

QCD notes

Gabriele Cembalo

gCembalo.github.io

based on prof. P. Torrielli lecture notes

a.a. 2025-2026, 2nd semester

Disclaimer

Lecture notes from the course **Phenomenology of fundamental interaction**. Those are an appendix for the notes named *QCD notes* present in Campusnet page. I tried to "tex" the pdf notes given by the professor during the lecture, but sometimes i didn't draw all the diagrams and it's possible that I forgot some observation or motivation; so, for those reasons, if something is a little bit confusing it's my fault and you can see the original pdf (handwritten) notes.

Contents

3 - Fattore di colore e flusso.....	2
6 - Intuitive Representation of $e^+e^- \rightarrow$ Hadrons Scattering	6
7 - $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ massless	9
8 - NLO calculation and infrared divergences.....	13
9 - LO e NLO, Appendice.....	14
10 - Sezione d'urto dei Jet	17
11 - Approfondimento sulla Teoria delle Perturbazioni nel regime IR	20
12 - Studio approfondito sulle distribuzioni cinematiche	21
13 - Distribuzione della Thrust in eventi $q\bar{q}g$	22
14 - Deep Inelastic Scattering: Violazione dello Scaling di Bjorken ed Equazione DGLAP...	26

3 - Fattore di colore e flusso

Possiamo dare una rappresentazione grafica della propagazione del colore. Abbiamo il *propagatore del quark*:

$$j \xrightarrow{\quad} i \longrightarrow \delta_{ij} \quad (1)$$

e da esso possiamo vedere:

$$\begin{array}{c} i \\ \boxed{\xrightarrow{\quad} \xleftarrow{\quad}} \\ i \end{array} = \delta_{ii} = \text{Tr}\{\delta_{ij}\} = N = 3. \quad (2)$$

Sappiamo di avere il *gluone* nella rappresentazione aggiunta, quindi $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$, dove abbiamo i fattori: 3 per il colore, $\bar{3}$ per l'anti-colore, 8 sono i gluoni e 1 è la traccia. Quindi, il colore si propaga come $3 \otimes \bar{3}$ con traccia nulla:

$$a \text{~~~~~} b \longrightarrow a \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} b + B \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \boxed{\quad} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} b = \delta_{ab}. \quad (3)$$

Possiamo trovare B calcolando la traccia:

$$\delta_{aa} = N^2 - 1 \quad (4)$$

$$= \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + B \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (5)$$

$$= N^2 + BN \quad (6)$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{N}. \quad (7)$$

Quindi la (3) diventa:

$$a \text{~~~~~} b \longrightarrow a \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} b + \frac{1}{N} a \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \boxed{\quad} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} b \quad (8)$$

Di conseguenza possiamo scrivere:

$$t_{ij}^a = A \left[\begin{array}{c} a \\ \uparrow \downarrow \\ j \xrightarrow{\quad} \quad \xrightarrow{\quad} i \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} a \\ \uparrow \downarrow \\ j \xrightarrow{\quad} \quad \xrightarrow{\quad} i \end{array} \right] \quad (9)$$

dove il primo termine è il *leading color* (colore dominante) e il secondo è il *subleading color* (colore subdominante). Possiamo anche verificare che $\text{Tr}\{t_{ij}^a\} = 0$:

$$A \left[\begin{array}{c} a \\ \uparrow \downarrow \\ \text{---} \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} a \\ \uparrow \downarrow \\ \text{---} \end{array} \right] = A \begin{array}{c} a \\ \uparrow \downarrow \\ \text{---} \end{array} \left(1 - \frac{1}{N}N \right) = 0. \quad (10)$$

Possiamo trovare A calcolando:

$$\text{Tr}\{t^a t^b\} = T_R \delta^{ab} \quad (11)$$

$$= T_R \left[a \text{---} b - \frac{1}{N} a \text{---} b \right] \quad (12)$$

$$= A^2 \left[\begin{array}{c} a \quad b \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} a \quad b \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} a \quad b \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} + \frac{1}{N} \begin{array}{c} a \quad b \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \right] \quad (13)$$

$$= A^2 \left[a \text{---} b - \frac{1}{N} a \text{---} b - \frac{1}{N} a \text{---} b + \frac{1}{N^2} N a \text{---} b \right] \quad (14)$$

$$= A^2 \delta^{ab} \quad (15)$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{T_R}. \quad (16)$$

Quindi, l'equazione (9) diventa:

$$t_{ij}^a = \sqrt{T_R} \left[\begin{array}{c} a \\ | \\ \uparrow \downarrow \\ j \text{---} i \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} a \\ | \\ \uparrow \downarrow \\ j \text{---} i \end{array} \right]. \quad (17)$$

Utilizzando:

$$if^{abc} = \frac{1}{T_R} \text{Tr}\{[t^a, t^b]t^c\} \quad (18)$$

possiamo vedere:

$$if^{abc} \rightarrow \sqrt{T_R} \left[\begin{array}{c} a \\ | \\ \swarrow \searrow \\ c \quad b \end{array} - \begin{array}{c} a \\ | \\ \swarrow \searrow \\ c \quad b \end{array} \right]. \quad (19)$$

Fierz mostra graficamente:

$$\begin{array}{c} j \quad k \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ i \quad a \quad a \quad l \end{array} = t_{ij}^a t_{kl}^a \quad (20)$$

$$= T_R \left[\begin{array}{c} j \quad k \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} j \quad k \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} j \quad k \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} + \frac{1}{N^2} \begin{array}{c} j \quad k \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \right] \quad (21)$$

$$= T_R \left[\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{N^2} \delta_{ij} \delta_{kl} N \right] \quad (22)$$

$$= \text{identità di Fierz}. \quad (23)$$

Il metodo che stiamo sviluppando può essere utile per calcolare (controllare) il *fattore di colore del diagramma*. Alcuni esempi sono mostrati di seguito:

$$\text{wavy line } \gamma \text{ entering a fermion loop} \rightarrow \text{fermion loop} = N \quad (24)$$

$$\text{Diagram: } \gamma \text{ (wavy line) entering a loop with two arrows, } a \text{ (wavy line) exiting the loop, } g \text{ (gluon line) attached to the loop} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\text{Diagram: } a \text{ (double line) entering a loop} - \frac{1}{N} \text{Diagram: } a \text{ (double line) entering a loop} \right]_{\text{Tr}\{t^a\}=0} \quad (25)$$

[illegible]

$$= \frac{1}{2} \left[N^2 - \frac{1}{N} N - \frac{1}{N} N + \frac{1}{N^2} N^2 \right] \quad (27)$$

$$= \frac{N^2 - 1}{2} \quad (28)$$

$$=NC_F \quad (29)$$

$$i \rightarrow \text{[wavy line]} \rightarrow j \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & i \rightarrow \text{[double line with arrow]} \rightarrow j - \frac{1}{N} i \rightarrow \text{[double line with arrow]} \rightarrow j - \\ & - \frac{1}{N} i \rightarrow \text{[double line with arrow]} \rightarrow j + \frac{1}{N^2} i \rightarrow \text{[double line with arrow]} \rightarrow j \end{aligned} \right] \quad (30)$$

$$= i \longrightarrow j \cdot \frac{1}{2} \left[N - \frac{1}{N} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} N \right] \quad (31)$$

$$=C_F\delta_{ij}. \quad (32)$$

Questo metodo può anche essere utile per stabilire una *gerarchia di colore* tra i diagrammi. Alcuni esempi sono mostrati:

$$\begin{array}{c} \gamma \end{array} \rightarrow \frac{1}{4} \begin{array}{c} \text{---} \end{array} + \dots = \frac{1}{4} N^3 + \dots \quad (33)$$

dove i puntini rappresentano termini con potenze inferiori di N . Possiamo anche vedere:

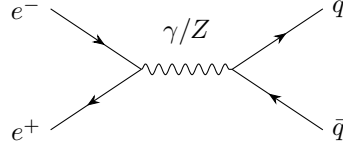
$$\begin{array}{c} \gamma \end{array} \rightarrow \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{4} N + \dots \quad (34)$$

che è soppresso di un fattore $\frac{1}{N^2} = \frac{1}{9}$ rispetto al precedente.

Quando il calcolo è troppo complicato (più di 2 loop) possiamo calcolarlo al leading color e poi includere i termini $1/N^2$.

6 - Intuitive Representation of $e^+e^- \rightarrow \text{Hadrons}$ Scattering

The process occurs via the annihilation of e^+ and e^- , resulting in the production of a virtual photon (or a virtual Z boson), which subsequently produces a hadronic state. At the lowest order in perturbation theory (LO), the diagram representing the scattering is:



If the center-of-mass energy is $\sqrt{s}$, this is also the energy of the produced $q\bar{q}$ pair. We can assume $\sqrt{s} \sim 100$ GeV to fix our physical intuition.

The $q\bar{q}$ pair, produced at high energy, has a high probability of further radiation — primarily gluons (given the magnitude of the coupling constant α_s), each of which carries away a certain fraction of the energy from the original $q\bar{q}$ pair. Secondary, the pair, produce photon and Z . Diagrammatically, these successive emissions are represented schematically in the following figure:

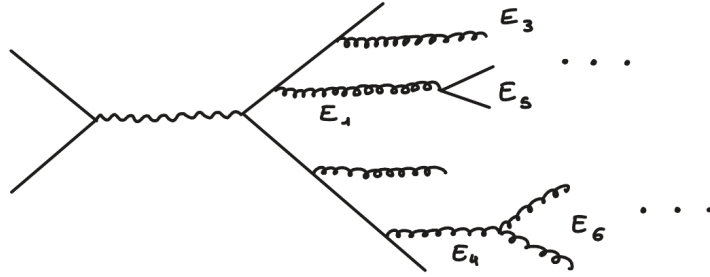
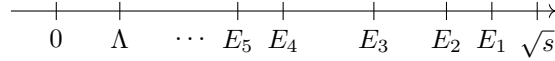


Figure 1: Feynman diagram used to show the parton shower, with energetic label based on the evolution of the scale E_i .

where E_i represent the energy scales at which the emissions occur:



Some of these emissions can be virtual, meaning they involve both the radiation and the reabsorption of partons (quarks and gluons) within the diagram.

The schematic Feynman diagram drawn above describes the perturbative phase of the scattering process, where $E_i > \Lambda$. We can gain intuition into the evolution of color propagation during parton production by graphically representing the *leading* color flow associated with the diagram:

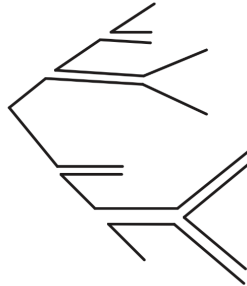


Figure 2:

From this, we can see how the primary color line associated with the $q\bar{q}$ pair (the "color dipole") at high energy $\sqrt{s} \gg \Lambda$ is fragmented through successive emissions. This process forms multiple color dipoles at lower energies, which is energetically favored.

Upon reaching the non-perturbative scale $\sim \Lambda$, the color dipoles recombine ("color reconnection") to form color singlets, i.e., hadrons, which represent the bound states that asymptotically survive. In the previous color picture, the situation is represented by: where the blobs, each associated with an energy scale of order Λ ,

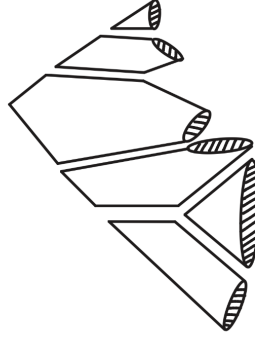
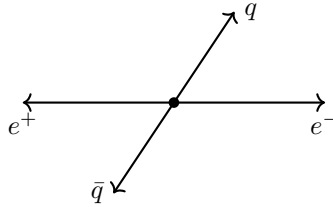


Figure 3:

represent the formation of hadrons from the color lines left open in the perturbative phase.

From the perspective of scattering within a collider, we can visualize the primary production of the "hard" $q\bar{q}$ pair geometrically:



Successive radiation of gluons at energies $E_i < \sqrt{s}$ modifies the direction and energy of q and $\bar{q}$ (progressively less as E_i decreases). Therefore, a scattering event will be more realistically represented by the following scheme (perturbative part), where the gluon lines are more or less collimated with respect to the initially produced (energetic) quark (or $\bar{q}$) depending on the corresponding scale E_i :

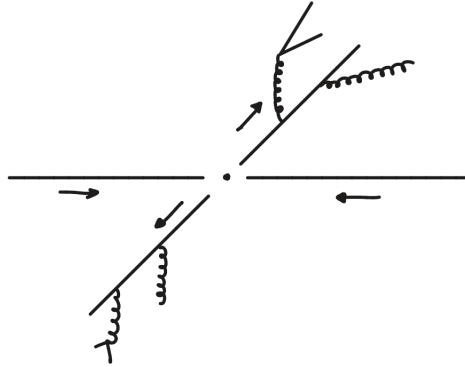


Figure 4:

After the hadronization phase, the final hadrons are then detected in the hadronic calorimeters of the collider detector in the form of energy deposits, **jets**, which correspond to jets of hadronic particles that are quite collimated and energetic.

In the last graphical representation (see below if necessary), it was assumed for simplicity that the energies E_i were low (or the relative emission angles so small) that all emissions fall into two jets. It is possible that one or more emissions from the $q\bar{q}$ pair are "hard" and form other jets, separate from the main ones. The probability of this phenomenon can and will be calculated in QCD perturbation theory later on.

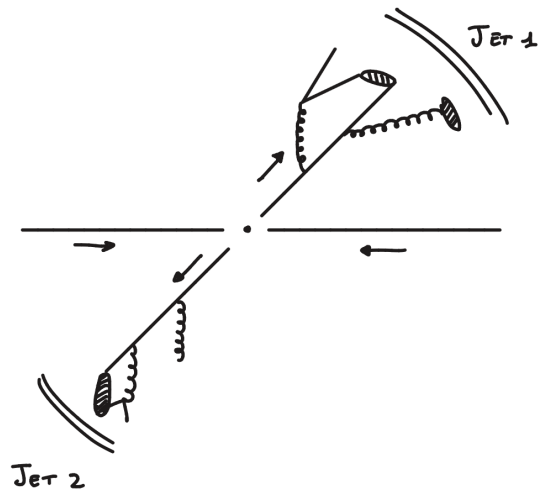
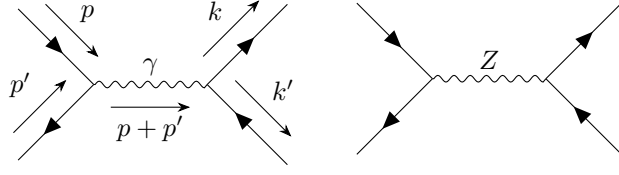


Figure 5:

7 - $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ massless

I neglect m_e and m_f , use Feynman gauge and call $m \equiv M_Z$. We can see the diagrams:



The diagram with the intermediate Higgs is proportional to m_f , so it's 0 here. We can enumerate the diagrams respectively 1 and 2.

$$i\mathcal{M}_1 = \bar{v}(p')(-ie\gamma_\mu)u(p)\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}\bar{u}(k)(-ieQ_f\gamma_\nu)v(k')(-1) \quad (35)$$

$$\text{where } Q_u = +2/3; Q_d = -1/3 \quad (36)$$

$$q = p + p'; q^2 = 2p \cdot p' = s \quad (37)$$

$$i\mathcal{M}_2 = \bar{v}(p')\left(-i\frac{g_w}{2\cos\theta_w}\gamma_\mu(V_e - A_e\gamma_5)\right)u(p)\frac{-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{m^2}}{q^2 - m^2}\bar{u}(k)\left(-i\frac{g_w}{2\cos\theta_w}\gamma_\nu(V_f - A_f\gamma_5)\right)v(k') \quad (38)$$

where $q^\mu q^\nu$ will cancel by Dirac equation and we can ignore for the moment Breit-Wigner effects. Will be introduced later.

$$\sum_{pol} |\mathcal{M}_1|^2 = \bar{v}(p')\gamma_\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma_\rho v(p')\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k')\bar{v}(k')\gamma^\rho u(k)\frac{e^4 Q_f^2}{q^4} \quad (39)$$

$$= \text{Tr}(\not{p}'\gamma_\mu\not{p}\gamma_\rho)\text{Tr}(\not{k}\gamma^\mu\not{k}'\gamma^\rho)\frac{e^4 Q_f^2}{q^4} \quad (40)$$

$$= \frac{16e^4 Q_f^2}{q^4} [p'_\mu p_\rho + p'_\rho p_\mu - p \cdot p' g_{\mu\rho}] \cdot [k^\mu k'^\rho + k'^\mu k^\rho - k \cdot k' g^{\mu\rho}] \quad (41)$$

$$= \frac{16e^4 Q_f^2}{q^4} [2p' \cdot k p \cdot k' + 2p \cdot k p' \cdot k'] \quad (42)$$

$$= \frac{16e^4 Q_f^2}{2(p \cdot p')^2} [p' \cdot k \cdot p \cdot k' + p \cdot k \cdot p' \cdot k'] \quad (43)$$

$$= \frac{16e^4 Q_f^2}{2(p \cdot p')^2} [(p \cdot k')^2 + (p \cdot k)^2] \quad (44)$$

being $p \cdot k' = p' \cdot k$ and $p \cdot k = p' \cdot k'$.

$$\sum_{pol} |\mathcal{M}_2|^2 = \bar{v}(p')\gamma_\mu(V_e - A_e\gamma_5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\rho(V_e - A_e\gamma_5)v(p')\bar{u}(k)\gamma^\mu(V_f - A_f\gamma_5)v(k')\bar{v}(k')\gamma^\rho(V_f - A_f\gamma_5)u(k) \cdot \left(\frac{g_w}{2\cos\theta_w}\right)^4 \frac{(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{m^2})(-g^{\rho\sigma} + \frac{q^\rho q^\sigma}{m^2})}{(q^2 - m^2)^2} \quad (45)$$

$$= \left(\frac{g_w}{2\cos\theta_w}\right)^4 \frac{1}{(q^2 - m^2)^2} \text{Tr}(\not{p}'\gamma_\mu(V_e - A_e\gamma_5)\not{p}\gamma_\rho(V_e - A_e\gamma_5)) \times \quad (46)$$

$$\times \text{Tr}(\not{k}\gamma^\mu(V_f - A_f\gamma_5)\not{k}'\gamma^\rho(V_f - A_f\gamma_5)) \quad (47)$$

$$= q^\nu \bar{v}(p')(\not{p} + \not{p}')(A + B\gamma_5)u(p) \quad (48)$$

$$= q^\nu \bar{v}(p')\not{p}(A + B\gamma_5)u(p) \quad (49)$$

$$= q^\nu \bar{v}(p')(A - B\gamma_5)\not{p}u(p) \quad (50)$$

$$= 0. \quad (51)$$

where in (47) every piece in $q^\mu q^\nu$ (or $q^\rho q^\sigma$) goes away: $q = p + p'$ and you have $q^\mu q^\nu \bar{v}(p') \gamma_\mu (A + B \gamma_5) u(p)$.

$$\sum_{pol} |\mathcal{M}_2|^2 = \underbrace{\left(\frac{g_w}{2 \cos \theta_w} \right)^4 \frac{1}{(q^2 - m^2)^2} \text{Tr} (\not{p}' \gamma_\mu \not{p} \gamma_\rho (V_e^2 + A_e^2 - 2V_e A_e \gamma_5)) \text{Tr} (\not{k} \gamma^\mu \not{k}' \gamma^\rho (V_f^2 + A_f^2 - 2V_f A_f \gamma_5))}_{\equiv L} \quad (52)$$

$$= L [(V_e^2 + A_e^2) 4(p_\mu p_\rho + p_\rho p'_\mu - g_{\mu\rho} p \cdot p') + 2V_e A_e 4i\epsilon_{\mu\rho\sigma\sigma'}] \times \\ \times [(V_f^2 + A_f^2) 4(k^\mu k'^\rho + k'^\mu k^\rho - k \cdot k' g^{\mu\rho}) + 2V_f A_f 4i\epsilon^{\mu k \rho k'}] \quad (53)$$

$$= L [16(V_e^2 + A_e^2)(V_f^2 + A_f^2) 2((p \cdot k)^2 + (p \cdot k')^2) - 64V_e A_e V_f A_f p^\alpha p'^\beta k^\lambda k'^\delta \epsilon_{\alpha\mu\beta\rho} \epsilon^{\mu\lambda\rho\delta}] \quad (54)$$

$$= L [32(V_e^2 + A_e^2)(V_f^2 + A_f^2) ((p \cdot k)^2 + (p \cdot k')^2) + 128V_e A_e V_f A_f ((p \cdot k)^2 - (p \cdot k')^2)]. \quad (55)$$

$$\sum_{pol} \mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2 = \sum_{pol} \mathcal{M}_2^* \mathcal{M}_1 \quad (56)$$

$$= -\bar{u}(p) \gamma_\mu v(p') \frac{Q_f e^2}{q^2} \bar{v}(k') \gamma^\mu u(k) \cdot \bar{v}(p') \frac{g_w^2}{2 \cos^2 \theta_w} \gamma_\rho (V_e - A_e \gamma_5) u(p) \frac{1}{q^2 - m^2} \bar{u}(k) \gamma^\rho (V_f - A_f \gamma_5) v(k') \quad (57)$$

$$= \underbrace{\frac{g_w^2 e^2 Q_f}{(2 \cos \theta_w)^2 q^2 (q^2 - m^2)}}_{\equiv N} (-) \text{Tr} (\not{p}' \gamma_\mu \not{p} \gamma_\rho (V_e - A_e \gamma_5)) \text{Tr} (\not{k} \gamma^\mu \not{k}' \gamma^\rho (V_f - A_f \gamma_5)) \quad (58)$$

$$= N \cdot 16 \{ [(p_\mu p_\rho + p_\rho p'_\mu - p \cdot p' g_{\mu\rho}) V_e + A_e p^\alpha p'^\beta i \epsilon_{\alpha\mu\beta\rho}] \times \\ \times [(k^\mu k'^\rho + k'^\mu k^\rho - k \cdot k' g^{\mu\rho}) V_f + A_f k^\lambda k'^\sigma i \epsilon_{\lambda\mu\sigma\rho}] \} = \quad (59)$$

$$= 16N \{ V_e V_f [2((p \cdot k)^2 + (p \cdot k')^2)] + 2A_e A_f [(p \cdot k')^2 - (p \cdot k)^2] \}. \quad (60)$$

Thus:

$$3 \sum_{pol, colors} |\mathcal{M}|^2 = \frac{3 \cdot 16e^4 Q_f^2}{2(p \cdot p')^2} [(p \cdot k)^2 + (p \cdot k')^2] + \\ + \left(\frac{g_w}{\cos \theta_w} \right)^4 \frac{3 \cdot 2}{(q^2 - m^2)^2} [(V_e^2 + A_e^2)(V_f^2 + A_f^2) ((p \cdot k)^2 + (p \cdot k')^2) + \\ + 4V_e V_f A_e A_f ((p \cdot k)^2 - (p \cdot k')^2)] - \quad (61)$$

$$- \frac{32g_w^2 e^2 Q_f \cdot 3}{(2 \cos \theta_w)^2 q^2 (q^2 - m^2)} [V_e V_f [(p \cdot k)^2 + (p \cdot k')^2] + \\ + A_e A_f [(p \cdot k')^2 - (p \cdot k)^2]]. \quad (62)$$

$$+ A_e A_f [(p \cdot k')^2 - (p \cdot k)^2]]. \quad (63)$$

C.M. Frame: $p^\mu = p(1, 0, 0, 1)$; $p'^\mu = p(1, 0, 0, -1)$; $k^\mu = k(1, 0, \sin \theta, \cos \theta)$; $k'^\mu = k(1, 0, -\sin \theta, -\cos \theta)$.

$s = (p + p')^2 = 4p^2$; $s = (k + k')^2 = 4k^2 \implies k = p$.

$p \cdot k = p^2(1 - \cos \theta)$; $p \cdot k' = p^2(1 + \cos \theta)$; $p \cdot p' = 2p^2$, with $p^2 = s/4$.

$$\rightarrow 3 \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2 = \frac{3 \cdot 16e^4 Q_f^2}{s^2/2} (p^4(1 + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta) + p^4(1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta)) + \quad (64)$$

$$+ 3 \left(\frac{g_w}{\cos \theta_w} \right)^4 \frac{2}{(s - m^2)^2} [p^4(V_e^2 + A_e^2)(V_f^2 + A_f^2)(1 + \cos^2 \theta) \cdot 2 + 4V_e A_e V_f A_f \cdot 4p^4 \cos \theta] + \quad (65)$$

$$- \frac{3 \cdot 16g_w^2 e^2 Q_f}{\cos^2 \theta_w s(s - m^2)} [V_e V_f 2(1 + \cos^2 \theta) + A_e A_f 4 \cos \theta] \cdot p^4 = \quad (66)$$

$$= 3(1 + \cos^2 \theta) \left[\frac{64e^4 Q_f^2}{s^2} p^4 + \left(\frac{g_w}{\cos \theta_w} \right)^4 \frac{4}{(s - m^2)^2} p^4 (V_e^2 + A_e^2)(V_f^2 + A_f^2) - \frac{32g_w^2 e^2 Q_f p^4}{\cos^2 \theta_w s(s - m^2)} V_e V_f \right] + \quad (67)$$

$$+ 3 \cos \theta \left[\left(\frac{g_w}{\cos \theta_w} \right)^4 \frac{32p^4 V_e V_f A_e A_f}{(s - m^2)^2} - \frac{64g_w^2 e^2 Q_f p^4}{\cos^2 \theta_w s(s - m^2)} A_e A_f \right] \quad (68)$$

$$\equiv \left(3 \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2 \right)^{TL} \quad (69)$$

Phase space:

$$d\Phi_2 = \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2E'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + p' - k - k') \quad (70)$$

$$= \frac{d^3 k}{(2\pi)^2 4p^2} \delta(2p - 2k) \quad (71)$$

$$= \frac{k^2 dk d\Omega}{8p^2 (2\pi)^2} \delta(p - k) \quad (72)$$

$$= \frac{d \cos \theta}{16\pi}. \quad (73)$$

Flux factor:

$$\mathcal{F} = 1/2s. \quad (74)$$

Thus:

$$d\sigma/d \cos \theta = \frac{1}{2s} \frac{1}{16\pi} \frac{1}{4} \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2 \cdot 3 \quad (75)$$

where 1/4 comes from the e^+e^- spin average.

Notations: $\alpha \equiv e^2/4\pi$; $g_w = e/\sin \theta_w$.

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{3}{128\pi s} \frac{s^2}{16} \left\{ \left[\frac{64 \cdot 16\pi^2 \alpha^2 Q_f^2}{s^2} + \frac{\alpha^2 16\pi^2}{(\sin \theta_w \cos \theta_w)^4} \frac{4}{(s - m^2)^2} (V_e^2 + A_e^2)(V_f^2 + A_f^2) - \frac{Q_f V_e V_f 32\alpha^2 16\pi^2}{(\sin \theta_w \cos \theta_w)^2 s(s - m^2)} \right] (1 + \cos^2 \theta) \right. \quad (76)$$

$$\left. + \left[\frac{\alpha^2 16\pi^2}{(\sin \theta_w \cos \theta_w)^4} \frac{32V_e V_f A_e A_f}{(s - m^2)^2} - \frac{64Q_f \alpha^2 16\pi^2 A_e A_f}{(\sin \theta_w \cos \theta_w)^2 s(s - m^2)} \right] \cos \theta \right\} \quad (77)$$

$$= \frac{3\alpha^2 \pi}{2s} \left\{ (1 + \cos^2 \theta) \left[Q_f^2 + (V_e^2 + A_e^2)(V_f^2 + A_f^2) \left[\frac{s^2}{16} \frac{1}{(s - m^2)^2} \frac{1}{(\sin \theta_w \cos \theta_w)^4} \right] + \right. \right. \quad (78)$$

$$\left. + 2Q_f V_e V_f \left[\frac{s^2}{4} \frac{1}{s(m^2 - s)} \frac{1}{(\sin \theta_w \cos \theta_w)^2} \right] \right] + (\cos \theta) \left[s^2 \frac{1}{(s - m^2)^2} \frac{1}{(\sin \theta_w \cos \theta_w)^4} Q_f A_e A_f + 8V_e V_f A_e A_f \frac{s^2}{16} \frac{1}{(s - m^2)^2} \frac{1}{(\sin \theta_w \cos \theta_w)^4} \right] \right\} \quad (79)$$

$$= \frac{3\alpha^2 \pi}{2s} \left\{ (1 + \cos^2 \theta) [Q_f^2 + (V_e^2 + A_e^2)(V_f^2 + A_f^2) \chi_2(s) - 2Q_f V_e V_f \chi_1(s)] \right. \quad (80)$$

$$\left. + (\cos \theta) [-4Q_f A_e A_f \chi_1(s) + 8V_e V_f A_e A_f \chi_2(s)] \right\}, \quad (81)$$

with the definitions:

$$\chi_1(s) \equiv \frac{-s}{4(m^2 - s)(\sin \theta_w \cos \theta_w)^2} \quad (82)$$

and:

$$\chi_2(s) \equiv \frac{s^2}{16(m^2 - s)^2(\sin \theta_w \cos \theta_w)^4} = \chi_1(s)^2. \quad (83)$$

Now, taking into account the correct (see for instance Peskin pag. 237) **Breit-Wigner substitution**:

$$\frac{1}{s - m^2} \rightarrow \frac{1}{s - m^2 + im\Gamma} \quad (84)$$

in the propagator of the heavy boson particle, you have a different $d\sigma/d\cos\theta$. (Γ is the total decay width of the Z boson).

In $|\mathcal{M}_2|^2$ you have simply $(s - m^2)^2 \rightarrow (s - m^2)^2 + (m\Gamma)^2$, while for the interference terms you have $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* + \mathcal{M}_1^*\mathcal{M}_2$ and so the interference contribution becomes:

$$\frac{2A}{s - m^2} \rightarrow \frac{2A(s - m^2)}{(s - m^2)^2 + (m\Gamma)^2}. \quad (85)$$

Thus:

$$\chi_1(s) \rightarrow \underbrace{\frac{s(s - m^2)}{4(\sin \theta_w \cos \theta_w)^2[(s - m^2)^2 + (m\Gamma)^2]}}_{L_1} \quad (86)$$

and:

$$\chi_2(s) \rightarrow \underbrace{\frac{s^2}{16(\sin \theta_w \cos \theta_w)^4[(s - m^2)^2 + (m\Gamma)^2]}}_{L_2}. \quad (87)$$

Defining finally:

$$G_F \equiv g_w^2 \sqrt{2}/(8m^2 \cos^2 \theta_w) = e^2 \sqrt{2}/(8m^2 \sin^2 \theta_w \cos^2 \theta_w) \quad (88)$$

finally we have:

$$\chi_1(s) = L_1 \frac{\sqrt{2}G_F m^2}{4\pi\alpha} \quad \text{and} \quad \chi_2(s) = L_2 \left(\frac{\sqrt{2}G_F m^2}{4\pi\alpha} \right)^2. \quad (89)$$

With these notations, one has the tree-level differential cross section:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \right)_{\text{tree level}} = \frac{3\alpha^2\pi}{2s} [(1 + \cos^2\theta) [Q_f^2 + (V_e^2 + A_e^2)(V_f^2 + A_f^2)\chi_2(s) - 2Q_f V_e V_f \chi_1(s)] + (\cos\theta) [-4Q_f A_e A_f \chi_1(s) + 8V_e V_f A_e A_f \chi_2(s)]] , \quad (90)$$

with the following definitions for the propagator factors:

$$\chi_1(s) \equiv k \frac{s(s - m^2)}{(s - m^2)^2 + (\Gamma m)^2} \quad ; \quad \chi_2(s) \equiv k^2 \frac{s^2}{(s - m^2)^2 + (\Gamma m)^2} \quad ; \quad k \equiv \frac{\sqrt{2}G_F m^2}{4\pi\alpha} \quad (91)$$

This result coincides with equation (3.1) of **ESW** (Ellis, Stirling, and Webber), up to the factor of 3 which accounts for the **color sum** (number of colors $N_c = 3$ for quarks).

8 - NLO calculation and infrared divergences

After the QCD notes chapter 5 introduction:

Virtual corrections enter the *Next-to-Leading Order (NLO)* calculation by interfering with the Born term (since they share the same particle multiplicity, i.e., same number of particles in the final state), whereas real corrections enter by interfering with themselves.

At the end of the section, before the example:

If the perturbative calculation is not limited to the total cross section σ , but intends to probe observables sensitive to the presence of soft and/or collinear emissions, the corrections to the Born prediction can be large. This sometimes requires the calculation of higher orders in perturbation theory, or even the need to sum classes of contributions to all perturbative orders (called **RESUMMATION**).

The **KLN theorem** applies not only to the calculation of the total cross section σ , but consequently also to differential cross sections $d\sigma/dx$, where x is a generic observable whose spectrum we want to calculate in perturbation theory. However, for the cancellation between real and virtual contributions established by KLN to hold for $d\sigma/dx$, x must be defined such that it takes the same numerical value in the presence of a soft and/or collinear real emission as it does in the presence of a virtual emission. In this way, for any value of x , $d\sigma/dx$ receives both divergent real and virtual contributions, such that:

$$\frac{d\sigma_R}{dx} + \frac{d\sigma_V}{dx} < \infty \quad (92)$$

Such an observable x is defined as **IR-SAFE**.

EXAMPLE of an observable that is NOT IR-SAFE: the number of gluons in the final state of the process $e^+e^- \rightarrow 2 \text{ jets}$ at NLO in QCD.

- Virtual corrections have $N_g = 0$.
- Real corrections have $N_g = 1$, regardless of the kinematics.

Therefore, $d\sigma/dN_g \propto +\delta(N_g - 1) - \infty\delta(N_g - 0)$, which makes no sense as a physical distribution.

9 - LO e NLO, Appendice

Nota. In questa sezione sono presenti alcuni contenuti aggiuntivi relativi alle parti:

4 $e^+e^- \rightarrow$ adroni al leading order (LO).

6 Correzioni NLO a $e^+e^- \rightarrow$ adroni: contributo reale.

7 Correzioni NLO a $e^+e^- \rightarrow$ adroni: contributo virtuale.

che si trovano nella pagina Campusnet.

Dopo l'equazione (57):

Il fattore di colore è stato dedotto come segue. Tenendo traccia degli indici di colore per gli spinori dei quark, l'elemento di matrice di Born al quadrato sarebbe $|\mathcal{M}_b|^2 \propto \bar{u}_i(\tilde{p}_1)\delta_{ij}v_j(\tilde{p}_2)\bar{v}_k(\tilde{p}_2)\delta_{kl}u_l(\tilde{p}_1)$, dove si intende la somma sugli indici di colore ripetuti. La contrazione $v_j(\tilde{p}_2)\bar{v}_k(\tilde{p}_2)$ produce una delta di Kronecker di colore δ_{jk} , e analogamente la contrazione $u_l(\tilde{p}_1)\bar{u}_i(\tilde{p}_1)$ produce δ_{li} , quindi il fattore di colore è $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}\delta_{li} = \delta_{ij}\delta_{ji} = N_c$.

Dopo l'equazione (69):

Il fattore di colore è stato dedotto come segue. Tenendo traccia degli indici di colore per gli spinori dei quark, l'elemento di matrice reale al quadrato sarebbe $|\mathcal{M}_r|^2 \propto \bar{u}_i(p_1)t_{ij}^a v_j(p_2)\bar{v}_k(p_2)t_{kl}^a u_l(p_1)$, dove si intende la somma sugli indici di colore ripetuti. La contrazione $v_j(p_2)\bar{v}_k(p_2)$ produce una delta di Kronecker di colore δ_{jk} , e analogamente la contrazione $u_l(p_1)\bar{u}_i(p_1)$ produce δ_{li} , quindi il fattore di colore è $t_{ij}^a \delta_{jk} t_{kl}^a \delta_{li} = t_{ij}^a t_{ji}^a = \delta^{ab} \text{tr}(t^a t^b) = \delta^{ab} \delta^{ab}/2 = (N_c^2 - 1)/2 = C_F N_c$.

Il seguente testo è simile a quanto presente negli appunti recenti; dopo l'equazione (79):

Ora, eseguiamo i limiti IR, iniziando da quello collineare (che chiamiamo CL). Quando $\vec{k}$ diventa parallelo a $\vec{p}_1$, si ha $k^\mu \rightarrow p_1^\mu(1-z)/z$, dove $z = E_1/(E_1 + E_k) \rightarrow x_1$ (nel limite collineare $E_2 = E_1 + E_k = \sqrt{s}/2$, perché lo pseudo-partone 1 + k diventa senza massa come il partone 2). Inoltre $(1 - x_2) = t/s \rightarrow 0$, con $t = 2p_1 \cdot k$, quindi otteniamo il kernel collineare di Altarelli-Parisi $P_{q \rightarrow qg}(z)$:

$$\text{CL} = \lim_{\vec{k} \parallel \vec{p}_1} \frac{1}{2s} d\phi_3^{[4]}(p_1, p_2, k; s) \sum_f |\mathcal{M}_r|^2 = \sigma_b \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{dt}{t} dz C_F \underbrace{\left[\frac{1+z^2}{1-z} - \epsilon(1-z) \right]}_{=P_{q \rightarrow qg}(z)}. \quad (93)$$

Nel limite soft SL, entrambi $x_i \rightarrow 1$: poiché $E_k \rightarrow 0$, i tre impulsi dello stato finale possono essere parametrizzati come $p_1^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, 1)$, $p_2^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -1)$, $k^\mu = E_k(1, 0, \sin \theta, \cos \theta)$, quindi otteniamo la formula eikonale

$$\text{SL} = \lim_{E_k \rightarrow 0} \frac{1}{2s} d\phi_3^{[4]}(p_1, p_2, k; s) \sum_f |\mathcal{M}_r|^2 = \sigma_b \frac{\alpha_s}{2\pi} dE_k d \cos \theta C_F \frac{4}{E_k(1 - \cos^2 \theta)} \quad (94)$$

$$= \sigma_b \frac{\alpha_s}{2\pi} dE_k d \cos \theta C_F \frac{2p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot k p_2 \cdot k}. \quad (95)$$

Accanto al diagramma all'inizio della sezione 7:

Iniziamo calcolando la correzione del vertice a un loop, che chiamiamo $ieQ_f\Lambda_\rho$, in gauge di Feynman. Indichiamo con P_i gli impulsi esterni, tutti considerati come entranti nel loop: $P_1 = -\tilde{p}_1$ è associato al quark, P_2 è associato al fotone virtuale del canale s , e $P_3 = -\tilde{p}_2$ è associato all'antiquark. Definiamo $k_i = P_1 + \dots + P_i$. La conservazione dell'impulso per il triangolo implica $P_1 + P_2 + P_3 = 0$, quindi $k_1 = -\tilde{p}_1$ e $k_2 = \tilde{p}_2$. Ne segue che $k_1^2 = k_2^2 = 0$. Inoltre, per definizione, $k_0 = 0$.

Dopo l'equazione (83):

Il fattore di colore è $t_{ij}^a t_{jl}^a = C_F \delta_{il}$, dove la δ di Kronecker è stata sottintesa.

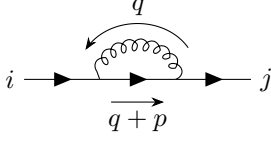
Dopo l'equazione (88):

Può essere utile tenere separati i regolatori dimensionali UV e IR. Definendo $\epsilon^{\text{IR}} \equiv \epsilon$ e $\epsilon^{\text{UV}} \equiv \epsilon'$, possiamo prima estrarre la dipendenza da ϵ' dal fattore di forma Λ_ρ : la correzione del vertice è un diagramma con divergenza logaritmica, quindi il suo polo UV può essere calcolato nel limite di invarianti di Mandelstam nulli (qui s), ovvero

$$\Lambda_\rho|_{\text{UV}} = -2ig_s^2 C_F \gamma_\rho \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^4} = \gamma_\rho \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1}{\epsilon'} \quad (96)$$

quindi l'equazione (21) viene sostituita da

$$\Lambda_\rho = \gamma_\rho \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{C_F}{\Gamma(1-\epsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{s} \right)^\epsilon e^{i\pi\epsilon} \left[-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 + \mathcal{O}(\epsilon) \right] + \gamma_\rho \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left[\frac{1}{\epsilon'} - \frac{1}{\epsilon} \right] = \gamma_\rho C'. \quad (97)$$



Lo stesso risultato può essere ottenuto sostituendo $1/\epsilon \rightarrow 1/\epsilon'$ nel coefficiente di A nella seconda riga dell'equazione (21), poi espandendo in ϵ e considerando $\epsilon/\epsilon' = 1$ nel termine finito. Distinguendo i due regolatori, la self-energy $i\Sigma(p)$ non svanisce più, quindi la calcoliamo esplicitamente.

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= -i \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{-i}{q^2} (ig_s \mu^\epsilon \gamma^\mu t^a) \frac{i(q+p)}{(q+p)^2} (ig_s \mu^\epsilon \gamma_\mu t^a) \\ &= ig_s^2 \mu^{2\epsilon} C_F \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\mu (q+p) \gamma_\mu}{q^2 (q+p)^2} \\ &= -ig_s^2 \mu^{2\epsilon} C_F 2(1-\epsilon) p \int_0^1 dx (1-x) \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^4} \end{aligned} \quad (98)$$

dove $l^\mu = q^\mu + xp^\mu$, e abbiamo ommesso i termini lineari in l per simmetria. Il fattore di colore può essere immediatamente verificato ripristinando gli indici di colore: $\Sigma_{ij}(p) \propto t_{ik}^a t_{kj}^a = C_F \delta_{ij}$, dove come di consueto sottintendiamo la delta di Kronecker di colore.

Il polo UV di $\Sigma(p)$ è

$$\Sigma(p)|_{\text{UV}} = -2ig_s^2 C_F p \int_0^1 dx (1-x) \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^4} = p \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{1}{\epsilon'} \quad (99)$$

e poiché con $\epsilon = \epsilon'$ la self-energy svanisce esattamente, si deduce

$$\Sigma(\not{p}) = \not{p} \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left[\frac{1}{\epsilon'} - \frac{1}{\epsilon} \right] = \not{p} K. \quad (100)$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto dividendo l'integrale in una regione IR e una UV, ed eseguendo un'integrazione euclidea, si veda ad esempio le pagine 172-173 di [1]. La correzione del propagatore a un loop è data da $(i\not{p}/p^2) i\Sigma(\not{p}) (i\not{p}/p^2) = -iK\not{p}/p^2$. Vediamo che il coefficiente della divergenza UV è lo stesso della correzione del vertice, producendo un contributo di loop UV-finito:

$$\mathcal{M}_v = C' \mathcal{M}_b - \frac{1}{2} K \mathcal{M}_b - \frac{1}{2} K \mathcal{M}_b = C \mathcal{M}_b, \quad (101)$$

equivalente al risultato precedente.

Contributo reale in gauge di cono di luce

Supponiamo di trattare una versione semplificata dell'annichilazione e^+e^- , in cui il tensore leptonico è $\hat{L}^{\rho\sigma} \propto g^{\rho\sigma}$. Trascurando le costanti irrilevanti e ponendo $d = 4$, in gauge di Feynman i contributi reali a questo processo sono

$$\begin{aligned} |m_{r1}|^2 &= \frac{1}{4p_1 \cdot k^2} \bar{u}(p_1) \gamma^\mu (\not{p}_1 + \not{k}) \gamma^\rho v(p_2) \bar{v}(p_2) \gamma_\rho (\not{p}_1 + \not{k}) \gamma^\mu u(p_1) = 8 \frac{p_2 \cdot k}{p_1 \cdot k}, \\ |m_{r2}|^2 &= 8 \frac{p_1 \cdot k}{p_2 \cdot k}, \\ 2m_{r1} m_{r2}^* &= \frac{1}{2p_1 \cdot k p_2 \cdot k} \bar{u}(p_1) \gamma^\mu (\not{p}_1 + \not{k}) \gamma^\rho v(p_2) \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (-\not{p}_2 - \not{k}) \gamma_\rho u(p_1) = \frac{16p_1 \cdot p_2 (p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot k + p_2 \cdot k)}{p_1 \cdot k p_2 \cdot k}. \end{aligned}$$

Il termine di interferenza non è soppresso rispetto a $|m_{r1}|^2$ nel limite collineare e, inoltre, è l'unico termine con singolarità soft: non è possibile dedurre alcun comportamento IR basandosi sullo studio dei diagrammi. Al contrario, in una gauge fisica esiste una corrispondenza precisa tra i diagrammi e i contributi IR-amplificati. Lo vediamo eseguendo lo stesso calcolo nella gauge del cono di luce (assiale), ovvero quella in cui $\epsilon_\mu \epsilon_\nu^* =$

$-g_{\mu\nu} + (n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu)/n \cdot k$. Con $d_1 = 2p_1 \cdot k$ e $d_2 = 2p_2 \cdot k$ abbiamo

$$\begin{aligned}
d_1^2 |m_{r1}|^2 &= \bar{u}(p_1) \gamma^\mu (\not{p}_1 + \not{k}) \gamma^\rho v(p_2) \bar{v}(p_2) \gamma_\rho (\not{p}_1 + \not{k}) \gamma^\sigma u(p_1) \left[g_{\mu\sigma} - \frac{n_\mu k_\sigma + n_\sigma k_\mu}{n \cdot k} \right] = \\
&\text{tr} \left[\not{p}_1 \gamma^\mu (\not{p}_1 + \not{k}) \gamma^\rho \not{p}_2 \gamma_\rho (\not{p}_1 + \not{k}) \gamma^\sigma \right] [g_{\mu\sigma} - \dots] = \\
&- 2 \text{tr} \left[\not{p}_1 \gamma^\mu (\not{p}_1 + \not{k}) \not{p}_2 (\not{p}_1 + \not{k}) \gamma^\sigma \right] [g_{\mu\sigma} - \dots] = \\
&32p_1 \cdot kp_2 \cdot k + \frac{2}{n \cdot k} \text{tr} \left[\not{p}_1 \not{k} \not{p}_1 \not{p}_2 (\not{p}_1 + \not{k}) \not{n} + \not{p}_1 \not{n} (\not{p}_1 + \not{k}) \not{p}_2 \not{p}_1 \not{k} \right] = \\
&32p_1 \cdot kp_2 \cdot k + \frac{4p_1 \cdot k}{n \cdot k} \text{tr} \left[\not{p}_1 \not{p}_2 (\not{p}_1 + \not{k}) \not{n} + \not{p}_1 \not{n} (\not{p}_1 + \not{k}) \not{p}_2 \right] = \\
&32p_1 \cdot kp_2 \cdot k + \frac{32p_1 \cdot k}{n \cdot k} (2p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot n + p_1 \cdot p_2 n \cdot k + p_1 \cdot np_2 \cdot k - p_1 \cdot kp_2 \cdot n),
\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
|m_{r1}|^2 &= 8 \left[\frac{p_2 \cdot k}{p_1 \cdot k} + \frac{2p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot n + p_1 \cdot p_2 n \cdot k + p_1 \cdot np_2 \cdot k - p_1 \cdot kp_2 \cdot n}{p_1 \cdot kn \cdot k} \right], \\
|m_{r2}|^2 &= 8 \left[\frac{p_1 \cdot k}{p_2 \cdot k} + \frac{2p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot n + p_1 \cdot p_2 n \cdot k + p_2 \cdot np_1 \cdot k - p_2 \cdot kp_1 \cdot n}{p_2 \cdot kn \cdot k} \right].
\end{aligned}$$

L'interferenza risulta:

$$\begin{aligned}
d_1 d_2 m_{r1} m_{r2}^* &= \bar{u}(p_1) \gamma^\mu (\not{p}_1 + \not{k}) \gamma^\rho v(p_2) \bar{v}(p_2) \gamma^\sigma (-\not{p}_2 - \not{k}) \gamma_\rho u(p_1) \left[g_{\mu\sigma} - \frac{n_\mu k_\sigma + n_\sigma k_\mu}{n \cdot k} \right] = \\
&- \text{tr} \left[\not{p}_1 \gamma^\mu (\not{p}_1 + \not{k}) \gamma^\rho \not{p}_2 \gamma^\sigma (\not{p}_2 + \not{k}) \gamma_\rho \right] [g_{\mu\sigma} - \dots] = \\
&2 \text{tr} \left[\not{p}_1 \gamma^\mu (\not{p}_1 + \not{k}) (\not{p}_2 + \not{k}) \gamma^\sigma \not{p}_2 \right] [g_{\mu\sigma} - \dots] = \\
&32p_1 \cdot p_2 (p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot k + p_2 \cdot k) - \frac{2}{n \cdot k} \text{tr} \left[\not{p}_1 \not{k} \not{p}_1 (\not{p}_2 + \not{k}) \not{n} \not{p}_2 + \not{p}_1 \not{n} (\not{p}_1 + \not{k}) \not{p}_2 \not{k} \not{p}_2 \right] = \\
&32p_1 \cdot p_2 (p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot k + p_2 \cdot k) - \frac{4}{n \cdot k} \left\{ p_1 \cdot k \text{tr} \left[\not{p}_1 (\not{p}_2 + \not{k}) \not{n} \not{p}_2 \right] + p_2 \cdot k \text{tr} \left[\not{p}_1 \not{n} (\not{p}_1 + \not{k}) \not{p}_2 \right] \right\} = \\
&32p_1 \cdot p_2 (p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot k + p_2 \cdot k) - \frac{16}{n \cdot k} [p_1 \cdot np_2 \cdot k (2p_1 \cdot p_2 + p_2 \cdot k - p_1 \cdot k) + \\
&\quad p_2 \cdot np_1 \cdot k (2p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot k - p_2 \cdot k) + n \cdot kp_1 \cdot p_2 (p_1 \cdot k + p_2 \cdot k)].
\end{aligned}$$

Prendendo ora il limite collineare $k \rightarrow ap_1 = \frac{1-z}{z} p_1$ si ottiene

$$\begin{aligned}
|m_{r1}|^2 &\rightarrow 8 \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot k} \frac{a^2 + 2a + 2}{a} = 8 \frac{s}{t} \frac{1+z^2}{1-z}, \\
d_1 d_2 m_{r1} m_{r2}^* &\rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Il limite soft $k \rightarrow 0$ è leggermente più complesso:

$$\begin{aligned}
|m_{r1}|^2 &\rightarrow 16 \frac{p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot n}{n \cdot kp_1 \cdot k}, \\
|m_{r2}|^2 &\rightarrow 16 \frac{p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot n}{n \cdot kp_2 \cdot k}, \\
2m_{r2} m_{r2}^* &\rightarrow 16 p_1 \cdot p_2 \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot kp_2 \cdot k} - 16 \frac{p_1 \cdot p_2 p_1 \cdot n}{p_1 \cdot kn \cdot k} - 16 \frac{p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot n}{p_2 \cdot kn \cdot k},
\end{aligned}$$

che fornisce gli stessi risultati di prima.

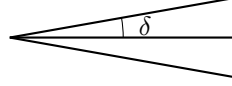
Nella gauge assiale vediamo che i limiti collineari $\vec{k} \parallel \vec{p}_i$ derivano unicamente da $|m_{ri}|^2$, mentre sia l'interferenza che i diagrammi al quadrato contribuiscono ai limiti soft, coerentemente con il conteggio diagrammatico.

10 - Sezione d'urto dei Jet

Nota. In questa sezione sono scritti alcuni calcoli, ma nel pdf è presente del codice Mathematica.

Jet Stermann-Weinberg per $e^+e^- \rightarrow \text{adroni}$

- Parametrizzazione degli impulsi: $q = \sqrt{s}(1, \vec{0})$, $k_3 = \frac{\sqrt{s}x_3}{2}(1, 0, 0, 1)$ (gluone), $k_i = \frac{\sqrt{s}x_i}{2}(1, \sin \theta_{ig}, 0, \cos \theta_{ig})$, con i vincoli cinematici $\sum_{i=1}^3 x_i = 2$, $\sum_{i=1}^3 x_i \sin \theta_{ig} = 0$, e $x_3 + \sum_{i=1}^2 x_i \cos \theta_{ig} = 0$. Si ricordi che con questa scelta di assi $\theta_{12} = \theta_{1g} - \theta_{2g}$ e che $\cos \theta_{ij} = 1 - \frac{2(1-x_k)}{x_i x_j}$ (dedotto usando $(q - k_i - k_j)^2 = 0$).
- Si hanno due jet Stermann-Weinberg se $E_i \leq \sqrt{s}\epsilon$ e/o se $\theta_{ij} \leq 2\delta$, dove δ è il semi-angolo del cono che circonda le particelle:



- Mappatura di queste condizioni sul piano (x_1, x_2) : $E_i \leq \epsilon\sqrt{s} \implies x_i \leq 2\epsilon$, dove $i = 1, 2, 3$ e $x_3 = 2 - x_1 - x_2$. Quindi, $\theta_{ij} \leq 2\delta \implies 1 - \frac{2(1-x_k)}{x_i x_j} \geq \cos(2\delta)$, dove di nuovo $i, j, k = 1, 2, 3$.

Riferendosi al grafico (vedi sotto), si hanno sei curve:

- A: dove $x_2 = 2 - x_1 - 2\epsilon$
- B: dove $x_1 = 2\epsilon$
- C: dove $x_2 = 2\epsilon$
- D: dove $\cos \theta_{1g} = \cos(2\delta)$
- E: dove $\cos \theta_{2g} = \cos(2\delta)$
- F: dove $\cos \theta_{12} = \cos(2\delta)$

Si noti che è possibile integrare solo nella metà della parte $x_2 \geq 1 - x_1$ del grafico a causa della simmetria $x_1 \leftrightarrow x_2$ dell'integrando: in questo modo, C ed E sono ridondanti.

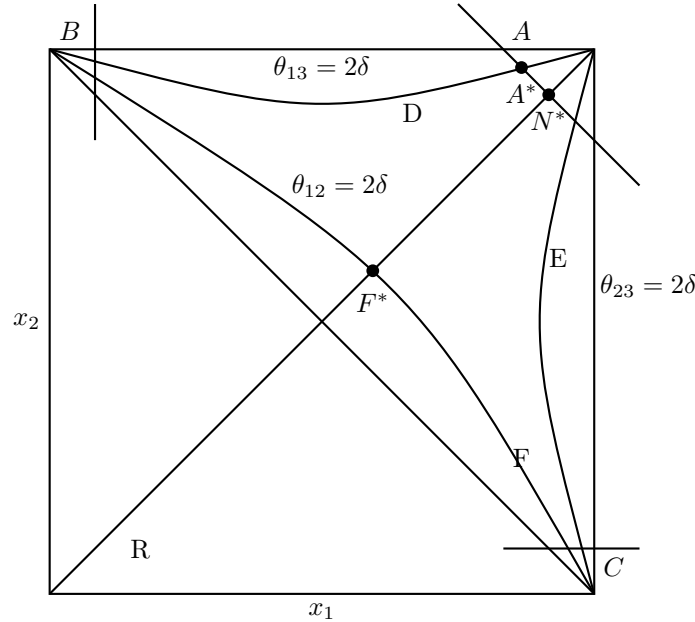


Figure 6:

Il punto F^* risolve il sistema $x_1 = x_2$ e $1 - 2(2x_1 - 1)/x_1^2 = \cos(2\delta)$ (usando già $x_2 = x_1$). Il punto A^* risolve il sistema per D e A, mentre il punto N^* risolve $x_1 = x_2$ e $x_2 = 2 - x_1 - 2\epsilon$.

Ora, finalmente, calcoliamo f_3 , che è la frazione a 3 jet: questa è la sezione d'urto completamente differenziale a NLO integrata nella regione a 3 jet, ovvero l'area tra $B - D - A - R - F$.

$$\begin{aligned}
I &\equiv I_1 + I_2 + I_3, \quad \text{dove} \quad I_1 \equiv \int_{2\epsilon}^{x_1(F^*)} dx_1 \int_{F(x_1)}^{D(x_1)} dx_2 i(x_1, x_2) \\
I_2 &\equiv \int_{x_1(F^*)}^{x_1(A^*)} dx_1 \int_{x_1}^{D(x_1)} dx_2 i(x_1, x_2) \\
I_3 &\equiv \int_{x_1(A^*)}^{x_1(N^*)} dx_1 \int_{x_1}^{2-x_1-2\epsilon} dx_2 i(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

dove $F(x_1)$ è la x_2 che risolve l'eq. per F, e $D(x_1)$ è la x_2 che risolve quella per D. L'integrando è:

$$i(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

(Il vincolo $x_1 + x_2 > 1$ è implicito nei limiti).

I risultati di questo calcolo sono forniti nel file Mathematica allegato `3jet_fraction_SW.nb`. Tenendo conto che $\frac{1}{\sigma} \frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2} = C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} i(x_1, x_2) + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$, si ha:

$$\begin{aligned}
f_3 &= \frac{1}{\sigma} \int_{\text{regione 3-jet}} \frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2} dx_1 dx_2 \\
&= \frac{C_F \alpha_s}{2\pi} 2I \\
&= 8C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[-\frac{7}{16} + \frac{\pi^2}{12} + \log \delta \left(\frac{3}{4} + \log(2) + \log \epsilon \right) - (1 + \log \delta) \epsilon + \left(\frac{3}{2} + 2 \log \delta \right) \epsilon^2 \right]
\end{aligned}$$

(dovuto alla simmetria $x_1 \leftrightarrow x_2$, poiché abbiamo integrato solo in metà del triangolo).

$f_2 = 1 - f_3$. Questo coincide con l'eq. (3.31) di ESW.

Algoritmo JADE per Jet da $e^+e^- \rightarrow \text{adroni}$

- Parametrizzazione degli impulsi come segue: $q = \sqrt{s}(1, \vec{0})$, $k_3 = \frac{\sqrt{s}}{2}x_3(1, 0, 0, 1)$, $k_i = \frac{\sqrt{s}x_i}{2}(1, 0, \sin \theta_{ig}, \cos \theta_{ig})$ con i vincoli $\sum_{i=1}^3 x_i = 2$, $\sum_{i=1}^2 x_i \sin \theta_{ig} = 0$, e $x_3 + \sum_{i=1}^2 x_i \cos \theta_{ig} = 0$. Si ricordi che $\cos \theta_{ij} = 1 - \frac{2(1-x_k)}{x_i x_j}$.
- Si hanno tre jet JADE se $s_{ij} > ys$ per tutti gli $i, j = 1, \dots, 3$, dove $s_{ij} \equiv (k_i + k_j)^2$. Si noti che $s_{ij} = \frac{\sqrt{s}}{2} \frac{\sqrt{s}}{2} 2x_i x_j (1 - \cos \theta_{ij}) = s x_i x_j \frac{1 - \cos \theta_{ij}}{2}$.
- Mappatura di queste condizioni sul piano $x_1 - x_2$:

$$x_i x_j (1 - \cos \theta_{ij}) \geq 2y \iff (1 - x_k) \geq y, \quad \forall k = 1, \dots, 3.$$

Riferendosi al grafico (vedi sotto), le curve A_i rappresentano le equazioni $1 - x_i = y$, e quindi i punti A, B e C hanno coordinate:

$$A = (2y, 1 - y), \quad B = \left(\frac{1+y}{2}, \frac{1+y}{2} \right), \quad C = (1 - y, 1 - y).$$

Ora la procedura è analoga a quanto fatto per i jet SW (Sternan-Weinberg). Si calcoli $2I \equiv I_1 + I_2$, dove:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{2y}^{\frac{1+y}{2}} dx_1 \int_{1+y-x_1}^{1-y} dx_2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \\
I_2 &= \int_{\frac{1+y}{2}}^{1-y} dx_1 \int_{x_1}^{1-y} dx_2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}
\end{aligned}$$

I risultati per questi integrali sono forniti nel file Mathematica allegato. Ora, tenendo conto che (nella regione a 3 jet):

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2} = C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} + \mathcal{O}(\alpha_s^2),$$

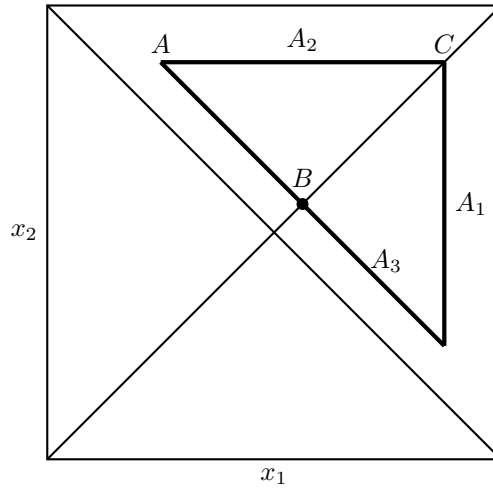


Figure 7:

si ottiene:

$$\begin{aligned}
 f_3 &= \frac{1}{\sigma} \int_{3j} \frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2} dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{C_F \alpha_s}{2\pi} 2I \\
 &= \frac{C_F \alpha_s}{2\pi} \left[\frac{5}{2} - \frac{\pi^2}{3} - 6y - \frac{9}{2}y^2 + 2 \ln \left(\frac{y}{1-y} \right)^2 + (3-6y) \ln \left(\frac{y}{1-2y} \right) + 4\text{Li}_2 \left(\frac{y}{1-y} \right) \right].
 \end{aligned}$$

$f_2 = 1 - f_3$. Questo coincide con la (3.35) di ESW.

11 - Approfondimento sulla Teoria delle Perturbazioni nel regime IR

Il calcolo di f_3 con i jet di **Sterman-Weinberg** (o **JADE**, ...) permette una breve discussione su come si comporta la teoria delle perturbazioni nelle regioni dello spazio delle fasi sensibili alle emissioni soft e/o collineari.

Nella definizione di Sterman-Weinberg, abbiamo $f_3 \propto \alpha_s \log \delta \log \epsilon + \dots$. La presenza di δ, ϵ assicura che la regione a 3 jet non tocchi il confine IR-divergente dello spazio delle fasi ($x_1 = 1$ e/o $x_2 = 1$), schermato efficacemente le divergenze IR dell'integrando $(x_1^2 + x_2^2)/(1-x_1)/(1-x_2)$, e lasciando una dipendenza logaritmica da ϵ, δ nel risultato finale. ϵ agisce quindi come regolatore per la divergenza soft del gluone, mentre δ è il regolatore per le divergenze IR dove il gluone è collineare a q o $\bar{q}$.

Se scegliamo $\delta, \epsilon \ll 1$, f_3 diverge logaritmicamente; pertanto, non ha più senso parlare di una "frazione" di eventi (che dovrebbe essere compresa tra 0 e 1). Al contrario, per ϵ, δ sufficientemente grandi, $f_3 \ll f_2$ e la previsione perturbativa è affidabile.

Il motivo per cui il calcolo perde significato quando δ, ϵ tendono verso la regione IR è che il risultato per f_3 si basa su una previsione perturbativa al primo ordine α_s^1 , ma trascura gli ordini perturbativi successivi che, nella regione IR, forniscono contributi non trascurabili al risultato.

Per visualizzare la situazione, supponiamo l'emissione di un gluone con energia $\sim \epsilon\sqrt{s} \ll \sqrt{s}$ e ad un angolo $\sim \delta \ll 1$. Come abbiamo visto, questa configurazione comporta un fattore $\alpha_s \log \delta \log \epsilon$. L'emissione di n gluoni con energia $\sim \epsilon\sqrt{s}$ e ad un angolo $\sim \delta$ porterà a un fattore $(\alpha_s \log \delta \log \epsilon)^n$.

Per quanto piccolo possa essere l'accoppiamento (ad esempio, $\alpha_s \sim 0.118$ a 91 GeV), con ϵ e δ sufficientemente piccoli, si può sempre raggiungere la condizione $\alpha_s \log \delta \log \epsilon \sim 1$. Da ciò è chiaro che non si può troncare in modo affidabile la teoria delle perturbazioni a un ordine fisso α_s^n (ovvero, gli ordini successivi $\alpha_s^{n+1}, \dots$ forniscono contributi dello stesso ordine di grandezza).

Questo si riassume dicendo che l'accoppiamento "efficace" nella regione IR è in realtà $\alpha_s \log \delta \log \epsilon$, e che la teoria delle perturbazioni "fallisce" nella regione IR.

Per superare questo problema, ciò che viene comunemente impiegato è una **RISOMMAZIONE** di questi contributi logaritmici a tutti gli ordini in α_s ; in altre parole, si considera un numero arbitrario di emissioni soft e collineari e si sommano i loro contributi alla sezione d'urto, ottenendo risultati fisicamente significativi. Le moderne tecniche di risommazione coinvolgono metodi analitici o numerici (ad esempio, **PARTON SHOWER MONTE CARLO**, come PYTHIA, HERWIG o SHERPA...).

È chiaro che la necessità di sommare i contributi di ordine superiore esiste solo per osservabili sensibili alla regione IR. Più un'osservabile è inclusiva sullo spazio delle fasi (ad esempio, la sezione d'urto totale, che include tutto lo spazio delle fasi) o più un'osservabile è **INSENSIBILE** alla regione IR (ad esempio, f_3 con ϵ, δ sufficientemente grandi, così da selezionare solo emissioni di gluoni "hard" e a grande angolo), più la teoria delle perturbazioni a ordine fisso è affidabile, e quindi le correzioni α_s^{N+1} sono soppresse rispetto ai contributi α_s^N .

Come esempio di ciò, si consideri il fatto che in $e^+e^- \rightarrow 2$ jet a NLO, si ha:

$$(\sigma_{\text{NLO}} - \sigma_{\text{LO}})/\sigma_{\text{LO}} = \frac{\alpha_s}{4\pi} 3C_F \sim 3\% \ll 1$$

Allo stesso modo, quando $\epsilon, \delta \gtrsim 0.1$, la frazione f_3 , che è $\mathcal{O}(\alpha_s)$, è $\ll f_2$, che è $\mathcal{O}(1)$. In quest'ultimo caso, con $\delta, \epsilon \gtrsim 0.1$, ogni ulteriore emissione di gluone contribuisce con un fattore $\alpha_s \log \delta \log \epsilon \ll 1$, che è perturbativamente soppresso.

12 - Studio approfondito sulle distribuzioni cinematiche

Il calcolo della sezione d'urto σ fornisce informazioni importanti ma parziali sul processo di scattering: nello specifico, non dice nulla sulla distribuzione delle particelle nello stato finale.

È quindi conveniente definire delle osservabili X , dipendenti dagli impulsi delle particelle coinvolte nello scattering, che caratterizzino più accuratamente la "forma" (shape) di un evento, assumendo valori diversi a seconda della differente cinematica delle particelle.

Per prima cosa, introduciamo una notazione comoda: $B \equiv |\mathcal{M}_b|^2$; $V \equiv 2\text{Re}(\mathcal{M}_b^* \mathcal{M}_v)$; $R \equiv |\mathcal{M}_r|^2$. In termini di queste quantità, abbiamo:

$$\sigma_{\text{LO}} = \frac{1}{2s} \int d\Phi_n B \quad ; \quad \sigma_{\text{NLO}} = \frac{1}{2s} \int d\Phi_n (B + V) + \frac{1}{2s} \int d\Phi_{n+1} R$$

per lo scattering di 2 particelle che producono n particelle al leading order.

La **sezione d'urto CUMULATIVA** nell'osservabile X è definita come la sezione d'urto proveniente dalla regione dello spazio delle fasi dove X è minore di un certo valore numerico x . Al LO e NLO, essa è:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{LO}}(x) &= \frac{1}{2s} \int d\Phi_n B \Theta(x - X(\Phi_n)) \\ \sigma_{\text{NLO}}(x) &= \frac{1}{2s} \int d\Phi_n (B + V) \Theta(x - X(\Phi_n)) + \frac{1}{2s} \int d\Phi_{n+1} R \Theta(x - X(\Phi_{n+1})) \end{aligned}$$

Nelle equazioni precedenti, x è un valore numerico, mentre $X(\Phi_m)$ rappresenta l'osservabile X espressa come funzione delle variabili dello spazio delle fasi a m particelle.

Di conseguenza, la **sezione d'urto DIFFERENZIALE** nell'osservabile X è definita come la derivata della sezione d'urto cumulativa rispetto a x :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{LO}}}{dx} &= \frac{1}{2s} \int d\Phi_n B \delta(x - X(\Phi_n)) \\ \frac{d\sigma_{\text{NLO}}}{dx} &= \frac{1}{2s} \int d\Phi_n (B + V) \underbrace{\delta(x - X(\Phi_n))}_{\text{FUNZIONE DI MISURA}} + \frac{1}{2s} \int d\Phi_{n+1} R \delta(x - X(\Phi_{n+1})) \end{aligned}$$

Come sottolineato riguardo alle divergenze IR, se e solo se il valore di x per le correzioni reali soft e collineari può essere combinato con quelle virtuali, allora la cancellazione delle divergenze IR dovuta al **teorema KLN** è garantita. In altre parole, solo se nei limiti soft e collineari $X(\Phi_{n+1})$ tende a $X(\Phi_n)$, le due funzioni di misura degenerano e i pesi reali e virtuali (separatamente divergenti) contribuiscono allo stesso "bin" di $d\sigma/dx$ (immaginato come un istogramma). In questo caso, l'osservabile X è detta **IR-safe**.

13 - Distribuzione della Thrust in eventi $q\bar{q}g$

Nota. In questa sezione sono presenti dei diagrammi (2) che non ho disegnato. Inoltre, nel file pdf è presente un pezzo di codice.

Si parta dalla definizione:

$$T = \max_{\hat{n}} \frac{\sum_{i=1}^m |\mathbf{p}_i \cdot \hat{n}|}{\sum_{i=1}^m |\mathbf{p}_i|} \quad \text{per } i = 1, \dots, m \text{ particelle nello stato finale.}$$

La variabile è $T = 1$ se si hanno solo $m = 2$ partoni (back-to-back), quindi $d\sigma_{LO}/dT \propto \delta(1-T)$, e analogamente per il contributo virtuale a $e^+e^- \rightarrow 2 \text{ jet}$.

Per $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$, si può mostrare (vedi sotto) che $T = \max(x_i)$, $i = 1, 2, 3$. Ciò implica $T \geq 2/3$. Calcoliamo quindi $d\sigma/dT$ nella regione $2/3 \leq T < 1$, che riceve contributi solo dalla correzione reale a $e^+e^- \rightarrow 2 \text{ jet}$ all'ordine $\mathcal{O}(\alpha_s)$.

$$\frac{d\sigma}{dT} = \sigma_B \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \int_0^1 dx_1 \int_{1-x_1}^1 dx_2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \delta(T - \max(x_1, x_2, \underbrace{2-x_1-x_2}_{=x_3}))$$

Il punto A ha coordinate $(2/3, 2/3)$. Si veda la figura seguente. Si può semplicemente integrare nella regione con $x_1 > x_2$ e moltiplicare per 2 alla fine, a causa della simmetria $x_1 \leftrightarrow x_2$ dell'elemento di matrice.

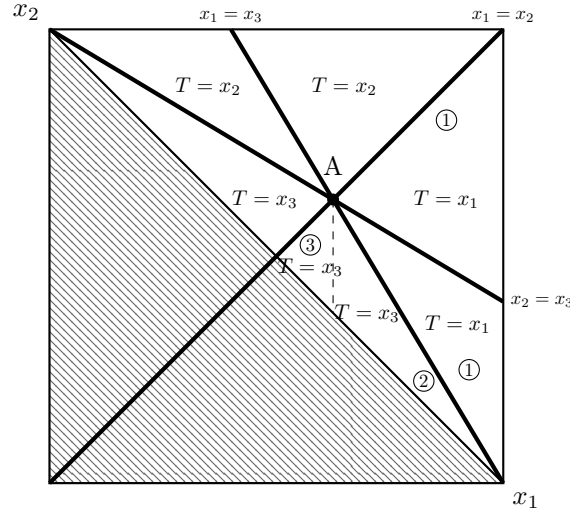


Figure 8:

Valutiamo i contributi rispettivamente dalle regioni 1, 2, 3:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{2/3}^1 dx_1 \int_{2(1-x_1)}^{x_1} dx_2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \delta(T - x_1) \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \delta(T - x_1) \Theta(x_1 > 2/3) \Theta(x_1 < 1) \Theta(x_1 > x_2) \Theta(x_2 > 2(1-x_1)) \\ &= \int_0^1 dx_2 \frac{x_2^2 + T^2}{(1-x_2)(1-T)} \Theta(T > 2/3) \Theta(T < 1) \Theta(T > x_2) \Theta(x_2 > 2(1-T)) \\ &= \int_{2(1-T)}^T dx_2 \frac{x_2^2 + T^2}{(1-x_2)(1-T)} \quad (2/3 < T < 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{2/3}^1 dx_1 \int_{1-x_1}^{2(1-x_1)} dx_2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \delta(T - (2 - x_1 - x_2)) \\
&= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \delta(T - 2 + x_1 + x_2) \Theta(x_1 > 2/3) \Theta(x_1 < 1) \Theta(x_2 > 1 - x_1) \Theta(x_2 < 2(1 - x_1)) \\
&= \int_0^1 dx_1 \frac{x_1^2 + (2 - x_1 - T)^2}{(1-x_1)(-1+x_1+T)} \Theta(x_1 > 2/3) \Theta(x_1 < 1) \Theta(x_1 < T) \Theta(T < 1) \\
&= \int_{2/3}^T dx_1 \frac{x_1^2 + (2 - x_1 - T)^2}{(1-x_1)(-1+x_1+T)}
\end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{1/2}^{2/3} dx_1 \int_{1-x_1}^{x_1} dx_2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \delta(T - (2 - x_1 - x_2)) \\
&= \int_0^1 dx_1 \frac{x_1^2 + (2 - x_1 - T)^2}{(1-x_1)(-1+x_1+T)} \Theta(x_1 < 2/3) \Theta(x_1 > 1/2) \Theta(x_1 > 2 - x_1 - T) \Theta(2 - T > 1) \\
&= \int_{1-T/2}^{2/3} dx_1 \frac{x_1^2 + (2 - x_1 - T)^2}{(1-x_1)(-1+x_1+T)}.
\end{aligned}$$

Sommando i tre contributi, otteniamo (*vedi notebook allegato*):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT} \Big|_{2/3 \leq T < 1} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \underbrace{2}_{\text{fattore 2 dalla regione } x_2 > x_1} (I_1 + I_2 + I_3) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \\
&= \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left[\frac{2(3T^2 - 3T + 2)}{T(1-T)} \ln \left(\frac{2T-1}{1-T} \right) - \frac{3(3T-2)(2-T)}{(1-T)} \right].
\end{aligned}$$

Nel limite $T \rightarrow 1$ (dove la distribuzione della thrust riceve contributi da emissioni soft e/o collineari) questa diventa:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT} \Big|_{2/3 \leq T < 1} \xrightarrow{T \rightarrow 1^-} \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left[\frac{4}{1-T} \ln \frac{1}{1-T} - \frac{3}{1-T} \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$$

quindi integrandola nell'intervallo $[T_0, T]$, con $T \sim 1$, otteniamo:

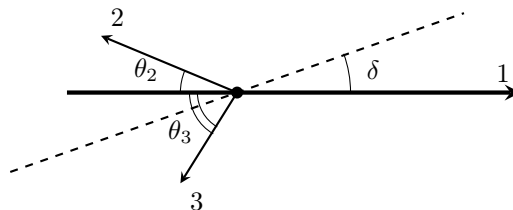
$$\begin{aligned}
\sigma(T_0 < \text{thrust} < T) &\sim \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left[\int_{T_0}^T dt \left(\frac{4}{1-t} \ln \frac{1}{1-t} - \frac{3}{1-t} \right) \right] \\
&= \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F [2 \ln^2(1-T) + 3 \ln(1-T)] + \text{costante}
\end{aligned}$$

I coefficienti di $\ln^2$ e $\ln$ sono gli stessi (calcolati in regolarizzazione dimensionale) che moltiplicano i poli $1/\epsilon^2$ e $1/\epsilon$ in $\sigma_R(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g)$, e sono il segnale delle divergenze IR soft-collineari che avvengono a $T \sim 1$ nel contributo della radiazione reale.

Nota. Vedi il codice Mathematica.

Infine, dobbiamo mostrare che, nel caso di $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$, la definizione di T coincide con $\max(x_i)$, per $i = 1, 2, 3$. Definiamo y_1, y_2, y_3 come la versione ordinata di x_1, x_2, x_3 , ovvero $y_1 = \max(x_i)$ e $y_3 = \min(x_i)$, cosicché $y_1 > y_2 > y_3$.

Poiché tre particelle con tri-impulso totale $\vec{0}$ giacciono su un piano, possiamo raffigurare un evento generico nel seguente modo:



dove abbiamo tenuto conto graficamente della gerarchia $y_1 > y_2 > y_3$ nella lunghezza delle frecce coinvolte.

Considerando $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_1$, si ha:

$$\sum_{i=1}^3 |\mathbf{p}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}| = p_1 + p_2 |\cos \theta_2| + p_3 |\cos \theta_3| \quad \text{dove } p_i \equiv |\mathbf{p}_i|.$$

La conservazione dell'impulso nella direzione $\hat{\mathbf{e}}_1$ implica che $p_1 = p_2 |\cos \theta_2| + p_3 |\cos \theta_3|$, quindi $\sum_{i=1}^3 |\mathbf{p}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}| = 2p_1$ in questo caso.

Di conseguenza, per $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_1$:

$$T = \frac{\sum_i |\mathbf{p}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}|}{\sum_i |\mathbf{p}_i|} = \frac{2p_1}{\sum_i p_i} = \frac{2y_1}{2} = y_1 = \max(x_i)$$

dove negli ultimi passaggi abbiamo usato $p_i = \frac{\sqrt{s}}{2} x_i$ e $\sum_i x_i = 2$.

Dobbiamo ancora mostrare che se $\hat{\mathbf{n}} \neq \hat{\mathbf{e}}_1$ il valore della thrust diminuisce, cosicché $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_1$ sia la direzione che realizza la condizione di $\max_{\hat{\mathbf{n}}}$ implicita nella definizione di T .

Se consideriamo $\hat{\mathbf{n}}$ che forma un angolo δ rispetto a $\hat{\mathbf{e}}_1$, abbiamo:

$$|\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}| = p_1 \cos \delta \quad ; \quad |\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}| = p_2 \cos(\theta_2 - \delta) \quad ; \quad |\mathbf{p}_3 \cdot \hat{\mathbf{n}}| = p_3 \cos(\theta_3 + \delta).$$

Sviluppando per piccoli valori di δ e mantenendo i contributi $\mathcal{O}(\delta^2)$, otteniamo:

$$|\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}| \sim p_1(1 - \delta^2/2) \quad ; \quad |\mathbf{p}_k \cdot \hat{\mathbf{n}}| \sim p_k (\cos \theta_k (1 - \delta^2/2) \pm \sin \theta_k \delta)$$

per $k = 2, 3$ (con il segno $+$ per $k = 2$ e il segno $-$ per $k = 3$).

Quindi:

$$\sum_i |\mathbf{p}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}| = 2p_1(1 - \delta^2/2) + \delta(p_2 \sin \theta_2 - p_3 \sin \theta_3) \quad (102)$$

dove $(p_2 \sin \theta_2 - p_3 \sin \theta_3) = 0$ per la conservazione dell'impulso nella direzione $\perp$ a $\hat{\mathbf{e}}_1$ nel piano di scattering. quindi $T = y_1(1 - \delta^2/2) < y_1$, cioè, allontanandosi dalla direzione di $\hat{\mathbf{e}}_1$, il valore della thrust diminuisce $\implies$ il $\max_{\hat{\mathbf{n}}}$ si ha per $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_1$ e $T = \max(x_i)$.

Avendo dedotto l'espressione per $d\sigma_R/dT$, possiamo scrivere direttamente la distribuzione totale NLO, incluso l'endpoint $T = 1$.

A $T = 1$ otteniamo, oltre al reale, un contributo di Born $d\sigma_B/dT = \sigma_B \delta(1 - T)$ e un contributo virtuale $d\sigma_V/dT = \sigma_V \delta(1 - T)$; tuttavia, poiché $\sigma_V = -\infty$, è necessario dare un senso all'espressione precedente.

Iniziamo riscrivendo il contributo reale come:

$$\frac{d\sigma_R}{dT} = \sigma_B \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left[4 \frac{\ln(1/(1-T))}{1-T} - 3 \frac{1}{1-T} + g(T) \right] \Theta(T \geq 2/3)$$

dove la funzione $g(T)$ è data da:

$$g(T) = \frac{2}{T(1-T)} [(2 - 3T + 3T^2) \ln(2T - 1) - (2 - 5T + 3T^2) \ln(1 - T)] \quad (103)$$

ed è **integrabile** nell'intervallo $T \in [2/3, 1]$.

Per una generica funzione $H(T)$ singolare in $T = 1$, introduciamo la cosiddetta "**prescrizione più**" (o "distribuzione più"), definita come:

$$\int_0^1 dT [H(T)]_+ f(T) \equiv \int_0^1 dT H(T) [f(T) - f(1)] \quad \rightarrow \text{integrabile in } T = 1.$$

Essa sostanzialmente prende una distribuzione singolare $H(T)$ e ne sottrae l'integrale (divergente) all'endpoint $T = 1$, come si può vedere riscrivendo quanto sopra nel seguente modo (sebbene matematicamente inadeguato):

$$= \int_0^1 dT \left[H(T) - \delta(1 - T) \left(\int_0^1 dy H(y) \right) \right] f(T).$$

Vediamo immediatamente che la prescrizione più descrive precisamente la cancellazione fisica delle singolarità IR tra reale e virtuale. Il contributo reale è dato da una distribuzione divergente in $T \sim 1$ (rappresentata da $H(T)$ sopra), ma, a causa della **IR-safety** dell'osservabile T , questa divergenza è esattamente cancellata da un contributo negativo infinito che vive all'endpoint $T = 1$, che è il virtuale. La somma dei due contributi è integrabile in $T \sim 1$.

Queste considerazioni ci permettono finalmente di scrivere la **distribuzione NLO**:

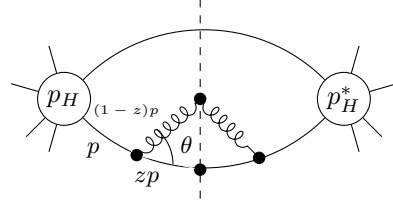
$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{NLO}}{dT} &\equiv \frac{d\sigma_B + d\sigma_R + d\sigma_V}{dT} \\ &= \sigma_B \left[\delta(1-T) + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left[4 \left(\frac{\ln(1/(1-T))}{1-T} \right)_+ - 3 \left(\frac{1}{1-T} \right)_+ + g(T) + K\delta(1-T) \right] \right] \Theta(T \geq 2/3) \end{aligned}$$

dove K è il contributo finito (cioè non IR-divergente) del virtuale, e può essere fissato semplicemente per normalizzazione, ovvero richiedendo che:

$$\int_0^1 dT \frac{d\sigma_{NLO}}{dT} = \sigma_{NLO} = \sigma_B \left[1 + \frac{3}{4} \frac{\alpha_s}{\pi} C_F \right].$$

14 - Deep Inelastic Scattering: Violazione dello Scaling di Bjorken ed Equazione DGLAP

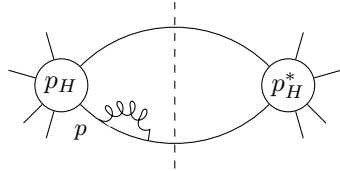
Come precedentemente menzionato per $e^+e^- \rightarrow$ adroni, le emissioni IR (soft e/o collineari) sono caratterizzate da scale di tempo e distanza molto più grandi di quelle dello scattering duro descritto dal termine di Born. Ciò si riflette nel fatto che la dinamica di una radiazione collineare può essere descritta **indipendentemente** dal processo duro che ha generato la gamba emittente; in altre parole, essa è **fattorizzata** rispetto al processo di produzione:



$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sigma_R \equiv \sigma_R^{coll} = \sigma_H \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^{q^2} \frac{dk_t^2}{k_t^2} \int_0^1 dz C_F \frac{1+z^2}{1-z} \quad (104)$$

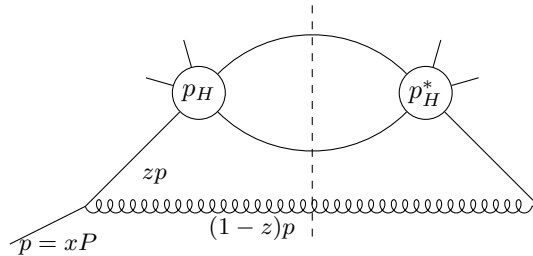
dove $k_t = E \sin \theta \sim E\theta$. La funzione di z dipende solo dall'identità dei partoni coinvolti e né dalla sezione d'urto di produzione σ_H né dalla cinematica specifica (è chiamata **kernel collineare di Altarelli-Parisi**, noto anche come "*splitting function*"). Qui, z rappresenta la frazione dell'impulso di p trasportata dal quark emesso.

Per un'emissione virtuale collineare, avremmo un peso uguale e opposto a quello reale, così da cancellare esattamente le divergenze IR, come mostrato esplicitamente per $e^+e^- \rightarrow$ adroni:



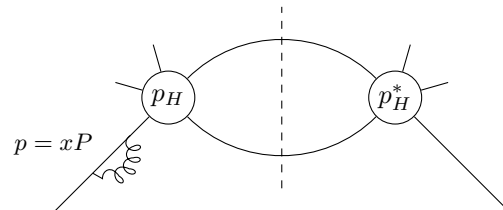
$$\sigma_V^{coll} = -\sigma_H \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^{q^2} \frac{dk_t^2}{k_t^2} \int_0^1 dz C_F \frac{1+z^2}{1-z} \quad \text{con } \sigma_R^{coll} + \sigma_V^{coll} = 0. \quad (105)$$

Nel caso di radiazione collineare nello **stato iniziale**, come avviene nelle correzioni QCD al DIS, la situazione è diversa perché la radiazione avviene **PRIMA** dello scattering di Born; il contributo reale fornisce:



$$\sigma_R^{coll} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^{q^2} \frac{dk_t^2}{k_t^2} \int_0^1 dz C_F \frac{1+z^2}{1-z} \int dx f_q(x) \sigma_H(xzP) \quad (106)$$

mentre dal contributo virtuale otteniamo:



$$\sigma_V^{coll} = -\frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^{q^2} \frac{dk_t^2}{k_t^2} \int_0^1 dz C_F \frac{1+z^2}{1-z} \int dx f_q(x) \sigma_H(xP) \quad (107)$$

da cui la correzione radiativa nel limite collineare è:

$$\sigma_{R+V}^{coll} = \underbrace{\frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^{Q^2} \frac{dk_t^2}{k_t^2} \int dx f_q(x)}_{=\infty!!} \int_0^1 dz \underbrace{\left[C_F \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right) [\sigma_H(xzP) - \sigma_H(xP)] \right]}_{\equiv C_F \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right)_+ \sigma_H(xzP) \equiv P(z) \sigma_H(xzP)}$$

Possiamo riscrivere il contributo collineare combinato reale e virtuale in modo equivalente come:

$$\begin{aligned} \sigma_{R+V}^{COLL} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^{Q^2} \frac{dk_t^2}{k_t^2} \int dx f_q(x) \int_0^1 dz P(z) \sigma_H(xzP) \\ &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^{Q^2} \frac{dk_t^2}{k_t^2} \int dx f_q(x) \int_0^1 dz P(z) \int_0^1 dw \sigma_H(wP) \delta(w - xz) \\ &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \underbrace{\int_0^{Q^2} \frac{dk_t^2}{k_t^2} \int_0^1 dw \sigma_H(wP)}_{=\infty!!} \int_w^1 \frac{dz}{z} P(z) f_q\left(\frac{w}{z}\right) \end{aligned}$$

La sezione d'urto appare divergere nel limite collineare $k_t \rightarrow 0$ (**collineare UNSAFE**). Il problema deriva dal fatto che la sezione d'urto distingue configurazioni in cui è avvenuto uno splitting collineare da quelle in cui non è avvenuto.

Questo può essere aggirato mutuando un'idea dalla **teoria della rinormalizzazione**, dove i parametri nudi della teoria sono UV-divergenti, e la loro ridefinizione (sottraendo le infinità UV dei loop) dà origine a parametri rinormalizzati FINITI. Nel presente contesto, il parametro rilevante è la PDF $f_q(x)$, che viene interpretata come un parametro "nudo" contenente al suo interno l'infinita divergenza collineare che non si cancella in σ_{R+V}^{coll} . Essa deve quindi essere riscritta in termini di una PDF "**rinormalizzata**", che sia finita nel limite collineare.

Introduciamo una **scala NON FISICA** μ_F (la **scala di fattorizzazione**, analoga alla scala di rinormalizzazione per l'accoppiamento) e fattorizziamo le emissioni collineari dello stato iniziale con $k_t < \mu_F$ nella definizione della PDF:

$$\underbrace{f_q(w, \mu_F)}_{\text{IR-FINITE}} \equiv \underbrace{f_q(w)}_{\text{IR-DIVERGENTE}} + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^{\mu_F^2} \frac{dk_t^2}{k_t^2} \int_w^1 \frac{dz}{z} P(z) f_q\left(\frac{w}{z}\right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$$

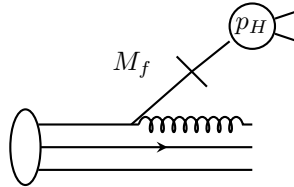
Ricordando che $\sigma_B = \int_0^1 dw f_q(w) \sigma_H(wP)$, otteniamo la sezione d'urto NLO:

$$\sigma_{NLO}^{coll} = \int_0^1 dw \sigma_H(wP) \left[f_q(w, \mu_F) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_{\mu_F^2}^{Q^2} \frac{dk_t^2}{k_t^2} \int_w^1 \frac{dz}{z} P(z) f_q\left(\frac{w}{z}, \mu_F\right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right] = \text{FINITE}$$

dove abbiamo usato il fatto che $f_q\left(\frac{w}{z}\right) = f_q\left(\frac{w}{z}, \mu_F\right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$ e che $\sigma_{NLO}^{coll} = \sigma_{B+R+V}^{coll}$.

Dopo questa procedura di fattorizzazione delle divergenze collineari dello stato iniziale, la PDF acquisisce una dipendenza dalla scala di energia μ_F , non solo da x (come accade con la costante di accoppiamento corrente) $\Rightarrow$ **VIOLAZIONE dello SCALING di Bjorken**.

La scala μ_F può essere pensata come un parametro che divide il calcolo in una regione "hard" dove la sezione d'urto elementare può essere calcolata in teoria delle perturbazioni, e una regione "collineare" dove le emissioni con $k_t < \mu_F$ sono assorbite nella PDF. Come nel diagramma:



Avendo introdotto la scala non fisica μ_F , deriviamo una condizione di indipendenza della sezione d'urto da μ_F . Possiamo scrivere una "**RGE**" (Renormalization Group Equation) rispetto alla scala μ_F , valida per qualsiasi $\sigma_H(wP)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_F^2 \frac{d\sigma_{NLO}^{coll}}{d\mu_F^2} = \int_0^1 dw \sigma_H(wP) \left[\mu_F^2 \frac{\partial f_q(w, \mu_F)}{\partial \mu_F^2} - \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_w^1 \frac{dz}{z} P(z) f_q\left(\frac{w}{z}, \mu_F\right) \right] \\ \Rightarrow \mu_F^2 \frac{\partial f_q(w, \mu_F)}{\partial \mu_F^2} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_w^1 \frac{dz}{z} P(z) f_q\left(\frac{w}{z}, \mu_F\right) \end{aligned}$$

dove $P(z) = C_F \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right)_+ + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$ per il caso non-singoletto.

Questa equazione è chiamata equazione di **Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP)**: essa descrive **PERTURBATIVAMENTE** (α_s^1) come la PDF dipenda dalla scala di energia. La "vera" PDF è $f(x, Q)$ con una dipendenza da Q predetta dalla DGLAP. In altre parole, le correzioni perturbative QCD violano lo scaling di Bjorken (logaritmicamente). La PDF è un oggetto non perturbativo, ma la sua dipendenza dalla scala è calcolabile perturbativamente.

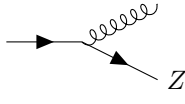
La discussione precedente assumeva uno splitting collineare $q \rightarrow q(z) + g(1-z)$. In generale, ci sono diverse possibilità in QCD: $q \rightarrow g(z) + q(1-z)$, $g \rightarrow q(z) + \bar{q}(1-z)$, e $g \rightarrow g(z) + g(1-z)$. Descrivendo tali splitting collineari $k \rightarrow i(z) + j(1-z)$ tramite opportune funzioni $P_{ik}(z)$, abbiamo in generale:

$$\mu_F^2 \frac{\partial f_i(w, \mu_F)}{\partial \mu_F^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_w^1 \frac{dz}{z} \sum_k P_{ik}(z) f_k \left(\frac{w}{z}, \mu_F \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$$

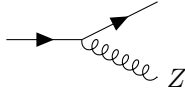
che è l'**equazione DGLAP completa** che tiene conto di tutte le combinazioni di sapore.

Si noti che la PDF del gluone entra nell'evoluzione della PDF dei quark ($i = q, k = g$), quindi questa equazione fornisce una prova indiretta della presenza del gluone. Si noti anche che il lato destro dell'equazione mostra che l'evoluzione con μ_F mescola contributi di sapori diversi (P_{ik} è una sorta di **matrice di mixing**); pertanto, le PDF non sono più viste come entità indipendenti.

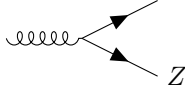
I kernel di splitting di Altarelli-Parisi rilevanti per l'evoluzione all'ordine α_s sono:



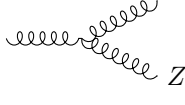
$$P_{qq}(z) = C_F \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right)_+ \quad (108)$$



$$P_{gq}(z) = C_F \frac{1+(1-z)^2}{z} \quad (109)$$



$$P_{qg}(z) = T_R [z^2 + (1-z)^2] \quad (110)$$



$$P_{gg}(z) = 2C_A \left(\frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right) + 2\pi\beta_0\delta(1-z) \quad (111)$$

dove $\beta_0 = \frac{11C_A - 4T_R N_F}{12\pi}$.

La presenza della **distribuzione-più** deriva dalla cancellazione della divergenza soft ($z \rightarrow 1$) tra i contributi reale e virtuale. Fisicamente, essa è necessaria affinché le **regole di somma** rispettate dalle PDF rimangano valide per qualsiasi scelta della scala μ_F . Per esempio:

$$\begin{aligned} \mu_F^2 \frac{d}{d\mu_F^2} \int_0^1 dw [f_u - f_{\bar{u}}](w, \mu_F) &= \mu_F^2 \frac{d}{d\mu_F^2} 2 = 0 \\ &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dw \int_w^1 \frac{dz}{z} \left[P_{qq}(z) f_u \left(\frac{w}{z}, \mu_F \right) + P_{qg}(z) f_g \left(\frac{w}{z}, \mu_F \right) \right. \\ &\quad \left. - P_{qq}(z) f_{\bar{u}} \left(\frac{w}{z}, \mu_F \right) - P_{qg}(z) f_g \left(\frac{w}{z}, \mu_F \right) \right] \\ &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dw \int_0^1 dz \int_0^1 dy P_{qq}(z) [f_u - f_{\bar{u}}](y, \mu_F) \delta(zy - w) \\ &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \underbrace{\int_0^1 dz P_{qq}(z)}_{=0} \int_0^1 dy [f_u - f_{\bar{u}}](y, \mu_F) = 0 \end{aligned}$$

perché $\int_0^1 dz P_{qq}(z) = 0$ (nello specifico: $\int_0^1 dz C_F \frac{1+z^2}{1-z} (1-1) = 0$), il che esprime la **conservazione del sapore** ad ogni scala μ_F .

Allo stesso modo, per rispettare la regola di somma dell'impulso a qualsiasi scala μ_F , richiediamo:

$$\mu_F^2 \frac{d}{d\mu_F^2} \int_0^1 dw w \left(\sum_{k=-N_F}^{N_F} f_k + f_g \right) (w, \mu_F) = 0$$

dove la somma è eseguita su tutti i sapori dei quark (e anti-quark). Sostituendo le equazioni di evoluzione, otteniamo:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dw w \int_w^1 \frac{dz}{z} \left[P_{qq}(z) \sum f_k \left(\frac{w}{z}, \mu_F \right) + 2N_F P_{qg}(z) f_g \left(\frac{w}{z}, \mu_F \right) \right. \\
&\quad \left. + P_{gq}(z) \sum f_k \left(\frac{w}{z}, \mu_F \right) + P_{gg}(z) f_g \left(\frac{w}{z}, \mu_F \right) \right] \\
&= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dw \int_0^1 dz \int_0^1 dy zy (P_{qq} + P_{gq})(z) \sum_{k=-N_F}^{N_F} f_k(y, \mu_F) \delta(zy - w) \\
&\quad + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dw \int_0^1 dz \int_0^1 dy zy (2N_F P_{qg} + P_{gg})(z) f_g(y, \mu_F) \delta(zy - w) \\
&= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dz z (P_{qq} + P_{gq})(z) \int_0^1 dy y \sum f_k(y, \mu_F) \\
&\quad + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dz z (2N_F P_{qg} + P_{gg})(z) \int_0^1 dy y f_g(y, \mu_F) = 0
\end{aligned}$$

Entrambi gli integrali in z sono zero, rispettando la regola di somma dell'impulso a tutte le μ_F ; esplicitamente:

$$\int_0^1 dz z (P_{qq} + P_{gq})(z) = C_F \int_0^1 dz \left[\frac{1+z^2}{1-z} (z-1) + \frac{1+(1-z)^2}{z} z \right] = 0 \quad (112)$$

$$\int_0^1 dz z (2N_F P_{qg} + P_{gg})(z) = 0 \quad (113)$$

Notazionalmente, si può introdurre un **prodotto di convoluzione** per descrivere le equazioni DGLAP in un modo più compatto e conveniente.

Definendo:

$$\begin{aligned}
[A \otimes B](x) &\equiv \int_0^1 dz \int_0^1 dy A(z) B(y) \delta(zy - x) \\
&= \int_x^1 \frac{dz}{z} A(z) B\left(\frac{x}{z}\right) \\
&= \int_x^1 \frac{dt}{t} A\left(\frac{x}{t}\right) B(t)
\end{aligned}$$

l'equazione DGLAP può essere riscritta come:

$$\mu_F^2 \frac{\partial f_i}{\partial \mu_F^2}(w, \mu_F) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \sum_k [P_{ik} \otimes f_k](w, \mu_F)$$

Il prodotto di convoluzione così definito è particolarmente utile perché si riduce a un **prodotto ordinario** sotto una trasformata integrale. Introducendo la **trasformata di Mellin**:

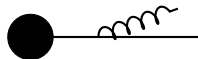
$$\hat{f}(N) \equiv \int_0^1 dx x^{N-1} f(x)$$

(che è essenzialmente una trasformata di Laplace $\mathcal{L}_N[f]$ con $e^{-t} \rightarrow x$), si ottiene:

$$\begin{aligned}
[\widehat{A \otimes B}](N) &= \int_0^1 dx x^{N-1} \int_0^1 dz \int_0^1 dy A(z) B(y) \delta(zy - x) \\
&= \int_0^1 dz z^{N-1} A(z) \int_0^1 dy y^{N-1} B(y) = \hat{A}(N) \cdot \hat{B}(N)
\end{aligned}$$

Questa tecnica costituisce la base per la soluzione analitica delle equazioni DGLAP.

Nel modello a partoni, $f_q(x)$ rappresenta la probabilità di estrarre un quark con impulso longitudinale x (in unità dell'impulso del protone P^μ) per subire l'interazione elementare con il fotone nel DIS. Questa procedura rende la sezione d'urto **COLLINEAR UNSAFE**, poiché distingue configurazioni in cui un singolo quark ha emesso un gluone collineare da quelle in cui non lo ha fatto. La situazione è identica a quanto avviene in uno splitting collineare nello stato finale:



se un'osservabile fosse sensibile solo all'impulso del quark.

Per $e^+e^- \rightarrow$ adroni, abbiamo visto come una sezione d'urto definita in termini di **jet** (geometrici/fisici) risolva il problema. I jet introducono parametri di "risoluzione" δ e ϵ ; le emissioni virtuali e soft/collineari sono entrambe "non risolte" e vengono quindi combinate, garantendo la **sicurezza IR** (IR safety). Questa procedura lascia nel calcolo una dipendenza logaritmica dai parametri di risoluzione.

Allo stesso modo, la fattorizzazione delle divergenze collineari dello stato iniziale nella definizione della PDF introduce un **parametro di risoluzione non fisico** μ_F . Le emissioni collineari al di sotto di questa scala vengono fattorizzate, lasciando una dipendenza logaritmica da μ_F nella PDF (che viene compensata ordine per ordine dai termini calcolati dalla sezione d'urto elementare a brevi distanze). Questo rende la sezione d'urto **IR (COLLINEAR) SAFE**.