò va trattato come tale.

---

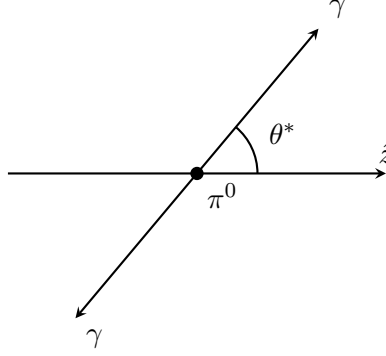
### Indice

|              |    |
|--------------|----|
| Esercizio 1  | 1  |
| Esercizio 2  | 5  |
| Esercizio 3  | 7  |
| Esercizio 4  | 8  |
| Esercizio 5  | 10 |
| Esercizio 6  | 12 |
| Esercizio 7  | 14 |
| Esercizio 8  | 16 |
| Esercizio 9  | 19 |
| Esercizio 10 | 21 |
| Esercizio 11 | 23 |
| Esercizio 12 | 25 |
| Esercizio 13 | 27 |
| Esercizio 14 | 29 |
| Esercizio 15 | 31 |
| Esercizio 16 | 32 |
| Esercizio 17 | 33 |

---

## Esercizio 1

Abbiamo  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  con  $m_{\pi^0} = 0.135 \text{ GeV}$ ,  $E_{\pi^0} = 2.7 \text{ GeV}$ .



a) Abbiamo:

$$P_{\pi}^{\mu} = (E_{\pi}, \vec{p}), \quad (1)$$

e per i  $\gamma$ , avendo  $m_{\gamma} = 0$ , abbiamo:

$$E_{\gamma_i} = |\vec{p}_{\gamma_i}|. \quad (2)$$

Ci mettiamo nel SR di riposo (CM) di  $\pi^0$ :

$$P_{\pi}^{*\mu} = (m_{\pi}, \vec{0}). \quad (3)$$

Dunque per la conservazione del quadri-impulso:

$$\begin{cases} m_{\pi} = E_{\gamma_1}^* + E_{\gamma_2}^* \\ \vec{0} = \vec{p}_{\gamma_1}^* + \vec{p}_{\gamma_2}^* \end{cases} \implies |\vec{p}_{\gamma_1}^*| = |\vec{p}_{\gamma_2}^*|. \quad (4)$$

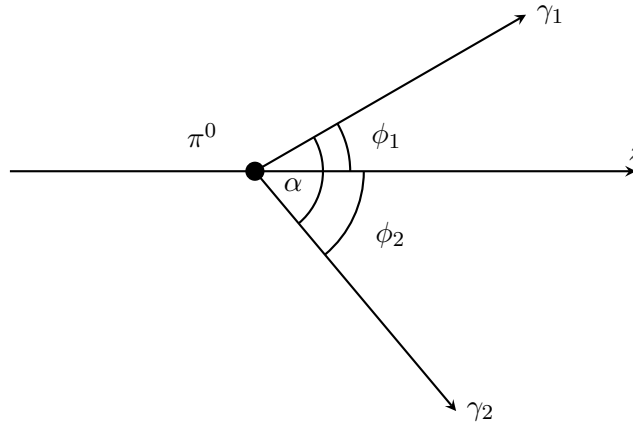
Dunque:

$$E_{\gamma_1}^* = |\vec{p}_{\gamma_1}^*| = E_{\gamma_2}^* \implies E_{\gamma_1}^* = \frac{m_{\pi}}{2}. \quad (5)$$

Andiamo nel SR del lab con le trasformazioni di Lorentz (lungo  $\hat{z}$ ):

$$P_{\pi}^{\mu} = (E_{\pi}, \vec{p}_{\pi}), E_{1,2} = \gamma^* (E_{1,2}^* \pm \beta^* p_{1,2}^{z*}). \quad (6)$$

**Nota:** noi prendiamo il segno “+” perché passiamo dal SR fermo a quello in moto.



Ci servono  $p_{\gamma_i}^{z*}$ , che possiamo vedere nel CM:

$$p_{\gamma_i}^{z*} = \pm E_{\gamma_i} \cos \theta^*. \quad (7)$$

E i coefficienti di Lorentz sono (li prendiamo dal moto del lab rispetto il CM):

$$\beta^* = \frac{|\vec{p}_\pi|}{E_\pi} \quad \gamma^* = \frac{E_\pi}{m_\pi}. \quad (8)$$

Ricavando:

$$|\vec{p}_\pi| = \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} = 2,696 \text{ GeV}, \quad (9)$$

otteniamo:

$$\beta^* = 0,9987 \quad \gamma^* = 20. \quad (10)$$

Dunque la trasformata è:

$$E_{\gamma_i} = \gamma^* (E_{\gamma_i}^* + \beta^* p_{\gamma_i}^{z*}) \quad (11)$$

$$= \gamma^* E_{\gamma_i}^* (1 \pm \beta^* \cos \theta^*) \quad (12)$$

$$= 10 m_\pi (1 \pm \beta^* \cos \theta^*). \quad (13)$$

Quindi troviamo:

$$E_{\min} = 10 m_\pi (1 - \beta^*) = 0,0017 \text{ GeV}, E_{\max} = 10 m_\pi (1 + \beta^*) = 2,697 \text{ GeV}. \quad (14)$$

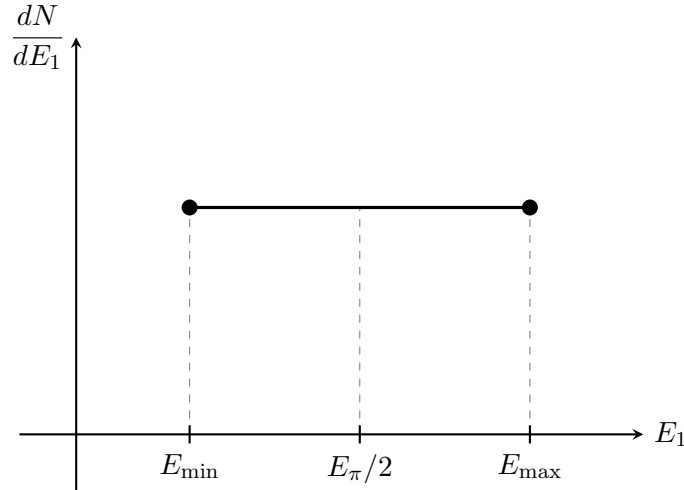
b) Per la distribuzione vediamo:

$$\frac{dN}{dE_{\gamma_i}} = \frac{dN}{d \cos \theta^*} \cdot \frac{d \cos \theta^*}{dE_{\gamma_i}} \quad \text{con} \quad \left| \frac{dE_{\gamma_i}}{d \cos \theta^*} \right| = |\pm \gamma^* E_{\gamma_i}^* \beta^*|. \quad (15)$$

Però il  $\pi^0$  non ha spin, per cui non c'è una preferenza di angoli per gli eventi, dunque:

$$\frac{dN}{dE_{\gamma_i}} = (\text{costante}) \cdot \frac{1}{\gamma^* E_{\gamma_i}^* \beta^*} \quad (16)$$

$$= (\text{costante}) \cdot (\text{costante}). \quad (17)$$



Nel SR del lab, avendo posto le trasformazioni di Lorentz, usiamo l'invariante di Mandelstam  $S$ , definendo:

$$\alpha = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (18)$$

$$s^* = s_{\text{lab}} \quad [s \equiv (p_1 + p_2)^2 \equiv 4E_{\text{cm}}^2] \quad (19)$$

che possiamo calcolare:

$$s^* = s_{\text{lab}} \implies m_\pi^2 = (p_1 + p_2)^2 \quad (20)$$

$$= p_1^2 + p_2^2 + 2(p_1 \cdot p_2) \quad (21)$$

$$= 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \quad (22)$$

$$= 2E_1 E_2 (1 - \cos \alpha) \quad (23)$$

$$= 4E_1 E_2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (24)$$

Dunque possiamo ricavare:

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{m_\pi^2}{4E_1 E_2} \quad (25)$$

$$= \frac{m_\pi^2}{4E_\gamma^{*2}(1 + \beta^* \cos \theta)(1 - \beta^* \cos \theta)\gamma^{*2}} \quad (26)$$

$$= \frac{m_\pi^2}{4\left(\frac{m_\pi^2}{4}\right)(1 - \beta^{*2} \cos^2 \theta^*)\gamma^{*2}} \quad (27)$$

$$= \frac{1}{\gamma^{*2}(1 - \beta^{*2} \cos^2 \theta^*)}. \quad (28)$$

In cui minimo e massimo sono:

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)_{\min} = \frac{1}{\gamma^{*2}} = 0,0025, \quad (29)$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)_{\max} = \frac{1}{\gamma^{*2}(1 - \beta^{*2})} = 1, \quad (30)$$

con:

$$\alpha = 2 \sin^{-1}\left(\sqrt{\#}\right), \quad (31)$$

da cui:

$$\alpha_{\min} = 5,73^\circ \quad \alpha_{\max} = 180^\circ. \quad (32)$$

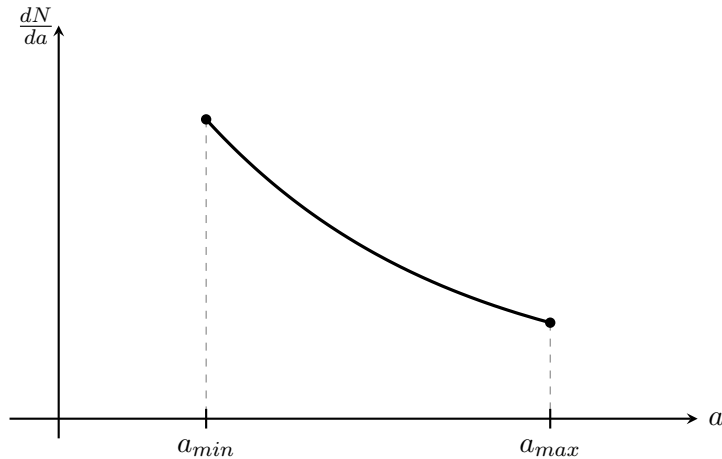
Qua l'esercizio si chiude, ma possiamo ancora vedere  $a = \sin^2(\alpha/2)$ :

$$\frac{dN}{da} = \frac{dN}{d \cos \theta^*} \cdot \frac{d \cos \theta^*}{da} \quad (33)$$

$$= (\text{costante}) \cdot \frac{d \cos \theta^*}{da}, \quad (34)$$

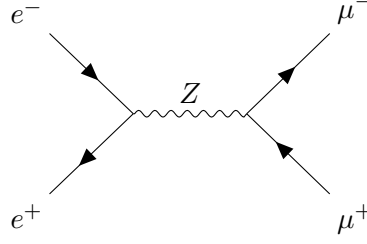
con:

$$\frac{da}{d \cos \theta^*} = \frac{-2\gamma^{*2}\beta^{*2} \cos \theta^*}{[\gamma^{*2}(1 - \beta^{*2} \cos^2 \theta^*)]^2}. \quad (35)$$



## Esercizio 2

Prendiamo  $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow \mu^+\mu^-$ , con  $m_Z = 91$  GeV.



con caso 1:  $E_1^* = E_2^*$ ; caso 2:  $e^+ \mapsto e^-$  atomici ( $\vec{p}_{e^-} = 0$ ).

a) Ci mettiamo nel caso 1, cioè nel SR del CM:

$$E_1^* = E_2^* \implies |\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_2^*|. \quad (36)$$

e per conservazione del quadri-impulso:

$$\begin{cases} E_1^* + E_2^* = E_Z^* \\ \vec{p}_1^* - \vec{p}_2^* = \vec{p}_Z^* \end{cases} \quad \begin{cases} E_Z^* = 2E_1^* \\ \vec{p}_Z^* = 0 \end{cases} \quad E_Z^* = m_Z = 2E_1^*. \quad (37)$$

Nel caso 1 troviamo dunque:

$$E_1^* = \frac{m_Z}{2} = 45,5 \text{ GeV}. \quad (38)$$

Nel caso 2, quindi nel SR del lab, possiamo usare la variabile di Mandelstam:

$$s_2^* = s_{\text{lab}}, \quad (39)$$

che possiamo calcolare:

$$m_Z^2 = (p_1 + p_2)^2 \quad (40)$$

$$= 2m_e^2 + 2(p_1 \cdot p_2) \quad (41)$$

$$= 2m_e^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \quad (42)$$

$$= 2m_e(m_e + E_2). \quad (43)$$

in cui ci siamo ricordati che  $\vec{p}_1 = 0$ . Abbiamo quindi:

$$E_2 = \frac{m_Z^2 - 2m_e^2}{2m_e} \sim \frac{m_Z^2}{2m_e} = 8,28 \times 10^6 \text{ GeV} \quad (m_e = 0.5 \text{ MeV}). \quad (44)$$

b) Consideriamo la situazione 2, in cui abbiamo  $E_2 = 8,28 \times 10^6$  GeV e conservando l'energia:

$$E_1 + E_2 = E_Z \quad (45)$$

ma con  $E_1 = m_e$ :

$$\implies E_Z = E_2 + m_e \sim E_Z = 8281 \text{ TeV} \quad (46)$$

che possiamo utilizzare per cercare la velocità:

$$\beta_Z = \frac{|\vec{p}_Z|}{E_Z} = \frac{\sqrt{E_Z^2 - m_Z^2}}{E_Z} = 0,999, \implies \gamma_Z = \frac{E_Z}{m_Z} \sim 90989,01. \quad (47)$$

c) Sempre nella situazione 2, guardiamo  $\mu^+$ . Dobbiamo fare le trasformazioni di Lorentz:

$$E_{\mu_i} = \gamma_Z (E_{\mu_i}^* + \beta_Z p_{\mu_i}^{z*}), \quad (48)$$

in cui, nel CM di  $Z$  abbiamo:

$$p_{\mu_i}^{z*} = \pm p_{\mu_i}^* \cos \theta^* \quad (49)$$

dunque:

$$E_{\mu_i} = \gamma_Z (E_{\mu_i}^* \pm \beta_Z p_{\mu_i}^* \cos \theta^*) . \quad (50)$$

ma nel CM di  $Z$  si ha anche:

$$\vec{p}_Z^* = 0 \Rightarrow |\vec{p}_{\mu_1}^*| = |\vec{p}_{\mu_2}^*| \implies E_{\mu_1}^* = E_{\mu_2}^* = \frac{m_Z}{2}. \quad (51)$$

Dunque otteniamo:

$$p_{\mu_i}^* = \sqrt{E_{\mu_i}^{*2} - m_{\mu_i}^2} \quad (52)$$

$$= \sqrt{\frac{m_Z^2}{4} - m_{\mu_i}^2} \quad (53)$$

$$= 45,49 \text{ GeV}, \quad (54)$$

per cui:

$$E_{\mu}^{\min} = \gamma_Z (E_{\mu}^* - \beta_Z p_{\mu}^*) \quad (55)$$

$$= 5,048 \text{ TeV}, \quad (56)$$

$$E_{\mu}^{\max} = \gamma_Z (E_{\mu}^* + \beta_Z p_{\mu}^*) \quad (57)$$

$$= 8,274 \text{ TeV}. \quad (58)$$

### Esercizio 3

a, b) Vogliamo verificare se è possibile:

$$\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+. \quad (59)$$

Dobbiamo cercare la soglia per produrre  $\Sigma^+ K^+$ . Usiamo l'invariante di Mandelstam:

$$s_i = s_f, \quad (60)$$

$$(p_\pi + p_p)^2 = (p_\Sigma^* + p_K^*)^2, \quad (61)$$

abbiamo  $\vec{p}_\Sigma^* = -\vec{p}_K^*$ , ma la soglia la abbiamo se sono prodotti fermi, ossia  $\vec{p}_\Sigma^* = -\vec{p}_K^* = 0$ , per cui:

$$m_\pi^2 + m_p^2 + 2(E_\pi E_p - \vec{p}_\pi \cdot \vec{p}_p) = m_\Sigma^2 + m_K^2 + 2E_\Sigma^* E_K^*, \quad (62)$$

$$m_\pi^2 + m_p^2 + 2(E_\pi E_p - |\vec{p}_\pi| |\vec{p}_p| \cos \alpha) = m_\Sigma^2 + m_K^2 + 2m_\Sigma m_K. \quad (63)$$

Essendo ad alte energie possiamo approssimare:

$$E_\pi E_p \sim |\vec{p}_\pi| |\vec{p}_p|. \quad (64)$$

così:

$$m_\pi^2 + m_p^2 + 2E_\pi E_p(1 - \cos \alpha) = (m_\Sigma + m_K)^2, \quad (65)$$

$$\Rightarrow E_\pi = \frac{(m_\Sigma + m_K)^2 - m_\pi^2 - m_p^2}{2E_p(1 - \cos \alpha)}. \quad (66)$$

Però  $\pi^+$ ,  $p$  sono nel SR lab ( $p$  è fermo), dunque  $E_p = m_p$ ,  $|\vec{p}_p| = 0$  e non c'è il termine di  $\cos \alpha$ :

$$E_\pi = \frac{(m_\Sigma + m_K)^2 - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p} \sim 0,953 \text{ GeV}, \quad (67)$$

con:

$$m_\Sigma = 1,19 \text{ GeV} \quad m_K = 938 \text{ MeV} \quad m_\pi = 105 \text{ MeV} \quad m_p = 493 \text{ MeV}. \quad (68)$$

In generale l'interazione è possibile poiché: la carica si conserva; il numero barionico si conserva; la stranezza è conservata. Il processo avviene per interazione forte.

c) Utilizziamo il suggerimento, ricordiamo che  $\vec{p}_\Sigma^* = \vec{p}_K^* = 0$  e cerchiamo  $\beta^* \gamma^*$ ; abbiamo:

$$\gamma^* = \frac{E_{\text{tot,lab}}}{m_{\text{tot,soglia}}} = \frac{E_{\pi,\text{soglia}} + m_p}{m_\Sigma + m_K} \sim 1,15, \quad (69)$$

$$\Rightarrow \beta^* = \sqrt{1 - \frac{1}{(\gamma^*)^2}} = 0,496. \quad (70)$$

Visto che  $K$  è fermo nel CM a soglia, nel lab si muoverà con velocità  $\beta^*$ . La dilatazione dei tempi dà:

$$\tau_{\text{lab}} = \gamma^* \tau_{K^+} \quad (71)$$

con:

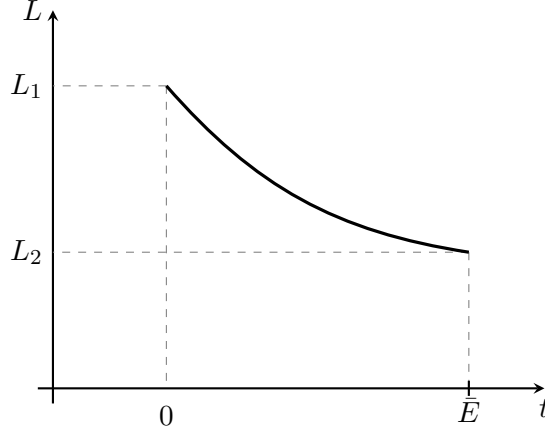
$$\tau_{K^+} = 1,24 \times 10^{-8} \text{ s} \quad \text{noto}. \quad (72)$$

La distanza di volo (media) è:

$$\Delta x = \beta^* c \tau_{\text{lab}} = \beta^* c \gamma^* \tau_{K^+} = 2,12 \text{ m}. \quad (73)$$

## Esercizio 4

Abbiamo  $L_1 = 1.0 \times 10^{34}$  Hz/cm<sup>2</sup>, che decade esponenzialmente fino a  $L_2 = 0.5 \times 10^{34}$  Hz/cm<sup>2</sup> dopo 2 h.



L'andamento della luminosità è del tipo esponenziale, con  $\bar{E} = 2$  h.

**a)** La luminosità sarà data da:

$$L_{\text{int}} = \int_0^{\bar{E}} dt L(t) \quad \text{in cui} \quad L(t) = L_1 e^{-t/\tau}. \quad (74)$$

Possiamo fissare  $\tau$  come:

$$L(\bar{E}) = L_2 = L_1 e^{-\bar{E}/\tau} \implies \tau = \frac{\bar{E}}{\ln(L_1/L_2)} = 10387,4 \text{ s} \quad (75)$$

così:

$$L_{\text{int}} = L_1 \int_0^{\bar{E}} dt e^{-t/\tau} = L_1 (-\tau) (e^{-\bar{E}/\tau} - 1) \quad (76)$$

$$\implies L_{\text{int}} = L_1 (1 - e^{-\bar{E}/\tau}) \tau = 5,19 \times 10^{37} \frac{1}{\text{cm}^2} \quad (77)$$

e sapendo:

$$1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{\text{cm}^2} = 10^{-24} \frac{1}{\text{b}}, \quad (78)$$

troviamo:

$$L_{\text{int}} = 5.2 \times 10^{13} \text{ b}^{-1} = 52 \text{ pb}^{-1}. \quad (79)$$

**b)** Abbiamo  $\sigma(Z^0 Z^0) = 0.4 \text{ pb}$ . In generale vale:

$$\dot{N} = \frac{dN}{dt} = L\sigma, \quad (80)$$

di cui ci interessa la media dell'integrale (integriamo  $\int dt$ ):

$$\implies \langle N \rangle = L_{\text{int}} \sigma \implies \langle N \rangle = 20.8. \quad (81)$$

**c)** Abbiamo:

$$\begin{cases} BR(Z^0) = 10\% & \text{in } \ell \text{ carichi} \\ BR(Z^0) = 20\% & \text{in } \nu \\ BR(Z^0) = 70\% & \text{in } q \text{ quark} \end{cases} \quad (82)$$

vale la definizione:

$$P(A \rightarrow B) = \frac{\langle N_{AB} \rangle}{\langle N \rangle}. \quad (83)$$

Dunque troviamo (con un 2 = fattore di simmetria):

$$\langle N_{ZZ \rightarrow \ell\ell} \rangle = 2 BR(Z^0 \rightarrow \ell\ell) BR(Z^0 \rightarrow \text{tutto tranne } \ell\ell) \langle N \rangle \quad (84)$$

in cui  $\langle N_{ZZ \rightarrow \ell\ell} \rangle$  è la probabilità che uno  $Z^0$  decada in  $\ell\ell$  e l'altro no; invece  $BR(Z^0 \rightarrow \ell\ell) BR(Z^0 \rightarrow \text{tutto tranne } \ell\ell)$  vale 90%. Troviamo:

$$\langle N_{ZZ \rightarrow \ell\ell} \rangle = 3,744, \quad (85)$$

$$\langle N_{ZZ \rightarrow \ell\ell\ell\ell} \rangle = BR^2(Z^0 \rightarrow \ell\ell) \langle N \rangle = 0,21. \quad (86)$$

in cui nel secondo risultato non abbiamo considerato il fattore di simmetria.

**Nota.** Nelle soluzioni si calcolano tutte le combinazioni:

$$\langle N_{4\ell} \rangle = 0.2, \quad (87)$$

$$\langle N_{2\ell+2\nu} \rangle = 0.8, \quad (88)$$

$$\langle N_{2q+2\nu} \rangle = 18.9. \quad (89)$$

**d)** La distribuzione di probabilità degli eventi è una poissoniana. La probabilità di avere 0 decadimenti a 4 leptoni è:

$$P(0|\langle N_{4\ell} \rangle) = e^{-\langle N_{4\ell} \rangle} = 0,818. \quad (90)$$

La probabilità di avere 0 eventi a 2 leptoni:

$$P(0|\langle N_{2\ell} \rangle) = e^{-\langle N_{2\ell} \rangle} = 0,023. \quad (91)$$

La probabilità di non avere leptoni è:

$$P(0|\langle N_{4\ell} \rangle + \langle N_{2\ell} \rangle) = e^{-\langle N_{4\ell} \rangle - \langle N_{2\ell} \rangle} = 0,019 \quad (= P(0|2\ell) \cdot P(0|4\ell)). \quad (92)$$

Abbiamo almeno 1 decadimento a 4 $\ell$ :

$$1 - P(0|\langle N_{4\ell} \rangle) = 0.187 \sim 19\%. \quad (93)$$

Intendiamo un evento “vuoto” come  $Z^0 Z^0 \rightarrow 4\nu$ , dunque:

$$\langle N_{4\nu} \rangle = \langle N \rangle BR^2(2\nu) = 0.832, \quad (94)$$

$$P(0|\langle N_{4\nu} \rangle) = 0,435 \quad (95)$$

che è la probabilità di non misurare un evento a 4 $\nu$ , cioè in cui non vediamo nulla.

## Esercizio 5

Si dimostrò l'esistenza degli anti-iperoni con la scoperta del  $\bar{\Lambda}$  (con un fascio di  $\pi^-$  contro un'emulsione nucleare).

a) Vogliamo trovare  $X$  in:

$$\pi^- p \rightarrow \bar{\Lambda} + X. \quad (96)$$

$\bar{\Lambda}$  è l'antiparticella di  $\Lambda$ , dunque  $\bar{\Lambda} = (\bar{u}\bar{d}\bar{s})$ . Ricordiamo:

$$p = (uud) \quad Q(p) = +1 \quad S(p) = 1/2, \quad (97)$$

$$\pi^- = (d\bar{u}) \quad Q(\pi^-) = -1 \quad S(\pi^-) = 0. \quad (98)$$

Per cui dal decadimento vediamo  $Q(\bar{\Lambda}) = 0$ ; in più per la conservazione della carica elettrica  $X$  deve essere neutro. Per la conservazione del numero barionico:

$$B(\pi^-) + B(p) = B(\bar{\Lambda}) + B(X), \quad (99)$$

$$0 + 1 = -1 + B(X) \quad (100)$$

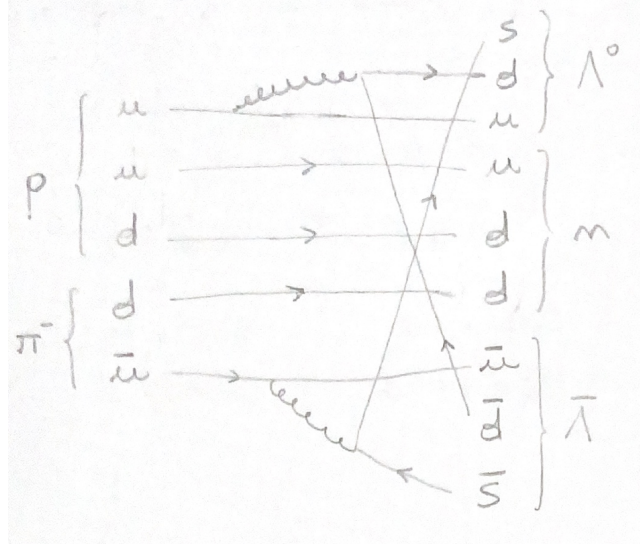
$$\implies B(X) = 2. \quad (101)$$

Per quanto riguarda il numero leptonico siamo a posto a patto che  $X = \text{adrone}$ . Per la stranezza abbiamo  $S_{\text{iniziale}} = 0 \Rightarrow S(X) = -1$  (con  $S(\bar{\Lambda}) = +1$ ).

Visti i numeri quatici possiamo capire chi è  $X$ . Per  $B(X) = 2$  possiamo prendere  $2m \Rightarrow Q(2m) = 0$ , però  $m = uud$  e non abbiamo sistemato la stranezza. Mettendo un  $\Lambda^0$  al posto di un  $m$  (con  $B(\Lambda^0) = +1$ ):

$$Q(\Lambda^0) = 0, \quad S(\Lambda^0) = -1, \pi^- + p \rightarrow \bar{\Lambda} + \Lambda^0 + m. B : +1 = +1 \checkmark \quad Q : 0 = 0 \checkmark \quad S : 0 = 0 \checkmark \quad (102)$$

Il diagramma di Feynman risulterebbe:



b) Ci mettiamo nel SR del lab,  $\vec{p}_p = 0$ , e calcoliamo la soglia. Usiamo l'invariante di Mandelstam:

$$s_f^* = s_i, \quad (103)$$

a soglia produciamo  $\bar{\Lambda} + \Lambda^0 + m$  fermi:

$$\implies s_F^* = \left( \sum_i m_i \right)^2 \quad i = \bar{\Lambda}, \Lambda^0, m. \quad (104)$$

Così:

$$s_i = (p_\pi + p_p)^2 = (m_{\bar{\Lambda}} + m_{\Lambda^0} + m_m)^2, \quad (105)$$

$$m_\pi^2 + m_p^2 + 2p_\pi \cdot p_p = (m_{\bar{\Lambda}} + m_{\Lambda^0} + m_m)^2, \quad (106)$$

$$2E_\pi E_p - 2\vec{p}_\pi \cdot \vec{p}_p = (m_{\bar{\Lambda}} + m_{\Lambda^0} + m_m)^2 - m_\pi^2 - m_p^2, \quad (107)$$

con  $E_p = m_p$  e  $\vec{p}_\pi \cdot \vec{p}_p = 0$  (protone fermo nel lab), quindi:

$$E_\pi = \frac{(2m_\Lambda + m_m)^2 - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p}, \quad (108)$$

$$\implies \bar{E}_\pi = 4,87 \text{ GeV}. \quad (109)$$

**c)** Per questa parte abbiamo  $\pi^-$  prodotti ad  $\ell = 8 \text{ m}$  dall'emulsione, con intensità  $N_0 = 10^6 \pi^-/\text{cm}^2\text{s}$ . Vogliamo l'intensità che arriva all'emulsione. Sappiamo  $\tau_\pi = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$ . Abbiamo la legge di decadimento radioattivo:

$$N_{\pi, \text{rimasti}}(\bar{t}) = N_{0, \pi} e^{-\bar{t}/\tau}. \quad (110)$$

Sappiamo che vale  $d = \gamma(d^* + \beta ct^*)$ , ma  $d^* = 0$ , poiché nel CM il  $\pi^-$  è fermo. Dunque:

$$d = \gamma\beta ct^* \implies t^* = \frac{d}{\gamma\beta c}. \quad (111)$$

Abbiamo:

$$\gamma\beta = \frac{E_\pi}{m_\pi} \frac{p_\pi}{E_\pi} = \frac{p_\pi}{m_\pi} = \frac{\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}}{m_\pi} \simeq 46,9, \quad (112)$$

e se  $t^* = \tau_\pi$ :

$$\implies \langle d \rangle = \gamma\beta c\tau = 365,9 \text{ m}, \quad (113)$$

con  $\langle d \rangle$  cammino medio. Allora troviamo:

$$N_{\pi, \text{rimasti}}(\bar{t}_\ell) = N_{0, \pi} \cdot \exp \left\{ -\frac{\ell/(\beta\gamma c)}{\langle d \rangle/(\beta\gamma c)} \right\} = N_{0, \pi} e^{-\ell/\langle d \rangle}, \quad (114)$$

con  $\bar{t}_\ell = \ell/(\beta\gamma c)$ , e dunque:

$$N_{\pi, \text{rimasti}} = 978373,4, \implies \frac{N_{\pi, \text{rimasti}}}{N_{0, \pi}} = 0,978. \quad (115)$$

## Esercizio 6

Prendiamo  $\phi(1020)$  e vediamo i decadimenti possibili. Abbiamo:

$$\phi = (s\bar{s}), \quad Q(\phi) = 0, \quad S(\phi) = 0 \quad (116)$$

$$\phi = \text{mesone vettore (fondamentale)} \implies J = 1; \quad \ell = 0, \quad s = 1, \quad (117)$$

e ci servono le relazioni:

$$C(f\bar{f}) = (-1)^{\ell+s} \quad C(\phi) = -1, \quad (118)$$

$$P(f\bar{f}) = (-1)^{\ell+1} \quad P(\phi) = -1, \quad (119)$$

$$\begin{cases} C(\gamma) = -1 \\ P(\gamma) = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} C(\pi^0) = +1 \\ P(\pi^0) = -1 \end{cases} \quad (120)$$

$$C(m\bar{m}) = (-1)^{L+S} \quad P(m\bar{m}) = (-1)^L. \quad (121)$$

**a)** Per capire quali decadimenti tenere analizziamo la conservazione di  $Q$  e  $CP$ .

**1)**  $\phi \rightarrow 2\gamma$ :  $Q \checkmark$

$$C(\phi) = -1 \quad C(2\gamma) = (-1)^2 = +1 \quad (122)$$

Dunque non permesso.

**2)**  $\phi \rightarrow 3\gamma$ :  $Q \checkmark$

$$C(\phi) = -1 \quad C(3\gamma) = (-1)^3 = -1 \checkmark \quad (123)$$

$$P(\phi) = -1 \quad P(3\gamma) = (-1)^3 = -1 \checkmark \quad (124)$$

dunque permesso.

**3)**  $\phi \rightarrow e^+e^-\pi^+$ :  $Q$  non conservata:  $0 \neq +1$ , per cui non permesso.

**4)**  $\phi \rightarrow K^+K^-$ : abbiamo:

$$K^+ = (u\bar{s}) \quad K^- = (s\bar{u}) \quad Q(K^+) = +1 \quad Q(K^-) = -1. \quad (125)$$

La carica  $Q$  si conserva  $\checkmark$ . I kaoni sono bosoni, dunque se  $J_\phi = +1$ , per conservare il momento angolare dobbiamo avere:

$$+1 = L_{KK} + S_{KK} \quad (S_{KK} = 0) \implies L_{KK} = +1. \quad (126)$$

Dunque:

$$\begin{cases} P(\phi) = -1 \\ P(K^+K^-) = (-1)^L = -1 \end{cases} \checkmark \quad \begin{cases} C(\phi) = -1 \\ C(K^+K^-) = (-1)^L = -1 \end{cases} \checkmark \quad (127)$$

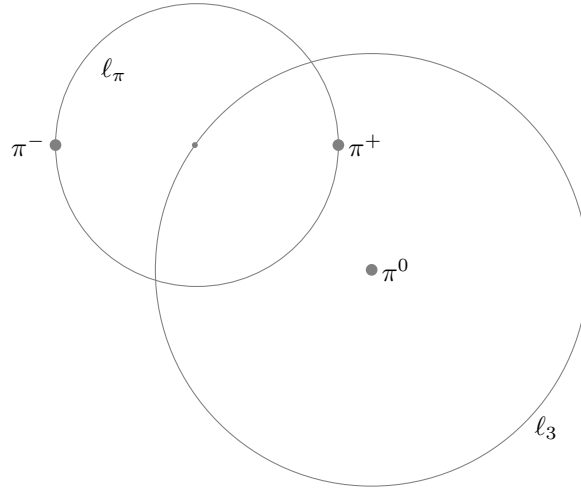
quindi il decadimento è permesso.

**5)**  $\phi \rightarrow K^0\bar{K}^0$ : abbiamo  $K^0 = (d\bar{s})$ ,  $Q(K^0) = 0$ . La carica  $Q$  si conserva  $\checkmark$ .  $K^0$  è un bosone  $\Rightarrow$  conservazione di  $J \Rightarrow L_K = 1$ . Dunque:

$$\begin{cases} P(\phi) = -1 \\ P(K^0\bar{K}^0) = -1 \end{cases} \checkmark \quad \begin{cases} C(\phi) = -1 \\ C(K^0\bar{K}^0) = -1 \end{cases} \checkmark \quad (128)$$

il decadimento è permesso.

**6)**  $\phi \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ :  $Q \checkmark$ . Essendo un decadimento a 3 corpi è comodo definire un momento angolare tra i  $\pi^\pm$  (con un altro momento) per vedere come ruotano rispetto al  $\pi^0$ .



Avendo tutti spin 0 abbiamo:

$$\ell_\pi = \ell_3 \quad (129)$$

ed essendo  $C$  un numero quantico moltiplicativo:

$$C(\pi^+ \pi^- \pi^0) = C(\pi^+ \pi^-) C(\pi^0) = (-1)^{\ell_\pi + s} (+1) = (-1)^{\ell_\pi} \quad (130)$$

$$C(\phi) = -1 \implies \ell_\pi = \ell_3 \text{ dispari.} \quad (131)$$

$$P(\phi) = -1, \quad (132)$$

$$P(\pi^+ \pi^- \pi^0) = P(\pi^+ \pi^-) P(\pi^0) (-1)^{\ell_3} = (-1)^{\ell_\pi} (-1) (-1)^{\ell_3} = (-1)^{2\ell_\pi} (-1) = -1 \checkmark. \quad (133)$$

Dunque è un decadimento permesso.

**7)**  $\phi \rightarrow \pi^0 \pi^0$ :  $Q \checkmark$

$$C(\phi) = -1 \quad C(\pi^0 \pi^0) = +1 \quad (134)$$

$$P(\phi) = -1 \quad P(\pi^0 \pi^0) = (-1)^2 \quad (135)$$

Il decadimento non è permesso.

**b)** Prendiamo  $\phi \rightarrow 3\gamma$  e cerchiamo  $|\vec{p}_\gamma^*|$ . Nel SR del CM  $\vec{p}_\phi^* = 0 \Rightarrow E_\phi^* = m_\phi = 1020 \text{ MeV}$ . Conservando l'energia:

$$\begin{cases} \vec{0} = \vec{p}_{\gamma_1}^* + \vec{p}_{\gamma_2}^* + \vec{p}_{\gamma_3}^* \\ m_\phi = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} + E_{\gamma_3}. \end{cases} \quad (136)$$

Non potendo produrre un  $\gamma$  fermo, possiamo considerare la situazione in cui  $\gamma_1$  viene prodotto in direzione opposta a  $\gamma_2 + \gamma_3$ , che invece sono collineari e si muovono insieme. Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} \vec{0} = \vec{p}_{\gamma_1}^* + \vec{p}_{\gamma_{23}}^* \\ m_\phi = E_{\gamma_1}^* + E_{\gamma_{23}}^* \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{p}_{\gamma_1}^* = -\vec{p}_{\gamma_{23}}^* \\ E_{\gamma_1}^* = |\vec{p}_{\gamma_1}^*| \end{cases} \implies m_\phi = 2|\vec{p}_{\gamma_1}^*| \quad (137)$$

$$\implies |\vec{p}_{\gamma_1}^*| = \frac{m_\phi}{2} = 510 \text{ MeV}. \quad (138)$$

## Esercizio 7

Bottomonio =  $b\bar{b}$  ( $b$  = fermione di spin  $1/2$ ). Vale

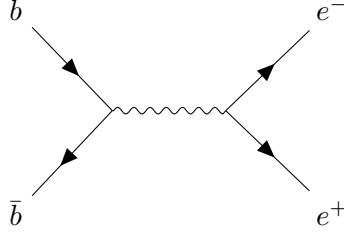
$$P(b\bar{b}) = (-1)^{\ell+1}, \quad (139)$$

$$C(b\bar{b}) = (-1)^{\ell+s}. \quad (140)$$

a) Omettiamo il numero quantico  $m$ . Scriviamo gli stati del bottomonio usando  $^{2s+1}L_j$  (per  $S$  e  $P$ ). Notiamo che questi stati sono due particelle di spin  $1/2$  legate.

| $\ell$ | $s$ | $j$   | $^{2s+1}L_j$  | $J^{PC}$     |
|--------|-----|-------|---------------|--------------|
| 0      | 0   | 0     | $^1S_0$       | $0^{-+}$     |
| 0      | 1   | 1     | $^3S_1$       | $1^{--}$     |
| 1      | 0   | 1     | $^1P_1$       | $1^{+-}$     |
| 1      | 1   | 0,1,2 | $^3P_{0,1,2}$ | $0,1,2^{++}$ |

b) Vogliamo determinare quali possono decadere in  $e^+e^-$ .



Dobbiamo vedere le leggi di conservazione (momento angolare, CP e carica) nei vertici. Abbiamo che nel vertice  $b\bar{b}\gamma$ :

$$J^{PC}(b\bar{b}) = J^{PC}(\gamma) = 1^{--} \quad (141)$$

$$\implies \text{ l'unico stato possibile è } ^3S_1. \quad (142)$$

c) Ci chiediamo quali stati possano decadere in:

$$b\bar{b} \rightarrow b\bar{u} + u\bar{b}. \quad (143)$$

Il prodotto è una coppia di mesoni, per cui sappiamo:

$$P(m\bar{m}) = (-1)^L \quad C(m\bar{m}) = (-1)^L, \quad (144)$$

con  $L$  = momento angolare dello stato finale. Dicendo che  $b\bar{u}$  è uno stato fondamentale possiamo dire che  $\ell = 0$ ,  $s = 0$ , dunque ha:

$$J^P(b\bar{u}) = 0^- \quad (\text{essendo bosoni, } P(b\bar{u}) = P(u\bar{b})). \quad (145)$$

I due mesoni in stato finale hanno momento angolare relativo  $L$ , dunque:

$$P(b\bar{u} + u\bar{b}) = P(b\bar{u})P(u\bar{b})(-1)^L \quad (146)$$

$$= (-1)^{2+L} \quad (147)$$

$$= (-1)^L. \quad (148)$$

Ed  $L$  è puramente orbitale, non essendoci spin (essendo bosoni a spin 0),  $\Rightarrow L = j$ . Anche per la carica:

$$C(b\bar{u} + u\bar{b}) = (-1)^L. \quad (149)$$

$$\Rightarrow P(b\bar{u} + u\bar{b}) = C(b\bar{u} + u\bar{b}) = (-1)^j \quad \text{con } L = j. \quad (150)$$

$$\Rightarrow \text{è possibile per } {}^3S_1, {}^3P_{0,2}, \quad (151)$$

poiché si ha:

$${}^3S_1 : 1^{--} \quad \text{e infatti } C = P = (-1)^1 = -1 \checkmark, \quad (152)$$

$${}^3P_{0,2} : 0, 2^{++} \quad \Rightarrow \quad C = P = (-1)^0 = (-1)^2 = +1 \checkmark. \quad (153)$$

Invece:

$${}^3P_1 : 1^{++} \quad \text{ma } C = P = (-1)^1 = -1, \quad (154)$$

dunque diverso da quello di  $J^{PC}$ .

## Esercizio 8

Vogliamo determinare i rapporti tra le sezioni d'urto di:

$$\begin{aligned} K^- p &\rightarrow \Sigma^0 \pi^0 & K^- p &\rightarrow \Sigma^+ \pi^- \\ \bar{K}^0 p &\rightarrow \Sigma^+ \pi^0 & \bar{K}^0 p &\rightarrow \Sigma^0 \pi^+ \end{aligned} \quad (155)$$

con  $E_{\text{cm}}^* = 1.66$  GeV, con  $\Sigma(1660)$  che esiste nei 3 stati di carica  $(+, 0, -)$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned} K^- &= (s\bar{u}) & p &= (uud) \\ K^0 &= (d\bar{s}) & \pi^0 &= \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}} \\ \Sigma^0 &= (uds) & \pi^+ &= (u\bar{d}) \\ \Sigma^+ &= (uus) \end{aligned} \quad (156)$$

e l'isospin:

| particella                     | $I$   | $I_3$       |
|--------------------------------|-------|-------------|
| $p$                            | $1/2$ | $+1/2$      |
| $K^-$                          | $1/2$ | $-1/2$      |
| $\bar{K}^0$                    | $1/2$ | $+1/2$      |
| $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$ | $1$   | $+1, 0, -1$ |
| $\pi^+, \pi^0, \pi^-$          | $1$   | $+1, 0, -1$ |

che per costruirla ci basta ricordare:

$$I(u) = I(d) = \frac{1}{2} \quad I_3(u) = I_3(\bar{d}) = \frac{1}{2} \quad I(s) = 0, \quad (157)$$

$$I_3(\bar{u}) = I_3(\bar{d}) = -\frac{1}{2} \quad I_3(s) = 0. \quad (158)$$

Così, ad esempio:

$$I_3(p) = I_3(u) + I_3(u) + I_3(d) = \frac{1}{2}, \quad (159)$$

$$I_3(\bar{K}^0) = I_3(\bar{d}) + I_3(s) = \frac{1}{2}, \quad (160)$$

$$I_3(\Sigma^0) = I_3(u) + I_3(d) + I_3(s) = 0, \quad (161)$$

e l'isospin in base alla rappresentazione a cui appartengono.  $\Sigma$  esiste in  $(+, 0, -) \Rightarrow$  tripletto,  $I(\Sigma) = 1$ . Stessa cosa per  $\pi \Rightarrow I(\pi) = 1$ .  $p$  fa parte di un doppietto di isospin e sappiamo  $I(p) = 1/2$ .  $K^0$  e  $K^+$  formano un doppietto di isospin  $\Rightarrow I(K) = 1/2$ . Possiamo scrivere gli stati adronici coinvolti:

$$p = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad \bar{K}^0 = \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \quad K^- = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad (162)$$

$$\pi^+ = |1, 1\rangle \quad \pi^0 = |1, 0\rangle \quad \pi^- = |1, -1\rangle, \quad (163)$$

$$\Sigma^+ = |1, 1\rangle \quad \Sigma^0 = |1, 0\rangle \quad \Sigma^- = |1, -1\rangle. \quad (164)$$

E con la tabella di Clebsh-Gordan li possiamo comporre, per scrivere gli stati coinvolti:

$$|K^-p\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (165)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 0\rangle, \quad (166)$$

$$|\Sigma^0\pi^0\rangle = |1, 0\rangle \otimes |1, 0\rangle \quad (167)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle, \quad (168)$$

$$|\bar{K}^0p\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (169)$$

$$= |1, 1\rangle, \quad (170)$$

$$|\Sigma^+\pi^0\rangle = |1, 1\rangle \otimes |1, 0\rangle \quad (171)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|2, 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 1\rangle, \quad (172)$$

$$|\Sigma^+\pi^-\rangle = |1, 1\rangle \otimes |1, -1\rangle \quad (173)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle, \quad (174)$$

$$|\Sigma^0\pi^+\rangle = |1, 0\rangle \otimes |1, 1\rangle \quad (175)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|2, 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 1\rangle. \quad (176)$$

Ci servono le matrici:

$$\langle \Sigma^0\pi^0 | H_{\text{int}} | K^-p \rangle = \left( \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 2, 0 | - \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 0, 0 | \right) H_{\text{int}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 0\rangle \right) \quad (177)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\mathcal{M}_0, \quad (178)$$

poiché stati ortogonali e in cui  $\mathcal{M}_0$  è una generica ampiezza con stati iniziali e finali di isospin 0; inoltre:

$$\langle \Sigma^+\pi^- | H_{\text{int}} | K^-p \rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}\langle 2, 0 | + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 0 | + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 0, 0 | \right) H_{\text{int}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 0\rangle \right) \quad (179)$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{M}_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathcal{M}_0, \quad (180)$$

abbiamo anche:

$$\langle \Sigma^+\pi^0 | H_{\text{int}} | \bar{K}^0p \rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 2, 1 | + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 1 | \right) H_{\text{int}} |1, 1\rangle \quad (181)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{M}_1, \quad (182)$$

$$\langle \Sigma^0\pi^+ | H_{\text{int}} | \bar{K}^0p \rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 2, 1 | - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 1 | \right) H_{\text{int}} |1, 1\rangle \quad (183)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{M}_1. \quad (184)$$

Ora, non potendo calcolare le  $\sigma$ , vediamo i rapporti. Però, essendo vicino la risonanza  $\Sigma(+, 0, -, 1660)$ , dobbiamo vedere solo i termini che ci permettono di conservare  $I = 1$ . Dunque, prendendo solo le proiezioni su  $I = 1$  e semplificando le ampiezze  $\mathcal{M}$  poiché le misure sullo spazio delle fasi sono uguali (essendoci simmetria di isospin),  $\sigma \propto |\mathcal{M}|^2$ :

$$\frac{\sigma(K^-p \rightarrow \Sigma^0\pi^0)}{\sigma(K^-p \rightarrow \Sigma^+\pi^-)} = \frac{0}{1/4} = 0, \quad \frac{\sigma(K^-p \rightarrow \Sigma^0\pi^0)}{\sigma(\bar{K}^0p \rightarrow \Sigma^+\pi^0)} = \frac{0}{1/2} = 0, \quad (185)$$

$$\frac{\sigma(K^-p \rightarrow \Sigma^0\pi^0)}{\sigma(\bar{K}^0p \rightarrow \Sigma^0\pi^+)} = \frac{0}{1/2} = 0, \quad \frac{\sigma(K^-p \rightarrow \Sigma^+\pi^-)}{\sigma(\bar{K}^0p \rightarrow \Sigma^+\pi^0)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}, \quad (186)$$

$$\frac{\sigma(K^-p \rightarrow \Sigma^+\pi^-)}{\sigma(\bar{K}^0p \rightarrow \Sigma^0\pi^+)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\sigma(\bar{K}^0p \rightarrow \Sigma^+\pi^0)}{\sigma(\bar{K}^0p \rightarrow \Sigma^0\pi^+)} = \frac{1/2}{1/2} = 1. \quad (187)$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\sigma(K^-p \rightarrow \Sigma^0\pi^0) : \sigma(K^-p \rightarrow \Sigma^+\pi^-) : \sigma(\bar{K}^0p \rightarrow \Sigma^+\pi^0) : \sigma(\bar{K}^0p \rightarrow \Sigma^0\pi^+) \quad (188)$$

$$0 : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} \quad (189)$$

$$0 : 1 : 2 : 2. \quad (190)$$

## Esercizio 9

Prendiamo  $\gamma p \rightarrow \Delta^+ \rightarrow \pi^0 p$  che al picco di risonanza:

$$\sigma_{\text{peak}}(\gamma p \rightarrow \Delta^+ \rightarrow \pi^0 p) \simeq 340 \text{ } \mu\text{b}. \quad (191)$$

Conosciamo:

$$\frac{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow p\gamma)}{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow p\pi^0)} = 1\%, \quad (192)$$

e vogliamo stimare la  $\sigma$  risonante per  $m\pi^+ \rightarrow \pi^0 p$ . Definiamo:

$$\sigma_a \equiv \sigma_{\text{peak}}(\gamma p \rightarrow \Delta^+ \rightarrow \pi^0 p) \quad \sigma_b \equiv \sigma_{\text{peak}}(\pi^+ m \rightarrow \Delta^+ \rightarrow \pi^0 p). \quad (193)$$

Al picco possiamo utilizzare la distribuzione di Breit-Wigner:

$$\sigma_{BW} = \frac{\pi}{p_{\text{in}}^{*2}} \cdot \frac{2J+1}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \cdot \frac{\Gamma_{\text{in}}\Gamma_{\text{out}}}{(E-m_0)^2 + \Gamma^2/4}, \quad (194)$$

in cui gli spin  $s_a$  ed  $s_b$  sono legati allo stato iniziale, e il denominatore vale  $\Gamma^2/4$  alla risonanza (poiché  $E = m_0$ ). Conosciamo:

$$J(\Delta^+) = \frac{3}{2} \quad s(\gamma) = 1, \quad s(\pi) = 0, \quad s(p) = \frac{1}{2}, \quad s(m) = \frac{1}{2}. \quad (195)$$

Dunque:

$$\sigma_a = \frac{\pi}{p_{\gamma}^{*2}} \cdot \frac{4}{2 \cdot 2} \cdot \frac{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow \gamma p)}{\Gamma} \cdot \frac{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow \pi^0 p)}{\Gamma} \cdot 4, \quad (196)$$

$$\sigma_b = \frac{\pi}{p_{\text{in}}^{*2}} \cdot \frac{4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow m\pi^+)}{\Gamma} \cdot \frac{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow \pi^0 p)}{\Gamma} \cdot 4 \quad (197)$$

ne faccio il rapporto scrivendo  $BR(\alpha) = \Gamma(\alpha)/\Gamma$ :

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_a} = \frac{p_{\gamma}^{*2}}{p_{\text{in}}^{*2}} \cdot 2 \cdot \frac{BR(\Delta^+ \rightarrow m\pi^+) BR(\Delta^+ \rightarrow \pi^0 p)}{BR(\Delta^+ \rightarrow \gamma p) BR(\Delta^+ \rightarrow \pi^0 p)} \quad (198)$$

$$= 2 \frac{p_{\gamma}^{*2}}{p_{\text{in}}^{*2}} \cdot \frac{BR(\Delta^+ \rightarrow m\pi^+)}{BR(\Delta^+ \rightarrow \gamma p)}. \quad (199)$$

Possiamo guardare i momenti nel CM degli stati iniziali, e sappiamo che siamo a risonanza; per un decadimento a due corpi  $a \rightarrow bc$  sappiamo:

$$p_{\text{in}}^* = \frac{\sqrt{(m_a^2 - m_b^2 - m_c^2)^2 - 4m_b^2 m_c^2}}{2m_a}. \quad (200)$$

Noi abbiamo i due casi: **a)**  $\Delta^+ \rightarrow \gamma p$ , dunque:

$$m_a = m_{\Delta^+} = 1232 \text{ MeV} \quad m_b = m_{\gamma} = 0 \quad m_c = m_p = 938 \text{ MeV}, \quad (201)$$

$$p_{\gamma}^* = \frac{\sqrt{(m_{\Delta^+}^2 - m_p^2)^2}}{2m_{\Delta^+}} = 258,9 \text{ MeV}. \quad (202)$$

**b)**  $\Delta^+ \rightarrow m\pi^+$ , dunque:

$$m_a = m_{\Delta^+} \quad m_b = m_m = 939 \text{ MeV} \quad m_c = m_{\pi^+} = 139 \text{ MeV}, \quad (203)$$

$$p_{\text{in}}^* = \frac{\sqrt{(m_{\Delta^+}^2 - m_m^2 - m_{\pi^+}^2)^2 - 4m_m^2 m_{\pi^+}^2}}{2m_{\Delta^+}} \simeq 226,79 \text{ MeV}. \quad (204)$$

Quindi:

$$\frac{(p_\gamma^*)^2}{(p_{\text{in}}^*)^2} = 1,141. \quad (205)$$

Ora, le  $\Gamma$  dei branching ratio riguardano tutte interazioni forti, per cui possiamo calcolare gli elementi di matrice  $\mathcal{M}$  e poi fare i rapporti, visto che c'è simmetria di isospin e le misure dello spazio delle fasi sono uguali. Abbiamo:

$$\Delta^+ = \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad \Delta^+ = uud, \quad (206)$$

$$p = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad m = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad (207)$$

$$\pi^0 = |1, 0\rangle \quad \pi^+ = |1, 1\rangle. \quad (208)$$

Così li possiamo comporre:

$$|\pi^0 p\rangle = |1, 0\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (209)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (210)$$

$$|\pi^+ m\rangle = |1, 1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (211)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (212)$$

Vediamo:

$$\langle \Delta^+ | H_{\text{int}} | m\pi^+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{M}_{3/2}, \quad (213)$$

$$\langle \Delta^+ | H_{\text{int}} | \pi^0 p \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{M}_{3/2}, \quad (214)$$

ricordando  $\Gamma \propto |\langle \dots \rangle|^2$  possiamo vedere (esplicitando i BR):

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_a} = 2 \left( \frac{p_\gamma^*}{p_{\text{in}}^*} \right)^2 \frac{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow m\pi^+)}{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow p\pi^0)} \cdot \frac{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow p\pi^0)}{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow \gamma p)} \quad (215)$$

$$= 2 \left( \frac{p_\gamma^*}{p_{\text{in}}^*} \right)^2 \cdot \frac{1/3}{2/3} \cdot \frac{1}{0,01}, \quad (216)$$

$$= \left( \frac{p_\gamma^*}{p_{\text{in}}^*} \right)^2 \cdot 10^2 \quad (217)$$

$$= 130,32, \quad (218)$$

$$\implies \sigma_b = 106,9 \sigma_a = 44,31 \text{ mb}. \quad (219)$$

## Esercizio 10

Vogliamo calcolare il momento magnetico dei barioni  $\Sigma^+(uus)$ ,  $\Sigma^-(dds)$ , i quali hanno  $S = 1/2$ . Ovviamente dobbiamo calcolare il modulo del momento magnetico. Sappiamo:

$$\vec{\mu} = g \frac{q}{2m} \vec{S} \quad \mu = g \frac{q}{2m} S_{\max}, \quad (220)$$

in cui, per particelle elementari, vale  $g \sim 2$ . Possiamo scrivere la funzione d'onda:

$$|\Sigma^{+\uparrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left( 2|u^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow\rangle - |u^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow\rangle - |u^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow\rangle \right), \quad (221)$$

$$|\Sigma^{-\uparrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left( 2|d^\uparrow d^\uparrow s^\downarrow\rangle - |d^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow\rangle - |d^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow\rangle \right), \quad (222)$$

ancora da antisimmetrizzare per il flavour e colore. Possiamo calcolare:

$$\mu_{\Sigma^+} = \langle \Sigma^+ | \vec{\mu}_{\Sigma^+} | \Sigma^+ \rangle_{S_z=+1/2}, \quad (223)$$

in cui mettiamo tutta la scrittura di  $|\Sigma\rangle$  (a differenza dell'esercitazione) poiché hanno diversi coefficienti. Notiamo anche che:

$$\vec{\mu} |q_1 q_2 q_3\rangle = (\vec{\mu}_{q_1} + \vec{\mu}_{q_2} + \vec{\mu}_{q_3}) |q_1 q_2 q_3\rangle. \quad (224)$$

Dunque abbiamo:

$$\mu_{\Sigma^+} = \frac{1}{6} \left( 2\langle u^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow | - \langle u^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow | - \langle u^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow | \right) \vec{\mu} \frac{1}{\sqrt{6}} \times \quad (225)$$

$$\times \left( 2|u^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow\rangle - |u^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow\rangle - |u^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow\rangle \right) \quad (226)$$

$$= \frac{1}{6} [4(\mu_u + \mu_u - \mu_s) + (\mu_u - \mu_u + \mu_s) + (-\mu_u + \mu_u + \mu_s)], \quad (227)$$

dove il segno meno lo mettiamo per lo spin down; troviamo:

$$\mu_{\Sigma^+} = \frac{1}{6} [8\mu_u - 2\mu_s]. \quad (228)$$

Dunque vediamo:

$$\mu_{\Sigma^+} = \frac{1}{3} [4\mu_u - \mu_s] \quad (229)$$

$$= \frac{1}{3} \left[ 4 \cdot g \frac{q_u}{2m_u} \cdot \frac{1}{2} - g \frac{q_s}{2m_s} \cdot \frac{1}{2} \right], \quad (230)$$

$$= \frac{1}{3} \left[ \frac{2}{m_u} \cdot \frac{2}{3} e + \frac{1}{3} \frac{e}{2m_s} \right] \quad (231)$$

$$= \frac{e}{9} \left[ \frac{4}{m_u} + \frac{1}{2m_s} \right], \quad (232)$$

$$= \frac{e}{9} \cdot \frac{8m_s + m_u}{2m_u m_s}. \quad (233)$$

Analogamente:

$$\mu_{\Sigma^-} = \frac{1}{3} [4\mu_d - \mu_s] \quad (234)$$

$$= \frac{1}{3} \left[ 2 \frac{q_d}{m_d} - \frac{q_s}{2m_s} \right], \quad (235)$$

$$= -\frac{e}{9} \left[ \frac{2}{m_d} - \frac{1}{2m_s} \right] \quad (236)$$

$$= -\frac{e}{9} \cdot \frac{4m_s - m_d}{2m_d m_s}. \quad (237)$$

L'espressione completa spin-sapore per  $\Sigma^+$  è:

$$|\Sigma^{+\uparrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}}(2|u^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow\rangle - |u^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow\rangle - |u^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow\rangle + \quad (238)$$

$$+ 2|u^\uparrow s^\downarrow u^\uparrow\rangle - |u^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow\rangle - |u^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow\rangle \quad (239)$$

$$+ 2|s^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle - |s^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow\rangle - |s^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow\rangle), \quad (240)$$

e analoga per  $\Sigma^-$ .

## Esercizio 11

Nel modello a quark vogliamo trovare un'espressione per le masse di  $\Sigma^*(qq_s, S = 3/2)$  e  $\Lambda^0(uds, S = 1/2)$ . Vediamo che  $\Sigma^*$  ha gli spin dei 3 quark tutti allineati, dunque  $\ell = 0$  (stato fondamentale) e possiamo dire che esistono tre stati ( $q = u, d$ ) equivalenti in massa ma con carica diversa. Sappiamo che un'espressione generica per la massa dei barioni, ignorando l'interazione spin-orbita visto che  $\ell = 0$  e quel contributo è nullo, è data da:

$$m_b = m_{q_1} + m_{q_2} + m_{q_3} + K(\alpha_s) \left[ \frac{\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \rangle}{m_{q_1} m_{q_2}} + \frac{\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 \rangle}{m_{q_1} m_{q_3}} + \frac{\langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 \rangle}{m_{q_2} m_{q_3}} \right], \quad (241)$$

dove il termine con  $K(\alpha_s)$  è la correzione iperfine (dipende da  $\alpha_s$ ). Possiamo considerare un prodotto generico  $i, j$ , con  $1 \leq i, j \leq 3, i \neq j$ :

$$(\vec{S}_{ij})^2 = S_i^2 + S_j^2 + 2\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \implies \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = \frac{1}{2} [(\vec{S}_{ij})^2 - S_i^2 - S_j^2]. \quad (242)$$

Guardando il caso di  $\Sigma^*$ , con  $S_{ij} = 1/2$  e con tutti gli spin allineati  $S_{ij} = 1$ , allora possiamo inserire gli autovalori  $S_k(S_k + 1)$  dopo aver mediato:

$$\langle \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rangle = \frac{1}{2} \left[ 1(1+1) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \right] \quad (243)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right] \quad (244)$$

$$= \frac{1}{4} \quad \forall i, j. \quad (245)$$

Dunque:

$$m_{\Sigma^*} = 2m_q + m_s + \frac{K}{4} \left[ \frac{1}{m_q^2} + \frac{2}{m_q m_s} \right]. \quad (246)$$

Possiamo vedere anche:

$$m_{\Lambda^0} = m_u + m_d + m_s + K(\alpha_s) \left[ \frac{\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \rangle}{m_u m_d} + \frac{\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 \rangle}{m_u m_s} + \frac{\langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 \rangle}{m_d m_s} \right]. \quad (247)$$

In questo caso non sappiamo dire a priori cosa sia  $S_{ij}^2$  poiché abbiamo  $S_\Lambda = 1/2$ , dunque gli spin non sono tutti allineati, e abbiamo più valori possibili. Possiamo scrivere:

$$(\vec{S}_{123})^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3)^2 \quad (248)$$

$$= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 + 2\vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3, \quad (249)$$

$$\implies \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 = \frac{1}{2} (\vec{S}_{123})^2 - \frac{1}{2} [S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2], \quad (250)$$

con i valori medi:

$$\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 \rangle + \langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 \rangle = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \left[ 3 \cdot \frac{3}{4} + 2\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \rangle \right]. \quad (251)$$

Ci servono  $\langle \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rangle$ . Sappiamo che  $\psi_B = \psi_{\text{spaziale}} \psi_{\text{spin}} \psi_{\text{flavour}} \psi_{\text{colore}}$ , essendo  $\Lambda^0$  un barione, dev'essere antisimmetrica. Essendo uno stato fondamentale, dunque  $\ell = 0$ , ha  $\psi_{\text{spaziale}}$  simmetrica.  $\Lambda^0$  è un barione, quindi un singoletto di colore, il che vuol dire  $\psi_{\text{colore}}$  antisimmetrica. Abbiamo bisogno quindi di  $\psi_{\text{spin}} \psi_{\text{flavour}}$  simmetrica. Però la parte di flavour è antisimmetrica (pensando in termini di isospin  $I$ ), dunque dev'essere anche  $\psi_{\text{spin}}$  antisimmetrica  $\implies (S_{12})^2 = 0$ , visto che stiamo parlando

della coppia  $ud$ . Quindi:

$$\langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \rangle = \frac{1}{2} \left[ (\vec{S}_{12})^2 - S_1^2 - S_2^2 \right] \quad (252)$$

$$= \frac{1}{2} \left( -2 \cdot \frac{3}{4} \right) \quad (253)$$

$$= -\frac{3}{4}, \quad (254)$$

$$\Rightarrow \quad \langle \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 \rangle + \langle \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 \rangle = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \left[ \frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4} \right] \quad (255)$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \quad (256)$$

$$= 0. \quad (257)$$

Troviamo:

$$m_{\Lambda^0} = m_u + m_d + m_s - \frac{3K(\alpha_s)}{4m_um_d}. \quad (258)$$

## Esercizio 12

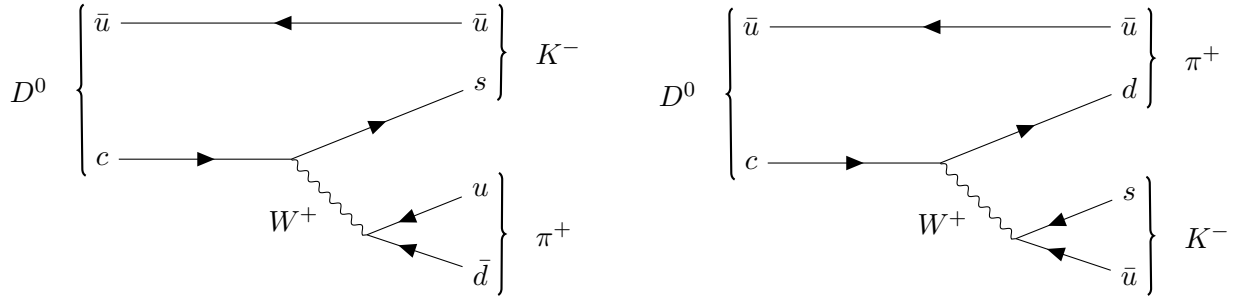
Consideriamo il decadimento del mesone  $D^0 \rightarrow \pi^\pm K^\mp$  e vogliamo calcolare (approssimativamente):

$$\frac{\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^- K^+)}{\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^+ K^-)}. \quad (259)$$

Come detto a lezione,  $D^0$  è il mesone più leggero con il quark  $c$ , quindi non può decadere in nulla di più leggero per interazione forte. Abbiamo le particelle:

$$D^0 = c\bar{u} \quad \pi^+ = u\bar{d} \quad K^+ = u\bar{s}. \quad (260)$$

e i diagrammi:



Nel vertice  $c \rightarrow s + W^+$  del primo diagramma abbiamo  $\cos \theta_c$ , e uguale nel decadimento di  $W^+$ . Nel vertice  $c \rightarrow d + W^+$  del secondo diagramma abbiamo  $-\sin \theta_c$ , così come per il decadimento del  $W^+$  (con un segno opposto). Abbiamo dunque:

$$\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^+ K^-) = \Gamma_0 \cos^4 \theta_c, \quad (261)$$

$$\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^- K^+) = \Gamma_0 \sin^4 \theta_c. \quad (262)$$

Quindi:

$$\frac{\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^- K^+)}{\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^+ K^-)} = \frac{\sin^4 \theta_c}{\cos^4 \theta_c} = \tan^4 \theta_c \sim 2,8 \times 10^{-3}. \quad (263)$$

**b)** Abbiamo fasci collidenti  $e^+e^- \rightarrow D^0 \bar{D}^0$  a soglia. Ci viene detto  $m_{D^0} = 1865$  MeV. Fasci collidenti di uguale energia vuol dire che siamo nel centro di massa, in cui  $\vec{p}_{e^-} = -\vec{p}_{e^+}$ , cioè:

$$|\vec{p}_{e^-}| = |\vec{p}_{e^+}| = p^*. \quad (264)$$

Conservando l'energia  $E_1 + E_2 = m_{D^0}$ , con  $E_1 = E_2$ :

$$E^* = \frac{m_D}{2}. \quad (265)$$

Dunque:

$$(p^{*2} + m_e^2)^{1/2} = \frac{m_D}{2} \quad \longrightarrow \quad p^* = \frac{\sqrt{m_D^2 - 4m_e^2}}{4}. \quad (266)$$

Questo poi si può rifare per  $D^0 \rightarrow K + \pi$ . Però a soglia produciamo  $D^0 \bar{D}^0$  fermi, per cui quando decadono, per la conservazione del quadri-impulso, i momenti delle particelle prodotte sono uguali in modulo e opposti. Se si vuole:

$$\underbrace{P_{e^-} + P_{e^+}}_{\substack{\text{particelle} \\ \text{iniziali} \\ =0}} = \underbrace{P_{D^0} + P_{\bar{D}^0}}_{\substack{\text{particelle} \\ \text{prodotte} \\ =0}} = \underbrace{P_K + P_\pi}_{\substack{\text{prodotti} \\ \text{decadimento}}} \implies \vec{p}_K = -\vec{p}_\pi, \quad (267)$$

$$\implies |\vec{p}_K| = |\vec{p}_\pi|. \quad (268)$$

Però nel decadimento di  $D^0$  o  $\bar{D}^0$  tutte le masse in gioco sono uguali. Dunque

$$|\vec{p}_{K^+}| = |\vec{p}_{\pi^-}| = |\vec{p}_{K^-}| = |\vec{p}_{\pi^+}|. \quad (269)$$

Possiamo ricavarne il valore, chiamato  $p^*$ , dalla condizione di soglia,  $\vec{p}_D = 0$ , e usando la conservazione dell'energia:

$$\begin{cases} m_D = E_K + E_\pi \\ 0 = \vec{p}_K + \vec{p}_\pi \end{cases} \implies \begin{cases} m_D - E_K = E_\pi \\ |\vec{p}_K| = |\vec{p}_\pi| = p^* \end{cases}, \quad (270)$$

$$(m_D - E_K)^2 = E_\pi^2 \implies m_D^2 + E_K^2 - 2m_DE_K = E_\pi^2, \quad (271)$$

$$m_D^2 + m_K^2 + p^{*2} - 2m_DE_K = m_\pi^2 + p^{*2}, \quad (272)$$

$$\implies E_K = \frac{m_D^2 + m_K^2 - m_\pi^2}{2m_D}. \quad (273)$$

Dunque l'impulso:

$$p^{*2} = E_K^2 - m_K^2, \quad (274)$$

$$\implies p^* = \frac{\sqrt{(m_D^2 + m_K^2 - m_\pi^2)^2 - 4m_D^2 m_K^2}}{2m_D} = 861,4 \text{ MeV}. \quad (275)$$

c) Abbiamo i possibili decadimenti:

$$D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \quad \bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^- \implies \Gamma_{CF} \propto \cos^4 \theta_c \quad (\text{canale favorito}), \quad (276)$$

$$D^0 \rightarrow K^+ \pi^- \quad \bar{D}^0 \rightarrow K^- \pi^+ \implies \Gamma_{CS} \propto \sin^4 \theta_c \quad (\text{canale sfavorito}). \quad (277)$$

Avevamo anche visto:

$$R = \frac{\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^- K^+)}{\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^+ K^-)} = \tan^4 \theta, \quad (278)$$

e notiamo:

$$R = \frac{\Gamma(\bar{D}^0 \rightarrow \pi^+ K^-)}{\Gamma(\bar{D}^0 \rightarrow \pi^- K^+)} = \frac{\Gamma_{CS}}{\Gamma_{CF}}. \quad (279)$$

Se trascuriamo le oscillazioni del  $D^0$  allora vuol dire che consideriamo  $D^0$  e  $\bar{D}^0$  che decadono in modo indipendente. Possiamo avere in stato finale due kaoni con carica opposta se:

$$D, \bar{D}^0 \text{ nel canale favorito: } D^0 \rightarrow K^- \pi^+, \bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^- \longrightarrow \cos^2 \theta, \quad (280)$$

$$D, \bar{D}^0 \text{ nel canale sfavorito: } D^0 \rightarrow K^+ \pi^-, \bar{D}^0 \rightarrow K^- \pi^+ \longrightarrow \sin^2 \theta. \quad (281)$$

Se vogliamo due particelle diverse nello stato finale abbiamo due casi distinti, in cui però entrambi i mesoni  $D^0$  decadono nello stesso canale (favorito o no):

$$P(K^+ K^-) = \Gamma_{CF}^2 + \Gamma_{CS}^2. \quad (282)$$

Allo stesso modo abbiamo in stato finale  $2K$  con stessa carica se i  $D^0$  decadono in canali diversi.

$$P(2K^\pm) = \Gamma_{CF}\Gamma'_{CS} + \Gamma_{CS}\Gamma'_{CF} \quad (283)$$

$$= 2\Gamma_{CF}\Gamma_{CS}. \quad (284)$$

Così vediamo:

$$\frac{P(2K^\pm)}{P(K^+ K^-)} = \frac{2\Gamma_{CF}\Gamma_{CS}}{\Gamma_{CF}^2 + \Gamma_{CS}^2} \quad (285)$$

$$= \frac{2\Gamma_{CF}^2 (\Gamma_{CS}/\Gamma_{CF})}{\Gamma_{CF}^2 [1 + (\Gamma_{CS}/\Gamma_{CF})^2]}, \quad (286)$$

$$= \frac{2R}{1 + R^2} \quad (287)$$

$$= 0,0056, \quad (288)$$

$$\implies \frac{P(2K^\pm)}{P(K^+ K^-)} = 0,56\%. \quad (289)$$

## Esercizio 13

Scopriamo la risonanza  $X^0$  di spin 1 e  $M = 800$  GeV, con:

$$BR(X^0 \rightarrow W^+W^-) \approx 100\% \quad \sigma_{\text{peak}} \approx 80 \text{ fb}. \quad (290)$$

a) Vogliamo determinare  $BR(X^0 \rightarrow e^+e^-)$ . Al picco conosciamo Breit-Wigner:

$$\sigma_{\text{peak}}(i \rightarrow X^0 \rightarrow f) = \frac{\pi}{p_{\text{in}}^{*2}} \cdot \frac{2J+1}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \cdot \frac{\Gamma_i \Gamma_f}{(E-M)^2 + \Gamma^2/4}, \quad (291)$$

in cui  $p_{\text{in}}^*$  è l'impulso di una delle due particelle, e  $\Gamma_i, \Gamma_f$  sono le ampiezze iniziali e finali; al denominatore  $(E-M)^2 = 0$  alla risonanza. Abbiamo  $J = 1$  (della risonanza) e  $p^{*2} = M^2$  se guardiamo  $X^0 \rightarrow e^+e^-$ ; abbiamo anche  $s_a = 1/2 = s_b$  degli  $e^\pm$ . Quindi:

$$\sigma_{\text{peak}}(i \rightarrow X^0 \rightarrow f) = \frac{3\pi}{4p^{*2}} BR_i BR_f \cdot 4. \quad (292)$$

Calcolando  $p^*$ :

$$\begin{cases} E_{e^-} + E_{e^+} = M \\ \vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{e^+} = 0 \end{cases} \implies E_e^2 = (M - E_{e^+})^2 = M^2 + E_{e^+}^2 - 2ME_{e^+}, \quad (293)$$

$$\implies m_e^2 + p^{*2} = M^2 + m_e^2 + p^{*2} - 2ME_{e^+} \quad (294)$$

$$\implies E_{e^+} = \frac{M}{2} = 400 \text{ GeV} = E_{e^-}. \quad (295)$$

Dunque:

$$p^* = \sqrt{E_e^2 - m^2} \sim E_e = 400 \text{ GeV} = \frac{M}{2} \quad (296)$$

e di conseguenza:

$$\sigma_{\text{peak}}(i \rightarrow X^0 \rightarrow f) = \frac{12\pi}{M^2} BR_i BR_f. \quad (297)$$

La  $\sigma_{\text{peak}} \approx 80 \text{ fb}$  è la sezione d'urto totale, cioè quella ottenuta sommando su tutti i canali finali possibili. Possiamo sommare:

$$\sum_F \sigma_{\text{peak}}(i \rightarrow X^0 \rightarrow F) = \sigma_{\text{peak}} = \frac{12\pi}{M^2} BR_i \sum_F BR_F, \quad (298)$$

con  $\sum_F BR_F = 1$ . Ma  $BR_i = BR(X^0 \rightarrow e^+e^-)$  visto che è uguale per inversione  $e^+e^- \rightarrow X^0$ . Dunque:

$$BR(X^0 \rightarrow e^+e^-) = \frac{\sigma_{\text{peak}} M^2}{12\pi} = 3,48 \times 10^{-6}, \quad (299)$$

in cui usiamo:

$$\sigma_{\text{peak}} = \frac{80 \text{ fb}}{3,894 \times 10^{11} \text{ fb/GeV}^{-2}} \sim 2,054 \times 10^{-10} \text{ GeV}^{-2}. \quad (300)$$

b) Abbiamo  $L_{\text{int}} = 100 \text{ fb}^{-1}$  ad  $\sqrt{s} \sim 800 \text{ GeV}$  e vogliamo sapere quanti eventi di  $X^0$  si avranno in media con uno stato finale:

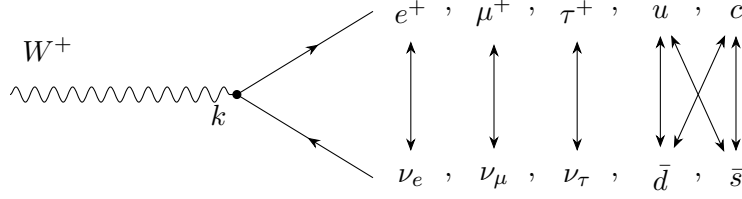
$$e^+ \nu_e d \bar{u} \quad \text{o} \quad e^+ \nu_e s \bar{u} \quad (301)$$

ovvero:

$$X^0 \rightarrow W^+W^- \rightarrow e^+ \nu_e d \bar{u}, \quad (302)$$

$$X^0 \rightarrow W^+W^- \rightarrow e^+ \nu_e s \bar{u}, \quad (303)$$

e ci viene detto  $BR(X^0 \rightarrow W^+W^-) \sim 100\%$ . Ma possiamo vedere i modi di decadere del  $W^\pm$  al picco (cioè a  $\sim 80$  GeV). Abbiamo:



in cui  $k$  è un generico vertice, e dove stiamo attenti ad avere un  $\ell$  con il suo  $\nu$ , e per i quark al fatto che ci possa essere mixing e quindi che nel vertice abbiamo un fattore di Cabibbo. Assumiamo il mixing del quark  $b$  trascurabile. Definiamo l'ampiezza parziale:

$$\Gamma_0 = \Gamma(k=1) = \Gamma(W^+ \rightarrow e^+ \nu_e) = \Gamma(W^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = \Gamma(W^+ \rightarrow \tau^+ \nu_\tau), \quad (304)$$

in cui mettiamo le ampiezze di decadere in  $\ell^+ \nu$  tutte uguali, visto che a risonanza  $M_W \gg m_\ell \forall \ell$  e li consideriamo tutti massless. Con i quark abbiamo:

$$\Gamma(W^+ \rightarrow u \bar{d}) = \Gamma(W^+ \rightarrow c \bar{s}) = 3 \cos^2 \theta_c \Gamma_0, \quad (305)$$

$$\Gamma(W^+ \rightarrow u \bar{s}) = \Gamma(W^+ \rightarrow c \bar{d}) = 3 \sin^2 \theta_c \Gamma_0. \quad (306)$$

con il fattore 3 dovuto al fattore di colore. Così la larghezza totale è:

$$\Gamma_{\text{tot}} = 3\Gamma_0 + 3\Gamma_0 \cos^2 \theta_c + 3\Gamma_0 \sin^2 \theta_c = 9\Gamma_0. \quad (307)$$

Vediamo:

$$BR(W^+ \rightarrow e^+ \nu_e) = \frac{\Gamma_0}{\Gamma_{\text{tot}}} = \frac{1}{9}, \quad (308)$$

$$BR(W^+ \rightarrow u \bar{d}) = BR(W^+ \rightarrow c \bar{s}) = BR(W^- \rightarrow \bar{u} d) = BR(W^- \rightarrow \bar{c} s) = \frac{\cos^2 \theta_c}{3}, \quad (309)$$

$$BR(W^+ \rightarrow u \bar{s}) = BR(W^+ \rightarrow c \bar{d}) = BR(W^- \rightarrow \bar{u} s) = BR(W^- \rightarrow \bar{c} d) = \frac{\sin^2 \theta_c}{3}. \quad (310)$$

Dunque la somma è:

$$BR(W^- \rightarrow \bar{u} d) + BR(W^- \rightarrow \bar{u} s) = \frac{1}{3}. \quad (311)$$

Quindi, quando  $X^0 \rightarrow W^+W^-$  e  $W^+ \rightarrow e^+ \nu_e$  con  $W^- \rightarrow (\bar{u} d, \bar{u} s)$ , allora abbiamo:

$$BR(X^0 \rightarrow e^+ \nu + (\bar{u} d \text{ o } \bar{u} s)) = BR(X^0 \rightarrow W^+W^-) BR(W^+ \rightarrow e^+ \nu) \times \quad (312)$$

$$\times [BR(W^- \rightarrow \bar{u} d) + BR(W^- \rightarrow \bar{u} s)], \quad (313)$$

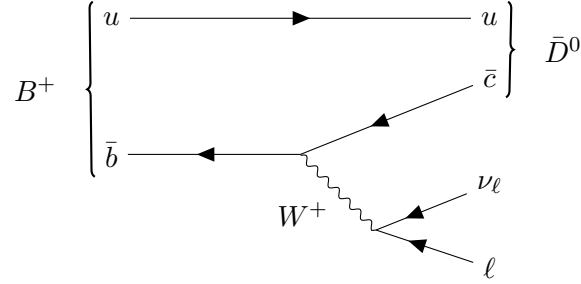
$$= 1 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}. \quad (314)$$

Ora sappiamo:

$$N = \sigma_{\text{peak}} L_{\text{int}} BR(X^0 \rightarrow e^+ \nu (\bar{u} d, \bar{u} s)) \sim 296,3 \text{ eventi}. \quad (315)$$

## Esercizio 14

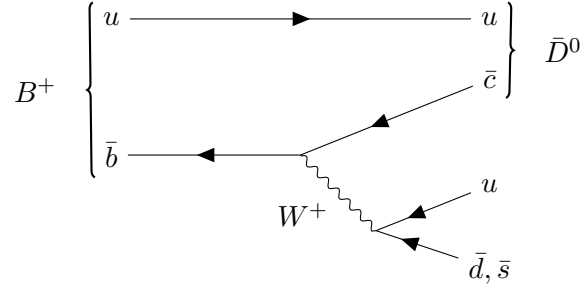
Prendiamo il mesone  $B^+ = u\bar{b}$  ( $m_b = 4.2$  GeV); ricordando che  $\tau(\mu) = 2\mu\text{s}$  vogliamo trovare  $\tau(B^+)$ . Ci serve analizzare i canali di decadimento con le relative ampiezze. Assumiamo l'elemento  $|V_{ub}|$  trascurabile. Abbiamo  $u$  come quark spettatore, mentre  $\bar{b}$  decade debolmente.



con  $\ell = e, \mu, \tau$ . Definiamo  $\Gamma_0 = \Gamma(k = k' = 1)$  e notiamo che  $k = \sin \theta_c$  e  $k' = 1$  essendo leptonic. Dunque:

$$\Gamma(\bar{b} \rightarrow \bar{c}e^+\nu_e) = \Gamma(\bar{b} \rightarrow \bar{c}\mu^+\nu_\mu) = \Gamma(\bar{b} \rightarrow \bar{c}\tau^+\nu_\tau) = \Gamma_0|V_{cb}|^2 \sin^2 \theta_c. \quad (316)$$

Però ci sono anche i decadimenti adronici.



Ora abbiamo  $k = \sin \theta_c$  e  $k' \neq 1$ . Notiamo anche che, mentre il colore di  $\bar{c}$  è fissato, abbiamo un fattore di colore proveniente dai due quark del decadimento del  $W^+$ . Dunque:

$$\Gamma(\bar{b} \rightarrow \bar{c}u\bar{d}) = 4\Gamma_0 \sin^2 \theta_c \cos^2 \theta_c |V_{cb}|^2, \quad (317)$$

$$\Gamma(\bar{b} \rightarrow \bar{c}u\bar{s}) = 4\Gamma_0 \sin^4 \theta_c |V_{cb}|^2. \quad (318)$$

L'ampiezza totale:

$$\Gamma_{\text{TOT}} = \Gamma_{\text{LEP}} + \Gamma_{\text{HAD}} \quad (319)$$

$$= (3\Gamma_0 \sin^2 \theta_c + 4\Gamma_0 \sin^4 \theta_c + 4\Gamma_0 \sin^2 \theta_c \cos^2 \theta_c) |V_{cb}|^2 \quad (320)$$

$$= (3\Gamma_0 \sin^2 \theta_c + 4\Gamma_0 \sin^2 \theta_c [\sin^2 \theta_c + \cos^2 \theta_c]) |V_{cb}|^2 \quad (321)$$

$$= 7\Gamma_0 \sin^2 \theta_c |V_{cb}|^2. \quad (322)$$

Da cui possiamo calcolare i  $BR$ . Per analisi dimensionale si può concludere che  $\Gamma_0 \propto G_F^2 m^5$ , con  $m \equiv m_b$ . Possiamo prendere il decadimento  $\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e$  e confrontarlo con il decadimento di  $B^+$ :

$$\frac{\tau_B}{\tau_\mu} = \frac{\Gamma_{\mu,\text{TOT}}}{\Gamma_{B,\text{TOT}}} = \frac{\Gamma_\mu(\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e)}{BR(\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e)} \cdot \frac{BR(B^+ \rightarrow \bar{D}^0 e^+\nu_e)}{\Gamma_B(B^+ \rightarrow \bar{D}^0 e^+\nu_e)}, \quad (323)$$

in cui  $BR(\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e)$  vale 1 perché l'unico possibile, e vediamo:

$$BR(B^+ \rightarrow \bar{D}^0 e^+\nu_e) = \frac{\Gamma_0 |V_{cb}|^2 \sin^2 \theta_c}{7\Gamma_0 |V_{cb}|^2 \sin^2 \theta_c} = \frac{1}{7}. \quad (324)$$

$$\frac{\tau_B}{\tau_\mu} = \frac{1}{7} \left( \frac{m_\mu}{m_b} \right)^5 \frac{1}{|V_{cb}|^2}. \quad (325)$$

Con il valore  $|V_{cb}| \sim 0,041$  troviamo:

$$\tau_B = \frac{1}{7} \left( \frac{m_\mu}{m_B} \right)^5 \frac{1}{|V_{cb}|^2} \tau_\mu = 1,828 \times 10^{-12} \text{ s.} \quad (326)$$

## Esercizio 15

I mesoni  $B^0 = d\bar{b}$  e  $\bar{B}^0 = b\bar{d}$  non sono autostati di CP e vogliamo trovare le combinazioni lineari che lo siano. In generale sappiamo  $P(q\bar{q}) = (-1)^{\ell+1}$ , ma essendo  $B^0, \bar{B}^0$  fondamentali, dunque  $\ell = 0$ , abbiamo:

$$P(B^0) = -1 \quad (327)$$

e se guardiamo CP:

$$CP|B^0\rangle = -|\bar{B}^0\rangle, \quad (328)$$

$$CP|\bar{B}^0\rangle = -|B^0\rangle. \quad (329)$$

Possiamo costruire:

$$|B_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|B^0\rangle + |\bar{B}^0\rangle), \quad (330)$$

$$|B_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|B^0\rangle - |\bar{B}^0\rangle), \quad (331)$$

a cui applichiamo CP:

$$CP|B_1\rangle = -|B_1\rangle, \quad (332)$$

$$CP|B_2\rangle = +|B_2\rangle. \quad (333)$$

In base agli autovalori di CP possiamo vedere chi può decadere in  $J/\psi K_S^0$  o  $J/\psi K_L^0$ . Abbiamo le parità intrinseche (entrambi fondamentali):

$$P(J/\psi) = -1 \quad P(K) = -1. \quad (334)$$

Vediamo  $J/\psi K$  come uno stato unico, con un momento angolare  $L$ , che possiamo vedere dalla legge di conservazione:

$$S_{B^0} = 0 \quad S_{J/\psi} = 1 \quad S_K = 0, \quad (335)$$

$$L_B + S_B = S_{J/\psi} + S_K + L \implies L = 1. \quad (336)$$

In questo modo vediamo:

$$P|J/\psi K\rangle = P(J/\psi)P(K)(-1)^L \quad (337)$$

$$= (-1)^{2+L} \quad (338)$$

$$= -1. \quad (339)$$

In più abbiamo  $J/\psi \rightarrow 1^{--}$ :

$$\implies CP|J/\psi\rangle = (-1)^2|J/\psi\rangle = +|J/\psi\rangle. \quad (340)$$

Avevamo anche visto:

$$CP|K_S\rangle = +|K_S\rangle, \quad (341)$$

$$CP|K_L\rangle = -|K_L\rangle. \quad (342)$$

Dunque complessivamente:

$$CP|J/\psi K_S\rangle = (+1)(+1)(-1)^L = -1, \quad (343)$$

$$CP|J/\psi K_L\rangle = (+1)(-1)(-1)^L = +1, \quad (344)$$

e concludiamo:

$$B_1 \text{ (CP = -1) decade in } J/\psi K_S^0, \quad (345)$$

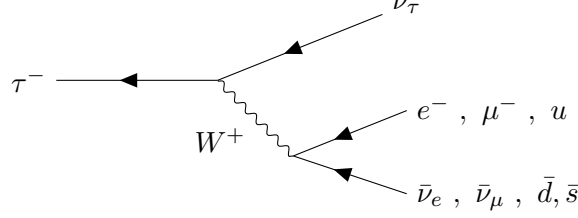
$$B_2 \text{ (CP = +1) decade in } J/\psi K_L^0. \quad (346)$$

## Esercizio 16

Vogliamo calcolare:

$$\frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow h^- \nu_\tau)}{\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- \nu_\tau \bar{\nu}_e)} \quad \text{e} \quad \frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- \nu_\tau \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e)}, \quad (347)$$

cercando di capire quali e quanti adroni rappresentano  $h^-$ . Vediamo come può decadere il  $\tau$ .



Dove ovviamente dobbiamo tenere conto del fattore di vertice e del fattore di colore (3) per i decadimenti adronici. Vediamo, definendo  $\Gamma_0 = \Gamma(k = k' = 1)$ :

$$\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- \nu_\tau \bar{\nu}_e) = \Gamma(\tau^- \rightarrow \mu^- \nu_\tau \bar{\nu}_\mu) = \Gamma_0, \quad (348)$$

$$\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau u \bar{d}) = 3\Gamma_0 \cos^2 \theta_c, \quad (349)$$

$$\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau u \bar{s}) = 3\Gamma_0 \sin^2 \theta_c. \quad (350)$$

L'ampiezza con  $h^-$  è la somma delle ampiezze adroniche:

$$\Gamma(\tau^- \rightarrow h^- \nu_\tau) = \Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau u \bar{d}) + \Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau u \bar{s}) \quad (351)$$

$$= 3\Gamma_0. \quad (352)$$

E possiamo dire che, dopo l'adronizzazione a seguito del decadimento, troviamo i mesoni:

$$u\bar{d} = \pi^+ \quad \text{o} \quad u\bar{s} = K^+ \quad (\text{oppure } \bar{u}d = \pi^- \text{ e } \bar{u}s = K^-). \quad (353)$$

Possiamo calcolare:

$$\frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow h^- \nu_\tau)}{\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- \nu_\tau \bar{\nu}_e)} = \frac{3\Gamma_0}{\Gamma_0} = 3. \quad (354)$$

Per il secondo rapporto dobbiamo ricordarci  $\Gamma \propto G_F^2 m^5$  così da poter vedere:

$$\frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- \nu_\tau \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e)} = \left( \frac{m_\tau}{m_\mu} \right)^5 \sim 1,388 \times 10^6. \quad (355)$$

## Esercizio 17

Vogliamo stimare: a) ad LHC i rapporti delle sezioni d'urto:

$$pp \rightarrow W^+ d \rightarrow u\bar{d}d, \quad (356)$$

$$pp \rightarrow W^+ d \rightarrow u\bar{s}d, \quad (357)$$

$$pp \rightarrow W^+ s \rightarrow u\bar{s}s; \quad (358)$$

b) ad NA62 il rapporto dei  $BR$ :

$$K^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e, \quad (359)$$

$$K^- \rightarrow \pi^0 \mu^- \bar{\nu}_\mu, \quad (360)$$

$$K^- \rightarrow \pi^0 \pi^-. \quad (361)$$

a) Abbiamo il processo: Abbiamo due vertici deboli e vediamo i contributi (colonne vertice 1, vertice

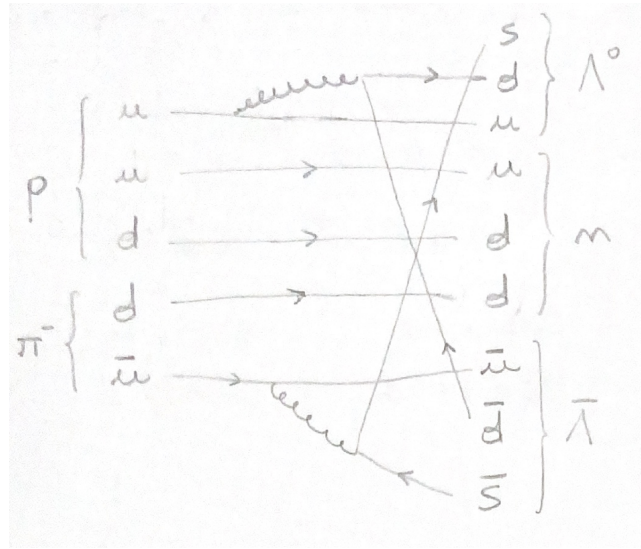


Figura 1: **Non sono sicuro di questo diagramma.**

2):

$$pp \rightarrow W^+ d \rightarrow u\bar{d}d : \quad \cos \theta_c, \quad \cos \theta_c, \quad (362)$$

$$pp \rightarrow W^+ d \rightarrow u\bar{s}d : \quad \cos \theta_c, \quad \sin \theta_c, \quad (363)$$

$$pp \rightarrow W^+ s \rightarrow u\bar{s}s : \quad \sin \theta_c, \quad \sin \theta_c. \quad (364)$$

E dobbiamo anche ricordarci dei fattori di colore, ma che volendo rapporti di  $\sigma$  si cancellano essendo tutti uguali. Dunque, se vogliamo, definiamo una  $\sigma_0 = \sigma(1, 1)$  che si cancella nei rapporti, e ricordando  $\theta_c = 13^\circ$  abbiamo:

$$\sigma(u\bar{d}d) : \sigma(u\bar{s}d) : \sigma(u\bar{s}s) \quad (365)$$

$$\cos^4 \theta_c : \sin^2 \theta_c \cos^2 \theta_c : \sin^4 \theta_c \quad (366)$$

$$1 : \tan^2 \theta_c : \tan^4 \theta_c \quad (367)$$

$$1 : 0,053 : 0,0028. \quad (368)$$

b) Vediamo  $K^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e$  (con  $K^- = \bar{u}s$ ,  $\pi^0 = (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$ ) o analogamente  $K^- \rightarrow \pi^0 \mu^- \bar{\nu}_\mu$ . Ciò che abbiamo è un vertice debole con  $s$ :

$$s \rightarrow W^- u \longrightarrow \sin \theta_c, \quad (369)$$

bosone vettore che decade in una coppia di leptoni, e dunque senza contributo al vertice. Definiamo al solito  $\Gamma_0 = \Gamma(1, 1)$ , così:

$$\Gamma(K^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e) = \Gamma(K^- \rightarrow \pi^0 \mu^- \bar{\nu}_\mu) = \Gamma_0 \sin^2 \theta_c. \quad (370)$$

Per il processo  $K^- \rightarrow \pi^0 \pi^-$  abbiamo che il  $W^-$  decade in  $W^- \rightarrow \bar{u}d$ , dunque c'è un fattore  $\cos \theta_c$ :

$$\Gamma(K^- \rightarrow \pi^0 \pi^-) = 4\Gamma_0 \cos^2 \theta_c \sin^2 \theta_c, \quad (371)$$

con anche un fattore di colore. Dunque abbiamo:

$$BR(K^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e) : BR(K^- \rightarrow \pi^0 \mu^- \bar{\nu}_\mu) : BR(K^- \rightarrow \pi^0 \pi^-) \quad (372)$$

$$\Gamma(K^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e) : \Gamma(K^- \rightarrow \pi^0 \mu^- \bar{\nu}_\mu) : \Gamma(K^- \rightarrow \pi^0 \pi^-) \quad (373)$$

$$1 : \frac{\Gamma(K^- \rightarrow \pi^0 \mu^- \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(K^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e)} : \frac{\Gamma(K^- \rightarrow \pi^0 \pi^-)}{\Gamma(K^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e)} = 4 \cos^2 \theta_c \quad (374)$$

$$1 : 1 : 3,8. \quad (375)$$