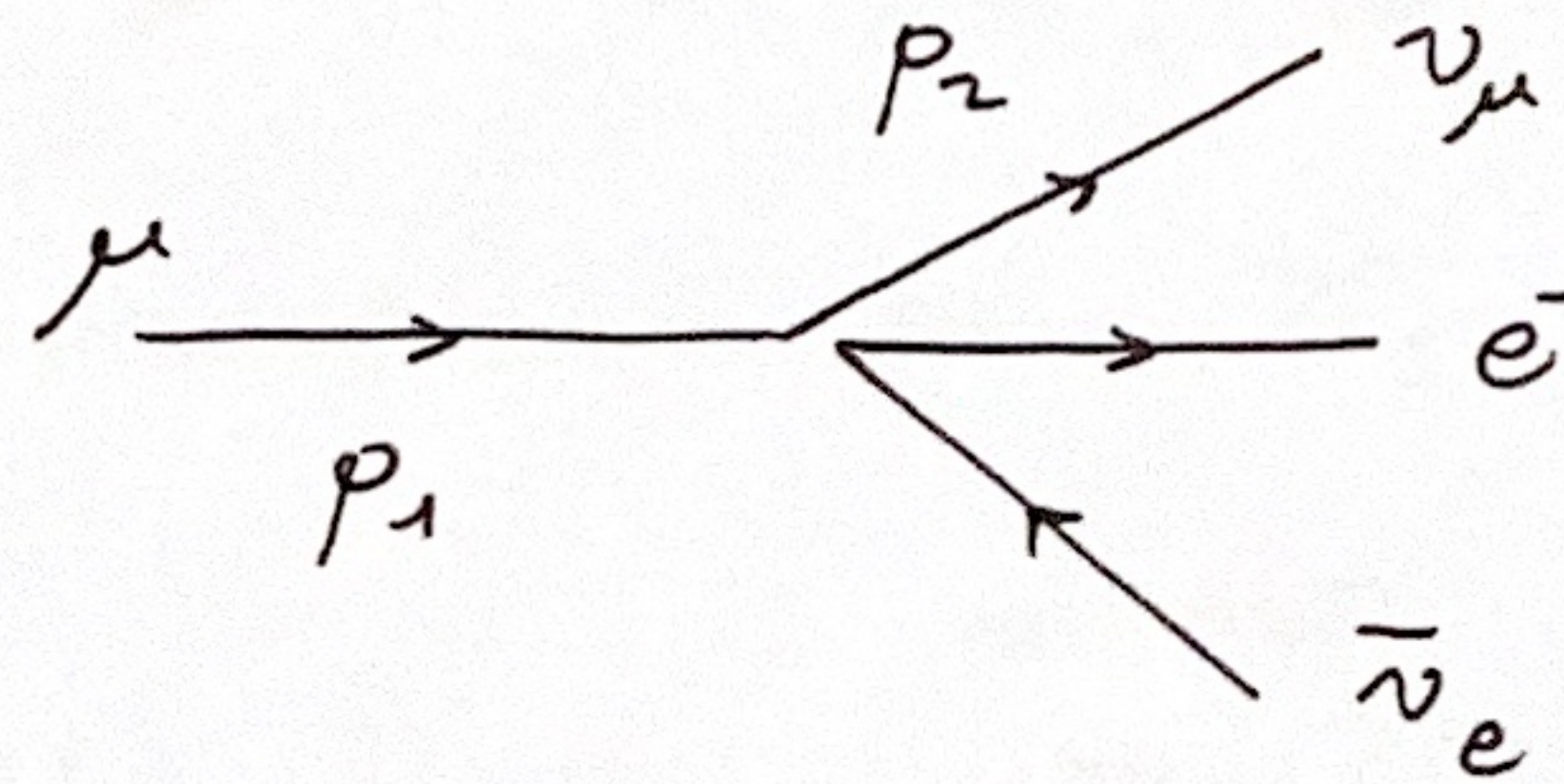


CALCOLIAMO IN MODO ESPlicito IL DECADIMENTO DEL MUONE:

$$\mu \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$



CALCOLIAMO L'ELEMENTO DI MATRICE (CONVENZIONI DEL PESKIN)

$$i\mathcal{M} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(p_2) \gamma^\mu (1-\gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (1-\gamma_5) v(p_4)$$

POICHÉ RICORDIAMO $\mathcal{L}_{\text{INT}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\mu (1-\gamma_5) \psi_\mu \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1-\gamma_5) \psi_e$.

CALCOLIAMO IL MODULO QUADRO PER IL PROCESSO NON POLARIZZATO:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{SPIN}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} \sum_s \left[\bar{u}(p_2) \gamma^\mu (1-\gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (1-\gamma_5) v(p_4) \right] \times \\ &\quad \times \left[\bar{v}(p_4) \gamma^\nu (1-\gamma_5) u(p_3) \bar{u}(p_1) \gamma_\nu (1-\gamma_5) u(p_2) \right] \\ &= \frac{G_F^2}{2} \sum_s \text{Tr} \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma^\mu (1-\gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu (1-\gamma_5) u(p_2) \right\} \times \\ &\quad \times \text{Tr} \left\{ \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (1-\gamma_5) v(p_4) v(p_4) \gamma_\nu (1-\gamma_5) u(p_3) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{G_F^2}{2} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m_\mu) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (\not{p}_1 + m_\mu) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \right\} \times$$

$$\times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_3 + m_e) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) (\not{p}_4 - m_e) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \right\}$$

LE MASSE, PER VIA DELLA PRESENZA DI γ_5 , NON CONTRIBUISCONO;
INFATTI:

$$\not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma_5)^2 = 2 \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma_5)$$

$$m_\mu \gamma^\nu (1 + \gamma_5)(1 - \gamma_5) = 0$$

IL SEGNO + ESCE DALL'ANTICOMMUTAZIONE
CON LA γ^ν

COMPARE ANCHE UN TERMINE DEL TIPO:

$$m_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma_5) = m_\mu \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma_5)^2$$

$$= 2 m_\mu \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \gamma_5$$

$$= 0 \quad (\text{PERCHÉ TRACCIA DI } \gamma_5 \text{ È DISPARI DI } \gamma^\mu)$$

DUNQUE, TOGLIENDO I CONTRIBUTI DELLE MASSE:

$$= \frac{G_F^2}{2} 4 \text{Tr} \left\{ \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \right\} \text{Tr} \left\{ \not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \right\}$$

$$= \frac{G_F^2}{2} 64 \left[\underbrace{p_2^\mu p_1^\nu + p_1^\mu p_2^\nu - g^{\mu\nu} p_1 p_2}_{(1)} - \underbrace{i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{2\alpha} p_{1\beta}}_{(2)} \right] \times$$

$$\times \left[\underbrace{p_{3\mu} p_{4\nu} + p_{4\mu} p_{3\nu} - g_{\mu\nu} p_3 p_4}_{(1)} - \underbrace{i \epsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'} p_3^{\alpha'} p_4^{\beta'}}_{(2)} \right]$$

IN CUI ABBIAMO UTILIZZATO:

$$\text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \} = -4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

E DOVE POSSIAMO NOTARE CHE LE PARTI ⁽¹⁾, NEI DUE TERMINI, È SIMMETRICA, MENTRE LA SECONDA ⁽²⁾ È ANTISIMMETRICA PER LO SCAMBIO $\mu \leftrightarrow \nu$. PER QUESTO:

$$= \frac{G_F^2}{2} 64 \left\{ (p_2 p_3)(p_1 p_4) [1 + 1 + (-i)^2(-2)] + \right. \\ \left. + (p_1 p_3)(p_2 p_4) [1 + 1 + (-i)^2(-2)] + \right. \\ \left. + (p_1 p_2)(p_3 p_4) [-1 - 1 - 1 - 1 + \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{=4}] \right\}$$

⊗

→ QUESTO TERMINE VIENE FUORI DA CONTRIBUTI SENZA γ_5 .

DOVE ABBIAMO UTILIZZATO, PER LE CONTRAZIONI DELLE PARTI ANTISIMMETRICHE, LA RELAZIONE:

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'} = -2 (g^\alpha_{\alpha'} g^\beta_{\beta'} - g^\alpha_{\beta'} g^\beta_{\alpha'}).$$

LA PRESENZA DELLA γ_5 VA A ROMPERE LA SIMMETRIA TRA LE PRIME DUE RIGHE DI ⊗.

OTTENIAMO:

$$\sum_{\text{SPIN}} |\mathcal{M}|^2 = 128 G_F^2 (p_1 p_4)(p_2 p_3).$$

NOTA LA PRESENZA DI γ^5 È RESPONSABILE DEL FATTO CHE LA MASSA NON CONTRIBUISCONO, E INOLTRE ANCHE DELLA CANCELLAZIONE DI UN TERMINE, IN QUESTO CASO QUELLO PROPORZIONALE A $(p_1 p_3)(p_2 p_4)$.

SCEGLIAMO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL μ , IN CUI:

$$p_1 = (m_\mu, \vec{0})$$

QUINDI:

$$p_1 p_4 = m_\mu E_4$$

MENTRE:

$$\begin{aligned} p_2 p_3 &= \frac{1}{2} \left[(p_2 + p_3)^2 - p_2^2 - p_3^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(p_1 - p_4)^2 - m_{\nu_\mu}^2 - m_e^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[p_1^2 + p_4^2 - 2p_1 p_4 - m_{\nu_\mu}^2 - m_e^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[m_\mu^2 + m_{\nu_e}^2 - 2m_\mu E_4 - m_\nu^2 - m_e^2 \right] \end{aligned}$$

CIOÈ DIPENDE DA TUTTE LE MASSE E DA UNA SOLA VARIABILE CINEMATICA E_4 . QUESTO FA SÌ CHE QUANDO CALCOLIAMO LA LARGHEZZA DI DECADIMENTO, E INTEGRAIAMO SULLO SPAZIO DELLE FASI, L'UNICO INTEGRALE UN PO' COMPLICATO SARÀ QUELLO IN E_4 .

VISTO CHE STIAMO CONSIDERANDO IL DECADIMENTO DEL μ , PER LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA, LE ENERGIE IN GIOCO NEL PROCESSO SARANNO DELL'ORDINE DELL'ENERGIA DEL μ (m_μ).

INOLTRE, LE MASSE SONO MOLTO PIÙ PICCOLE DI m_μ :

$$m_\mu \gg m_e, m_{\nu_e}, m_{\nu_\mu}.$$

SI HA QUINDI: $(m_e = m_{\nu_\mu} = m_{\nu_e} = 0)$

$$|\vec{p}_2| = E_2 \quad ; \quad |\vec{p}_3| = E_3 \quad ; \quad |\vec{p}_4| = E_4$$

E LA LARGHEZZA DI DECADIMENTO:

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^{4-1}}{2m_\mu} \int \frac{d^3p_2}{2E_2} \int \frac{d^3p_3}{2E_3} \int \frac{d^3p_4}{2E_4} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \frac{1}{2} \sum_{\text{SPIN}} |\mathcal{M}|^2$$

SFRUTTIAMO LA δ^3 PER $\int d^3p_2$

SOMMA SULLE
POLARIZZAZIONI
INIZIALI

$$= \frac{1}{2^{10} \pi^5 m_\mu} \int \frac{d^3p_3}{E_3} \frac{d^3p_4}{E_4} \frac{1}{|\vec{p}_3 + \vec{p}_4|} \delta(m_\mu - |\vec{p}_3 + \vec{p}_4| - E_3 - E_4) \times$$

$$\times 128 G_F^2 (m_\mu E_4) \frac{1}{2} m_\mu (m_\mu - 2E_4)$$

2^7

POICHÈ

$$\vec{p}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \delta^3(\vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4)$$

IL CHE

IMPONE

$$\Rightarrow \vec{p}_2 = -\vec{p}_3 - \vec{p}_4 \Rightarrow E_2 = |\vec{p}_3 + \vec{p}_4|$$

DUNQUE:

$$= \frac{m_\mu}{16 \pi^5} G_F^2 4\pi \int_0^\infty \frac{dE_3 E_3^2}{E_3} 2\pi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta_{3,4} \times$$

DALL'INTEGRALE NELL'ANGOLO
SOLIDO DI d^3p_3 DA
4π E RIMANE
L'INTEGRALE SUL MODULO
 $|\vec{p}_3| = E_3$.

$$\times \int_0^\infty \frac{dE_4 E_4^2}{E_4} \frac{E_4(m_\mu - 2E_4)}{\mu} \delta(m_\mu - \mu - E_3 - E_4)$$

IN CUI METTIAMO:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= |\vec{p}_3 + \vec{p}_4|^2 = |\vec{p}_3|^2 + |\vec{p}_4|^2 + 2|\vec{p}_3||\vec{p}_4|\cos\theta_{34} \\ &= E_3^2 + E_4^2 + 2E_3E_4\cos\theta_{34} \end{aligned}$$

E VOGLIAMO PASSARE ALL'INTEGRALE IN $d\mu$:

$$2\mu d\mu = 2E_3E_4 d\cos\theta_{34} \Rightarrow d\cos\theta_{34} = \frac{\mu d\mu}{E_3E_4}$$

COSÌ SPARISCE ANCHE LA DIPENDENZA DA μ NELL'INTEGRANDO:

$$\Gamma = \frac{m_\mu G_F^2}{16 \pi^5} 8\pi^2 \int_0^\infty dE_3 \int_0^\infty dE_4 \int_{\mu_-}^{\mu_+} d\mu E_4(m_\mu - 2E_4) \delta(m_\mu - \mu - E_3 - E_4)$$

DOVE:

$$\begin{cases} \mu_+^2 = \mu^2 \Big|_{\cos\theta_{34}=1} = E_3^2 + E_4^2 + 2E_3E_4 \\ \mu_-^2 = \mu^2 \Big|_{\cos\theta_{34}=-1} = (E_3 - E_4)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_+ = E_3 + E_4 \\ \mu_- = |E_3 - E_4| \end{cases}$$

POSSIAMO SFRUTTARE LA δ DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PER
CAPIRE MEGLIO GLI ESTREMI DELLE ENERGIE:

$$\int_{\mu_-}^{\mu_+} d\mu \delta(m_\mu - \mu - E_3 - E_4) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu_- \leq m_\mu - E_3 - E_4 \leq \mu_+ \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$

QUINDI L'UNICO CONTRIBUTO A T LO SI HA QUANDO VALE

$$\mu_- \leq m_\mu - E_3 - E_4 \leq \mu_+.$$

POSSIAMO ~~DESCRIVERLA~~ DISCRIVERLA IN DUE RELAZIONI:

$$\begin{aligned} \oplus \quad m_\mu - E_3 - E_4 \leq \mu_+ = E_3 + E_4 &\Rightarrow m_\mu \leq 2(E_3 + E_4) \\ &\Rightarrow E_3 + E_4 \geq m_\mu/2 \end{aligned}$$

$$\oplus \quad m_\mu - E_3 - E_4 \geq \mu_- = |E_3 - E_4|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } E_3 \geq E_4 \Rightarrow m_\mu \geq 2E_3 \Rightarrow E_4 \leq E_3 \leq m_\mu/2 \\ \text{se } m_\mu \geq 2E_4 \Rightarrow E_3 \leq E_4 \leq m_\mu/2 \end{cases}$$

PERÒ NELLA SECONDA RELAZIONE, METTENDO INSIEME I DUE CASI, SI HA:

$$E_3, E_4 \leq \frac{m_\mu}{2}.$$

PRENDIAMO PER ESEMPIO $E_4 \leq \frac{m_\mu}{2} \Rightarrow E_3 \geq \frac{m_\mu}{2} - E_4$
PER CUI SI HA:

$$\Gamma = \frac{m_\mu G_F^2}{2\pi^3} \int_0^{m_\mu/2} dE_4 \int_{\frac{m_\mu}{2} - E_4}^{m_\mu/2} dE_3 E_4 (m_\mu - 2E_4)$$

INTEGRALE.
 $\frac{m_\mu}{2} - \left(\frac{m_\mu}{2} - E_4 \right) = E_4$

$$= \frac{m_\mu G_F^2}{2\pi^3} \int_0^{m_\mu/2} dE_4 (m_\mu E_4^2 - 2E_4^3)$$

$$= \frac{m_\mu G_F^2}{2\pi^3} \left[m_\mu \frac{1}{3} \left(\frac{m_\mu}{2} \right)^3 - 2 \frac{1}{4} \left(\frac{m_\mu}{2} \right)^4 \right]$$

$$= \frac{m_\mu^5 G_F^4}{192 \pi^3}.$$

IL RISULTATO CINEMATICO HA SENSO PERCHÈ CI DICE CHE LE ENERGIE NON POSSONO SUPERARE LA METÀ DELLA MASSA DEL MUONE, MA OGNUNA SE NE PUÒ PORTARE VIA AL MASSIMO LA METÀ. LA SOMMA, TUTTAVIA, DEV'ESSERE MAGGIORE O UGUALE, PERCHÈ C'È DA CONSIDERARE ANCHE E_2 .