

Appunti di
Meccanica Quantistica II

Gabriele Cembalo

A.A. 2023/2024

Testi consigliati

- *C. Cohen Tannoudji, B. Dui, F. Laloe, Quantum Mechanics* Vol. 1, 2, 3
- *S. Sciuto, Dispense del corso*
- *D. J. Griffiths, Introduction to Quantum Mechanics*
- *A. Larkoski, Quantum Mechanics*
- *C. Rossetti, Rudimenti di Meccanica Quantistica*
- *G. Auletta, M. Fortunato, G. Parisi, Quantum Mechanics*

Riferimenti capitoli

1. Postulati della Meccanica quantistica

- Dispense Metodi Matematici della Fisica - Introduzione, Cap. 5
- Dispense MQII Sciuto, Appendice A
- Dispense MQII Sciuto, Capitolo 2
- Cohen-Tannoudji, Cap III, par.B

2. Integrali di cammino

- Dispense MQII Sciuto, Cap. 6
- Feynman-Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals", (Cap. 1), Cap. 2, Cap. 3 par. 3.1, 3.4-3.6, 3.11
- Stermann, "An Introduction to Quantum Field Theory," Cap. 3, par 3.1
- Parisi, Cap 10, par. 10.8

3. Approssimazione WKB

- Rossetti, Cap. IX, par. 1-5, 7, 8.2
- Griffith, Cap. 8
- Merzbacher, "Quantum Mechanics", Cap.7

4. Teoria dell'urto

- Sciuto, Cap. 4, fino a par. 4.8
- Cohen, Cap. VIII, complement A_{VIII}
- Rossetti, Cap. XVII, par.1.1, 2.4, 3, 4 (fino a 4.11), 8
- Griffith, Cap. 11
- Merzbacker, Cap. 11, par.1, 3-5
- Gottfried, Cap. III, par. 12.1, 12.3, 13.1, 14.1, 14.2

5. Entanglement

- Cohen, Cap. XXI, par A, B, C, F, Complements A_{XI} , B_{XI}

I POSTULATI DELLA MQ RISPONDONO A 3 DOMANDE;

- COME SI DESCRIVE LO STATO DI UN SISTEMA AL TEMPO $t = t_0$
- UNA VOLTA FISSATO LO STATO, COME POSSIAMO PREDIRE IL RISULTATO DI UNA MISURA
- DATO LO STATO A $t = t_0$ COME SI DETERMINA LO STATO IN CUI IL SISTEMA SI TROVA AD UN TEMPO $t_1 > t_0$

SE FOSSIMO IN MECCANICA CLASSICA SAREBBE TUTTO PIÙ SEMPLICE PERCHÉ FOSSIMO UTILIZZARE LA MECCANICA ANALITICA.

- IL SISTEMA ALL'ISTANTE $t = t_0$ È RAPPRESENTATO DA UN PUNTO NELLO SPAZIO DELLE FASI (IN MECCANICA HAMILTONIANA) $\{q^\alpha, p_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, n$ CHE È UNO SPAZIO VETTORIALE $2n$ DIMENSIONALE. QUINDI PER CARATTERIZZARE UNO STATO HO BISOGNO SOLO DI $2n$ COORDINATE (q^i, p_i) .

- UNA QUALSIASI OSSERVABILE FISICA È UNA FUNZIONE DELLE q E DELLE p , $F(q, p)$, QUINDI DATE q, p LE METTO DENTRO LA FORMA DI F E SO QUANTO VALE L'OSSERVABILE

- LE q, p EVOLVONO NEL TEMPO CON LE EQUAZIONI DI HAMILTON ($q, \dot{q}$ EVOLVONO CON L'EQUAZIONI DI LAGRANGE).

IN MQ È TUTTO PIÙ COMPLICATO, QUINDI PRENDIAMO UN PEZZO PER VOLTA.

POSTULATO 0: Lo stato di un sistema in $\mathcal{H}$ è un raggio nello spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$

PRIMA DI FARE FISICA RICORDIAMOCI DI QUALCHE NOZIONE MATEMATICA (LO FAREMO PER OGNI POSTULATO)

RIPASSO DI METODI MATEMATICI

UN RAGGIO NELLO SPAZIO DI HILBERT È $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ED È CHIAMATO RAGGIO POICHÈ DEFINITO A MENO DI UNA COSTANTE COMPLESSA.

UNO SPAZIO UNITARIO È UNO SPAZIO VETTORIALE E SUI COMPLESSI DOTATO DI PRODOTTO SCALARE, OSSIA, DOTATO DI UN OPERAZIONE

$$(\cdot, \cdot) : a, b \in E \rightarrow (a, b) \in \mathbb{C}$$

TALE PER CUI VALGANO

- LINEARE $(a, \beta b + \gamma c) = \beta(a, b) + \gamma(a, c)$
- HERMITIANO $(a, b) = (b, a)^*$
- DEFINITO POSITIVO $(a, a) \geq 0$; $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

DA QUESTE SUE PROPRIETÀ DERIVA LA DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ

$$|(a, b)|^2 \leq (a, a)(b, b)$$

E DATO IL VETTORE PRODOTTO SCALARE POSSO DEFINIRE LA NORMA

$$\|a\| = \sqrt{(a, a)}$$

E DATA LA NORMA POSSO DEFINIRE LA DISTANZA

$$d(a, b) = \|a - b\|$$

QUINDI UNO SPAZIO UNITARIO È ANCHE NORMATO E METRICO.

UNA VOLTA AVUTA LA NOZIONE DI DISTANZA POSSO STABILIRE
UNA TOPOLOGIA (QUINDI DARE LA DEFINIZIONE DI INTORNO E
LIMITE)

INTORNO $I_\varepsilon(a) = \{b \in E \mid d(a, b) < \varepsilon\}$ INTORNO DI RAGGIO ε
DELL'ELEMENTO a

DEFINISCO IL LIMITE

VISTO UNO SPAZIO UNITARIO CHE SIAMO NORMATO IN
 $d(a, a_m) \rightarrow 0$ $m \rightarrow \infty$

$$a = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m \quad \text{SE} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|a - a_m\| = 0 \quad , \quad a, a_m \in E$$

D
SUCCESIONE
DI VETTORI

CHE È VERO SE : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \mid \forall m > m_0 \quad \|a - a_m\| < \varepsilon$

ESSENDO IN UNO SPAZIO UNITARIO (CON TUTTE LE PROPRIETÀ
DEL PRODOTTO SCALARE E LA DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ)
POSSIAMO VEDERE CHE IL PRODOTTO SCALARE È CONTINUO
RISPETTO AL LIMITE, OSSIA

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (b, a_m) = (b, a) \quad \text{SE VALE} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = a$$

$$\text{DIP} \quad (b, a) - (b, a_m) = (b, a - a_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (b, 0) = 0$$

È NOTA CHE QUESTO È IL CONCETTO DI LIMITE DEBOLE.
(CHE FOI RITROVERAI NELLE DISTRIBUZIONI).

DATA LA DEFINIZIONE DI PRODOTTO SCALARE, POSSO ANCHE
DEFINIRE L'OPERAZIONE DI DUALITÀ

LO SPAZIO DUALE E^* È LO SPAZIO VETTORIALE DEI FUNZIONALI
LINEARI SU E (FUNZIONALE LINEARE = FORMA LINEARE È UN
APPLICAZIONE LINEARE DA UNO SPAZIO VETTORIALE NEL SUO
CAMPO DI SCALARI).

PRESO UN VETTORE $b \in E$ HO IL PRODOTTO SCALARE CHE
ASSOCIA $\forall a \in E$ UN NUMERO COMPLESSO

$$(\cdot): a \rightarrow (b, a) \in \mathbb{C}$$

POSSO DEFINIRE UN FUNZIONALE LINEARE SU E USANDO IL
PRODOTTO SCALARE.

PRESO $b \in E$ CI ASSOCIO UNA FORMA LINEARE $\hat{b} \in E^*$
TALE PER CUI

$$\begin{aligned} \hat{b}: E &\rightarrow \mathbb{C} \\ a \in E &\rightarrow (b, a) \end{aligned}$$

È CHIAMATO OPERAZIONE DI DUALITÀ $*$: $b \in E \mapsto \hat{b} \in E^*$
E LA FORMA $\hat{b}$ SI DICE DUALE DEL VETTORE b .

DEFINIAMO IL DUALE PERCHÉ D'ORA IN FOI CONVIENE PENSARE
AL PRODOTTO SCALARE NON COME IL PRODOTTO TRA DUE
OGGETTI SULLO STESSO PIANO, MA COME L'AZIONE DI
UN FUNZIONALE SUI VETTORI.

$$\begin{aligned} \text{SCRIVIAMO: } a \in E &\rightarrow |a\rangle \\ \hat{b} \in E^* &\rightarrow \langle b| \end{aligned}$$

È QUELLO CHE FIN'ORA SCRIVEVAMO (b, a) DIVENTA $\langle b|a\rangle$

QUELLO DETTO FIN'ORA VALE PER QUALSIASI SPAZIO UNITARIO, DI QUALSIASI DIMENSIONE (FINITA O INFINITA).

QUELLO CHE CI SERVIRÀ IN HQ SARÀ UNO SPAZIO DI DIMENSIONE INFINITA UNITARIO E QUELLI PIÙ BELLI SONO GLI SPAZI SEPARABILI (POICHÉ HANNO ALCUNE PROPRIETÀ SIMILI A QUELLI DI DIMENSIONE FINITA).

UNO SPAZIO È SEPARABILE QUANDO AMMETTE UN SOTTOSIEME NUMERABILE COMPLETO

$$\{ |e_\lambda\rangle \} \quad \lambda = 1, \dots, \infty$$

CHE POSSIAMO SEMPRE RENDERE ORTONORMALE (SI PUÒ SEMPRE USARE GRAM-SCHMIDT), QUINDI TALE CHE

$$\langle e_\lambda | e_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

COMPLETO VUOL DIRE CHE SE

$$\forall |v\rangle \in E \quad \text{DEFINISCO} \quad c_\lambda = \langle e_\lambda | v \rangle$$

$$\text{E VALE} \quad \sum_{\lambda=1}^{\infty} |c_\lambda|^2 < \infty \quad (\text{CONVERGENZA IN SENSO DEBOLE})$$

POSSO SCRIVERE

$$|v\rangle = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_\lambda |e_\lambda\rangle$$

IL CONCETTO È CHE POSSO SEMPRE SCRIVERE $c_\lambda = \langle e_\lambda | v \rangle$, HA NON SEMPRE POSSO SCRIVERE $|v\rangle$ COME CL. DI $|e_\lambda\rangle$.

NOTA CHE SE UN INSIEME È COMPLETO, ALLORA VALE LA DISUGUAGLIANZA DI PARSEVAL

⑤
$$\|v\|^2 = \sum_{\lambda=1}^{\infty} |c_\lambda|^2$$

SE LA INVECE L'INSIEME NON È COMPLETO VALE SOLO
DISUGUAGLIANZA DI BESSEL

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} |c_{\lambda}|^2 \leq \|v\|^2$$

SE UN INSIEME È COMPLETO, ALLORA RISPETTA LA RELAZIONE
 DI COMPLETEZZA

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} |e_{\lambda} \rangle \langle e_{\lambda}| = \mathbb{I}$$

$$(\text{VEDI: } |v\rangle = \sum c_{\lambda} |e_{\lambda}\rangle = \sum \langle e_{\lambda}|v\rangle |e_{\lambda}\rangle = \sum |e_{\lambda}\rangle \langle e_{\lambda}|v\rangle)$$

QUINDI COME IDEA PUOI PENSARE CHE UN INSIEME È COMPLETO
 SE QUANDO USANDO SOLO GLI ELEMENTI DI TALE
 INSIEME TU RIESCI A SCRIVERE UN QUALSIASI VETTORE
 DELLO SPAZIO.

POSSIAMO DIRE CHE UNO SPAZIO METRICO O NORMATO È
COMPLETO (NOZIONE DIVERSA DA QUELLA CHE PARLAVAMO SOLO
 DI INSIEMI E NON DI SPAZI) SE OGNI SUCCESIONE
 DI CAUCHY È CONVERGENTE.

NOTA SUCCESIONE DI CAUCHY CONVERGENTE

$$\{a_m\} / \forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \text{ t.c. } \forall m, n > m_0 \quad d(a_m, a_n) < \varepsilon$$

(OSSIA GLI ELEMENTI SI AVVICINANO)

OGNI SUCCESIONE CHE CONVERGE NELLO SPAZIO È UNA
 SUCCESIONE DI CAUCHY, MA CI POSSONO ESSERE SUCCESIONI
 DI CAUCHY CHE CONVERGONO FUORI DALLA SPAZIO E
 IN QUESTO CASO LO SPAZIO NON È COMPLETO, HA IL ⑥

RENDENDO TALE AGGIUNGENDO AD E TUTTI I LIMITI DI TUTTE
LE SUCCESSIONI DI CAUCHY (È QUELLO CHE FACCIAMO CON
 L^2)

UNO SPAZIO NORMATO COMPLETO SI CHIAMA SPAZIO DI BANACH.

UNO SPAZIO UNITARIO COMPLETO SI CHIAMA SPAZIO DI HILBERT.

DALLE DISPENSE DI METODI I OCCORRE RICORDARE CHE TUTTI GLI
SPAZI DI HILBERT INFINITO DIMENSIONALI E SEPARABILI (IN
PARTICOLARE L^2) SONO ISOMORFI TRA LORO E CON LO
SPAZIO DI HILBERT DELLE COMPONENTI ℓ_2 (I CUI ELEMENTI
SONO I VETTORI COLONNA DI COMPONENTI c_n EC $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$)
E QUINDI LE PROPRIETÀ DI UNO SPAZIO SI TRADUCONO IN
CORRISPONDENTI PROPRIETÀ DELL'ALTRO.

INFATTI AL POSTO DI LAVORARE CON I VETTORI 10^7 C'È
MOLTO PIÙ COMODO LAVORARE CON IL VETTORE DELLE
COMPONENTI.

PERÒ GIÀ IN HQI AVEVAMO DETTO CHE LE FUNZIONI D'ONDA ψ
ERANO IN $L^2(\mathbb{R}^3)$, HA CI SIANO SUBITO CONTRADDETTI
PERCHÉ GIÀ AL PRIMO ESEMPIO, QUELLO DI PARTICELLA
LIBERA, ABBIAMO VISTO CHE LA SUA FUNZIONE D'ONDA
DI IMPULSO DEFINITO È UN'ONDA PIANA, QUINDI $\psi \notin L^2$.

QUINDI SEMBRA CHE CI SIANO ECCEZIONI E CHE CI SIANO
 $\psi \notin L^2$. PRIMA DI CAPIRE IL PERCHÉ PARLIAMO DI QUESTI
ELEMENTI CHE NON SONO NELLO SPAZIO DI HILBERT,
OSSIA, PARLIAMO DI DISTRIBUZIONI.

DEFINIAMO LO SPAZIO SU CUI UNA DISTRIBUZIONE AGISCE.

S = SPAZIO FUNZIONI DI PROVA

$$S = \{ f(x) \mid f \in C^\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} x^p \frac{d^m f}{dx^m} = 0 \quad \forall p, m \}$$

CHE VUOL DIRE CHE È L'INSIEME DELLE FUNZIONI COMPLESSE A VARIABILE REALE, INFINITAMENTE DERIVABILI (SENZA SPIGOLI QUINDI) E DECRESCENTI CON TUTTE LE LORO DERIVATE PIÙ RAPIDAMENTE DI OGNI POTENZA.

QUELLO CHE INTERESSA IN MECCANICA QUANTISTICA SONO LE DISTRIBUZIONI TEMPERATE.

DEFINIAMO S' = SPAZIO DISTRIBUZIONI TEMPERATE, CHE È LO SPAZIO DEI FUNZIONALI LINEARI E CONTINUI SU S . UN ELEMENTO DI S' , OSSIA UNA DISTRIBUZIONE TEMPERATA È

$$T \in S', \quad T: S \rightarrow \mathbb{C} \\ g \in S \mapsto \langle T, g \rangle \in \mathbb{C}$$

LINEARE : $\langle T, \alpha g_1 + \beta g_2 \rangle = \alpha \langle T, g_1 \rangle + \beta \langle T, g_2 \rangle$

CONTINUO : SE $g = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m$ ALLORA $\langle T, \lim_{m \rightarrow \infty} g_m \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle T, g_m \rangle$

OSSIA RISPETTA LA NOZIONE DI LIMITE.

NOTA LE DISTRIBUZIONI SI DIFFERENZIANO DALLE DISTRIBUZIONI TEMPERATE PERCHÉ AGISCONO SU UNO SPAZIO DI FUNZIONI DI PROVA A SORPORTO FINITO.

PERÒ
È
È :
IL DOVREMO COSTRUIRE COSA FA UNA DISTRIBUZIONE
CON CUI SI DEFINISCE IL $\langle T, g \rangle$

$$\langle T, q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} T^*(x) q(x) dx$$

CHE NON È UN INTEGRALE (DI LEBESGUE) IN GENERALE, HA VISTO CHE S È UN SOTTOSPAZIO DENSO DI $L^2(-\infty, +\infty)$, ALLORA SE $T \in S$ LA DEFINIZIONE DI $\langle T, q \rangle$ È ESATTAMENTE IL PRODOTTO SCALARE.

QUELL' INTEGRALE DEV'ESSERE UNA DEFINIZIONE SENSATA. ABBIAMO $q \in S \subset L^2$ E L'INTEGRALE ESISTE SOLO SE SCRIVIAMO $T = f(x)$ E QUINDI

$$\langle f, q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) q(x) dx$$

HA DOBBIAMO RICHIEDERE CHE f SIA UNA FUNZIONE LOCALMENTE SOMMABILE (CIOÈ SOMMABILE, OSSIA $\exists \int_a^b f(x) dx$ FINITO, IN OGNI INTERVALLO FINITO) E A CRESCENZA ALGEBRICA FINITA. T IN QUESTO CASO SI CHIAMA DISTRIBUZIONE REGOLARE. (CRESCERE ALL'∞ COME UNA POTENZA)

NOTA ABBIAMO $q \in S \subset L^2$ IN UNO SPAZIO PIÙ PICCOLO DI L^2 , HA DOBBIAMO RESTRINGERLO AFFINCHÈ $T = f$ POSSA STARE IN {FUNZIONI LOCALMENTE SOMMABILI} $\supset L^2$, OVERO IN UNO SPAZIO PIÙ GRANDE DI L^2 .

CI SONO ANCHE DISTRIBUZIONI NON REGOLARI, AD ESEMPIO LA DELTA DI DIRAC, DEFINITA COME

$$\langle \delta, q \rangle = q(0) \quad \forall q \in S$$

HA COME ABBIAMO VISTO A METODI, UNA QUALSIASI DISTRIBUZIONE (REGOLARE O NO) È IL LIMITE DEBOLE DI DISTRIBUZIONI REGOLARI, 9 O ANCORA MEGLIO, È IL LIMITE DEBOLE DI FUNZIONI DI PROVA $\phi \in S$.

PER QUELLO DETTO FIN'ORA, QUINDI VALE
 $S \subset L^2(\mathbb{R}) \subset S'$ TERNA DI
 GEL'FAND

(O ANCHE $L^2(\mathbb{R}^{3n})$
 O $L^2(2,6)$)

E POSSIAMO PARLARE DI SPAZIO DI HILBERT EQUIPAGGIATO.

QUINDI IN REALTÀ NON CI SERVE CHE LE FUNZIONI D'ONDA
 SIANO IN L^2 , MA CI BASTA CHE

$$\psi(x) \in S'$$

OSSIA $\psi(x)$ VOGLIAMO CHE SIA ALMENO UNA DISTRIBUZIONE
 TEMPERATA (AD ESEMPIO $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$).

TUTTO QUESTO PER DIRE CHE POSSO AVERE ψ FUORI DALLO SPAZIO
 DI HILBERT CHE HO SEMPRE CONSIDERATO, OSSIA $L^2(\mathbb{R})$, SE
 USO LA TERNA DI GEL'FAND $S \subset L^2 \subset S'$ E QUINDI USO
 LO SPAZIO DI HILBERT EQUIPAGGIATO.

NOTA S SOTTOSPAZIO DENSO DI L^2 VUOL DIRE CHE NEGLI INTORNI
 DI QUALUNQUE ELEMENTO DI L^2 TROVO FUNZIONI DI
 PROVA.

OSS CONSIDERARE ANCHE LO SPIN NON CAMBIA NULLA, BASTA CHE
 MOLTIPLICO GLI SPAZI PER C^{2s+1} , OSSIA SI HA

$$S \otimes \phi^{2s+1} \subset L^2 \otimes \phi^{2s+1} \subset S' \otimes \phi^{2s+1}$$

CHIARITO OPERATORI LO CHE SPAZIO DI HILBERT POSSIAMO PASSARE A PARLARE DI OSSERVABILI. PERMETTERANNO DI ARRIVARE AD OSSERVABILI.

POSTULATO 0' : OGNI QUANTITÀ MISURABILE È ASSOCIATA AD UN OSSERVABILE, LA QUALE È UN OPERATORE AUTOAGGIUNTO DI DOMINIO $\mathcal{D}$ DENSO IN $\mathcal{H}$; IL CHE VUOL DIRE CHE I SUOI AUTOVETTORI FORMANO UNA BASE O.N. di $\mathcal{H}$.

IL FATTO CHE GLI AUTOVETTORI DI UN OPERATORE AUTOAGGIUNTO SIANO ON LO ABBIAMO VISTO A METODI II (P. 149), ED IN PARTICOLARE È QUELLA DIMOSTRAZIONE IN CUI PRENDI L'OPERATORE ψ_m, ψ_m AUTOVETTORI E λ_m, λ_m AUTOVALORI E VEDI

$$\mathcal{L} \psi_m = \lambda_m \psi_m \quad \mathcal{L} \psi_m = \lambda_m \psi_m$$

$$\Rightarrow (\psi_m, \mathcal{L} \psi_m) = \lambda_m (\psi_m, \psi_m) \quad ; \quad (\psi_m, \mathcal{L} \psi_m) = \lambda_m (\psi_m, \psi_m)$$

USO LA DEFINIZIONE DI AUTOAGGIUNTO

$$(\psi_m, \mathcal{L} \psi_m) = (\mathcal{L} \psi_m, \psi_m) = (\psi_m, \mathcal{L} \psi_m)^*$$

$$(\psi_m, \lambda_m \psi_m) = \lambda_m (\psi_m, \psi_m) \quad \lambda_m (\psi_m, \psi_m)$$

$$\Rightarrow \lambda_m (\psi_m, \psi_m) = \lambda_m (\psi_m, \psi_m) \Rightarrow (\lambda_m - \lambda_m) (\psi_m, \psi_m) = 0$$

SE $\lambda_m \neq \lambda_m$ SONO SICURAMENTE ORTOGONALI, MA RICORDA CHE SE $\lambda_m = \lambda_m$ HO DEGENERAZIONE, MA RITROVO UN SOTTOSPAZIO DI DIMENSIONE FINITA E SO CHE POSSO ORTONORMALIZZARE LORO.

RIVEDIAMO LE DEFINIZIONI.

PRENDIAMO A OPERATORE. IL DOMINIO DI A È $D_A \subset H$ E D_A NON PER FORZA COINCIDE CON H .
PRESO A CHE AGISCE SU UN VETTORE $|v\rangle$ E FATTO IL PRODOTTO SCALARE CON UN ALTRO $\langle u|$

$$\langle u|(Av\rangle)$$

ALLORA L'OPERATORE AGGIUNTO A^+ È TC

$$\langle u|(Av\rangle) = (\langle v|(A^+|u\rangle))^*$$

DICO CHE UN'OPERATORE È AUTOAGGIUNTO SE:

$$\begin{cases} A = A^+ \\ D_A = D_{A^+} \end{cases}$$

OSS IN HQ1 HAI SEMPRE FATTO AGIRE GLI OPERATORI A DESTRA E SINISTRA COME SE NON CAMBIASSE NULLA, MA SE CI PENSI BENE POTEVI FARLO SOLO CON GLI OPERATORI AUTOAGGIUNTI. INFATTI, IN PROBLEMI AD ESEMPIO DEL OSCILLATORE ARMONICO IN CUI USI a, a^+ NON POTEVI AGIRE SUL bvs CON QUESTI OPERATORE, POICHÉ APPUNTO NON SONO AUTOAGGIUNTI.

NOTA SE VUOI VEDERE LA DIFFERENZA TRA AUTOAGGIUNTO ED HERMITIANO IN DIMENSIONE FINITA ED INFINITA VEDI "DISPENSE DI METODI II" N°2 DI SCIUTO CAPITOLI 2.1 E 2.2. ATTENZIONI, PARTICOLARI, FATTE IN DETTAGLIO, NEL DEFINIRE DOMINI E AZIONI DI OPERATORI SU SPAZI A DIMENSIONE ED SONO IN APPENDICE A.3 DI HQ2 DI SCIUTO.

ESEMPIO L'OPERATORE DERIVATA $D: |f\rangle \rightarrow D|f\rangle = |g\rangle$

$$f \in \mathcal{D}_D = \{f \in C^1, f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

CALCOLO

$$\langle u | D | f \rangle$$

HA POSSO SFRUTTARE IL FATTO CHE SO COS'È D NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI, PER FARLO INSERISCO LA COMPLETEZZA DELLE AUTOFUNZIONI DELLA POSIZIONE

$$\begin{aligned} \langle u | D | f \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \underbrace{\langle u | x \rangle}_{u^*(x)} \underbrace{\langle x | D | y \rangle}_{\delta(x-y) \left(-i \frac{d}{dx}\right)} \underbrace{\langle y | f \rangle}_{f(y)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx u^*(x) \left(-i \frac{d}{dx}\right) f(x) \end{aligned}$$

PER VEDERE SE D È AUTOAGGIUNTO DEVO CONFRONTARLO CON

$$\langle f | D | u \rangle^*$$

PER FARLO DEVO CHIEDERE CHE ANCHE $u \in \mathcal{D}_D$

$$\begin{aligned} \langle f | D | u \rangle^* &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x) \left(-i \frac{d}{dx}\right) u(x) \right]^* \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \left(i \frac{d}{dx}\right) u^*(x) \end{aligned}$$

POSSO INTEGRARE PER PARTI

$$= f(x) u^*(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \langle u | D | f \rangle$$

AFFINCHÉ D SIA AUTOAGGIUNTO SERVE CHE $\left. f(x)u^*(x) \right|_{-\infty}^{+\infty} = 0$

CHE SUCCEDDE SE $f, u \in \mathcal{D}_D$.

È INOLTRE NECESSARIO CHE $\mathcal{D}_D = \mathcal{D}_D^+$.

SE PER SEI IN $L^2(a,b)$ BASTA CHE f, u ABBIAMO CONDIZIONI AL CONTORNO PERIODICHE
ANNULLARE LE TERME DI BORDO (VERI APPARENCE A.3. NGZ DI SCUOTO).

DA QUESTO ESEMPIO CAPISCO CHE PER DIRE SE UN'OPERATORE È AUTOAGGIUNTO SONO FONDAMENTALI LE CONDIZIONI AL CONTORNO (E QUINDI I DOMINI).

VISTO CHE A VOLTE LE FUNZIONI D'ONDA SONO DELLE DISTRIBUZIONI MI INTERESSA CAPIRE COME QUESTI OPERATORI AUTOAGGIUNTI AGISCONO SULLE DISTRIBUZIONI.

PRENDO A OPERATORE AUTOAGGIUNTO CON $\mathcal{D}_A \supset S$ E DICO CHE PUÒ AGIRE SULLE DISTRIBUZIONI TEMPERATE

$$A : S' \rightarrow S'$$

$$\langle T | \in S' \mapsto \langle T | A$$

DOVE LA DISTRIBUZIONE $\langle T | A$ AGISCE COME

$$\langle T | A : |q\rangle \in S \rightarrow (\langle T | A) |q\rangle = \langle T | (A |q\rangle) \in \mathbb{C}$$

QUINDI, SPIEGHIAMO.

PRENDO A, LA FACCIO AGIRE SU UNA DISTRIBUZIONE $\langle T |$ E OTTENGO UN'ALTRA DISTRIBUZIONE $\langle T | A$, MA PER DIRE COM'È FATTA UNA DISTRIBUZIONE DEVO DIRE COME QUESTA AGISCE SULLE FUNZIONI DI PROVA $|q\rangle$. È PROPRIO DA QUEST'ULTIMA COSA CHE CAPISCO COS'È $\langle T | A$, PERCHÉ SE IN $\mathcal{D}_A$ SONO CONTENUTE TUTTE LE FUNZIONI DI PROVA, ALLORA SO BENE COS'È $A |q\rangle$ E QUINDI POSSO RITRAVARE CHI È $\langle T | A$.

PERÒ IO VORREI CONOSCERE $\langle A | T \rangle$ (CHE VIENE DA $\langle A | T \rangle \rightarrow \langle A | T \rangle$)
 PIUTTOSTO CHE $\langle T | A \rangle$. SFRUTTO CHE A SIA AUTOAGGIUNTO

$$\langle T | A | q \rangle = \langle q | A | T \rangle^*$$

(NOTAZIONE FORMALE DA FISICI)

MA QUESTO LO FACCIO SE T NON FOSSE NULLA DI STRANO (POTREBBE
 ESSERE AD ESEMPIO UNA FUNZIONE) E POTREI ANCHE SOLO FARE
 IL COMPLESSO CONIUGATO

$$\langle T | A | q \rangle^* = \langle q | A | T \rangle$$

È QUELLO CHE VOGLIO

FUNZIONEREBBE TUTTO MEGLIO SE T FOSSE UNA FUNZIONE E
 NON UNA DISTRIBUZIONE, MA IN REALTÀ RIUSCO A RICAVARE
 TUTTO QUELLO CHE VOGLIO.

NOTA TUTTO QUELLO CHE FACCIAMO CON LE DISTRIBUZIONI VALE
 PERCHÉ $q \in S$ E $A | q \rangle \in S$.

ESEMPIO PRENDIAMO $A = D$ E $T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ (ONDA PIANA)
 VOGLIO CONOSCERE $\langle T | A$ QUINDI CALCOLO $\langle T | A | q \rangle$ E
 POI ESTRAGGO LE INFORMAZIONI DAL CALCOLO ED
 ESTRAGGO $\langle A | T \rangle$ FACENDO IL COMPLESSO CONIUGATO.

$$\langle T | (A | q \rangle) = \int dx \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \left(-i \frac{d}{dx} q(x) \right)$$

INTEGRO PER PARTI (BORDI = 0) PER INVERTIRE L'AZIONE DI A
 E FARLO AGIRE SU T

$$= \int dx \left(i \frac{d}{dx} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right) q(x) = \int dx k \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} q(x)$$

È QUINDI VERO $\langle T | A = k \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ E QUINDI $\langle A | T \rangle = k \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}$

DALL'ESEMPPIO È OVVIO CHE TUTTO IL RAGIONAMENTO SI BASA SULLA DEFINIZIONE DI COSA FA UNA DISTRIBUZIONE SU UNA FUNZIONE DI PROVA. RICORDA $T : \mathcal{G}(\mathcal{S}) \mapsto \langle T, g \rangle = \int dx T(x) g(x)$.

SEGUENDO QUESTO RAGIONAMENTO QUINDI RIESCO A CAPIRE COME AGISCONO GLI OPERATORI ANCHE SULLE DISTRIBUZIONI CHE SAREBBE DEFINITA SOLO COME FUNZIONALE (QUINDI SAREBBE DEFINITA SOLO COME BRA, MA COSÌ LA INTERPRETO ANCHE COME KET). QUELLO APPENA VISTO È ESTREMAMENTE IMPORTANTE. SIAMO PARTITI CON A AUTOAGGIUNTO IN $\mathcal{D}_A \supset \mathcal{S}$ (SOTTOSPAZIO DI $\mathcal{H}$), SIAMO RIUSCITI AD ANDARE IN $\mathcal{S}'$ ED OTTENERE UN OPERATORE CONTINUO DEFINITO IN $\mathcal{S}$, QUINDI TUTTO $\mathcal{H}$.

ORA POSSO SCRIVERE L'EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI GENERALIZZATA

$$A|a\rangle = a|a\rangle, \quad |a\rangle \in \mathcal{S}'$$

OSSIA È QUELLO FATTO FIN'ORA MA ESPlicitANDO CHE SONO CON LE DISTRIBUZIONI TEMPERATE.

A QUESTO PUNTO HO DUE CASI:

- SE $|a\rangle \in \mathcal{H}$ ALLORA a AUTOVALORE PROPRIO E $a \in \text{Sp}_d(A)$ (SPETTRO DISCRETO DI A) $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$
- SE $|a\rangle \notin \mathcal{H}$ ALLORA a AUTOVALORE GENERALIZZATO E $a \in \text{Sp}_c(A)$ (SPETTRO CONTINUO DI A)

IN GENERALE DICIAMO $\lambda \in \mathbb{C}$ È UN PUNTO REGOLARE PER L'OPERATORE A SE $\exists$ L'OPERATORE $(A - \lambda I)^{-1}$ (CHE $(A - \lambda I)$ È INVERTIBILE SE NON HA AUTOVALORI NULLI) CHE ESISTE SE:

$$\inf_{\substack{\psi \in D_A \\ \psi \neq 0}} \frac{\|(A - \lambda I)\psi\|}{\|\psi\|} = c \in \mathbb{C} > 0$$

NOTA $(A - \lambda I)\psi = 0$ È L'EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI SOLO RISCritta.

Lo SPETTRO di A È L'INSIEME DI TUTTI I PUNTI IRREGOLARI, OSSIA, È L'INSIEME DI TUTTI I PUNTI λ TC $\|(A - \lambda I)\psi\| = 0$, CHE PUÒ AVVENIRE SE (SONO TUTTI I VETTORI CHE LA RENDONO NULLA O CHE SI AVVICINI INDEFINITIVAMENTE A 0):

• $\text{Inf} = \text{Min}$, OSSIA $\exists \psi_2 \in H / (A - \lambda_2 I)\psi_2 = 0$
 $\Rightarrow \lambda_2 \in \text{Spd}(A)$

• $\text{Inf} \neq \text{Min}$, OSSIA $\exists \psi > 0$ TC Inf SI AVVICINA INDEFINITIVAMENTE A 0
 $\Rightarrow \lambda \in \text{Spc}(A)$

NOTA $\text{Spd}(A)$ È UN INSIEME FINITO O NUMERABILE, INFATTI I SUOI ELEMENTI HANNO UN INDICE DISCRETO (λ_i) .

TEOREMA SPETTRALE: PRENDIAMO A OPERATORE AUTOAGGIUNTO CON

$$A|a\rangle = a|a\rangle, \quad |a\rangle \in S'$$

Th: $\{|a\rangle\} = \{|a_\lambda\rangle, \lambda \in \mathbb{Z}; |a\rangle, a \in I_0\}$ È COMPLETO

VOL DIRE CHE $\{|a\rangle\} = \text{Spd}(A) + \text{Spc}(A)$ È COMPLETO NEL SENSO CHE QUALUNQUE VETTORE SI PUÒ SCRIVERE COME C.L. DI QUEI VETTORI.

SE $|a\rangle \in S'$ ALLORA QUELLO CHE DIRÒ VARRÀ IN S !

IL TEOREMA PERMETTE DI DIRE:

• $\forall |f\rangle \in S$ POSSO COSTRUIRE I COEFFICIENTI

$$f_\lambda = \langle a_\lambda | f \rangle$$

DOVE $|a_\lambda\rangle$ SONO GLI AUTOVETTORI PROPRI DI A , $a_\lambda \in \text{Spd}(A)$.
I COEFFICIENTI SODDISFANO $\sum_{\lambda=1}^{\infty} |f_\lambda|^2 < \infty$, QUINDI FORMANO UN VETTORE NELLO SPAZIO DI HILBERT DELLE COMPONENTI
I CUI VETTORI BASE SONO PROPRIO $|a_\lambda\rangle$, E SONO BUONI NUMERI PER LO SVILUPPO DI FOURIER

$$|f^{(1)}\rangle = \sum_{\lambda} f_\lambda |a_\lambda\rangle$$

• POSSO ANCHE DEFINIRE LA FUNZIONE

$$f(a) = \langle a | f \rangle$$

(SE $|f\rangle \notin S$ NON SAREBBE DEFINITA)

DOVE $|a\rangle$ SONO GLI AUTOVETTORI GENERALIZZATI DI A CON
 $a \in \text{Spc}(A)$ E VALE CHE $f(a) \in L^2(\text{Spc}(A))$

(ANALOGAMENTE A DIRE CHE $\sum |f_i|^2 < \infty$) QUINDI

$$\exists \int_{Sp(A)} f^*(a) f(a) da$$

POSSO SCRIVERE $|f^{(2)}\rangle = \int da f(a) |a\rangle$

• COMPLESSIVAMENTE POSSO DIRE CHE DATE $|f\rangle, |g\rangle \in S$

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle &= \int da \langle f | a \rangle \langle a | g \rangle + \sum \langle f | a_i \rangle \langle a_i | g \rangle \\ &= \int da f^*(a) g(a) + \sum f_i^* g_i \end{aligned}$$

CHE EQUIVAREBBE A DIRE CHE $\forall |f\rangle \in S$ IO POSSO SCRIVERE
COME

$$|f\rangle = |f^{(1)}\rangle + |f^{(2)}\rangle$$

O ANCHE A

$$11 = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i| + \int da |a\rangle \langle a|$$

IN TUTTO CIÒ ABBIAMO SUPPOSTO CHE NON CI SIA DEGENERAZIONE,
SE DOVESSE ESSERCI SI DEVONO USARE I PROIETTORI (VEDI
DISPENSE O SCIUTO DI HQ2).

NOTA PER ABBREVIARE LA NOTAZIONE SI POTREBBE SCRIVERE

$$\int_{Sp(A)} da \doteq \int_{Sp(A)} da + \sum_{a_i \in Sp(A)} da$$

QUINDI ABBIAMO VISTO CHE GLI AUTOVETTORI DI UN OPERATORE
AUTOAGGIUNTO FORMANO UNA BASE DEL NOSTRO SPAZIO S .
PERÒ VORREI USARLA COME BASE PER $\mathcal{H} \rightarrow |\psi\rangle \in \mathcal{H}$

SE LO SPETTRO È DISCRETO SONO ADOSTO PERCHÉ $|a_i\rangle \in \mathcal{H}$ ED
È BEN DEFINITO IL PRODOTTO SCALARE CON $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$
EVENTUALMENTE.

ANALIZZIAMO IL CASO IN CUI LO SPETTRO È CONTINUO.
ABBIAMO

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \quad \mathcal{D}_A \supset S \quad \text{E} \quad \text{SÌ} \quad [\mathcal{D}_A] = \mathcal{H}$$

(OSSIA $\mathcal{D}_A$ È DENSO IN $\mathcal{H}$ ED $\mathcal{H}$ È $\mathcal{D}_A$ IN CUI AGGIUNGO
TUTTI I LIMITI DI TUTTE LE SUCCESSIONI DI CAUCHY)

SAPPIAMO S DENSO IN $\mathcal{H}$, QUINDI

$$\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad \exists \{|\psi_m\rangle \in S\}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |\psi_m\rangle = |\psi\rangle$$

QUINDI ANCHE SE $|\psi\rangle$ NON APPARTIENE AD S LO POSSO
VEDERE COME SUCCESSIONE DI ELEMENTI DI S .
POSSO DEFINIRE

$$\langle a | \psi \rangle \equiv \psi(a) = \text{l.i.m. } \psi_m(a) \quad \text{CON} \quad \psi_m(a) = \langle a | \psi_m \rangle$$

SICURAMENTE DEFINITI

RICORDA l.i.m. = LIMITE IN MEDIA QUADRATICA

$$\text{l.i.m. } \psi_m(a) = \psi(a) \quad \text{VOLE DIRE} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} da |\psi(a) - \psi_m(a)|^2 = 0$$

POTER DEFINIRE $\psi(a)$ NON SI GARANTISCE LA CONOSCENZA DI $\psi(a)$
IN OGNI PUNTO (QUELLO VORREBBE DIRE ESSERE IN GRADO
DI CALCOLARE IL LIMITE PUNTUALE), MA VUOL DIRE CHE
POSSO COSTRUIRE $\psi(a)$ A MENO DI PUNTI A MISURA
NULLA E QUINDI NON HO DEFINITO UN'UNICA FUNZIONE

$\psi(a)$, HA UNA CLASSE DI EQUIVALENZA. PERÒ SIAMO RIUSCITI A DIRE CHE $\{|a\rangle\}$ PUÒ FUNGERE COME BASE DI $\mathcal{H}$ POICHÉ QUALUNQUE VETTORE DI $\mathcal{H}$ POSSO SCRIVERLO IN TERMINI DI $\{|a\rangle\}$ USANDO COME COEFFICIENTI $\psi(a)$.

L' AVERE UNA CLASSE DI EQUIVALENZA NON È UN PROBLEMA PER I PRODOTTI SCALARI.

HO

$$|\varphi\rangle = \int da \psi(a) |a\rangle$$

SE LO MOLTIPLICO PER UNA $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = \int da \psi(a) \langle \varphi | a \rangle = \int da \varphi^*(a) \psi(a) \quad (*)$$

È AVERE $\psi(a)$ DEFINITI A KENO DI PUNTI A MISURA NULLA USATI IN INTEGRAZI NON MI CAMBIA NULLA, SUL SUO VALORE.

RICORDA CHE TUTTE LE FUNZIONI AL QUADRATO SOMMABILI (ANCHE SE DA SOLE NON HANNO VALORE BEN DEFINITO) PORTANO AD UN NUMERO COMPLESSO BEN PRECISO SOLO QUANDO SONO MOLTIPLICATE PER UN'ALTRA $\varphi^*(a) \in L^2(\text{Sp}(A))$.

OSS L'ESPRESSIONE $(*)$ RAPPRESENTA L'ESTENSIONE DEL TEOREMA SPETTRALE AD $\forall |\varphi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$

VEDIAMO IN SEGUITO DUE ESEMPI.

ESEMPIO L'OPERATORE POSIZIONE, $\hat{x}f(x) = xf(x)$

LO SPETTRO È CERTAMENTE CONTINUO

$$xf(x) = \lambda f(x) \quad \text{E} \quad \exists f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (1)$$

PERÒ CON TESTARDAGGINE LO RISCRIVIAMO IN MODO ASTRATTO
NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI.

$$\hat{x}|x_0\rangle = x_0|x_0\rangle$$

FACCIO IL PRODOTTO SCALARE CON UN $\langle x|$

$$\langle x|\hat{x}|x_0\rangle$$

MA $\hat{x}$ È HERMITIANO E LO POSSO FAR AGIRE A DESTRA E SINISTRA

$$\langle x|\hat{x}|x_0\rangle = \begin{cases} x\langle x|x_0\rangle \\ x_0\langle x|x_0\rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow x\langle x|x_0\rangle = x_0\langle x|x_0\rangle$$

SE DICO CHE $\langle x|x_0\rangle = \delta(x-x_0)$ ALLORA L'EQUAZIONE (1)
È SODDISFATTA.

QUINDI LA PROIEZIONE NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI
DELL'AUTOSTATO DI $\hat{x}$, DI AUTOVALORE x_0 È LA $\delta(x-x_0)$.

L'EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI È SODDISFATTA DA UNA
DISTRIBUZIONE $\Rightarrow$ LO SPETTRO È CONTINUO, INFATTI SO $x_0 \in \mathbb{R}$

LE SOLITE RELAZIONI SI RISCRIVONO:

$\{|x\rangle\}$ BASE PER $\mathcal{H}$

QUINDI $\forall |f\rangle \in \mathcal{H}$, $|f\rangle = \int dx f(x) |x\rangle$ con $f(x) = \langle x|f\rangle$

POSSO DIRE $\langle g|f\rangle = \int dx \langle g|x\rangle \langle x|f\rangle = \int dx g^*(x) f(x)$

DA CUI ESTRAGGO

$$\int dx |x\rangle \langle x| = 1$$

ESEMPIO OPERATORE IMPULSO, $P = -\hbar \frac{d}{dx}$ $P|k\rangle = \hbar k |k\rangle$

LO VORREI RISCRIVERE L'EQUAZIONE NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI $\{|x\rangle\}$

$$\langle x|P|k\rangle = \int dy \underbrace{\langle x|P|y\rangle}_{\delta(x-y)(-\hbar \frac{d}{dy})} \langle y|k\rangle = \hbar k \langle x|k\rangle$$

HA DEVE VALERE $(-\hbar \frac{d}{dx}) \varphi^{(k)}(x) = \hbar k \varphi^{(k)}(x)$

HA ALLORA $\varphi^{(k)}(x) = \langle x|k\rangle = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$

CHE DI NUOVO NON È IN $L^2(\mathbb{R})$ E DI NUOVO ABBIAMO SPETTRO CONTINUO.

POSSIAMO SCRIVERE

$$\int dk |k\rangle \langle k| = 1$$

$$|f\rangle = \int dk \langle k|f\rangle |k\rangle = \int dk f(k) |k\rangle$$

OV $f(k) = \langle k|f\rangle$ È IL COEFFICIENTE DI FOURIER NELLO SPAZIO DELLE k

POTREI PROIETTARE SU x

$$f(x) = \int dk f(k) \langle x|k\rangle = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} f(k)$$

COME VISTO AD HQI.

oss NATURALMENTE ESISTONO OPERATORI AUTOGGIUNTI CON SPETTRO
MISTO, CIOÈ CON UNA PARTE CONTINUA E UNA DISCRETA.
GLI ESEMPI DI MAGGIOR INTERESSE SONO LE HAMILTONIANE
CHE AMMETTONO SIA STATI LEGATI CHE STATI DI
SCATTERING, COME IL POTENZIALE COULOMBIANO.

QUINDI ORA, PRESO UN OPERATORE QUALUNQUE SIAMO IN GRADO
DI USARE I SUOI AUTOSTATI NELLO SPAZIO DI HILBERT.
ABBIAMO INOLTRE VISTO CHE TUTTI GLI SPAZI $\mathcal{H}$ SONO ISOMORFI
TRA LORO.
DATI PIÙ SISTEMI LE OSSERVABILI FISICHE SONO SEMPRE LE
STESSE $(\hat{L}, \hat{p}, \hat{x}, \dots)$. MA ALLORA TUTTI I SISTEMI SONO
UGUALI, DESCRIVIBILI ALLO STESSO MODO? COSA LI DIFFERENZIA
UN SISTEMA RISpetto UN ALTRO?

Lo SCOC = SISTEMA COMPLETO DI OSSERVABILI COMMUTANTI

DATO UN CERTO SISTEMA AVRO' UN NUMERO MASSIMO DI
OSSERVABILI CHE POSSO USARE PER CARATTERIZZARE IL
SISTEMA. QUESTO NUMERO MASSIMO È QUELLO CHE MI FA
DISTINGUERE DUE SISTEMI.

QUINDI IN MECCANICA CLASSICA UN SISTEMA LO CARATTERIZZAVO CON
UN INSIEME DI $2M$ COORDINATE, ORA IN MECCANICA
QUANTISTICA UN SISTEMA LO CARATTERIZZO CON M
OSSERVABILI COMMUTANTI, OSSIA, LO SCOC.

SCOC : INSIEME DI OSSERVABILI $\{A_n\}$ $n=1, \dots, M$ CHE
COMMUTANO TRA LORO

$$[A_n, A_j] = 0 \quad \forall n, j$$

SE SIAMO IN UNO SPAZIO DI HILBERT $\mathcal{H}$ A DIMENSIONE FINITA, QUINDI GLI OPERATORI SONO MATRICI, ALLORA A_i SONO TUTTE MATRICI DIAGONALIZZABILI CONTEMPORANEAMENTE $\Rightarrow$ AMMETTONO BASE COMUNE DI AUTOVETTORI. QUESTO VERO ANCHE SE A_i SONO OPERATORI DIFFERENZIALI O ∞ DIMENSIONALI.

DM • ASSUNTO $A_i |v\rangle = v_i |v\rangle$, $|v\rangle$ BASE DI $A_i \forall i$

ALLORA $A_i A_j |v\rangle = A_i v_j |v\rangle = v_j A_i |v\rangle$

$$A_j A_i |v\rangle = v_i A_j |v\rangle$$

$$\Rightarrow A_i A_j |v\rangle = A_j A_i |v\rangle \Rightarrow [A_i, A_j] = 0$$

• ASSUNTO $[A_i, A_j] = 0$

ALLORA $A_i A_j |v\rangle = A_j A_i |v\rangle = v_i A_j |v\rangle$

VERO $A_j |v\rangle$ È AUTOVETTORE DI A_i CON AUTOVALORE v_i
MA ASSUNTO CHE NON CI SIA DEGENERAZIONE HO

$$A_j |v\rangle \propto |v\rangle \Rightarrow \exists v_j \in \mathbb{C} \text{ t.c. } A_j |v\rangle = v_j |v\rangle$$

SE RIESCO A PRENDERE IL MASSIMO NUMERO DI OPERATORI COMMUTANTI, ALLORA L'AUTO SPAZIO DEGLI AUTOVETTORI COMUNI È UNIDIMENSIONALE.

SUPPONIAMO DI AVERE $SOC = \{A_i\}$ E CONOSCO GLI AUTOVALORI v_i
ALLORA UN GENERICO AUTOSTATO COMUNE È

$$|v_1, \dots, v_n\rangle$$

ED È UNICO.

SE PRENDO B OPERATORE TC $[B, A_i] = 0 \quad \forall i$
ALLORA

$$B = \varphi(A_1, \dots, A_m)$$

OSSIA È SCRIVIBILE COME UNA FUNZIONE DI ESSI SOLTANTO.
IL VALORE MEDIO È

$$\langle B \rangle = f(v_1, \dots, v_m)$$

SE L'AUTOSPAZIO NON FOSSE UNIDIMENSIONALE, VORREBBE DIRE
CHE HO DEGENERAZIONE, IL CHE VUOL DIRE CHE
NON HO PRESO UNO SCOC, MA C'È ANCORA
UN OPERATORE CHE COMMUTA CON TUTTE LE A_i .

SUPPONGO DI AVERE

$$A_i |v_1\rangle = v_i |v_1\rangle$$
$$A_i |v_2\rangle = v_i |v_2\rangle$$

DEVO VEDERE CHE EFFETTIVAMENTE $\exists B$ CHE COMMUTA
CON $A_i \quad \forall i$

B = OPERATORE DI SCAMBIO

$$B |v_1\rangle = |v_2\rangle \quad ; \quad B |v_2\rangle = |v_1\rangle$$

ALLORA

$$A_i B |v_1\rangle = A_i |v_2\rangle = v_i |v_2\rangle$$

$$B A_i |v_1\rangle = B v_i |v_1\rangle = v_i |v_2\rangle$$

$$\Rightarrow [B, A_i] = 0$$

INFATTI COME MOLTE VOLTE SUCCEDER, SI È SICURI DI
AVERE UNO SCOC, MA SI SCOPRE CHE SI PUÒ
AGGIUNGERE ANCORA LA PARITÀ.

MA COME COSTRUISCO UN OPERATORE IN GENERALE?

C'È UNA CERTA LIBERTÀ NELLO SCEGLIERE LO SCOC, COSÌ COME
IN MC POTEVO SCEGLIERE IL SISTEMA DI COORDINATE.
PERÒ DEVO AVERE UN'ACCORTEZZA IN PIÙ IN MQ, DEVO
COSTRUIRE LE OSSERVABILI TRAMITE OPERATORI. COSTRUISCO GLI
OPERATORI A PARTIRE DAGLI OPERATORI DELLE VARIABILI
DINAMICHE (OPERATORI COORDINATE SONO MOLTIPLICATIVI E OPERATORI
IMPULSO SONO DERIVATIVI) E CON CUI COSTRUISCO QUELLI
CHE VOGLIO. MA ATTENZIONE, GLI OPERATORI CHE COSTRUISCO
DEVONO ESSERE AUTOAGGIUNTI E QUINDI DEVO RENDERLI
TALI A MANO.

ES p, q OPERATORI AUTOAGGIUNTI

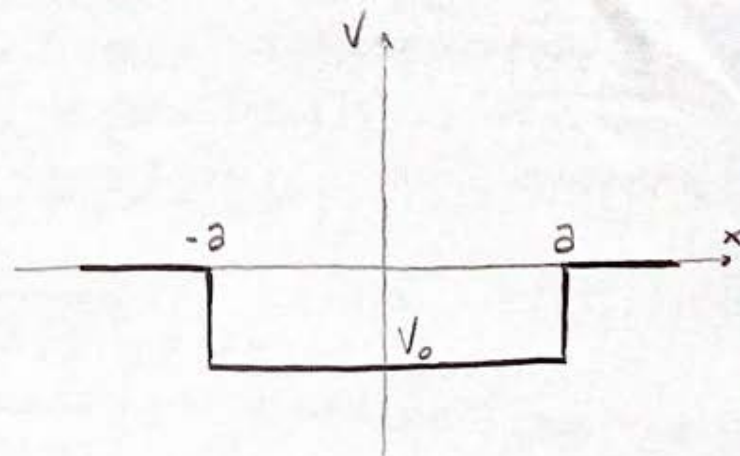
COSTRUISCO $F = pq$ MA NON È AUTOAGGIUNTO
POICHÉ $F^\dagger = qp$, LO RENDO TALE SCRIVENDO
$$F = \frac{1}{2}(pq + qp)$$

RIVEDIAMO UN'ESEMPIO GIÀ NOTO, MA SCRIVENDO MEGLIO LA MATEMATICA.

BUCA RETTANGOLARE FINITA

ABBIAMO UNA PARTICELLA DI MASSA m E UN POTENZIALE

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ V_0 & |x| < a \end{cases} \quad V_0 < 0$$



SO CHE POSSO RISOLVERE L'EQUAZIONE DI SCHRODINGER STAZIONARIA

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

COSÌ DA TROVARE AUTOVALORI ED AUTOVETTORI DI $\hat{H}$. SCRITTA NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))\psi = 0$$

MA RISPETTO MQI, ORA SO CHE SE;

• $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{AVRÒ } \text{Spd}(H)$

• $\psi(x) \in S' \Rightarrow \text{AVRÒ } \text{Spc}(H)$

IO VOGLIO UNA ψ CONTINUA, QUESTO PERCHÉ SE CI FOSSE DISCONTINUITÀ DI I SPECIE AVREI $\psi'(x) = \delta$ E QUINDI $\psi''(x) = \delta'$ E DI CONSEGUENZA L'EQUAZIONE DI SCHRODINGER NON SAREBBE RISOLVIBILE (FIN'ORA ABBIAMO DETTO CHE SE ψ NON È CONTINUA ALLORA L'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ NON SAREBBE RISOLTA).

NOTA L'UNICO CASO IN CUI SONO AMMESSE DISCONTINUITA' E QUANDO $V \rightarrow \infty$ (BUCA INFINITA).

VEDIAMO I DIVERSI CASI $E > 0$; $V_0 < E < 0$; $E < V_0$.

$E > 0$

OTTENGO LE DUE EQUAZIONI NELLE DUE REGIONI

$$\begin{cases} \psi'' + k_I^2 \psi = 0 & |x| > a \\ \psi'' + k_{II}^2 \psi = 0 & |x| < a \end{cases}$$

DOVE

$$k_I = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E} > 0$$

$$k_{II} = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} > k_I > 0$$

SEPARANDO LE 3 REGIONI

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ik_I x} + B e^{-ik_I x} (= \psi_1) & x < -a \\ C e^{ik_{II} x} + D e^{-ik_{II} x} (= \psi_2) & -a < x < a \\ E e^{ik_I x} + F e^{-ik_I x} (= \psi_3) & x > a \end{cases}$$

$A, B, C, D, E, F \in \mathbb{C}$

VEDO GIÀ DA QUESTA SCRITTURA CHE $\psi(x)$ È UNA DISTRIBUZIONE TEMPERATA, QUINDI LO SPETTRO DI H SARÀ CONTINUO. $\rightarrow \text{spc}(H) \supset (0, +\infty)$

FACCIAMO DUE CONTI.

IMPONIAMO LA CONTINUITA' DELLA FUNZIONE D'ONDA

$$\begin{cases} \psi_1(-a) = \psi_2(-a) \\ \psi_1'(-a) = \psi_2'(-a) \end{cases} \cup \begin{cases} \psi_2(a) = \psi_3(a) \\ \psi_2'(a) = \psi_3'(a) \end{cases}$$

HA HO 4 EQUAZIONI IN 6 INCOGNITE.
 SE SCRIVO I SISTEMI E LI SCRIVO COME MATRICI,
 VEDO CHE NON SONO MAI SINGOLARI, QUINDI POSSO
 SCRIVERE 2 VARIABILI IN FUNZIONI DELLE ALTRE 4
 (VEDI ESERCIZIO DI REGIS DI HQI), MA SOPRATTUTTO
 TROVO UN'ULTERIORE CONFERMA CHE HO $\text{SpC}(H)$, POICHÉ
 RISOLVENDO IL SISTEMA NON TROVO CONDIZIONI SULL'ENERGIA
 E .

PERÒ KI RIMANGONO 2 PARAMETRI LIBERI
 $\Rightarrow$ HO DUE SOLUZIONI INDIPENDENTI
 $\Rightarrow$ TUTTI GLI AUTOSPAZI CORRISPONDENTI AD ENERGIE POSITIVE
 HANNO DIMENSIONE 2
 $\Rightarrow$ GLI AUTOVALORI POSITIVI SONO DEGENERI DI ORDINE 2
 $\Rightarrow \exists$ UN'ALTRA OSSERVABILE CHE COMMUTA CON H

OSS SE H HA DEGLI AUTOSPAZI DEGENERI $\exists$ PER FORZA
 UN'ALTRO OPERATORE COMMUTANTE (DIVERSO DA $\mathbb{I}$) CON
 H . ATTENZIONE PERÒ CHE L'EVENTUALE PRESENZA DI
 UNA SIMMETRIA DI H IMPLICA UNA DEGENERAZIONE.
 PENSA ALL'OSCILLATORE ARMONICO UNIDIMENSIONALE, H
 È INVARIANTE PER PARITÀ, MA LO SPETTRO NON
 È DEGENERE!

NEL NOSTRO CASO È L'OPERATORE PARITÀ P , QUINDI POSSO
 COSTRUIRE AUTOSTATI DI H CHE SONO ANCHE DI P .

SE VUOI NOZIONI DETTAGLIATE SULL'OPERATORE PARITÀ VEDI L'APPENDICE
 B DELLE DISPENSE "HQ2" DI SCIUTO OPPURE IL RELATIVO CAPITOLO
 SUL GRIFFITHS (CAP 6).
 DI SEGUITO METTO LE COSE ESSENZIALI.

L'OPERATORE P AGISCE COME

$$P|x\rangle = |-x\rangle \quad \text{CON } |x\rangle \text{ AUTOSTATO DELLA POSIZIONE}$$

OVVIAMENTE $P = P^{-1}$ ED È ANCHE HERMITIANO $P^\dagger = P$, QUINDI
COMPLESSIVAMENTE È UNITARIO

$$P^{-1} = P = P^\dagger$$

UN OPERATORE GENERICO RISPETTO LA PARITÀ SI TRASFORMA NEL
SEGUENTE MODO:

$$\hat{Q}'(\hat{x}, \hat{p}) = P^\dagger \hat{Q}(\hat{x}, \hat{p}) P = \hat{Q}(-\hat{x}, -\hat{p})$$

E IN PARTICOLARE

$$P^\dagger \hat{x} P = -\hat{x}$$

$$P^\dagger \hat{p} P = -\hat{p}$$

SE OPERATORE UNITARIO, QUINDI $PP^\dagger = P^\dagger P = P^2 = \mathbb{1}$ ALLORA È
FACILE VEDERE

$$\begin{cases} P^2 = \mathbb{1} \\ P|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \end{cases} \Rightarrow P^2|\psi\rangle = P\lambda|\psi\rangle = \lambda^2|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm 1}$$

OSSIA GLI AUTOVALORI DI P SONO SOLO ± 1 .

IMPORTANTE RICORDARE CHE L'AGIRE DI P NELLO SPAZIO DELLE FUNZIONI
D'ONDA È

$$P\psi(x) = \langle x|P|\psi\rangle = \langle -x|\psi\rangle = \psi(-x) = \pm \psi(x)$$

NEL NOSTRO CASO ABBIAMO CHE L'HAMILTONIANA HA SIMMETRIA
PER INVERSIONE (È PARI SIA IN x CHE IN p) OSSIA

$$P^\dagger H P = H$$

MA QUESTO VUOL DIRE APPUNTO DIRE $[H, P] = 0$

COME MI ASPETTAVO.

SE DIAGONALIZZO CONTEMPORANEAMENTE $\hat{H}$ E $\hat{P}$ RIMUOVO LA DEGENERAZIONE
E RIESCO A DARE UN CRITERIO PER LA SCELTA
DELLA BASE DI $\hat{H}$. INFATTI SE $|\psi\rangle$ È AUTOVETTORE
DI $\hat{H}$, ALLORA ANCHE $\hat{P}|\psi\rangle$ LO È.

$$\hat{H}\hat{P}|\psi\rangle = \hat{P}\hat{H}|\psi\rangle = E\hat{P}|\psi\rangle$$

E È AUTOVALORE DEGENERATO E DATO UNO $|\psi\rangle$ CHE NON
ABBIA PARITÀ DEFINITA (OSSIA NON È AUTOVETTORE DI $\hat{P}$),
POSSO COSTRUIRE AUTOSTATI DI $\hat{H}$ FACENDO

$$|\psi^+\rangle = |\psi\rangle + \hat{P}|\psi\rangle$$

$$|\psi^-\rangle = |\psi\rangle - \hat{P}|\psi\rangle$$

E SONO OVVIAMENTE AUTOSTATI DI $\hat{H}$, MA ORA HANNO
PARITÀ DEFINITA, OSSIA SONO ANCHE AUTOSTATI DI
 $\hat{P}$. LO VERO

$$\hat{P}|\psi^+\rangle = \hat{P}|\psi\rangle + \hat{P}|\psi\rangle = |\psi^+\rangle$$

$$\hat{P}|\psi^-\rangle = \hat{P}|\psi\rangle - \hat{P}|\psi\rangle = -|\psi^-\rangle$$

QUINDI CONCLUDO CHE SE $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$ ANCHE SE HO $|\psi\rangle$
CHE È AUTOVETTORE SOLO DI $\hat{H}$ E VOGLIO RIMUOVERE
LA DEGENERAZIONE, QUINDI VOGLIO DIAGONALIZZARE SIA $\hat{H}$
CHE $\hat{P}$, QUINDI VOGLIO FARE UNA BASE COMUNE DI
AUTOVETTORI LO POSSO PERCHÉ SE CONOSCO
COME AGISCE LA PARITÀ POSSO SEMPRE COSTRUIRE
STATI PAR O STATI DISPARI.

OSS NELLE DISPENSE DI SOUTO SPIEGA CHE UN ALTRO MODO DI RIMUOVERE LA DEGENERAZIONE È QUELLA DI PORRE CONDIZIONI AL CONTORNO.

IO MI ASPETTO NELLA REGIONE $x < -a$ ED $-a < x < a$ MI ASPETTO DI AVERE UN'ONDA PROGRESSIVA E UNA REGRESSIVA, MA IN $x > a$ MI ASPETTO SOLO UN ONDA PROGRESSIVA, OSSIA

$$\psi_3(x, t) = F e^{i(k_1 x - \frac{E}{\hbar} t)} + G e^{i(-k_1 x - \frac{E}{\hbar} t)} \Rightarrow G = 0$$

IL CHE MI RIMUOVE LA DEGENERAZIONE. (IDEA SE IMPONESSI $B=0$ IN $\psi_1(x < -a, t)$).

$V_0 < E < 0$ IN QUESTO CASO HO

$$\begin{cases} \psi'' - \beta^2 \psi(x) = 0 \\ \psi'' + k^2 \psi(x) = 0 \end{cases}$$

$$\beta = \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2} E} > 0$$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)} > 0$$

E SI HA

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{\beta x} + B e^{-\beta x} & x < -a \\ C e^{i k_I x} + D e^{-i k_I x} & -a < x < a \\ E e^{\beta x} + F e^{-\beta x} & x > a \end{cases}$$

$$x < -a$$

$$-a < x < a$$

$$x > a$$

ORA PERÒ HO EXP SIA COMPLESSI CHE REALI E IL FATTO CHE IO VOGLIA $\psi \in L^2$ OPPURE $\psi \in S'$ NON È CAMBIATO. PERÒ VEDO CHE SE $B \neq 0$ OPPURE $E \neq 0$ HO COSE CHE DIVERGONO ESPONENZIALMENTE ALL'OO E ψ NON È UNA DISTRIBUZIONE TEMPERATA,

QUINDI, DEVO IMPORRE

$$B = E = 0$$

E MI RIMANGONO SOLAMENTE 4 PARAMETRI E ADDIRITTURA
 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, QUINDI MI ASPETTO UNO SPETTRO
DISCRETO.

DEVO IMPORRE LE CONDIZIONI DI CONTINUITÀ COME NEL
CASO DI PRIMA HA AVENDO 4 EQUAZIONI A 4
INCOGNITE, IL SISTEMA HA SOLUZIONE SOLO SE IL
DETERMINANTE DEI COEFFICIENTI È $= 0$, HA IMPORRE

$$\det(\text{coeff.}) = 0$$

MI FA SALTARE FUORI UNA CONDIZIONE SU k , OSSIA SU
L'ENERGIA E QUINDI HO L'ENERGIA QUANTIZZATA E
UNO SPETTRO DISCRETO.

PICCOLA OSSERVAZIONE $\beta^2 + k^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} V_0 > 0$

DOVREI FARE I CONTI CON LE EQUAZIONI DI CONTINUITÀ,
MA CONVIENE NOTARE CHE L'HAMILTONIANA HA PARITÀ
DEFINITA E POSSO SCEGLIERE FUNZIONI D'ONDA ψ PARI
PIUTTOSTO CHE DISPARI.

VEDIAMO ESPPLICITAMENTE IL CASO PARI

$$\psi(x) = \begin{cases} M \cos(kx) & |x| < a \\ N e^{-\beta|x|} & |x| > a \end{cases} \quad M, N \in \mathbb{C}$$

POSSO IMPORRE LE CONDIZIONI DI CONTINUITÀ IN $x = a$
(IN $x = -a$ SONO GARANTITE DALLA PARITÀ)

$$\begin{cases} M \cos(ka) = N e^{-\beta a} \\ -k M \sin(ka) = -\beta N e^{-\beta a} \end{cases}$$

CHE M E N È UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO NELLE VARIABILI M ED N , QUINDI LE SOLUZIONI SONO:

$$M = N = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \cos(ka) & -e^{-\beta a} \\ -k \sin(ka) & \beta e^{-\beta a} \end{pmatrix} = 0$$

OVVIAMENTE SE $M = N = 0$ SI OTTIENE LA SOLUZIONE BANALE $\psi \equiv 0 \forall x$, QUINDI SIAMO INTERESSATI ALL'ALTRA CHE TROVO IMPONENDO LA CONDIZIONE CHE IL DETERMINANTE DEI COEFFICIENTI SIA NULLO.

$$\det(\dots) = e^{-\beta a} (\beta \cos(ka) - k \sin(ka)) = 0 \Rightarrow k \tan(ka) = \beta$$

LE SOLUZIONI DISPARI SI TROVANO A PARTIRE DA

$$\psi(x) = \begin{cases} A \sin(kx) & |x| < a \\ B \operatorname{sign}(x) e^{-\beta|x|} & |x| > a \end{cases} \quad A, B \in \mathbb{C}$$

E SI ARRIVA ALLA CONDIZIONE $k \cot(ka) = -\beta$

INTRODUCO LE VARIABILI ADIMENSIONALI

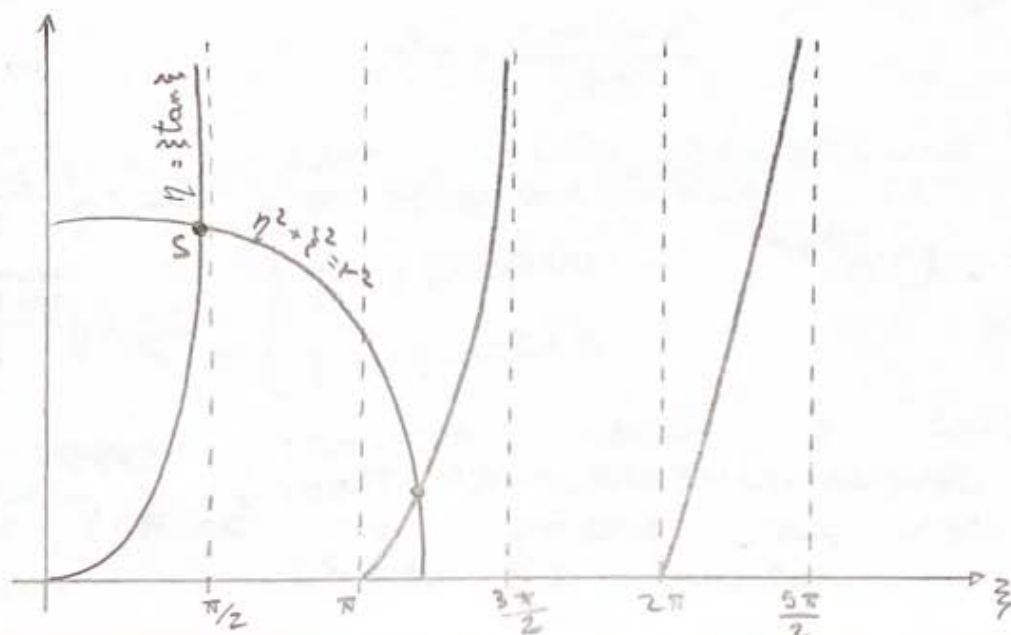
$$\eta = \beta a \quad ; \quad \xi = ka \quad ; \quad \kappa^2 = -\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \quad \text{E VALE} \quad \eta^2 + \xi^2 = \kappa^2$$

SI OTTENGONO DUNQUE LE CONDIZIONI

$$\begin{cases} \xi \tan \xi = \eta \\ -\xi \cot \xi = \eta \\ \eta^2 + \xi^2 = v^2 \end{cases}$$

CHE È UN SISTEMA NON RISOLVIBILE ANALITICAMENTE, MA GRAFICAMENTE.

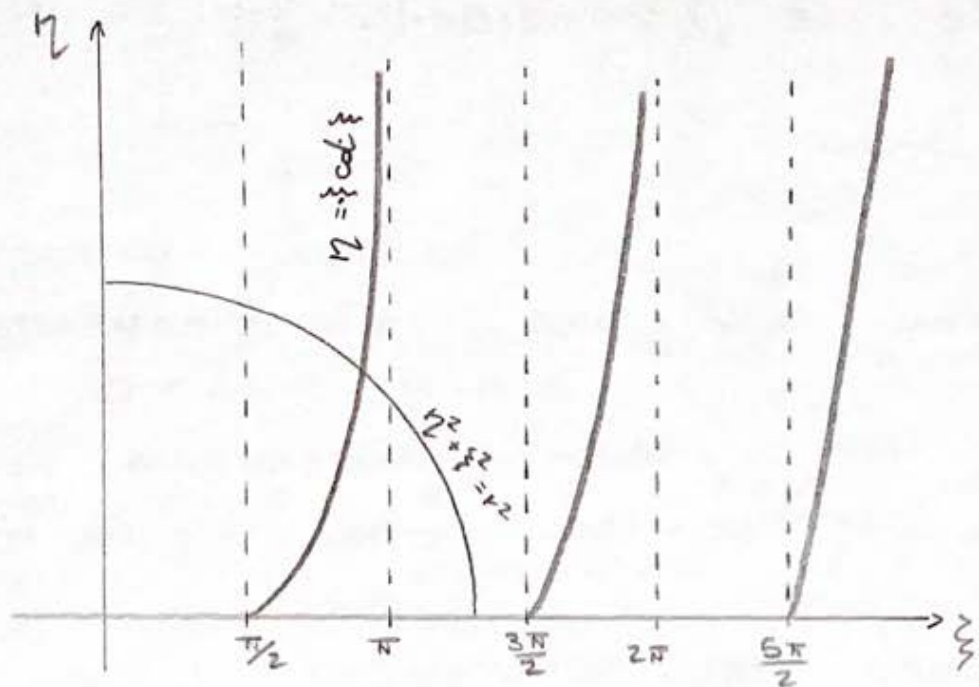
v È UN PARAMETRO CHE NON DIPENDE DALL'ENERGIA, MA SOLO DALLA LARGHEZZA DELLA BUCA a E DALLA PROFONDITÀ V_0 . QUINDI PER UNA DETERMINATA FORMA DELLA BUCA (OVERO UN DETERMINATO v), IL SISTEMA HA UN NUMERO FINITO DI SOLUZIONI (ξ, η) A CIASCUNA DELLE QUALI CORRISPONDE UN AUTOVALORE DELL'HAMILTONIANA E UN AUTOSTATO. TALI AUTOVALORI SONO LE ENERGIE CHE COMPONGONO LO SPETTRO DISCRETO DI H .



SOLUZIONI PAI

RISOLVO GRAFICAMENTE INDIVIDUANDO LE INTERSEZIONI TRA LE DUE CURVE, CIASCUNA INTERSEZIONE MI DA UNA COPPIA (ξ, η) .

NOTA CHE NON C'È DEGENERAZIONE 0 CHE C'È SEMPRE UNO STATO FONDAMENTALE (0, S)



SOLUZIONI DISPARI

NOTA OSSERVAZIONI UGUALI AL CASO PARI, MA ORA NON È SCONTATA L'ESISTENZA DI STATO FONDAMENTALE.

QUINDI ABBIAMO TROVATO LO SPETTRO DISCRETO DI H
 $\text{Spd}(H) \subset (V_0, \infty)$

$E < V_0$ STA VOLTA SI HA

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{\beta_{\pm} x} & x < -a \\ C e^{\beta_{\pm} x} + D e^{-\beta_{\pm} x} & |x| < a \\ B e^{-\beta_{\pm} x} & x > a \end{cases}$$

$$\beta_{\pm} = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\beta_{\pm} = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

È UNA SOLUZIONE CHE MATEMATICAMENTE ESISTE ($e^{\pm \beta_{\pm} x}$ in $|x| > a$), MA HO KESSI A O PER LE REGIONI DI PRIMA), MA QUANDO IMPONGO LE CONDIZIONI DI CONTINUITÀ TROVO LA CONDIZIONE (PER IL CASO PARI)

$$\beta_{II} \tanh(\beta_{II} a) = -\beta_I$$

CHE NON È RISOLVIBILE POICHÉ IL PRIMO MEMBRO È POSITIVO, MENTRE IL SECONDO NEGATIVO.

DISCORSO ANALOGO PER LE SOLUZIONI DISPARI.

QUINDI IN QUESTO CASO L'UNICA SOLUZIONE POSSIBILE È QUELLA BANALE $\psi \equiv 0$.

ABBANDONIAMO LA BUCA DI POTENZIALE FINITA PER NOTARE CHE TUTTI I CASI DI BUCHE / BARRIERE VISTE AD OGNI SONO RICAVABILI DA QUESTA FACENDO UN LIMITE.

BUCA INFINITA FACCIO $V_0 \rightarrow -\infty (\Rightarrow \text{diagramma})$
 DEVO TRASLARE IL FONDO IN 0 : $E \rightarrow E - V_0$
 LA PRIMA COSA CHE VEDO È $\eta^2 + \xi^2 = r^2 \rightarrow$ CIRCONFERENZA DI RAGGIO INFINITO POICHÉ

$$r^2 = -\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}$$

QUINDI I PUNTI DI INTERSEZIONE (ξ, η) DIVENTANO LE INTERSEZIONI TRA LA CIRCONFERENZA E LE CURVE

$$\begin{cases} \eta = \xi \tan \xi \\ \eta = -\xi \cot \xi \end{cases}$$

LE POSSO TROVARE NEGLI ξ CORRISPONDENTI AGLI ASINTOTI VERTICALI (VEDI FIGURA), OSSIA

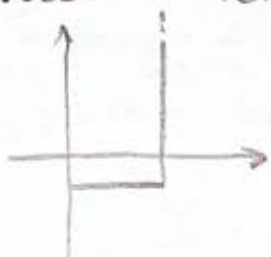
$$\xi_m = m \frac{\pi}{2}$$

E DA CUI RICAVO I VALORI DI ENERGIA

$$\xi^2 = r^2 - \eta^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} V_0 a^2 - \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) a^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} a^2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{4} m^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} a^2 \Rightarrow \boxed{E_m = -\frac{\hbar^2 \pi^2 m^2}{8ma^2}}$$

OSS SE NON AVESSI SHIFTATO IL FONDO DELLA BUIA E AVESSI TENUTO



$$\xi_m = \frac{\pi}{2} m$$

$$\xi_m^2 = r^2 - \eta^2 = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} a^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} a^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E) a^2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{4} m^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E) a^2 \Rightarrow E_m - V_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2 m^2}{8ma^2}$$

E POTREI ORA SPOSTARE IL FONDO A 0. ($E_m - V_0 \rightarrow -E_m$)

SE FACESSI $V_0 \rightarrow 0$ TROVEREI L'UNICO STATO LEGATO DATO DALLA SOLUZIONE PARI. VEDIAMO I CONTI

SE $V_0 \rightarrow 0$ ALLORA C'UNICO STATO LEGATO LO TROVO IN $\xi \rightarrow 0$
MA ALLORA $\eta = \xi \tan \xi \sim \xi^2$ POICHÉ $\tan \xi \sim \xi$

MA SO $\xi^2 = r^2 - \eta^2 \Rightarrow \eta = r^2 - \eta^2$
LO STATO LEGATO PERÒ IN REALTÀ LO TROVO IN $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$

39 QUINDI

$$\eta^2 = 0(\eta)$$

QUINDI

HO

$$\eta \sim r^2$$

OSSIA

$$\eta = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} a \sim r^2 = -\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-2mE}{\hbar^2} a^2 = \frac{4m^2 V_0^2 a^4}{\hbar^2} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{2mV_0^2 a^2}{\hbar^2}}$$

MA POSSO ANCHE COSTRUIRE

$$V(x) = \delta(x)$$

LA COSTRUISCO : HANDO $V_0 \rightarrow 0$ E STRINGO LA BUCCA $a \rightarrow 0$
HA DEVO FARE IN MODO CHE $V_0 \cdot a = \text{cost}$
(L'AREA SOTTESA NON VOGLIO CHE CAMBI)
DEVO PRENDERE

$$V_0 = -\frac{A}{2a}$$

COSI

HO

$$\lim_{a \rightarrow 0} -A\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} V_0$$

ANCHE COSI PERO' HO $r^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} V_0 a^2 \rightarrow 0$ E QUINDI MI
RITROVO NELLA SITUAZIONE VISTA PRIMA CON UN UNICO
STATO LEGATO.

DALL'ESPRESSIONE DI E SE METTO $V_0 = -\frac{A}{2a}$ TROVO L'ENERGIA
NEL CASO DELTIFORME

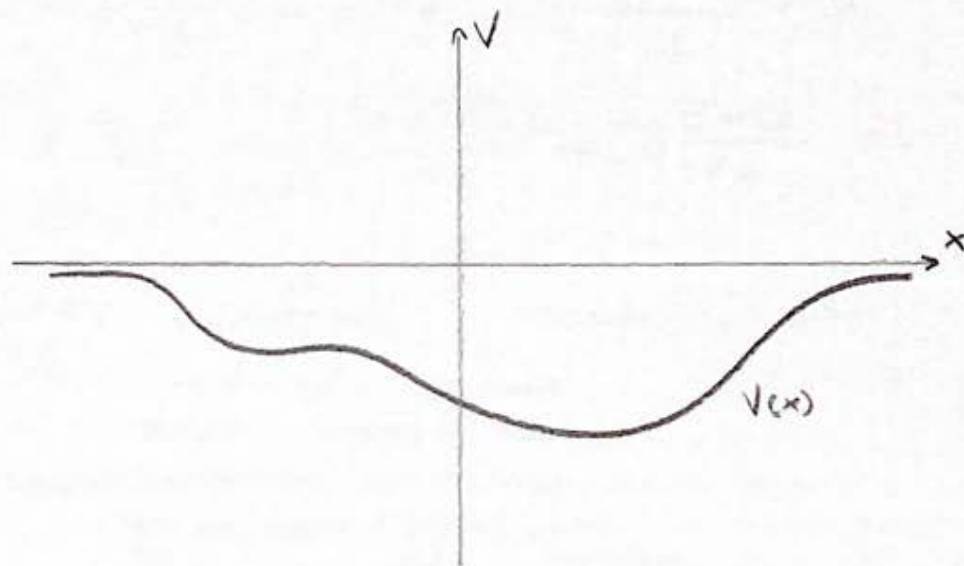
$$\boxed{E = -\frac{2m a^2}{\hbar^2} \frac{A^2}{4a^2} = -\frac{A^2 m}{2\hbar^2}}$$

ABBANDONIAMO LE BUCHE DI POTENZIALE E VEDIAMO ALCUNE OSSERVAZIONI DI CARATTERE GENERALE SUI POTENZIALI

CONSIDERIAMO UNA SITUAZIONE CON UN POTENZIALE ATTRATTIVO DEL TIPO:

$$V(x) < 0 \quad \forall x$$

$$\text{e t.c. } V(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty$$



DOVREMO ANALIZZARE I DUE CASI $E > 0$ ED $E < 0$ E VEDREMO CHE NEI DUE CASI GLI AUTOSTATI DELL'HAMILTONIANA

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$$

AVRANNO CARATTERISTICHE DIVERSE A SECONDA DEL CASO.

$E < 0$ LA FUNZIONE D'ONDA DI UNO STATO STAZIONARIO ANDRÀ SICURAMENTE A 0 ALLE GRANDI DISTANZE

$$\psi(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty$$

QUESTO POICHÉ $|x| \rightarrow \infty$ VADO IN UNA ZONA PROIBITA (VEDI CAPITOLO DELLA "BUCA").

ALLORA LA FUNZIONE D'ONDA È AL QUADRATO SOMMABILE $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, QUINDI ABBIAMO $\text{Sp}_d(H)$ E POSSIAMO DIRE CHE $E < 0$ FORMANO LO SPETTRO DISCRETO DI H .

$$E \in \text{Spd}(H)$$

VISTO CHE $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ POSSO NORMALIZZARLA

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\vec{x})|^2 d^3x = 1$$

E QUESTO VUOL DIRE CHE

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists V \quad \text{t.c.} \quad \frac{\int_V d^3x |\psi(\vec{x})|^2}{\int_{\mathbb{R}^3} d^3x |\psi(\vec{x})|^2} = 1 - \epsilon$$

D
VOLUME

QUESTO VUOL DIRE CHE SCEGLIENDO UN VOLUME SUFFICIENTEMENTE GRANDE, LA PROBABILITÀ DI TROVARE LA PARTICELLA IN TALE VOLUME DIVENTA QUANTO SI VUOLE VICINA ALLA CERTEZZA. ESSENDO STATI STAZIONARI, TALE PROBABILITÀ NON DIPENDE DAL TEMPO. SI DICE ALLORA CHE LA PARTICELLA È LOCALIZZATA, OVERO CHE SIAMO IN UNO STATO LEGATO

$$|E > 0|$$

A GRANDI DISTANZE, O COMUNQUE IN ZONE LONTANE DA DOVE $|V|$ È GRANDE, LA PARTICELLA SI COMPORTA COME LIBERA E LA FUNZIONE D'ONDA SARÀ OSCILLANTE E UNA SOVRAPPOSIZIONE DI ONDE PIANE DEL TIPO

$$\psi(\vec{x}) \sim \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty$$

E QUINDI $\psi \notin L^2(\mathbb{R}^3)$, NON È AL QUADRATO SOMMABILE
 HA SARA' UNA DISTRIBUZIONE TEMPERATA.
 QUINDI AVREMO $\text{Spc}(H)$ E DICO CHE LE $E > 0$
 COSTITUISCONO LO SPETTRO CONTINUO DI H
 $E \in \text{Spc}(H)$

LA VERA FUNZIONE D'ONDA SAREBBE

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}$$

E SI HA

$$|\psi(\vec{x}, t)|^2 = \rho(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x})$$

QUINDI $\psi(\vec{x}, t)$ RAPPRESENTA COMUNQUE UNO STATO STAZIONARIO
 HA IN QUESTO CASO SI HA PROBABILITA' NULLA
 DI TROVARE LA PARTICELLA IN OGNI VOLUME V .
 LA PROBABILITA' DI TROVARE LA PARTICELLA IN V È

$$P(V) = \frac{\int_V d^3x |\psi(\vec{x}, t)|^2}{\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x} = 0$$

→ QUESTO INTEGRALE DIVERGE

QUINDI SI DICE CHE LA PARTICELLA È DELOCALIZZATA

SO CHE POSSO CREARE PACCHETTI D'ONDA, OSSIA, SOVRAPPORRE
OPPORTUNAMENTE STATI STAZIONARI DIVERSI, E OTTENERE
UNO STATO IN CUI LA PARTICELLA È LOCALIZZATA.

FACENDO QUESTO PERÒ NON È PIÙ UNO STATO
STAZIONARIO E NON È PIÙ UN'AUTO STATO DI H
POICHÉ PER LOCALIZZARLO DEVO MISCHIARE IMPULSI
(ENERGIE) DIVERSE E LE VARIE COMPONENTI DEL
PACCHETTO EVOLVONO DIVERSAMENTE E IL PACCHETTO
SI SFALDA. TUTTO CIÒ È LEGATO ALL'INDETERMINAZIONE
DI HEISENBERG

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

SPETTRO DI H

ORA POSSIAMO STUDIARE IN MODO GENERALE LO
SPETTRO DELL'HAMILTONIANA.

ABBIAMO VISTO NEL CASO DELLA BUCCA DI POTENZIALE
CHE NON SONO POSSIBILI $E < V_0$. QUESTO È UN
TEOREMA VALIDO PER TUTTI I SISTEMI SOGGETTI
AD UN POTENZIALE LIMITATO INFERIORMENTE (BOUNDED)
POSSIAMO ENUNCIARE E DIMOSTRARE UN TEOREMA

TEOREMA

ABBIAMO
DA

UN SISTEMA DI N PARTICELLE

DESCRITTO

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

CON IL POTENZIALE V LIMITATO INFERIORMENTE, OSSIA

$$\exists V_0 \quad / \quad V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \geq V_0 \quad \forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N \in \mathbb{R}^3$$

VALGONO:

- 1) $\langle \psi | H | \psi \rangle > V_0 \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad / \quad \langle \psi | \psi \rangle = 1$
- 2) $\text{Sp}(H) \subset [V_0, +\infty)$

DIMOSTRAZIONE

$$1) \quad \langle H \rangle_\psi = \langle T \rangle_\psi + \langle V \rangle_\psi$$

$$\text{DOVE} \quad \langle T \rangle_\psi = \langle \psi | \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} | \psi \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \langle \psi | p_i^2 | \psi \rangle$$

MA DEVO NOTARE

$$\begin{aligned} \langle \psi | p_i^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | p_i^\dagger p_i | \psi \rangle = (\langle \psi | p_i^\dagger) (p_i | \psi \rangle) \\ &\quad \underset{p_i = p_i^\dagger}{=} \| p_i | \psi \rangle \|^2 \end{aligned}$$

MA SO CHE $\| \cdot \|^2 \geq 0$ ED È $= 0$ SSE DENTRO
HO $|0\rangle$, MA $|\psi\rangle \neq |0\rangle$, QUINDI POSSO SEMPRE
DIRE DI AVERE $\| p_i | \psi \rangle \|^2 > 0$

QUINDI CONCLUDO $\langle T \rangle_\psi > 0$
ORA GUARDO

$$\langle V \rangle_\psi = \int d^{3N}x |\psi(x)|^2 V(x)$$

$\xrightarrow{3N}$ COORDINATE

$$\begin{aligned} \text{so } V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) &\geq V_0 \quad \forall x_i \in \mathbb{R}^3 \\ &\geq V_0 \underbrace{\int d^{3N}x |\psi(x_i)|^2}_{\langle \psi | \psi \rangle = 1} = V_0 \end{aligned}$$

CONCLUDENDO

$$\langle H \rangle_\psi = \langle T \rangle_\psi + \langle V \rangle_\psi > V_0$$



2) LO DIMOSTRO SFRUTTANDO LA DEFINIZIONE DI AUTOVALORE DI H .

DA 1) HO CHE

$$\langle \psi | (H - E) | \psi \rangle > V_0 - E, \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} / \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

SE PRENDO $E < V_0$ ALLORA

$$\exists c / \langle \psi | (H - E) | \psi \rangle > c > 0$$

MI RICORDO DELLA DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ

$$|\langle a | b \rangle| \leq \| |a\rangle \| \cdot \| |b\rangle \|$$

QUINDI POSSO DIRE

$$\| \psi > \| \cdot \| (H - E) \psi > \| \geq \underbrace{| \langle \psi | (H - E) \psi \rangle |}_{> 0}$$

DIVIDO PER
 $\| \psi > \|^2$
 $\Rightarrow$

$$\frac{\| (H - E) \psi > \|}{\| \psi > \|} > \underbrace{\frac{c}{\| \psi > \|^2}}_{= \tilde{c} > 0}$$

MA ALLORA ANCHE SE PRENDO L'ESTREMO INFERIORE DI QUELLA QUANTITÀ SARÀ > 0

$$\inf_{\substack{\psi > \in \mathcal{H} \\ \psi > \neq 0}} \frac{\| (H - E) \psi > \|}{\| \psi > \|} > \tilde{c} > 0 \quad \forall E < V_0$$

MA QUESTA È PROPRIO LA DEFINIZIONE DI PUNTO REGOLARE. E È PUNTO REGOLARE DI H

$\Rightarrow \forall E < V_0$ NON APPARTENGONO ALLO SPETTRO DI H .



NOTA L'ESTREMO INFERIORE $V_0 = 0$ STA NELLO SPETTRO DI H (CONTINUO) SOLO NEL CASO DI PARTICELLA LIBERA, IN CUI È L'UNICO CASO DOVE TUTTE LE p_i SI POSSONO ANNULARE (NEL CASO DISCRETO NON PUÒ SUCCEDERE POICHÉ SE

47

$$\langle x_1, \dots, x_n | p_i \psi \rangle = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = 0 \Rightarrow \psi \notin L^2(\mathbb{R}^{3N})$$

È NON SAREBBE UNA FUNZIONE ACCETTABILE.
 IL CASO DELLA PARTICELLA LIBERA PERMETTE A p_i
 DI ANNULLARSI E QUINDI A $\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \text{cost.}$
 IN TUTTI GLI ALTRI CASI (SPETTRO CONTINUO O
 DISCRETO CHE SIA) SI PARTE DA UNA $E > V_0$.

QUESTO TEOREMA PERÒ HA L'IPOTESI FONDAMENTALE CHE
 H SIA LIMITATA INFERIORMENTE, MA POSSIAMO STARE
 TRANQUILLI PERCHÈ IN FISICA HANNO SENSO SOLO
SISTEMI PER I QUALI LO SPETTRO DELLA
HAMILTONIANA SIA LIMITATO INFERIORMENTE, QUESTO
 ANCHE SE IL POTENZIALE NON LO È, PERCHÈ SE
 IL SISTEMA AVESSSE A DISPOSIZIONE TUTTE LE
 ENERGIE FINO A $-\infty$, PRECIPITEREBBE SEMPRE PIÙ
 IN BASSO E NON LO SI POTREBBE OSSERVARE.

IN ALTRE PAROLE DICIAMO CHE LO SPETTRO È
UNBOUNDED BELOW E LA PARTICELLA "CADE NEL
 BUCO E NON LA SI VEDE PIÙ", POICHÈ CI
 VORREBBE UN'ENERGIA INFINITA PER TIRARLA FUORI.

PROVIAMO A VEDERE UN POTENZIALE NON LIMITATO
 INFERIORMENTE

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^m}, \quad \alpha > 0$$

SI VEDE CHE $V(r) \rightarrow -\infty$, $r \rightarrow 0$ E MI CHIEDO
 SE IL SISTEMA AMMETTA UNO STATO LEGATO.

NOTA È UN POTENZIALE TIPO YUKAWA.

SUPPONGO ESISTA LO STATO LEGATO E CHE LA PARTICELLA
SIA CONFINATA INTORNO ALL'ORIGINE IN UN'INTERVALLO
DELL'ORDINE r_0 .

DAL PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE DEV'ESSERE

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{r_0} \Rightarrow p \sim \frac{\hbar}{r_0}$$

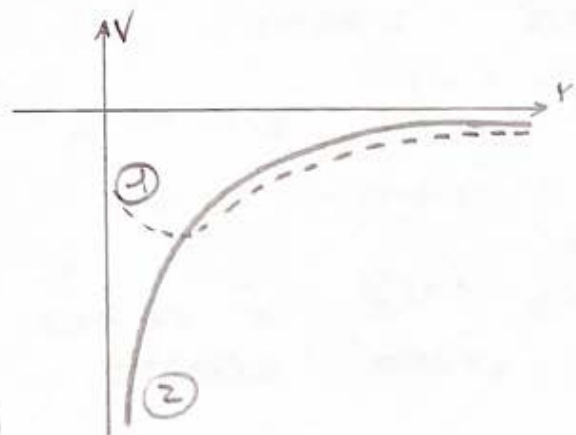
MA SE CALCOLO IL VALORE MEDIO DI H AVRO

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2m} \frac{\hbar^2}{r_0^2} - \frac{\alpha}{r_0^m}$$

MA SE H HA UN MINIMO PER UNO $\langle H \rangle$ SPETTRO LIMITATO DEVE ESISTERE

$$\frac{d}{dr_0} \langle H \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r_0^3} + \frac{m\alpha}{r_0^{m+1}} = 0$$

MA ORA DI POTENZIALI DI QUESTO TIPO POSSONO AVERE DUE
TIPI DI ANDAMENTI;



IN ENTRAMBI I CASI
 $V(r) \rightarrow 0$, $|V| \rightarrow \infty$

SE SONO NEL CASO (2) $V(r)$
NON DA LUOGO A NESSUN
MINIMO DI $\langle H \rangle$, QUINDI $S(E)$ NON
È LIMITATO INFERIORMENTE
NON HA SENSO FISICO UN $V(r)$
DI QUESTO TIPO.

Se sono invece nel caso $\textcircled{+} \Rightarrow \langle H \rangle$ limitato inferiormente $\Rightarrow$ lo spettro di H è limitato $\Rightarrow V(r)$ ha senso fisico.

Sostanzialmente $\langle H \rangle$ è limitato inferiormente se il pezzo cinetico riesce a compensare $V(r)$ dove diverge. Se succede

$$\frac{d}{dr} \langle H \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{r_0^{m-2} = \frac{m m \alpha}{\hbar^2}}$$

Prima cosa che si vede è che se $m=2$ non ho soluzioni. La soluzione è un minimo solo se $m=1$, che dà

$$\boxed{r_0 = \frac{\hbar^2}{m \alpha}}$$

È quindi l'unico potenziale che si fa rispettare tutte le richieste è del tipo

$$V(r) \propto \frac{1}{r}$$

Quindi tipo coulombiano, in cui si ha

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \quad \text{è un minimo in} \quad r_0 \sim \frac{\hbar^2}{m e^2}$$

POTENZIALI CHE DANNO $S_p(H)$ NON LIMITATO NON HANNO
 SIGNIFICATO FISICO POICHÉ IN PRESENZA DI UN
 POTENZIALE ATTRATTIVO NON LIMITATO INFERIORMENTE,
 QUANDO LA PARTICELLA RISCHIA DI "CADERE NEL
 BUCO" VIENE COSTRETTA IN UNO SPAZIO SEMPRE
 PIÙ STRETTO VIA VIA CHE $V \rightarrow 0$, E A CAUSA
 DEL PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE SI AGITA E
 SI DIFENDE SEMPRE DI PIÙ. SE IL POTENZIALE
 NON È TROPPO FORTE (NON DIVERGE TROPPO) SI
 RAGGIUNGE UN EQUILIBRIO FRA ENERGIA CINETICA ED
 ENERGIA POTENZIALE, ALTRIMENTI PER QUANTO SI
 AGITI LA PARTICELLA NON RIESCE A FERMARE LA
 CADUTA E SPARISCE INESORABILMENTE.

QUINDI POSSIAMO SCEGLIERE UN $V(r)$ NON LIMITATO
 INFERIORMENTE, MA A PATTO CHE LA SUA
 DIVERGENZA SIA COMPENSATO DAL TERMINE CINETICO.

OSS È PROPRIO LA PRESENZA DI $\hbar$ E DEL
 PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE CHE GARANTISCE
 IL RAGGIUNGIMENTO DI UN EQUILIBRIO
 NELLA MATERIA. CLASSICAMENTE NON HA
 SENSO L'ESISTENZA DI DISTANZE MINIME
 PERCHÉ NON ESISTE UNA SCALA NATURALE,
 MA IN MQ TUTTO QUESTO C'È.

ORA, LA STRADA CHE SEGUIREMO CI PORTERÀ A
 DIMOSTRARE CHE LO STATO FONDAMENTALE, INTESO COME
 L'ESTREMO INFERIORE DELLO SPETTRO DI H (SEMPRE CHE
 SIA LIMITATA), NON È MAI DEGENERE.
 VEDIAMO DUE LEMMI FONDAMENTALI.

LEMMA SE $V(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow$ LE AUTOFUNZIONI ψ DI $\hat{H}$
 POSSONO ESSERE SCELTE IN $\mathbb{R}$

DIM PARTO DALL'EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

MA SE HO $V(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow H$ È REALE
 POICHÉ $\hat{p}$ È HERMITIANO (VUOL DIRE SOSTANZIALMENTE
 REALE), OSSIA, $p^\dagger = p$

POSSO FARE IL COMPLESSO CONIUGATO DELL'EQUAZIONE
 E VEDERE CHE ψ^* RISPETTA LA STESSA
 EQUAZIONE $\Rightarrow \psi$

$$\hat{H}\psi^* = E\psi^*$$

E A QUESTO PUNTO HO 2 POSSIBILITÀ:

• ψ È GIÀ REALE $\Rightarrow \psi = \psi^*$

• ψ NON È REALE, MA POSSO DEFINIRE

$$\psi_+ = \psi(x) + \psi^*(x) = 2 \operatorname{Re} \psi$$

$$\psi_- = -i(\psi(x) - \psi^*(x)) = 2 \operatorname{Im} \psi$$

E' VERO SUBITO CHE ψ_+, ψ_- SONO A LORO VOLTA AUTOFUNZIONI DI H CON AUTOVALORE E E SONO REALI.



LEMMA L'AUTOFUNZIONE DELLO STATO FONDAMENTALE NON SI ANNULLA MAI.

DIH CI METTIAMO IN 1 DIMENSIONE.

PRENDIAMO $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ AUTOFUNZIONE DELLO STATO FONDAMENTALE

$$H|E_0\rangle = E_0|E_0\rangle$$

$$\text{CON } E_0 = \min \text{Spd}(H)$$

CHIAMO POSSO $\psi_0 = \langle x | E_0 \rangle$ E DAL LEMMA SOPRA SUPPORRE ψ_0 REALE.

SUPPONGO PER ASSURDO CHE $\psi_0(x)$ ABBA UNO ZERO

$$\exists x_0 / \psi_0(x_0) = 0$$

PERO' L'EQUAZIONE DI SCHRODINGER E' UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI 2° GRADO E AVENDO $\psi_0(x_0) = 0$ SE AVESSI ANCHE $\psi_0'(x_0) = 0$ ALLORA AVREI SOLAMENTE SOLUZIONI BANALI. CONCLUDO CHE

$$\psi_0'(x_0) \neq 0$$

HA SE $\psi'_0(x_0) \neq 0$ ALLORA x_0 È UNO ZERO DI
ORDINE 1, QUINDI $\psi_0(x)$ CAMBIA SEGNO IN x_0

ES $\psi_0(x) > 0$, $x < x_0 \Rightarrow \psi_0(x) < 0$, $x > x_0$

CONSIDERO UN'ALTRA FUNZIONE D'ONDA

$$\varphi(x) = |\psi_0(x)|$$

HA CHE CHIARAMENTE NON È UN'AUTOFUNZIONE DI $\hat{H}$
POICHÈ LA SUA DERIVATA PRIMA È DISCONTINUA
IN x_0 (QUINDI ESSENDOCI UNA DERIVATA SECONDA IN
 $\hat{H}\varphi$ COMPAREBBE UNA $\delta(x-x_0)$ NON BILANCIATA).

PERÒ φ È COMUNQUE UN ELEMENTO DELLO SPAZIO
DI HILBERT E POSSO COMUNQUE CALCOLARE

$$\langle \varphi | H | \varphi \rangle = \sum_{E, E'} \langle \varphi | E \rangle \langle E | H | E' \rangle \langle E' | \varphi \rangle$$

NOTA $\sum$ VUOL DIRE CHE DEVO SOMMARE SUL DISCRETO
ED INTEGRARE SUL CONTINUO.

SI HA

$$\begin{aligned} \langle \varphi | H | \varphi \rangle &= \sum_{E, E'} \langle \varphi | E \rangle (E \delta(E - E')) \langle E' | \varphi \rangle \\ &= \sum_E E \langle \varphi | E \rangle \langle E | \varphi \rangle \\ &= \sum_E E |\langle \varphi | E \rangle|^2 \end{aligned}$$

HA ESSENDO E_0 LO STATO FONDAMENTALE SO CHE

$$E > E_0 \quad \forall E \in \text{Spd}(H)$$

E SE IN PIÙ CI MOLTIPLICHO QUALCOSA ($|\langle \varphi | E \rangle|^2$)
SI POSITIVO HO

$$\langle \varphi | H | \varphi \rangle = \int_E E |\langle \varphi | E \rangle|^2 > E_0$$

HA IN FIN QUI HO UNO STATO DIVERSO FATTO POCHI PROGRESSI, LO RICALCOLO

$$\langle \varphi | H | \varphi \rangle = \frac{1}{2m} \|\rho | \varphi \rangle\|^2 + \langle \varphi | V | \varphi \rangle$$

MI VOGLIO METTERE NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI

RICORDA $\langle x | \rho | \varphi \rangle = \int dy \langle x | \rho | y \rangle \langle y | \varphi \rangle = \int dy \delta(x-y) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi(y)$
 $= -i\hbar \varphi'(x)$

QUINDI

$$\langle \varphi | H | \varphi \rangle = \int dx \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\varphi'(x)|^2 + V(x) |\varphi(x)|^2 \right]$$

HA SE $\varphi(x) = |\psi_0(x)|$ SE FACCIO $|\varphi(x)|$ E $|\varphi'(x)|^2$
ALLORA COINCIDONO CON $|\psi_0(x)|$ E $|\psi_0'(x)|^2$.
QUINDI

$$\begin{aligned} \langle \varphi | H | \varphi \rangle &= \int dx \left[\frac{1}{2m} |\psi_0'(x)|^2 + V(x) |\psi_0(x)|^2 \right] \\ &= \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle = E_0 \end{aligned}$$

HA PER QUINDI HO TROVATO DUE RISULTATI DIVERSI

$$\langle \psi | H | \psi \rangle$$

IL CHE VUOL DIRE CHE LA NOSTRA IPOTESI È ASSURDA.

$$\Rightarrow \nexists x_0 \quad / \quad \psi_0(x_0) = 0$$

TEOREMA LO STATO FONDAMENTALE DI UN SISTEMA DESCRITTO DALL'HAMILTONIANA DEL TIPO

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

NON È NEI DEGENERE (ECCETTATA L'EVENTUALE DEGENERAZIONE DELLO SPIN).

DIM SUPPONGO PER ASSURDO CHE ESISTANO DUE AUTOFUNZIONI $\psi_1(x)$ E $\psi_2(x)$ DELL'HAMILTONIANA ASSOCIATE ALLO STATO FONDAMENTALE,

$$\hat{H} \psi_1(x) = E_0 \psi_1(x)$$

$$\hat{H} \psi_2(x) = E_0 \psi_2(x)$$

HA LINEARE ALLORA SE PRENDO UNA LORO COMBINAZIONE DI $\hat{H}$.

$$\psi(x) = \psi_2(x_0)\psi_1(x) - \psi_1(x_0)\psi_2(x)$$

$$x_0 \in \mathbb{R}^{3N}$$

CHE È TALE CHE $\psi(x_0) = 0$.

PERÒ SE x_0 È UNO ZERZO ISOLATO VISTO PRIMA CHE $\psi(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{3N}$

SO DAL LEMMA È SI HA

$$0 = \psi_2(x_0)\psi_1(x) - \psi_1(x_0)\psi_2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\psi_1(x)}{\psi_1(x_0)} = \frac{\psi_2(x)}{\psi_2(x_0)}$$

OSSIA DUE AUTOFUNZIONI DELLO STATO FONDAMENTALE SONO PROPORZIONALI TRA LORO E QUINDI IN REALTÀ LA DEGENERAZIONE NON C'È.



PER CONCLUDERE IL CAPITOLO POSSIAMO ENUNCIARE DUE COROLLARI.

ABBIAMO VISTO IL SECONDO LEMMA CHE CI DICE CHE UNO STATO FONDAMENTALE HA UNA $\psi(x)$ CHE NON SI ANNULLA MAI, MA POSSIAMO DIRE:



COROLLARIO GLI STATI ECCITATI DEVONO AVERE NODI IN CUI LA FUNZIONE D'ONDA CAMBIA DI SEGNO, PER POTER ESSERE ORTOGONALE A QUELLA DELLO STATO FONDAMENTALE, LA QUALE NON CAMBIA MAI SEGNO; A MANO A MANO CHE SI SALE IN ENERGIA AUMENTA IL NUMERO DI NODI.

COROLLARIO LO STATO FONDAMENTALE È AUTOSTATO ANCHE DI TUTTI GLI OPERATORI CHE COMMUTANO CON H.

DIM PRESO F / $[F, H] = 0$
ALLORA

$$H F | \psi_0 \rangle = F H | \psi_0 \rangle = E_0 F | \psi_0 \rangle$$

E QUINDI $F | \psi_0 \rangle$ È AUTOSTATO DELL'HAMILTONIANA CON AUTOVALORE E_0 , HA L'AUTOSTATO DI E_0 ABBIAMO DETTO ESSERE UNICO, QUINDI DEVE VALERE

$$F | \psi_0 \rangle = \lambda | \psi_0 \rangle \quad \text{PER UNA QUALCHE COSTANTE } \lambda$$

MA QUESTA È UN'EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI
DI F
 $\Rightarrow | \psi_0 \rangle$ È AUTOVALORE DI F .

QUESTO COROLLARIO SEMBRA UN PO' INNOGUO, MA IN REALTÀ CI FA DEDURRE UNA COSA MOLTO IMPORTANTE.

RICORDO CHE IN MC LE OSSERVABILI CHE COMMUTAVANO CON H MI DAVANO LE COSTANTI DEL MOTI ED ERANO I GENERATORI DELLE SIMEETRIE DEL SISTEMA.

IN GENERALE VALE (IN MQ) :

LO STATO FONDAMENTALE DI UN SISTEMA QUANTISTICO CON UN NUMERO FINITO DI GRADI DI LIBERTÀ GODE DELLA STESSA SIMEETRIA DELL'HAMILTONIANA.

TUTTE LE SIMEETRIE.

IN PARTICOLARE SE H È INVARIANTE PER PARITÀ, OSSIA

$$[H, P] = 0$$

IL COROLLARIO MI DICE CHE LO STATO FONDAMENTALE È AUTOSTATO DI P

$$P|\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle$$

CON AUTOVALORE $+1$ POICHÈ SOLUZIONI DISPARI SI ANNULLANO NECESSARIAMENTE NELL'ORIGINE E IO SO DAI LEHMI CHE NON È POSSIBILE.

POSSIAMO ANCHE VEDERE IL CASO IN CUI $[\vec{L}, \hat{H}] = 0$ OSSIA H È INVARIANTE PER ROTAZIONI, QUINDI H COMMUTA CON L_i $\hat{H} = x, y, z$ E $|\psi_0\rangle$ DEVE ESSERE AUTOSTATO SIMULTANEO DI L_x, L_y, L_z E QUINDI

DEV'ESSERE QUINDI UNO STATO DI MOMENTO ANGOLARE Nullo E INVARIANTE PER ROTAZIONI.

RAPIDA DIMOSTRAZIONE CHE UN AUTOSTATO SIMULTANEO DELLE 3 COMPONENTI D' $\vec{L}$ ABBIA $L=0$.

HO $L_i |4\rangle = \lambda_i |4\rangle \quad \lambda_i = 1, 2, 3$

SO $[L_i, L_j] = i \epsilon_{ijk} L_k$

QUINDI $[L_1, L_2] |4\rangle = i L_3 |4\rangle = i \lambda_3 |4\rangle$

MA VALE

$$\begin{aligned} [L_1, L_2] |4\rangle &= (L_1 L_2 - L_2 L_1) |4\rangle \\ &= (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2 \lambda_1) |4\rangle = 0 \end{aligned}$$

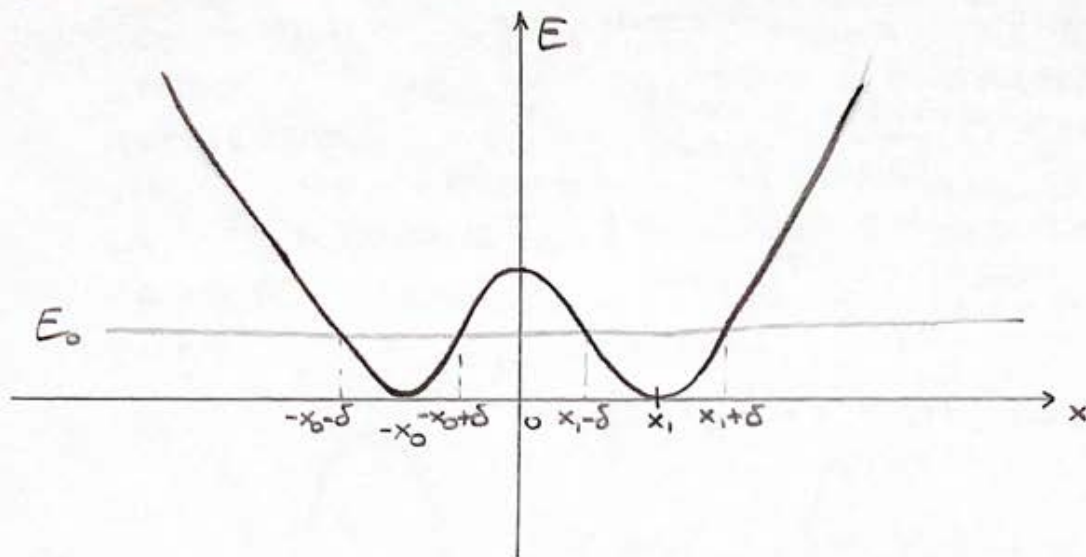
E QUINDI

$$i \lambda_3 |4\rangle = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_3 = 0}$$

E ANALOGAMENTE $\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0}$

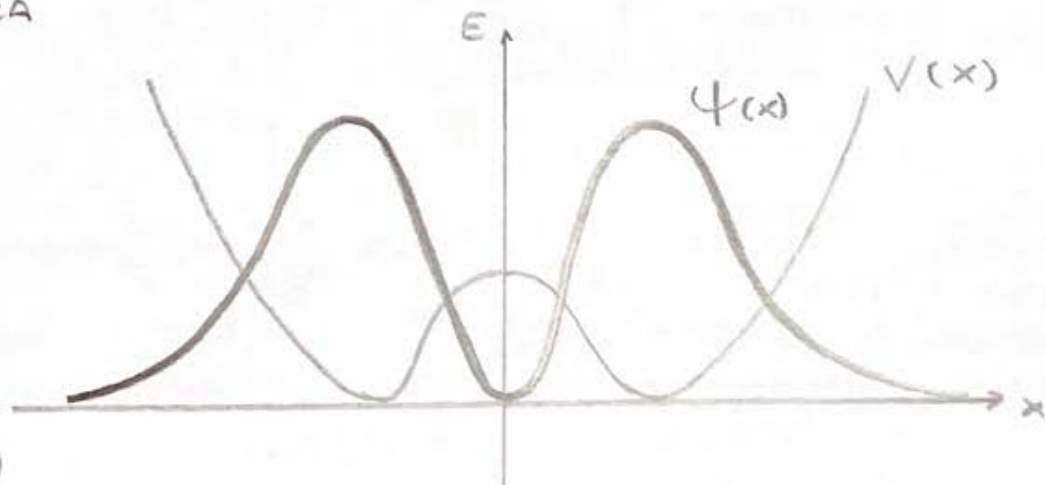
NOTA CHE QUESTA COSA VALIDA IN MQ (UN SISTEMA CON FINITI GRADI DI LIBERTA' HA LE STESSA SIMMETRIE DI H) NON È SCONTATA IN MC, ANZI IN MC LE SIMMETRIE POSSONO ESSERE TRANQUILLAMENTE ROTTE.

SUPPONIAMO DI AVERE



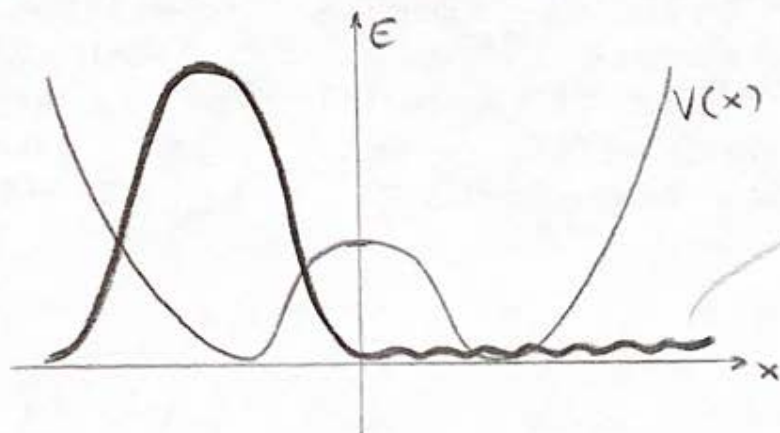
NELLO STATO DI MINIMO DI ENERGIA (O ANCHE SOLO SE $E < E_0$) LA PARTICELLA CLASSICA ROMPE LA SIMMETRIA DELL'HAMILTONIANA POICHÉ Q STA NELLA BUCA A SINISTRA E OSCILLA TRA $-x_0 - \delta$ E $-x_0 + \delta$ Q STA NELLA BUCA DI DESTRA E OSCILLA TRA $x_1 - \delta$ E $x_1 + \delta$ MA È SICURO NON ESCE DALLA BUCA.

QUANTISTICAMENTE L'HAMILTONIANA È INVARIANTE PER PARITÀ, QUINDI ABBIAMO APPENA VISTO CHE $|\psi_0\rangle$ DEV'ESSERE PARI ED È FATTA CIRCA



È LA PARTICELLA HA IL 50% DI PROBABILITÀ DI STARE NELLA BUCA A SINISTRA E IL 50% DI STARE A DESTRA.

ANCHE SE IO PREPARASSI IL SISTEMA AFFINCHÉ LA PARTICELLA STIA NELLA BUCA DI SINISTRA, LO STATO NON SAREBBE STAZIONARIO, NON SAREBBE AUTOSTATO DI H , E CAMBIEREBBE NEL TEMPO PER VIA DELL'EFFETTO TUNNEL, CHE FA IN MODO CHE LA FUNZIONE D'ONDA CON IL PASSARE DEL TEMPO ACQUISTI UNA PARTE NON NULLA ANCHE NELLA BUCA DI DESTRA.



$\psi(x)$ CHE FORZA ESSERE SINISTRA

QUINDI ANCHE VOLENDO NON RIESCO A FORZARE LA ROTTURA DELLA SIMEETRIA PERCHÉ C'È L'EFFETTO TUNNEL CHE CI GARANTISCE CHE LA SIMEETRIA NON SI ROMPA.

OSS SE AVESSIMO PERÒ UNA BARRIERA IMPENETRABILE IN QUEL CASO SI ROMPE LA SIMEETRIA, SALTA IL LEMMA CHE MI DICE CHE LA FUNZIONE D'ONDA DELLO STATO FONDAMENTALE NON SI ANNULLA MAI E PER DI PIÙ LO STATO FONDAMENTALE SAREBBE DEGENERE. QUESTO AVVIENE AD ESEMPIO SE HO UN

PROBLEMA CON DUE BUCHE DI POTENZIALE ∞ DISGIUNTE,
IN QUEL CASO SI TRATTA DI DUE PROBLEMI
SEPARATI E QUINDI $\psi \approx 0$ NELLE REGIONI FUORI DALLE
BUCHE E IN CIASCUNA BUCA HO UNO STATO
FONDAMENTALE, QUINDI DEGENERAZIONE.

INOLTRE, IL FATTO CHE A PAGINA 53 LA PAROLA FINITO
SIA SOTTOLINEATO È CRUCIALE. INFATTI, IN QFT IN CUI
SI TRATTANO SISTEMI AD ∞ GRADI DI LIBERTÀ IL
TEOREMA DI PAGINA 56, OSSIA, QUELLO CHE MI
DICE CHE LO STATO FONDAMENTALE NON È MAI DEGENERE,
NON VALE. IN SISTEMI AD ∞ GRADI DI LIBERTÀ
IL VUOTO PUÒ ESSERE DEGENERE E PUÒ AVVENIRE
IL FENOMENO DI ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA.

FIN'ORA ABBIAMO DISCUSSO DEI SISTEMI DI UNA O MOLTE PARTICELLE, MA NON CI SIAMO MAI PREOCCUPATI DI COME FATTO LO SPAZIO DI HILBERT DI UN SISTEMA A MOLTE PARTICELLE E CHE RELAZIONE HA CON QUELLO DI SINGOLA PARTICELLA. GLI SPAZI ~~FI~~ SARANNO L'OGGETTO DEL CAPITOLO

FIN'ORA ABBIAMO DISCUSSO ALCUNI ARGOMENTI COME SE TUTTE LE OSSERVABILI IN UNO SCOC POTESSERO ESSERE TRATTATE COME INDIPENDENTI, PERÒ CI SONO CASI, ANCHE GIÀ BEN NOTI, IN CUI QUESTO NON SUCCEDDE. AD ESEMPIO

$$L^2 \psi_{lm}(x) = \hbar^2 l(l+1) \psi_{lm}(x)$$

$$L_z \psi_{lm}(x) = \hbar m_l \psi_{lm}(x)$$

L^2 , L_z NON SONO INDIPENDENTI DAL MOMENTO CHE $m_l \in [-l, l]$

PERÒ POSSO COMUNQUE METTERLI NELLO STESSO SCOC, MA ESISTE UN UNICO SPAZIO DI HILBERT E NON UNO ASSOCIATO A CIASCUNO DEI DUE.

Ci SONO SITUAZIONI IN CUI PERÒ LO SPAZIO DI HILBERT DI UN CERTO NUMERO DI OSSERVABILI, NON È ALTRO CHE IL "PRODOTTO" (POI VEDREMO BENE COS'È). AD ESEMPIO UNA PARTICELLA IN 3 DIMENSIONI. POSSO USARE GLI AUTOSTATI DELLA POSIZIONE IN TUTTE E 3 LE POSIZIONI SPAZIALI,

OVERO POSSO SCRIVERE

$$|\vec{x}\rangle = |x, y, z\rangle = |x_1, x_2, x_3\rangle$$

E HO 3 AUTOVALORI (DEGLI OPERATORI POSIZIONE) CHE SONO INDIPENDENTI

$$\hat{x}_1 |x_1, x_2, x_3\rangle = x_1 |x_1, x_2, x_3\rangle$$

E IDEM PER GLI ALTRI.

QUINDI PUÒ VENIRE NATURALE SCRIVERE

$$|x_1, x_2, x_3\rangle \sim |x_1\rangle |x_2\rangle |x_3\rangle$$

E LO SPAZIO DI HILBERT COMPLESSIVO DELL'OPERATORE SINGOLI SPAZI.
È UN "BANALE" PRODOTTO DEI
VEDIAMO MEGLIO IL TUTTO.

PRODOTTO DIRETTO DI SPAZI DI HILBERT

DEFINIAMO PER PRIMA COSA

DEF PRODOTTO DIRETTO DI VETTORI

PRENDIAMO DUE SPAZI UNITARI E_1, E_2 E
 $|a\rangle_1 \in E_1, |b\rangle_2 \in E_2$

ALLORA

$|c\rangle_\otimes = |a\rangle_1 \otimes |b\rangle_2$ È UN'APPLICAZIONE LINEARE
E CONTINUA DA

$$E_1^* \rightarrow E_2$$
$$(E_2^* \rightarrow E_1)$$

OVVERO POSSO SCRIVERE

$$|\vec{x}\rangle = |x, y, z\rangle = |x_1, x_2, x_3\rangle$$

E HO 3 AUTOVALORI (DEGLI OPERATORI POSIZIONE) CHE SONO INDIPENDENTI

$$\hat{x}_1 |x_1, x_2, x_3\rangle = x_1 |x_1, x_2, x_3\rangle$$

E IDEM PER GLI ALTRI.

QUINDI PUÒ VENIRE NATURALE SCRIVERE

$$|x_1, x_2, x_3\rangle \sim |x_1\rangle |x_2\rangle |x_3\rangle$$

È LO SPAZIO DI HILBERT COMPLESSIVO DELL'OPERATORE
VEDIAMO È UN "BANALE" PRODOTTO DEI SINGOLI SPAZI.
MEGLIO IL TUTTO.

PRODOTTO DIRETTO DI SPAZI DI HILBERT

DEFINIAMO PER PRIMA COSA

DEF PRODOTTO DIRETTO DI VETTORI

PRENDIAMO DUE SPAZI UNITARI E_1, E_2 E
 $|a\rangle_1 \in E_1, |b\rangle_2 \in E_2$

ALLORA

$|c\rangle_\otimes = |a\rangle_1 \otimes |b\rangle_2$ È UN'APPLICAZIONE LINEARE
E CONTINUA DA

$$E_1^* \rightarrow E_2$$
$$(E_2^* \rightarrow E_1)$$

IO POSSO VEDERE BENE CON

$$|c\rangle_{\otimes} : \langle d| \in E_1^* \longrightarrow \langle d|a\rangle_1 |b\rangle_2 \in E_2$$

$|c\rangle_{\otimes}$ È LINEARE E CONTINUO POICHÉ IL PRODOTTO SCALARE È LINEARE E CONTINUO.

QUINDI SI DICE $E_{\otimes} = \text{Hom}(E_1^*, E_2)$.

HA IN GENERALE, L'INSIEME DEI SOLI PRODOTTI DIRETTI DI DUE SPAZI NON BASTA A FORMARE UNO SPAZIO VETTORIALE, POICHÉ UNA COMBINAZIONE LINEARE DI DUE PRODOTTI DIRETTI

$$\lambda_1 |c^{(1)}\rangle_{\otimes} + \lambda_2 |c^{(2)}\rangle_{\otimes} = \lambda_1 (|a^{(1)}\rangle_1 \otimes |b^{(1)}\rangle_2) + \lambda_2 (|a^{(2)}\rangle_1 \otimes |b^{(2)}\rangle_2)$$

IN GENERALE NON È UN PRODOTTO DIRETTO, OSSIA

$$\neq |a^{(3)}\rangle_1 \otimes |b^{(3)}\rangle_2$$

PERÒ AL POSTO DI PRENDERE SOLI L'INSIEME DI PRODOTTI DIRETTI $\{|c\rangle_{\otimes}\}$ PRENDO ANCHE TUTTE LE POSSIBILI COMBINAZIONI LINEARI FINITE DI PRODOTTI DIRETTI

$$\{|c\rangle_{\otimes}, \text{COMBINAZIONI LINEARI FINITE } |c^{(i)}\rangle_{\otimes}\}$$

E QUESTO È UNO SPAZIO VETTORIALE SE AGGIUNGO ANCHE CHE $\otimes$ SIA DISTRIBUTIVO RISPETTO LA SOMMA

$$\lambda_1 |a^{(1)}\rangle_1 \otimes |b^{(1)}\rangle_2 + \lambda_2 |a^{(1)}\rangle_1 \otimes |b^{(2)}\rangle_2 = |a^{(1)}\rangle_1 \otimes (\lambda_1 |b^{(1)}\rangle_2 + \lambda_2 |b^{(2)}\rangle_2) \quad \textcircled{66}$$

OLTRE AD ESSERE UNO SPAZIO VETTORIALE È ANCHE
UNITARIO, E POSSIODE UNA DEFINIZIONE DI PRODOTTO
 SCALARE

$$\otimes \langle C_1 | C_2 \rangle_{\otimes} = (\langle a^{(1)} | \otimes \langle b^{(1)} |) (\langle a^{(2)} \rangle_1 \otimes \langle b^{(2)} \rangle_2) = \langle a^{(1)} | a^{(2)} \rangle_1 \langle b^{(1)} | b^{(2)} \rangle_2$$

PERÒ NON HO ANCORA UNO SPAZIO DI HILBERT, POICHÈ
 LO SPAZIO COSÌ CREATO NON È DETTO CHE SIA
 COMPLETO, POTREBBERO ESSERCI SUCCESSIONI DI CAUCHY
 CHE NON CONVERGONO AD ELEMENTI DELLO SPAZIO.
 BUTTO DENTRO ANCHE I LIMITI DI QUESTE
 SUCCESSIONI NELLO SPAZIO (DEVO SOSTANZIALMENTE
 PERMETTERE GLI INFINITI).

IN QUESTO MODO OTTENDO UNO SPAZIO COMPLETO E
 UNITARIO, CIOÈ UNO SPAZIO DI HILBERT (SEPARABILE
 SE TALI SONO GLI SPAZI DI PARTENZA).

UN GENERICO VETTORE DI QUESTO SPAZIO È

$$\sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l (\langle a^{(l)} \rangle_1 \otimes \langle b^{(l)} \rangle_2) \in \mathcal{H}_{\otimes} = E_1 \otimes E_2$$

MA SE PRENDO $\{ |i\rangle_1 \}$ E $\{ |j\rangle_2 \}$ BASI ORN DI E_1
 ED E_2 ALLORA POSSO SCRIVERE

$$|a^{(l)}\rangle_1 = \sum_i \alpha^{li} |i\rangle_1$$

$$|b^{(l)}\rangle_2 = \sum_j \beta^{lj} |j\rangle_2$$

RISCRIVENDO IL VETTORE GENERALE TROVO

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \lambda_{ij} \alpha^{i,j} \beta^{i,j} |i\rangle_1 \otimes |j\rangle_2$$

È VISTO CHE LA SOMMA SU l TOCCA SOLO I COEFFICIENTI POSSO SCRIVERE

$$\lambda_{ij} = \sum_l \lambda_l \alpha^{i,l} \beta^{j,l}$$

COSÌ HO IL VETTORE

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \lambda_{ij} (|i\rangle_1 \otimes |j\rangle_2)$$

IL CHE VUOL DIRE CHE UN QUALUNQUE VETTORE DI $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ LO POSSO SCRIVERE COME UNA COMBINAZIONE LINEARE DEI PRODOTTI DIRETTI DELLE BASI DI E_1 ED E_2 .

QUINDI LA BASE DI $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ SONO TUTTE LE COMBINAZIONI DEI PRODOTTI DIRETTI DEI VETTORI DELLE BASI DI E_1 ED E_2

OSS QUESTA È LA STESSA COSA CHE FAI QUANDO COMIONI LO SPIN DI 2 PARTICELLE.

SI VEDE INOLTRE CHE LA BASE IN $\mathcal{H}$ È IN AUTOMATICO COMPLETA E ON, COSÌ CHE SEGUE DALL'ON DELLE BASI DI E_1 ED E_2 .

$$(\langle i | \otimes \langle j |)(|l\rangle \otimes |k\rangle) = \langle i | l \rangle \langle j | k \rangle = \delta_{il} \delta_{jk}$$

È PER QUESTO CHE UNA BASE DI $E_{\otimes}$ È IL PRODOTTO CARTESIANO DELLE BASI DI E_1 ED E_2

$$\{|i\rangle_1 \otimes |j\rangle_2\} \sim \{|i\rangle_1\} \times \{|j\rangle_2\}$$

NOTA SE E_1 ED E_2 SONO FINITO DIMENSIONALI, ALLORA ANCHE $E_{\otimes}$ HA DIMENSIONE FINITA. SE UNO DEI DUE HA DIMENSIONE FINITA E L'ALTRO È UNO SPAZIO DI HILBERT SEPARABILE (O ENTRAMBI SONO SEPARABILI) ALLORA $E_{\otimes}$ È DI HILBERT SEPARABILE.

È IMPORTANTE NOTARE LE DIFFERENZE TRA PRODOTTO DIRETTO E SOMMA DIRETTA:

- $E_{\oplus}$ È IL PRODOTTO CARTESIANO DI E_1 ED E_2 , MENTRE $E_{\otimes}$ È IL COMPLEMENTO DELL'INSIEME FORMATO DA TUTTI I PRODOTTI DIRETTI DI VETTORI DI E_1 ED E_2 E DA TUTTE LE LORO COMBINAZIONI LINEARI FINITE.
- UNA BASE DI $E_{\oplus}$ È L'UNIONE DELLE BASI DI E_1 ED E_2 , MENTRE UNA BASE DI $E_{\otimes}$ È IL PRODOTTO CARTESIANO DELLE BASI DI E_1 ED E_2 .
- SE E_1 ED E_2 HANNO DIMENSIONE FINITA
 $\dim E_{\oplus} = \dim(E_1) + \dim(E_2)$; $\dim E_{\otimes} = \dim E_1 \dim E_2$

DA QUA IN POI FACCIAMO CADERE LA NOTAZIONE
CON IL $\otimes$ E SCRIVIAMO

$$|i\rangle \otimes |j\rangle = |\dot{i}j\rangle$$

SOTTOINTENDENDOLO.

PER LIMITI DI TEMPO GLI APPUNTI
CONTINUANO SULLE DISPENSE DI SCIUTO
DI HQ II

- OPERATORI NELLO SPAZIO PRODOTTO DIRETTO
(2.4.3) P. 32
- SPAZIO DI HILBERT DI UNA SINGOLA PARTICELLA
(2.4.4) P. 33
- COMPOSIZIONE DEI MOMENTI ANGOLARI (LEGGI)
(2.4.5) P. 37

HESSE IN SEGUITO

- Una base di $E_{\oplus}$ è l'unione delle basi di E_1 e di E_2 , quella costituita dagli elementi:

$$\left\{ \left(|i\rangle_1, 0 \right) \right\} \cup \left\{ \left(0, |\alpha\rangle_2 \right) \right\} \sim \left\{ |i\rangle_1 \right\} \cup \left\{ |\alpha\rangle_2 \right\} \quad (2.4.29)$$

Una base di $E_{\otimes}$ è il prodotto cartesiano delle basi di E_1 e di E_2 :

$$\left\{ |i\rangle_1 \otimes |\alpha\rangle_2 \right\} \sim \left\{ |i\rangle_1 \right\} \times \left\{ |\alpha\rangle_2 \right\} \quad (2.4.30)$$

- Se E_1 ed E_2 hanno dimensione finita, discende immediatamente da quanto detto sulle basi che:

$$\dim(E_{\oplus}) = \dim(E_1) + \dim(E_2) \quad (2.4.31)$$

$$\dim(E_{\otimes}) = \dim(E_1)\dim(E_2) \quad (2.4.32)$$

Con la speranza che ora il concetto di prodotto diretto sia chiaro si lascerà spesso cadere parte della notazione sovrabbondante usata fin qui, ove non sia di ostacolo alla comprensione, scrivendo più sinteticamente:¹¹

$$|a\rangle_1 \otimes |b\rangle_2 = |a\rangle |b\rangle = |a, b\rangle \quad (2.4.33)$$

$${}_1 \langle a| \otimes {}_2 \langle b| = \langle a| \langle b| = \langle a, b| \quad (2.4.34)$$

2.4.3 Operatori nello spazio prodotto diretto

Dagli operatori di $E_{\otimes}$ si possono derivare interessanti operatori dei due spazi E_1 ed E_2 e, viceversa, con gli operatori di E_1 ed E_2 si possono costruire operatori di $E_{\otimes}$.

Ricordando che la base $\{|i, \alpha\rangle\}$ di $E_{\otimes}$ è ONC, si può scrivere anche in questo spazio la famosa *rappresentazione spettrale dell'identità*:

$$1 = \sum_{i, \alpha} |i, \alpha\rangle \langle i, \alpha| \quad (2.4.35)$$

che, applicata a destra e a sinistra di un generico operatore F di $E_{\otimes}$ risulta in:

$$F = \sum_{i, \alpha, j, \beta} |i, \alpha\rangle \langle i, \alpha| F |j, \beta\rangle \langle j, \beta| = \sum_{i, \alpha, j, \beta} |i, \alpha\rangle F_{i\alpha, j\beta} \langle j, \beta| \quad (2.4.36)$$

¹¹Si tenga presente che non sempre scrivendo $|a, b\rangle$ si sottintende un prodotto diretto, basta pensare a $|l, m\rangle$ per il momento angolare.

RAPPRESENTAZIONE
SPETTRALE DI $\frac{F}{F}$

F è
 $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$$F_{i\alpha,j\beta} = \langle i, \alpha | F | j, \beta \rangle \quad (2.4.37)$$

L'elemento di matrice di F tra due vettori di E_1 è un operatore di E_2 e viceversa:

$$\sum_{k,\alpha,l,\beta} \underbrace{\delta_{i,k}}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{\langle k, \alpha | F | l, \beta \rangle}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{\delta_{l,j}}_{\in \mathbb{Z}} = \sum_{\alpha,\beta} |\alpha\rangle_2 \langle \beta|_2 F_{i\alpha,j\beta} \quad (2.4.38)$$

Anche la traccia di F in uno dei due spazi è un operatore dell'altro spazio:

$$\text{Tr}_1(F) = \sum_i \langle i | F | i \rangle_1 = \sum_{i,\alpha,\beta} |\alpha\rangle_2 \langle \beta|_2 F_{i\alpha,i\beta} \quad (2.4.39)$$

La traccia in $E_\otimes$ è un numero complesso e si ottiene facendo la traccia in uno spazio della traccia nell'altro:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_\otimes(F) &= \text{Tr}_2(\text{Tr}_1(F)) = \sum_\alpha \langle \alpha | \text{Tr}_1(F) | \alpha \rangle_2 = \\ &= \sum_{i,\alpha} \langle i\alpha | F | i\alpha \rangle = \sum_{i,\alpha} F_{i\alpha,i\alpha} \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

È facile vedere che:

$$\text{Tr}_1(\text{Tr}_2(F)) = \text{Tr}_2(\text{Tr}_1(F)) = \text{Tr}_\otimes(F) \quad (2.4.41)$$

Parallelamente, se G_1 ed G_2 sono due operatori rispettivamente di E_1 ed E_2 , si può costruire da essi l'operatore $G_\otimes = G_1 \otimes G_2$ di $E_\otimes$ definito da: $\star$

$$G_\otimes(|a\rangle_1 \otimes |b\rangle_2) = (G_1 \otimes G_2)(|a\rangle_1 \otimes |b\rangle_2) = G_1|a\rangle_1 \otimes G_2|b\rangle_2 \quad (2.4.42)$$

2.4.4 Spazio di Hilbert di una singola particella

Tutta questa storia dei prodotti diretti è molto interessante, ma a cosa serve?

Del prodotto diretto si è già fatto uso implicitamente, nella descrizione una particella senza spin. Quando si scrive un autovettore simultaneo degli operatori di posizione, in realtà si intende il prodotto diretto degli autovettori di ciascun operatore:

$$|x, y, z\rangle = |x_1, x_2, x_3\rangle = |x_1\rangle |x_2\rangle |x_3\rangle \quad (2.4.43)$$

Per essere più precisi si considera uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_1$, sul quale agisce l'operatore di posizione in una dimensione $\hat{x}$, che è definito astrattamente dalla richiesta che abbia $\mathbb{R}$ come spettro e che i suoi autovettori siano una base ONC di $\mathcal{H}_1$. Infatti in con queste due richieste si ha:

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad \int dx |x\rangle \langle x| = \mathbb{I} \quad (2.4.44)$$

$\star$ DALL'ELEMENTO L'OPERATORE DELLO SPAZIO 1 AGISCE SU 1 VETTORI IN 2 AGISCE SU 1 L'OPERATORE IN VETTORI 2 DELLO SPAZIO 2.

e quindi $\hat{x}$ risulta definito:

$$\hat{x} = \int dx \hat{x} |x\rangle \langle x| = \int dx |x\rangle x \langle x| \quad (2.4.45)$$

Lo spazio $\mathcal{H}_1$ può essere identificato con $L^2(\mathbb{R})$, nel qual caso l'operatore $\hat{x}$ è l'operatore moltiplicativo $\hat{x} : f(x) \mapsto xf(x)$ (è facile verificare che $\hat{x}$ soddisfa le due richieste).

A questo punto si scrive lo spazio di Hilbert degli stati di una particella senza spin come:

$$\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \quad (2.4.46)$$

In particolare, se si identifica $\mathcal{H}_1$ con $L^2(\mathbb{R})$, allora $\mathcal{H}_3$ diventa:

$$L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}^3) \quad (2.4.47)$$

In $\mathcal{H}_3$ si possono costruire gli operatori posizione $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ a partire da $\hat{x}$ come:

$$\hat{x}_1 = \hat{x} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}; \quad \hat{x}_2 = \mathbb{1} \otimes \hat{x} \otimes \mathbb{1}; \quad \hat{x}_3 = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \hat{x} \quad (2.4.48)$$

Gli $\hat{x}_i$ hanno tutti $\mathbb{R}$ come spettro e, siccome ciascuno di essi agisce su uno spazio diverso, commutano tra di loro, il che è quanto ci si aspetta dagli operatori di posizione.

Gli autovettori simultanei degli operatori di posizione sono proprio $|x_1, x_2, x_3\rangle \in \mathcal{H}_3$, infatti si ha, ad esempio:

$$\begin{aligned} \hat{x}_2 |x_1, x_2, x_3\rangle &= (\mathbb{1} \otimes \hat{x} \otimes \mathbb{1}) (|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |x_3\rangle) = \\ &= |x_1\rangle \otimes \hat{x} |x_2\rangle \otimes |x_3\rangle = x_2 |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |x_3\rangle = x_2 |x_1, x_2, x_3\rangle \end{aligned} \quad (2.4.49)$$

$$\text{per } |x_1\rangle \in \mathcal{H}_1, |x_2\rangle \in \mathcal{H}_1, |x_3\rangle \in \mathcal{H}_1$$

Lo stesso discorso si può fare per i tre operatori di impulso $\hat{p}_1, \hat{p}_2$ e $\hat{p}_3$, che hanno spettro analogo a quello degli $\hat{x}_i$ e commutano tra loro.

Se si mette una particella in un autostato di $\hat{p}_1, \hat{p}_2$ e $\hat{p}_3$ (con una misura, come si discuterà meglio più avanti), cioè se si costruisce un fascio collinato di particelle identiche, non ci si attende molta fantasia nel loro comportamento, non agiranno diversamente l'una dall'altra, perché l'autospazio simultaneo degli operatori di impulso è unidimensionale, le particelle sono tutte nello stesso stato. Oppure no?

In certi esperimenti (Stern e Gerlach ad esempio), e con certe particelle, si osserva ancora una certa diversità di comportamenti nei fasci collinati, e si dice che talune particelle hanno ancora un grado di libertà intrinseco, che viene battezzato col nome di spin.

PUOI
PARLA
ESPERIMENTI
TROVA
INTRODURRE
AD ESEMPIO

ANCHE BREVE DICENDO CHE IN ALCUNI
CONVINTI DI AVERE UNO SCOC, SI
REALTÀ CHE C'È DEGENERAZIONE, QUINDI, OCCORRE
NUOVI GRADI DI LIBERTÀ (QUANTISTICI),
SPIN, QUA SI TROVA LA VERA UTILITÀ NELLA

Nel nostro linguaggio matematico fatto di SCOC e spazi di Hilbert questo si traduce nel dire che l'autospazio simultaneo di tutte le osservabili commutanti che hanno corrispondente classico non è unidimensionale, è degenere. Queste osservabili non completano uno SCOC. Da questo segue che deve esistere una qualche osservabile (o più di una), che non ha analogo classico, che risolve la degenerazione e che quindi, presa insieme a quelle classiche, completa uno SCOC.

Dagli esperimenti, o da una qualche teoria più avanzata (meccanica quantistica relativistica), si scopre che l'autospazio simultaneo delle osservabili classiche ha dimensione $2s+1 \in \mathbb{N}$, dove s è una caratteristica della particella detta appunto *spin*. Com'è noto da Meccanica quantistica 1, bisogna introdurre tre nuove osservabili, le tre componenti dello spin $\vec{S}$, senza analogo classico, con le relazioni di commutazione $[S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k$ e che commutano con tutti gli operatori orbitali. Per ogni stato di una particella di spin s si ha sempre $\vec{S}^2|\psi\rangle = \hbar^2 s(s+1)|\psi\rangle$. $S_z|\psi\rangle = \hbar m_s |\psi\rangle$ $m_s \in [-s, s]$

Sfruttando la notazione di prodotto diretto, si scrive immediatamente lo spazio degli stati di una particella con spin: $\dim = 2s+1$ $\hookrightarrow$ DEGENERAZIONE $2s+1$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_3 \otimes \mathbb{C}^{2s+1} \quad (2.4.50)$$

Scegliendo uno (e non più di uno) dei tre operatori di spin come SCOC, per esempio S_3 , una base di $\mathbb{C}^{2s+1}$ è presto fatta, composta dagli autovettori di S_3 :

$$S_3 |s_3\rangle = \hbar s_3 |s_3\rangle; \quad S_3 = \sum_{s_3=-s}^s |s_3\rangle \hbar s_3 \langle s_3|, \quad (2.4.51)$$

che si possono scrivere in forma matriciale come:

$$|s_3 = s\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |s_3 = s-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dots \quad |s_3 = -s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.4.52)$$

Una base di $\mathcal{H}_3 \otimes \mathbb{C}^{2s+1}$ è, ad esempio, $\{|x\rangle \otimes |s_3\rangle\}$. Rispetto a tale base un generico vettore $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ si scompone come: $\left(\begin{array}{l} \text{FACENDO ATTENZIONE ALLA} \\ \text{PARTE CONTINUA E DISCRETA} \end{array} \right)$

$$|\psi\rangle = \sum_{s_3=-s}^s \int d^3x |x, s_3\rangle \langle x, s_3 | \psi \rangle = \sum_{s_3=-s}^s \int d^3x |x, s_3\rangle \psi_{s_3}(x) \quad (2.4.53)$$

$\psi_{s_3}(x) = \langle x, s_3 | \psi \rangle$ è la componente s_3 -esima dello spinore a $2s+1$ componenti che descrive lo stato $|\psi\rangle$ nello spazio delle configurazioni. Tale spinore,

$\hookrightarrow$ È UN PEZZO DELLA FUNZIONE DONDA

NOTA QUESTA $\hat{z}$ COSÌ NON LA PUOI FARE TRA $\hat{x}$ ED $\hat{y}$ POICHÉ NON COMMUTANO

$$= \langle x | \sum_{s_3=-s}^s \int d^3x' \psi_{s_3}(x') | x' \rangle \otimes | s_3 \rangle$$

$$= \sum_{s_3} \psi_{s_3}(x) | s_3 \rangle$$

in forma matriciale è:

FUNZIONE D'ONDA NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI

$$\psi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \psi \rangle = \sum_{s_3=-s}^s | s_3 \rangle \psi_{s_3}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_s(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \psi_{-s}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (2.4.54)$$

Nel caso particolare (e molto comune) in cui $s = 1/2$ si ha:

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{x}) \\ \psi_-(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \psi_+(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_-(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \psi_+(\mathbf{x}) | + \rangle + \psi_-(\mathbf{x}) | - \rangle \quad (2.4.55)$$

dove si è usata la notazione sintetica $|\pm\rangle = |\pm 1/2\rangle \in \mathbb{C}^2$.

Non è detto che ci si debba fermare allo spin, è possibile individuare altri gradi di libertà intrinseci delle particelle. Ad esempio protone e neutrone possono essere considerati due stati diversi di una stessa particella, il nucleone, la quale ha spin $1/2$, ma possiede un'altro grado di libertà intrinseco, l'*isospin*, che funziona più o meno come lo spin.

In particolare il nucleone ha isospin $1/2$ e il protone è lo stato di un nucleone con terza componente dell'isospin positiva, mentre il neutrone è quello con terza componente negativa.

Il pione è una particella con isospin 1, può stare nei tre stati di terza componente dell'isospin $+1, 0$ o -1 , che corrispondono alle tre particelle π^+, π^0, π^- .

Lo spazio degli stati di una particella si può quindi fattorizzare in una parte orbitale $\mathcal{H}_3$, in una parte di spin $\mathbb{C}^{2s+1}$ e in una parte $\mathcal{H}_{int}$ che tiene conto della degenerazione dovuta ad eventuali altri gradi di libertà intrinseci:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_3 \otimes \mathbb{C}^{2s+1} \otimes \mathcal{H}_{int} \quad (2.4.56)$$

Di quest'ultima degenerazione non si terrà mai conto in questa trattazione.

Per un sistema di più particelle distinguibili, uno SCOC naturale sarà dato dall'unione degli SCOC di ogni singola particella, visto che gli operatori che agiscono su particelle diverse ovviamente commutano fra loro, e lo spazio di Hilbert sarà il prodotto diretto degli spazi di singola particella, ciascuno dei quali sarà a sua volta il prodotto diretto dello spazio orbitale per quello di spin (banale nel caso di particella di spin zero).

Vedremo nel capitolo successivo che cosa bisogna fare invece nel caso di un sistema di più particelle indistinguibili.

VEDI P. 70-71
CAP. 3.2.1 IN
CUI AGGIUNGIAMO
L'OPERATORE DI
SCAMBIO E
VEDIAMO $\mathcal{H}_{B,F}$

DISPERSE O
SCUOTO

2.4.5 Composizione dei momenti angolari

Un altro problema in cui si fa uso tacitamente del prodotto diretto è la composizione degli operatori di momento angolare.

Un operatore di momento angolare $\mathbf{J}$ è un vettore le cui componenti sono tre operatori J_1 , J_2 e J_3 , che soddisfano le relazioni di commutazione:

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k \quad (2.4.57)$$

Lo spazio degli stati di momento angolare E_J su cui agisce $\mathbf{J}$ resta definito se si assume che $\mathbf{J}^2 = J_k J_k$ e J_3 completino un suo SCOC (notare che commutano tra di loro). Infatti in tal caso gli autovettori simultanei di $\mathbf{J}^2$ e J_3 :

$$\mathbf{J}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle; \quad J_3 |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle; \quad (2.4.58)$$

devono formare una base ONC di E_J , cioè si può scrivere ¹²:

$$E_J = \mathcal{L}\left(\left\{|l, m\rangle\right\}\right) \quad (2.4.59)$$

includendo anche le combinazioni lineari infinite di Cauchy.

Dalle relazioni di commutazione e dalla completezza della base in E_J discende che $2l \in \mathbb{N}$ e che $m \in \{l, l-1, \dots, -l\}$.

Cessa significa fare la composizione di due operatori di momento angolare $\mathbf{J}^{(1)}$ e $\mathbf{J}^{(2)}$ che commutano tra loro per formare l'operatore $\mathbf{J}^{(T)} = \mathbf{J}^{(1)} + \mathbf{J}^{(2)}$?

Se ciascuna componente di $\mathbf{J}^{(1)}$ commuta con ciascuna componente di $\mathbf{J}^{(2)}$, i due operatori agiscono su due sottospazi distinti dello spazio E_T su cui agisce $\mathbf{J}^{(T)}$, e si vede che E_T si può scomporre nel prodotto diretto di due spazi E_J :

$$E_T = E_{J^{(1)}} \otimes E_{J^{(2)}} \quad (2.4.60)$$

Gli operatori $\mathbf{J}^{(i)}$ si possono scrivere in termini di $\mathbf{J}$, precisamente:

$$\boxed{\mathbf{J}^{(1)} = \mathbf{J} \otimes \mathbf{1}; \quad \mathbf{J}^{(2)} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{J}; \quad \mathbf{J}^{(T)} = \mathbf{J} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{J}} \quad (2.4.61)$$

Con questa notazione è facile vedere che l'operatore $\mathbf{J}^{(T)}$ è soggetto alle relazioni di commutazione degli operatori di momento angolare

$$[J_i^{(T)}, J_j^{(T)}] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k^{(T)} \quad (2.4.62)$$

Una base di E_T è ovviamente:

$$\left\{ |l_1, m_1\rangle \otimes |l_2, m_2\rangle \right\} = \left\{ |l_1, l_2, m_1, m_2\rangle \right\} \quad (2.4.63)$$

¹²Con $\mathcal{L}(a, b, \dots)$ intendiamo la varietà lineare generata dai vettori $a, b, \dots$

ed è composta di autovettori simultanei di $\mathbf{J}^{(1)2}$, $\mathbf{J}^{(2)2}$, $J_3^{(1)}$ e $J_3^{(2)}$, ad esempio:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^{(2)2} |l_1, l_2, m_1, m_2\rangle &= (\mathbf{1} \otimes \mathbf{J}^2) (|l_1, m_1\rangle \otimes |l_2, m_2\rangle) = |l_1, m_1\rangle \otimes \mathbf{J}^2 |l_2, m_2\rangle = \\ &= \hbar^2 l_2(l_2 + 1) |l_1, m_1\rangle \otimes |l_2, m_2\rangle = \hbar^2 l_2(l_2 + 1) |l_1, l_2, m_1, m_2\rangle\end{aligned}$$

quindi $\{\mathbf{J}^{(1)2}, \mathbf{J}^{(2)2}, J_3^{(1)}, J_3^{(2)}\}$ è uno SCOC di E_T .

D'altra parte, una volta stabilito che (provare per credere):

$$[\mathbf{J}^{(T)2}, \mathbf{J}^{(i)2}] = 0; \quad [\mathbf{J}_3^{(T)}, \mathbf{J}^{(i)2}] = 0; \quad i \in \{1, 2\} \quad (2.4.64)$$

si vede subito che un altro SCOC possibile è:

$$\{\mathbf{J}^{(1)2}, \mathbf{J}^{(2)2}, \mathbf{J}^{(T)2}, J_3^{(T)}\} \quad (2.4.65)$$

il quale dà ad E_T la base di autovettori simultanei $\{|l_1, l_2, l_T, m_T\rangle\}$, tali che:

$$\mathbf{J}^{(i)2} |l_1, l_2, l_T, m_T\rangle = \hbar^2 l_i(l_i + 1) |l_1, l_2, l_T, m_T\rangle; \quad i \in \{T, 1, 2\} \quad (2.4.66)$$

$$J_3^{(i)} |l_1, l_2, l_T, m_T\rangle = \hbar m_T |l_1, l_2, l_T, m_T\rangle \quad (2.4.67)$$

Il passaggio dalla base $\{|l_1, l_2, m_1, m_2\rangle\}$ alla base $\{|l_1, l_2, l_T, m_T\rangle\}$ implica l'uso dei *coefficienti di Clebsch-Gordan*, del cui calcolo non ci si occupa in questa trattazione.

2.5 Postulato 1: Il postulato della misura

Come detto in precedenza, nella meccanica classica lo stato di un sistema ad un certo istante è descritto da un punto dello spazio delle fasi. Se sono noti con assoluta precisione tutte le coordinate lagrangiane $q_1, \dots, q_f$ e tutti i momenti canonicamente coniugati $p_1, \dots, p_f$ si ha una descrizione assolutamente completa del sistema, è possibile determinare il valore di qualsiasi altra variabile dinamica $F(q, p)$.

Si tratta ovviamente di uno *stato ideale*, nella realtà gli errori sperimentali rendono impossibile la determinazione esatta di tutte le coordinate e i momenti, però non esiste nessun limite teorico alla precisione raggiungibile. Avendo abbastanza soldi e tempo è possibile migliorare le misure quanto si vuole, anche se, a ben vedere, il tempo può dimostrarsi un limite pratico insormontabile: se si volesse studiare in modo esatto una mole di gas perfetto probabilmente l'intera vita dell'universo non basterebbe.

Nella meccanica quantistica l'analogo di questa descrizione classica contenente la massima informazione sul sistema è detta *stato quantistico ideale* ed

Postulato 1: il postulato della misura

SAPPIAMO BENE CHE IN MC DATO L'INSIEME DI COORDINATE DI UN PUNTO NELLO SPAZIO DELLE FASI $\{q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m\}$ ALLORA UNA QUALUNQUE OSSERVABILE CA POSSO CONOSCERE POICHÉ È SEMPLICEMENTE $F(q, p)$.

IN MQ È TUTTO PIÙ COMPLICATO. CHIAMIAMO STATO QUANTISTICO IDEALE UNO STATO CONTENENTE LA MASSIMA INFORMAZIONE SUL SISTEMA ED È RAPPRESENTATO COME RAGGIO DELLO SPAZIO DI HILBERT

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$$

INDICHIAMO CON $\bar{F}$ UN'OSSERVABILE. MA CHE VALORE OTTENDO SE FACCIO UNA MISURA DI $\bar{F}$ QUANDO IL SISTEMA È NELLO STATO $|\psi\rangle$?

Postulato: MISURANDO $\bar{F}$ SI OTTIENE UNO DEI SUOI AUTOVALORI f_i CON UNA CERTA PROBABILITÀ $P_\psi(f_i)$ (CHE DIPENDE DALLO STATO ψ)

$$\bar{F}|f_i\rangle = f_i|f_i\rangle$$

NOTA $P_\psi(f_i)$ È UNA PROBABILITÀ NEL SENSO STATISTICO.

SE RIPETO LA MISURA DI $\bar{F}$ SU N SISTEMI TUTTI NELLO STESSO STATO IDEALE $|\psi\rangle$ SI OTTORRÀ M_i VOLTE L'AUTOVALORE f_i . IL POSTULATO ASSERTISCE CHE AL CRESCERE DI N , LA FREQUENZA $\frac{M_i}{N}$ TENDE ALLA PROBABILITÀ TEORICA $P_\psi(f_i)$.

LA DIFFERENZA ULTERIORE TRA MC ED HQ STA PROPRIO
 QU. PER FARE UNO STUDIO STATISTICO DI UN SISTEMA
 CLASSICO POSSO FARE MISURE RIPETUTE SULLO STESSO
 SISTEMA, IN HQ BISOGNA PREPARARE N STATI TUTTI
 UGUALI E SU CIASCUNO DI ESSI FACCIO UNA
 SOLA MISURA (POICHÉ DOPO L'AZIONE DI F $|4\rangle$ COLLASSA).

NOTA SE F È UN OPERATORE AUTOAGGIUNTO IL SUO SPETTRO
 DI AUTOVALORI È UN INSIEME COMPLETO.

POSSIAMO USARE QUESTA NOTA PER CALCOLARE QUESTA
 PROBABILITÀ $P_4(f_2)$. VEDIAMO I DIVERSI CASI:

a) SPETTRO DISCRETO NON DEGENERE

$\Downarrow$
 $\exists ! |f_2\rangle$ CON AUTOVALORE f_2

$|f_2\rangle$ È NORMALIZZABILE.

IL POSTULATO DICE CHE

$$P_4(f_2) = |\langle f_2 | 4 \rangle|^2$$

MA DALLA NOTA POSSO SCRIVERE

$$|4\rangle = \sum_j c_j |f_j\rangle \quad \text{CON} \quad c_j = \langle f_j | 4 \rangle$$

E QUINDI VERO

$$P_4(f_2) = |\langle f_2 | 4 \rangle|^2 = |c_2|^2$$

QUINDI LA PROBABILITÀ DI MISURARE f_i DIPENDE DA QUANTO È PESANTE LA COMPONENTE NELLO SVILUPPO DI FOURIER DI $|\psi\rangle$.

POSSIAMO ANCHE SCRIVERE

$$P_\psi(f_i) = |\langle f_i | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | f_i \rangle \langle f_i | \psi \rangle = \langle \psi | P_{f_i} | \psi \rangle = \langle P_{f_i} \rangle_\psi$$

DOVE CHIAMIAMO $P_{f_i} = |f_i\rangle\langle f_i|$ PROIETTORE SUL SOTTOSPAZIO APPARTENENTE ALL'AUTOVALORE f_i .

QUINDI UN MODO ALTERNATIVO DI SCRIVERE LA PROBABILITÀ È

$$P_\psi(f_i) = \langle \psi | P_{f_i} | \psi \rangle$$

OSSIA IL VALORE DI ASPETTANZA DEL PROIETTORE SUL SOTTOSPAZIO DI f_i . QUESTA DEFINIZIONE È PIÙ GENERALE.

b) SPETTRO DISCRETO DEGENERE

ESISTE UN NUMERO FINITO d DI VETTORI CON AUTOVALORE f_i DI IL SOTTOSPAZIO DI f_i HA DIMENSIONE FINITA, POSSO SEMPRE TROVARE UNA BASE ORTOGONALE

$$\{|f_i, \alpha_i\rangle\} \quad \alpha_i = 1, \dots, d_i$$

$$\langle f_i \alpha_i | f_i \alpha_k \rangle = \delta_{ik}$$

IN QUESTO CASO ABBIAMO

$$|\psi\rangle = \sum_{\ell=1}^{d_A} c_{\ell} |f_{\ell}\alpha_{\ell}\rangle + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{\infty} c_j |f_j\rangle$$

AUTOVALORI NON
DEGENERI $\neq f_n$

CON IL RAGIONAMENTO DI PRIMA MI ASPETTO

$$\begin{aligned} P_{\psi}(f_n) &= \sum_{\ell=1}^{d_A} |c_{\ell}|^2 = \sum_{\ell=1}^{d_A} \langle f_n\alpha_{\ell} | \psi \rangle \langle \psi | f_n\alpha_{\ell} \rangle \\ &= \boxed{\langle \psi | P_{f_n} | \psi \rangle} \end{aligned}$$

MA IN QUESTO CASO IL PROIETTORE È

$$\boxed{P_{f_n} = \sum_{\ell=1}^{d_A} |f_n\alpha_{\ell}\rangle \langle \alpha_{\ell} f_n|}$$

OVVERO IL PROIETTORE DI f_n È LA SOMMA DI TUTTI I PROIETTORI CON AUTOVALORE f_n .

A QUESTO PUNTO SI POTREBBE VERIFICARE CHE LE PROBABILITÀ SODDISFANO

$$\boxed{\sum_{\hat{n}} P_{\psi}(f_{\hat{n}}) = 1}$$

$$\sum_{\hat{n}} P_{\psi}(f_{\hat{n}}) = \sum_{\hat{n}} \langle \psi | P_{f_{\hat{n}}} | \psi \rangle = \langle \psi | \sum_{\hat{n}} P_{f_{\hat{n}}} | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | \sum_{j=1}^N |f_j\rangle \langle f_j| \psi \rangle$$

$\hookrightarrow$ COMPLETEZZA
 $\hookrightarrow$ EVENTUALE DEGENERAZIONE

$$= \langle \psi | \mathbb{1} | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

ORA NON UN DI CHE
 VEDIAMO POSSO CERTO FARE IL
 IL CASO A PARLARE DI NUMERO HA UNA MISURA POSTULATO DICE
 A SPETTRO CONTINUO. DI PROBABILITÀ DI OTTENERE PROBABILITÀ TRA F ED F+ΔF
 ESSERE

$$P_{\psi}(f, \Delta f) = \int_f^{f+\Delta f} P_{\psi}(\tilde{f}) d\tilde{f}$$

E DUNQUE ORA IL PROBLEMA È DETERMINARE LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ $P_{\psi}(\tilde{f})$. È DEFINITA COME IL VALORE MEDIO DEL PROIETTORE SULL'AUTOSPAZIO di F.

$$P_{\psi}(\tilde{f}) = \langle P_{\tilde{f}} \rangle_{\psi}$$

MA DOBBIAMO DEFINIRE COS'È IL VALORE MEDIO DI UN OSSERVABILE NELLO STATO $|\psi\rangle$.

INTUITIVAMENTE È LA MEDIA DEI POSSIBILI RISULTATI DI UNA SUA MISURA PESATI CON LA RISPETTIVA PROBABILITÀ.

→

$$\begin{aligned}\langle \psi | F | \psi \rangle &= \sum_i f_i P_\psi(f_i) \\ &= \sum_i \langle \psi | F_i P_{f_i} | \psi \rangle\end{aligned}$$

CHE È COERENTE CON LA DECOMPOSIZIONE SPETTRALE DELL'OPERATORE F

$$F = \sum_i f_i |f_i\rangle \langle f_i| = \sum_i f_i P_{f_i}$$

MA IL VALORE MEDIO DI UN'OSSERVABILE SI PUÒ SCRIVERE IN FORMA DI TRACCIA (DEFINIZIONE PIÙ GENERALE).

$\{|i\rangle\}$ BASE ON DI $\mathcal{H}$

SCRIVO

$$\begin{aligned}\langle \psi | F | \psi \rangle &= \sum_i \langle \psi | i \rangle \langle i | F | \psi \rangle \\ &= \sum_i \langle i | F | \psi \rangle \langle \psi | i \rangle\end{aligned}$$

SCRITTO COSÌ POSSO VEDERE LA DEFINIZIONE DI TRACCIA

$$\text{Tr}(A) = \sum_i \langle i | A | i \rangle$$

DUNQUE

$$\langle \psi | F | \psi \rangle = \text{Tr}(F |\psi\rangle \langle \psi|) = \text{Tr}(F P_\psi)$$

ψ È LO STATO SU CUI CALCOLO IL VALORE MEDIO

QUINDI IL POSTULATO DICEVA CHE LA PROBABILITÀ
 È IL VALORE MEDIO DEL PROIETTORE E POSSO
 VERBA ORA COME

$$P_{\psi}(F_i) = \langle P_{F_i} \rangle_{\psi} = \text{Tr}(P_{F_i} P_{\psi})$$

TUTTO QUELLO DETTO FIN'ORA È VALIDO ASSUMENDO
 CHE LO STATO SIA UN RAGGIO NELLO SPAZIO
 DI HILBERT DEGLI STATI DI HILBERT E IMPLICA
 CHE HO LA MASSIMA INFORMAZIONE SUL SISTEMA.

SE NON HO UNA CONOSCENZA COMPLETA DELLO
 STATO HO UNA DISTRIBUZIONE STATISTICA CHE
 MI DICE CHE IL SISTEMA SI TROVA IN UN
 CERTO STATO CON UNA CERTA PROBABILITÀ
 (ANALOGO ALLA MC CON MOLTISSIMI OGGETTI).

SE NON RIESCO A DETERMINARE IN MODO COMPLETO
 LO STATO (PER MOTIVI SPERIMENTALI) NON HO
 PIÙ UN ENSEMBLE DI STATI TUTTI UGUALI TRA
 LORO, MA HO UNA DISTRIBUZIONE STATISTICA
 (CLASSICA) DI STATI PURI.

UN CERTO STATO STA NELLO STATO $|\psi_i\rangle$ CON
 PROBABILITÀ IN SENSO CLASSICO w_i . ESSENDO
 PROBABILITÀ CLASSICHE DEVE VALERE

$$\sum_i w_i = 1$$

PARLIAMO DI STATI MISTI QUANDO ABBIAMO UNA MISCELA STATISTICA DI STATI PURI. E IN QUESTA SITUAZIONE NON POSSO DEFINIRE GLI STATI CON RAGGI NELLO SPAZIO DI HILBERT, MA SONO DESCRITTI TRAMITE OPERATORI CHE SI CHIAMANO MATRICE DENSITA' ρ

PER DARE UNA DEFINIZIONE DI COSA VUOL ρ PROViamo A DARE UNA MISURA SU UNO STATO DEL GENERE.

IL SISTEMA COME GIÀ DETTO HA PROBABILITÀ w_k DI TROVARSI NELLO STATO $|\psi_k\rangle$. IL RISULTATO DI F SARÀ UNA MEDIA DELLE PROBABILITÀ DI TROVARE F IN CIASCUN $|\psi_k\rangle$ PESATO CON LA PROBABILITÀ DI AVERE EFFETTIVAMENTE $|\psi_k\rangle$.

VALORE MEDIO DI F : $\langle F \rangle_\rho = \sum_k w_k \langle \psi_k | F | \psi_k \rangle$

NOTA IN QUESTA DEFINIZIONE SI HA L'INTERFACCIA TRA PROBABILITÀ QUANTISTICA (INSOPPRIMIBILE) E PROBABILITÀ CLASSICA (SOPPRIMIBILE SE DETERMINO ESATTAMENTE LO STATO).

POSSIAMO VEDERE MEGLIO:

$$\langle F \rangle_\rho = \sum_k w_k \text{Tr}(F P_{\psi_k}) = \text{Tr}(F \rho)$$

IN CUI ABBIAMO DEFINITO

$$\rho = \sum_k \omega_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$$

STATO MISTO

NOTA LA MATRICE DENSITÀ DI UNO STATO PURO COINCIDE CON L'OPERATORE PROIETTORE.

L'OPERATORE DI MATRICE DENSITÀ CONTIENE LA DESCRIZIONE COMPLETA DELLO STATO MISTO.

PROPRIETÀ DELLA MATRICE DENSITÀ

$$\bullet \rho^\dagger = \rho$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{Tr } \rho &= \sum_k \omega_k (\text{Tr } P_k) = \sum_k \omega_k \sum_i \langle i | P_k | i \rangle = \sum_{k,i} \omega_k \langle i | \psi_k \rangle \langle \psi_k | i \rangle \\ &= \sum_k \omega_k \underbrace{\sum_i \langle \psi_k | i \rangle \langle i | \psi_k \rangle}_{=1} = \sum_k \omega_k \underbrace{\langle \psi_k | \psi_k \rangle}_{=1} \\ &= \sum_k \omega_k = 1 \end{aligned}$$

HA ATTENZIONE ω_k NON SONO GLI AUTOVALORI DI ρ ,
SONO SOLTanto SE

$$\langle \psi_k | \psi_e \rangle = \delta_{ke}$$

POICHÉ COSÌ

$$\rho |\psi_e\rangle = \sum_k \omega_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k | \psi_e \rangle = \omega_e |\psi_e\rangle$$

È IN GENERALE ω_k SONO BANALMENTE NUMERI.

- DATA $\rho |V_e\rangle = \lambda_e |V_e\rangle$ GLI AUTOVALORI SONO POSITIVI
(LOGICO POICHÉ SONO PROBABILITÀ)

SI VEDE DA

$$\langle V_e | \rho | V_e \rangle = \sum_k \omega_k \langle V_e | \psi_k \rangle \langle \psi_k | V_e \rangle = \sum_k \omega_k |\langle \psi_k | V_e \rangle|^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow \lambda_e \geq 0$$

QUESTE PROPRIETÀ CI DANNO UN CRITERIO SE UN CERTO OPERATORE È UNA MATRICE DENSITÀ OPPURE NO.

OSS SE HO UNO STATO PURO $\rightarrow \rho_4 = |\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow \rho^2 = \rho \rightarrow \text{Tr} \rho^2 = 1$
E SOLO IN QUESTO CASO IL SISTEMA HA PROBABILITÀ
DI TROVARSI NELLO STATO $|\psi\rangle$ E PROBABILITÀ
NULLA DI ESSERE IN QUALUNQUE ALTRO. IN TAL CASO
E SOLO IN QUESTO CASO HO $\rho^2 = \rho$ CIOÈ LA
MATRICE DENSITÀ È UN PROIETTORE (CHE PROIETTA
SULLO SPAZIO UNIDIMENSIONALE GENERATO DAL VETTORE $|\psi\rangle$).

SE HO UNO STATO MISTO $\rightarrow \rho_4 \neq \rho_4^2 \rightarrow \text{Tr} \rho^2 \neq 1$

E DA QUESTE CONDIZIONI DATA UNA MATRICE ρ IO
POSSO VEDERE SE HO UNO STATO PURO O
MISTO.

VEDIAMO ORA COME È IL POSTULATO 1 NEL CASO IN CUI ABBIAMO UNO STATO MISTO DESCRITTO DA ρ .

- I POSSIBILI VALORI DI UNA MISURA DI F SONO SOLO I SUOI AUTOVALORI F_i .
- LA PROBABILITÀ DI MISURARE UN CERTO F_i È,

$$\begin{aligned}
 P_\rho(F_i) &= \langle P_{F_i} \rangle_\rho = \text{Tr}(P_{F_i} \rho) \\
 &= \sum_\alpha \text{Tr}(P_{F_i} |\psi_\alpha\rangle \omega_\alpha \langle \psi_\alpha|) \\
 &= \sum_{\alpha, i} \omega_\alpha \langle i | P_{F_i} | \psi_\alpha \rangle \langle \psi_\alpha | i \rangle \\
 &= \sum_{\alpha, i} \omega_\alpha \langle \psi_\alpha | i \rangle \langle i | P_{F_i} | \psi_\alpha \rangle \\
 &= \sum_\alpha \omega_\alpha \langle \psi_\alpha | P_{F_i} | \psi_\alpha \rangle \\
 &= \sum_\alpha \omega_\alpha P_{\psi_\alpha}(F_i)
 \end{aligned}$$

OSSIA, LA PROBABILITÀ DI TROVARE F_i COME RISULTATO DI UNA MISURA, È DATA DALLA SOMMA SU TUTTI GLI STATI $|\psi_\alpha\rangle$ AMMESSI DALLO STATO MISTO, DELLA PROBABILITÀ CLASSICA ω_α CHE LO STATO SIA $|\psi_\alpha\rangle$ MOLTIPPLICATA PER LA PROBABILITÀ QUANTISTICA $P_{\psi_\alpha}(F_i)$ DI MISURARE F_i SE IL SISTEMA È IN $|\psi_\alpha\rangle$.

Ma ora, vediamo che differenza c'è tra stato misto e stato puro.

MISURA DELLE OSSERVABILI

VEDIAMO CHE DIFFERENZA C'È QUANDO LA MISURA AVVIENE IN STATI PURI PIUTTOSTO CHE STATI MISTI.

PRENDIAMO L'OSSERVABILE A PER CUI

$$A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$$

PER SEMPLICITÀ PRENDIAMO $\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$ E a_i NON DEGENERI.

VOGLIO PARAGONARE

$$\rho = \sum_i w_i |a_i\rangle \langle a_i|$$

E PRENDENDO $w_i = |c_i|^2$

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$$

NOTA MI SEMPLIFICO UN PO' LA VITA PRENDENDO CON STATI ON AUTOSTATI DI A . MISCHIO UN PO' LE COSE PRENDENDO LE PROBABILITÀ CLASSICHE IN ρ PROPRIO UGUALI A QUELLE CHE HO DI OTTENERE a_i COME RISULTATO DI UNA MISURA SULLO STATO PURO $|\psi\rangle$.

IN QUESTE DUE SITUAZIONI MI CALCOLO

- $P_\psi(a_i)$
- $P_\rho(a_i)$

AVREMO

$$P_{\psi}(a_i) = \langle \psi | P_{a_i} | \psi \rangle = \sum_{k,j} c_j^* c_k \langle a_j | (|a_i\rangle \langle a_i|) | a_k \rangle$$

$$= \sum_{k,j} c_j^* c_k \delta_{ji} \delta_{ik} = c_i^* c_i = |c_i|^2$$

COME SAPEVO, LA PROBABILITÀ DI MISURARE a_i NELLO STATO $|\psi\rangle$ È $|c_i|^2$.

$$P_f(a_i) = \text{Tr}(P_{a_i} f) = \sum_{k,j} \langle a_j | (|a_i\rangle \langle a_i|) (\omega_k |a_k\rangle \langle a_k|) | a_j \rangle$$

$$= \sum_{k,j} \omega_k \langle a_j | a_i \rangle \langle a_i | a_k \rangle \langle a_k | a_j \rangle$$

$$= \sum_{k,j} \omega_k \delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{kj} = \omega_i$$

MA ALLORA LA PROBABILITÀ DI OTTENERE UN QUALSIASI AUTOVALORE DI A SONO LE STESSA. MA QUESTO È UN CASO, È DOVUTO AL FATTO CHE HO MISURATO A I CUI AUTOSTATI HO USATO SIA PER SCRIVERE f CHE $|\psi\rangle$.

CONSIDERIAMO ORA B

$$B|b\rangle = b|b\rangle$$

$$\text{e } [A, B] \neq 0$$

→ QUINDI HO UN'ALTRA BASE PER B

RIVEDIAMO I CONTI DI PRIMA COSA DIVENTANO.

$$\begin{aligned}
 P_f(b) &= \text{Tr}(f P_b) = \sum_{k,i} \langle a_i | (w_k | a_k \rangle \langle a_k |) (| b \rangle \langle b |) | a_i \rangle \\
 &= \sum_{k,i} w_k \langle a_i | a_k \rangle \langle a_k | b \rangle \langle b | a_i \rangle \\
 &= \sum_{k,i} w_k \delta_{ik} \langle a_k | b \rangle \langle b | a_i \rangle \\
 &= \sum_k w_k |\langle b | a_k \rangle|^2
 \end{aligned}$$

INVECE

$$\begin{aligned}
 P_\psi(b) &= \langle P_b \rangle_\psi = \langle \psi | P_b | \psi \rangle = \sum_{j,k} c_j^* c_k \langle a_j | (| b \rangle \langle b |) | a_k \rangle \\
 &= \sum_{j,k} c_j^* c_k \langle a_j | b \rangle \langle b | a_k \rangle
 \end{aligned}$$

POSSO SEPARARE IL PEZZO CON $j=k$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_k |c_k|^2 |\langle b | a_k \rangle|^2 + \sum_{j \neq k} c_j^* c_k \langle a_j | b \rangle \langle b | a_k \rangle \\
 &= P_f(b) + \sum_{k < j} c_j^* c_k \langle a_j | b \rangle \langle b | a_k \rangle + \sum_{k > j} c_j^* c_k \langle a_j | b \rangle \langle b | a_k \rangle
 \end{aligned}$$

INDICI MUTI LI POSSO SCAMBIARE

$$= P_f(b) + \sum_{k < j} c_j^* c_k \langle a_j | b \rangle \langle b | a_k \rangle + \sum_{k < j} c_k^* c_j \langle a_k | b \rangle \langle b | a_j \rangle \rightarrow$$

$$= P_j(b) + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k < j} e_j^* c_k \langle a_j | b \rangle \langle b | a_k \rangle \right]$$

E QUNQUE I RISULTATI SONO MOLTO DIVERSI!

ENTRambi CONTENGONO IL TERMINE "OVVIO", OSSIA LA COMBINAZIONE DELLA PROBABILITÀ QUANTISTICA DI MISURARE b CON LO STATO $|a_k\rangle$ PIÙ LA PROBABILITÀ CLASSICA CHE SIAMO EFFETTIVAMENTE NELLO STATO $|a_k\rangle$.

PERÒ $c_k \in \mathbb{C}$ QUINDI HANNO SIA UN MODULO CHE UNA FASE.

LO STATO $|\psi\rangle$ CONTIENE PIÙ INFORMAZIONI RISPETTO CHE LO STATO MISTO ρ CONTIENE ANCHE L'INFORMAZIONE DELLE FASI DEI COEFFICIENTI. INFATTI, IL TERMINE IN PIÙ CHE COMPARE IN $P_j(b)$ È DETTO DI INTERFERENZA QUANTISTICA IL QUALE È PERSO NEL CASO DI ρ POICHÈ ω_k SONO I MODULI QUADRI $|c_k|^2$ E PERSO LA FASE.

COME IN EN CLASSICO QUINDI GLI STATI PURI POSSONO SOVRAPPORSI IN MODO COERENTE O INCOERENTE. POSSO PENSARE DI COSTRUIRE TANTI SISTEMI IN UNO STATO PURO $|\psi\rangle$, MA CIASCUNO DI ESSI CON FASE RELATIVA TRA I c_k A CASO. PROPRIO PERCHÈ LE FASI TRA DUE QUALSIASI $c_k c_j^*$ È CASUALE, SI HA

$$\langle c_k c_j^* \rangle = 0 \quad \text{SE } k \neq j$$

CHE SOSTITUITA IN $P_j(b)$ IL TERMINE DI INTERFERENZA SPARISCE E RIMANE SOLO $P_j(b)$, CIOÈ SI RICADE NELLO STATO MISTO, CHE QUINDI IN REALTÀ È UN'INSIEME STATISTICO DI STATI PURI CON FASI RELATIVE DISTRIBUITE A CASO.

PER QUESTO È ANCHE DETTO MISCELA INCOERENTE DI STATI.

NOTA C'È DIFFERENZA TRA LA FASE CON CUI NOI POSSIAMO DEFINIRE UNO STATO

$$|\psi\rangle \sim e^{i\varphi} |\psi\rangle$$

È LA FASE RELATIVA TRA I COEFFICIENTI DI $|\psi\rangle$.

POSSIAMO CONFRONTARE LA FORMA DELLE MATRICI DENSITÀ, ρ E LA MATRICE DENSITÀ DI UNO STATO PURO, ρ_ψ .

$$\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{k,j} c_k c_j^* |a_k\rangle\langle a_j|$$

ρ_ψ È UNA MATRICE "PIENA", NEL SENSO CHE NON È DIAGONALE. INVECE

$$\rho = \sum_k w_k |a_k\rangle\langle a_k|$$

È UNA MATRICE DIAGONALE POICHÉ $\{|a_k\rangle\}$ È UNA BASE ON.

POSSIAMO VEDERE UN MODO GENERICO PER SCRIVERE L'ELEMENTO DI MATRICE DI UNA ρ GENERICA, NON PER FORZA IN UNA BASE ON (DI CONSEGUENZA NON MI ASPETTO DIAGONALE)

$$\rho = \sum_k w_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$$

CONOSCO
SCRIVO

$\{|a_m\rangle\}$

BASE ON.

$$\rho_{mm} = \sum_k \omega_k \langle a_m | \rho_{\psi_k} | a_m \rangle = \sum_k \omega_k \underbrace{\langle a_m | \psi_k \rangle}_{c_m^{(k)}} \underbrace{\langle \psi_k | a_m \rangle}_{c_m^{*(k)}}$$

POSSIAMO VEDERE GLI ELEMENTI DIAGONALI

$$\rho_{mm} = \sum_k \omega_k |\langle a_m | \psi_k \rangle|^2 = \sum_k \omega_k |c_m^{(k)}|^2$$

AVERENDO $c_m^{(k)}$ COEFFICIENTE DI FOURIER $|\psi_k\rangle = \sum_m c_m^{(k)} |a_m\rangle$.

GLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE DI ρ , SCRITTA IN TERMINI DI $|\psi_k\rangle$ QUANDO $\{|\psi_k\rangle\}$ NON È UNA BASE ON, HANNO SIGNIFICATO!

ρ_{mm} È LA PROBABILITÀ MEDIA DI MISURARE $|a_m\rangle$ NELLO STATO DESCRITTO DALLA MATRICE DENSITÀ.

DETTA MEGLIO:

- $|c_m^{(k)}|^2$ = PROBABILITÀ QUANTISTICA ASSOCIATA ALL'AUTOVALORE a_m DELLA MISURA DI A QUANDO SONO NELLO STATO $|\psi_k\rangle$
- ω_k = PROBABILITÀ CLASSICA DI TROVARSI NELLO STATO $|\psi_k\rangle$

$$\Rightarrow \rho_{mm} = \sum_k \omega_k |c_m^{(k)}|^2 \equiv \text{POPOLAZIONE DI } |a_m\rangle$$

ED È LA PROBABILITÀ $|c_m^{(k)}|^2$ DI PESCARE

ρ_m NELLO STATO $|\psi_k\rangle$, PESATO PER w_k PROBABILITÀ
 DI AVERE $|\psi_k\rangle$, QUINDI È LA PROBABILITÀ MEDIA CHE
 FACENDO UNA MISURA SULLO STATO DESCRITTO DA ρ
 ANDIAMO A PESCARE $|a_m\rangle$ E QUINDI A MISURARE ρ_m .
 ρ_{mm} MI DICE QUANTO PESA L'ELEMENTO DELLA BASE $|a_m\rangle$
 NELLA MATRICE DENSITÀ.

OSS GLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE SONO SEMPRE ≥ 0 , MENTRE
 GLI ELEMENTI OFF-DIAGONALE SONO NUMERI COMPLESSI, GENERICI
 CHE SI CHIAMANO COERENZE POICHÉ MI MISURANO QUAL
 È L'EFFETTO DI INTERFERENZA TRA LE DIVERSE COMPONENTI
 DI $|\psi_k\rangle$. NEL CALCOLO DI ρ_{mm} HO L'INTERFERENZA DELLE
 COMPONENTI m ($c_m^{(k)}$) ED m ($c_m^{*(k)}$) DI $|\psi_k\rangle$.

TENENDO ACCESE LE COERENZE LA MATRICE DENSITÀ CONTIENE
 PARTE DELLE INFORMAZIONI CHE STANNO NEGLI STATI
 PURI. AZZERIAMO LA COERENZA ANDANDO NELLA BASE DEI
 SUOI AUTOVALORI.
 IN UNO STATO PURO LA PARTE DI COERENZA NON POSSO
 TOGLIERLI.

USARE LA MATRICE DENSITÀ PORTA POI AL CONCETTO DI
 ENTANGLEMENT.

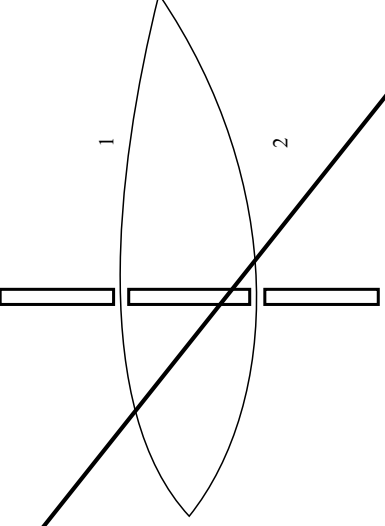


Figura 2.7: Esperimento delle due fenditure

rappresentano lo stesso stato puro, mentre il vettore:

$$e^{i\varphi} c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle; \quad \frac{\varphi}{2\pi} \notin \mathbb{Z} \quad (2.5.42)$$

è uno stato puro completamente diverso.

2.5.4 Polarizzazione della luce/spin del fotone

La polarizzazione della luce è un ottimo esempio su cui sperimentare il formalismo dell'operatore densità.

Il campo elettrico di un'onda elettromagnetica sinusoidale piana propagantesi nella direzione z giace nel piano (x, y) ed è dato, in tale piano, nel modo più generale, da:

$$\mathbf{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_1 \cos(kz - \omega t + \alpha_1) \\ E_2 \cos(kz - \omega t + \alpha_2) \end{pmatrix} \quad (2.5.43)$$

Introducendo le due costanti complesse:

$$a_i = \frac{E_i}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}} e^{i\alpha_i}; \quad i \in \{1, 2\} \quad (2.5.44)$$

si può riscrivere il campo elettrico nel modo seguente (provare per credere):

$$\mathbf{E}(z, t) = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \operatorname{Re} \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \right] \quad (2.5.45)$$

Il vettore $|\psi\rangle = {}^t(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ ha norma unitaria ($|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$) e, in una descrizione classica della luce come onda elettromagnetica, contiene

l'intensità relativa e le fasi delle componenti x e y del campo elettrico, cioè lo stato di polarizzazione. In teoria dei campi, invece, la luce è vista come un fascio di fotoni, che sono particelle di spin 1, e in questo caso si mostra che $|\psi\rangle$ è il loro spinore.

Il fotone è una particella di spin 1, quindi ci si potrebbe aspettare che il suo spazio di spin sia $\mathbb{C}^{2s+1} = \mathbb{C}^3$ e non $\mathbb{C}^2$, ma il fotone è privo di massa; perciò non esiste un sistema di riferimento in cui sia a riposo, ma esso si muove alla velocità della luce rispetto a tutti i sistemi di riferimento; quindi esiste sempre una direzione privilegiata, quella dell'impulso, e il sistema del fotone è invariante solo per rotazioni nel piano ortogonale ad essa. Come conseguenza di questa minore simmetria rispetto alle particelle dotate di massa, si può mostrare che lo stato $m_s = 0$ non è ammesso, e questo riduce a 2 la dimensione dello spazio di spin.

Questo è la formulazione quantistica della proprietà delle onde elettromagnetiche classiche di essere onde trasversali, cioè senza componente parallela all'impulso.

Una base dello spazio di spin è costituita dai due vettori:

$$|px\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |py\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.46)$$

che descrivono luce polarizzata rispettivamente lungo l'asse x e lungo l'asse y . Un generico stato di polarizzazione è descritto dal vettore:

$$|\psi\rangle = a_1 |px\rangle + a_2 |py\rangle; \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C} / |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1 \quad (2.5.47)$$

ed è quindi uno stato puro di spin. Ad esempio se $a_2/a_1 \in \mathbb{R}$ si ha polarizzazione lineare lungo una direzione che forma un angolo $\arctan a_2/a_1$ con l'asse x , se $a_2/a_1 = i$ si ha polarizzazione circolare destrorsa, se $a_2/a_1 = -i$ polarizzazione circolare sinistrorsa. Il generico stato puro descrive una polarizzazione ellittica, ma si tratta sempre di luce completamente polarizzata.

Dello stato puro $|\psi\rangle$ si può scrivere il corrispondente operatore densità, che è un proiettore, e si ha:

$$\rho_\psi = |\psi\rangle \langle \psi| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a_1|^2 & a_1 a_2^* \\ a_1^* a_2 & |a_2|^2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{TUTTA LA} \\ \text{MATRICE} \text{ è} \\ \text{ACCESA} \end{matrix} \quad (2.5.48)$$

STATO PURO

Si vede immediatamente che $\text{Tr}(\rho_\psi) = 1$ e che $\rho_\psi^\dagger = \rho_\psi$, e, anche se è un po' più laborioso, che $\rho_\psi^2 = \rho_\psi$. Ad esempio si ha:

$$\rho_{px} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho_{p45^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \rho_\psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.49)$$

Come si descrive la luce non polarizzata? Ovviamente con gli stati misti. Ad esempio la luce completamente non polarizzata consiste in luce che in

RICORDO
QUINDI AD ESEMPIO

$$(g^2)_{11} = g_{11}^2 + g_{12} g_{21} = |a_1|^4 + a_1 a_2^* a_1^* a_2 = |a_1|^2 (|a_1|^2 + |a_2|^2)$$

$$= |a_1|^2 \quad \checkmark$$

ogni istante ha la stessa probabilità di essere polarizzata sia nella direzione x che nella direzione y : $\xrightarrow{\text{PER QUESTO ESCE } \frac{1}{2} \mathbb{1}}$

$$\rho_{np} = \frac{1}{2} |px\rangle \langle px| + \frac{1}{2} |py\rangle \langle py| = \frac{1}{2} \mathbb{1} \quad (2.5.50)$$

Si ottiene lo stesso operatore densità, e quindi luce completamente non polarizzata, anche considerando luce che abbia la stessa probabilità di essere polarizzata circolarmente in ciascuno dei due versi: $\xrightarrow{= \frac{1}{2} (|ed\rangle \langle ed| + |es\rangle \langle es|)}$

$$\rho_{np} = \frac{1}{2} |\odot\rangle \langle \odot| + \frac{1}{2} |\ominus\rangle \langle \ominus| = \frac{1}{2} \mathbb{1} \quad (2.5.51)$$

La probabilità che ciascun fotone di un fascio riesca ad attraversare un polarizzatore orizzontale è la probabilità di ottenere l'autovettore 1 dal proiettore sugli stati di polarizzazione orizzontale $\mathcal{P}_{px} = |px\rangle \langle px|$.

Si supponga quindi di misurare con un polarizzatore l'osservabile $\mathcal{P}_{px}$, che può avere solo autovalori 0 e 1, in presenza di luce completamente non polarizzata, cioè:

$$\rho_{np} = \frac{1}{2} \mathbb{1} \quad (2.5.52)$$

e poi in presenza di luce polarizzata a 45° , cioè:

$$\rho_{p45^\circ} = |p45^\circ\rangle \langle p45^\circ|; \quad |p45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |px\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |py\rangle \quad (2.5.53)$$



In entrambi i casi si ha la stessa probabilità di ottenere l'autovettore 1:

$$P_{np}(1) = \text{Tr}(\rho_{np} \mathcal{P}_{px}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{P}_{px}) = \frac{1}{2} \langle px|px\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{=} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

MA SI POSSONO ANCHE FARE I PRODOTTI SCALARI

$$P_{p45^\circ}(1) = \text{Tr}(\rho_{p45^\circ} \mathcal{P}_{px}) = \text{Tr}(|p45^\circ\rangle \langle p45^\circ| |px\rangle \langle px|) = |\langle p45^\circ|px\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Questo significa che, per entrambi i tipi di luce, ogni fotone ha la stessa probabilità di attraversare un polarizzatore orizzontale che di venire assorbito, e quindi l'intensità luminosa si dimezza nell'attraversamento.

Se però si mette il polarizzatore a 45° , cioè si misura $\mathcal{P}_{p45^\circ} = |p45^\circ\rangle \langle p45^\circ|$ con gli stessi due tipi di luce, ci si accorge della differenza:

$$P_{np}(1) = \text{Tr}(\rho_{np} \mathcal{P}_{p45^\circ}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{P}_{p45^\circ}) = \frac{1}{2} |\langle p45^\circ|p45^\circ\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P_{p45^\circ}(1) = \text{Tr}(\rho_{p45^\circ} \mathcal{P}_{p45^\circ}) = \text{Tr}(\mathcal{P}_{p45^\circ}) = |\langle p45^\circ|p45^\circ\rangle|^2 = 1$$

La luce non polarizzata continua ad essere assorbita per metà, ma la luce polarizzata a 45° non viene assorbita per nulla da un polarizzatore a 45° .

RICORDA

$$g_{45^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad g_{np} = \frac{1}{2} \mathbb{1}$$

IN GENERALE

CALCOLA

$$\rho(\lambda_x = 1) = \text{Tr}(\rho_{px} g)$$

$$\text{IN CUI} \quad P_{px} = |px\rangle \langle px| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comunque si metta il polarizzatore (anche circolare), cioè qualsiasi proiettore $\mathcal{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ si misuri, la luce completamente non polarizzata sarà sempre assorbita per metà:

$$P_{np}(1) = \text{Tr}(\rho_{np}\mathcal{P}_\psi) = \frac{1}{2}\text{Tr}(\mathcal{P}_\psi) = \frac{1}{2}|\langle\psi|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2} \quad (2.5.54)$$

2.5.5 Stato misto di un sottosistema (stati “entangled”)

Può accadere che, anche se un sistema si trova in uno stato puro, alcuni dei suoi costituenti si trovino in uno stato misto.

Per chiarire questa proposizione si consideri un sistema U (l’“universo”), che sia composto di due sottosistemi A e B , in modo che lo spazio di Hilbert del primo sia il prodotto diretto degli spazi di questi ultimi:

$$\mathcal{H}_U = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (2.5.55)$$

Per fissare le idee, si può pensare ad un sistema composto da due particelle, nel quale $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$ sono gli spazi degli stati di ciascuna particella.

L’universo si trovi in uno stato, puro o misto che sia, descritto dall’operatore ρ_U . Ci si chiede qual è il valor medio di una certa osservabile F_A del sottosistema A , ad esempio il valor medio del momento angolare di una delle due particelle. In $\mathcal{H}_U$ l’osservabile è rappresentata da:

$$F = F_A \otimes \mathbb{1}_B \quad (2.5.56)$$

Per cui si ha:

$$\langle F \rangle_U = \text{Tr}(F\rho_U) = \text{Tr}_A \text{Tr}_B[(F_A \otimes \mathbb{1}_B)\rho_U] = \text{Tr}_A[F_A \text{Tr}_B(\rho_U)] \quad (2.5.57)$$

Ricordando che $\text{Tr}_B(\rho_U)$ è un operatore in $\mathcal{H}_A$, farebbe gola mostrare che è anche un operatore densità, perché allora si potrebbe scrivere:

$$\langle F \rangle_U = \text{Tr}_A[F_A \rho_A] = \langle F_A \rangle_A; \quad \rho_A = \text{Tr}_B(\rho_U) \quad (2.5.58)$$

ed infatti è così.

Detta $\{|i\rangle_B\}$ una base ONC per $\mathcal{H}_B$ si ha infatti:

- $\rho_U^\dagger = \rho_U \Rightarrow \rho_A^\dagger = \rho_A$
- $\text{Tr}_A(\rho_A) = \text{Tr}_A[\text{Tr}_B(\rho_U)] = \text{Tr}_U(\rho_U) = 1$
- $\langle v | \rho_U | v \rangle \geq 0, \forall |v\rangle \in \mathcal{H} \Rightarrow {}_A \langle w | \rho_A | w \rangle_A = \sum_i {}_A \langle w | {}_B \langle i | \rho_U | i \rangle_B | w \rangle_A \geq 0$

ESERCIZIO VIENE DATA

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2+\alpha & \alpha \\ -\beta & 2+\alpha \end{pmatrix}$$

È SU CHIESTE SE PUÒ ESSERE UNA MATRICE DENSITÀ.

VEDO CHE SONO IN UNO SPAZIO DIMENSIONALE. POSSO VEDERE SE $\tilde{\rho}$ È UNA MATRICE DENSITÀ CONTROLLANDO LE SUE PROPRIETÀ. CONTROLLO CHE $\tilde{\rho}$ SIA HERMITIANO

$$\tilde{\rho}^\dagger = \tilde{\rho} \quad \tilde{\rho}^\dagger = (\tilde{\rho}^T)^* = \begin{pmatrix} 2+\alpha^* & -\beta^* \\ \alpha^* & 2+\alpha^* \end{pmatrix}$$

DUNQUE AVRÒ BISOGNO DI

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

$$-\beta^* = \alpha \Rightarrow \alpha = -\beta \in \mathbb{R}$$

CONTROLLO SE $\text{Tr}(\tilde{\rho}) = 1$

$$\text{Tr}(\tilde{\rho}) = \frac{1}{3}(2+\alpha) = 1$$

$$\Rightarrow 2+\alpha=3 \Rightarrow \boxed{\alpha=1} \Rightarrow \boxed{\beta=-1}$$

QUINDI $\tilde{\rho}$ È UNA MATRICE DENSITÀ SOLO SE

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

VEDO CHE $\det > 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0 \Rightarrow$ SOLO AUTOVALORI
VEDO SE DESCRIVE UNO STATO PURO O MISTO

$$\rho^2 = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \neq \rho$$

$\Rightarrow$ È UNO STATO MISTO

AD ESEMPIO:

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{NO SIMMETRICA} \Rightarrow \text{NO MATRICE DENSITÀ}$$

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{no, } \text{Tr} \neq 1$$

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{VA BENE!}$$

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{no, HA } \det < 0$$

PRENDIAMO ORA $\rho = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

DESCRIVE UNO STATO MISTO DI SPIN $1/2$, QUINDI HO GLI SPINORI

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

VISTO CHE ρ LA POSSO SCRIVERE NELLA BASE DI S_z È FACILE CALCOLARE LA PROBABILITÀ DI VALORI DI S_z .

PROIETTORE PER $S_z = 1$:

$$P_{S_z=1} = |+\rangle\langle+| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(S_z=1) = \text{Tr}(\rho P_{S_z=1}) = \frac{1}{6} \text{Tr} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

OPPURE ALTERNATIVAMENTE POTREI FARE:

$$\rho = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3|+\rangle\langle+| - |+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+| + 3|-\rangle\langle-| \end{pmatrix}$$

DUNQUE

$$\begin{aligned} 8P_{S_z=1} &= 8 \cdot |+\rangle\langle+| \\ &= \frac{1}{6} \left(3|+\rangle\langle+| + \gamma\langle+| - |-\rangle\langle+| + \gamma\langle+| \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(3|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle+| \right) \end{aligned}$$

QUINDI

$$Tr(8P_{S_z=1}) = \frac{1}{2}$$

ORA VOGLIO CALCOLARE $P(S_x = \hbar/2)$

RICORDO $S_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

DEVO TROVARE GLI AUTOVETTORI DI S_x E VEDERE A CHI CORRISPONDE L'AUTOVALORE $\hbar/2$.

$$S_x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2}$$
$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2}$$

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{a = b}$$

DUNQUE $|x_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle)$

QUINDI " PRODOTTORE SARÀ

$$\begin{aligned} P_{x_+} &= |x_+\rangle\langle x_+| = \frac{1}{2} \left(|+\rangle\langle+| + |+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

E IN QUESTO MODO OTTENGO

$$\begin{aligned}
 B(S_x = \hbar/2) &= \text{Tr}(8P_{x+}) \\
 &= \text{Tr}\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
 &= \text{Tr}\left(\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right) \\
 &= \text{Tr}\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1/3
 \end{aligned}$$

Postulato 2: riduzione della funzione d'onda

Quando ho un sistema e faccio due misure molto vicine temporalmente, auspabilmente vorrò ottenere lo stesso risultato.

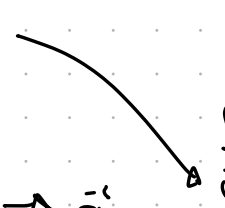
Questo tipo di misura si chiama di if specie, in cui la misura non influenza il sistema.

Classicamente questo si avvera!

Me lo aspetto anche in MQ.
Ovviamente non accade. Se ho il sistema nello stato $|\psi\rangle$, applico l'operatore $\hat{A}$ e ho una certa probabilità di trovare uno dei suoi autovalori

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\hat{A}} |-\rangle \xrightarrow{\hat{A}} \dots$$

$\Downarrow$ a_i $\Downarrow$ a_i



Se vero quello che m'aspetto, allora dovrebbe avere $\hat{A}$ in mezzo qualcosa che se riapplico $\hat{A}$ m'da con certezza a_i .

In fatti so già che se allo stato $|\psi\rangle$ applico $\hat{A}$ allora lo stato transisce (collassa) allo stato $|a_i\rangle$. Questo va sotto il nome di postulato 2: riduzione della funzione d'onda.

Posso dunque scrivere

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\text{ottenso } a_i]{\text{misura } \hat{A}} \frac{P_{a_i} |\psi\rangle}{\|P_{a_i} |\psi\rangle\|}$$

Quello che significa è che dopo il processo di misura $|\psi\rangle$ viene proiettato sull'autovettore $|a_i\rangle = P_{a_i} |\psi\rangle$ (divido per la norma poiché generalmente non lo è).

MA SE AL POSTO DI $|\psi\rangle$ HO UNO STATO DESCRITTO DALLA MATRICE DENSITA' ρ .

$$\rho = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}|$$

ALLORA AFFINCHÉ VALGA QUELLO DETTO PRIMA TRA TUTTI GLI STATI PRENDENDO LA COMPONENTE a_i E QUINDI SCRIVO

$$\rho \xrightarrow{a_i} \rho' = \frac{\sum_{\alpha} \omega_{\alpha} P_{a_i} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}| P_{a_i}}{\text{Tr}(\rho P_{a_i} \rho)} = \frac{P_{a_i} \rho P_{a_i}}{\text{Tr}(\rho P_{a_i} \rho)}$$

E QUESTA CARATTERISTICA DEL PROCESSO DI MISURA È QUELLA CHE PERMETTE DI PREPARARE STATI QUANTISTICI.

PRENDO UN SISTEMA CON UN CERTO SCOC. UN MODO OVUIO PER PREPARARE UNO STATO PURO È PRENDERE UN INSIEME DI STATI $\{|\psi\rangle\}$, MISURARE TUTTE LE OSSERVABILI DELLO SCOC E TENGENDO SOLO GLI STATI CHE HANNO UN CERTO AUTOVALORE PER OGNI OSSERVABILE.

$\Rightarrow$ OTTENGENDO SOLO STATI PURI

VEDIAMO:

$$\text{SCOC} = \{A, B\}$$

ALLORA L'INSIEME COMPLETO DEGLI STATI È

$$\begin{aligned} \{|a_i, b_e\rangle\} & \quad \text{t.c.} \\ A|a_i, b_e\rangle &= a_i |a_i, b_e\rangle \\ B|a_i, b_e\rangle &= b_e |a_i, b_e\rangle \end{aligned}$$

IL PROPRIETORE SU UN CERTO AUTOSPAZIO A
CON AUTOVALORE a_i

$$P_{a_i} = \sum_m |a_i b_m\rangle \langle a_i b_m|$$

INVECE NELL'AUTOSPAZIO DI B DELL'AUTOVALORE b_e

$$P_{b_e} = \sum_j |a_j b_e\rangle \langle a_j b_e|$$

PRENDIAMO UNO STATO GENERICO

$$|\psi\rangle = \sum_{km} c_{km} |a_k b_m\rangle$$

ORA, MISURO A E SCELGO SOLO GLI STATI
CHE MI DANNO a_I , POI MISURO B E
TENGO SOLO QUELLI CON b_L . COME DETTO
MI ASPETTO SOLO STATI PURI

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\text{TENGO } a_I]{\hat{A}} |\psi'\rangle$$

DOVE

$$|\psi'\rangle = P_{a_I} |\psi\rangle$$

$$= \sum_{km} c_{km} |a_I b_m\rangle \underbrace{\langle a_I b_m | a_k b_m \rangle}_{\delta_{Ik} \delta_{mm}}$$

$$= \sum_m c_{Im} |a_I b_m\rangle$$

EFFETTIVAMENTE MI SONO RIMASTI SOLO
VETTORI CORRESPONDENTI ALL'AUTOVALORE a_I
DI A .

ORA MISURO B

$$|\psi'\rangle \xrightarrow[\text{TENGO } b_L]{\hat{B}} |\psi''\rangle$$

SARÀ

$$|\psi''\rangle = P_{b_L} |\psi'\rangle$$

$$= P_{b_L} \sum_m c_{Im} |a_I b_m\rangle$$

$$= \sum_{m,j} c_{Im} |a_j b_L\rangle < a_j b_L | a_I b_m \rangle \underbrace{\delta_{jI} \delta_{Lm}}$$

$$= c_{IL} |a_I b_L\rangle$$

DUNQUE HO TOLTO TUTTE LE SORSE CHE C'ERANO E OTTENGO UNO STATO PURO CORRISPONDENTE AGLI AUTOVALORI $a_I b_L$.

POSSIAMO VEDERE CHE SUCCEDE CON LA MATRICE DENSITÀ CHE DESCRIVE UNO STATO MISTO

$$\rho \xrightarrow[\text{TENGO } a_I]{\hat{A}} \rho' = P_{a_I} \rho P_{a_I}$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{m,n} \omega_{\alpha} |a_I b_m\rangle \langle a_I b_n| \underbrace{\langle \psi_{\alpha} | \psi \rangle}_{c_{mI}^{(\alpha)}} \underbrace{\langle \psi | \psi_{\alpha} \rangle}_{c_{nI}^{*(\alpha)}} |a_I b_n\rangle < a_I b_m |$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{m,n} \omega_{\alpha} c_{mI}^{(\alpha)} c_{nI}^{*(\alpha)} |a_I b_m\rangle \langle a_I b_n|$$

HO TOLTO DEI PEZZI, NON È OVVIO MA SI VEDE DA

$$= \sum_{m,n} X_{nm}^{(I)} |a_I b_m\rangle \langle a_I b_n|$$

$$\text{con } X_{nm}^{(I)} = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} c_{mI}^{(\alpha)} c_{nI}^{*(\alpha)}$$

DA CUI VEDO CHE VARIANO ANCORA GLI ED AN DEI b , MA a È FISSATO.

Misura B

$$g' \xrightarrow[\text{tenso } b_L]{\hat{B}} g'' = P_{b_L} g' P_{b_L}$$

$$= P_{b_L} (P_{a_I} g P_{a_I}) P_{b_L}$$

$$= \sum_{m,m'} \sum_{j,j'} X_{m,m'}^I |a_j b_L\rangle \underbrace{\langle a_j b_L | a_I b_m \rangle \langle a_I b_m | a_{j'} b_L \rangle}_{\delta_{jI} \delta_{mL}} > \langle a_{j'} b_L |$$

$$= X_{LL}^I |a_I b_L\rangle \langle a_I b_L|$$

$$\text{in cui } X_{LL}^I = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} |C_{LI}^{(\alpha)}|^2$$

E dunque ho ottenuto uno stato puro.

Ma sperimentalmente è possibile preparare uno stato come voglio?

Riuscire. A farlo se misurassi con precisione assoluta gli autovalori di a_I e b_L per via delle incertezze sperimentali.

Riesco a preparare uno stato come voglio quando ho operatori con spettro discreto, poichè mi basta ridurre l'incertezza sperimentale al di sotto della separazione tra i livelli dello spettro per essere sicuro che il sistema si trovi in un suo autostato. Se ho spettro continuo però questa cosa non è possibile.

Quindi in MQ non è possibile preparare il sistema in un autostato generalizzato appartenente quindi ad un autovalore dello spettro continuo; questo è il motivo per cui gli stati rappresentati da distribuzioni

NON APPARTENENTI AD $\mathcal{H}$ NON SONO STATI
FISICAMENTE REALIZZABILI, BENSÌ SONO UTILISSIMI
PER COSTRUIRE BASI, PER $\mathcal{H}$.

FISICAMENTE INFATTI NON SI RIESCE MAI A
REALIZZARE L'ONDA PIANA CON IMPULSO DEFINITA,
ABBIAMO SEMPRE UNA GAUSSIANA STRETTISSIMA,
MA CHE NON È LA δ .

QUESTA COSA PERÒ È IL MODO ANCHE PER
PREPARARE UNO STATO MISTO COME
VOGLIO IO

$$\text{PRENDI } |\psi\rangle = \sum_k c_k |a_k\rangle$$

MISURO TUTTE LE OSSERVABILI DELLO SCOC
E AL POSTO DI TENERE QUELLI
CORRISPONDENTI AD UN AUTOVALORE, LI
TENGO TUTTI. COSÌ PREPARIAMO UNO STATO
MISTO CHE CONTIENE TUTTI GLI STATI
POSSIBILI DELLO SCOC CON DELLE PROBABILITÀ
CLASSICHE FISSATE. VEDIAMOLE

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\text{GUARDO } a_i]{A} |\psi'\rangle = \frac{P_{a_i} |\psi\rangle}{\|P_{a_i} |\psi\rangle\|} = \frac{c_i |a_i\rangle}{|c_i|} = e^{i\varphi} |a_i\rangle$$

$$\text{MA } |\psi'\rangle = e^{i\varphi} |a_i\rangle \sim |a_i\rangle$$

LO FACCIO CON TANTI STATI E OTTENERÒ
TUTTI I POSSIBILI a_i CON UNA PROBABILITÀ $|c_i|^2$.
SE LI TENGO TUTTI, AVRÒ

$$\rho = \sum_i |c_i|^2 |a_i\rangle\langle a_i|$$

NOTA

IL FATTO DI FARE LA MISURA MI DISTRUGGE
LA COERENZA QUANTISTICA DEGLI $|a_i\rangle$
NELLO STATO PURO INIZIALE.

risultato della sua propria misura dello spin prima di farla; ma questo succede solo se A gli fa una telefonatina per dirgli il risultato della sua misura, o almeno per dirgli che l'ha effettuata (in tal caso B con la sua misura sa anche quale risultato aveva ottenuto A).

Altrimenti una serie di misure su positroni, tutti nello stato (2.5.63), dà come risultato $\pm \hbar/2$ in modo casuale con probabilità $1/2$ per entrambi i casi, indipendentemente dal fatto se A abbia o no effettuato la misura; quindi B non ha modo di sapere se A abbia o no misurato lo spin; non si trasmette quindi alcuna informazione dall'osservatore A all'osservatore B e viceversa.

2.7 Postulato 3: Il postulato dell'evoluzione temporale

Il ruolo del tempo è lo stesso in meccanica classica e in meccanica quantistica non relativistica, è sempre il tempo di Newton che scorre imperturbabile. **Il tempo non è un'osservabile**, ma è un parametro di cui sono funzione le quantità fisiche.

In meccanica classica esistono variabili dinamiche $F(q, p)$ che non dipendono esplicitamente dal tempo, per le quali l'evoluzione temporale è tutta dinamica e segue dalle leggi del moto $q = q(t)$, $p = p(t)$, e variabili dinamiche $F(q, p, t)$ che dipendono esplicitamente dal tempo. In generale si ha:

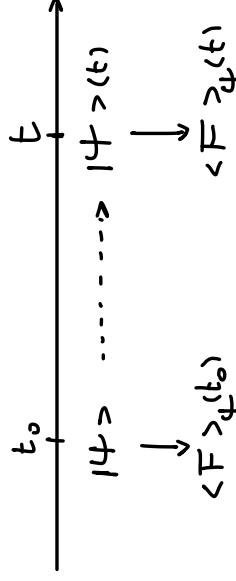
$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}_{PP} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.7.1)$$

In meccanica quantistica le variabili dinamiche sono sostituite dalle osservabili e lo stato di un sistema è descritto da un raggio dello spazio di Hilbert. Tuttavia, né le osservabili, né i vettori di $\mathcal{H}$ hanno senso fisico in se stessi. Ciò che ha senso fisico sono gli elementi di matrice, e, in particolare, i valori medi delle osservabili, perciò solo di questi è possibile dare in modo non ambiguo l'evoluzione temporale.

Si supponga dunque di avere un certo numero di sistemi identici, governati dall'Hamiltoniana H , i quali, al tempo t_0 , si trovino tutti in un certo stato $|\psi\rangle$ e di misurare su tale insieme, in quell'istante, il valor medio di un'osservabile F . Si otterrà un certo valore:

$$\langle F \rangle_\psi(t_0) = \langle \psi | F | \psi \rangle \quad (2.7.2)$$

Un altro insieme di sistemi identici ai precedenti, che si trovano anch'essi nello stato $|\psi\rangle$ al tempo t_0 , viene lasciato evolvere per un certo tempo, dopo di che su di esso viene misurato valor medio di F , al tempo $t \geq t_0$. Quale sarà il risultato della misura?



IL TH. DI HERENFEST MI DICE CIRCA LA STESSA COSA MA CON $\{, \}$ $\rightarrow \dot{\frac{1}{\hbar}}[,]$ E L'EVOLUZIONE TEMPORALE DEGLI UNI NON IMPLICA L'EVOLUZIONE TEMPORALE DEGLI ALTRI

La meccanica quantistica viene in risposta a questa domanda con il postulato dell'evoluzione temporale. Definito l'operatore $U(t, t_0)$, detto operatore di evoluzione temporale, come la soluzione dell'equazione differenziale:

$$i\hbar \frac{dU}{dt} = H(t)U(t, t_0) \quad (2.7.3)$$

che soddisfa la condizione iniziale:

$$U(t_0, t_0) = \mathbb{1}, \quad (2.7.4)$$

si postula che l'evoluzione temporale del valor medio di un'osservabile sia data da²³:

$$\langle F \rangle_\psi(t) = \langle \psi | U^\dagger(t, t_0) F U(t, t_0) | \psi \rangle. \quad (2.7.5)$$

Per verificare che **l'operatore di evoluzione temporale U è unitario** per ogni Hamiltoniana hermitiana, si considerino l'equazione (2.7.3) e la sua coniugata hermitiana:

$$i\hbar \frac{dU^\dagger}{dt} = -U^\dagger(t)H^\dagger(t) \quad (2.7.6)$$

usandole entrambe è facile vedere che:

$$i\hbar \frac{d}{dt}(U^\dagger U) = i\hbar \left(U^\dagger \frac{dU}{dt} + \frac{dU^\dagger}{dt} U \right) = i\hbar U^\dagger (H - H^\dagger) U \quad (2.7.7)$$

Se e solo se $H = H^\dagger$, condizione soddisfatta da tutte le Hamiltoniane fisiche²⁴, e tenendo conto della condizione al contorno $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$, si ha:

$$i\hbar \frac{d}{dt}(U^\dagger U) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = \mathbb{1}, \quad \forall t; \quad (2.7.8)$$

In modo strettamente analogo si dimostra che vale anche:

$$U(t, t_0)U^\dagger(t, t_0) = \mathbb{1}, \quad \forall t.$$

2.7.1 Schemi di Schrödinger e di Heisenberg

Stabilito che le quantità fisiche sono solo gli elementi di matrice, e dunque l'unica relazione non ambigua è la (2.7.5), storicamente si è cercato di andare

²³Per semplicità, per il momento consideriamo solo osservabili che non dipendono esplicitamente dal tempo; altrimenti nel II membro della (2.7.5) dovremmo scrivere $F(t)$, dove la dipendenza da t è però solo quella esplicita.

²⁴anche se talvolta si usano hamiltoniane non hermitiane, ma solo per descrivere fenomeni di assorbimento, in cui non si conserva il numero di particelle e quindi nemmeno la probabilità; in tal caso l'evoluzione temporale non conserva la norma degli stati fisici.

NOTA CHE t_0 È FISICATO DAL SP, LA VARIABILE È LA t

→ EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER

oltre e di descrivere l'evoluzione temporale di un sistema come evoluzione dei suoi stati o delle sue osservabili, creando due schemi interpretativi, a seconda se nella (2.7.5) l'operatore $U(t, t_0)$ si fa agire sugli stati o sull'osservabile.

Uno è il cosiddetto ***schema*²⁵ di Schrödinger**, nel quale **l'evoluzione temporale del sistema diventa evoluzione temporale dei suoi stati**. Vale a dire che il sistema, che al tempo t_0 si trovava nello stato $|\psi\rangle$, al tempo t si trova nello stato²⁶:

$$|\psi(t)\rangle_S \triangleq U(t, t_0) |\psi\rangle; \quad \Rightarrow {}_S \langle \psi(t) | = {}_S \langle \psi | U^\dagger(t, t_0) \quad (2.7.9)$$

L'unitarietà di $U(t, t_0)$ implica che la norma dei vettori dello spazio di Hilbert che rappresentano stati fisici si conservi nel tempo, la qual cosa è a sua volta necessaria affinché le probabilità quantistiche siano correttamente normalizzate ad 1 in ogni istante:

$${}_S \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle_S = \langle \psi | U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle. \quad (2.7.10)$$

Viceversa, in questo schema, **le osservabili non dipendono dal tempo**²⁷:

$$F_S(t) \triangleq F = \text{const} \quad (2.7.11)$$

e si può riscrivere la (2.7.5) come:

$$\langle F \rangle_\psi(t) = {}_S \langle \psi(t) | F | \psi(t) \rangle_S \quad (2.7.12)$$

Secondo lo schema di Schrödinger, mentre il tempo scorre, il sistema passa di stato in stato, e si ottiene il valor medio all'istante t di un'osservabile, eterna e immutabile, prendendone l'elemento di matrice nello stato del sistema corrispondente all'istante t .

In questo schema **l'operatore densità ρ dipende dal tempo**:

ANCHE SE È UN OPERATORE

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= \sum_\alpha w_\alpha |\psi_\alpha(t)\rangle_S \langle \psi_\alpha(t)| = \\ &= \sum_\alpha w_\alpha U(t, t_0) |\psi_\alpha(t_0)\rangle_S \langle \psi_\alpha(t_0)| U^\dagger(t, t_0) = \\ &= U(t, t_0) \rho_S(t_0) U^\dagger(t, t_0). \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

²⁵Per tradizione si è soliti usare al posto di "schema" il termine "rappresentazione", il quale però crea confusione con il concetto di rappresentazione come intesa nella teoria dei gruppi. Per questo in questa trattazione si è preferito usare il termine schema.

²⁶Siccome $U(t_0, t_0) = \mathbb{I}$ si ha, in particolare, $|\psi(t_0)\rangle_S = |\psi\rangle$.

²⁷a parte un'eventuale dipendenza esplicita, e allora nel II membro della (2.7.11) e della (2.7.12) bisogna scrivere $F(t)$.

MA NON INTUITIVA
MA SI VEDE
MEGLIO IL
PARALLELISMO
CON LA
MECCANICA
CLASSICA

PERCHÉ LO SCHEMA S' SCHRODINGER NON
FA DIFFERENZA TRA STATI ED OPERATORI
LUI FA EVOLVERE NEL TEMPO LE COSE
MA RAPPRESENTA NO ENTITÀ FISICHE (STATI E
CHE MATRICE DENSITÀ), MENTRE NON
ENTITÀ MISURABILI (OPERATORI).

Attenzione: ρ è un operatore, ma nello schema di Schrödinger dipende dal tempo perché rappresenta lo stato del sistema, non un'osservabile fisica.

L'altra scelta possibile è lo *schema di Heisenberg*, nel quale lo stato del sistema non dipende dal tempo:

$$|\psi(t)\rangle_H \triangleq |\psi\rangle = \text{const}; \quad (2.7.14)$$

mentre l'evoluzione temporale del sistema diventa evoluzione temporale delle sue osservabili.

$$F_H(t) \triangleq U^\dagger(t, t_0) F U(t, t_0) \quad (2.7.15)$$

In questo schema si riscrive la (2.7.5) come:

$$\langle F \rangle_\psi(t) = \langle \psi | F_H(t) | \psi \rangle \quad (2.7.16)$$

In questo schema **l'operatore densità è indipendente dal tempo**, perché tali sono gli stati con cui è costruito:

$$\rho_H(t) = \rho_H(t_0). \quad (2.7.17)$$

Quindi anche se ρ è un operatore, nello schema di Heisenberg non evolve con il tempo perché rappresenta lo stato del sistema, non un'osservabile fisica.

Nello schema di Heisenberg il sistema si trova sempre nello stesso stato, nel senso che lo stato contiene in sé tutta la storia del sistema, ed è l'osservabile, calcolata ad un certo istante t , che va ad estrarre dallo stato del sistema l'informazione necessaria per costruire il proprio valor medio nell'istante t . Si tratta di uno schema decisamente meno intuitivo di quello di Schrödinger, ma esso è più comodo descrivere anche osservabili che dipendono esplicitamente dal tempo, basta scrivere:

$$F_H(t) \triangleq U^\dagger(t, t_0) F(t) U(t, t_0). \quad (2.7.18)$$

Finora si è parlato in modo generico degli stati di un sistema. Tuttavia, di solito, nei problemi pratici non si ha a che fare con vettori astratti dello spazio di Hilbert. Normalmente si incontrano stati concreti, costruiti come autostati di qualche insieme di osservabili. Questi stati concreti sono descritti in modo diverso nei due schemi, di Schrödinger e di Heisenberg.

Nello schema di Schrödinger l'osservabile è indipendente dal tempo,²⁸ quindi i suoi autostati sono sempre gli stessi, in ogni istante:

$$F_S |\alpha\rangle = f_\alpha |\alpha\rangle \quad (2.7.19)$$

²⁸escluso ovviamente il caso in cui dipenda esplicitamente dal tempo.

NOTA L'OPERATORE NON EVOLVE E QUINDI L'EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI DEVE MANERRE LA STESSA

$$A|\alpha_i\rangle = \lambda_i |\alpha_i\rangle$$

MA GLI AUTOSTATI NON EVOLVONO. MA SE UN GENERICO STATO EVOLVE PERCHÉ EVOLVONO I SUOI COEFFICIENTI, SI

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\alpha_k\rangle \longrightarrow |\psi(t)\rangle = \sum_k c_k(t) |\alpha_k\rangle$$

Ma lo schema di Schrödinger non vuole forse stati dipendenti dal tempo? Bisogna essere precisi: la dipendenza degli stati dal tempo riguarda la descrizione dell'evoluzione temporale di un sistema. Un sistema, che al tempo t_0 si trovava nello stato $|\alpha\rangle$, al tempo t si viene a trovare nello stato:

$$|\alpha(t)\rangle_S = U(t, t_0) |\alpha\rangle \quad (2.7.20)$$

mentre, in ogni istante, gli autostati di F_S sono sempre i vettori $|\alpha\rangle$. È il sistema che, per $t > t_0$, non si trova più in un autostato di F_S ²⁹, ma nello stato $|\alpha(t)\rangle_S$.

- Viceversa, **nello schema di Heisenberg**, le osservabili dipendono dal tempo, perciò in ogni istante hanno un insieme di autovettori diversi da quelli dell'istante precedente³⁰.

VEDI
PAGINA
PRIMA
→

$$F_H(t) |\alpha; t\rangle = f_\alpha |\alpha; t\rangle \quad (2.7.21)$$

pur rimanendo gli autovalori sempre gli stessi.

In questo schema lo stato di un sistema non dipende dal tempo, nel senso che un sistema che al tempo t_0 viene messo nell'autostato $|\alpha; t_0\rangle$ di $F_H(t_0)$, al tempo t si trova sempre nello stato $|\alpha; t_0\rangle$, il quale però non è più autostato di $F_H(t)$, cioè dell'osservabile calcolata all'istante t .

Non è difficile collegare gli stati $|\alpha; t\rangle$ agli stati $|\alpha; t_0\rangle$: **EVOLUZIONE TEMPORALE** 

$$F_H(t) |\alpha; t\rangle = U^\dagger(t, t_0) F_H(t_0) U(t, t_0) |\alpha; t\rangle = f_\alpha |\alpha; t\rangle \quad (2.7.22)$$

Moltiplicando da sinistra gli ultimi due membri per $U(t, t_0)$ si ha:

$$F_H(t_0) U(t, t_0) |\alpha; t\rangle = f_\alpha U(t, t_0) |\alpha; t\rangle \quad (2.7.23)$$

quindi $U(t, t_0) |\alpha; t\rangle$ appartiene all'autospazio di $F_H(t_0)$ di autovalore f_α , ed è possibile risolvere l'eventuale degenerazione dello spettro di F in modo che si abbia:

$$|\alpha; t_0\rangle = U(t, t_0) |\alpha; t\rangle; \quad |\alpha; t\rangle = U^\dagger(t, t_0) |\alpha; t_0\rangle. \quad (2.7.24)$$

SALTA

Siccome gli schemi di Heisenberg e di Schrödinger sono solo schemi interpretativi, essi devono portare agli stessi risultati quando si viene agli elementi di matrice.

Si supponga ad esempio di mettere, al tempo t_0 , un sistema in un certo stato $|\psi\rangle$, e di misurare F al tempo t . Quale sarà la probabilità di ottenere un certo valore f_α ?

Secondo lo schema di Schrödinger si deve far evolvere lo stato del sistema da $|\psi\rangle$ a $|\psi(t)\rangle$, proiettare su $|\alpha\rangle$ e prendere il modulo quadro³¹:

$$P_\psi(f_\alpha, t) = |\langle \alpha | \psi(t) \rangle_S|^2 = |\langle \alpha | U(t, t_0) | \psi \rangle|^2 \quad (2.7.25)$$

²⁹Nel caso generico in cui F non sia una costante del moto, altrimenti vedi il paragrafo successivo.

³⁰Sempre se l'osservabile non è una costante del moto.

³¹Si suppone che non vi sia degenerazione nello spettro di F .

ALTRA  **MODO:** $\overline{F}_H(t_0) |\alpha, t_0\rangle = \lambda_\alpha |\alpha, t_0\rangle$ **MOLTIPLICANDO A SINISTRA PER** $U^\dagger(t, t_0)$ **E METTO TRA** $\overline{F}_H(t_0)$ **E** $|\alpha, t_0\rangle$

$$11 = U(t, t_0) U^\dagger(t, t_0) \quad \text{così:}$$

$$U^\dagger(t, t_0) \overline{F}_H(t_0) U(t, t_0) U^\dagger(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle = \lambda_\alpha U^\dagger(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle$$

$$\Rightarrow \overline{F}_H(t) U^\dagger(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle = \lambda_\alpha U^\dagger(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle \quad \text{quindi} \quad |\alpha, t\rangle = U^\dagger(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle$$

Secondo lo schema di Heisenberg si deve proiettare lo stato $|\psi\rangle$ del sistema sull'autostato $|\alpha; t\rangle$ di $F_H(t)$ e prendere il modulo quadro.

$$P_\psi(f_\alpha, t) = |\langle \alpha; t | \psi \rangle|^2 = |\langle \alpha | U(t, t_0) | \psi \rangle|^2 \quad (2.7.26)$$

Come si vede si giunge alle stesse conclusioni. Quindi per quanto riguarda le quantità fisiche si può anche fare a meno dei due schemi. Più in generale, anche in presenza di degenerazione, detto $\mathcal{P}_{f_\alpha}$ il proiettore sull'autospazio di F di autovalore f_α si ha:

$$P_\psi(f_\alpha, t) = \langle \mathcal{P}_{f_\alpha} \rangle_\psi(t) = \langle \psi | U^\dagger(t, t_0) \mathcal{P}_{f_\alpha} U(t, t_0) | \psi \rangle. \quad (2.7.27)$$

Se non c'è degenerazione ci si riduce al caso precedente; si ha:

$$\mathcal{P}_{f_\alpha} = |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (2.7.28)$$

e quindi:

$$P_\psi(f_\alpha, t) = \langle \psi | U^\dagger(t, t_0) |\alpha\rangle \langle \alpha| U(t, t_0) | \psi \rangle = |\langle \alpha | U(t, t_0) | \psi \rangle|^2 \quad (2.7.29)$$

2.7.2 Hamiltoniana indipendente dal tempo

Se l'Hamiltoniana che governa il sistema non dipende dal tempo l'equazione differenziale che definisce $U(t, t_0)$ può essere risolta esplicitamente, ed ha per soluzione:

$$U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar} \triangleq U(t - t_0) \quad (2.7.30)$$

In tal caso, indipendentemente dallo schema usato ma usando solo l'eq. (2.7.5), si vede subito che il valor medio di un'osservabile F in uno stato $|\psi\rangle$ è costante nel tempo nei seguenti casi, non esclusivi fra loro (c'è un *vel...vel*, non un *aut...aut*):

- $\forall |\psi\rangle$, se l'osservabile F è una costante del moto, nel qual caso si ha:
 $[F, H] = 0 \Rightarrow [F, U] = 0 \Rightarrow U^\dagger F U = F U^\dagger U = F \quad (2.7.31)$

PERCHÉ COMUTA
CON TUTTE LE SUE
FUNZIONI
- $\forall F$, se lo stato $|\psi\rangle$ è uno stato stazionario, cioè un autostato della Hamiltoniana, nel qual caso si ha, ponendo $t_0 = 0$ per comodità:

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle \Rightarrow \begin{cases} U(t) |\psi\rangle = e^{-iEt/\hbar} |\psi\rangle \\ \langle \psi | U^\dagger(t) = e^{iEt/\hbar} \langle \psi | \end{cases} \quad (2.7.33)$$

È UNA COSA IMPORTANTE PERCHÉ POSSO DIRE DI CONOSCERE BENE IL SISTEMA SE CONOSCO H E POSSO RICAVARE U, OPPURE CONOSCENDO U E RICAVO H. COSÌ COME DICEVAMO IN MC CHE SE $\{F, H\} = 0$ CON $\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dF}{dt} = 0$

NOTA

ESPLICITATA $\langle F \rangle(t)$
E SI VEDE
BENE

NOTA L'exp di un operatore vuole dire che è definito come serie di potenze, ossia:

$$U = \sum_{k \geq 0} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \frac{(-i)^k}{\hbar^k} H^k$$

anche nel caso $H = H(t)$, ma in diversi tempi le hamiltoniane commutano $[H(t_1), H(t_2)] = 0$ allora ottengo una definizione simile

$$U \doteq \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(t) dt \right\}$$

ma in realtà anche se $[H(t_1), H(t_2)] \neq 0$ posso dare una definizione analoga, ma devo usare un path order esponenziale

$$U \doteq P \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H dt \right\}$$

il che vuol dire che i termini che vengono dopo cominciano quando finiscono quelli prima e non sono indipendenti

$$\int_{t_0}^t H(t_1) dt, \int_{t_0}^{t_1} H(t_2) dt, \int_{t_0}^{t_2} H(t_3) dt \dots$$

ci interesso solo a $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

* POTREI SCRIVERLO SEMPlicEMENTE COME:
 $\langle F \rangle_\rho = \text{Tr}(F \rho(t)) = \text{Tr}(F U \rho U^\dagger) = \text{Tr}(U^\dagger F U \rho) = \text{Tr}(F U^\dagger U \rho)$
 uso l'ERRETICITÀ della TR
 $= \text{Tr}(F \rho) \quad \checkmark \quad [F, U] = 0$

2.7 - Postulato 3: Il postulato dell'evoluzione temporale

61

e le fasi che contengono la dipendenza temporale si cancellano nel calcolare $\langle F \rangle_\psi$, per qualsiasi F .

Discorso strettamente analogo si può fare quando il sistema si trova in uno **stato misto**. Dall'espressione (2.5.22) per il valor medio di un'osservabile F per uno stato descritto dall'operatore densità ρ :

$$\langle F \rangle_\rho = \text{Tr}(F \rho) \tag{2.7.34}$$

e dall'evoluzione temporale dell'operatore densità nello schema di Schrödinger (vedi eq. 2.7.13) con Hamiltoniana indipendente dal tempo:

$$\rho_S(t) = e^{-iHt/\hbar} \rho_S(0) e^{iHt/\hbar}, \tag{2.7.35}$$

segue per l'evoluzione temporale del valor medio dell'osservabile F :

$$\langle F \rangle_\rho(t) = \text{Tr}(F e^{-iHt/\hbar} \rho e^{iHt/\hbar}) = \text{Tr}(e^{iHt/\hbar} F e^{-iHt/\hbar} \rho); \tag{2.7.36}$$

*

si è scritto l'ultimo membro per mostrare anche lo schema di Heisenberg, con evoluzione temporale dell'osservabile F e operatore densità costante nel tempo.

Quindi il valor medio dell'osservabile F é costante **sia** quando l'osservabile F commuta con l'Hamiltoniana (F é **costante del moto**), **sia** quando é l'operatore densità ρ a commutare³² con H (ρ rappresenta uno **stato stazionario**); in entrambi i casi (che anche qui non sono affatto mutuamente esclusivi: ci vuole un “vel ... vel”, non un “aut ... aut”) gli esponenziali contenenti H si cancellano fra loro.

L'operatore densità di uno **stato stazionario**, in generale misto, potrà quindi essere diagonalizzato contemporaneamente all'Hamiltoniana e sviluppato in una combinazione lineare di proiettori su autospazi dell'Hamiltoniana stessa.

In pratica, nella rappresentazione di Schrödinger, **il modo più conveniente** per determinare effettivamente l'evoluzione temporale di uno stato puro non stazionario, è di scomporlo in autostati dell'Hamiltoniana:

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_i c_i |E_i\rangle; \quad H |E_i\rangle = E_i |E_i\rangle; \tag{2.7.37}$$

COSÌ USARE SO $U(t, t_0)$

allora si ha:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= U(t - t_0) |\psi(t_0)\rangle = e^{-iH(t-t_0)/\hbar} \sum_i c_i |E_i\rangle = \\
 &= \sum_i c_i e^{-iE_i(t-t_0)/\hbar} |E_i\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.7.38}$$

³²Vale infatti la seguente successione di doppie implicazioni: $U \rho U^{-1} = \rho \Leftrightarrow U \rho = \rho U \Leftrightarrow [U, \rho] = 0 \Leftrightarrow [H, \rho] = 0$.

DA QUI VEDI QUELLO DETTO
 NELLA NOTA IN CUI VEDAVAMO
 L'EVOLUZIONE TEMPORALE DEI
 COEFFICIENTI DI FOURIER DI
 UNO STATO.

Conviene poi mettere in evidenza una irrilevante *fase over all*; quindi le fasi relative, che sono le uniche significative, dipendono solo dalle differenze di energia fra i livelli (come ci si poteva aspettare, visto che le energie sono definite a meno di una costante, che di solito si fissa richiedendo che il potenziale vada a zero all'infinito, ma che a priori è arbitraria).

SALTA

Per uno stato **misto** non stazionario, lo stesso lavoro andrà fatto per ciascuno dei ket e dei bra che compaiono nello sviluppo dell'operatore densità ρ (vedi eq. 2.5.23).

A tal fine, se ρ è dato come matrice, bisognerà diagonalizzarla e trovarne autovalori e autovettori; ciascuno di questi dovrà poi essere sviluppato nella base degli autovettori dell'Hamiltoniana.

Equivalentemente, si dovrà scrivere l'operatore densità ρ mediante la sua rappresentazione matriciale nella base energia:

$$\rho(t_0) = \sum_{i,j} |E_i\rangle \rho_{i,j} \langle E_j|, \quad \text{con} \quad \rho_{i,j} = \langle E_i | \rho(t_0) | E_j \rangle, \quad (2.7.39)$$

e quindi, al tempo $t \geq t_0$:

$$\rho(t) = \sum_{i,j} e^{-i(E_i - E_j)(t - t_0)/\hbar} |E_i\rangle \rho_{i,j} \langle E_j|. \quad (2.7.40)$$

Notare che, come sempre, l'operatore densità è automaticamente libero da irrilevanti *fasi over all*.

~~2.7.3 Un esercizio riassuntivo~~

Per applicare quanto discusso in questo capitolo ad un esempio concreto, proponiamo il testo di uno scritto di esame, anche se di significato fisico non particolarmente rilevante.

Esercizio

La dinamica di un sistema formato da un protone e da un neutrone sia descritta dall'Hamiltoniana

$$H = \mu \vec{S}^{(p)} \cdot \vec{S}^{(n)},$$

dove $\vec{S}^{(p)}$ e $\vec{S}^{(n)}$ sono gli operatori di spin del protone e del neutrone.

All'istante $t_0 = 0$ il sistema si trovi nello stato di singoletto di spin, cioè con spin totale $\vec{S}^T = \vec{S}^{(p)} + \vec{S}^{(n)}$ nullo.