

EQUAZIONE ASSOCIATA DI LEGENDRE

POSSIAMO STUDIARE UNA POSSIBILE APPLICAZIONE DELLE FUNZIONI IPERGEOMETRICHE.

ABBIAMO VISTO CHE LA SOLUZIONE DI UNA QUALUNQUE EQ. DIFFERENZIALE CON 3 P.TI FUCHSIANI SI PUÒ SCRIVERE IN TERMINI DI FUNZIONI IPERGEOMETRICHE.

QUESTO È VERO ANCHE PER L'EQUAZIONE ASSOCIATA DI LEGENDRE

$$(1-z^2)u'' - 2zu' + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2} \right] u = 0$$

①

NOTA $\mu=0 \rightarrow$ EQ. DI LEGENDRE DI METODI 1

L'EQUAZIONE ① È QUELLA CHE VIENE FUORI NELLO STUDIO DELLE AUTOFUNZIONI DI L^2 IN HQ , (IN QUEL CASO $z = \cos \theta$ E $\mu =$ AUTOVALE DI L_z)

NO. CERCHIAMO DI RISOLVERE L'EQUAZIONE IN GENERALE
E VEDIAMO COME SCRIVERE LE SOLUZIONI IN
TERMINI DI FUNZIONI ASSOCIATE DI LEGENDRE
CHE SI POSSONO SCRIVERE IN TERMINI DI
IPERGEOMETRICHE.

VOGLIAMO SCRIVERE P .

$$P(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)}$$

$$Q(z) = \frac{-\nu(\nu+1)}{(z-1)(z+1)} - \frac{\mu^2}{(z-1)^2(z+1)^2}$$

È IMMEDIATO VEDERE DA P E Q CHE HO 3
PUNTI SINGOLARI (FUCHSIANI)

$$z = \pm 1, \quad z = \infty$$

P  POLO SEMPLICE
 Q POLO DOPPIO

$$P \sim \frac{z}{z}$$

Q NON SOLO $\frac{1}{z^4}$

CERCHIAMO GLI ESPONENTI DEI VARI PUNTI

$$z=1) \quad p_0 = 1 \quad q_0 = -\frac{\mu^2}{4} \quad f^2 - \frac{\mu^2}{4} = 0 \quad \alpha = \frac{\mu}{2} \quad \beta = -\frac{\mu}{2}$$

$z=-1$) STESSA COSA PER SIMMETRIA

$$z=\infty) \quad p_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} z P(z) = \nu \quad q_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 Q(z) = -\nu(\nu+1)$$

$$f^2 - f - \nu(\nu+1) = 0$$

$$(f - \nu - 1)(f + \nu) = 0$$

$$\alpha = \nu + 1$$

$$\beta = -\nu$$

QUINDI

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} -1 & 1 & \infty \\ \mu/2 & \mu/2 & \nu+1 \\ -\mu/2 & -\mu/2 & -\nu \end{array} \right. z \}$$

DEVO RICONDURRE AL PUNTO UN'IPERGEOMETRICA

$$w = \frac{1-z}{z}$$

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \mu/2 & \mu/2 & \nu+1 \\ -\mu/2 & -\mu/2 & -\nu \end{Bmatrix} \frac{1-z}{z}$$

DEVO AZZERARE DEGLI INDICI METTENDO IN EVIDENZA
 DEI FATTORI (GRAZIE AL FATTO CHE GLI INDICI
 SIANO UGUALI, RIESCO AD AZZERARNE DUE IN UN
 COLPO SOLO)

$$\underbrace{\left(\frac{1-z}{z}\right)^{-\mu/2} \left(1 - \frac{1-z}{z}\right)^{\mu/2}}_{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\mu/2}} P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \mu & 0 & \nu+1 \\ 0 & -\mu & -\nu \end{Bmatrix} \frac{1-z}{z}$$

QUINDI TROVO LA PRIMA SOLUZIONE DI 1

$$u_1 = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\mu/2} F(\nu+1, -\nu, 1-\mu, \frac{1-z}{z})$$

QUELLO CHE SI CHIAMA FUNZIONE ASSOCIATA DI LEGENDRE DI 1° SPECIE È

$$P_{\nu}^{\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\mu/2} F(\nu+1, -\nu, 1-\mu, \frac{1-z}{2})$$

METTIAMO QUESTO POICHÉ F
 SAPPIAMO CONTIENE A NUMERATORE
 $\Gamma(c) = \Gamma(1-\mu)$ E NORMALIZZANDO
 LA FUNZIONE SI PERMETTE DI
 DEFINIRE P_{ν}^{μ} ANCHE QUANDO $\mu \in \mathbb{Z}$

P_{ν}^{μ} DEFINITA ANCHE PER $1-\mu \in \mathbb{Z}$

CONOSCENDO F LA RELAZIONE DI AUTOTRASFORMAZIONE
 DELLE P_{ν}^{μ} ESISTE UN ALTRO MODO PER
 SCRIVERE

so $F(a, b, c, z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-b, c-a, c, z)$

così

$$P_{\nu}^{\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\mu/2} \left(1 - \frac{1-z}{2} \right)^{1-\mu-\cancel{\nu}-1+\cancel{\nu}} F(1+\nu-\mu, -\mu-\nu, 1-\mu, \frac{1-z}{2})$$

$$= \frac{z^\mu}{\Gamma(1-\mu)} (1-z^2)^{-\mu/2} F(1+\nu-\mu, -\mu-\nu, 1-\mu, \frac{1-z}{2})$$

1.2

ORA VORREI $\mu_2 \rightarrow \mu_1$ VA COME $(1-z)^{-\mu/2}$
 QUINDI L'ALTRA ANDRA COME $(1-z)^{\mu/2}$

$\Rightarrow$ L'ALTRA SOL LA TROVO METTENDO IN EVIDENZA
 FATTORI OPPOSTI

$$\underbrace{\left(\frac{1-z}{2}\right)^{\mu/2} \left(1 - \frac{1-z}{2}\right)^{\mu/2}}_{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\mu/2}} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & \mu & \nu+1 \\ -\mu & 0 & -\nu \end{array} \right\} \frac{1-z}{2}$$

QUINDI

$$\mu_2 = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\mu/2} F(\nu+1, -\nu, 1+\mu, \frac{1-z}{2})$$

QUINDI NORMALIZZANDO COME HO FATTO PER μ ,

$$\mu_2 = \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^{\mu/2} F(\nu+1, -\nu, 1+\mu, \frac{1-z}{z}) \frac{1}{\Gamma(1+\mu)}$$

SI VEDE

$$\mu_2 = P_{\nu}^{-\mu}(z)$$

QUINDI $P_{\nu}^{\mu}(z)$ E $P_{\nu}^{-\mu}(z)$ SONO LE 2 SOLUZIONI
LINEARMENTE INDIPENDENTI SE $\mu \notin \mathbb{Z}$

OSS COMPARENDO μ^2 NELL'EQUAZIONE SE C'È LA SOL.
CON L'INDICE μ ALLORA ESISTE ANCHE LA
SOLUZIONE CON $-\mu$

VEDIAMO COSA SUCCEDDE SE $\mu = m \in \mathbb{Z}$.

AURO' $P_{\sim}^m(z) \propto P_{\sim}^{-m}(z)$ POICHÈ SO NON ESSERE
LINEARMENTE INDIPENDENTI.

RICORDA PARLANDO DELL'IPERGEOMETRICA AVEVAMO MOSTRATO
CHE SE $c \in \mathbb{Z}$ UNA DELLE 2 F NON
ERA DEFINITA POICHÈ C'ERA QUEL FATTORE
 Γ CHE ESPLODEVA, MA SE DIVIDO LE F
DEL LA Γ CHE DIVERGE TROVO UNA RELAZIONE
TRA μ_1 E μ_2

$$c = -N, \quad N > 0$$

$$\frac{1}{\Gamma(-N)} F(a, b, -N, z) = \frac{\Gamma(a+N+1) \Gamma(b+N+1)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} z^{N+1} \frac{1}{\Gamma(N+2)} F(a+N+1, b+N+1, z+N, z)$$

RELAZIONE VALIDA IN GENERALE POICHÈ MI DICE
CHE UNA SOLUZIONE (QUELLA A SX) DIVISA PER
IL FATTORE CHE LA FAREBBE DIVERGERE È
UGUALE ALL'ALTRA SOLUZIONE, DIVISA LA SUA Γ
CHE DIVERGE, PER UN FATTORE E UNA
POTENZA DI z .

MA SE PRENDO IL FATTORE E LA POTENZA

DI z , LA RIBALTO E LA PORTO DALL'ALTRA
 PARTE ALLORA TROVO UNA RELAZIONE
 VALIDA NEL CASO $C = z + N$, $N < -1$

QUINDI QUELLA RELAZIONE È VALIDA PER N
 GENERICO E IN BASE A QUALE $\frac{F}{F}$
 DIVERGE SPOSTO IL FATTORE A O SX

POSSO SCRIVERE LA RELAZIONE PER ADATTARLA AL
 MIO PROBLEMA PER

$$-N = 1 + m$$

$$a = \nu + 1$$

$$b = -\nu$$

$$z \rightarrow \frac{1-z}{z}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+m)} F(\nu+1, -\nu, 1+m, \frac{1-z}{z}) = \frac{\Gamma(\nu+1-m) \Gamma(-\nu-m)}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(-\nu)} \left(\frac{1-z}{z}\right)^{-m}$$

$$\cdot \frac{1}{\Gamma(1-m)} F(\nu+1-m, -\nu-m, 1-m, \frac{1-z}{z})$$

QUINDI SOSTITUENDO $\sim P_{\nu}^{-m}(z)$

$$P_{\nu}^{-m}(z) = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1-z}{z}\right)^{-m} \frac{\Gamma(\nu+1-m)\Gamma(-\nu-m)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)} \frac{1}{\Gamma(1-m)} \cdot F(\nu+1-m, -\nu-m, 1-m, \frac{1-z}{z})$$

SI VEDE FACILE

$$= (\text{QUALCOSA}) z^m (1+z)^{-\frac{m}{2}} (1-z)^{-\frac{m}{2}} \frac{1}{\Gamma(1-m)} F(\dots)$$

$$= (\dots) z^m (1-z^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{1}{\Gamma(1-m)} F(\nu+1-m, -\nu-m, 1-m, \frac{1-z}{z})$$

$$P_{\nu}^m(z)$$

QUINDI VEDO $P_{\nu}^{-m} \propto P_{\nu}^m(z)$

$$P_{\nu}^{-m}(z) = \frac{\Gamma(\nu+1-m)\Gamma(-\nu-m)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)} P_{\nu}^m(z)$$



oss

POSSO
SAPENDO

DISCRIVERE

LA COSTANTE

DI PROPORZIONALITÀ

$$\Gamma(\nu+1) \Gamma(-\nu) = \frac{\pi}{\sin(\pi(\nu+1))}$$

$$\Gamma(\nu+m+1) \Gamma(-\nu-m) = \frac{\pi}{\sin(\pi(\nu+m+1))}$$

NON SONO ESATTAMENTE LE RELAZIONI CHE HO
IN PERÒ POSSO INSERIRE ENTRAMBE DIVIDENDO
PER $\Gamma(\nu+m+1)$

$$\star = \frac{\sin(\pi(\nu+1))}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{\cancel{\pi}}{\sin(\pi(\nu+1+m))} \cdot \frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}$$

$$\text{so } \sin(\alpha + m\pi) = (-1)^m \sin(\alpha)$$

$$= (-1)^m \frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}$$

QUINDI POSSO SCRIVERE

$$P_{\nu}^{-m}(z) = (-1)^m \frac{\Gamma(\nu+1-m)}{\Gamma(\nu+1+m)} P_{\nu}^m(z)$$

(2)

CHE È UNA RELAZIONE MOLTO UTILE POICHÈ POTREI TROVARE UN'ALTRO MODO PER SCRIVERE $P_{\nu}^m(z)$

$$P_{\nu}^m(z) = (-1)^m \frac{\Gamma(\nu+1+m)}{\Gamma(\nu+1-m)} P_{\nu}^{-m}(z)$$

(2.1)

USANDO PER P_{ν}^{-m} (1.2) →

$$= (-1)^m \frac{\Gamma(\nu+1+m)}{\Gamma(\nu+1-m)} \frac{z^m}{\Gamma(1+m)} (1-z^2)^{m/2}.$$

$$\bullet F(\nu+1+m, -\nu+m, 1+m, \frac{1-z}{z})$$

PERÒ FIN'ORA ABBIAMO SOLO DETTO SE CHE $\mu \in \mathbb{Z}$.
SOLUZIONI SONO DIPENDENTI

ESISTE UN'ALTRO MODO PER TROVARE LA μ_2 :

• PARTI DALL'EQ. ORIGINARIA (1)

• FAI $z \rightarrow w = z^2$

NOTA NON È UNA TRASFORMAZIONE CHE SI FA DI SOLITO POICHÈ NON È LINEARE FRATTA E NON È UNA DI QUELLE CHE CONOSCO E DI SONO SICURO RISPETTI LE PROPRIETÀ DI FUCHSIANITÀ O MENO DELLE SINGOLARITÀ SPOSTANDOLE IN GIRO.

PERÒ FACENDO IL CAMBIO IN $\textcircled{1}$ (COSA SEMPRE LECITA) VEDO CHE L'EQ. È ANCORA FUCHSIANA CON 3 SINGOLARITÀ.

• RISOLVI IN TERMINI DI IPERGEOMETRICHE

• SI TROVA $\nearrow$ FORSE $\nu + \frac{3}{2}$ (DA CONTROLLARE)

$$u \sim (w-1)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} + 1, C(\nu), w\right) \sim (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} f(z)$$

CHE È INDIPENDENTE DA μ_1 DATO CHE

$$\mu_1 \sim (z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}$$

LA PARTE INTERESSANTE È CHE μ È OK ANCHE PER $\mu \in \mathbb{Z}$ PROPRIO PERCHÈ IL C È INDIPENDENTE DA μ

TRAMITE μ È POSSIBILE DEFINIRE LE FUNZIONI ASSOCIATE
DI LEGENDRE DI 2° SPECIE $Q_n^\mu(z)$

NOTA GRAZIE ALLA SIMEETRIA $\hookrightarrow$ ① SI POSSONO SCRIVERE
ALTRE SOLUZIONI POICHÈ ① INVARIANTE SE
AD ESEMPIO $z \rightarrow -z$, $\mu \rightarrow -\mu$, $\nu \rightarrow -\nu - 1$ E
TUTTI I P CON QUESTI CAMBIAMENTI
SONO SOLUZIONE.

PROPRIETÀ SOLUZIONI EQ. DI LEGENDRE

IN FISICA LE EQUAZIONI INTERESSANTI SONO QUELLE
CON INDICE INTERO

$$\mu = m e \hbar$$

ABBIAMO DETTO CHE ① SI
STUDIA QUANDO $\mu = \text{AUTOVALORE}$
 $\Delta' \quad L_z$

VEDIAMO QUALCHE PROPRIETÀ DELLE SOLUZIONI DELL'EQ.
DI LEGENDRE

CHIAMO $P_\nu = P_\nu^0$

CALCOLO

$$\frac{d^m P_\nu}{dz^m} = \frac{d^m}{dz^m} F(\nu+1, -\nu, 1, \frac{1-z}{2})$$

USANDO
LA PRIMA
DEF DI $P_\nu^{m=0}$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^m \frac{(\nu+1)_m (-\nu)_m}{(1)_m} F(\nu+1+m, -\nu+m, 1+m, \frac{1-z}{2})$$

$$= (-1)^m z^{-m} \frac{\Gamma(\nu+1+m) \Gamma(-\nu+m)}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(-\nu) m!} F(\nu+1+m, -\nu+m, 1+m, \frac{1-z}{2})$$

USANDO (2.1)

$$= \frac{\Gamma(-\nu+m)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)} P_\nu^m(z) \Gamma(\nu+1-m) (1-z^2)^{-\frac{m}{2}}$$

FACENDO IL
CONTO DELLE Γ

$$= (-1)^m (1-z^2)^{-\frac{m}{2}} P_\nu^m(z)$$

QUINDI,

$$\frac{d^m P_\nu}{dz^m} = (-1)^m (1-z^2)^{-\frac{m}{2}} P_\nu^m(z)$$

$\Rightarrow$

$$P_\nu^m(z) = (-1)^m (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\nu}{dz^m}$$

(3)

E QUESTA È UNA COSA ABBASTANZA IMPORTANTE
PERCHÉ CI DICE CHE BASTA CONOSCERE
LE VERE FUNZIONI DI LEGENDRE (CON $\mu=0$)
(LE SOL DELL'EQUAZIONE DI LEGENDRE) PER RICAVARE
TUTTE LE P_ν^m

OSS MENTRE CERCAVAMO DI RISOLVERE L'EQ. AGLI AUTOVALORI DI L^2 AVEVAMO LE $P_{\sim}^m(z = \cos\theta)$ E QUINDI CON $z \in [-1, 1]$.

PER NOI ± 1 SONO EQUIVALENTI E VORREMO SCRIVERE SOLUZIONI CHE SIANO REGOLARI ANCHE IN ± 1 .

LE FORME CHE ABBIAMO SCRITTO PER LE $P_{\sim}^m$ ERANO TUTTE FUNZIONI DELLA VARIABILE $\frac{1-z}{2}$, QUINDI, LE IPERGEOMETRICHE ERANO BEN DEFINITE IN $z=1$ (POICHÉ $F(0)$), MA SE $z=-1$ ALLORA $F(1)$ E SÌ CHE L'IPERGEOMETRICA HA UNA SINGOLARITÀ DI TIPO $\log$.

QUINDI LA F NON TRATTA IN MODO UGUALE $z=1$ E $z=-1$.

IN PIÙ AVEVAMO FATTORE NELLE ESPRESSIONI DI P DEL TIPO $(1-z^2)$ E A VOLTE ELEVATI A $m/2$.

QUANDO CALCOLIAMO GLI AUTOVALORI DELL'ATOMO DI IDROGENO USIAMO LA (2.1) POICHÉ:

• IL PREFATTORE È SIMMETRICO IN ± 1

$\rightarrow (1-z^2)$

• LA FORMULA 1.2 PER $\mu \in \mathbb{N}$ $(1-z^2)^{-\mu/2}$ VA A ZERO SE $z \rightarrow \pm 1$

QUINDI UNA VOLTA VISTO CHI È $\mu = m$ DOBBIAMO SCEGLIERE UNA TRA 2.1 E 1.2 QUALE DELLE DUE NON DIVERGE SE $z \rightarrow \pm 1$

PERÒ 2.1 SCELTO $m > 0$ NON DA PROBLEMI NÈ IL PEZZO $(1-z^2)^{m/2}$ NÈ L'IPERGEOMETRICA IN $z = 1$, MA SE $z = -1$ HO $F(1)$ E QUINDI PER AVERE UNA FUNZIONE DEFINITA OVUNQUE, È ANCHE IN z , DEVO CHIEDERE CHE LA SERIE DELL'IPERGEOMETRICA SI TRONCHI, CHE SUCCEDERÀ SE UNO TRA $\nu + 1 + m$ E $-\nu + m$ È UN INTERO $\rightarrow$ OVERO QUELLO CHE MI DA LA CONDIZIONE DI QUANTIZZAZIONE DI L

FUNZIONE IPERGEOMETRICA CONFLUENTE

VEDO → COSA CAPITA QUANDO PARTO DALL'EQUAZIONE
IPERGEOMETRICA, PRENDIAMO LA SINGOLARITÀ CHE C'È
IN 1 E CERCO DI SPOSTARLA FINO ALL'∞
FACENDOLA "CONFLUIRE" CON LA SINGOLARITÀ AL
PUNTO ALL'∞.

INTUITIVAMENTE MI ASPETTO CHE IN $z=0$ IL COMPORTAMENTO
DELL'EQUAZIONE È QUINDI DELLE SOLUZIONI
RIMARRÀ REGOLARE, MENTRE SUCCEDERÀ QUALCOSA
ALL'∞.

COMINCIAMO,

STUDIAMO L'EQ. DIFF. CON 3 PUNTI FUCHSIANI $(0, \hat{b}, \infty)$
E POI FACCIAMO $\lim_{\hat{b} \rightarrow \infty}$.

EQ. CON $(0, \hat{b}, \infty)$ LA RICAVO DALL'IPERGEOMETRICA

$$w(1-w) \frac{d^2 u}{dw^2} + [c - (a + b + 1)w] \frac{du}{dw} - abu = 0$$

METTO $w = \frac{1}{\hat{b}} z$, COSÌ $w=1 \Rightarrow z = \hat{b}$

COSÌ AVRO' LE SINGOLARITÀ IN $(0, \hat{b}, \infty)$

$$\frac{du}{dw} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{dw} = \hat{b} u'$$

$$\frac{d^2 u}{dw^2} = \frac{d}{dw} (\hat{b} u') = \hat{b}^2 u''$$

QUINDI OTTENGO L'EQUAZIONE:

$$\frac{z}{\hat{b}} \left(1 - \frac{z}{\hat{b}}\right) \hat{b}^2 u'' + \left[c - (a+b+1) \frac{z}{\hat{b}}\right] \hat{b} u' - ab u = 0$$

MOLTIPLICO PER $\hat{b}$

$$z(\hat{b} - z) u'' + [c\hat{b} - (a+b+1)z] u' - ab u = 0$$

①

QUINDI

$$P(z) = -\frac{c\hat{b}}{z(z-\hat{b})} + \frac{a+b+1}{(z-\hat{b})}$$

$$Q(z) = \frac{ab}{z(z-\hat{b})}$$

QUINDI SI PUÒ VEDERE CHE HO SINGOLARITÀ IN $z=0$
 $z=\hat{b}$ E $z=\infty$ TUTTE FUCHSIANE.

VORREI VEDERE

$$\lim_{\hat{b} \rightarrow \infty} P(z) \quad \text{E} \quad \lim_{\hat{b} \rightarrow \infty} Q(z)$$

(SPOSTO LA SINGOLARITÀ DA $\hat{b}$ E LA FACCI COINCIDERE
CON QUELLA IN ∞)

SUCCEDONO DUE COSE DIVERSE A SECONDA SE RENTRE
 $\hat{b} \rightarrow \infty$ IL RESTO RESTA FINITO OPPURE NO.

CASO ①

CASO ②

CASO ①

VEDO

$$\lim_{\hat{b} \rightarrow \infty} P(z) = \lim_{\hat{b} \rightarrow \infty} \left(-\frac{c\hat{b}}{z(z-\hat{b})} + \frac{z+b+1}{z-\hat{b}} \right) = \frac{c}{z}$$

$$\lim_{\hat{b} \rightarrow \infty} Q(z) = \lim_{\hat{b} \rightarrow \infty} \frac{2b}{z(z-\hat{b})} = 0$$

QUINDI HO L'EQUAZIONE

$$u'' z + c u' = 0$$

CHE È ELEMENTARE, SOL: $\mu = K z^{-c+1}$

MA TROVO QUALCOSA DI NON BANALE SE GUARDO IL
CASO (2) - FACENDO UNA SORTA DI DOPIO LIMITE
PONENDO $\hat{b} =$ AD UN PARAMETRO E POI MANDANDO
A ∞

$$\hat{b} = b \rightarrow \infty$$

ORA, VEDO

$$\lim_{b \rightarrow \infty} P(z) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{cb}{z(z-b)} + \frac{a+b+1}{z-b} \right) = \frac{c}{z} - 1$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} Q(z) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{ab}{z(z-b)} = -\frac{a}{z}$$

QUINDI OTTENDO L'EQUAZIONE CHE OTTENDO, CHE SI
CHIAMA EQUAZIONE | PERGEOMETRICA CONFLUENTE È:

$$z \mu'' + (c - z) \mu' - a \mu = 0$$

(2)

81 VEDI CHE:

- HA SOLO 2 SINGOLARITÀ: $z=0$ REGOLARE
 $z=\infty$ SINGOLARITÀ IRREGOLARE
COME ✓ PREVEDIBILE

- HA $z=0$ REGOLARE, QUINDI VOLENDO POTREI TROVARE SOLUZIONI DELL'EQ. IN SERIE DI POTENZE IN $z=0$

FOILER VALE IL TH DI FUCHS (QUINDI SE TROVO GLI ESPONENTI, IN $z=0$ SO SCRIVERE LA FORMA DELLA SERIE, CHE INSERENDO NELL'EQ MI FA TROVARE LA RELAZIONE DI RICORRENZA E POI LA SOL.)

CERCO GLI ESPONENTI IN $z=0$

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow 0} zP(z) = c$$

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 Q(z) = 0$$

$$g^2 + (c-1)g = 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 1-c \end{array} \right\} = \text{A QUELLI DELL'EQ. IPERGEOMETRICA}$$

NON SORPRENDENTE PERCHÉ
A $z=0$ NON CI HO
FATTO NULLA

SE $1-c \notin \mathbb{Z}$ SO DI AVERE COME SOLUZIONI

$$\mu_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

$$\mu_2 = z^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$$

SE $c \in \mathbb{Z}_+$ ALLORA μ_1 RIMANE LEI E μ_2 CAMBIA
 CON UN TERMINE $\log$, SE $c \in \mathbb{Z}_-$ / $\beta > 0$ ALLORA
 μ_2 RIMANE E μ_1 DEVO METTERE $\log$

PER TROVARE LA SOL POTREI FAR LE DERIVATE, SOSTITUIRE
 ECC. PERÒ POTREI ANCHE TROVARLA FACENDO LO
 STESSO PROCESSO DI LIMITE CHE HO FATTO
 PER TROVARE L'EQUAZIONE.

SCRIVO LE SOL. NELL'EQ. CON 3 P.TI FUCHSIANI CHE AVEVO
 OTTENUTO DALL'IPERGEOMETRICA, NELLA VARIABILE $w \rightarrow z^{\frac{1}{6}}$

SCRIVO
 SOL DI $\textcircled{1}$

$$\mu_1 = F(a, b, c, \frac{z}{6})$$

$$\mu_2 = z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, z-c, \frac{z}{6})$$

c STAREBBE $\frac{1}{6}$ MA È UN
 FATTORE DI NORM. IRRELEVANTE

FACCIO IL $\lim_{b \rightarrow \infty}$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} u_1 = \lim_{b \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \frac{z^k}{b^k}$$

MA NOTA

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(b)_k}{b^k} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{b(b+1) \dots (b+k-1)}^{\sim b}}{b \dots b} = 1$$

QUINDI RIMANE

$$u_1 \equiv \Phi(a, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k! (c)_k} z^k = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(c+k) k!} z^k$$

CHE È LA STESSA SOL CHE TROVATE, DA SE MI METTESSI A FARE CONTI CON FUCHS

2

$$u_1 \equiv \Phi(a, c, z)$$

SI CHIAMA FUNZIONE IPERGEOMETRICA CONFLUENTE DI 1° TIPO
O FUNZIONE DI KUMMER

OSS UN'ALTRO MODO DI TROVARLA È QUELLO DI FARE IL LIMITE DELLA RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE.

IL PERMETTERA DI TROVARE LA
RAPPRE. INTEGRALE DI Φ

USO

$$F(a, b, c, \frac{z}{b}) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 dt (1-t)^{c-a-1} t^{a-1} (1-t\frac{z}{b})^{-b}$$

DOVE CHE HO E SFRUTTATO IL FATTO
CHE A E b SONO INTERCAMBIABILI

QUINDI

$$\Phi(a, c, z) = \lim_{b \rightarrow \infty} F(a, b, c, \frac{z}{b})$$

MA NOTA

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (1 - t\frac{z}{b})^{-b} = e^{tz}$$

QUINDI

$$\Phi(a, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 dt (1-t)^{c-a-1} t^{a-1} e^{tz}$$

RAPPRESENTAZIONE VALIDA SE $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a) > 0$

POTEVO RICAVARLA ANCHE USANDO LO STESSO PROCEDIMENTO
USATO PER TROVARE LA RAPP. INTEGRALE DEL
IPERGEOMETRICA

→ SCRIVO $\frac{(a)_k}{(c)_k}$ IN TERMINI DI B
SCRITTA COME INTEGRALE

PER LA SECONDA SOLUZIONE È PIÙ SEMPLICE POICHÉ
AVEVAMO VISTO CHE

$$u_2 = z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, z-c, \frac{z}{b})$$

QUINDI LA u_2 VA NELLA 2° SOLUZIONE DEL
IPERGEOMETRICA

$$u_2 = \lim_{b \rightarrow \infty} z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, z-c, \frac{z}{b})$$

→ LUI $\neq b$ MA È $\sim b$ SE $b \rightarrow \infty$
QUINDI SI COMPORTA COME $F(a, b, c, \frac{z}{b})$

$$= z^{1-c} \Phi(a-c+1, z-c, z)$$

AVRÀ u_2 INDIPENDENTE DA u_1 SE $1-c \in \mathbb{Z}$

QUINDI L'INTEGRALE GENERALE SARÀ:

$$u(z) = A_1 \Phi(a, c, z) + B z^{1-c} \Phi(a-c+1, z-c, z)$$

NOTA IMPORTANTE CHE $1-c \notin \mathbb{Z}$ POICHÈ PER GLI STESSI MOTIVI DI Γ , SE $c \in \mathbb{Z}$ ALLORA O LA PRIMA Φ O LA SECONDA DANNO PROBLEMI A CAUSA DI $\Gamma(c)$ O $\Gamma(z-c)$ CHE COMPARISCONO.

È POSSIBILE UNA 3^a SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CONFLUENTE, CHE SI PUÒ VEDERE, COINCIDENTE CON LA SOL. STANDARD, OVERO, RIESCO A TROVARE UNA RELAZIONE DI AUTOTRASFORMAZIONE PER LE Φ .

$$u_3(z) = e^z \Phi(c-a, c, -z)$$

VEDO CHE È SOLUZIONE

$$u_3' = e^z (\Phi + \Phi')$$

$$u_3'' = e^z (\Phi + 2\Phi' + \Phi'')$$

SOSTITUENDO

$$z \mu_3'' + (c - z) \mu_3' - a \mu_3 = 0$$

$$z e^z (\Phi + z \Phi' + \Phi'') + (c - z) e^z (\Phi + \Phi') - a e^z \Phi = 0$$

$$z \Phi'' + (c + z) \Phi' + (c - a) \Phi = 0$$

QUESTA È L'EQ. DIFF. SODDISFATTA DA

$$\Phi(c - a, c, -z)$$

→ LO VEDO DAL SEGNO DIVERSO
DEL 2° TERMINE

QUINDI DIMOSTRATO



PERÒ SE $c \notin \mathbb{Z}$ ALLORA PER FORZA μ_3 È C.L. $\Rightarrow$
 μ_1 E μ_2 , MA $\mu_3 \sim$ COSTANTE PERCIÒ NON È
LEGATA AD μ_2 CHE IN $z \rightarrow 0$ NON È REGOLARE AVENDO
 z^{1-c} , QUINDI

$$\mu_3 = \Lambda \mu_1$$

DEVO SONO FISSARE FATTI, λ CHE ENTRAMBI POSSO FARE VEDENDO COME NELL'ORIGINE

$$\mu_3 \underset{z \rightarrow 0}{\sim} 1$$

$$\mu_1 \underset{z \rightarrow 0}{\sim} 1$$

$$\Rightarrow \lambda = 1$$

QUINDI

$$\mu_3 = \mu_1$$

$$\Rightarrow \Phi(a, c, z) = e^z \Phi(c-a, c, -z)$$

È QUESTA È LA RELAZIONE DI AUTOTRASFORMAZIONE (DI KUMMER)
DELL'IPERGEOMETRICA CONFLUENTE

POSSO ANCORA DIRE CHE LA FUNZIONE IPERGEOMETRICA
 CONFLUENTE EREDITA MOLTE DELLE PROPRIETÀ
 DELL'IPERGEOMETRICA:

$$\oplus \quad \frac{d}{dz} \Phi(a, c, z) = \frac{a}{c} \Phi(a+1, c+1, z)$$

IN GENERALE

$$\frac{d^m}{dz^m} \Phi(a, c, z) = \frac{(a)_m}{(c)_m} \Phi(a+m, c+m, z)$$

⊕ Φ SODDISFA DELLE RELAZIONI LINEARI CON LE SUE CONTIGUE.

ES:

$$c\Phi(a, c, z) - c\Phi(a-1, c, z) - z\Phi(a, c+1, z) = 0$$

SI DIMOSTRANO COME QUELLE DI F POICHÉ SI BASANO SULLE PROPRIETÀ DEL SIMBOLO DI POCHHAMMER

⊕ CI SONO CASI PARTICOLARI:

$$\Phi(a, a, z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$$\Phi(1, 2, z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(1)_k}{(2)_k k!} z^k = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} (e^z - 1)$$

$$\Phi(-m, c, z) = (\text{POLINOMIO}) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-m)_k}{(c)_k k!} z^k = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(c)_k} \binom{m}{k} z^k$$

EQUAZIONE ASSOCIATA DI LAGUERRE

$$z u'' + (c - z) u' + m u = 0$$

$$z u'' + (\alpha + 1 - z) u' + u = 0$$

SOLUZIONE: $L_m^{(\alpha)}(z)$ $\rightarrow$ È SISTEMA ON SU $L^2([0, \infty])$
POLINOMI DI LAGUERRE

COME LI RICAVO IN $\mathbb{R}Q^9$?

$$\psi(r, \theta, \varphi) = u_z(r) Y^{\ell m}(\theta, \varphi)$$

$$\chi(r) = u(r) r$$

$$\frac{d^2 \alpha}{ds^2} - \left\{ \frac{\ell(\ell+1)}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{4} \right\} = 0 \Rightarrow s \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \chi = e^{\pm \frac{1}{2}s} \Rightarrow \text{ACCETTO SOLO SOL CON IL TENO}$$

$$Q'' - Q' + \left(\frac{l(l+1)}{s^2} - \frac{1}{s} \right) Q = 0$$

LO ZERO È FUCHSIANO → INDICI

$$\alpha_1 = l+1$$

$$\alpha_2 = -l$$

NON VA
BENE IN 0

NUOVA H_p $Q = s^{x+1} L(s)$

COSÌ

$$sL'' + ((2l+1) + 1 - s)L' + (1 - (l+1))L = 0$$

→ SOL: $L_{l'}^{(2l+1)}(s) \rightarrow s_0 \in \mathbb{Z}$

È REGOLARE IN ZERO.

$$\begin{cases} p_0 = (2l+1) + 1 \\ q_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = -2l - 1 \end{cases}$$

NON VA
CONSIDERATO

⇒ L'UNICA SOL VALIDA: L REG IN $z=0$

CIOÈ

$$L_{l'}^{(2l+1)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k$$

SERIE DI TAYLOR IN ϕ
CON RAGGIO ∞

È UNA SERIE INTERA $\Rightarrow$ EXP O POLINOMIO^a

L'EXP NON VA BENE $\rightarrow$ L'HO GIÀ VERREBBE PRESO PRIMA E MI CRESCENTE UN EXP

POLINOMIO $\rightarrow$ SEGUE LA CONDIZIONE DI QUANTIZZAZIONE DELL'ENERGIA

FUNZIONE TRONCATA Γ ALL' ∞ $\rightsquigarrow$ LEGAME CON LA Φ $\rightsquigarrow$ Γ INCOMPLETA

$$\gamma(a, x) = \int_0^x dt t^{a-1} e^{-t}, \quad \text{PONGO } t = xy \quad (dt = x dy)$$

$$= \int_0^1 x dy (xy)^{a-1} e^{-xy}$$

$$= \int_0^1 x^a dy e^{-xy} y^{a-1}$$

$$= x^a \Phi(a, a+1, -x) \cdot \frac{\Gamma(a) \Gamma(1)}{\Gamma(a+1)}$$

$$= \frac{x^a}{a} \Phi(a, a+1, -x)$$

USO ρ L'AUTOTRASFORMAZIONE
DA x A $-x$

$$\gamma(a, x) = \frac{x^a}{a} e^{-x} \Phi(1, a+1, x)$$

ABBIAMO STUDIATO COSA SONO u_1 E u_2 SE $1-c \notin \mathbb{Z}$
ORA, VEDIAMO COME TROVIAMO LA SECONDA SOLUZIONE
DELL'EQ (2) SE $1-c \in \mathbb{Z}$ (u_1 RIMANE LA STESSA)

↓
 $c \in \mathbb{Z}$

OVVERO, TROVEREMO LA DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE
IPERGEOMETRICA CONFLUENTE DI 2° SPECIE

METODO STANDARD PER TROVARE UNA SOLUZIONE DI
UNA EQ. DIFFERENZIALE È QUELLO DI CERCARLA
TRAMITE LA TRASFORMATTA DI LAPLACE, O PIÙ
IN GENERALE LA CERCHIAMO COME

$$u(z) = \int_{\gamma} dt e^{-zt} U(t)$$

γ CAMMINO GENERICO

VERIFICO CHE È SOLUZIONE FACENDO LE DERIVATE E
SOSTITUENDO.

SE DERIVO $u(z)$ SIGNIFICA TIRARE GIÙ NELL'INTEGRALE
DELLE POTENZE DI $t \rightarrow$ SO DA METOD. I (RISOLVERE
EDO A COEFF. COSTANTI CON TL) CHE DIVENTA UN'EQ.
ALGEBRICA SU $U(t)$, CHE POSSO RISOLVERE, LA RIMETTO
NELL'INTEGRALE E RISOLVO $u(z)$

MA L'EQ. CONFLUENTE NON HA COEFFICIENTI COSTANTI E
QUESTA STRATEGIA FUNZIONA SOLO IN PARTE

$$u'(z) = \int_0^\infty dt (-t) e^{-zt} U(t)$$

$$u''(z) = \int_0^\infty dt t^2 e^{-zt} U(t)$$

SE LE SOSTITUISCO IN $\bar{z}$

$$\int_0^\infty dt e^{-\bar{z}t} [z t^2 - (c - z)t - a] U(t) = 0$$

NON È UN EQ. ALGEBRICA IN $U(t)$
CHE DIPENDE SOLO DA t E
NUMERI (COME NEL CASO DI COEFF. COST.)

I TERMINI CHE DIPENDONO DA t LI TRATTO PER PARTI:

I TERMINI SONO:

$$z e^{-\bar{z}t} (t^2 + t) U(t) \Rightarrow -\frac{d}{dt} (e^{-\bar{z}t}) [(t^2 + t) U(t)]$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dt} (e^{-\bar{z}t} (t^2 + t) U(t)) + e^{-\bar{z}t} \frac{d}{dt} [(t^2 + t) U(t)]$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dt} (e^{-\bar{z}t} t(t+1) U(t)) + e^{-\bar{z}t} [(2t+1) U(t) + t(t+1) U'(t)]$$

ORA POSSO METTERE QUESTE RELAZIONI DENTRO L'INTEGRALE

$$\left[e^{-zt} t(t+1) U(t) \right]_{\partial\gamma} + \int_{\gamma} dt e^{-zt} \left[(zt+1) U(t) + t(t+1) U'(t) + (-ct-a) U(t) \right] = 0$$

NOTA SE NON AVESSI IL TERMINE VALUTATO SUL BORDO AVREI SOLAMENTE DA RISOLVERE $[...] = 0$ CHE NON È UN'EQ. ALGEBRICA, MA UN EQ. DIFF. DEL PRIMO ORDINE (NOTO DA METODI I)

SUPPONGO PER ORA CHE $e^{-zt} t(t+1) U(t) \Big|_{\partial\gamma} = 0$ (COSA CHE SARÀ VERA A SECONDA DI CHI È γ E CHI È U) COSÌ L'EQ. DIVENTA

$$\int_{\gamma} dt e^{-zt} \left[(zt+1) U(t) + t(t+1) U'(t) + (-ct-a) U(t) \right] = 0$$

$$\Rightarrow t(t+1) U' + [t(z-c)+1-a] U = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{U} = \left[\frac{c-z}{t+1} + \frac{a-1}{t(t+1)} \right] dt$$

$$\frac{a-1}{t} - \frac{a-1}{t+1} = (a-1) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) = (a-1) \frac{t+1-t}{t(t+1)} = \frac{(a-1)}{t(t+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{U} = \left[\frac{c-2}{t+1} + \frac{a-1}{t} - \frac{a-1}{t+1} \right] dt$$

$$\Rightarrow \log U = (c-2) \log(t+1) + (a-1) \log t - (a-1) \log(t+1) + \log K$$

$$= (c-a-1) \log(t+1) + (a-1) \log t + \log K$$

$$\Rightarrow U(t) = K t^{a-1} (1+t)^{c-a-1}$$

QUINDI HO TROVATO $U(t)$ AVENDO SUPPOSTO $[\dots]_{\gamma} = 0$ E
 ORA DEVO VEDERE SE CI SONO CAMMINI γ T.C
 SIA VERO $[\dots]_{\gamma} = 0$

HO 2 POSSIBILITA' :

$$1) \gamma = [-1, 0] \quad \text{e} \quad \operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a) > 0$$

VALUTO $t(t+1)U(t)e^{-zt} \Big|_{-1}^0 = K t^a (1+t)^{c-a} e^{-zt} \Big|_{-1}^0$

$\rightarrow$ CHE COMPAGNO IN $U(t)$

$$\begin{array}{cc} \underbrace{\text{IN } 0}_{\text{ESP} > 0} & \underbrace{\text{IN } -1}_{\text{ESP. } > 0} \\ (0) & (0) \rightarrow 0 \\ \downarrow & \\ 0 & \end{array}$$

AVRÒ LA SOLUZIONE

$$u(z) = \int_{-1}^0 dt e^{-zt} K t^{a-1} (1+t)^{c-a-1}$$

POTREI TOGLIERLA
VISTO CHE È UNA
NORMALIZZAZIONE

$$= \int_0^1 dt' e^{zt'} K (-1)^{a-1} t'^{a-1} (1-t')^{c-a-1}$$

LI POSSO
BUTTARE
VIA

$$= \int_0^1 dt e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1}$$

E VEDO CHE QUESTA È ESATTAMENTE LA RAPPZ.
INTEGRALE DELLA $\underline{\Phi}$

$$= \underline{\Phi}(a, c, z)$$

$$2) \sigma = [0, \infty)$$

VEDI ANCHE QUA

$$e^{-zt} t(t+1) U(t) \Big|_0^\infty = e^{-zt} t^a (t+1)^{c-a} \Big|_0^\infty = 0 \quad \text{se } \operatorname{Re}(a) > 0$$

$$\text{e } \operatorname{Re}(c) > 0$$

E POSSO SCRIVERE

$$\hat{u}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1}$$

E QUESTA È LA RAPPZ. INTEGRALE DELLA SECONDA
SOLUZIONE LINEARMENTE INDIPENDENTE DA $\hat{\Phi}$

$$\psi(a, c, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1}$$

CHIAMATA 2° TIPO O FUNZIONE IPERGEOMETRICA CONFLUENTE O
O FUNZIONE TRICOMI.

LA ψ C. SERVE SE $c \in \mathbb{Z}$ ESSENDO L.I. DA Φ
 MA SE $c \notin \mathbb{Z}$ LA ψ DEV'ESSERE CL. DELLE z
 SOLUZIONI CHE GIÀ CONOSCO, OSSIA DEV'ESSERE

$$\psi(a, c, z) = A \Phi(a, c, z) + B z^{1-c} \Phi(a-c+1, z-c, z) \quad \text{🌀}$$

LA STRATEGIA PER VERIFICARLO È SEMPRE LA STESSA,
 LE Φ SCRITTE COME SERIE CONVERGONO IN TUTTO
 $\mathbb{C}$, QUINDI MI BASTEREBBE CALCOLARE IL 1° E
 2° MEMBRO IN DUE QUALSIASI $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ E
 RICAVARE A E B .

PERÒ IN GENERALE SE MI METTO IN UN PUNTO NON
 SIGNIFICATIVO PER ψ ALLORA FARE LA SOMMA NON
 È COSÌ BANALE (L'UNICO CHE SO È $z=0$)
 → ⁰ INTEGRARE

POSSO USARE UN'ALTRA STRATEGIA. VALUTO 🌀 IN $z=0$
 E LA SUA DERIVATA IN $z=0$ (COSÌ MI TOLGO IL
 PROBLEMA DI TROVARE UN 2° PUNTO)

$$\text{SUPPONGO } \Re(c) < 1$$

CALCOLO

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} (2^\circ \text{ MEMBRO}) = \lim_{z \rightarrow 0^+} \overbrace{A \Phi(a, c, z)}^1 + B z^{1-c} \Phi(a-c+1, z-c, z) = A$$

$$\begin{aligned} & \overbrace{\begin{aligned} & \operatorname{Re}(c) < 1 \\ & \operatorname{Re}(1-c) > 0 \\ & \text{quindi} \\ & \exp > 0 \end{aligned}}^1 \\ & 0 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

NOTA È VERO CHE HO TROVATO $\lim 2^{\circ} \text{MEMBRO} = A$ NEL CASO $\operatorname{Re}(c) < 1$ MA A È UNA COSTANTE E ANCHE SE MI METTO CON ALTRA C IL RISULTATO DEL $\lim$ NON CAMBIA

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0^+} \psi(a, c, z) &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} e^{-zt} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt \end{aligned}$$

POSSO CAMBIARE VARIABILE $t = \frac{w}{1-w}$

così $1+t = \frac{1}{1-w} \quad dt = \frac{dw}{(1-w)^2}$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \psi(a, c, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^1 dw (1-w)^{-z} \frac{w}{(1-w)^{a-1}} \left(\frac{1}{1-w} \right)^{c-a-1}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^1 dw \, w^{a-1} (1-w)^{-c}$$

$$= \frac{B(a, 1-c)}{\Gamma(a)}$$

$$= \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a+1-c)}$$

QUINDI HO TROVATO

$$A = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a+1-c)}$$

ORA VOGLIO VALUTARE

$$z^c \frac{d\psi}{dz} \Big|_{z=0}$$

ORA SUPPONGO $\operatorname{Re}(c) > 0$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^c \frac{d}{dz} (2^{\circ} \text{MEMBRO}) = \lim_{z \rightarrow 0} z^c \left[\underbrace{A}_{1} \underbrace{\Phi}_{1} + B(1-c) z^{-c} \underbrace{\Phi}_{1} + B \underbrace{z^{1-c}}_{1} \underbrace{\Phi}_{1} \right]$$

$z' \rightarrow 0$
 $z^c \cdot z^{1-c}$

$$\tilde{z}^c \cdot \Delta \tilde{\Phi}' = 0$$

SO CHE $\tilde{\Phi}'$ È LA $\tilde{\Phi}$ MA CON GLI ARGOMENTI
SHIFTATI, QUINDI $\tilde{\Phi}'(0) = 1$ COMUNQUE

$$= B(1-c) = -B(c-1)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^c \frac{d\psi}{dz} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^c}{\Gamma(a)} \int_0^\infty dt t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} \frac{d}{dz} e^{-zt}$$

LO
LA

✓
FACCIO CON
RAPP. INTEGRALE

$$= - \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^c}{\Gamma(a)} \int_0^\infty dt t^a (1+t)^{c-a-1} e^{-zt}$$

POSSO METTERE z^c DENTRO L'INTEGRALE E SCRIVERE OVUNQUE zt

$$\begin{aligned} z^c dt t^a (1+t)^{c-a-1} &\rightarrow d(zt) \cdot z^{c-1} \cdot t^a (1+t)^{c-a-1} \rightarrow d(zt) z^{c-a-1} (zt)^a (1+t)^{c-a-1} \\ &\rightarrow d(zt) (zt)^a (z+zt)^{c-a-1} \end{aligned}$$

CHIARO $zt = s$

$$= - \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty ds e^{-s} s^a (z+s)^{c-a-1}$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} ds e^{-s} s^{c-1}$$

$$= -\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}$$

QUINDI HO TROVATO

$$-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} = -B(c-1) \rightarrow B = \frac{\Gamma(c)}{(c-1)} \frac{1}{\Gamma(a)}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}}$$

PERCÌ  DIVENTA

$$\psi(a, c, z) = \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a+1-c)} \Phi(a, c, z) + z^{1-c} \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} \Phi(a-c+1, z-c, z)$$

QUESTA RELAZIONE È PER $C \notin \mathbb{Z}$, MA SE $C \in \mathbb{Z}$ LA $\Psi(a, C, z)$ È DEFINITA ED È LA SECONDA SOLUZIONE E POSSO FAR VEDERE CHE CONTIENE IL PEZZO LOGARITMICO OVVERO

$$\Lambda \log z \Phi(a, m+1, z)$$

$C = m+1 \rightsquigarrow$ VUOL DIRE CHE INDICI DI $z=0$ SONO $\alpha=0$ $\beta=-m$

CONDIZIONI AFFINCHÉ $\exists$ LA PRIMA SOL ED È LA 2° CHE NON ESISTE ED HA UN PEZZO $\log$

DIRE (SKETCH) (FATTA BENE È SIMILE A QUELLA FATTA CON L'IPERGEOMETRICA CHE SCRIVENDO LA RELAZIONE TRA $F(z)$ E $F(1-z)$ È VALIDA SIA PER $C \in \mathbb{Z}$ CHE $C \notin \mathbb{Z}$ ED ESCE IL PEZZO $\log$)

$$C = m+1, \quad m = 0, 1, \dots$$

$$\lim_{C \rightarrow m+1} \Psi(a, C, z) = \frac{0}{0} \quad \text{COME NEL CASO DI } F$$

$\rightarrow$ SCRICCA COME C.L. DI Φ

$$= \lim_{c \rightarrow m+1} K \frac{g_1 - g_2}{\sin(\pi c)} \quad , \quad g_1, g_2 \quad | \quad g_1(m+1) = g_2(m+1)$$

QUINDI PER FARE IL LIMITE SI USA DE L'HOPITAL
E SI ARRIVA A DIMOSTRARE CHE

$$\lim_{c \rightarrow m+1} \Psi(a, c, z) = A \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k + B \log z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(m+k+1)} z^k$$

$$= \overset{\text{SERIE DI TAYLOR}}{\dots} + C \log z \Phi(a, m+1, z)$$



QUINDI LA Ψ TROVATA IN 3 È VALIDA SIA NEL
CASO $c \notin \mathbb{Z}$ CHE $c \in \mathbb{Z}$

STUDIAMO COMPORTAMENTO ASINTOTICO DI $\Psi(a, c, z)$ $z \rightarrow \infty$

CONOSCIAMO

$$\Psi(a, c, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty dt e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} \quad \operatorname{Re}(a) > 0$$

E DOBBIAMO FARE IL SOLITO PROCEDIMENTO PER GLI SVILUPPI ASINTOTICI.
IL PARAMETRO DI Ψ COMPARE ALL'ESPONENTE E VIENE MANDATO A ∞ (COME AL SOLITO), DEVO CERCARE IL MASSIMO SUL CAMMINO DI INTEGRAZIONE $\leadsto t=0$
E SO CHE TUTTO IL CONTRIBUTO DELL'INTEGRALE VIENE DALLA ZONA INTORNO A ZERO. SVILUPPO LA FUNZIONE SOTTO E POI INTEGRO TERMINE A TERMINE OTTENENDO LO SVILUPPO.

LECITO SCAMBIARE $\int$ E $\sum$ POICHÈ IL PEZZO CHE CONTA È QUELLO INTORNO A ZERO, DOVE SICURAMENTE LA $\sum$ CONV.
(t^{a-1} È GIÀ SVILUPPATO INTORNO A ZERO)

$$\text{VEDO } (1+t)^{c-a-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{c-a-1}{k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a-c+1+k)}{\Gamma(a-c+1) k!} (-1)^k t^k$$

$$\Psi(a, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(a-c+1+k)}{\Gamma(a) \Gamma(a-c+1) k!} \underbrace{\int_0^\infty dt e^{-zt} t^{a+k-1}}$$

$$\frac{\Gamma(a+k)}{z^{a+k}}$$

QUINDI

$$\psi(a, c, z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(a-c+1+k) \Gamma(a+k)}{\Gamma(a) \Gamma(a-c+1) k!} z^{-a-k}$$

NOTA QUESTO SVILUPPO HA RAGGIO DI CONVERGENZA ZERO

MA POSSO EVIDENZIARE UN TERMINE DOMINANTE E OTTENDO

$$\psi(a, c, z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} z^{-a} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right)$$

N.B. VEDRAI CHE È VERO CHE QUESTO SVILUPPO VALE SE $\operatorname{Re}(a) > 0$ E $\operatorname{Re}(z) > 0 \Rightarrow |\arg z| < \frac{\pi}{2}$, MA POI CAPIRAI CHE VALE OVUNQUE, QUINDI SIA SE $z \rightarrow +\infty$ CHE $z \rightarrow -\infty$.

NOTERAI PERÒ CHE GLI ANDAMENTI, E ∇ SARANNO DIVERSI SE $z \rightarrow -\infty$ OPPURE $z \rightarrow +\infty$

Sviluppo asintotico di Φ

È utile lo sviluppo di Ψ perché permette di calcolare lo sviluppo di Φ .

Dovrei invertire (3) e scrivere Φ come C.L. di Ψ

Parto da

$$\Psi(a, c, z) = \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a+1-c)} \Phi(a, c, z) + z^{1-c} \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} \Phi(a-c+1, 2-c, z)$$

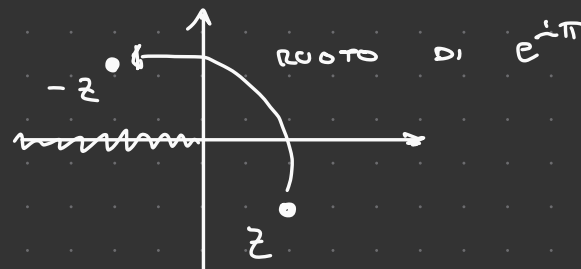
La uso per scrivermi anche

$$\Psi(c-a, c, -z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} \Phi(c-a, c, -z) + (-z)^{1-c} \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} \Phi(1-a, 2-c, -z)$$

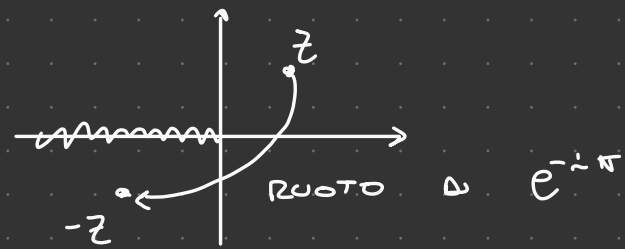
L'unico problema qua è che devo specificare cosa vuol dire $-z$

LA DEFINISCO $-z = z e^{-i\pi}$
OSSIA SCELGO $\text{Im } z > 0$, POICHÉ

SE $\text{Im } z < 0$
ALLORA $-z = z e^{i\pi}$



SE $\text{Im} z > 0$
 ALLORA $-z = z e^{-i\pi}$



FACCIO

$$e^z \Psi(c-a, c, z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} e^z \Phi(c-a, c, -z) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} z^{1-c} e^{-i\pi} e^{i\pi c} e^z \Phi(1-a, 2-c, -z)$$

USANDO LA RELAZIONE DI AUTOTRASFORMAZIONE:

$$e^z \Psi(c-a, c, z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} \Phi(a, c, z) - e^{i\pi c} z^{1-c} \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} \Phi(a-c+1, 2-c, z)$$

E DA QUA VEDO CHE $e^z \Psi(c-a, c, z)$ LA SCRIVO
 IN TERMINI DELLE STESSE Φ CHE COMPaiono IN
 $\Psi(a, c, z)$, MA ALLORA SE LE COMBINO LINEARMENTE
 CON OPPORTUNI COEFFICIENTI POTREI RIUSCIRE A CANCELLARE
 UNO DEI DUE Φ

INFATTI SE FACCIO

$$\frac{1}{\Gamma(c-a)} \Psi(a, c, z) + e^{-i\pi c} \frac{1}{\Gamma(a)} e^z \Psi(c-a, c, -z)$$

$$= \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a+1-c)} \Phi(a, c, z) + z^{1-c} \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)} \Phi(a-c+1, 2-c, z) +$$

$$+ e^{-2\pi c} \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} \Phi(a, c, z) - z^{1-c} \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)} \Phi(a-c+1, 2-c, z)$$

$$= \Gamma(1-c) \left[\frac{1}{\Gamma(c-a)\Gamma(a+1-c)} + e^{-2\pi c} \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} \right] \Phi(a, c, z)$$

$$\text{so } \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

$$= \frac{\Gamma(1-c)}{\pi} \left[\sin(\pi(c-a)) + e^{-2\pi c} \sin(\pi a) \right] \Phi(a, c, z)$$

scrivo il sin come exp

$$= \frac{\Gamma(1-c)}{2i\pi} \left[e^{i\pi(c-a)} - e^{-i\pi(c-a)} + e^{-2\pi c} (e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}) \right] \Phi(a, c, z)$$

$$= \frac{\Gamma(1-c)}{2\pi i} \left[e^{-i\pi(c-a)} - \cancel{e^{-i\pi(c-a)}} + \cancel{e^{-i\pi(c-a)}} - e^{-i\pi(c+a)} \right] \Phi(a, c, z)$$

$$= \frac{\Gamma(1-c)}{2\pi i} e^{-i\pi a} \left[e^{i\pi c} - e^{-i\pi c} \right] \Phi(a, c, z)$$

$$= \frac{\Gamma(1-c)}{\pi} e^{-i\pi a} \sin(\pi c) \Phi(a, c, z)$$

$$= \Gamma(1-c) e^{-i\pi a} \frac{1}{\Gamma(c)\Gamma(1-c)} \Phi(a, c, z)$$

$$= \frac{e^{-i\pi a}}{\Gamma(c)} \Phi(a, c, z)$$

QUINDI RIESCO AD INVERTIRLA E TROVO

$$\Phi(a, c, z) = e^{-i\pi a} \left[\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} \Psi(a, c, z) + e^{-i\pi c} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z \Psi(c-a, z-c, -z) \right]$$

SPRUTTANDO LA CONOSCENZA DELLO SVILUPPO DI $\Psi(a, c, z)$ CON $z \rightarrow +\infty$ RIESCO A RICAVERE LO SVILUPPO DI $\Phi(a, c, z)$ SIA CON $z \rightarrow +\infty$ CHE CON $z \rightarrow -\infty$

SE GUARDO $z \rightarrow +\infty$, OSSIA $\text{Re } z > 0$, TRA I DUE TERMINI DI 3.1 VINCE QUELLO CON L'ESPONENZIALE, QUINDI

$$\Phi(a, c, z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} e^{i\pi(a-c)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z (-z)^{a-c}$$

$$= e^z \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \underbrace{(-e^{i\pi})^{a-c}}_{e^{-i\pi(a-c)} e^{i\pi(a-c)} = 1} z^{a-c}$$

$$= e^z \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c}$$

MENTRE SE GUARDO $z \rightarrow -\infty$, OSSIA $\text{Re } z < 0$, IL TERMINE CON L'ESPONENZIALE VA A ZERO, QUINDI

$$\Phi(a, c, z) \underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} e^{i\pi a} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} z^{-a}$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (e^{-i\pi} z)^{-a}$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a}$$

NOTA $\frac{1}{z}$ ENTRAMBI I CASI, L'OGGETTO FINALE CHE VA AD ∞
 SEMPRE UN NUMERO CON PARTE REALE > 0

FUNZIONI DI BESSEL

SONO ANCHE CHIAMATE FUNZIONI CILINDRICHE POICHÉ SI PRESENTANO IN PROBLEMI A SIMMETRIA CILINDRICA.

SONO LE SOLUZIONI DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$$z^2 u'' + z u' + (z^2 - \nu^2) u = 0$$

1

CERCO DI RISOLVERLA COME AL SOLITO:

HA P.T.O. SINGOLARE FUCHSIANO IN $z=0$ E UNA SINGOLARITÀ IRREGOLARE IN $z=\infty$ (DA QUEST'ULTIMA COSA CAPISCO CHE SONO FUNZIONI PARENTI DELLE FUNZIONI IPERGEOMETRICHE CONFLUENTI).

STUDIO $z=0$ (ESSENDO FUCHSIANO USO FUCHS)

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow 0} z P(z) = 1$$

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 Q(z) = -\nu^2$$

$$\rightarrow \text{EQ. INDICIALE } \rho^2 - \nu^2 = 0 \Rightarrow \rho = \pm \nu$$

SCELGO $\text{Re}(\nu) > 0 \rightarrow$ COSÌ I SEGNI DI ρ SONO DEFINITI COME SOPRA

ANDRÒ (LA SOL CHE VA CON ν È QUELLA CHE ESISTE)

$$\mu_1 = z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

cos:

$$\mu'_1 = z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} (n+\nu) a_n z^{n-1}$$

$$\mu''_1 = z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} (n+\nu)(n+\nu-1) a_n z^{n-2}$$

SE SOSTITUISCO IN ① TROVO

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\nu)(n+\nu-1) a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\nu) a_n z^n - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \left[(n+\nu)((n+\nu-1)+1) - \nu^2 \right]$$

$$(n+\nu)^2 = n^2 + 2n\nu + \nu^2$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2\nu) a_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n = 0$$

$$n=0 \quad = 0$$

$$m=1 \quad (1+2\nu)a_1 z$$

$$(1+2\nu)a_1 z + \sum_{m=2}^{\infty} [m(m+2\nu)a_m + a_{m-2}] z^m = 0$$

COME AL SOLITO L'INDIPENDENZA DELLE BASI DELLE
POTENZE, CHE FORMANO UNA BASE NELLO SPAZIO DELLE
FUNZIONI, CI DICE CHE IL COEFFICIENTE DI OGNI
POTENZA DEV'ESSERE = 0

$$\Rightarrow \bar{a}_0 \text{ non } \bar{\text{e}} \text{ DETERMINATO, } a_1 = 0, \quad a_m = -\frac{a_{m-2}}{m(m+2\nu)}$$

VISTO CHE LA RELAZIONE DI RICORRENZA LEGA
TERMINI CON STESSA PARITA' E ABBIAMO PESSO

$a_1 = 0 \Rightarrow$ SOLO COEFF DI POSTO PARI SONO NON
NULLI

$\Rightarrow n_1 \bar{\text{e}} \text{ PARI}$

POSSO RISOLVERE LA RELAZIONE DI RICORRENZA

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2m(2m+2\nu)} = -\frac{a_{2m-2}}{4m(m+\nu)}$$

SE ITERO LA COSA UNA VOLTA PRESO a_0 TROVO

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{m! (m+\nu)(m-1+\nu) \dots (1+\nu) z^{2m}} = (-1)^m \frac{a_0}{m! (1+\nu)_m z^{2m}}$$
$$= (-1)^m \frac{a_0 \Gamma(\nu+1)}{m! \Gamma(1+\nu+m) z^{2m}}$$

POTREI SCEGLIERE $a_0 = \frac{1}{z^\nu \Gamma(\nu+1)}$

$$\Rightarrow a_{2m} = \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(1+\nu+m)} \left(\frac{1}{z}\right)^\nu$$

METTENDO NELLA SERIE TROVO

$$u_1 = J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(1+m+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}$$

2

CHE SI CHIAMA FUNZIONE DI BESSEL DI 1° SPECIE

se $\nu \notin \mathbb{Z}$ (E NON 2ν CHE È LA DIFFERENZA DEI 2 INDICI, OVVERO LA COSA DI SOLITO CHE SI GUARDA NEL TH DI FUCHS)

→ GUARDO ν E NON 2ν POICHÈ LA FUNZIONE È PARI O DISPARI. LA REL. DI RICORRENZA NON COLLEGA UN COEFF. CON IL SUCCESSIVO E QUINDI ANCHE SE $2\nu \in \mathbb{Z} \Rightarrow \nu$ SEMINTERO NON HO IL PEZZO CON ~~2008~~

DISCUSSIONE LZZ - min. ~ 1.00.00

DA FUCHS SO CHE L'ALTRA SOLUZIONE NELL'INTORNO DI $z=0$ È

$$u_2 \sim z^{-\nu} (O(1))$$

MA IN ⁽¹⁾ È PALESE LA SIMEETRIA PER $\pm\nu$, QUINDI SE ESISTE UNA SOLUZIONE CON UN INDICE $+\nu$ ALLORA LA STESSA FUNZIONE, MA CON $-\nu$ È ANCORA SOLUZIONE, QUINDI

$$u_2 = J_{-\nu}(z)$$

(3)

QUINDI, SE $\nu \notin \mathbb{Z}$ ESISTONO SIA J_ν SIA $J_{-\nu}$ E SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI (COME SI VEDE GUARDANDO L'ANDAMENTO INTORNO A $z \sim 0$)

MA SE $\nu = m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ ALLORA QUELLO VISTO
 SOPRA NON È VERO E $J_\nu, J_{-\nu}$ SONO L.D.

HO

$$J_{-m}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(m-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}$$

E QUI VEDO (COME GIÀ ALTRE VOLTE) CHE SE $m > 0$
 A DENOMINATORE HO UNA Γ DI UN NUMERO
 NEGATIVO, ALMENO FINCHÉ m NON È $\geq$ DI n ,
 E QUINDI I PRIMI $m-1$ TERMINI SONO NULLI

$$J_{-m}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(m-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}$$

CAMBIO INDICE $k = m - n \rightarrow n = k + m$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{(m+k)! \Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m}$$

$$= (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(m+k)! \Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m}$$

$$\Gamma(m+k+1) \rightarrow k!$$

$$= (-1)^m J_m(z)$$

QUINDI LE DUE SOLUZIONI NON SONO PIÙ L.I.
E DEVO TROVARE IL MODO DI SCRIVERE LA
SECONDA SOLUZIONE.

RIPRENDENDO ν GENERICO E DEFINISCO UNA C.L. DELLE
DUE J

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\sin(\pi\nu)} [\cos(\pi\nu) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)]$$

4

SICURAMENTE $Y_\nu(z)$ È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI
BESSEL E SI CHIAMA FUNZIONE DI BESSEL
DI 2° SPECIE

SO CHE SE FACCIO $\lim_{\nu \rightarrow m \in \mathbb{Z}}$ ALLORA J_ν E $J_{-\nu}$ NON
SONO L.I.

MA È INTERESSANTE $Y_\nu(z)$ POICHÉ SI VEDE CHE

$$\lim_{\nu \rightarrow m \in \mathbb{Z}} Y_\nu(z) = \frac{0}{0}$$

E SE FACCIO DE L'HOPITAL RISULTA CHE IL $\lim$
È BEN DEFINITO E SVILUPPA UN TERMINE CHE
È $A \log z J_m(z)$ (CHE È QUELLO CHE MI ASPETTEREI
DALLA 2° SOLUZIONE), QUINDI Y_ν RIMANE BEN DEFINITA
E INDIPENDENTE DA J_ν QUANDO $\nu \rightarrow m \in \mathbb{Z}$ E
POSSO USARLA COME 2° SOLUZIONE.

NOTA LA DIMOSTRAZIONE È SEMPRE LA SOLITA

ESISTONO ANCHE ALTRE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DI
BESSEL, CHE QUANDO $\nu \notin \mathbb{Z}$ SI POSSONO ESPRIMERE
COME C.L. DI J_ν E $J_{-\nu}$ (CHE SONO UNA
BASE NELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI)

IN PARTICOLARE: FUNZIONI DI HENKEL DI 1° E 2° SPECIE
(CHIAMATE ANCHE FUNZIONI DI BESSEL DI 3° E 4° SPECIE)

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \frac{i}{\sin(\pi\nu)} \left[e^{-i\pi\nu} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z) \right]$$

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = \frac{-i}{\sin(\pi\nu)} \left[e^{i\pi\nu} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z) \right]$$

OSS POTREI ANCHE INVERTIRE E SCRIVERE J_{ν} E Y_{ν}
IN TERMINI DI $H^{(1,2)}$

INFATTI

$$J_{\nu}(z) = \frac{1}{2} \left(H_{\nu}^{(1)}(z) + H_{\nu}^{(2)}(z) \right)$$

$$Y_{\nu}(z) = \frac{1}{2i} \left(H_{\nu}^{(1)}(z) - H_{\nu}^{(2)}(z) \right)$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{i}{\sin(\pi\nu)} \left[(e^{i\pi\nu} + e^{-i\pi\nu}) J_{\nu} - 2 J_{-\nu} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin(\pi\nu)} \left[2 \cos(\pi\nu) J_{\nu} - 2 J_{-\nu} \right]$$

$$= \frac{1}{\sin(\pi\nu)} \left[\cos(\pi\nu) J_{\nu} - J_{-\nu} \right]$$

NOTA VEDO CHE IN $\textcircled{2}$ E $\textcircled{3}$ NON C'È NULLA DI COMPLESSO APPARTE LA z CHE NON È SPECIFICATA MA SE $z \in \mathbb{R}$ ALLORA $J_{\pm n}$ SONO FUNZIONI REALI E DA COSE SONO SCRITTE VEDO CHE $H_n^{(1)}$ E $H_n^{(2)}$ SONO COMPLESSE E SONO L'UNA IL COMPLESSO CONIUGATO DELL'ALTRO.

QUINDI LE RELAZIONI SCRITTE NELL'OSSERVAZIONE SOPRA H_n DICONO CHE

$$J_n = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(H_n^{(1)} + H_n^{(2)})$$

$$Y_n = \frac{1}{2i} \operatorname{Im}(H_n^{(1)} - H_n^{(2)})$$

QUINDI LE H IN UN CERTO SENSO POSSO "VEDERE" E LE J_n E Y_n COME IL LORO COS E SIN

PROPRIETÀ FUNZIONI DI BESSEL

POSSIAMO ANCORA VEDERE CHE TUTTE LE FUNZIONI DI BESSEL (J, Y, H) SODDISFANO CERTE PROPRIETÀ:

↳ LE INDICO Z_ν GENERICAMENTE

⊕ RELAZIONE PER LE DERIVATE

$$Z'_\nu(z) = \frac{\nu}{z} Z_\nu(z) - Z_{\nu+1}(z)$$

⊕ RELAZIONE DI RICORRENZA

$$Z_{\nu+1}(z) - \frac{2\nu}{z} Z_\nu(z) + Z_{\nu-1}(z) = 0$$

DIRE (FATTE NEL CASO DI $J_\nu(z)$)

⊕ RELAZIONE DERIVATE:

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}$$

$$J'_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{2m+\nu}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-1}$$

$$\frac{\nu}{z} J_\nu = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \frac{\nu}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-1}$$

$$J_{\nu+1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1+\nu}$$

$k = m-1$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)! \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-1+\nu}$$

MOLTIPLICO
E DIVIDO
PER m

$$= - \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-1}$$

CI METTO IN

$$Z'_\nu(z) = \frac{\nu}{z} Z_\nu(z) - Z_{\nu+1}(z)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{z^{m+\nu}}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-1} &= \\ &= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \frac{\nu}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-1} - \\ &\quad - (-1) \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{2m+\nu}{2} = \frac{\nu}{2} + m$$



(+) RELAZIONE DI RICORRENZA:

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}$$

$$z \frac{\nu}{z} J_\nu = z \left(\frac{z}{z} \right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \frac{\nu}{z} \left(\frac{z}{z} \right)^{2m-1}$$

$$J_{\nu+1} = - \left(\frac{z}{z} \right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} m \left(\frac{z}{z} \right)^{2m-1}$$

$$J_{\nu-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu)} \left(\frac{z}{z} \right)^{2m-1+\nu}$$

$$= \left(\frac{z}{z} \right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+\nu)}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{z}{z} \right)^{2m-1}$$

41 METTO IN

$$z_{\nu+1}(z) - \frac{2\nu}{z} z_\nu(z) + z_{\nu-1}(z) = 0$$

$$- \left(\frac{z}{z} \right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} m \left(\frac{z}{z} \right)^{2m-1} -$$

$$- z \left(\frac{z}{z} \right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\nu+1)} \frac{\nu}{z} \left(\frac{z}{z} \right)^{2m-1} +$$

$$+ \left(\frac{z}{z} \right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+\nu)}{n! \Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{z} \right)^{2n-1} = 0$$

$$\Rightarrow n - 2 \frac{\nu}{2} + (n+\nu) = n - \nu + (n+\nu) = 0$$



CONNESSIONE FUNZIONI DI BESSEL E FUNZIONE IPERGEOMETRICA CONFLUENTE

È UTILE STUDIARE LE FUNZIONI DI BESSEL POICHÈ
COME HO GIÀ POTUTO NOTARE SONO CONNESSE
ALLE FUNZIONI IPERGEOMETRICHE CONFLUENTI

PARTIAMO DA UN'EQ. IPERGEOM. CONFLUENTE DI PARAMETRI

$$c = 2\nu + 1$$

$$a = \frac{c}{2} = \nu + \frac{1}{2}$$

QUINDI IN QUESTO CASO $c - a = \nu + \frac{1}{2}$

USATO L'EQ. IPERG.
CONFLUENTE

$$w \mu''(w) + (2\nu + 1 - w) \mu'(w) - (\nu + \frac{1}{2}) \mu(w) = 0$$

1

$\mu(w)$ SARÀ UNA QUALCHE TIPO DI FUNZIONE IPERGEOMETRICA
CONFLUENTE. MI SCRIVO

$$\mu(w) = e^{w/2} w^{-\nu} v(w) = \ell(w) v(w), \quad \ell = e^{w/2} w^{-\nu}$$

VOGLIO TROVARE L'EQ. DIFFERENZIALE SODDISFATTA DA v
SE μ SODDISFA L'IPERGEOMETRICA CONFLUENTE

CALCOLO

$$u' = l' v + l v'$$

$$u'' = l'' v + 2l' v' + l v''$$

con

$$\begin{aligned} l' &= \frac{1}{z} e^{\frac{w}{2}} \omega^{-\nu} + e^{\frac{w}{2}} (-\nu) \omega^{-\nu-1} \\ &= e^{\frac{w}{2}} \omega^{-\nu} \left(\frac{1}{z} - \frac{\nu}{\omega} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l'' &= \frac{1}{z} e^{\frac{w}{2}} \omega^{-\nu} \left(\frac{1}{z} - \frac{\nu}{\omega} \right) + e^{\frac{w}{2}} \omega^{-\nu-1} (-\nu) \left(\frac{1}{z} - \frac{\nu}{\omega} \right) - \frac{\nu}{\omega^2} e^{\frac{w}{2}} \omega^{-\nu} \\ &= e^{\frac{w}{2}} \omega^{-\nu} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{\nu}{\omega} - \frac{1}{2} \frac{\nu}{\omega} + \frac{\nu^2}{\omega^2} - \frac{\nu}{\omega^2} \right) \\ &= e^{\frac{w}{2}} \omega^{-\nu} \left(\frac{1}{4} - \frac{\nu}{\omega} + \frac{\nu(\nu-1)}{\omega^2} \right) \end{aligned}$$

QUINDI

$$u' = e^{\frac{w}{2}} \omega^{-\nu} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{\omega} \right) v + v' \right]$$

$$u'' = e^{\frac{w}{2}} \omega^{-\nu} \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{\nu}{\omega} + \frac{\nu(\nu+1)}{\omega^2} \right) v(\omega) + \left(1 - \frac{2\nu}{\omega} \right) v' + v'' \right]$$

È NELL'EQ. DIFFERENZIALE (1) OTTENGO

$$e^{\frac{\omega}{2}} \omega^{-\nu} \omega \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{\nu}{\omega} + \frac{\nu(\nu+1)}{\omega^2} \right) v(\omega) + \left(1 - \frac{2\nu}{\omega} \right) v' + v'' \right] +$$
$$+ (2\nu+1-\omega) e^{\frac{\omega}{2}} \omega^{-\nu} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{\omega} \right) v + v' \right] - \left(\nu + \frac{1}{2} \right) e^{\frac{\omega}{2}} \omega^{-\nu} v(\omega)$$

$$\omega v'' + (\omega - 2\nu) v' + \left(\frac{\omega}{4} - \nu + \frac{\nu(\nu+1)}{\omega} \right) v + (2\nu+1-\omega) \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{\omega} \right) v +$$
$$+ (2\nu+1-\omega) v' - \left(\nu + \frac{1}{2} \right) v = 0$$

$$\omega v'' + (\omega - 2\nu) v' + \left(\frac{\omega}{4} - \nu + \frac{\nu(\nu+1)}{\omega} \right) v + (2\nu+1) \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{\omega} \right) v + (2\nu+1) v' -$$
$$- \left(\frac{\omega}{2} - \nu \right) v - \omega v' - \left(\nu + \frac{1}{2} \right) v = 0$$

QUINDI (1) DIVENTA

$$\omega v'' + v' + \left(\frac{\omega}{4} + \frac{\nu(\nu+1)}{\omega} - (2\nu+1) \frac{\nu}{\omega} - \frac{\omega}{2} \right) v = 0$$

$$\frac{w}{4} + \frac{v^2 + v}{w} - \frac{2v^2}{w} - \frac{v}{w} - \frac{2w}{4} = -\frac{w}{4} - \frac{v^2}{w}$$

$$wv'' + v' - \left(\frac{w}{4} + \frac{v^2}{w} \right) v = 0$$

(2)

SE $u(w)$ È SOLUZIONE DI (1) ALLORA $v(w)$ DEVE SODDISFARE (2)

PONGO $w = z \dot{z}$ E CHIAMO $f(z) = v(z \dot{z})$

$$\Rightarrow f'(z) = \dot{z} v'$$

$$f''(z) = -4v''$$

DA (2) POSSO TROVARE L'EQ. SODDISFATTA DA $f(z)$

$$z \dot{z} \left(-\frac{1}{4} f'' \right) + \frac{1}{z \dot{z}} f' - \left(\frac{z \dot{z}}{4} + \frac{v^2}{z \dot{z}} \right) f = 0$$

MULTIPLICO PER $z \dot{z}$

$$-4z^2 \left(-\frac{1}{4} f'' \right) + z f' - \left(\frac{-4z^2}{4} + \nu^2 \right) f = 0$$

QUINDI

$$z^2 f'' + z f' + (z^2 - \nu^2) f = 0$$

CHE È L'EQUAZIONE DI BESSEL.

CONCLUDENDO, UNA SOL DELL'IPERGEOMETRICA CONFLUENTE, u CON VARIABILE w , SI PUÒ SCRIVERE IN TERMINI DI UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI BESSEL NELLA VARIABILE $z (= \frac{w}{2i})$.

POTREI DIRE:

$$\oplus u(w) = A e^{w/2} w^{-\nu} f_{\nu} \left(\frac{w}{2i} \right)$$

↙
 COSTANTE DI
 PROP.

↘
 FUNZIONE
 DI BESSEL

⊕ OPPURE

VICEVERSA

$$f_\nu(w) = B e^{-\tilde{z}} \tilde{z}^\nu u(\tilde{z})$$

GENERICA SOL DELL'IP.
CONFLUENTE E A SECONDA
DI CHI, METTO OTTENGO
IDENTITÀ VALIDE O
MENO

QUINDI QUALUNQUE SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI BESSEL
POSSO SCRIVERLA IN TERMINI DI SOLUZIONI DELL'EQ.
IPERGEOMETRICA CONFLUENTE.

A SECONDA DI CHI È U OTTENGO FUNZIONI DI BESSEL
DIVERSE.

SCELTO

$$u(\tilde{z}) = \Phi\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, \tilde{z}\right)$$

QUINDI

$$f_\nu(z) = B e^{-z} z^\nu \Phi\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, z\right)$$

SO CHE QUESTA f_ν SARÀ LEGATA A J_ν , POICHÉ
GUARDANDO IL LIMITE $z \rightarrow 0$:

$$f_\nu(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} B z^\nu$$

$$J_\nu(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} z^\nu$$

E INOLTRE QUESTO MI FISSA IL VALORE DI B E MI PERMETTE DI DIRE CHE PER AVERE UN'IDENTITÀ DEVO DEFINIRE

$$J_{\nu}(z) = \frac{1}{z^{\nu} \Gamma(\nu+1)} e^{-iz} z^{\nu} \Phi\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, iz\right)$$

E QUINDI RICAPO UN'ALTRA ESPRESSIONE PER J_{ν}

$$J_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} e^{-iz} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \Phi\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, iz\right)$$

(3)

NOTA LA POTREI DIMOSTRARE SVILUPPANDO e^{-iz} E Φ CHE METTENDO INSIEME (DOPO UN PO' DI CALCOLI) TROVO LO SVILUPPO DI J_{ν}

PERÒ SO CHE CI SONO ALTRE POSSIBILI SOLUZIONI DELL'IPERGEOMETRICA CONFLUENTE, POSSO SCEGLIERE

$$u(iz) = \Psi\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, iz\right)$$

E IN QUESTO CASO TROVO LA FUNZIONE DI HENKEL

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = \frac{z^{\nu}}{\sqrt{\pi}} (iz)^{\nu} e^{-(\pi\nu - z)} \Psi\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, iz\right)$$

(4)

Dire

PER DIMOSTRARE QUESTA NON FACCIO LO SVILUPPO,
MA POSSO FAR VEDERE CHE IL PEZZO DA
 $e^{i(\frac{\pi}{2}\nu - z)}$... PRODUCE LA C.L. DI J_ν E $J_{-\nu}$
N. SERVE

$$\Psi(a, c, z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a+1-c)} \Phi(a, c, z) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{-c} \Phi(a-c+1, 2-c, z)$$

PER POTER SCRIVERE

$$\begin{aligned} \Psi\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, z\bar{z}\right) &= \frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(-\nu + \frac{1}{2})} \Phi\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, z\bar{z}\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} (z\bar{z})^{-2\nu} \Phi\left(-\nu + \frac{1}{2}, -2\nu + 1, z\bar{z}\right) \end{aligned}$$

RISCRIVO MEGLIO

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} (z\bar{z})^\nu \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}\nu}}_{(i)^\nu} e^{i(\frac{\pi}{2}\nu - z)} \Psi\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, z\bar{z}\right)$$

$$= \frac{z\dot{z}}{\sqrt{\pi}} (z\dot{z})^{\sim} e^{\dot{z}\frac{\pi}{2}\sim} e^{-\dot{z}z} \left[\frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(-\nu+\frac{1}{2})} \Phi(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1, z\dot{z}) + \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} (z\dot{z})^{-2\nu} \Phi(-\nu+\frac{1}{2}, -2\nu+1, z\dot{z}) \right]$$

PORTO DENTRO [...] LA $(z\dot{z})^{\sim} e^{-\dot{z}z}$

$$= \frac{z\dot{z}}{\sqrt{\pi}} e^{\dot{z}\frac{\pi}{2}\sim} \left[\frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(-\nu+\frac{1}{2})} (z\dot{z})^{\sim} e^{-\dot{z}z} \Phi(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1, z\dot{z}) + \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} (z\dot{z})^{-\sim} e^{-\dot{z}z} \Phi(-\nu+\frac{1}{2}, -2\nu+1, z\dot{z}) \right]$$

$$= \frac{z\dot{z}}{\sqrt{\pi}} e^{\dot{z}\frac{\pi}{2}\sim} \left[\frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(-\nu+\frac{1}{2})} \left(\frac{z}{z}\right)^{\sim} (\dot{z})^{\sim} z^{2\nu} e^{-\dot{z}z} \Phi(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1, z\dot{z}) + \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} (\dot{z})^{-\sim} \left(\frac{z}{z}\right)^{-\sim} (z)^{-2\nu} e^{-\dot{z}z} \Phi(-\nu+\frac{1}{2}, -2\nu+1, z\dot{z}) \right]$$

USANDO

LA

3

VEDO

CHE

HO

("

 z^v

TERMINE

HO $v \rightarrow -v$)

$$= \frac{z^v}{\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi v}{2}} \left[\frac{\Gamma(-2v)}{\Gamma(-v+\frac{1}{2})} (i)^v z^{2v} \Gamma(v+1) J_v(z) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(2v)}{\Gamma(v+\frac{1}{2})} (i)^{-v} (z)^{-2v} \Gamma(-v+1) J_{-v}(z) \right]$$

$$= z^v e^{i\frac{\pi v}{2}} \left[c(v) J_v(z) + c(-v) J_{-v}(z) \right]$$

DOVE

HO

CHIAMATO

$$c(v) = \frac{z^{2v}}{\sqrt{\pi}} i^v \frac{\Gamma(-2v)}{\Gamma(-v+\frac{1}{2})} \Gamma(v+1)$$

RICORDA

$$\Gamma(2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{2\alpha-1} \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha+\frac{1}{2})$$

QUINDI

$$c(v) = \frac{z^{2v}}{\sqrt{\pi}} i^v \frac{1}{\Gamma(-v+\frac{1}{2})} \Gamma(v+1) \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-2v-1} \Gamma(-v) \Gamma(-v+\frac{1}{2})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hat{z}^\nu}{2\pi} \Gamma(-\nu) \Gamma(\nu+1) \\
&= \frac{\hat{z}^\nu}{2\pi} \frac{\pi}{\sin(-\pi\nu)} \\
&= \frac{\hat{z}^\nu}{2} \frac{1}{\sin(\pi\nu)}
\end{aligned}$$

E ANALOGAMENTE

$$C(-\nu) = \frac{\hat{z}^{-\nu}}{2} \frac{1}{\sin(\pi\nu)}$$

QUINDI TROVO

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(2)}(z) &= z \hat{z} e^{\hat{z} \frac{\pi\nu}{2}} \left[-\frac{\hat{z}^\nu}{2} \frac{1}{\sin(\pi\nu)} \mathcal{J}_\nu + \frac{\hat{z}^{-\nu}}{2 \sin(\pi\nu)} \mathcal{J}_{-\nu} \right] \\
&= \frac{-\hat{z}}{\sin(\pi\nu)} \left[e^{\hat{z} \pi\nu} \mathcal{J}_\nu - \mathcal{J}_{-\nu} \right]
\end{aligned}$$



IN MODO ANALOGO, USANDO

$$u(z, \lambda) = e^{z\lambda} \psi\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, -z\lambda z\right)$$

CHE È ANCHE SOL DI ①
E OTTENGO

$$H^{(1)} = \frac{-z\lambda}{\sqrt{\pi}} (z\lambda)^{\nu} e^{-\lambda(\pi z - z)} \psi\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, -z\lambda z\right)$$

DA TUTTA STA ROBA CAPISCO CHE A PARTIRE DA
QUALUNQUE SOLUZIONE DELL'IPERGEOMETRICA CONFLUENTE,
IO POSSO COSTRUIRE UNA SOLUZIONE DELL'EQ. DI
BESSEL E IN PARTICOLARE J_{ν} , $H^{(1)}$, $H^{(2)}$

RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DELLA FUNZIONE DI BESSEL

LA RIESCO A TROVARE USANDO LA RELAZIONE TRA
FUNZIONI DI BESSEL E FUNZIONI IPERGEOM. CONFLUENTE.

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} e^{-iz} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Phi\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2iz\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} e^{-iz} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})^2} \int_0^1 dt t^{\nu-\frac{1}{2}} (1-t)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{zitz}$$

CHE VALE PER $\operatorname{Re}(\nu) > \frac{1}{2}$

CAMBIO VARIABILE $t = \frac{1+\mu}{2} \rightsquigarrow 1-t = \frac{1-\mu}{2}$

$$J_\nu(z) = e^{-iz} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+\frac{1}{2})^2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \underbrace{\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{1+\mu}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}}_{\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1-\mu^2}{4}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}}$$

$= (1-\mu^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-2\nu+1}$

$e^{-iz} e^{-iz\mu}$

$$= \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \underbrace{\frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+\frac{1}{2})^2}}_{(*)} \frac{1}{2^{2\nu}} \int_{-1}^1 du e^{izu} (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$$

SEMPLIFICO $(*)$ USANDO LA FORMULA DI DUPLICAZIONE

$$\Gamma(2z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} 2^{2z-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) 2^{2z-1}}$$

USANDO $z = \nu + \frac{1}{2}$ HO

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+1) 2^{2\nu}}$$

QUINDI

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}$$

POSSO ANCORA OSSERVARE CHE $(1-u^2)$ È UNA FUNZIONE
PARI IN u E QUINDI L'INTEGRALE PRENDE
CONTRIBUTO SOLO DALLA PARTE PARI DELL'EXP
→ OSSIA IL $\cos(zu)$

QUINDI

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 du \cos(zu) (1-u^2)^{\nu - \frac{1}{2}}$$

POTREI ANCORA SCRIVERE

$$u = \sin \varphi \rightarrow 1 - u^2 = \cos^2 \varphi$$

QUINDI

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi/2} d\varphi (\cos \varphi)^{2\nu} \cos(z \sin \varphi)$$

QUESTA LA CHIAMO RAPPRESENTAZIONE DI POISSON PER J_ν

ANDAMENTO ASINTOTICO DELLE FUNZIONI DI BESSEL

ABBIAMO VISTO CHE L'ANDAMENTO ASINTOTICO DELLE FUNZIONI IPERGEOMETRICHE CONFLUENTI SI STUDIA PIÙ FACILMENTE NEL CASO DI FUNZIONI CONFLUENTI DI 2 SPECIE E MI RICORDO

$$\psi(a, c, z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} z^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} h(\nu, k) z^{-k}$$

→ SAREBBE $h(a, c, k)$
MA NEL NOSTRO CASO
ABBIAMO a, c CHE
DIPENDONO DA ν

E ABBIAMO ANCHE VISTO

$$h(\nu, k) = (-1)^k \frac{\Gamma(a - c + 1 + k) \Gamma(a + k)}{\Gamma(a - c + 1) \Gamma(a) k!}$$

NOTA NOI LO ABBIAMO RICAVALO PER $z \rightarrow +\infty$, MA HA VALIDITÀ PIÙ GENERALE, FINCHÉ $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta$

POSSO RICAVALARE SUBITO L'ANDAMENTO DI $H^{(1)}$ E $H^{(2)}$

$$H_{\nu}^{(2)}(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} (2z)^{\nu} e^{i(\pi\nu - z)} (2iz)^{-\nu - \frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} h(\nu, k) (2iz)^{-k}$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{n+1} \sim z^{\sim} e^{i(\pi n - z)} z^{-n-\frac{1}{2}} \sim z^{-\frac{1}{2}} z^{-n-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(n, k)}{(z \sim z)^k}$$

$$\sim \sqrt{\frac{z}{\pi z}} \left(\sim \right)^{-n+\frac{1}{2}} e^{i(\pi n - z)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(n, k)}{(z \sim z)^k}$$

$\underbrace{\quad}_{e^{i\pi/2}}$

$$\sim \sqrt{\frac{z}{\pi z}} e^{i\frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}-n)} e^{i(\pi n - z)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(n, k)}{(z \sim z)^k}$$

$$\sim \sqrt{\frac{z}{\pi z}} e^{i\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} - z\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(n, k)}{(z \sim z)^k}$$

E IN MODO ANALOGO TROVO

$$H_{\sim}^{(1)}(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{z}{\pi z}} e^{-i\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} - z\right)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{h(n, k)}{(z \sim z)^k}$$

QUINDI COME AVEVAMO VISTO, $H^{(1)}$ E $H^{(2)}$ SI COMPORTANO
 COME UN EXP (A MENO DI FATTORI) PER z GRANDE
 EXP DI $-z$ SHIFTATO E IL PARAMETRO n COMPARRE SOLO

COME UNO SFASAMENTO.

DAGLI ANDAMENTI DI $H^{(1)}$ E $H^{(2)}$ POSSIAMO RICAVARE GLI
ANDAMENTI DI J_n E Y_n

$$J_n = \frac{1}{2} (H_n^{(1)}(z) + H_n^{(2)}(z))$$

NOTA SE SOMMO H HO GLI EXP CHE NON POSSO RACCOGLIERE,
MA POSSO NOTARE CHE SE IN $\sum$ SOMMO K PARI
OTTENGO LE STESSSE COSE IN $H^{(1)}$ E $H^{(2)}$, QUINDI
SOMMO GLI EXP, MENTRE SE $\sum$ DISPARI HO LA DIFF.
DEGLI EXP.
→ TUTTO PERCHÉ HO $(-1)^k$

CHIAMO $\alpha = \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} - z$

$$J_n \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{z}{\pi z}} \frac{1}{2} \left[(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \sum_{\text{PARI}} \frac{h(n, k)}{(z \dot{z})^k} + (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \sum_{\text{DISPARI}} \frac{h(n, k)}{(z \dot{z})^k} \right]$$

$$\sim \sqrt{\frac{z}{\pi z}} \left[\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h(n, 2m)}{(z \dot{z})^{2m}} (-1)^m + \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h(n, 2m+1)}{(z \dot{z})^{2m+1}} \dot{z}^{-2m-1} \right]$$

$$\frac{1}{\dot{z}^{2m+1}} = \frac{1}{\dot{z}} \frac{1}{\dot{z}^{2m}} = \frac{1}{\dot{z}} (-1)^m$$

$$\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos\left(\frac{\pi v}{2} + \frac{\pi}{4} - z\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h(v, 2m)}{(zz)^{2m}} (-1)^m + \sin\left(\frac{\pi v}{2} + \frac{\pi}{4} - z\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h(v, 2m+1)}{(zz)^{2m+1}} (-1)^m \right]$$

SE FACCIO IL CONTO PER $\gamma_{\sim}(z) = \frac{1}{2i} [H^{(1)} - H^{(2)}]$

ESSENDO IL "−" CAMBIERANNO
SEGNi RELATIVi TRA EXP

TROVO

$$\gamma_{\sim}(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[-\sin\left(\frac{\pi v}{2} + \frac{\pi}{4} - z\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h(v, 2m)}{(zz)^{2m}} (-1)^m + \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{\pi v}{2} + \frac{\pi}{4} - z\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h(v, 2m+1)}{(zz)^{2m+1}} (-1)^m \right]$$

SE GUARDO I TERMINI DOMINANTI, DEVO GUARDARE LA
SERIE PER POICHÈ È L'UNICA CHE HA
TERMINI z^0 E OTTENGONO DEI TERMINI

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{\sim}(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{z}{\pi z}} \cos\left(\frac{\pi z}{2} + \frac{\pi}{4} - z\right) (1 + O(\frac{1}{z})) \\ Y_{\sim}(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} -\sqrt{\frac{z}{\pi z}} \sin\left(\frac{\pi z}{2} + \frac{\pi}{4} - z\right) (1 + O(\frac{1}{z})) \end{array} \right.$$

QUINDI ANCHE ORA VEDO CHE $J_{\sim}$ E $Y_{\sim}$ HANNO
ANDAMENTI TIPO FUNZIONI TRIGONOMETRICHE (COME
AVENDO NOTATO QUALCHE PAGINA FA')

Funzioni di Bessel di indici $\in \frac{\mathbb{Z}}{2}$

SONO FUNZIONI INTERESSANTI PERCHÈ ESPRIMIBILI IN TERMINI DI FUNZIONI ELEMENTARI.

GUARDO $J_{1/2}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + 3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m + 1/2}$

RICORDO $\Gamma(m + \frac{3}{2}) = (m + \frac{1}{2})(m - \frac{1}{2}) \dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{(2m+1)!!}{2^{m+1}} \sqrt{\pi}$

UN PO' DI SALTO DI FEDE

$$= \frac{(2m+1)! \sqrt{\pi}}{m! 2^{2m+1}}$$

ED OGGI

$$J_{1/2}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\cancel{m!} \frac{(2m+1)! \sqrt{\pi}}{\cancel{m!} 2^{2m+1}}} \frac{z^{2m+1/2}}{2^{2m+1/2}}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1/2} \rightarrow z^{2m+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z)$$

NOTA POTRE. ANCHE RICAVARLO DALLA RAPP. INTEGRALE DI POISSON

IN FATTI ANALOGAMENTE SI HA

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z)$$

USANDO LE RELAZIONI DI RICORRENZA E MOSTRA CHE TUTTE LE $J_{n \pm \frac{1}{2}}$ SONO FATTE CON POTENZE E FUNZIONI TRIGONOMETRICHE.

$$\text{SO } z_{n+1} = \frac{2n}{z} z_n - z_{n-1}$$

QUINDI

$$J_{3/2} = \frac{1}{z} J_{1/2} - J_{-1/2} = \sqrt{\frac{z}{\pi z}} \left(\frac{1}{z} \sin z - \cos z \right)$$

NOTA

DI SOLITO SI USANO

$$j_m(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{m+1/2}(z)$$

$$y_m(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{m+1/2}(z)$$

E SI CHIAMANO FUNZIONI DI BESSEL SFERICHE

FUNZIONI IPERGEOMETRICHE GENERALIZZATE

UN PO' DI NOZIONI BASE SU COSA SI INTENDE CON
FUNZIONI IPERG. GENERALIZZATE.

CONSIDERIAMO

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{r=1}^p (a_r)_k}{\prod_{s=1}^q (c_s)_k} \frac{z^k}{k!} \quad p, q \in \mathbb{N}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_p)_k}{(c_1)_k (c_2)_k \dots (c_q)_k} \frac{z^k}{k!}$$

QUINDI È UNA SERIE DI POTENZE "TIPO" QUELLE
CHE ABBIAMO VISTO COMPAGNO NELLA FUNZIONE
IPERGEOMETRICA E IPERGEOM. CONFLUENTE.

SI VEDE CHE LA SERIE CONVERGE SE $p \leq q+1$

IL RAGGIO DI CONVERGENZA È : ∞ SE $p < q+1$
FINITO SE $p = q+1$

INFATTI

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_{k+1}}{A_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(a_1+k) \dots (a_p+k)}{(c_1+k) \dots (c_q+k)} \frac{1}{k+1}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^p}{k^{q+1}}$$

LA $u(z)$ SI CHIAMA FUNZIONE IPERGEOMETRICA
GENERALIZZATA E LA INDICO COME

$${}_pF_q(a_r, c_s, z)$$

È RACCHIUDE IL SIGNIFICATO FUNZ. IPERGEOMETRICA
 È IPERG. CONFLUENTE, POICHÈ

$$F(a_1, a_2, c, z) = {}_2F_1(a_1, a_2, c, z)$$

✓
 SAREBBE 6

$$\Phi(a, c, z) = {}_1F_1(a, c, z)$$

MA LA DEFINIZIONE CONTIENE ANCHE ALTRE COSE,
POICHÉ POSSO VEDERE

$${}_0F_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$${}_1F_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} z^k = (1-z)^{-a}$$

DI QUESTE FUNZIONI IPERGEOMETRICHE NE POSSO
DARE UNA RAPP. INTEGRALE RICORSIVA

$${}_{(p+1)}F_{(q+1)}(a_r, a, c_s, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 dt t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} {}_pF_q(a_r, c_s, zt)$$

MA QUESTA È UNA COSA CHE INCONSCIAMENTE HO
GIÀ USATO

INFATTI

$${}_2F_1(a_1, a, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 dt t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-tz)^{-a}$$

$\hookrightarrow {}_1F_0$