

# INDICE

01	-	ATOMO DI IDROGENO - TRATTAZIONE SEMICLASSICA	4
01.1	-	ATOMO DI IDROGENO - TRATTAZIONE ALLA SCHRODINGER	12
01.2	-	DIAGRAMMI DI GROTRIAN, ARMONICHE SFERICHE E FUNZIONI RADIALI	18
01.3	-	TRANSIZIONI OTTICHE (ATOMO DI IDROGENO)	27
01.4	-	EFFETTO ZEEEMAN	31
01.5	-	INTRODUZIONE DELLO SPIN ELETTRONICO	38
01.6	-	INTERAZIONE SPIN - ORBITA	49
02	-	ATOMO DI ELIO	55
02.1	-	CAMPO AUTOCONSISTENTE DI HARTREE	62
02.2	-	METODO DI HARTREE-FOCK	67
02.3	-	STATI PARA- E ORTO-	73
02.4	-	NOTAZIONE SPETTROSCOPICA	86
02.5	-	SPIN-ORBITA ED EFFETTO ZEEEMAN ANOMALO	88
03	-	ATOMI MULTIELETTRONICI	94
03.1	-	LA TAVOLA PERIODICA	99
03.2	-	REGOLE DI HUND	113
04	-	MOLECOLE	135
04.1	-	$H_2^+$	136
04.2	-	$H_2$	154
04.3	-	ORBITALI 2S	156
04.4	-	ORBITALI 2P	158
04.5	-	$He_2$	163
04.6	-	$Li_2$	164

04.7	-	Be <sub>2</sub>	165
04.8	-	B <sub>2</sub>	166
04.9	-	C <sub>2</sub>	168
04.10	-	N <sub>2</sub>	169
04.11	-	O <sub>2</sub>	170
04.12	-	F <sub>2</sub>	171
04.13	-	Ne <sub>2</sub>	172
05	-	(VEDI "APPUNTI - STRUTTURA DEI SOLIDI")	/
05	-	STRUTTURA DEI SOLIDI	/
05.1	-	LEGAME CHIMICO NEI SOLIDI	/
05.2	-	STRUTTURA DEI SOLIDI	/
		05.2.1 - STRUTTURA CRISTALLINA DEL GRAFENE	/
05.3	-	CRISTALLOGRAFIA : GLI INDICI DI MILLER	/
05.4	-	DIFFRAZIONE DA CRISTALLI	/
06	-	VIBRAZIONI RETICOLARI	174
07	-	STATISTICA DI BOSE - EINSTEIN	187
07.1	-	DERIVAZIONE STATISTICA CLASSICA	200
07.2	-	APPLICAZIONE : SISTEMA A 2 LIVELLI	203
07.3	-	CAPACITÀ TERMICA	204
07.4	-	GAS DI FOTONI, LEGGE DI PLANCK	210
07.5	-	LEGGE DI WIENN	225
07.6	-	LEGGE DI STEFAN - BOLTZMANN	230
07.7	-	EMISSIONE STIMOLATA E LASER	235
08	-	(VEDI "APPUNTI - SPETTROSCOPIA RAMAN")	/

09	-	STATISTICA	DI	FERMI-DIRAC	252		
09.1	-	GAS	DI	ELETTRONI	259		
09.2	-	MODELLO	DI	DRUDE	270		
09.2.1	-	NOTA	SULLA	RELAZIONE	DI	DISPERSIONE	279
09.2.2	-	NOTA	SUL	TEMPO	DI	RILASSAMENTO	281
10	-	BANDE	ELETTRONICHE	NEI	SOLIDI	282	
10.1	-	TEOREMA	DI	BLOCK	283		
10.2	-	MODELLO	DI	KRONING-PENNEY	287		
10.3	-	METALLI, ISOLANTI, SEMICONDUCTORI	297				

ULTIMA MODIFICA : 11/06/2024

# STATISTICA DI BOSE-EINSTEIN

PER MODELLIZZARE LA CAPACITÀ TERMICA DEI SOLIDI È STATA FONDAMENTALE LA STATISTICA DI BOSE-EINSTEIN.

RICORDIAMOCI IL MODELLO CLASSICO DATO DALLA LEGGE DI DULONG-PETIT.

PRENDIAMO UN GAS ( $N$  PARTICELLE) IN CUI POSSIAMO IMMAGAZZINARE UNA CERTA CAPACITÀ TERMICA  $U$  E TROVARLI AD UNA CERTA TEMPERATURA  $T$ .

LA CAPACITÀ TERMICA È

$$C = \frac{\partial U}{\partial T}$$

UN SISTEMA CLASSICO HA  $3N$  GRADI DI LIBERTÀ ENERGETICI ASSOCIATI ALLE GRANDEZZE  $p_x^2, p_y^2, p_z^2$  E AD OGNI GRADO DI LIBERTÀ ASSOCIAMO UN'ENERGIA PARI A  $\frac{1}{2} k_B T$ .  
QUINDI L'ENERGIA MEDIA È

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

IN UN SOLIDO PERÒ HO ANCHE I GRADI DI LIBERTÀ ASSOCIATI A  $x^2, y^2, z^2$ , CHE MI PORTANO DUNQUE A

$$\langle E \rangle = \frac{6}{2} k_B T = 3 k_B T$$

E AD UNA ENERGIA INTERNA

$$U = N \langle E \rangle = 3 k_B T N$$

↳ NUMERO DI ATOMI DEL SISTEMA

E QUINDI IN UN CRISTALLO POSSIAMO OTTENERE

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = 3 k_B N$$

MA POSSIAMO OTTENERE UNA DEFINIZIONE MOLARE

$$N \rightarrow N_A$$

E QUINDI

$$C_{\text{MOL}} = 3 \underbrace{k_B N_A}_R$$

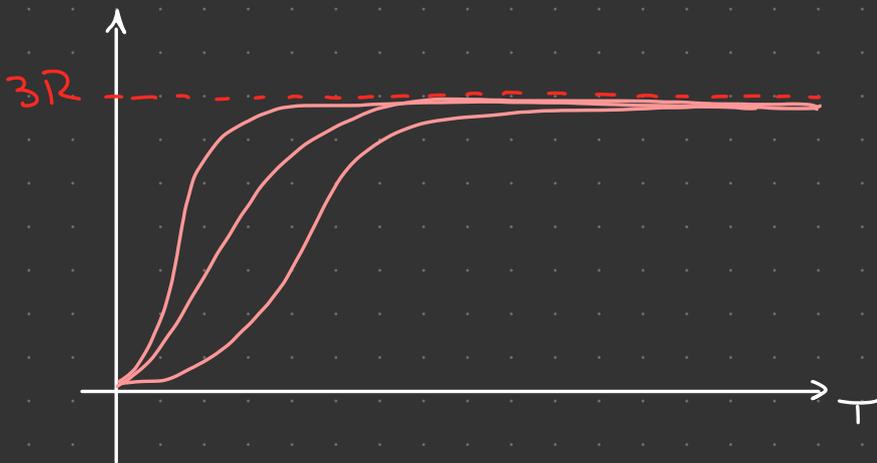
$R$  COSTANTE DEI GAS PERFETTI

E QUESTA È LA LEGGE DI DULONG-PETIT

$$C_{\text{MOL}} = 3R$$

CHE MI DICE CHE UNA MOLE DI QUALUNQUE CRISTALLO HA QUESTA CAPACITÀ TERMICA.

QUINDI PER IL MODELLO TERMODINAMICO CLASSICO LA  $C_{\text{MOL}}$  NON DIPENDE NÉ DALLA  $T$  NÉ DAL CRISTALLO CHE CONSIDERO



DATI SPERIMENTALI PER DIVERSI CRISTALLI

PERÒ SE GUARDO I DATI SPERIMENTALI VEDO CHE LA LEGGE CLASSICA FUNZIONA A  $T$  ELEVATE, MA POI SCETTE DI FUNZIONARE PRIMA DI CERTE TEMPERATURE E PER DI PIÙ  $C_{\text{MOL}}$  DIPENDE DAL CRISTALLO.

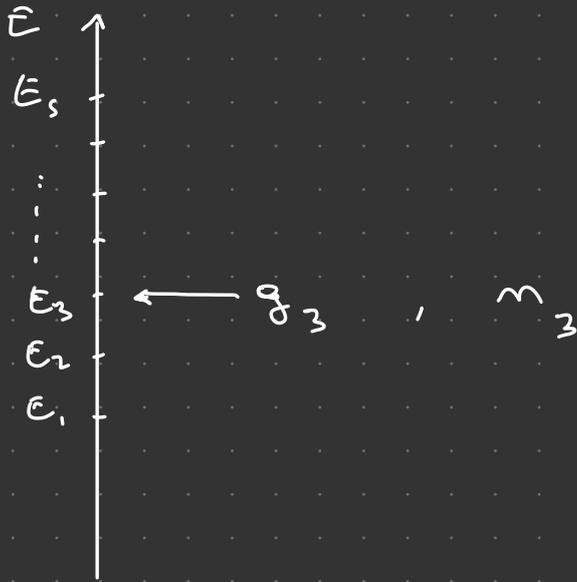
# DISTRIBUZIONE STATISTICA DI BOSE-EINSTEIN

CONSIDERIAMO  $N$  PARTICELLE BOSONICHE (IDENTICHE, QUANTISTICAMENTE INDISTINGUIBILI, NON INTERAGENTI).

LO SCENARIO ENERGETICO È:

$S$  LIVELLI ENERGETICI  $\{E_i\}$   $i = 1, \dots, S$  CIASCUNO CARATTERIZZATO DA UNA DEGENERAZIONE  $g_i$  ( $\#$  STATI DISPONIBILI PER CIASCUNA ENERGIA)

NOTA I LIVELLI ENERGETICI NON SONO PER FORZA EQUISPAZIATI



IN CIASCUN LIVELLO ENERGETICO CI SONO  $m_i$  PARTICELLE

NON È UN PROBLEMA PERCHÈ I BOSONI NON DEVONO RISPETTARE IL PRINCIPIO DI PAULI.

CERCHIAMO DI DESCRIVERE LA STATISTICA IN MODO FENOMENOLOGICO E COMBINATORIALE.

SUPPONIAMO DI TROVARCI ALLA TEMPERATURA  $T$  E CI CHIEDIAMO COME SI DISTRIBUISCONO LE  $N$  PARTICELLE TRA GLI  $S$  STATI. CI CHIEDIAMO IN QUALE CONFIGURAZIONE MACROSCOPICA (MACROSTATO) SI DISPONE IL SISTEMA?

HO DELLE CONDIZIONI DA IMPORRE PERÒ

$$\sum_i m_i = N$$

IL SISTEMA HA UNA CERTA ENERGIA INTERNA

$$\sum_i m_i E_i = U$$

IL SISTEMA SI CONFIGURA NEL MACROSTATO

$$\{m_i\}_{i=1, \dots, S}$$

CHE SI PUÒ OTTENERE CON IL MAGGIOR NUMERO DI MICRO-CONFIGURAZIONI.

SE DO  $\{m_i\}$ , OSSIA COME METTO LE  $N$  PARTICELLE IN OGNI LIVELLO, IDENTIFICO IL MACROSTATO.

HO  $m_i$  PARTICELLE NEL LIVELLO  $E_i$  (CON DEGENERAZIONE  $g_i$ ) CHE POSSO METTERE IN MODI DIVERSI, QUANTI?

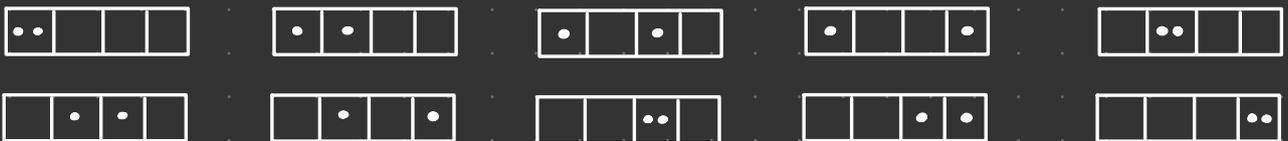
$P_i$  CONTA IL NUMERO DI MODI IN CUI POSSO METTERE LE  $m_i$  PARTICELLE IN  $g_i$ .

ES

$g_i = 4$  STATI DI ENERGIA  $E_i$    
 $m_i = 2$  PARTICELLE 

MACROSTATO =  $m_i$  PARTICELLE AD ENERGIA  $E_i$   
 MICROSTATO = UNA SINGOLA DISPOSIZIONE DI  $m_i$  IN  $g_i$   
 # MICROSTATI =  $P_i$

CON UN APPROCCIO GRAFICO



QUINDI HO 10 MICROSTATI DIVERSI.

NB DEFINISCO UN MACROSTATO  $\rightarrow$  FISSO TUTTI GLI  $m_i$   
 $\rightarrow$  HO  $\{m_i\} \rightarrow$  PER CIASCUN LIVELLO  $E_i$  HO  $P_i$  MODI DI DISPORRE  $m_i$  IN  $g_i$  QUANTI MODI POSSO OTTENERE QUELLO SPECIFICO MACROSTATO?

$$P = \prod_i P_i$$

TRA TUTTI I MODI POSSIBILI DO DEVO ANDARE A CERCARE QUELLO CON MAGGIOR MODI DIVERSI, POICHÉ È QUELLA PIÙ PROBABILE.

TORNIAMO ALL'ESEMPIO E CERCHIAMO DI CALCOLARE UN  $P_i$  GENERICO.

AL POSTO DI GUARDARE I DISEGNI SOPRA CAMBIAMOLI LEGGERMENTE.

| =  $q_i - 1$  PARETI

• =  $m_i$  PARTICELLE

RIUCIAMO LE POSSIBILI DISPOSIZIONI IN TERMINI DI QUESTI CARATTERI BINARI

••|||    •|•||    •||•|    •|||•    |••||  
 |•|•|    |•||•    ||••|    ||•|•    |||••

QUINDI ORA MI CHIEDO IN QUANTI MODI DIVERSI POSSO PRODURRE UNA SERIE DI  $(q_i - 1)$  ED  $m_i$  ?

IN TUTTO ABBIAMO

$$m_i + (q_i - 1)$$

CARATTERI.

LA MODI DIVERSI POSSIBILI DI RAPPRESENTARE LA STRINGA È

$$P_i = [m_i + (q_i - 1)][m_i + (q_i - 1) - 1] \dots [1]$$

QUINDI NEL NOSTRO CASO = 5!

MA È CHIARAMENTE DIVERSO DAI 10 MODI DIVERSI IN CUI HO DISEGNATO I MICROSTATI POSSIBILI. QUELLO CHE HO DIMENTICATO È L'INDISTINGUIBILITÀ DELLE PARTICELLE E LE STO CONTANDO DUE VOLTE.

DEVO DIVIDERE PER  $m_i!$  MA ANCHE PER  $(g_i - 1)!$  DEVO FARE LO STESSO RAGIONAMENTO PER LE PARETI E DIVIDERE

QUINDI IL CONTO CORRETTO È

$$P_i = \frac{[m_i + (g_i - 1)][m_i + (g_i - 1) - 1] \dots 1}{m_i! (g_i - 1)!}$$

NEL NOSTRO ESEMPIO

$$P_i = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10$$

COME ATTESO DAI DISEGNI.

QUINDI UN MACROSTATO DETERMINATO DA  $\{m_i\}$  LO POSSO REALIZZARE IN

$$P = \prod_{i=1}^s P_i = \prod_{i=1}^s \left\{ \frac{[m_i + (g_i - 1)]!}{m_i! (g_i - 1)!} \right\}$$

STATISTICAMENTE IL SISTEMA SI CONFIGURERÀ, COME GIÀ DETTO, NEL MACROSTATO CON I VALORI DI  $\{m_i\}$  CHE MASSIMIZZANO IL VALORE DI  $P$ .

MATEMATICAMENTE È PIÙ SEMPLICE TROVARE  $\{m_i\}$  CHE MASSIMIZZA  $\ln P$ , CHE NON CAMBIA NULLA ESSENDO IL LOGARITMO UNA FUNZIONE MONOTONA E QUINDI IL SET  $\{m_i\}$  CHE MASSIMIZZA  $\ln P$  MASSIMIZZA ANCHE  $P$

È COMODO IL  $\ln P$  POICHÉ POSSIAMO USARE LA FORMULA DI STIRLING

$$\ln(x!) \sim x \ln x - x, \quad x \rightarrow \infty$$

CHE È LECITA PERCHÉ ABBIAMO A CHE FARE CON  $g_i$  ED  $m_i$  GRANDI.

QUELLO CHE FAREMO SARA' CERCARE  $\{m_i\}$  bc

$$d \ln P = \sum \frac{\partial}{\partial m_i} \ln P_i \cdot dm_i = 0$$

EQUIVALENTE A  $dP = \sum \frac{\partial P}{\partial m_i} dm_i = 0$

SCRIVIAMO BENE  $\ln P$

$$\ln P = \ln(\prod P_j) = \ln \left\{ \prod_j \left[ \frac{(m_j + g_j - 1)!}{m_j! (g_j - 1)!} \right] \right\}$$

$$= \sum_j \ln [-]_j$$

$$= \sum_j \left\{ \ln[(m_j + g_j - 1)!] - \ln[m_j!] - \ln[(g_j - 1)!] \right\}$$

USIAMO LA FORMULA DI STIRLING ( $m_j, g_j$  GRANDI)

$$= \sum_j \left\{ (m_j + g_j - 1) \ln(m_j + g_j - 1) - (m_j + g_j - 1) - m_j \ln m_j + m_j - (g_j - 1) \ln(g_j - 1) + (g_j - 1) \right\}$$

QUINDI ABBIAMO OTTENUTO

$$\ln P = \sum_j [-]_j$$

A QUESTO PUNTO DIFFERENZIO

$$d \ln P = \sum_i \frac{\partial \ln P}{\partial m_i} dm_i$$

FACCIO FISSATA) LA DERIVATA (NOTA CHE ORA  $\wedge$  È

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m_i} \ln P &= \sum_j \underbrace{\frac{\partial}{\partial m_i} \{-\}}_{\delta_{ij}} \\
&= \frac{\partial}{\partial m_i} \{-\}_i \\
&= 1 \cdot \ln(m_i + g_{i-1}) + (m_i + g_{i-1}) \frac{1}{m_i + g_{i-1}} - 1 - \\
&\quad - 1 \cdot \ln m_i - m_i \frac{1}{m_i} + 1 - 0 + 0 \\
&= \ln(m_i + g_{i-1}) + 1 - 1 - \ln m_i - 1 + 1 \\
&= \ln(m_i + g_{i-1}) - \ln m_i
\end{aligned}$$

E QUINDI IMPONIAMO

$$d \ln P = \sum_i \left[ \ln(m_i + g_{i-1}) - \ln m_i \right] dm_i = 0$$

AL VARIARE DI  $\{m_i\}$   $i = 1, \dots, S$   
 LA CONDIZIONE È SODDISFATTA SE

$$\ln(m_i + g_{i-1}) - \ln m_i = 0 \quad \forall i$$

OSSIA  $\forall$  VARIAZIONE INFINITESIMA DI  $m_i$ , MA GLI  
 $m_i$  NON POSSONO VARIARE COME  
 VOGLIONO, ABBIAMO DEI VINCOLI

$$\sum_i m_i = N$$

$$\sum_i m_i E_i = U$$

CHÒ SI TRADUCONO IN

$$dN = d\left(\sum m_i\right) = \sum dm_i = 0$$

CI ASSOCIAMO UN MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE :  $\alpha$

$$dU = d\left(\sum m_i E_i\right) = \sum E_i dm_i = 0$$

$\xrightarrow{\text{NON LO POSSO SPOSTARE}} E_i$

CI ASSOCIO UN ALTRO MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE :  $\beta$

QUINDI USIAMO IL METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE, INTRODUCENDO  $\alpha$  E  $\beta$  (RICONDUCEBILI AI VINCOLI).

LA CONDIZIONE  $d \ln P = 0$  DIVENTA

$$d \ln P - \alpha dN - \beta dU = 0$$

$$\sum_i \left[ \ln \left( \frac{m_i + g_i - 1}{m_i} \right) \right] dm_i - \alpha \sum_i dm_i - \beta \sum_i E_i dm_i = 0$$

$$\sum_i \left[ \ln \left( \frac{m_i + g_i - 1}{m_i} \right) - \alpha - \beta E_i \right] dm_i = 0$$

E A QUESTO PUNTO AVENDO INTRODOTTO  $\alpha$  E  $\beta$ , POSSO IMPORRE

$$[ \_ ] = 0 \quad \forall i$$

POICHÉ POSSO CONSIDERARE GLI  $m_i$  SCORRELATI

$$\ln \left( \frac{m_i + g_i - 1}{m_i} \right) - \alpha - \beta E_i = 0$$

$$\forall i = 1, \dots, S$$

$\hookrightarrow S$  CONDIZIONI

$$\Rightarrow \ln \left( \frac{m_i + g_i - 1}{m_i} \right) = \alpha + \beta E_i$$

$m_i$  E  $g_i$  SONO ENORMI  $\Rightarrow$  TRASCURO IL  $-1$

$$\Rightarrow m_i + g_i = m_i \exp \{ \alpha + \beta E_i \}$$

$$n_i [\exp(\alpha + \beta E_i) - 1] = g_i$$

È QUINDI TROVIAMO

$$n_i = \frac{g_i}{\exp\{\alpha + \beta E_i\} - 1}$$

∀ i

STATISTICA DI  
BOSE-EINSTEIN

IN CUI  $g_i$  È UN NUMERO FISSATO E  
L'ESPRESSIONE LA POSSIAMO FATTORIZZARE

$$n_i = g_i f_{BE}(E_i)$$

IN CUI  $f_{BE}(E_i) = \frac{1}{\exp\{\alpha + \beta E_i\} - 1} \equiv$  FUNZIONE STATISTICA  
DI BOSE-EINSTEIN

NOTIAMO CHE  $\alpha, \beta$  SONO PARAMETRI CHE  
IDENTIFICANO UNO SPECIFICO SISTEMA FISICO  
(POICHÈ CONTENGONO INFORMAZIONI SUI VINCOLI).

$$[\alpha] = 1, \quad [\beta] = E^{-1}$$

CONVENZIONALMENTE SI PARAMETRIZZANO COSÌ:

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

T = NUOVO COEFFICIENTE (TEMPERATURA  
ASSOLUTA)

$$\alpha = - \frac{\mu}{k_B T}$$

$\mu$  = ENERGIA CARATTERISTICA  
(POTENZIALE CHIMICO)

NOTA PRIMA  $\alpha, \beta$  ERAMO INDIPENDENTI, RIPARAMETRIZZANDOLI  
ABBIAMO  $\alpha = \alpha(\beta)$  E NON È SOLAMENTE  
IL COEFFICIENTE  $\mu$  A FISSARE IL NUMERO DI  
PARTICELLE, MA  $\mu$  E T INSIEME.

OTTENIAMO

$$m_i = \frac{g_i}{e^{+\frac{E_i - \mu}{kT}} - 1} = g_i f_{BE}(E_i) \quad \forall_i$$

IL PROBLEMA CHE PUÒ ESSERE È CHE IL DENOMINATORE NON È SEMPRE  $\neq 0$  E QUINDI POTREBBERO ESSERE SITUAZIONI IN CUI SI HANNO  $m_i = \infty$ .

È QUINDI NECESSARIO CHE

$$\exp\left\{\frac{E_i - \mu}{kT}\right\} > 1 \quad \forall_i$$

NOTA NON VA BENE  $\exp < 1$  POICHÉ IMPLICHEREBBE  $m_i < 0$ .

$$\Rightarrow \frac{E_i - \mu}{kT} > 0 \quad \forall_i$$

$$\Rightarrow \boxed{E_i > \mu} \quad \forall_i$$

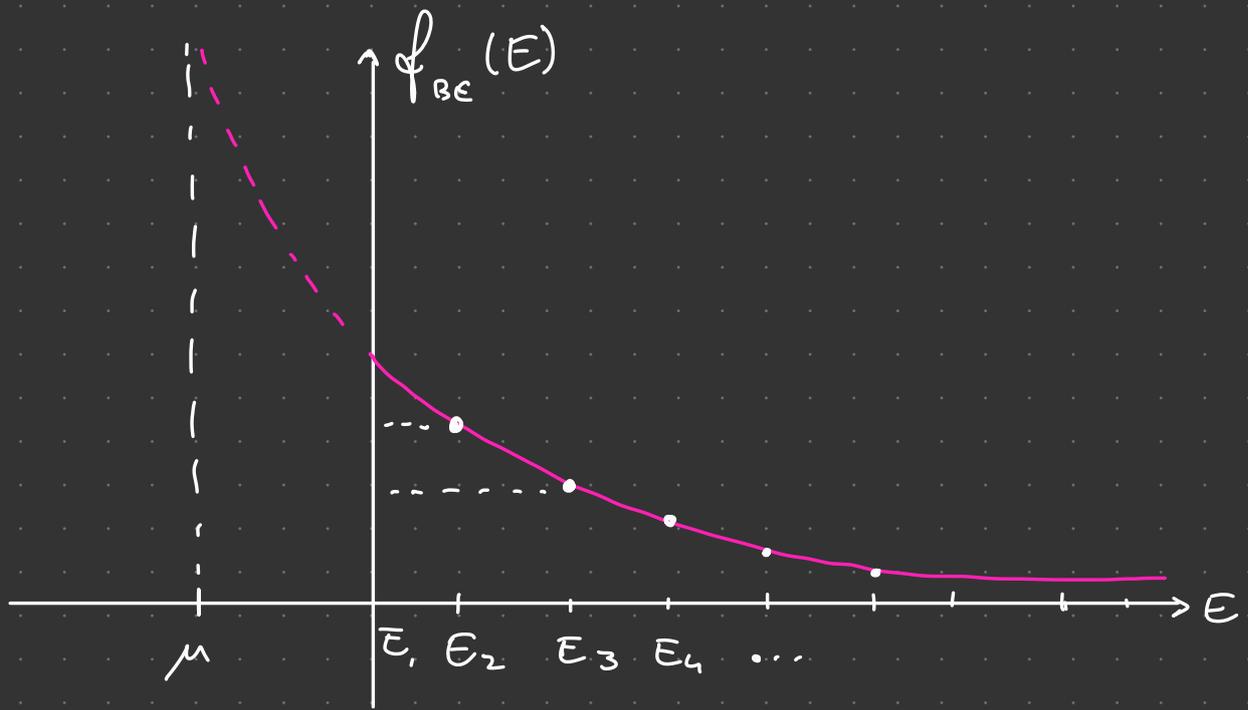
QUINDI  $\mu$  DEV' ESSERE PIÙ PICCOLO DEL PIÙ PICCOLO VALORE POSSIBILE DI  $E$ .

NOTA  $f_{BE}(E_i)$  CON LA CONDIZIONE VISTA APPENA SOPRA, È DEFINITA POSITIVA.

SUPPONIAMO CHE LO SPETTRO DEI POSSIBILI VALORI DI  $E$   $\{E_i\}$  SIA DISTRIBUITO SU VALORI  $\geq 0$ , ALLORA  $\mu < 0$  (PORRE  $E \geq 0$  NON È RESTRITTIVO POICHÉ POSSO FISSARE IL SR CHE VOGLIO).

FACCIAMO UN GRAFICO SOTTO.

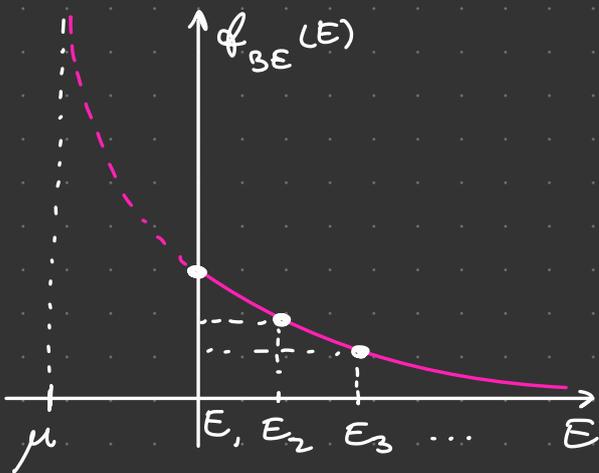
NOTA LA SINGOLARITÀ DI  $f_{BE}(E)$  IN  $E = \mu$  NON È UN PROBLEMA IN QUANTO  $E_i > \mu \quad \forall_i$



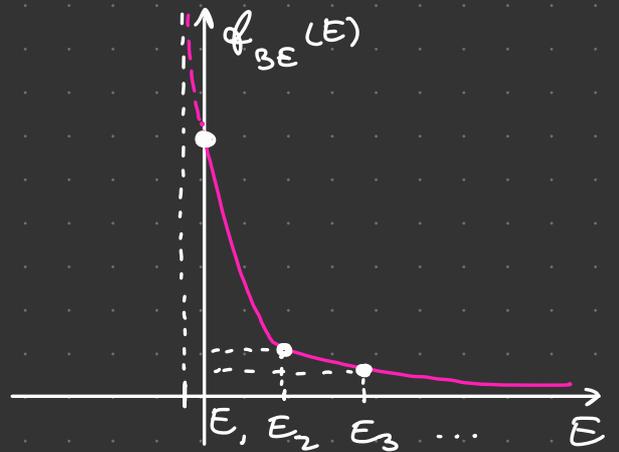
È INTERESSANTE QUANDO  $T \rightarrow 0$  NOTARE COSA ACCADE (MANTENENDO INVARIATO  $N$ ), ABBIAMO

$$\alpha = -\frac{\mu}{k_B T} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

SE  $T \rightarrow 0$  ALLORA  $\beta \rightarrow \infty$ , MA  $\alpha$  DEVE RIMANERE COSTANTE (CONTIENE IL LIMITE SUL NUMERO DI PARTICELLE) E QUINDI SUCCEDERÀ  $\mu \rightarrow E_1$ , OSSIA QUELLO CHE



$\Rightarrow$   
 $T \rightarrow 0$



QUINDI PER  $T \rightarrow 0$  PER NON FAR CAMBIARE IL NUMERO DI PARTICELLE E CONSEGUENZA LA POPOLAZIONE DI PARTICELLE BOSONICHE "COLLASSA" NEL PIÙ BASSO LIVELLO ENERGETICO

//

# CONDENSATO DI BOSE - EINSTEIN

NOTA QUESTA COSA SUCCEDDE ANCHE SE  $g_1 = 1$   
POICHÉ TANTO HO PARTICELLE BOSONICHE  
E POSSO AVERE A  $T \rightarrow 0$   $N$  PARTICELLE  
TUTTE NELLO STESSO STATO QUANTISTICO  
(DESCRITTE DALLA STESSA FUNZIONE D'ONDA)

QUESTO MECCANISMO ALLA BASE DI FENOMENI  
FISICI "ESOTICI", TIPO SUPERFLUIDITÀ, SUPERCONDUTTIVITÀ  
ECC ...

NOTA IN DIVERSI SISTEMI BOSONICI (GAS DI  
FOTONI O FONONI) IL NUMERO DI  
PARTICELLE NON SI CONSERVA, QUINDI  
UNO DEI DUE VINCOLI (MOLTIPLICATORE  
DI LAGRANGE  $\alpha \rightarrow$  PARAMETRO  $\mu$ ) NON  
COMPARE NELLA DISTRIBUZIONE STATISTICA

$$f_{BE}(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) - 1}$$

NEL "GAS" I BOSONI SI POSSONO  
CREARE E DISTRUGGERE  $\rightarrow$  SI HA UNA  
SITUAZIONE DINAMICA DI EQUILIBRIO  
STATICO (HA SENSO PARLARE DI NUMERO  
MEIO DI PARTICELLE).

NE RIPARLEREMO TRA POCO.

# DERIVAZIONE STATISTICA CLASSICA

PROVIAMO AD ARRIVARE ALLA STATISTICA CLASSICA (MB) PARTENDO DA QUELLA BE.

PER KARLO BOBBIANO METTERCI NEL LIMITE

$$g_i \gg m_i$$

NOTA ANCHE SE  $g_i \gg m_i$  NON VUOL DIRE CHE  $m_i$  NON SIA ENORME, CONTINUA A VALERE  $m_i \gg 1$

RIFACCIAMO IL PROCEDIMENTO DI PRIMA MA CON  $g_i \gg m_i$ .

VALENDO  $g_i \gg m_i$  LA PROBABILITÀ CHE PIÙ PARTICELLE OCCUPINO O MENO LO STESSO STATO QUANTISTICO DIVENTA IRILEVANTE E QUESTO CAMBIA L'ESPRESSIONE DI  $P_i$ .

RICORDIAMO

$$P_i = \frac{(m_i + g_i - 1)!}{m_i! (g_i - 1)!}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{m_i \text{ TERMINI}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(g_i - 1)!}$

$$= \frac{(m_i + g_i - 1)(m_i + g_i - 2) \dots (m_i + g_i - m_i)(m_i + g_i - m_i - 1) \dots 1}{m_i! (g_i - 1)!}$$

NEL LIMITE  $g_i \gg m_i$  IN NUMERATORE È  $\sim g_i$  PER  $m_i$  VOLTE, QUINDI

$$P_i = \frac{(g_i)^{m_i}}{m_i!}$$

DI CONSEGUENZA (USANDO STIRLING, TANTO  $m_i \gg 1$ )

$$\ln P_i = m_i \ln g_i - m_i \ln m_i + m_i$$

E POI

$$\ln P = \ln \left( \prod_{i=1}^s P_i \right) = \ln \left( \prod_{i=1}^s \frac{g_i^{m_i}}{m_i!} \right)$$

$$= \sum_j \left[ m_j \ln g_j - m_j \ln m_j + m_j \right]$$

DIFFERENZIANDO E IMPONENDO  $d \ln P = 0$

$$d \ln P = \sum_i \frac{\partial}{\partial m_i} \left[ \text{---} \right]_i dm_i$$

$$= \sum_i \left[ \ln g_i - \ln m_i \right] dm_i$$

$$= \sum_i \left[ \ln \frac{g_i}{m_i} \right] dm_i = 0$$

MA COME PRIMA NON POSSO ANCORA IMPORRE  
 $\ln \frac{g_i}{m_i} = 0 \quad \forall i$  POICHÈ HO VINCOLI E DEVO  
 USARE I MULTIPLICATORI  
 NUOVO LAGRANGE, OTTENENDO

$$d \ln P = 0 \Rightarrow d \ln P - \alpha dN - \beta dU = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \left[ \ln \frac{g_i}{m_i} \right] dm_i - \alpha \sum_i dm_i - \beta \sum_i E_i dm_i = 0$$

$$\sum_i \left[ \ln \left( \frac{g_i}{m_i} \right) - \alpha - \beta E_i \right] dm_i = 0$$

$$\Rightarrow \ln \left( \frac{g_i}{m_i} \right) - \alpha - \beta E_i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{g_i}{m_i} = e^{\alpha + \beta E_i}$$

$$\Rightarrow m_i = g_i e^{-\alpha} e^{-\beta E_i} \quad \forall i$$

QUESTA È LA DISTRIBUZIONE STATISTICA DI  
MAXWELL - BOLTZMANN.

RISCRIVIAMO MEGLIO

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

INOLTRE

$$\sum_i m_i = N = e^{-\alpha} \underbrace{\sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}_{Z}$$

$Z$  DI PARTIZIONE CLASSICA

$$\Rightarrow e^{-\alpha} = \frac{N}{Z}$$

QUINDI ABBIAMO

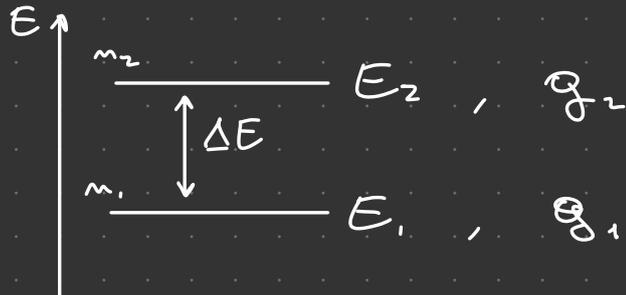
$$m_i = g_i \frac{N}{Z} e^{-\frac{E_i}{k_B T}} \quad \forall i$$

CHE È LA DISTRIBUZIONE DI MB CHE  
CONOSCIAMO

NOTA NEL LIMITE DELLE ALTE DILUZIONI,  
IL FATTO CHE LE PARTICELLE SIANO  
QUANTISTICAMENTE INDISTINGUIBILI TENDE  
AD ESSERE IRILEVANTE E SI HA  
UN COMPORTAMENTO ~ CLASSICO.

# APPLICAZIONE : SISTEMA A DUE LIVELLI

PRENDIAMO UN SISTEMA CLASSICO CHE HA 2 LIVELLI ENERGETICI CIASCUNO CON UNA SUA DEGENERAZIONE  $g_i$ :



MA ABBIAMO  $g_1 \cong g_2 = g$

ABBIAMO VISTO POCO SOPRA CHE VALE :

$$n_i = g_i \frac{N}{Z} e^{-\beta E_i}$$

E QUINDI

$$n_1 = g \frac{N}{Z} e^{-\beta E_1}$$

$$n_2 = g \frac{N}{Z} e^{-\beta E_2}$$

RAPPORTANDO

$$\Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$$

E NOTA CHE SE  $\Delta E \ll k_B T$  (COSA CHE SUCCEDDE SE FISSIAMO  $\Delta E$  ED AUMENTIAMO  $T$ )

$$\frac{n_1}{n_2} \approx \exp(0) \approx 1 \Rightarrow n_1 \approx n_2$$

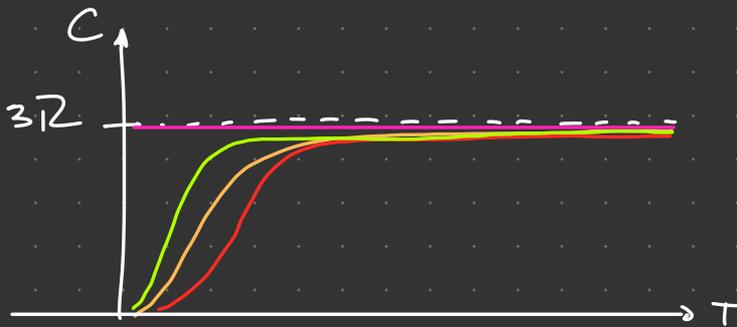
# CAPACITÀ TERMICA

ABBIAMO TROVATO LA STATISTICA DI BOSE-EINSTEIN

$$n_i = g_i \cdot f_{BE}(E_i) = g_i \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - \mu}{kT}\right) - 1}$$

DOVE  $g_i$  CI DICONO IL # DI STATI DISPONIBILI (DIPENDE DAL SISTEMA) AD UNA CERTA ENERGIA E  $f_{BE}(E_i)$  È LA PROBABILITÀ DI OCCUPARE UN CERTO STATO (NON DIPENDE DAL SISTEMA, MA GENERALE).

EINSTEIN USA QUESTA DISTRIBUZIONE STATISTICA PER RISOLVERE IL PROBLEMA DELLA CAPACITÀ TERMICA CHE COME ABBIAMO VISTO AD INIZIO CAPITOLO IL MODELLO CLASSICO NON RIUSCIVA A DESCRIVERE I DATI.



Dulong-Petit

DATI SPERIMENTALI  
DATI SPERIMENTALI  
DATI SPERIMENTALI

SPERIMENTALMENTE VEDIAMO CHE A GRANDI T  $C_{mol} \sim 3R$  PER TUTTI GLI ELEMENTI, A  $T \rightarrow 0$   $C_{mol} \rightarrow 0$  PER TUTTI, MA IL MODELLO CLASSICO NON NE LO DICE, E PER T INTERMEDIE HO COMPORTAMENTI DIVERSI, PER MATERIALI DIVERSI, COSÌ CHE IL MODELLO CLASSICO NON CONTERPLA.

EINSTEIN HA LA NUOVA DISTRIBUZIONE STATISTICA A DISPOSIZIONE E HA IN MENTE UN GAS DI PARTICELLE QUANTISTICHE, OSSIA PENSA AD UN GAS DI FONONI CHE DESCRIVONO I MOTI VIBRAZIONALI COLLETTIVI DEL CRISTALLO.

NOTA

DIVERSI FONONI POSSONO AVERE STESSA ENERGIA, OPPURE ENERGIE DIVERSE. POSSO AVERE PIÙ FONONI ALLA STESSA ENERGIA.

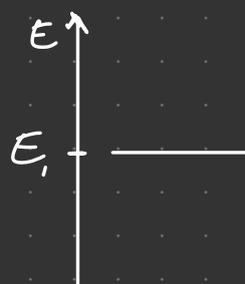
IL NUMERO DI FONONI AD UNA CERTA FREQUENZA (O ENERGIA) SI POSSONO IMMAGINARE COME L'ARPIZZA DEGLI ATOMI DEL CRISTALLO A QUELLA FREQUENZA.

EINSTEIN SEMPLIFICA DRASTICAMENTE IL PROBLEMA. ASSUME CHE NEL CRISTALLO CI SIA UN UNICO MODO VIBRAZIONALE E QUINDI UN UNICA FREQUENZA CARATTERISTICA  $\Omega$ , QUINDI UN UNICO LIVELLO ENERGETICO ( $E_\Omega = \hbar \Omega$ ).

IN PIÙ, CI SONO SISTEMI FISICI IN CUI NON C'È IL VINCOLO SUL NUMERO DI PARTICELLE CHE DEVE RIMANERE COSTANTE, IL CHE VUOL DIRE CHE LE PARTICELLE SI POSSONO CREARE E DISTRUGGERE, E IL GAS DI FONONI (E POI DI FOTONI) È UNO DI QUELLI.

QUINDI CADE IL PARAMETRO  $\mu$  RIMANE SOLO IL VINCOLO SULL'ENERGIA E LA STATISTICA È

$$n_i = g_i f_{BE}(E_i) = g_i \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i}{kT}\right) - 1}$$



AVENDO UN SOLO LIVELLO ENERGETICO, SCRIVIAMO  $E_\Omega \equiv E_1 = \hbar \Omega$ , SE NON FOSSE CADUTO IL VINCOLO SUL NUMERO DI PARTICELLE SAREBBE STATO UN PROBLEMA BANALE DA RISOLVERE, POICHÈ TUTTE LE N PARTICELLE SI TROVEREBBERO IN  $E_1$ .

IN QUESTO CASO CI POSSIAMO CHIEDERE IL NUMERO MEDIO DI FONONI AL LIVELLO  $E_1$  PER UNA CERTA T (POICHÈ ORA M VARIA AL VARIARE DI T) CHE È DATO DA

$$m(T) = \frac{g}{e^{\frac{\hbar \Omega}{kT}} - 1}$$

A QUESTO PUNTO DOBBIAMO DARE UNA STIMA DEL NUMERO DI STATI POSSIBILI  $\Omega$ .

PER FARLO EINSTEIN FA UN RAGIONAMENTO CLASSICO: UN ATOMO IN UN MOTO VIBRAZIONALE HA 3 GRADI DI LIBERTÀ, SE PRENDO  $N$  ATOMI ISOLATI TRA LORO (RICORDA CHE I FONONI SONO MODELLIZZABILI COME  $N$  OSCILLATORI DISACCOPIATI) ALLORA HO  $3N$  GRADI DI LIBERTÀ VIBRAZIONALI.

NOTA SE ACCOPPIASSI GLI ATOMI TUTTO SAREBBE DIFFERENTE, MA SO CHE IN UN SISTEMA LA DEGENERAZIONE NON DEVE CAMBIARE, QUINDI IL # DI GRADI DI LIBERTÀ VIBRAZIONALI RIMANE  $3N$  ANCHE SE CREO SISTEMI SOVRAPPosti.

L'ENERGIA SARÀ

$$U(T) = m(T) \cdot \hbar \Omega$$
$$= \frac{3N \hbar \Omega}{\exp\left(\frac{\hbar \Omega}{kT}\right) - 1}$$

LA CAPACITÀ MOLARE ( $N \rightarrow N_A$ ) È

$$U_{\text{MOL}}(T) = \frac{3N_A \hbar \Omega}{\exp\left(\frac{\hbar \Omega}{kT}\right) - 1}$$

LA CAPACITÀ TERMICA MOLARE È

$$C_{\text{MOL}}(T) = \frac{\partial U_{\text{MOL}}}{\partial T}$$

ORA È COMODO RIPARAMETRIZZARE IL QUANTO DI ENERGIA CARATTERISTICA  $\hbar \Omega$  CON UNA TEMPERATURA CARATTERISTICA  $T_E$  (TEMPERATURA DI EINSTEIN)

$$\hbar \Omega = k_B T_E$$

NOTA GIÀ INTRODUCENDO UN  $\Sigma$  CI STAVAMO METTENDO IN UN MATERIALE SPECIFICO, ORA, METTENDO  $T_E$  RIMANIAMO IN UNO SPECIFICO CRISTALLO ( $T_E$  È DIVERSO PER OGNI CRISTALLO).

COSÌ SI HA

$$U_{\text{MOL}} = \frac{3 N_A k_B T_E}{\exp\left(\frac{T_E}{T}\right) - 1}$$

NOTA CHE  $N_A k_B = R$ , QUINDI

$$U_{\text{MOL}} = \frac{3 R T_E}{\exp\left(\frac{T_E}{T}\right) - 1}$$

CALCOLIAMO

$$\begin{aligned} C_{\text{MOL}} &= 3 R T_E (-1) \frac{1}{\left(\exp\left(\frac{T_E}{T}\right) - 1\right)^2} \exp\left(\frac{T_E}{T}\right) \cdot T_E \frac{(-1)}{T^2} \\ &= 3 R \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 \frac{\exp\left(\frac{T_E}{T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{T_E}{T}\right) - 1\right)^2} \end{aligned}$$

CHE VEDIAMO CHIARAMENTE ESSERE DIVERSA DALLA LEGGE CLASSICA  $C_{\text{mol}}^{(DP)} = 3R$ , CHE PERÒ COMPARE LÌ DENTRO

$$C_{\text{MOL}} = C_{\text{mol}}^{(DP)} \left[ \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 \frac{e^{T_E/T}}{\left(e^{T_E/T} - 1\right)^2} \right]$$

A QUESTO PUNTO PERÒ CI ASPETTIAMO CHE PER ALTE TEMPERATURE (NELLA SCALA DI  $T_E$ ) IL FATTORE CORRETTIVO (CHE È ADIMENSIONALE) OLTRE  $C_{\text{MOL}}^{(DP)}$  TENDA AD 1.

VERIFICHIAMOLO:

SE  $T \gg T_E$  SI HA

$$\frac{T_E}{T} \sim \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\exp\left(\frac{T_E}{T}\right) \sim 1 + \frac{T_E}{T}$$

E QUINDI

$$C_{\text{MOL}} \approx 3R \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 \frac{1}{\left[1 + \frac{T_E}{T} - 1\right]^2} \approx 3R$$

ABBIAMO RITROVATO IL CASO CLASSICO COME ATTESO.

DAI DATI SPERIMENTALI CI ASPETTIAMO ANCHE CHE  $C_{\text{MOL}} \rightarrow 0$  PER  $T \rightarrow 0$ , OSSIA PER  $T_E \gg T$ .

SE  $T_E \gg T \rightarrow 0$  SI HA

$$\frac{T_E}{T} \rightarrow \infty$$

$$\left[\exp\left(\frac{T_E}{T}\right) - 1\right] \sim \exp\left(\frac{T_E}{T}\right)$$

$$C_{\text{MOL}} \sim 3R \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 \frac{1}{\left[\exp\left(\frac{T_E}{T}\right)\right]^2} \exp\left(\frac{T_E}{T}\right)$$

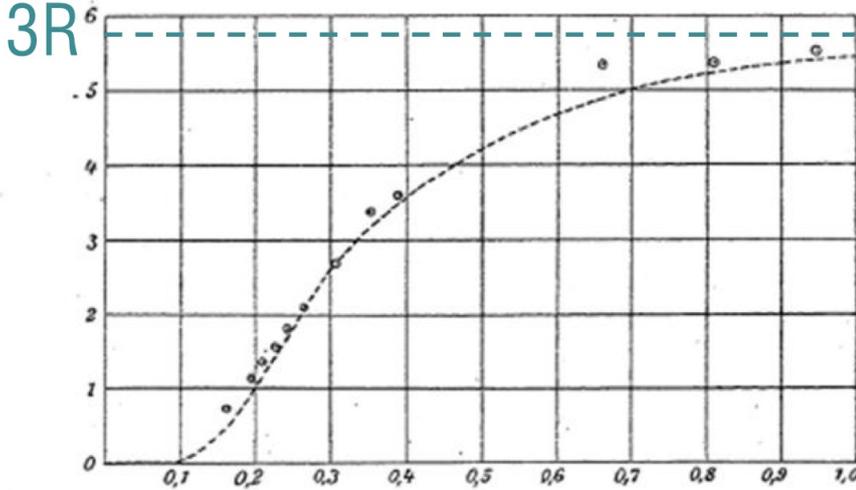
$$\sim 3R \underbrace{\left(\frac{T_E}{T}\right)^2}_{\rightarrow \infty} \frac{1}{\underbrace{\exp\left(\frac{T_E}{T}\right)}_{\rightarrow 0}}$$

MA PER LA GERARCHIA DEGLI INFINITI VINCE L'EXP E SI HA  $C_{\text{MOL}} \rightarrow 0$  COME ATTESO.

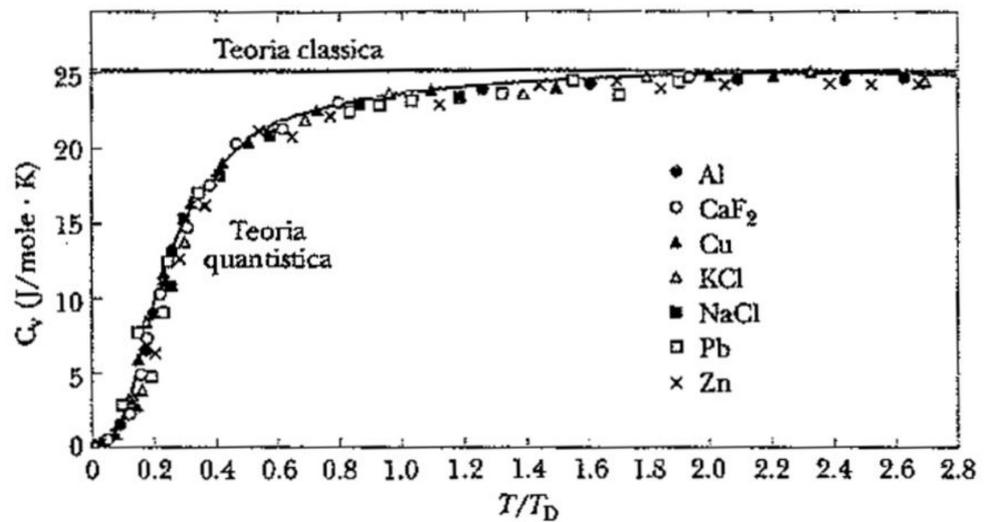
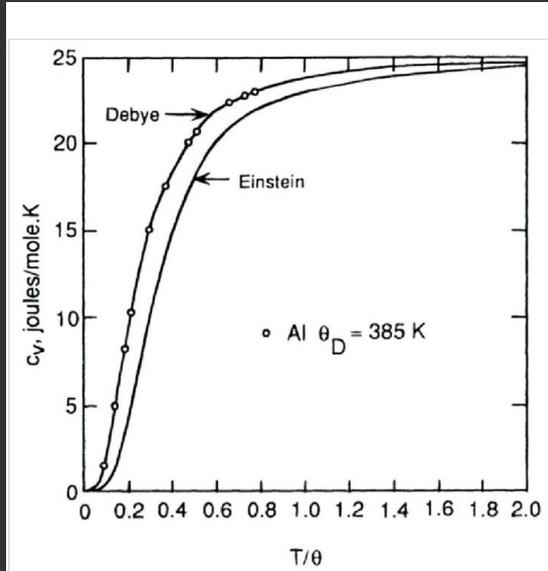
L'ACCORDO DELL'ESPRESSIONE DELLA FORMULA DI EINSTEIN DELLA CAPACITÀ TERMICA MOLARE CON I DATI SPERIMENTALI È BUONO

$$5,94 \frac{e^{\frac{\beta v}{T}} \cdot \left(\frac{\beta v}{T}\right)^2}{\left(e^{\frac{\beta v}{T}} - 1\right)^2}$$

beiträgt. Wir bekommen also, indem wir über alle Gattungen von schwingenden Elementargebilden summieren, welche in dem



MA PUÒ ESSERE ULTERIORMENTE MIGLIORATO CONSIDERANDO L'INTERA DISTRIBUZIONE DEI MODI VIBRAZIONALI (CONSIDERANDO TUTTE LE FREQUENZE) → MODELLO DI DEBYE



NOTA COME OVVIO SE RIFACCIO IL GRAFICO IN FUNZIONE DI  $T/T_D$  OTTENGO UN UNICA CURVA CARATTERISTICA PER TUTTI I MATERIALI.

# GAS DI FOTONI

PROVIAMO A RIVEDERE LA STESSA COSA MA APPLICANDO LA STATISTICA DI BOSE-EINSTEIN AD UN GAS DI FOTONI (CADE DI NUOVO IL PARAMETRO  $\mu$ ) IN UNA SCATOLA.

DOBBIAMO CERCARE NUOVAMENTE DI STIMARE  $g_i$  NELLA STATISTICA

$$m_i = \frac{g_i}{\exp\left(\frac{E_i}{kT}\right) - 1}$$

IN QUESTO CASO PERÒ DOBBIAMO PASSARE AD UNO SPETTRO ENERGETICO CONTINUO.

POICHÈ SI VEDE CHE LA SPAZIATURA TRA I LIVELLI ENERGETICI  $\delta E_i = E_{i+1} - E_i$  È  $\ll k_B T$ , PERTANTO ESPRIMIAMO  $E$  COME VARIABILE CONTINUA.

CADE INOLTRE IL CONCETTO DI  $m_i = \#$  DI PARTICELLE ALL'ENERGIA  $E_i$ , VISTO CHE ORA ABBIAMO UN CERTO NUMERO DI PARTICELLE IN UN INTERVALLO ENERGETICO FINITO.

SE CONSIDERIAMO UN INTERVALLO INFINITESIMO DI ENERGIA, ALLORA LÀ DENTRO CI SARÀ UN NUMERO INFINITESIMALE DI FOTONI  $dN$ .

NOTA ORA USIAMO LA LETTERA  $N$  PER INDICARE IL NUMERO DI FOTONI E LA LETTERA  $n$  PER INDICARE IL NUMERO DI FOTONI PER UNITÀ DI VOLUME.

CI SARÀ CHIARAMENTE UN CERTO NUMERO DI STATI QUANTISTICI OCCUPABILI AD ENERGIA COMPRESA TRA  $E$  ED  $E + dE$ , CHE INDICHIAMO CON  $dN_s$  ( $dm_s$  SARÀ PER UNITÀ DI VOLUME).  
 $E$  CI ASPETTIAMO CHE

$$dN_s \propto dE$$

INDICHIAMO TUTTO PER UNITÀ DI VOLUME

$$m_s = \frac{N_s}{V} ; \quad dm_s = \frac{dN_s}{V} \propto E$$

LA COSTANTE DI PROPORZIONALITÀ CI DICE

QUANTO SONO DENSI GLI STATI ACCESSIBILI A QUELL'ENERGIA  $\Rightarrow g(E)$

$$dm_s = g(E) dE$$

$g(E)$  = FUNZIONE DI DENSITÀ DI STATI (DEFINIZIONE AL CONTINUO DI STATI PER UNITÀ DI ENERGIA)  $g(E) = \frac{dm_s}{dE}$ , H. DICE CHE VARIA  $dm_s$  AL VARIARE DI  $dE$

$dm$  E  $dm_s$  SONO LEGATI DALLA PROBABILITÀ  $f_{BE}(E)$

$$dm = dm_s f_{BE}(E)$$

IN CHE  $f_{BE}(E)$  = FUNZIONE STATISTICA DI B E, CHE ESPRIME LA PROBABILITÀ DI OCCUPAZIONE DEGLI STATI DISPONIBILI ( $dm_s$ ) PER UNITÀ DI VOLUME.

NOTA ANCHE NEI CASI VISTI FIN'ORA IL # DI PARTICELLE E IL NUMERO DI STATI ERANO LEGATI DA  $f_{BE}(E)$ .

RAGIONIAMO CON DENSITÀ (QUANTITÀ FINITE)

$$\frac{dm}{dE} = \frac{dm_s}{dE} f_{BE}(E) = g(E) f_{BE}(E)$$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dE} = g(E) f_{BE}(E)$$

PROBABILITÀ DI OCCUPAZIONE DEGLI STATI DISPONIBILI

DENSITÀ DI PARTICELLE AD ENERGIA  $E$  PER UNITÀ DI  $E$

DENSITÀ (ENERGETICA) DI STATI DISPONIBILI AD ENERGIA  $E$  PER UNITÀ DI VOLUME

NOTA  $\frac{dm}{dE} = g(E) f_{BE}(E)$  È IL CORRESPONDENTE DI  
 $m_i = g_i f_{BE}(E_i)$  SOLO CHE AL CONTINUO  
 DEVO APPUNTO LAVORARE CON QUANTITÀ  
 FINITE (DENSITÀ)

OTTENGO UN # FINITO DI FOTONI COMPRESO  
 IN UN INTERVALLO DI ENERGIA FACENDO  
 UN INTEGRALE

$$m(E \in [E_1, E_2]) = \int_{E_1}^{E_2} \frac{dm}{dE} dE = \int_{E_1}^{E_2} g(E) f_{BE}(E) dE$$

ORA PERÒ DOBBIAMO SCRIVERE  $g(E)$  NEL  
 SISTEMA FISICO DI NOSTRO INTERESSE.  
 ABBIAMO UNA SCATOLA DI CORPO NERO  
 (UN OGGETTO CHE ASSORBE ED EMETTE  
 RADIAZIONE ALLA MASSIMA EFFICIENZA POSSIBILE).  
 CHE NON HA NESSUNA FINESTRA DI  
 TRASPARENZA NELLO SPETTRO EM.



RICORDA CHE ABBIAMO  
 E CONSEGUENTEMENTE

$$[m] = [m_s] = V^{-3}$$

$$[g] = m^{-3} J^{-1}$$

ORA PENSIAMO AI FOTONI VINCOLATI IN  
 UN VOLUME UNI-DIMENSIONALE (SOLO PER  
 ORA) DI LUNGHEZZA  $L$  E PENSIAMOLI COME  
 ONDE (TANTO CONOSCIAMO LA RELAZIONE  
 DI DE-BROGLIE).



EQ. ONDE  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$

UNA SOLUZIONE GENERALE È

$$\psi(x) = A e^{i(kx - \omega t)} + B e^{i(-kx - \omega t)}$$

AVENDO I FOTONI VINCOLATI IN UNA SCATOLA (S. POTREBBE PENSARE COME BUCA INFINITA) HO LE CONDIZIONI AL CONFINO

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi(L) = 0 \end{cases} \quad \forall t$$

MI ASPETTO PERÒ CHE LE SOLUZIONI SIANO ONDE STAZIONARIE



LO VEDO ESPLICITAMENTE:

$$\psi(0) = A e^{-i\omega t} + B e^{-i\omega t} = (A+B) e^{-i\omega t}$$

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow B=-A$$

$$\Rightarrow \psi(x) = A e^{-i\omega t} [e^{ikx} - e^{-ikx}]$$

$$= 2i A e^{-i\omega t} \sin(kx)$$

IN PIÙ

$$\psi(L) = 2i A e^{-i\omega t} \sin(kL)$$

$$\psi(L) = 0 \Rightarrow kL = \pi m \quad m \in \mathbb{Z}$$

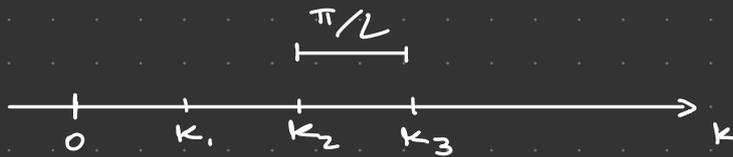
QUINDI ONDE ESCE LA CONDIZIONE (ANALOGA ALLE STAZIONARIE)

$$L = m \frac{\lambda}{2} \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \lambda_m = \frac{2L}{m}$$

$$\Rightarrow k_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} = \frac{2\pi m}{2L} = \frac{\pi m}{L}$$

QUINDI  $k$  È QUANTIZZATO E NELLO SPAZIO  
DELLE  $k$  ABBIAMO UN SET DI VALORI  
DISCRETI (ED EQUISPAZIATI) DI POSSIBILI VALORI  
DI  $k$ :



È NOTA CHE SONO VALORI POSITIVI ( $k$   
NELLE ONDE STAZIONARIE SONO DEFINITI  
SENZA SEGNO) INFATTI VALORI CON SEGNO  
OPPOSTO A QUELLO DI UN FATTORE DI  
FASE

$$\psi_k(x, t) = z \hat{a} e^{-i\omega t} \sin(kx)$$

$$\psi_{-k}(x, t) = -z \hat{a} e^{-i\omega t} \sin(kx)$$

NOTA ANCHE SONO VALORI DISTANZIATI, DA  
UNA QUANTITÀ

$$\Delta k = \frac{\pi}{L}$$

OSS CONSIDERIAMO IL SISTEMA CONTINUO PERCHÈ  
 $\frac{\pi}{L} \ll \downarrow$  ESSENDO  $L$  UNA LUNGHEZZA  
MACROSCOPICA.

NB PER OGNI VALORE DI  $k$  ABBIAMO 2  
STATI POSSIBILI (2 POLARIZZAZIONI  
POSSIBILI DELLA LUCE), QUINDI C'È  
DEGENERAZIONE.  
IL FATTORE 2 NELLE FORMULE CHE  
SEGUONO È PER QUELLO.

NON SO ANCORA CALCOLARE  $\frac{dn_s}{dE}$  MA POSSO TROVARE LA DENSITÀ DI STATI NELLO SPAZIO  $k$

$$\frac{dn_s}{dk} = \frac{z}{\Delta k} = \frac{z}{\pi/L} = \frac{zL}{\pi}$$

PER UNITÀ DI VOLUME NELLO SPAZIO  $k$  AVRO'

$$\frac{dn_s}{dk} = \frac{z}{\pi} L \frac{1}{L} = \frac{z}{\pi}$$

QUESTA COSA MI INTERESSAVA POICHÈ POI MI PERMETTE DI RICAVARE

$$g_E(E) = \frac{dn_s}{dE} = \frac{dn_s}{dk} \frac{dk}{dE} = \frac{z}{\pi} \frac{dk}{dE}$$

E PER L'ESPRESSIONE DI  $\frac{dk}{dE}$  USIAMO LA RELAZIONE DI DISPERSIONE:

$$\begin{cases} \psi_k(x,t) = z \sin A e^{-i\omega t} \sin(kx) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\omega^2 \psi = -c^2 k^2 \psi \Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2$$

$$\Rightarrow \omega = ck \Rightarrow E = \hbar\omega = \hbar ck$$

QUINDI

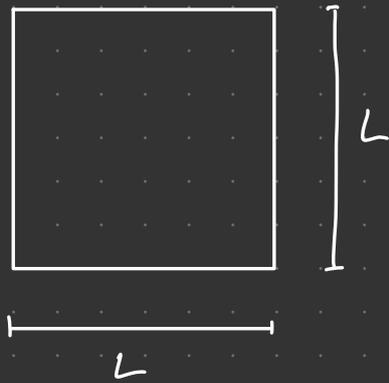
$$\frac{dk}{dE} = \frac{1}{\hbar c}$$

COSÌ TROVO

$$g(E) = \frac{z}{\pi} \frac{1}{\hbar c} = \frac{4}{\hbar c}$$

CHE È UN NUMERO COSTANTE IN ENERGIA.

# PASSIAMO AL CASO BIDIMENSIONALE



AVREMO ONDE STAZIONARIE  
IN 2 DIMENSIONI E  
LE CONDIZIONI

$$L = m \frac{\lambda_x}{2}$$

$$L = m \frac{\lambda_y}{2}$$

$$m, m \in \mathbb{N}$$

CHE PORTANO A

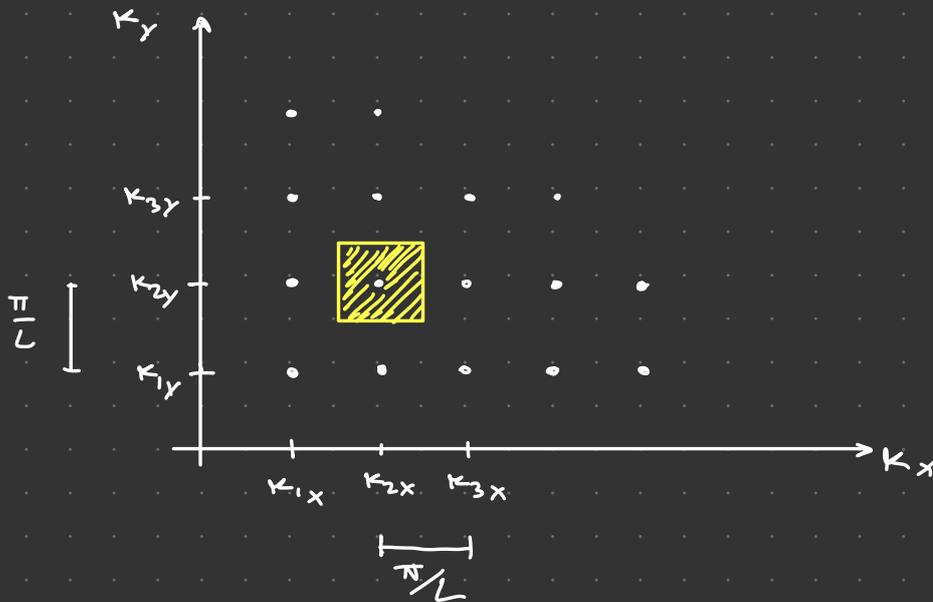
$$k_{x,m} = \frac{\pi}{L} m$$

$$m, m \in \mathbb{N}$$

$$k_{y,m} = \frac{\pi}{L} m$$

SEMPRE QUANTIZZATE, COME IN 1 DIMENSIONE.

QUINDI GLI SPAZI CONTEGGIABILI NELLO SPAZIO  
DELLE  $k$  SARANNO:



NOTA ANCHE QUI OGNI PUNTO SI PORTA  
DIETRO LA DEGENERAZIONE DELLA DOPPIA  
POLARIZZAZIONE.

LA DENSITÀ DI STATI NELLO SPAZIO  $k$

$$\frac{dN_s}{dk_x dk_y} = \frac{2}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2} = \frac{2L^2}{\pi^2}$$

PER UNITÀ DI VOLUME DELLO SPAZIO FISICO

$$\frac{dm_s}{dk_x dk_y} = \frac{2L^2}{\pi^2} \frac{1}{L^2} = \frac{2}{\pi^2}$$

CALCOLIAMO LA DENSITÀ IN ENERGIA DI STATI, PER UNITÀ DI VOLUME NELLO SPAZIO FISICO

$$g(E) = \frac{dm_s}{dE} = \frac{dm_s}{dk} \frac{dk}{dE} = \frac{1}{\hbar c} \frac{dm_s}{dk}$$

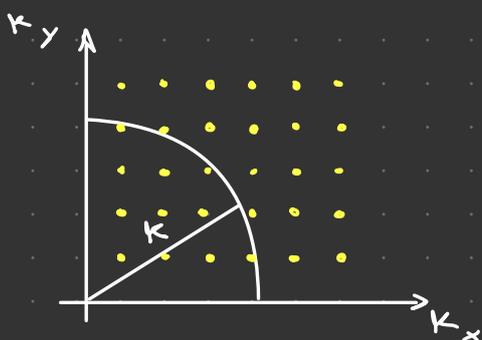
PERÒ NOI ABBIAMO  $\frac{dm_s}{dk_x dk_y}$  E NON  $\frac{dm_s}{dk}$ !  
NELLA RELAZIONE DI DISPERSIONE ABBIAMO

$$E = \hbar c k$$

MODULO DI  $\vec{k} = (k_x, k_y)$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

CALCOLIAMO  $m_s(0 \div k) = \#$  STATI (PER UNITÀ DI VOLUME NELLO SPAZIO FISICO) CON UN NUMERO D'ONDA (IN MODULO) COMPRESO TRA 0 E  $k$ :



$$\begin{aligned} m_s(0 \div k) &= \frac{dm_s}{dk_x dk_y} \cdot \left( \text{VOLUME CONSIDERATO NELLO SPAZIO } k \right) \\ &= \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{4} \pi k^2 \\ &= \frac{k^2}{2\pi} \end{aligned}$$

QUINDI ORA POSSIAMO CALCOLARE

$$\frac{dm_s}{dk} = \frac{d}{dk} \left( \frac{k^2}{2\pi} \right) = \frac{k}{\pi}$$

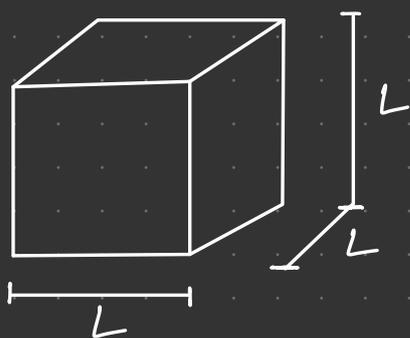
E QUINDI

$$g(E) = \frac{1}{\hbar c} \frac{dm_s}{dk} = \frac{1}{\hbar c} \frac{k}{\pi} \quad k = \frac{E}{\hbar c}$$

$$= \frac{1}{\hbar c} \frac{1}{\pi} \frac{E}{\hbar c} = \frac{E}{\pi \hbar^2 c^2} = \frac{4\pi}{\hbar c^2} E$$

NOTA NON SI HA PIÙ  $g(E)$  COSTANTE IN ENERGIA.

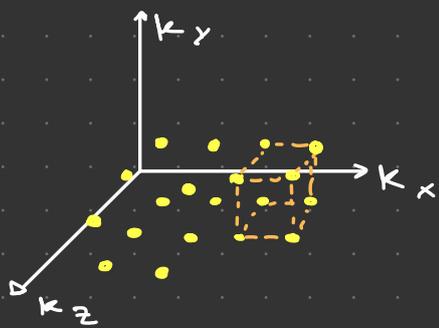
GUARDIAMO ORA IL CASO TRIDIMENSIONALE, IN CUI FAREMO SOSTANZIALMENTE GLI STESSI PASSAGGI.



AVREMO IN QUESTO CASO ONDE STAZIONARIE TRIDIMENSIONALI

$$k_{x_m} = \frac{\pi}{L} m ; \quad k_{y_m} = \frac{\pi}{L} m ; \quad k_{z_\ell} = \frac{\pi}{L} \ell \quad m, m, \ell \in \mathbb{N}$$

LO SPAZIO  $k$  SARANNO :



È UNA GRIGLIA CUBICA DI PUNTI SPAZIATI DI  $\frac{\pi}{L}$ .

NOTA ANCHE ORA AVREMO IN OGNI PUNTO UNA DEGENERAZIONE 2 (POLARIZZAZIONE).

AVENDO VALORI DI  $k$  DEFINITI POSITIVI AVREMO PUNTI SOLO IN 1 OTTANTE DELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE.

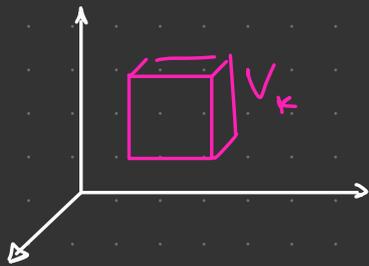
LA DENSITÀ DI STATI NELLO SPAZIO  $k$  È

$$\frac{dN_s}{dk_x dk_y dk_z} = \frac{2}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3} = \frac{2L^3}{\pi^3}$$

PER UNITÀ DI VOLUME NELLO SPAZIO FISICO

$$\frac{dM_s}{dk_x dk_y dk_z} = \frac{2L^3}{\pi^3} \frac{1}{L^3} = \frac{2}{\pi^3} \leftarrow \text{COSTANTE}$$

NOTA SE PRENDO UN QUALSIASI VOLUME  $V_k$  NELLO SPAZIO  $k$  POSSO OTTENERE IL # DI STATI IN QUEL VOLUME COME



$$M_s = \int_{V_k} \left( \frac{2}{\pi^3} \right) dk_x dk_y dk_z$$

HA ATTENZIONE  $[M_s] = m^{-3}$  POICHÈ È PER UNITÀ DI VOLUME NELLO SPAZIO FISICO

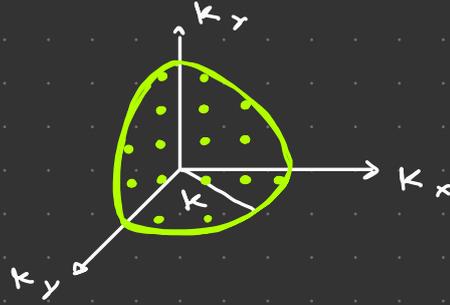
ANCHE IN QUESTO CASO CALCOLO  $m_s(0 \div k) = \#$  DI STATI (PER UNITÀ DI VOLUME NELLO SPAZIO FISICO) CON MODULO DI  $k$  COMPRESO TRA 0 E  $k$ .

$$\text{ORA } k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$E = \hbar c k$$

OSSERVAZIONE CHE  $E$  DIPENDE SOLO DAL

MODULO DI  $k$ , QUINDI ABBIAMO UNA SORTA DI INSIEME DI SUPERFICIE SFERICHE (IN UN SOLO OTTANTE) IN CUI E RIMANE LA STESSA.



TORNIAMO AI NOSTRI CONTI

$$M(0 \div k) = \frac{dM_s}{dk_x dk_y dk_z} \left( \begin{array}{l} \text{VOLUME CONSIDERATO} \\ \text{NELLO SPAZIO} \\ \text{DELLE } k \end{array} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi^3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi k^3 = \frac{k^3}{3\pi^2}$$

LA CONSEGUENZA

$$\frac{dM_s}{dk} = \frac{k^2}{\pi^2}$$

CHE NON È COSTANTE E MI DICE CHE PIÙ GRANDE PRENDO  $k$  E PIÙ STATI HO (PIÙ OTTANTE GUARDO E PIÙ STATI HO)

QUINDI

$$g(E) = \frac{dM_s}{dE} = \frac{dM_s}{dk} \frac{dk}{dE} = \frac{k^2}{\pi^2} \frac{1}{\hbar c} = \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\hbar c}$$

$$= \frac{E^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} = \frac{8\pi}{\hbar^3 c^3} E^2$$

VERIFICA DIMENSIONALE

$$[g(E)] = \left[ \frac{E^2}{\hbar^3 c^3} \right] = J^2 J^{-3} s^{-3} m^{-3} s^3 = J^{-1} m^{-3}$$

IL CHE TORNA PER POICHÈ  $g(E)$  È UNA DENSITÀ DI ENERGIA PER UNITÀ DI VOLUME FISICO.

NOTA QUA LA DIPENDENZA DI  $g(E)$  DALL'ENERGIA È ANCORA PIÙ FORTE ED È QUADRATICA ED IN GENERALE AD ENERGIE ALTE HO PIÙ STAT. DISPONIBILI CHE AD ENERGIE BASSE.

QUINDI LA DENSITÀ ENERGETICA DI FOTONI PER UNITÀ DI VOLUME NELLO SPAZIO FISICO È

$$\frac{dn}{dE} = g(E) \psi_{BE}(E) = \frac{8\pi}{h^3 c^3} \frac{E^2}{\exp\left(\frac{E}{kT}\right) - 1}$$

CHE È UNA FORMULAZIONE DELLA LEGGE DI PLANCK.

VERIFICA DIMENSIONALE:

$$\left[ \frac{dn}{dE} \right] = \neq \text{m}^{-3} \text{J}^{-1}$$

NUMERO DI FOTONI PER UNITÀ DI VOLUME E DI ENERGIA

$$\left[ \frac{8\pi}{h^3 c^3} \frac{E^2}{\exp\left(\frac{E}{kT}\right) - 1} \right] = \text{J}^{-3} \text{m}^{-3} \text{m}^{-3} \text{J}^2 = \text{J}^{-1} \text{m}^{-3} \checkmark$$

SONO UTILI ANCHE LE LEGGI SCRITTE IN TERMINI DI FREQUENZA E LUNGHEZZA D'ONDA, OSSIA, TROVARE LE DENSITÀ IN FREQUENZA E IN LUNGHEZZA D'ONDA DI FOTONI PER UNITÀ DI VOLUME.

SFRUTTIAMO  $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

QUINDI

$$\frac{dn}{d\nu} = \frac{dn}{dE} \frac{dE}{d\nu} = \frac{8\pi}{h^3 c^3} \frac{(h\nu)^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \cdot h = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

VERIFICA DIMENSIONALE:

$$[\dots] = m^{-3} \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} = m^{-3} \cdot 10^1 = \frac{m^{-3}}{10^{-1}} \quad \checkmark$$

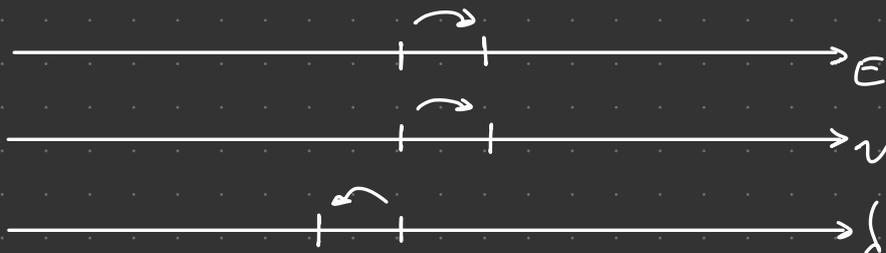
PER LA LUNGHEZZA D'ONDA

$$\begin{aligned} \frac{dm}{d\lambda} &= \frac{dm}{dE} \frac{dE}{d\lambda} = \frac{8\pi}{h^3 c^3} \frac{h^2 c^2}{\lambda^2} \frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda kT}) - 1} \cdot \left(-\frac{hc}{\lambda^2}\right) \\ &= -\frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda kT}) - 1} \end{aligned}$$

VERIFICA DIMENSIONALE:  $[\dots] = m^{-4} \quad \checkmark$

OSS

IL SEGNO " - " NON È  
SIGNIFICATIVO, STA SOLO A  
SE CRESCO IN REALTÀ IN ENERGIA  
PARTICOLARMENTE SIGNIFICARE CHE  
O FREQUENZA



PER QUESTO MOTIVO LO POSSO  
TOGLIERE (COSÌ NON DEVO NEPPURE  
PREOCCUPARMI DEGLI ESTREMI DI  
INTEGRAZIONE, POICHÈ SO TENESSI IL  
" - " DOVREI INTEGRARE DAL MAX AL  
(λ MIN).

RASSUMENDO: DENSITÀ DI FOTONI PER UNITÀ DI VOLUME

$$\left\{ \begin{array}{l} \int E: \frac{dm}{dE} = \frac{8\pi}{h^3 c^3} \frac{E^2}{\exp(E/k_B T) - 1} \\ \int \nu: \frac{dm}{d\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \\ \int \lambda: \frac{dm}{d\lambda} = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda k_B T}) - 1} \end{array} \right.$$

LA GRANDEZZA CHE CI INTERESSA QUANTIFICARE  
 OLTRE  $\frac{dm}{dE}$  È LA DENSITÀ DI ENERGIA  
 (ANCORA IN UNITÀ DI VOLUME)

$$\rho_E(E) ; \rho_E(\nu) ; \rho_E(\lambda)$$

SARANNO

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{IN } E : \rho_E(E) = E \cdot \frac{dm}{dE} = \frac{8\pi}{h^3 c^3} \frac{E^3}{\exp\left(\frac{E}{kT}\right) - 1} \\ \text{IN } \nu : \rho_E(\nu) = h\nu \frac{dm}{d\nu} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \\ \text{IN } \lambda : \rho_E(\lambda) = \frac{hc}{\lambda} \frac{dm}{d\lambda} = 8\pi \frac{hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} \end{array} \right.$$

C'È ANCORA UN TERZO MODO DI FORMULARE  
 LA LEGGE DI PLANCK, CHE È QUELLO CHE  
 CI DÀ L'INTENSITÀ DI RADIAZIONE  
 (NORMALIZZATA PER ANGOLO SOLIDO)

$$I = \rho_E \cdot c \cdot \frac{1}{4\pi}$$

↓ DENSITÀ DI ENERGIA
 ↓ VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE
 → ANGOLO SOLIDO

DIMENSIONALMENTE:

$$[I] = \frac{J}{m^3} \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{W}{m^2}$$

IN BASE A  
 COME SCRIVO  
 $\rho_E(E, \nu, \lambda)$

OTTENGO LE 3 RELAZIONI :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{UNITÀ DI } E: \quad I_E(E) = \frac{2}{h^3 c^3} \frac{E^3}{\exp\left(\frac{E}{kT}\right) - 1} \\ \text{UNITÀ DI } \nu: \quad I_E(\nu) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \\ \text{UNITÀ DI } \lambda: \quad I_E(\lambda) = 2hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} \end{array} \right.$$

DIREZIONALMENTE SI HA PER CIASCUNO

$$[I_E(\bullet)] = \frac{W}{m^2} \frac{1}{\bullet}$$

SE INTEGRO LA POTENZA IRRADIATA (CHE È SOSTANZIALMENTE UNA RADIANZA) PER UNITÀ DI ANGOLO SOLIDO IN UN INTERVALLO ENERGETICO, DI FREQUENZA O DI LUNGHEZZA D'ONDA, TROVO DIMENSIONALMENTE

$$\left[ \int I(E) dE \right] = \left[ \int I(\nu) d\nu \right] = \left[ \int I(\lambda) d\lambda \right] = \frac{W}{m^2}$$

OSSIA UN FLUSSO DI ENERGIA.

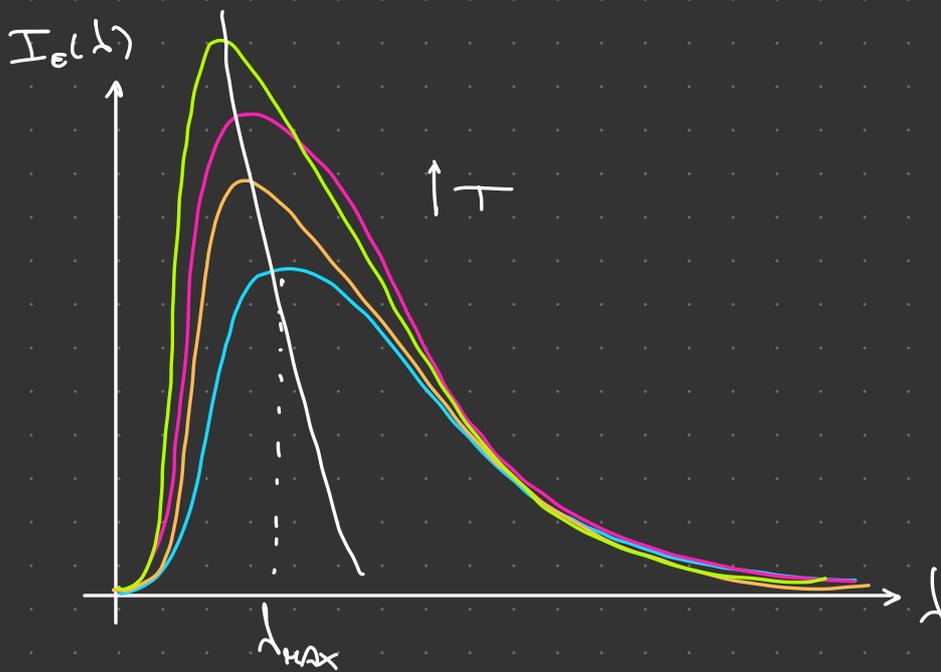
# LEGGE DI WIENN

POSSIAMO GRAFICARE LO SPETTRO DI EMISSIONE DEL CORPO NERO IN FUNZIONE DI TEMPERATURA E NOTARE CHE VARIANDO LA TEMPERATURA VARIA L'ENERGIA IRRADIATA. SE AUMENTIAMO LA TEMPERATURA AUMENTA L'ENERGIA IRRADIATA E PER DI PIÙ LA LUNGHEZZA D'ONDA IN CUI SI HA LA MASSIMA INTENSITÀ DI EMISSIONE, TRASLA VERSO MINORI  $\lambda_{MAX}$ .

LA LEGGE DI WIENN LEGA I VALORI DI  $\lambda_{MAX}$  E LA TEMPERATURA  $T$ .

$$\lambda_{MAX} T = b$$

→ COSTANTE DI WIENN



NOTA

$$[T] = K$$

POSSIAMO DERIVARE LA LEGGE DI WIENN BANALMENTE CERCANDO IL MASSIMO →

$$I_e(\lambda) = 2hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}$$

FACCIAMO

CONTI :

$$\frac{dI_e}{d\lambda} = 2hc^2 \left\{ \frac{(-5)\lambda^{-6}}{\left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right]} + \frac{\lambda^{-5} \frac{hc}{kT}}{\left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right]^2} \lambda^{-2} \exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) \right\} = 0$$

$$= 2hc^2 \frac{\lambda^{-7}}{\left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right]} \left\{ -5\lambda + \frac{hc}{kT} \frac{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)}{\left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right]} \right\} = 0$$

RISOLVENDO QUESTA EQUAZIONE OTTENGO TUTTI I PUNTI A DERIVATA NULLA. PERÒ POSSO NOTARE CHE ANCHE  $\lambda \rightarrow 0$  E  $\lambda \rightarrow \infty$  Danno DERIVATA NULLA

$$\lambda \rightarrow 0 : \quad \frac{1}{\lambda} \rightarrow \infty$$

$$\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) \rightarrow \infty$$

$$\exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right) \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{2h^2 c^3}{k_B T} \underbrace{\frac{1}{(\rightarrow 0)}}_{\text{POLI.}} \underbrace{\frac{1}{(\rightarrow \infty)}}_{\text{exp}} \left[ (\rightarrow 0) + \frac{1}{(\rightarrow 1)} \right] \rightarrow 0$$

$$\lambda \rightarrow \infty : \quad \frac{1}{\lambda} \rightarrow 0$$

$$\exp\left(\pm \frac{hc}{\lambda k_B T}\right) \sim 1 \pm \frac{hc}{\lambda k_B T}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{2h^2 c^3}{k_B T} \frac{1}{\lambda^7} \left( \rightarrow \frac{hc}{\lambda kT} \right) \left[ -5 \frac{\lambda k_B T}{hc} + \frac{1}{\left( \rightarrow \frac{hc}{\lambda kT} \right)} \right]$$

$$= \frac{2h^2 c^3}{k_B T} \frac{1}{\lambda^7} \frac{\lambda kT}{hc} \left[ -5 \frac{\lambda k_B T}{hc} + \frac{\lambda kT}{hc} \right]$$

$$= 2c \frac{1}{\lambda^6} (-4) \frac{\lambda k_B T}{hc} \rightarrow 0$$

MA I PUNTI  $\lambda \rightarrow 0$  E  $\lambda \rightarrow \infty$  IDENTIFICANO  
 DEI PUNTI DI MINIMO DELLA FUNZIONE  
 $I(\lambda)$ , CHE A NOI NON INTERESSANO.

RIPRENDIAMO L'EQUAZIONE IN PRIMA

$$-5\lambda + \frac{hc}{kT} \frac{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} = 0$$

$$-5 \frac{\lambda kT}{hc} + \frac{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} = 0$$

DEFINIAMO  $\frac{hc}{\lambda kT} = x$

$$-\frac{5}{x} + \frac{e^x}{e^x - 1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{5}{x} \Rightarrow \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{5}{x}$$

$$\Rightarrow x = 5(1 - e^{-x})$$

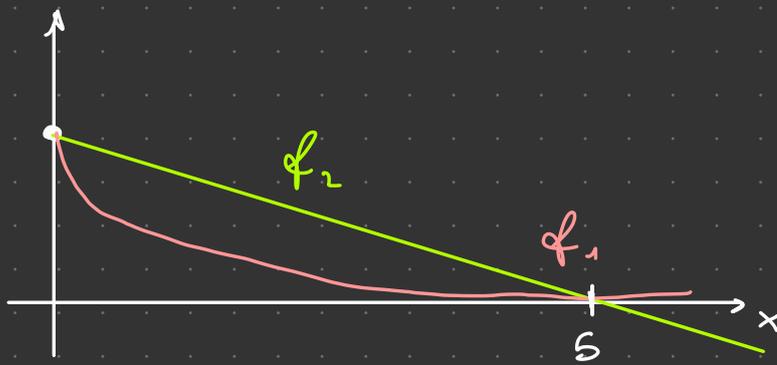
$$\Rightarrow e^{-x} = -\frac{1}{5}x + 1$$

SIAMO GIUNTI AD UNA EQUAZIONE  
 TRASCENDENTE CHE NON È RISOLVIBILE PER  
 VIA ANALITICA. LA RISOLVIAMO GRAFICAMENTE  
 IN SEGUITO CERCANDO IL PUNTO IN  
 CUI

$$e^{-x} = f_1(x)$$

$$-\frac{1}{5}x + 1 = f_2(x)$$

SI INTERSECANO.



NOTA  $f_1'(0) = -1 < f_2'(x) = -\frac{1}{5}$

I PUNTI IN CUI LE SOLUZIONI  
 INTERSECANO SONO  $x=0$  CHE È GIÀ  
 NOTO POICHÈ  $x \rightarrow 0$  CORRISPONDE A  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  
 L'ALTRO PUNTO DI INTERSEZIONE È  
 $x_0 \approx 5$

VEDIAMO

$$x_0 \equiv \frac{hc}{\lambda_{\max} kT} = 5$$

$$\Rightarrow \lambda_{\max} T = \frac{hc}{5kT}$$

È  $\lambda_{\max}$  PER  
 NOTA CHE OLTRE AD AVER TROVATO  
 ABBIAMO TROVATO UNA STIMA  
 LA COSTANTE DI WIEN  $b$

$$b = \frac{hc}{5k} \quad [b] = \frac{J \cdot m}{J \cdot K^{-1}} = m \cdot K$$

NUMERICAMENTE

$$b = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{5 \cdot \underbrace{k_B T_{\text{AMB}}}_{26 \text{ meV}}} T_{\text{AMB}}$$

$$= \frac{1,224 \cdot 10^3 \text{ eV} \cdot 10^{-9} \text{ m}}{5 \cdot 26 \cdot 10^{-3} \text{ eV}} \cdot 3 \cdot 10^2 \text{ K}$$

$$\approx \frac{1.224 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \text{ m } 3 \cdot 10^2 \text{ K}}{5.25 \cdot 10^{-3}}$$

$$\sim 3 \text{ mm K}$$

## ESEMPI

- VEDIAMO SE IL SOLE È GIALLO

$$T \sim 5500 \text{ K (SUPERFICIE DEL SOLE)}$$

$$\lambda_{\text{MAX}} = \frac{3 \text{ mm K}}{5.5 \cdot 10^3 \text{ K}} = \frac{3}{5.5} 10^{-6} \text{ m}$$

$$= 0,55 \mu\text{m} = 550 \text{ nm}$$

→ CIRCA GIALLO

- VEDIAMO CHE LUNGHEZZE D'ONDA EMETTIAMO  
A  $T \sim 300 \text{ K}$  AMBIENTE ( $\sim 27^\circ\text{C}$ )

$$\lambda_{\text{MAX}} = \frac{3 \text{ mm K}}{300 \text{ K}} = 10^{-2} \text{ mm} = 10 \mu\text{m}$$

↓  
INFRAROSSO

# LEGGE DI STEFAN - BOLTZMANN

CALCOLIAMO LA POTENZA IRRADIATA TOTALE DEL CORPO NERO (A TEMPERATURA  $T$ ) IMPOSTANDO IL CALCOLO IN FUNZIONE DELLA FREQUENZA.

RICORDIAMO LA POTENZA IRRADIATA PER UNITÀ DI ANGOLO SOLIDO E FREQUENZA:

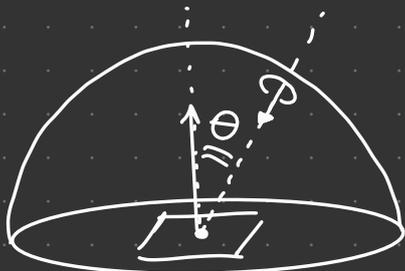
$$I_e(\nu) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

NOI VOGLIAMO LA POTENZA DI RADIAZIONE IRRADIATA PER  $\text{mm}^2$  PER STERADIANTE

$$J = \int_0^{\infty} I_e(\nu) d\nu \int d\Omega$$

PERÒ ATTENZIONE, L'INTEGRAZIONE SULL'ANGOLO SOLIDO LA DEVO FARE CONSIDERANDO:

- L'EMISSIONE DI UN ELEMENTO DI SUPERFICIE INTERNA DELLA CAVITÀ DEL CORPO NERO SU META DELL'ANGOLO SOLIDO TOTALE.
- TENER CONTO DELLA LEGGE DI LAMBERT. LA QUALE TIENE CONTO DELLA DIVERSA EFFICIENZA DELLA RADIAZIONE INCIDENTE SULLA SUPERFICIE CONSIDERATA, OSSIA, CHE LA SUPERFICIE VIENE IRRADIATA IN MODO MENO EFFICIENTE SE LA RADIAZIONE ARRIVA DAI LATI, MENTRE INVECE È MOLTO PIÙ EFFICIENTE SE LA RADIAZIONE VIENE DALL'ALTO.



CIO' MI DICE CHE

$$I \propto \cos\theta$$

QUINDI IL TERMINO ANGOLARE È

$$\begin{aligned}\int d\Omega &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} 2\pi \int_0^{\pi/2} 2\sin\theta \cos\theta d\theta = \pi \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2} \cos 2\theta \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} [-1 - 1] = \pi\end{aligned}$$

QUINDI ABBIAMO

$$\begin{aligned}J &= \int d\Omega \int_0^{\infty} I(\nu) d\nu \\ &= \pi \frac{2h}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu\end{aligned}$$

$$x = \frac{h\nu}{kx} \Rightarrow \nu = \frac{kT}{h} x$$

$$= \pi \frac{2h}{c^2} \frac{(kT)^4}{h^4} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$= \frac{2\pi (kT)^4}{c^2 h^3} \cdot \zeta(4) \Gamma(4)$$

$$= \frac{2\pi (kT)^4}{c^2 h^3} \cdot \frac{2^{4-1} \pi^4 |B_4|}{4!} 3!$$

$$= \frac{2\pi (kT)^4}{h^3 c^2} \frac{\pi^4}{15}$$

$$= \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} T^4$$

DI SOLITO SI INDICA

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} \equiv \text{CONSTANTE DI STEFAN - BOLTZMANN}$$

E ABBIAMO DUNQUE

$$J = \sigma T^4$$

LEGGE DI STEFAN-BOLTZMANN

POSSIAMO STIMARE  $\sigma$ :

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{2 \pi^5 (14 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1})^4}{15 (3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1})^2 (6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s})^3} \\ &= \frac{2 \pi^5 (14)^4}{15 \cdot 9 (6,6)^3} 10^{-92 - 16 + 102} \text{ J}^4 \text{ K}^{-4} \text{ m}^{-2} \text{ s}^2 \text{ J}^{-3} \text{ s}^{-3} \\ &= (6 \cdot 10^2) \cdot 10^{-6} \text{ J s}^{-1} \text{ K}^{-4} \text{ m}^{-2} \\ &= 6 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}\end{aligned}$$

LA LEGGE DI SB È IMPORTANTE PERCHÈ PERMETTE DI FARE TERMOMETRIA, OVERO DI USARE TECNICHE DI MISURA DELLA T BASATE SULLA RADIOMETRIA.

IL CHE VUOL DIRE CHE POSSO MISURARE LA T DI UN CORPO ATTRAVERSO TECNICHE RADIOMETRICHE BASATE SULLA LEGGE DI WIENN O SB.

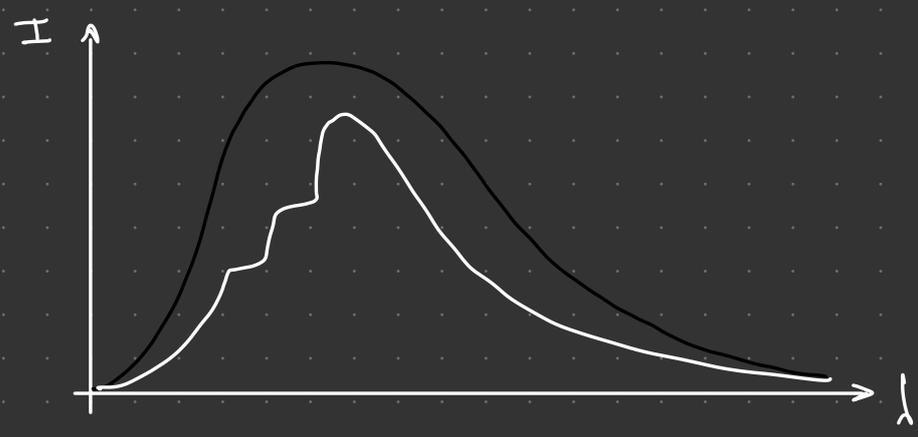
SE SFRUTTO LA LEGGE DI WIENN MI BASTA TROVARE LA  $\lambda_{\text{MAX}}$ , COSÌ POSSO TROVARE LA T A CUI SI TROVA. ESEMPLI SI TROVANO IN ASTROFISICA O QUANDO SI HA UN OGGETTO INCANDESCENTE.

PER SFRUTTARE SB INVECE DEVO AVERE UN BUON RIVELATORE DI RADIAZIONE, OSSIA CHE SIA IN GRADO DI MISURARE L'EMISSIONE DI UN CORPO SU TUTTO LO SPETTRO EM, O COMUNQUE IN UNA BUONA PORZIONE. COSÌ POSSO STIMARE LA TEMPERATURA USANDO SB.

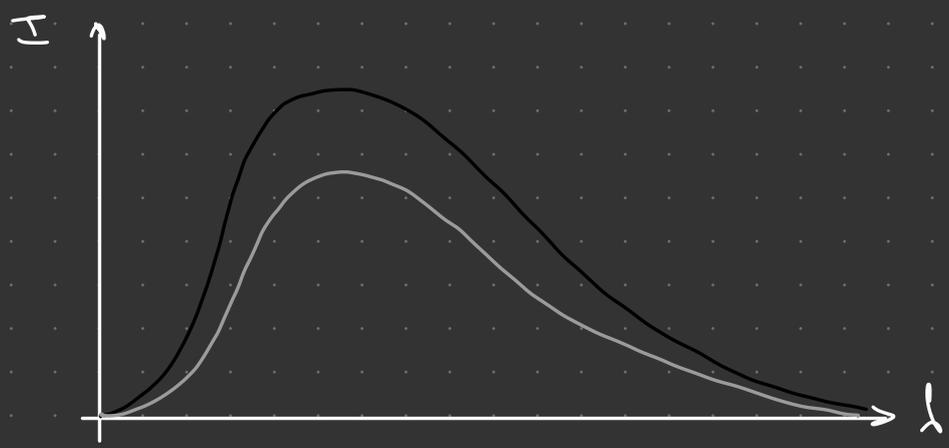
NELL'ESPRESSIONE DI  $I(\nu)$  PER CORPI REALI COMPARE  $\epsilon(T, \lambda) \equiv$  **EMISSIVITÀ SPETTRALE** CHE SERVE DA TENERE CONTO DEL FATTO CHE IN NATURA NON ESISTONO CORPI NERI PERFETTI, OSSIA CHE ASSORBONO TUTTA LA RADIAZIONE INCIDENTE. NOTA CHE  $\epsilon \in [0, 1]$  E SCRIVIAMO

$$I(\nu) = \epsilon(T, \lambda) \frac{2h}{c} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} = \epsilon(T, \lambda) \frac{I(\nu)_{BB}}{\epsilon}$$

$\epsilon$  NON È UN NUMERO, POICHÉ IN GENERALE UN CORPO AL VARIARE DI  $\lambda$  PUÒ ESSERE PIÙ O MENO ESSERE ASSIMILABILE AD UN CORPO NERO.



SE  $\epsilon(T, \lambda) \equiv \epsilon(T)$ , OVERO NON DIPENDE DA  $\lambda$ , SI PARLA DI **CORPI GRIGI**. PER CUI  $I(\nu)$  È SOLO SCALATA DI UNA COSTANTE



NEL CASO DI CORPO GRIGIO LE DUE LEGGI POSSONO MODIFICARSI:

- LA LEGGE DI WIENN RESTA INVARIATA

$$\lambda_{\text{MAX}} T = b$$

- LA LEGGE DI SB SI MODIFICA IN UN MODO GESTIBILE

$$J = \pi \int_0^{\infty} d\nu I(\nu) = \pi \int_0^{\infty} d\nu \epsilon(T) I_{\text{BB}}(\nu) \\ = \epsilon(T) \sigma T^4$$

MA SE  $\epsilon = \epsilon(T, \lambda)$  ALLORA LA LEGGE  
DI SB DIVENTA PIÙ COMPLESSITA' POICHÈ  
DEVO INTEGRARLA.  
È PER DI PIÙ LA LEGGE DI WIENN  
NON VALE PIÙ.

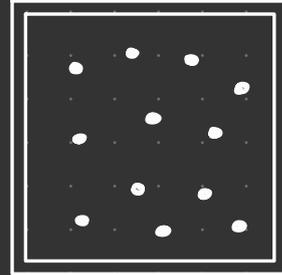
# EMISSIONE STIMOLATA È LASER

CERCHIAMO DI CAPIRE COME UN CORPO NERO SCAMBIA QUANTI DI ENERGIA, CIOÈ ASSORBE ED EMETTE FOTONI, CON UN GAS DI FOTONI IN ESSO CONTENUTO E IN EQUILIBRIO TERMICO CON ESSO.

QUINDI ABBIAMO:

CAVITÀ DI CORPO NERO

GAS DI FOTONI  
TERMALIZZATO (CIOÈ ALLA  
STESSA TEMPERATURA)  
CON LA CAVITÀ.



UN FOTONE (DI QUALSIASI ENERGIA) PUÒ ESSERE CRESCIO DA TRANSIZIONI OTTICHE DEGLI ELEMENTI DELLA PARETE DEL CORPO NERO, MA ALL' STESSO TEMPO UN FOTONE DEL GAS PUÒ ESSERE ASSORBITO DALLE STESSO PARETI. PER CUI IL NUMERO DI FOTONI NON È STRETTAMENTE DEFINITO, MA NE RIUSCIAMO AD INDICARE SOLO UN NUMERO MEDIO, PROPRIO PERCHÈ I FOTONI VENGONO CONTINUAMENTE ASSORBITI ED CRESCI DALLE SUPERFICI INTERNE DELLA CAVITÀ.

IN QUESTO CAPITOLO CERCHIAMO DI STUDIARE LE PROBABILITÀ DI ASSORBIMENTO ED EMISSIONE DEI FOTONI SULLE PARETI. È UN MODELLO CHE SVILUPPÒ EINSTEIN E LE PROBABILITÀ SONO DETTE "COEFFICIENTI DI EINSTEIN".

IL CORPO NERO, COME GIÀ DETTO, ASSORBE ED EMETTE CON MASSIMA EFFICIENZA FOTONI SU TUTTO LO SPETTRO EM  $\Rightarrow$  VUOL DIRE CHE QUANDO OSSERVO UN FOTONE (DI QUALSIASI ENERGIA  $h\nu$ ) ALLORA DA QUALCHE PARTE C'È UNA COPPIA DI LIVELLI ENERGETICI (DEL TUTTO GENERALI, POSSONO ESSERE ENERGIE VIBRAZIONALI, STATI ELETTRONICI, MA PER RIMANERE GENERALI POSSIAMO ASSOCIARLI AI COSTITUENTI DELLA PARETE) LA CUI DIFFERENZA È PROPRIO  $h\nu$  E QUINDI IL FOTONE PUÒ VENIR ASSORBITO (ECCITANDO)

0 VENIRE EMESSO (DISECCITANDO).



NEL MODELLO DI EINSTEIN DESCRIVIAMO I RATE DI ASSORBIMENTO ED EMISSIONE DI FOTON, ATTRAVERSO I RATE DI TRANSIZIONE DI ECCITAZIONE / DISECCITAZIONE NEI SUDETTI SISTEMI A 2 LIVELLI.

IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO STAZIONARIO  $m_{1,2}$  SONO COSTANTI (CONDIZIONI STAZIONARIE)

$$\frac{dm_2}{dt} = 0$$

MA È UN EQUILIBRIO DINAMICO, PER CUI

$$\frac{dm_2}{dt} = \left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{ASS}} + \left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS}} = 0$$

MA I PROCESSI DI ASSORBIMENTO ED EMISSIONE SPONTANEA PERÒ NON SONO COSTANTI NEL TEMPO POICHÈ I FOTON VENGONO ASSORBITI ED EMESSI CONTINUAMENTE. SI HA

$$\left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS}} < 0$$

$$\left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{ASS}} > 0$$

AL LORO INTERNO DEVONO CONTENERE UNA STIMA DELLE PROPRIETÀ DI ASSORBIMENTO ED EMISSIONE → SALTANO FUORI I COEFFICIENTI DI EINSTEIN

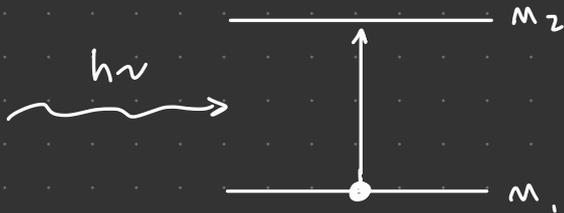
## DEFINIAMO

$$\frac{dM_{1,2}}{dt}$$

FREQUENZA  
RELATIVA  
TRANSIZIONE

DI VARIAZIONE DELLA  
POPOLAZIONE → RATEO DI

## ASSORBIMENTO



IN QUALCHE MODO IL  
FOTONO ECCITA IL  
SISTEMA E SI GENERA  
UN QUANTO

$M_2$  CRESCE DI 1

## AVREMO

$$\left. \frac{dM_2}{dt} \right|_{\text{ASS}} \propto M_1 \rho_E(\nu)$$

OSSIA, IL # DI ECCITAZIONI PER UNITÀ DI TEMPO È PROPORZIONALE AL NUMERO  $M_1$  (CHIARAMENTE PIÙ È POPOLATO  $M_1$ , TANTO SARÀ MAGGIORE LA PROBABILITÀ DI ASSORBIRE FOTONI) E ALLA DENSITÀ  $\rho_E$  DI ENERGIA NEL GAS DI FOTONI DI FREQUENZA  $\nu$  (TANTA PIÙ RADIAZIONE AD UNA CERTA ENERGIA HO, PIÙ SARÀ QUELLA CHE POSSO ASSORBIRE).

INTRODUCIAMO

IL

COEFFICIENTE

DI

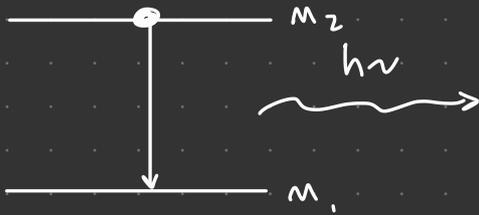
PROPORZIONALITÀ

$B_{12}$

$$\left. \frac{dM_2}{dt} \right|_{\text{ASS}} = B_{12} \rho_E(\nu) M_1$$

$B_{12}$  INDICA IN QUALCHE MODO LA PROBABILITÀ INTRINSECA DI ASSORBIRE RADIAZIONE

## EMISSIONE



UN ELEMENTO DELLE PARETI SI DISECCITA, VIENE EMESSE UN FOTONE  $\Rightarrow$  LA POPOLAZIONE  $M_2$  DECRESCHE

AVREMO

$$\left. \frac{dM_2}{dt} \right|_{\text{EMISS SPONT.}} \propto -M_2$$

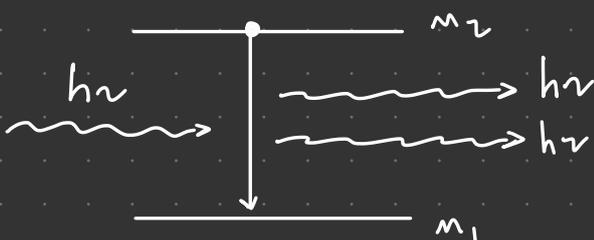
IL NUMERO DI DISECCITAZIONI PER UNITÀ DI TEMPO È PROPORZIONALE ALLA SOLA POPOLAZIONE DEL LIVELLO 2 (E NON HO TERMINI CHE RIGUARDANO DENSITÀ DI ENERGIA FOTONICA).

INTRODUCIAMO IL COEFFICIENTE DI PROPORZIONALITÀ  $A_{21}$

$$\left. \frac{dM_2}{dt} \right|_{\text{EMISS SPONT}} = -A_{21} M_2$$

LA NOTEVOLE INTUIZIONE DI EINSTEIN STA PERSÌ NEL FATTO CHE ESISTE ANCHE UN SECONDO PROCESSO DI DISECCITAZIONE: L'EMISSIONE STIMOLATA.

## EMISSIONE STIMOLATA



- NECESSITA DI UN FOTONE ENTRANTE
- VIENE EMESSE UN FOTONE
- LA POPOLAZIONE 2 DIMINUISCE

IL FOTONE ENTRANTE INTERAGENDO CON IL SISTEMA CREA UNA SORTA DI RISONANZA E STIMOLA

IL RILASAMENTO  $2 \rightarrow 1$ . IL FOTONE EMESSE PER EFFETTO DEL RILASAMENTO È CO-DIREZIONALE, COERENTE IN FASE (OVVIAMENTE OMO-CROMATICO) AL FOTONE "STIMOLANTE"

NOTA È UNA SORTA DI COSA INTERMEDIA TRA I DUE PROCESSI VISTI PRIMA, ABBIAMO UN FOTONE ECCITATO IN 2 (COME PER L'EMISSIONE SPONTANEA) E UN FOTONE ENTRANTE (COME NELL'ASSORBIMENTO), PERÒ ATTENZIONE, PERCHÈ IL FOTONE ENTRANTE ORA NON VIENE ASSORBITO, BENSÌ ECCITA IL SISTEMA ED ESCE INSIEME ALL'ALTRO FOTONE.

ORA AVREMO

$$\left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS STIM}} = - \rho_E(\nu) m_2 < 0$$

OVVIA ABBIAMO CHE IL # DI DISECCITAZIONI PER UNITÀ DI TEMPO È PROPORZIONALE ALLA POPOLAZIONE IN 2 E ALLA DENSITÀ DI ENERGIA NEL GAS DI FOTONI A FREQUENZA  $\nu$ .

INTRODUCIAMO IL COEFFICIENTE DI PROPORZIONALITÀ  $B_{21}$

$$\left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS STIM}} = - B_{21} \rho_E(\nu) m_2$$

E CHIAMIAMO APPUNTO

$$B_{12}, A_{21}, B_{21} = \text{COEFFICIENTI DI EINSTEIN}$$

CHE IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO SAPPIAMO CHE

$$\frac{dm_2}{dt} = \left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{ASS}} + \left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS SPONT}} + \left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS STIM}} = 0$$

$$= + B_{12} \rho_E(\nu) m_1 - A_{21} m_2 - B_{21} \rho_E(\nu) m_2 = 0$$

POSSIAMO CERCARE  $\rho_E(\nu)$ :

$$\Rightarrow \rho_E(\nu) [B_{12} m_1 - B_{21} m_2] = A_{21} m_2$$

$$\Rightarrow \rho_E(\nu) = \frac{A_{21} m_2}{B_{12} m_1 - B_{21} m_2}$$

$$= \frac{A_{21}}{B_{12} \frac{m_1}{m_2} - B_{21}}$$

$$= \frac{A_{21} / B_{12}}{\frac{m_1}{m_2} - \frac{B_{21}}{B_{12}}}$$

$$= \frac{\frac{m_1}{m_2} - \frac{B_{21}}{B_{12}}}{\frac{m_1}{m_2} - \frac{B_{21}}{B_{12}}}$$



COMPARE IL RAPPORTO TRA LE DUE POPOLAZIONI, PERÒ NON SAPPIAMO CHE STATISTICA USARE PER DESCRIVERLE. IN BASE AD UN CRITERIO DI MASSIMA GENERALITÀ, E NELL'IPOTESI DI ALTE DILUZIONI USIAMO LA STATISTICA CLASSICA, USANDO

$$g_1 \approx g_2$$

QUINDI (COME AVEVAMO QUALCHE CAPITOLO FA)

$$\frac{m_1}{m_2} = \exp\left(\frac{\Delta E}{k_B T}\right) = \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

COMPLESSIVAMENTE QUINDI

$$\rho_E(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12}} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - \frac{B_{21}}{B_{12}}}$$

ESPRESSIONE CHE POSSIAMO CONFRONTARE CON QUELLA NOTA DI PLANCK:

$$\rho_{\epsilon}(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

DAL CONFRONTO VEDIAMO

$$B_{12} = B_{21}$$

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

ASSORBIMENTO ED EMISSIONE STIMOLATA HANNO LE STESSA PROBABILITA' "UNITARIE"

IL PROCESSO DI EMISSIONE SPONTANEA PUO' ESSERE VISTO COME UN PROCESSO DI DECADIMENTO. VEDIAMO CHE  $[A_{21}] = T^{-1}$  QUINDI E' INTERPRETABILE COME IL TEMPO DI VITA PER EMISSIONE SPONTANEA DEL SISTEMA. SE CONSCIAMO QUESTO TEMPO, QUINDI A, OSSIA MEDIAMENTE OGNI QUANTO TEMPO HO 1 ELEMENTO CHE SI RILASSA IN MODO SPONTANEO, ALLORA POSSO TROVARE ANCHE B. CAPITA QUESTA COSA TRA ASSORBIMENTO ED EMISSIONE SPONTANEA POSSIAMO FARCI DOMANDE SULLE DIFFERENZE TRA EMISSIONE SPONTANEA E STIMOLATA. ABBIAMO IL SISTEMA IN UNO STATO ECCITATO E QUESTO PUO' DISCICCITARSI ED EMETTERE UN FOTONE IN MODO SPONTANEO OPPURE ESSERE STIMOLATO ED EMETTERNE UNO IN MODO STIMOLATO, CI CHIEDIAMO:

$$\left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS SPONT}} \stackrel{?}{\geq} \left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS STIM}}$$

FACCIAMO DUE CONTI PER VERIFICARLO: VEDIAMO IL RAPPORTO TRA I RATEI DI EMISSIONE SPONTANEA E STIMOLATA.

$$\frac{\left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS SPONT}}}{\left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS STIM}}} = \frac{A_{21} \cdot m_2}{B_{21} \rho_{\epsilon}(\nu) m_2} = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{\rho_{\epsilon}(\nu)}$$

$$= \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{1}{\rho_{\epsilon(\nu)}}$$

$$= \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1$$

SUPPONIAMO:  $T \sim T_{AMB}$

$\nu \sim \text{VISIBILE}$

$$\Rightarrow k_B T \sim 10 \text{ meV} \quad \Rightarrow \frac{h\nu}{k_B T} \gg 1$$

$$\Rightarrow \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) \gg 1$$

E DUNQUE ORDINI DI GRANDEZZA

$$\left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS SPONT}} \gg \left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS STIM}}$$

QUINDI CON  $T_{AMB} \sim T$  ABBIAMO CHE UN  
 IPOTETICO CORPO NERO IDEALE EMETTE MOLTA  
 PIÙ RADIAZIONE NEL VISIBILE CON EMISSIONE  
 SPONTANEA PIUTTOSTOCHÈ STIMOLATA.

LA DIFFERENZA GRANDE LA FA CHE  
 L'EMISSIONE STIMOLATA DIPENDE DALLA DENSITÀ  
 DI ENERGIA MENTRE QUELLA SPONTANEA NO.  
 A  $T_{AMB}$  ABBIAMO POCHISSIMA RADIAZIONE CON  
 LA  $\nu$  NEL VISIBILE E QUINDI STIMOLA  
 POCO IL SISTEMA AD EMETTERE IN MODO  
 STIMOLATO.

IL DISCORSO CAMBIA SE CAMBIO  $\nu$  E  $T$ .

↓  
 PAG DOPO

IN GENERALE:

$$\frac{h\nu}{kT} \rightarrow \infty \Rightarrow \left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS SPONT}} \gg \left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS STIM}}$$

$$\frac{h\nu}{kT} \rightarrow 0 \Rightarrow \left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS SPONT}} \ll \left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS STIM}}$$

QUINDI QUELLO CHE CONTA È COME L'ENERGIA DEL FOTONE SI RAPPORTA CON L'ENERGIA TERMICA.

POSSIAMO ANCHE RAPPORTARE I RATEI DI EMISSIONE TOTALE (SPONTANEA + STIMOLATA) E DI ASSORBIMENTO:

$$\frac{\left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EM}}}{\left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{ASS}}} = \frac{\left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS SPONT}} + \left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS STIM}}}{\left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{ASS}}}$$

$$= \frac{A_{21} m_2 + B_{21} \rho_E(\nu) m_2}{B_{12} \rho_E(\nu) m_1}$$

$$= \frac{A_{21} m_2}{B_{12} m_1 \rho_E(\nu)} + \frac{B_{21} m_2}{B_{12} m_1}$$

$$= \left[ \frac{A_{21}}{B_{12} \rho_E(\nu)} + \frac{B_{21}}{B_{12}} \right] \frac{m_2}{m_1}$$

$$= \left\{ \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{c^3}{8\pi h\nu^3} \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right] + 1 \right\} \frac{m_2}{m_1}$$

$$= \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \frac{m_2}{m_1}$$

POSSIAMO VEDERE SE PER UNITÀ DI TEMPO È PIÙ GRANDE IL RATIO CON CUI ASSORBIAMO O EMETTIAMO FOTONI.

IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO (IN MODO ONIO) TROVO:

$$\frac{n_2}{n_1} = \left( \frac{n_2}{n_1} \right)_{EQ} = \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\left| \frac{dn_2}{dt} \right|_{EXISS}}{\frac{dn_2}{dt} \Big|_{ASS}} = 1$$

QUINDI COME PREVEDIBILE TROVO CHE TANTA RADIAZIONE È ASSORBITA QUANTA NE VIENE EMESSA.

MA COSA SUCCEDDE SE NON SIAMO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO?

SIAMO ANCORA IN CONDIZIONI STAZIONARIE, IN CUI

$$\frac{n_2}{n_1} > \left( \frac{n_2}{n_1} \right)_{EQ} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} > \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\left| \frac{dn_2}{dt} \right|_{EX}}{\frac{dn_2}{dt} \Big|_{ASS}} > 1$$

E QUINDI IL RATEO DI EMISSIONE È SUPERIORE A QUELLO DI ASSORBIMENTO.

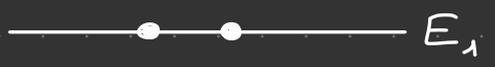
PORTARE IL SISTEMA FUORI DALL'EQUILIBRIO, IN CUI

$$\frac{n_2}{n_1} \neq \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

VUOL DIRE CHE HO



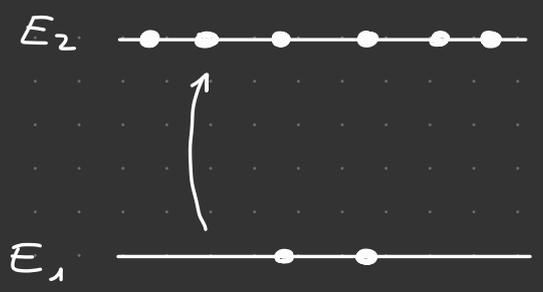
E POSSO IMMAGINARE DI AVERE UN ALTRO MECCANISMO FISICO (CONTROLLABILE), CHIAMATO POMPAGGIO, CHE MI PRENDE ELEMENTI DA 1 E LO PORTA IN 2.



IL TERMINE DI POMPAGGIO È DEFINITO COME

$$P_{1 \rightarrow 2} = \left( \frac{dm_2}{dt} \right)_{\text{POMP}} > 0$$

COSTANTE NEL TEMPO



E IN CONDIZIONI DI POMPAGGIO HO:

$$\left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{ASS}}^{1 \rightarrow 2} = \left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{ASS}}^{\text{EQ}} + P_{1 \rightarrow 2} > \left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{ASS}}^{\text{EQ}}$$

E L'ESPRESSIONE PER L'EMISSIONE RIMARRA':

$$\left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{2 \rightarrow 1}^{\text{EMISS}} = \left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS SPONT}} + \left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{EMISS STIM}} < 0$$

MA IN CUI I DUE TERMINI SONO DIVERSI DA QUELLI DI PRIMA (CALCOLATI ALL'EQUILIBRIO) POICHÈ ORA SIAMO FUORI DALL'EQUILIBRIO. OSSERVA PERÒ CHE I DUE TERMINI SONO IN MODULO PIÙ GRANDI RISPETTO QUELLI CALCOLATI ALL'EQUILIBRIO (SE PORTO PIÙ PARTICELLE IN 2 ALLORA AVRÒ PIÙ PARTICELLE EMESSE).

AVREMO DUNQUE

$$\left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{1 \rightarrow 2} + \left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{2 \rightarrow 1} = \left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{\text{TOT}}$$

MA SAREMO COMUNQUE IN CONDIZIONI STAZIONARIE  
 OSSIA

$$\left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{TOT} = 0$$

POICHÉ PURE SE INIZIAMO A POMPARE, E  
 PORPIAMO IN MODO COSTANTE,  $P_{1 \rightarrow 2}$  È INDIPENDENTE  
 DAL TEMPO, I COEFFICIENTI DI ASSORBIMENTO  
 ED EMISSIONE SARANNO DIVERSI, MA  
 ARRIVERÒ COMUNQUE IN UNA NUOVA SITUAZIONE  
 DI STAZIONARIETÀ.

SIAMO STAZIONARIAMENTE  
 FUORI DALL'EQUILIBRIO

NOTA BENE

EQUILIBRIO  $\Rightarrow$  STAZIONARIETÀ

STAZIONARIETÀ  $\not\Rightarrow$  EQUILIBRIO

QUELLO IMPORTANTE DA PORTARE A CASA È  
 CHE CON IL POMPAGGIO IL TERMINE DI  
 EMISSIONE È CRESCIUTO  $\Rightarrow$  IL MIO SISTEMA  
 SPARA PIÙ LUCE.

PER COMPENSARE L'AUMENTO  
 DI  $m_2$  RISPETTO  $m_1$

VEDIAMO UN ATTIMO

$$\left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{EX} = [A_{21} + B_{21} f_E(\nu)] m_2 > \left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{EX}^{EQ}$$

$f_E(\nu) > f_E^{EQ}(\nu)$        $m_2 > m_2^{EQ}$

COME GIÀ DETTO, MA POSSIAMO ANCORA  
 VEDERE

$$\left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{1 \rightarrow 2}^{ASS} > \left. \frac{dm_2}{dt} \right|_{1 \rightarrow 2}^{ASS, EQ}$$

$$\left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{2 \rightarrow 1}^{EX} > \left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{2 \rightarrow 1}^{EX, EQ}$$

IN CONDIZIONI DI POMPAGGIO L'INCREMENTO DEL RATIO DI EMISSIONE RISPETTO L'EQUILIBRIO È DETERMINATO DA UN INCREMENTO SIA DELL'EMISSIONE SPONTANEA CHE STIMOLATA.

MA NOTA CHE

$$\left| \frac{\frac{dm_z}{dt} \Big|_{EX_{ST}}}{\frac{dm_z}{dt} \Big|_{EX_{SP}}} \right| \propto \int E(\nu)$$

QUESTO VALORE CRESCE AL CRESCERE DEL POMPAGGIO, OSSIA

$$\int E(\nu) > \int E^{EQ}(\nu)$$

QUINDI IN CONDIZIONI DI POMPAGGIO AUMENTA LA DENSITÀ DI RADIAZIONE NELLA CAVITÀ E CRESCE LA FRAZIONE RELATIVA DI RADIAZIONE EMESSA IN MODO STIMOLATO (RISPETTO QUELLA EMESSA IN MODO SPONTANEO)

EX. SP. NON AUMENTA), MENTRE DIPENDE DA  $\int E(\nu)$  (CHE EX. ST. SI

QUESTO PORTA A:

LIGHT

AMPLIFICATION BY

STIMULATED

EMISSION OF

RADIATION

OSS

POCO

FA

ABBIAMO

VISTO

$$\frac{\left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{EM}}{\left| \frac{dm_2}{dt} \right|_{ASS}} > 1$$

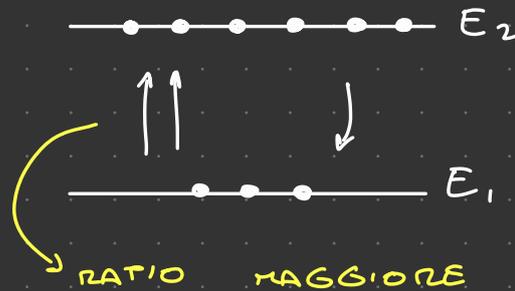
OSSIA CHE IL SISTEMA EMETTE PIÙ RADIATIONE DI QUELLA CHE ASSORBE, MA QUESTO NON VIOLA NESSUN PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PERCHÉ QUESTA ENERGIA LUMINOSA AGGIUNTIVA CHE ESCE FUORI VIENE DALL'ENERGIA CHE SPENDE PER POMPARE IL SISTEMA.

IL CONCETTO DI INVERSIONE DI POPOLAZIONE STA AL CENTRO DEL FUNZIONAMENTO DEI LASER.

SE VOGLIO UN SISTEMA CHE STA LASERANDO, OSSIA CHE A VALANGA PREDILIGE L'EMISSIONE STIMOLATA RISPETTO QUELLA SPONTANEA, DEVO SPINGERE IL SISTEMA FUORI EQUILIBRIO IN MODO DA AVERE TANTISSIMI ELEMENTI DEL SISTEMA NELLO STATO ECCITATO E POCHISSIMI NELLO STATO FONDAMENTALE.

$$\frac{m_2}{m_1} > \frac{m_2}{m_1} \Big|_{EQ}$$

=>



=> IL SISTEMA PREDILIGE L'EMISSIONE STIMOLATA => IL SISTEMA INIZIA A LASERARE

EMETTE FOTONI A VALANGA:

- COERENTI
- STESSA DIREZIONE
- STESSA FASE

=>

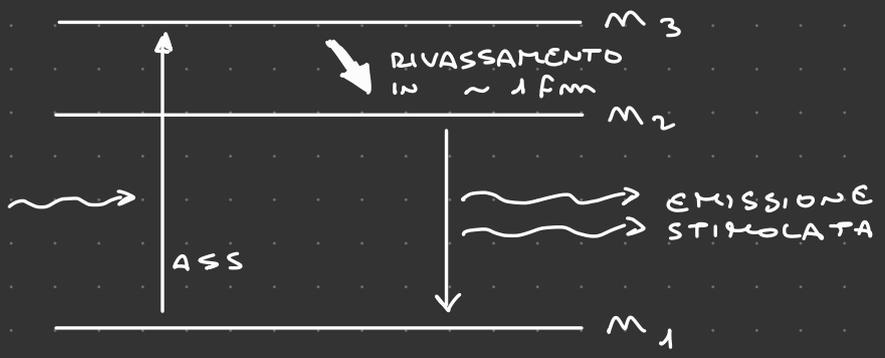
LUCE FORTEMENTE DIREZIONALE, MONOCROMATICA E COERENTE IN FASE (DECINE DI METRI ED È LA COSA PIÙ VICINA AL CONCETTO DI ONDA PIANA).

JSS IL CORPO NERO COMPRENDE TUTTO LO SPETTRO EM, MA NOI CON IL POMPAGGIO LI METTIAMO A CAVALLO SOLO DI UN VALORE  $h\nu$  (A CAVALLO DI DUE SPECIFICI LIVELLI ENERGETICI)  $\Rightarrow$  PER QUESTO ESCE LUCE MONOCROMATICA

COME REALIZZARE IL POMPAGGIO?

POMPAGGIO OTTICO: SPARO DELLA LUCE DALL'ESTERNO DI LUNGHEZZA D'ONDA  $h\nu$  CHE VIENE ASSORBITA E PORTATA SU. QUESTA LUCE CHE SPARO DENTRO LA SPARO CON LA STESSA DI CUI VOGLIO IL MIO FASCIO LASER. COSI' FACENDO PERO' RIEMPI LA CAVITA' CON RADIAZIONE DI BASSA QUALITA' E NON SOLO CON RADIAZIONE LASER.

HO UN SISTEMA FISICO CHE VOGLIO LASERARE, VOGLIO POMPARE OTTICAMENTE, ALLORA DEVO IDENTIFICARE UN SISTEMA OTTICAMENTE ATTIVO (CHE PUO' ASSORBIRE ED EMETTERE LUCE) CON 3 LIVELLI ENERGETICI E IN CUI LA PROBABILITA' CHE IL SISTEMA RILASSI DA  $M_3$  AD  $M_2$  E' ELEVATISSIMA (SI TRADUCE IN UN TEMPO DI RILASSAMENTO MOLTO BREVE)

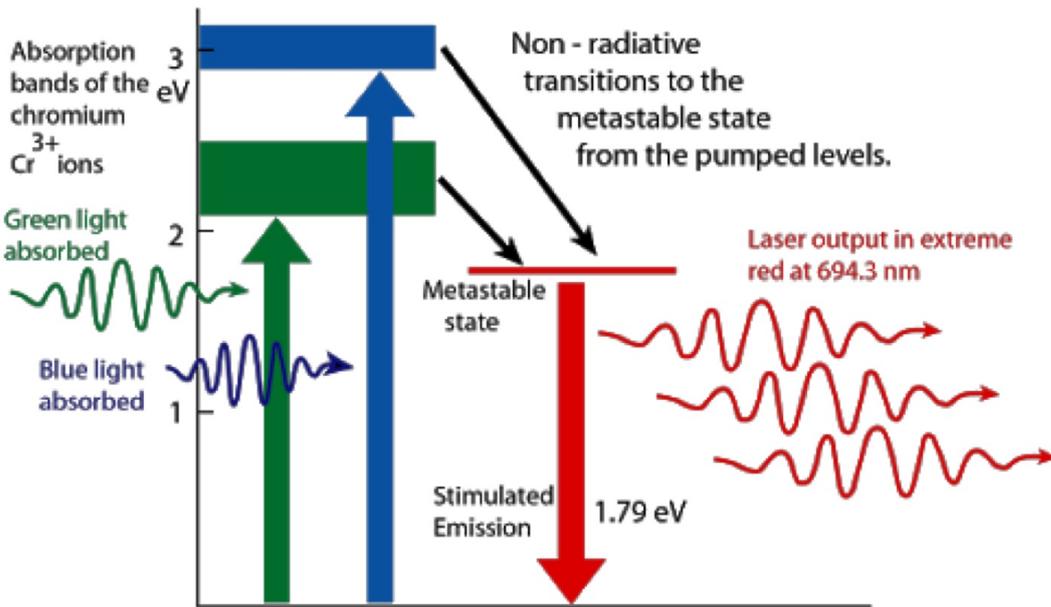


POMPARE AL LIVELLO  $M_3$  QUINDI EQUIVALE A POMPARE AL LIVELLO  $M_2$ , MA QUELLO CHE GUADAGNO E' CHE LA RADIAZIONE LASER NON E' PIU' ALLA STESSA LUNGHEZZA D'ONDA DI QUELLA DI POMPAGGIO

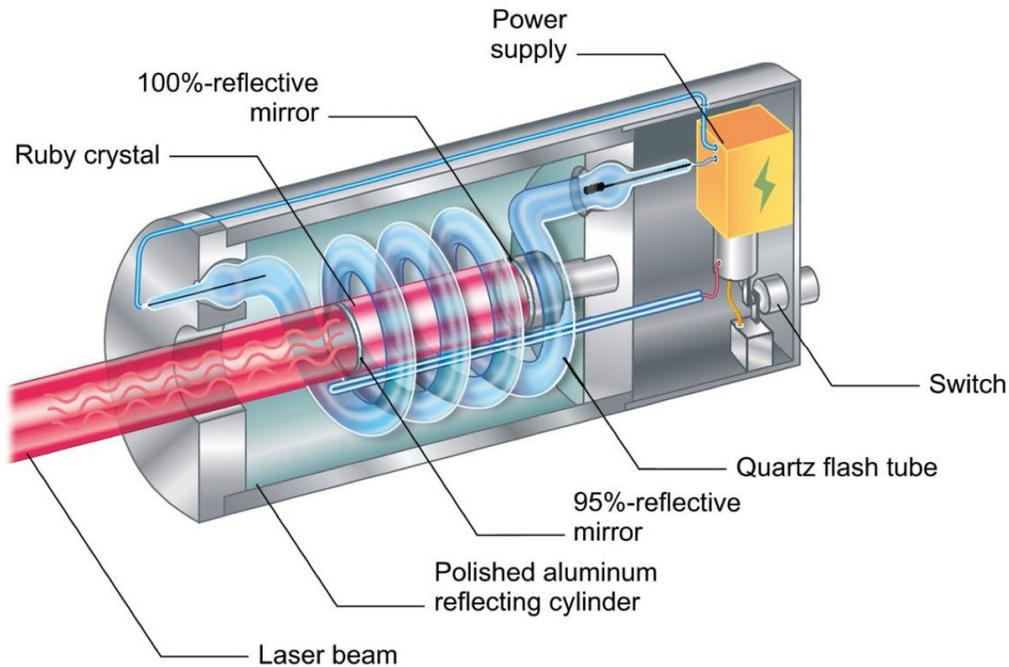
$\rightarrow$  QUINDI IN STATO SOLIDO

UN ESEMPIO DI CRISTALLO IN CUI SI HA UNA SITUAZIONE DI QUESTO TIPO E' IL RUBINO.

# Laser a rubino



# Laser a rubino

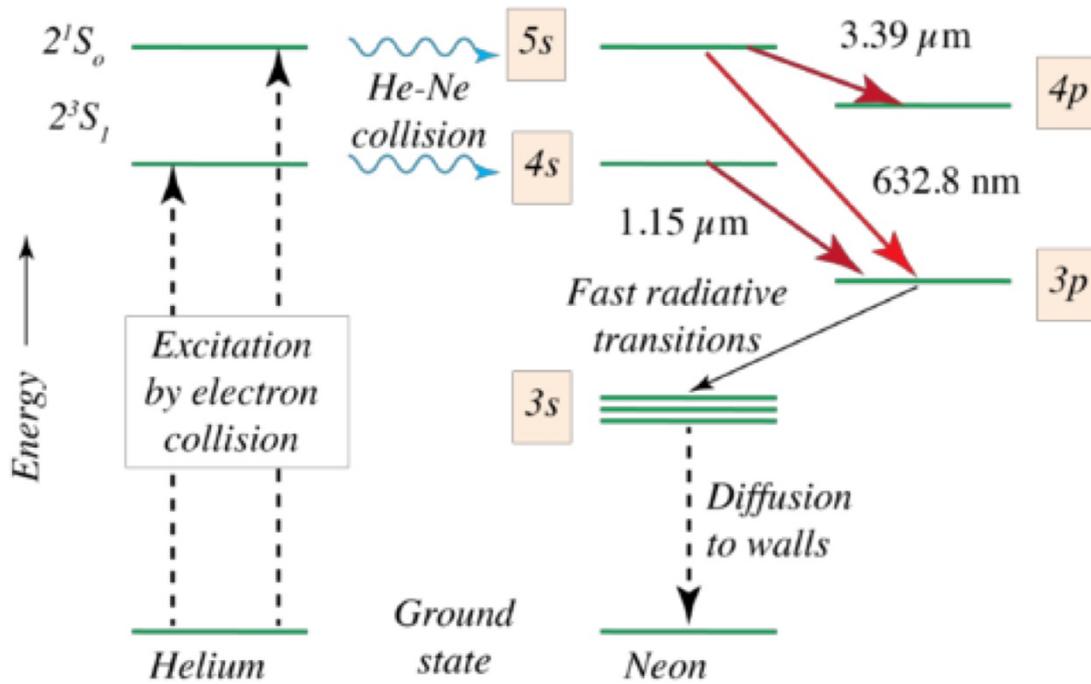


Modalità di lavoro: impulsata

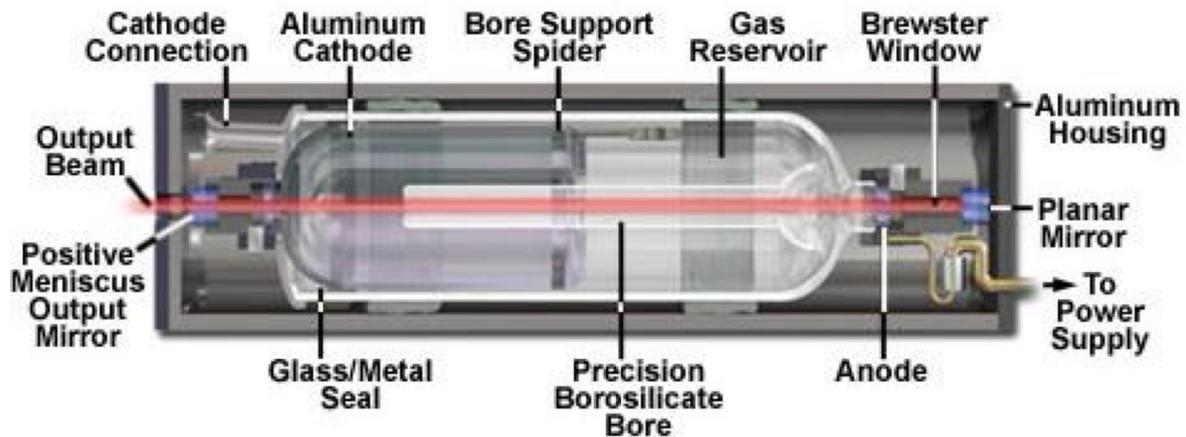
NOTA ENERGETICAMENTE IN POMPAGGIO OTTENIAMO  $mW$  C'è PERDITA DI POTENZA IN USCITA. PERCHÈ DIAMO E

ESISTONO ANCHE TIPO UN GAS ESEMPLI DI ELIO E TIPO ATOMICO, NEON.

# Laser a elio-neon



# Laser a elio-neon



Modalità di lavoro: continua

