

EQUAZIONI TOTALMENTE FUCHSIANE

CONOSCIAMO LE EQ. DIFF. CON COEFF. NON COSTANTI,
DA METODI 1 RISOLTE CON IL METODO DI
FUCHS NELL'INTORNO DI PUNTI FUCHSIANI.

EQ. TOTALMENTE FUCHSIANE SONO EQ. IN CUI TUTTE
LE SINGOLARITÀ SONO SINGOLARITÀ REGOLARI O
PUNTI FUCHSIANI.

REMARK • z_0 SING. REGOLARE

$$\text{CON } u'' + P(z)u' + Q(z)u = 0$$

$$\text{ALLORA } P(z) \underset{z \rightarrow z_0}{\sim} \frac{p(z)}{z - z_0}, \quad Q(z) \underset{z \rightarrow z_0}{\sim} \frac{q(z)}{(z - z_0)^2}$$

• MA SE $z_0 = \infty$ ALLORA z_0 È UN PUNTO
FUCHSIANO

$$P(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} o\left(\frac{1}{z}\right), \quad Q(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{z^2}$$

SO CHE CON N SINGOLARITÀ $N > 3$ ALLORA LE
EQ. DIFF. NON SONO COMPLETAMENTE CLASSIFICATE.

MA SE $N = 1, 2, 3$ LA CONOSCENZA DI DOVE SONO LE
SINGOLARITÀ E I LORO ESPONENTI (CHE SONO I
NUMERI CHE MI DICONO CON CHE POTENZA $(z - z_0)$
LA SOL. VA NELL'INTORNO DI z_0) DETERMINA
COMPLETAMENTE LA FORMA DELL'EQUAZIONE.

ES 1 EQ. CON 1 PUNTO FUCHSIANO. $z_0 = \infty$

SO $P(z), Q(z)$ SONO REGOLARI IN TUTTO $\mathbb{C}$
E SONO REGOLARI ANCHE ALL' ∞ POICHÈ:

SE $z_0 = \infty$ FUCHSIANO ALLORA

$$P(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots, \quad Q(z) = \frac{B_1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)$$

$\Rightarrow P, Q$ REGOLARI SU $\mathbb{C}$

MA PER TH DI LOUVILLE LE SOLE FUNZIONI REGOLARI
IN $\mathbb{C}$ SONO LE COSTANTI.

E DOVENDO AVERE $P(z)Q(z) \rightarrow 0 \quad z \rightarrow \infty$

ALLORA $P(z) = Q(z) = 0$

QUINDI L'EQ. È $u'' = 0 \Rightarrow \underline{u = az + b}$

MA SE INVECE HETTO $z_0 \in \mathbb{C}$ SINGOLARITÀ:

SO $P(z) = \frac{p(z)}{z - z_0}$ CON $p(z)$ REGOLARE IN TUTTO $\mathbb{C}$

QUINDI PER LO STESSO RAGIONAMENTO D. PRIMA $p(z)$ È UNA COSTANTE, QUINDI

$$P(z) = \frac{A}{z - z_0}$$

ANALOGAMENTE $Q(z) = \frac{B}{(z - z_0)^2}$

MA SO CHE SE $z_0 \in \mathbb{C}$ UNICA SINGOLARITÀ
 $\Rightarrow \infty$ REGOLARE

$$\Rightarrow P(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{z}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\text{E } Q(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} O\left(\frac{1}{z^4}\right)$$

QUINDI CAPISCO : $A = z \quad \forall \quad B = 0$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{z}{z-z_0}, \quad Q(z) = 0$$

QUINDI L'EQUAZIONE È:

$$u'' + \frac{z}{z-z_0} u' = 0$$

SE CHIAMO $u' = y$

$$\frac{dy}{dz} + \frac{z}{z-z_0} y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dz} = -\frac{z}{z-z_0} y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{z}{z-z_0} dz \Rightarrow \log y = -z \log(z-z_0) + \log K$$

$$\Rightarrow y = \frac{K}{(z-z_0)^2} = u'$$

$$\Rightarrow \boxed{u(z) = \frac{a}{(z-z_0)} + b}$$

E SE FACCIO $w = \frac{1}{z-z_0}$ $\rightarrow$ MANDA $z=z_0$ IN $w=\infty$

$$\Rightarrow \boxed{\mu(z) = 2w + 6} \quad \text{sol dell' } \infty$$

ES CON 2 PUNTI FUCHSIANI.

• PRENDIAMO SINGOLARITÀ $z_1 = 0$ $z_2 = \infty$

ALLORA SO:

$\rightarrow$ REGOLARE
CHE POSSO SVILUPPARE

$z=0$

$$P(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{p(z)}{z} = \frac{A}{z} + A_1 + A_2 z + \dots$$

$$Q(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{q(z)}{z^2} = \frac{B}{z^2} + \frac{B_{-1}}{z} + B_0 + B_1 z + \dots$$

$z=\infty$

$$P(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{z} + \frac{A_{-1}}{z^2} + \dots$$

$$Q(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{B}{z^2} + \frac{B_{-3}}{z^3} + \dots$$

ED ESSENDO z_1 E z_2 UNICHE SINGOLARITÀ ALLORA
 P, Q TRA ZERO E ∞ NON HANNO SINGOLARITÀ
E IL LORO SVILUPPO HA RAGGIO ∞

$\Rightarrow$ SVILUPPO IN $z=0$ E $z=\infty$ DEV'ESSERE
UGUALE

PERCIÒ È OVVIO

$$P(z) = \frac{A}{z}, \quad Q(z) = \frac{B}{z^2}$$

È L'EQ. È :

$$u'' + \frac{A}{z} u' + \frac{B}{z^2} u = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{z^2 u'' + z A u' + B u = 0}$$

LA RISOLVO CAMBIANDO $z = e^w$

CON

$$\frac{du}{dw} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{dw} = \frac{du}{dz} z$$

$$\frac{d^2 u}{dw^2} = \frac{d}{dw} \left(\frac{du}{dz} z \right) = \frac{d^2 u}{dz^2} \frac{dz}{dw} z + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dw}$$

$$= \frac{d^2 u}{dz^2} z^2 + \frac{du}{dz} z = \frac{d^2 u}{dz^2} z^2 + \frac{du}{dw}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{dz^2} z^2 = \frac{d^2 u}{dw^2} - \frac{du}{dw}$$

E HO L'EQ:

$$\frac{d^2 u}{dw^2} - \frac{du}{dw} + A \frac{du}{dw} + Bu = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 u}{dw^2} + (A-1) \frac{du}{dw} + Bu = 0}$$

EQ. DIFF A COEFF. COSTANTI CHE SO RISOLVERE:

EQ. CARATTERISTICA $\alpha^2 + (A-1)\alpha + B = 0 \leadsto \alpha_1, \alpha_2$

① SE $\alpha_1 \neq \alpha_2$ $u(w) = K_1 e^{\alpha_1 w} + K_2 e^{\alpha_2 w}$

② SE $\alpha_1 = \alpha_2$ $u(w) = K_1 e^{\alpha_1 w} + K_2 e^{\alpha_1 w}$

IN TERMINI DI z :

$$\begin{cases} \textcircled{1} & u(z) = \kappa_1 z^{\alpha_1} + \kappa_2 z^{\alpha_2} \\ \textcircled{2} & u(z) = \kappa_1 z^{\alpha_1} + \kappa_2 \log z z^{\alpha_1} \end{cases}$$

NOTA CHE VALE
SEMPRE

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - A$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = B$$

QUINDI ANCHE ORA HO L'EQ. ESATTAMENTE
DETERMINATA DALLA CONOSCENZA DEI PUNTI

• PER ESERCIZIO SINGOLARITÀ $x_1 = \zeta_1$, $x_2 = \zeta_2$

SI TROVA DALLE SOL DI $z_1 = 0$ E $z_2 = \infty$
CON UN CAMBIO DI VARIABILI CHE RANDA
 $z_1 \rightarrow x_1$ E $z_2 \rightarrow x_2$

$$\zeta = \frac{x - \zeta_1}{x - \zeta_2}$$

EQUAZIONI TOTALMENTE FUCHSIANE CON 3 SINGOLARITÀ

È MOSTRIAMO CHE LA FORMA DELL'EQUAZIONE È TOTALMENTE DETERMINATA UNA VOLTA CHE RICONOSCIAMO SIA DOVE SONO LE SINGOLARITÀ E SIA L'ANDAMENTO DELLE SOL. NELLE SINGOLARITÀ.

SINGOLARITÀ : $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ $\zeta_i \in \mathbb{C}$ ESPONENTI DELLE
ANDAMENTO SOLUZIONE : (α_1, β_1) (α_2, β_2) (α_3, β_3) SOL

PRESO ζ_i SO: $P(z) \underset{z \rightarrow \zeta_i}{\sim} O\left(\frac{1}{z - \zeta_i}\right) = \frac{p(z)}{z - \zeta_i}$

$Q(z) \underset{z \rightarrow \zeta_i}{\sim} O\left(\frac{1}{(z - \zeta_i)^2}\right) = \frac{q(z)}{(z - \zeta_i)^2}$

È ∞ È UN PUNTO REGOLARE
 $\Rightarrow P(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{z}{z}$; $Q(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} O\left(\frac{1}{z^4}\right)$

QUESTE COSE CI FISSANO LA FORMA DI P, Q, A_i
POICHÉ DEVO PER FORZA AVERE

$$P(z) = \frac{A_1}{z - \xi_1} + \frac{A_2}{z - \xi_2} + \frac{A_3}{z - \xi_3}$$

(CONDIZIONE $P(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{z}{z}$) $\rightarrow A_1 + A_2 + A_3 = 1$

$$Q(z) = \frac{az^2 + bz + c}{(z - \xi_1)^2 (z - \xi_2)^2 (z - \xi_3)^2} = \prod_{i=1}^3 \frac{1}{(z - \xi_i)} \left[\frac{B_1}{z - \xi_1} + \frac{B_2}{z - \xi_2} + \frac{B_3}{z - \xi_3} \right]$$

PER TROVARE GLI ESPONENTI (DA METOD. I):

$$\begin{cases} p_0^{(i)} = \lim_{z \rightarrow \xi_i} (z - \xi_i) P(z) = A_i \\ q_0^{(i)} = \lim_{z \rightarrow \xi_i} (z - \xi_i)^2 Q(z) = \frac{B_i}{(\xi_i - \xi_{i+1})(\xi_i - \xi_{i+2})} \end{cases}$$

ORA SCRIVO L'EQUAZIONE INDICALE

$$g^2 + (p_0 - 1)g + q_0 = 0$$

$$\Rightarrow g^2 + (A_i - 1)g + \frac{B_i}{(\xi_i - \xi_{i+1})(\xi_i - \xi_{i+2})} = 0$$

E LE SOLUZIONI (α_i, β_i) SARANNO

$$\begin{cases} \alpha_i + \beta_i = 1 - A_i \\ \alpha_i \cdot \beta_i = \frac{B_i}{(\xi_i - \xi_{i+1})(\xi_i - \xi_{i+2})} \end{cases}$$

OSSIA α_i, β_i
SOL DELL'EQ.
INDICIALE

QUINDI NOTI LA COLLOCAZIONE DELLE SINGOLARITÀ
 ξ_1, ξ_2, ξ_3 E GLI ESPONENTI DEI 3 PUNTI

$\Rightarrow$ DETERMINO $A_i, B_i \forall i$

$\Rightarrow$ HO LA FORMA DELL'EQUAZIONE POICHÉ CONOSCO P, Q

MA SE INVECE

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$z_3 = \infty$$

IMPLICA

$$P(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad Q(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

AVREI

$$P(z) = \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2}$$

CHE SODDISFA ANCHE LA
CONDIZIONE DI ∞

$$Q(z) = \prod_{i=1}^2 \frac{1}{z - z_i} \left[\frac{B_1}{z - z_1} + \frac{B_2}{z - z_2} + C \right]$$

SERVE A FAR
VALERE LA
CONDIZIONE DI ∞

VEDO LA CONNESSIONE DEGLI INDICI CON I COEFFICIENTI.

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} z P(z) = A_1 + A_2$$

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 Q(z) = C$$

L'EQUAZIONE INDICIALE ALL' ∞ È ;

$$s^2 - (p_0 - 1)s + q_0 = 0$$

$$s^2 - (A_1 + A_2 - 1)s + C = 0$$

quindi $\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 = A_1 + A_2 - 1 \\ \alpha_3 \cdot \beta_3 = C \end{cases}$ → ESPONENTI DELL' ∞

E NEGLI ALTRI PUNTI (FINITI) TROVO

$$p_0^{(\hat{i})} = A_{\hat{i}}$$

$$q_0^{(\hat{i})} = \frac{B_{\hat{i}}}{(\xi_{\hat{i}} - \xi_{\hat{i}+1})}$$

E HO

$$\begin{cases} \alpha_{\hat{i}} + \beta_{\hat{i}} = 1 - A_{\hat{i}} \\ \alpha_{\hat{i}} \cdot \beta_{\hat{i}} = \frac{B_{\hat{i}}}{\xi_{\hat{i}} - \xi_{\hat{i}+1}} \end{cases}$$

PERÒ ANCHE ORA CON LA CONOSCENZA DELLE
SINGOLARITÀ E DELL'ANDAMENTO DELLE SOL (α_i, β_i)
DETERMINO COMPLETAMENTE I COEFFICIENTI DI
 $P(z)$ E $Q(z)$.



E DATA L'EQUAZIONE HO ANCHE
L'INTEGRALE GENERALE BEN
DETERMINATO

SIMBOLO P DI RIEMANN

VISTO CHE L'EQ. È TOTALMENTE DETERMINATA DA ζ_i E (α_i, β_i) VORREI SCRIVERE UN SIMBOLO DETERMINATO DA QUESTI NUMERI E CHE DETERMINA L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQ. (OVERO LA SOL)

UNA VOLTA FISSATA L'EQ. CON LA CONOSCENZA DI $\zeta_i, (\alpha_i, \beta_i)$ HO FISSATA ANCHE LA SOL. E VOGLIO SCRIVERLA CON UN SIMBOLO CHE DIPENDA DA ESSI

SIMBOLO P DI RIEMANN

IN P CI DEVO METTERE LE INFORMAZIONI

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \right. z \}$$

→ VARIABILE

9 PARAMETRI
IN $\mathbb{C}$ CHE MI
PARLANO DELLA
FORMA DELL'EQ.

IL FATTO CHE HO DEI VINCOLI POICHÈ GLI ESPONENTI DELLA SOL. NON SONO COMPLETAMENTE INDIPENDENTI, VEDI AD ESEMPIO:

$$\{z_i \in \mathbb{C}\} \quad \sum_{i=1}^3 (\alpha_i + \beta_i) = \sum_{i=1}^3 (1 - A_i) = 3 - \underbrace{\sum_{i=1}^3 A_i}_2 = 1$$

$$\{z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_3 = \infty\} \quad \sum_{i=1}^2 (\alpha_i + \beta_i) + \alpha_3 + \beta_3 = 1 - A_1 + 1 - A_2 + A_1 + A_2 - 1 = 1$$

QUINDI IN $\mathbb{P}$ HO 9 PARAMETRI COMPLESSI + 1 VARIABILE COMPLESSA - 1 VINCOLO

QUINDI 8 PARAMETRI INDIPENDENTI

→ 3 PUNTI
6 NUMERI
1 VINCOLO $\sum (\alpha_i + \beta_i) = 1$

$\mathbb{P}$ È UN SIMBOLO PER L'INTEGRALE GENERALE, QUINDI È UNA FUNZIONE DI z (POLIDROMA SE α_i, β_i QUALSIASI) CHE SI COMPORTA COME UNA

COMBINAZIONE LINEARE DEI FATTORI $(z - z_i)^{\alpha_i}$ E
 $(z - z_i)^{\beta_i}$

$$u \underset{z \rightarrow z_i}{\sim} K_1 (z - z_i)^{\alpha_i} + K_2 (z - z_i)^{\beta_i}$$

MA PERCHÈ È UTILE P ?

PROPR. ETÀ DI P

a) OVVIA: SI POSSONO SCAMBIARE I PUNTI z_i E
RELATIVI INDICI E/O SCAMBIARE α_i, β_i
SENZA CAMBIARE P

NON ESSENDOCI UN ORDINE IN CUI POSSO SCRIVERE
LE COLONNE NELL'ORDINE CHE VOGLIO, LA COSA
IMPORTANTE È CHE SOSTI ANCHE I COEFFICIENTI.
IN PIÙ NON C'È MOTIVO DI PREFERIRE α_1 O
 α_2 A β_i (SONO SOLO LE SOL DELL'EQ.
INDICIALE E NON DEVO ORDINARLE)

b) OVVIA: ESSENDO L'EQ. DIFF. LINEARE VUOL DIRE CHE
 P È DETERMINATO A MENO DI UNA
COSTANTE Moltiplicativa (COMPLESSA)

DI CONSEGUENZA ANCHE LE SOLUZIONI
SARANNO NON BEN DETERMINATE.

$$c) \quad P \begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} z'_1 & z'_2 & z'_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix}$$

dove
$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad / \quad ad-bc=1$$

→ TRASFORMAZIONE LINEARE FRATTA

MA CON UNA TRASFORMAZIONE LINEARE FRATTA
MAPPO OGNI PUNTO DI $\mathbb{C}$ IN UN ALTRO
MA MANTENENDO GLI ANGOLI QUINDI DATO P ,
CHE RAPPRESENTA UNA CERTA E.D., FACCIO IL
CAMBIO DI COORDINATE E TROVO UN'ALTRA
E.D. NELLA VARIABILE z' IN CUI LE SINGOLARITÀ
SONO I PUNTI IMMAGINE DELLE SINGOLARITÀ,
MA GRAZIE ALLA PARTICOLARITÀ DELLA TRASFORMAZ.
TROVO CHE GLI INDICI SONO GLI STESSI.
E SI VEDE FACILMENTE CHE L'INTEGRALE
GENERALE DELLA PRIMA EQ. SI PUÒ SCRIVERE
IN TERMINI DELLA SECONDA (INTERPRETANDO $z=z(z')$)

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + P(z) \frac{du}{dz} + Q(z) = 0 \quad \xrightarrow{z' = \frac{az+b}{cz+d}} \quad \frac{d^2 u}{dz'^2} + \hat{P}(z') \frac{du}{dz'} + \hat{Q}(z') = 0$$

$$\mu(z) \xleftarrow{z = z(z')} \mu(z')$$

QUINDI VEDO CHE L'ANDAMENTO DELLE SOLUZIONI
 $\bar{z}$ È LO STESSO.

DIM LA SOL SÌ È FA SE: GUARDANDO GLI ANDAMENTI DELLE

$$\left[\mu(z') \sim (z' - z'_1)^{\alpha_1} \Rightarrow \mu(z) \sim (z - z_1)^{\alpha_1} \right]$$

SE PRENDO $(z' - z'_1)^{\alpha_1} = \left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{az'_1+b}{cz'_1+d} \right)^{\alpha_1}$

$$= \frac{[(az+b)(cz'_1+d) - (az'_1+b)(cz+d)]^{\alpha_1}}{(cz+d)^{\alpha_1} (cz'_1+d)^{\alpha_1}}$$

$$= \frac{[az(\cancel{cz'_1+d}) + b(\cancel{cz'_1+d}) - a\cancel{z'_1}(cz+d) - b(\cancel{cz+d})]^{\alpha_1}}{(cz+d)^{\alpha_1} (cz'_1+d)^{\alpha_1}}$$

$$= \frac{[z(ad - bc) + z'_1(bc - ad)]^{\alpha_1}}{(cz+d)^{\alpha_1} (cz'_1+d)^{\alpha_1}}$$

$$= \frac{(ad-bc)^{\alpha_1} (z - \zeta_1)^{\alpha_1}}{(cz+d)^{\alpha_1} (c\zeta_1 + d)^{\alpha_1}}$$

VALUTATO IN $z = \zeta_1$
 $(cz+d)$ È UN NUMERO

QUINDI SI VEDE CHE $(z' - \zeta_1')^{\alpha_1} \sim (\text{NUMERO}) (z - \zeta_1)^{\alpha_1}$

d)

$$P \begin{Bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix} z$$

//

$$(z - \zeta_1)^{\sigma_1} (z - \zeta_2)^{\sigma_2} (z - \zeta_3)^{\sigma_3} P \begin{Bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \alpha_1 - \sigma_1 & \alpha_2 - \sigma_2 & \alpha_3 - \sigma_3 \\ \beta_1 - \sigma_1 & \beta_2 - \sigma_2 & \beta_3 - \sigma_3 \end{Bmatrix} z$$

MA CON $\sigma_3 = -\sigma_1 - \sigma_2$

→ (OSSIA $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$)

Dire (LA FACCIAMO VEDENDO L'ANDAMENTO DELLE SOL NEI
 VARI PUNTI)

L'INTEGRALE GENERALE DELLA SECONDA EQUAZIONE CON $z \rightarrow \zeta_1$:

$$\hat{u}(z) = A(z - \zeta_1)^{\alpha_1 - \sigma_1} + B(z - \zeta_1)^{\beta_1 - \sigma_1}$$

IL PRIMO:

$$u(z) = (z - \zeta_1)^{\sigma_1} \hat{u}(z) = A(z - \zeta_1)^{\alpha_1} + B(z - \zeta_1)^{\beta_1}$$



QUESTE PROPRIETÀ SONO UTILI PERCHÉ CI SI PUÒ RIPORTARE AD EQUAZIONI DIFFERENZIALI PIÙ SEMPLICI.

OSS QUESTE PROPRIETÀ SONO VALIDE ANCHE SE UNO DEI PUNTI È L'∞.
L'UNICA ACCORTENZA È ~ d):

$$P \begin{Bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \infty \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix} z = (z - \zeta_1)^{\sigma_1} (z - \zeta_2)^{\sigma_2} P \begin{Bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \infty \\ \alpha_1 - \sigma_1 & \alpha_2 - \sigma_2 & \alpha_3 - \sigma_3 \\ \beta_1 - \sigma_1 & \beta_2 - \sigma_2 & \beta_3 - \sigma_3 \end{Bmatrix} z$$

CON $\sigma_3 = -\sigma_1 - \sigma_2$

HO UN PREFATTORE IN MENO $(z - \zeta_3)^{\sigma_3} \rightarrow$ COSTANTE MOLTO GRANDE $z \rightarrow \infty$

6 SE SCRIVO L'INTEGRALE GENERALE INTORNO ∞

$$\hat{u}(z) = K_1 z^{-(\alpha_3 - \sigma_3)} + K_2 z^{-(\beta_3 - \sigma_3)}$$

$$u(z) = (z - \xi_1)^{\sigma_1} (z - \xi_2)^{\sigma_2} \hat{u} \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} K_1 z^{-\alpha_3 + \sigma_3 + \sigma_1 + \sigma_2} + K_2 z^{-\beta_3 + \sigma_3}$$

$$= K_1 z^{-\alpha_3} + K_2 z^{-\beta_3}$$

COME VOLEVO.

ORA, VEDIAMO COME APPLICARE LE PROPRIETÀ
PER SEMPLIFICARE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

ESEMPIO 1 EQ. TOTALMENTE FUCHSIANA CON 2 PUNTI SINGOLARI

ABBIAMO VISTO

$$P(z) = \frac{A_1}{z - \xi_1} + \frac{A_2}{z - \xi_2}$$

$$, A_1 + A_2 = 2$$

$$Q(z) = \frac{B}{(z - \xi_1)^2 (z - \xi_2)^2}$$

$$1 - A_1 = A_2 - 1$$

E ANCHE ξ_1) $\alpha_1 + \beta_1 = 1 - p_0 = 1 - A_1$

$$\alpha_1 \beta_1 = q_0 = \frac{B}{(\xi_1 - \xi_2)^2}$$

$$\xi_2) \alpha_2 + \beta_2 = 1 - A_2 = A_1 - 1$$

$$\alpha_2 \beta_2 = \frac{B}{(\xi_2 - \xi_1)^2}$$

QUINDI, $\sum_{i=1}^2 \alpha_i + \beta_i = 0 \longrightarrow \alpha_1, \beta_1$ SONO GLI
OPPOSTI DI α_2, β_2

POSSO SCRIVERE

$$P \begin{Bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ \alpha & -\alpha \\ \beta & -\beta \end{Bmatrix} z \quad (1)$$

POSSO
AVERE

USARE
Z

LE PROPRIETÀ
ESPONENTI = 0

PER

ESEMPIO

PER

$$P \begin{Bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ \alpha & -\alpha \\ \beta & -\beta \end{Bmatrix} z = \frac{(z - \zeta_1)^\alpha}{(z - \zeta_2)^\alpha} P \begin{Bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ 0 & 0 \\ \beta - \alpha & \alpha - \beta \end{Bmatrix} z$$

SE TOLGO QUALCOSA
DALLA PRIMA COLUMNA
LO DEVO AGGIUNGERE
ALLA SECONDA (PROPRIETÀ
DI P)

ORA VORREI PORTARE LE SINGOLARITÀ KANDATE
IN 0 E ∞

$$= \frac{(z - \zeta_1)^\alpha}{(z - \zeta_2)^\alpha} P \begin{Bmatrix} 0 & \infty \\ 0 & 0 \\ \beta - \alpha & \alpha - \beta \end{Bmatrix} w \quad \text{con} \quad w = \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}$$

$$= w^\alpha P \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \infty \\ 0 & 0 \\ \beta - \alpha & \alpha - \beta \end{array} \right. w \left. \right\} \quad (2)$$

ORA, DALLE SOLUZIONI DI (2) FACENDO IL CAMBIO
DI VARIABILI OTTENGO QUELLE INIZIALI (1)

PERO' SO LA SOL DI (2) ESSENDO UNA E.D.
CON 2 PUNTI FUCHSIANI IN ZERO E ∞ LA SO.

$$\hookrightarrow u'' + \frac{A}{w} u' + \frac{B}{w^2} u = 0$$

$$p_0 = A \quad q_0 = B$$

$$f^2 + (A-1) + B = 0 \quad \rightsquigarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 1-A \\ f_1 f_2 = B \end{cases}$$

$$\text{QUINDI} \quad \beta - \alpha = 1 - A \quad \rightsquigarrow \begin{aligned} A &= 1 + \alpha - \beta \\ B &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u'' + \frac{1 + \alpha - \beta}{w} u' = 0$$

E RISOLVENDO TROVO

$$u = K_1 + K_2 w^{\beta - \alpha}$$

MOLTIPLICATO PER w^α

$$w^\alpha u = K_1 w^\alpha + K_2 w^\beta$$

E RIFACENDO IL CAMBIO DI VARIABILE
TROVO LA SOL DELLA EQ. INIZIALE

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

$$K_1 \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right)^\alpha + K_2 ()^\beta$$

ESEMPIO 2 CON 3 PUNTI FUCHSIANI

PRENDO UN P GENERICO

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \right. z \Bigg\} = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \right. w \Bigg\}$$

PORTO LE
SINGOLARITÀ IN
0, 1, ∞

CON

$$w = \frac{(z - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)}{(z - \xi_3)(\xi_2 - \xi_1)}$$

POSSO CAMBIARE z INDICI (IL 3 INDICE RISULTA
FISSATO SE CAMBIO GLI ALTRI)

$$= w^{\alpha_1} (1-w)^{\alpha_2} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & \beta_3 + \alpha_1 + \alpha_2 \end{array} \right. w \Bigg\}$$

QUINDI UNA QUALSIASI E.D. CON SINGOLARITÀ IN z_i
RISULTA EQUIVALENTEMENTE RAPPRESENTATA CON UN
 P CON SINGOLARITÀ IN $0, 1, \infty$, MA CHIARAMENTE
DIVERSI PARAMETRI.

E QUINDI SCRIVERE L'INTEGRALE GENERALE DI 
IN TERMINI DELLE SOLUZIONI DI UNA E.D. CON
SINGOLARITÀ IN $0, 1, \infty$ (USANDO LA TRASFORMAZIONE

$$W: \begin{pmatrix} z_1 \rightarrow 0 \\ z_2 \rightarrow 1 \\ z_3 \rightarrow \infty \end{pmatrix}$$

VISTO CIÒ DEVO "SOLO" CAPIRE COSA SONO LE
SOL DI 

NOTA CHE DIPENDE SOLO DA 3 PARAMETRI
POICHÉ IN P NE COMPAIONO 4 (2 SONO 0)
MA HO UN VINCOLO $\sum \alpha_i + \beta_i = 0$

EQUAZIONE | PERGEOMETRICA

È L'EQUAZIONE RAPPRESENTATA DA $\star$ CON SINGOLARITÀ IN $0, 1, \infty$ E DIPENDENTE DA 3 PARAMETRI.

LA POSSO SCRIVERE COSÌ: (CONVENZIONE)

$$\textcircled{1} \quad z(1-z)u'' + [c - (a+b+1)z]u' - abu = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}$$

GUARDO IL SUO SINGOLO P :

$$\begin{cases} P(z) = \frac{-c + (a+b+1)z}{z(z-1)} \\ Q(z) = \frac{ab}{z(z-1)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{io AVEVO} \\ P(z) &= \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-1} = \frac{z(A_1 + A_2) - A_1}{z(z-1)} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = a+b+1 \\ c = A_1 \end{cases} \\ Q(z) &= \frac{1}{z(z-1)} \left[\frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z-1} + c \right] \Rightarrow \begin{cases} c = ab \\ B_1 = B_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

EFFETTIVAMENTE HO SINGOLARITÀ FUCHSIANE IN $0, 1, \infty$.
CERCO GLI INDICI

$$o) \quad p_0 = \lim_{z \rightarrow 0} z P(z) = c$$

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 Q(z) = 0$$

$$g^2 + (c-1)g = 0 \quad \longrightarrow \quad g = 0 \quad g = 1-c$$

$$\Rightarrow \alpha = 0, \quad \beta = 1 - C$$

$$1) \quad p_0 = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) P(z) = a+b+1-C$$

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 Q(z) = 0$$

$$g^2 + (a+b-C)g = 0 \quad \leadsto g=0, \quad g=C-a-b$$

$$\Rightarrow \alpha = 0, \quad \beta = C - a - b$$

$$\infty) \quad p_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} z P(z) = a+b+1$$

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 Q(z) = ab$$

$$g^2 - (a+b)g + ab = 0 \quad \leadsto g=a, \quad g=b$$

$$\Rightarrow \alpha = a, \quad \beta = b$$

QUINDI TROVO EFFETTIVAMENTE

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} \right\}$$

CHE È IL SIMBOLO DI RIEMANN DELL'EQ. IPERGEOMETRICA.

QUELLA CHE NOI CHIAMIAMO FUNZIONE IPERGEOMETRICA $F(a, b, c, z)$ È LA SOLUZIONE REGOLARE NEL ORIGINE.

SO CHE SE $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$, OVVERO $1-c \notin \mathbb{Z}$
ALLORA LE SOLUZIONI SONO

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k \\ u_2 = z^{1-c} \sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m \end{array} \right.$$

$1-c \neq m \in \mathbb{Z}$

LEI ESISTE SE $c \neq 1-m$, m INTERO POSITIVO E $c \neq$ INTERO NEGATIVO

VEDO

$$\mu_1' = \sum_{k=0}^{\infty} k C_k z^{k-1}$$

$$\mu_1'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) C_k z^{k-2}$$

SE LI METTO IN 1 TROVO

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) C_k z^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) C_k z^k + C \sum_{k=0}^{\infty} k C_k z^{k-1} \rightarrow$$

$$- (a+b+1) \sum_{k=0}^{\infty} k C_k z^k - ab \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k = 0$$

DEVO SORRUPRE I VARI TERMINI

$$- \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k \left[k^2 - \cancel{k} + k(a+b+\cancel{1}) - ab \right] + \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k + Ck) C_k z^{k-1} = 0$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} (k+a)(k+b) C_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1+C) C_k z^{k-1} = 0$$

$$l = k-1$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} (k+a)(k+b) c_k z^k + \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)(l+c) c_{l+1} z^l = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \left[c_k (k+a)(k+b) + (k+1)(k+c) c_{k+1} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_{k+1} = \frac{(k+a)(k+b)}{(k+1)(k+c)} c_k} \quad (2)$$

POSSO SEMPRE DETERMINARE I COEFFICIENTI.

k PARTE DA 0
 $c (k+1) \neq 0 \quad \forall k$
 $\Rightarrow$ E SO $c \notin \mathbb{Z}$ ANCHE
 $(k+c) \neq 0 \quad \forall k$

$$c_0 = 1 \quad c_1 = \frac{ab}{2c}$$

$$c_2 = \frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)} \frac{ab}{c} = \frac{a(a+1)b(b+1)}{2c(c+1)}$$

E GENERICAMENTE SI TROVA

$$c_m = \frac{1}{m!} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m}$$

DOVE

SIMBOLO DI POCHHAMMER

$$(x)_m = x(x+1) \dots (x+m)$$

$$= \frac{\Gamma(x+m)}{\Gamma(x)}$$

QUINDI CONCLUDENDO

$$\begin{aligned} F(a, b, c, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} z^m \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+m) \Gamma(b+m)}{\Gamma(c+m)} z^m \end{aligned}$$

3

È HO ANCHE TROVATO UNA RAPPR. PER SERIE CHE
È VALIDA NEL CERCHIO DI RAGGIO 1
CENTRATO IN ZERO,

↓
QUINDI F È DEFINITA $|z| < 1$

⇓
POSSO TROVARE UNA SUA
CONTINUAZIONE ANALITICA → VEDI OG. 3 RAPPR. INTEGRALE

ORA VORREI UNA SOLUZIONE PER L'INTEGRALE
 GENERALE DELL'EQUAZIONE IPERGEOMETRICA E PER
 FARLO MI SERVE LA SECONDA SOLUZIONE.

$$u_2 = z^{1-c} \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$$

USANDO LE SUE PROPRIETÀ POSSO SCRIVERE

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{Bmatrix} z = z^{1-c} P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ c-1 & 0 & a-c+1 \\ 0 & c-a-b & b-c+1 \end{Bmatrix} z$$

E HO UN NUOVO P CON UN'ALTRA EQUAZIONE
 IPERGEOMETRICA (CHIARAMENTE DIVERSA)
 HA

$$a' = a - c + 1$$

$$b' = b - c + 1$$

$$1 - c' = c - 1 \Rightarrow c' = 2 - c$$

QUINDI HA UNA $F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z)$ CHE
 MOLTIPLICATA PER z^{1-c} DEDENTA u_2

$$\boxed{F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z) z^{1-c} = u_2}$$

È SE μ RETTO CON $1 - c \notin \mathbb{Z}$ ALLORA
 $\mu_2 \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z^{1-c}$ È LINEARMENTE INDIPENDENTE DA

$\mu_1 \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \text{cost}$

QUINDI SE $1 - c \notin \mathbb{Z}$ L'INTEGRALE GENERALE SI
 PUÒ SCRIVERE COME:

$$\mu(z) = \kappa_1 F(a, b, c, z) + \kappa_2 z^{1-c} F(a+1-c, b+1-c, 2-c, z)$$

MA COSA SUCCEDDE SE $1 - c \in \mathbb{Z}$? $\Rightarrow c \in \mathbb{Z}$

⊕ $c = -N \in \mathbb{Z}$ ALLORA μ_1 NON È DEFINITA

DALLA
 NON
 POLI
 DEF
 HO
 $\Gamma(c)$
 DI
 F
 CHE
 VEDO CHE A
 IN $-N$ HA

MA μ_2 ESISTE

④ $C = N \in \mathbb{Z}$ ($N = 2, 3, \dots$) ALLORA μ_1 ESISTE
 MA μ_2 NO
 $\hookrightarrow z^{1-C}$ DA POLO

⑤ $C = -1$ ENTRAMBE μ_1, μ_2 ESISTONO, MA
 SONO UGUALI $\mu_1 = \mu_2$

QUINDI SE $C \in \mathbb{Z}$ UNA DELLE DUE SOL NON ESISTE
 E SONO NEL CASO DEL TEOREMA DI FUCHS
 CON UN $\log$ NELLA 2° SOL.

SE PRENDO $\textcircled{3}$ E MI METTO CON $C = -N$
 ($N \geq 0$) ALLORA NON È DEFINITA PERCHÈ HO UN
 POLO DA $T'(C)$ PERÒ ESSENDO EQ. DIFF.
 LINEARE LA NORMALIZZAZIONE DELLA FUNZIONE
 È IRRELEVANTE E POTREI CONSIDERARE AL
 POSTO $\bar{F}$

$$\bar{F}(a, b, c, z) = \frac{1}{T'(C)} F(a, b, c, z)$$

CHE SAREBBE PERFETTAMENTE DEFINITA ANCHE SE $c = -N \in \mathbb{Z}$

MA IN REALTÀ SI PUÒ DIMOSTRARE CHE
 $\bar{F}$ IN $c = -N$ È UGUALE AD F

$$\bar{F}(a, b, -N, z) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)}{\Gamma(-N+m)} z^m$$

SE GUARDO BENE SE $m < N$ HO $-N+m$
 E $\frac{1}{\Gamma(-N+m)} = 0 \Rightarrow$ QUINDI I PRIMI N TERMINI DI $\bar{F}$
 SONO TUTTI NULLI

$$\bar{F}(a, b, -N, z) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)}{\Gamma(-N+m)} z^m$$

CAMBIO INDICE $m = k + N + 1$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{(k+N+1)!}_{k! \cdot \underbrace{(k+1) \dots (k+N+1)}}} \frac{\Gamma(a+k+N+1)\Gamma(b+k+N+1)}{\Gamma(k+1)} z^{k+N+1}$$

$\underbrace{\Gamma(k+1) \dots \Gamma(k+N+1)}_{= \Gamma(k+N+1)}$

$$= \frac{z^{N+1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{\Gamma(a+N+1+k)\Gamma(b+N+1+k)}{\Gamma(k+N+1)}$$

È UNA NUOVA IPERGEOMETRICA CON
PARAMETRI $a+N+1$, $b+N+1$ E $c=N+1$

SCRIVO:

$$= \frac{z^{N+1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+N+1)\Gamma(b+N+1)}{\Gamma(N+1)} \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(a+N+1)\Gamma(b+N+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \dots$$

QUINDA HO VISTO CHE

$$F(a+N+1, b+N+1, N+1, z)$$

$$\bar{F}(a, b, -N, z) = \frac{\Gamma(a+N+1)\Gamma(b+N+1)}{N! \Gamma(a)\Gamma(b)} z^{1+N} \cdot F(a+N+1, b+N+1, N+1, z)$$

= μ_2 A MENO DEL FATTORE DAVANTI



QUINDA SE CE' HO SEMPRE SOLO UNA
DELLE 2 SOLUZIONI

RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI $F(a, b, c, z)$

$$\text{so } \frac{\Gamma(b+m)}{\Gamma(c+m)} = B(b+m, c-b) \frac{1}{\Gamma(c-b)} \left(= \frac{\Gamma(b+m)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+m)\Gamma(c-b)} \right)$$

E QUINDI AVRO'

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(a)} B(b+n, c-b) z^n$$

RICORDO

$$B(b+n, c-b) = \int_0^1 dt \, t^{b+n-1} (1-t)^{c-b-1}$$

HO $\sum \in \int$ UNIF CONVERGENTI, QUINDI

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt (1-t)^{c-b-1} t^{b-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(a)} (tz)^n$$

DEVO

FARE

LA

SOMMA,

RICORDO

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$\binom{-\alpha}{k} = \frac{-\alpha(-\alpha-1)\dots(-\alpha-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k-1)}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^k (\alpha)_k}{k!}$$

COSÌ

$$\frac{\Gamma(a+m)}{m! \Gamma(a)} = \frac{(a)_m}{m!} = (-1)^m \binom{-a}{m}$$

QUINDI

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt (1-t)^{c-b-1} t^{b-1} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \binom{-a}{m} (-tz)^m}_{(1-tz)^{-a}}$$

$$\Rightarrow F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a}$$

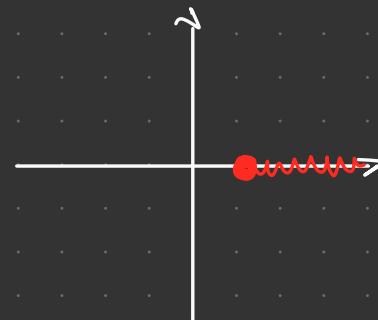
GLI UNICI VINCOLI CHE ABBIAMO SU QUESTA RAPPRESENTAZIONE SONO QUELLI CHE DICONO CHE $\exists \int_0^1$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(b) > 0$$

$$\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$$

E $\int_0^1$ È DEFINITO $\forall z$ MA PER QUALCHE a POTREI AVERE $(1-tz)^{-a}$ CHE ESPLODE IN $t=0$ O $t=1$ QUINDI VORREI IL VINCOLO

$$1-tz \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1] \Rightarrow z \notin [1, \infty)$$



$$1-tz=0 \Rightarrow tz=1 \leadsto z=\frac{1}{t}$$

$$\text{QUINDI VERO CHE SE } t \in [0, 1] \Rightarrow z \in [1, \infty)$$

OSS se $z \in [1, \infty) \Rightarrow z-1 \in [0, \infty)$
 $\Rightarrow 1-z \in (-\infty, 0] \Rightarrow \arg(1-z) = \pm \pi$

QUINDI DOVE VALE LA RAPPRESENTAZIONE
INTEGRALE: $z \notin [1, \infty) \Rightarrow |\arg(1-z)| < \pi - \delta$

TUTTO CIÒ
DIRAMAZIONE SUGGERISCE CHE $z=1$ È PUNTO DI
DI $F(a, b, c, z)$

POSSO ORA CALCOLARE QUANTO FA LA F IN
 $z = 1$ QUANDO CI ARRIVO DA SINISTRA

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt t^{b-1} (1-t)^{c-b-a-1}$$

DA QUA RIVEDO LA CONDIZIONE CHE ORA È :

$$\operatorname{Re}(b) > 0, \quad \operatorname{Re}(c-b-a) > 0$$

MA L'INTEGRALE È UNA BETA

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)}$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}$$

OSS TUTTO IL RAGIONAMENTO DA QUANDO ABBIAMO

SCRITTO

$$\frac{\Gamma(b+m)}{\Gamma(c+m)} = B(b+m, c-b) \frac{1}{\Gamma(c-b)}$$

AVREMO POTUTO FARLO CON $\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(c+m)}$ E QUINDI

RI-TROVARE UNA RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE CON
 a E b SCAMBIATI.

QUINDI IN F HANNO RUOLO SIMMETRICO a E b
E NEL CALCOLO DI $F(a, b, c, z \rightarrow 1^-)$ O
VERO ANCORA PIÙ ESPLICITAMENTE

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE IPERGEOMETRICA

PARTE DALLA CONOSCENZA DI

$$F(a, b, c, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} z^m$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)}{\Gamma(c+m)} z^m$$

1) $F(a, b, c, z) = F(b, a, c, z)$

2) $a, b = -N$, $N \in \mathbb{N} \Rightarrow F(-N, b, c, z) = P_N(z)$

POLINOMIO
GRADO N

MA QUESTO PERCHÉ NELLA DEF DI ROCHHAMMEL

$$(a)_m = (-N)_m = (-N)(-N+1) \dots (-N+m-1)$$

SI VEDE CHE $(-N)_N \neq 0$ MA $(-N)_{N+1} = 0$

QUINDI PEZZI DI F CON $m > N \Rightarrow$ COEFFICIENTI $= 0$

$\Rightarrow \int_-$ SI TRONCA

QUESTA STESSA COSA SI PUÒ VEDERE CON LA RAPPRESENTAZIONE CON LE Γ

HO UN $\Gamma(a)$ DAVANTI CHE IN $a = -N$ DA ZERO HA FINO A QUANDO $m < N$ ANCHE IN $\int_-$ HO $\Gamma(-N + m)$ CHE MI DAREBBE UN POLO BILANCIANDO LO ZERO.
PERO' SE $m > N$ $\Gamma(a + m)$ È REGOLARE E LO ZERO DAVANTI ANNULLA F

3) CI SONO MOLTE SITUAZIONI IN CUI
 $F(a, b, c, z) \longrightarrow$ FUNZIONE ELEMENTARE PER VALORI OPPORTUNI DEI PARAMETRI

3.1 $F(a, 1, a, z) = F(1, b, b, z) \xrightarrow{\text{SI SEMPLIFICANO I PEZZI}} \text{DIVERSI}$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1)_m}{m!} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} z^m = \frac{1}{1-z}$$

3.2 $F(a, b, b, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m}{m!} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-a}{m} (-z)^m = (1-z)^{-a}$

$$\boxed{3.3} \quad F(1, 1, 2, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (1)_n}{n! (2)_n} z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{z} \log(1-z)$$

$$\boxed{3.4} \quad F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, z^2\right) = \frac{\overset{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n) \cancel{\Gamma(1+n)}}{\cancel{n!} \Gamma(\frac{3}{2}+n)} z^{2n}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\frac{1}{2}+n} \quad \hookrightarrow \left(\frac{1}{2}+n\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

NOTA $\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \log(1+z) - \log(1-z)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + 1 \right) \frac{z^{n+1}}{n+1} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}$$

1 TERMINI
DISPARI
SPARISCONO

SARANNO
 $(-1)^{n+2}$

$$= \frac{1}{2z} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

3.5

ricordo

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$= z \frac{1}{2iz} \log \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$= z F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -z^2\right)$$

PERCHÈ METTO
 $z \mapsto iz$

$$4) \frac{dF}{dz} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{(k-1)!\Gamma(c+k)} z^{k-1}$$

$m = k-1$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1+m)\Gamma(b+1+m)}{m!\Gamma(c+1+m)} z^m$$

A meno prefattore è $F(a+1, b+1, c+1, z)$
 $\hookrightarrow \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(c+1)} F$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(c+1)} F(a+1, b+1, c+1, z)$$

$$= \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1, z)$$

E VALE IN GENERALE

$$\frac{d^m F}{dz^m} = \frac{\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)}{\Gamma(c+m)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(a+m, b+m, c+m, z)$$

CI SONO DELLE RELAZIONI TRA LA FUNZIONE IPERGEOMETRICA
E LE FUNZIONI CONTIGUE (OUVERO QUELLE IN CUI
UNO DEI QUESTI PARAMETRI VIENE SHIFTATO DI 1)

$$F(a+1), F(b+1), F(c+1)$$

$$5) (c-a-b)F + a(1-z)F(a+1) - (c-b)F(b+1) = 0$$

SÌ DIMOSTRANO SOLAMENTE ESPLICITANDO LE DEFINIZIONI

$$(c-a-b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n + a(1-z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n -$$

$$- (c-b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b-1)_n}{n! (c)_n} z^n = 0$$

BASTA NOTARE

$$(a+1)_n = (a)_n \frac{a+n}{a}$$

$$(b-1)_n = (b)_n \frac{(b-1)}{(b+n-1)}$$

COSÌ

DAL SECONDO TERMINE
PRENDO LA 1 E LA METTO FUORI DA [...] z

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n \left[(c-a-b) + (a+n) - (c-b) \frac{(b-1)}{(b+n-1)} \right] -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (a+n) \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^{n+1} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{VEDO} \quad [..] &= \frac{(c-b)(b+m-1) + m(b+m-1) - (c-b)(b-1)}{b+m-1} \\
 &= \frac{\cancel{(c-b)}(b-1) + m(c-b) + m(b+m-1) - \cancel{(c-b)}(b-1)}{b+m-1} \\
 &= \frac{m(c+m-1)}{(b+m-1)}
 \end{aligned}$$

IL 2° TERMINE:

$$m+1=k \rightarrow - \sum_{k=1}^{\infty} (a+k-1) \frac{(a)_{k-1} (b)_{k-1}}{(k-1)! (c)_{k-1}} z^k$$

$$(a+k-1)(a)_{k-1} = (a)_k$$

$$= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \frac{k(c+k-1)}{(b+k-1)} z^k \quad \rightarrow \text{POSSO PARTIRE DA 0}$$

$$= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \left(\frac{c+k-1}{b+k-1} k \right) z^k$$

QUINDI COMPLESSIVAMENTE

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{m! (c)_m} z^m \left[\frac{m(c+m-1)}{b+m-1} \right] - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{m! (c)_m} \left(\frac{m(c+m-1)}{(b+m-1)} \right) z^m = 0$$

QUINDI È VERIFICATO

NOTA COMBINANDO LA RELAZIONE TRA F E LE SUE
CONTIGUE CON QUELLE TRA $F(a \pm 1)$ CON LE
SUE DI CONTIGUE ALLORA TROVO RELAZIONI
TRA F ED F CON PARAMETRI SHIFTATI DI
M VALORI

$$\boxed{5.2} \quad F(a, b, c, z) - F(a, b, c-1, z) = -\frac{2b}{c(c-1)} z F(a+1, b+1, c+1, z)$$

TRASFORMAZIONI LINEARI DELL'EQ. IPERGEOMETRICA

HO VISTO CHE L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE IPERGEOMETRICA

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} \right\}$$

LA POSSO SCRIVERE IN TERMINI DELLA FUNZIONE IPERGEOMETRICA F NELLA VARIABILE z :

$$u(z) = A_1 u_1 + A_5 u_5$$

DOVE $u_1 = F(a, b, c, z)$ → FUNZIONE IPERGEOMETRICA

$$u_5 = z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, z-c, z), \quad 1-c \notin \mathbb{Z}$$

↪ 5 PER COMODITÀ

OSS SE USO LA RAPPRESENTAZIONE IN SERIE HO UN INTEGRALE GENERALE SCRITTO IN TERMINI DI SERIE DI POTENZE DI z CENTRATA IN $z=0$.

SE USO LA RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI u_1 E u_2
 NON SARE' NEPPURE VINCOLATO A VEDERE $M(z)$
 COEFF. POTENZE DI z .

ORA, PERO' VOUREI DETERMINARE COME SCRIVERE LE
 z SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI NELL'INTORNO
 DI 1 (QUINDI CON POTENZE $1-z$)

SI PUO' VEDERE DA P CHE SARANNO SCRIVIBILI ANCORA
 IN TERMINI DELLA FUNZIONE IPERGEOMETRICA.

$$P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{matrix} \right\} z = P \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{matrix} \right\} 1-z$$

VOGLIO CAMBIARE
 VARIABILE E
 SCAMBIARE 0 E 1

SIMBOLO DI UN'IPERGEOMETRICA
 IN CUI IN 0 HO UNO 0,
 HO LA VARIABILE $1-z$ E I
 PARAMETRI: a, b E $c' / 1-c' = c-a-b$

SCAMBIO DI
 RUOLO
 COEFF. DI 0

$$\uparrow z \rightarrow 0 \in c-a-b$$

$$= (1-z)^{c-a-b} P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ a+b-c & 0 & c-b \\ 0 & 1-c & c-a \end{matrix} \right\} 1-z$$

$$c' = 1 - c + a + b$$

IPERGEOMETRICA

CON ALL' ∞ I COEFFICIENTI

$$a' = c - b, \quad b' = c - a, \quad c'' / (1 - c'') = a + b - c$$

$$\rightarrow c'' = c - a - b + 1$$

QUINDI, QUESTI DUE P CONTENGONO COME SOLUZIONE
REGOLARE NELL'ORIGINE DELLA LORO VARIABILE

$$(1) \quad u_2 = F(a, b, a + b - c + 1, 1 - z)$$

$$(2) \quad u_6 = (1 - z)^{c-a-b} F(c-b, c-a, c-a-b+1, 1-z)$$

CHE SONO LE DUE SOLUZIONI NELL'INTORNO DI 1

(1) REGOLARE IN 1

(2) LA F È REGOLARE IN 1 E u_6 VA COME $(1-z)^{c-a-b}$
IN $z \rightarrow 1$ COME MI ASPETTAVO DALL'EQ. ORIGINARIA.

L'INTEGRALE GENERALE NELL'INTORNO DI 1 LO SCRIVO

$$u = A_2 u_2 + A_6 u_6$$

POSSO FARE LO STESSO RAGIONAMENTO ALL' ∞

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{Bmatrix} z = P \begin{Bmatrix} \infty & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{Bmatrix} \frac{1}{z}$$

SCAMBIO
0 E ∞

$$= z^{-a} P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ b-a & c-a-b & 1+a-c \end{Bmatrix} \frac{1}{z}$$

POSSO AZZERARE
UN INDICE DI 0



OPPURE

$$= z^{-b} P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ a-b & 0 & b \\ 0 & c-a-b & 1+b-c \end{Bmatrix} \frac{1}{z}$$

QUINDI HO DI NUOVO 2 SOLUZIONI

$$u_3 = z^{-a} F(a, 1+a-c, 1+a-b, \frac{1}{z})$$

$$c' / 1 - c' = b - a \rightarrow c' = 1 + a - b$$

$$u_4 = z^{-b} F(b, 1+b-c, 1+b-a, \frac{1}{z})$$

$$c'' / 1 - c'' = a - b \rightarrow c'' = 1 + b - a$$

CHE SI COMPORTANO ALL'OO
COME PREVEDEVA P ORIGINALI, POICHÉ
POTENZE NEGATIVE DI $z \rightarrow$ QUINDI, SONO REGOLARI
 z^{-a} LE z^{-b} CONTENGONO ALL'OO.

L'INTEGRALE GENERALE LO POTREI SCRIVERE COME

$$u = A_3 u_3 + A_4 u_4$$

QUINDI, FIN'ORA HO VISTO 3 MODI DI SCRIVERE
L'INTEGRALE GENERALE E LA STESSA u POSSO
SCRIVERLA IN MODI DIVERSI SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE
I PARAMETRI

DEVONO ESISTERE DELLE RELAZIONI TRA LE FUNZIONI
IPERGEOMETRICHE NELLA VARIABILE $z, 1-z, \frac{1}{z}$

IN REALTÀ È UNA COSA PIÙ GENERALE ESISTONO
TRASFORMAZIONI LINEARI TRA FUNZIONI IPERGEOMETRICHE
 CHE COLLEGANO $F(z)$ CON $F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$, DOVE $w = \frac{az+b}{cz+d}$
 È LA TRASFORMAZIONE LINEARE FRATTA CHE SCAMBIA
 TRA LORO I PUNTI $0, 1, \infty$

VEDIAMO CHI SONO LE TRASFORMAZIONI LINEARI FRATTE
 CHE SCAMBIANO $\{0, 1, \infty\}$

- $w = z$
 (IDENTICA) $0 \rightarrow 0 \quad 1 \rightarrow 1 \quad \infty \rightarrow \infty$

1) $w = 1 - z$ $0 \rightarrow 1 \quad 1 \rightarrow 0 \quad \infty \rightarrow \infty$

2) $w = \frac{1}{z}$ $0 \rightarrow \infty \quad 1 \rightarrow 1 \quad \infty \rightarrow 0$

3) $w = \frac{z}{z-1}$ $0 \rightarrow 0 \quad 1 \rightarrow \infty \quad \infty \rightarrow 1$

4) $w = \frac{1}{1-z}$ $0 \rightarrow 1 \quad 1 \rightarrow \infty \quad \infty \rightarrow 0$

5) $w = \frac{z-1}{z}$ $0 \rightarrow \infty$ $1 \rightarrow 0$ $\infty \rightarrow 1$

QUESTE SONO LE 6 TRASFORMAZIONI CHE SCAMBIANO I
 PUNTI E APPLICATI AL SIMBOLO P DI UNA F
 LA MANDANO ANCORA NEL SIMBOLO P DI UNA
 QUALCHE F

• POSSO VEDERE COME CAMBIA LA FUNZIONE IPERGEOMETRICA
 E QUALI SONO LE RELAZIONI TRA LE VARIE
 F SCRITTE IN VARIABILI DIVERSE

OSSERVA PRIMA

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} z \right\}$$

POSSO METTERE IN EVIDENZA
 UN FATTORE $1-z$ COSÌ
 DA SCAMBIARE I RUOLI
 DEGLI INDICI DI 1

$$= (1-z)^{c-a-b} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & a+b-c & c-b \\ 1-c & 0 & c-a \end{array} z \right\}$$

QUINDI VEDO CHE $\exists$ UN'ALTRA SOLUZIONE

$$v = (1-z)^{c-a-b} F(c-b, c-a, c, z)$$

(È UNA SOL SCRITTA NELL'INTORNO DELL'ORIGINE)
CHE È REGOLARE NELL'ORIGINE

MA CONOSCO GIÀ L'INTEGRALE GENERALE NELL'INTORNO
DELL'ORIGINE ($u(z) = A_1 u_1 + A_5 u_5$)



v DEVE POTER ESSERE SCRITTA COME OPPORTUNA
SOMMA DI u_1 E u_5

$$v = C_1 u_1 + C_5 u_5$$

PERÒ IN REALTÀ u_5 NON DOVREBBE ESSERE

POICHÉ $u_5 = z^{1-c} F(2-c+1, b-c+1, 2-c, z)$

NON È REGOLARE NELL'ORIGINE $\leadsto$ HA $z^{1-c}, 1-c \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$

$$v = C_1 u_1$$

PER FISSARE C_1 POSSO CALCOLARE $v(0) = C_1 \mu_1(0)$

$$v(0) = (1)^{c-a-b} F(c-b, c-a, c, 0) = 1$$

$$\mu_1(0) = F(\dots, 0) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = C_1 \cdot 1 \Rightarrow C_1 = 1$$

QUINDI

$$v = \mu_1$$

$$\Rightarrow v = (1-z)^{c-a-b} F(c-b, c-a, c, z) = F(a, b, c, z)$$

RELAZIONE DI AUTOTRASFORMAZIONE
DELLE FUNZIONI IPERGEOMETRICHE

CI SONO ALTRI 2 MODI DI SCRIVERE UNA SOL.
NELL'INTERNO DI 0.

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{Bmatrix} z = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & a & 0 \\ 1-c & b & c-a-b \end{Bmatrix} \frac{z}{z-1}$$

FACCIO LA TRASFORMAZIONE 3)

$$= \left(1 - \frac{z}{z-1}\right)^a P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & b-a & c-b \end{matrix} \frac{z}{z-1} \right\}$$

VUOLIO UN INDICE DI 1 NULO
 $\left(\frac{-1}{z-1}\right)^a = \left(\frac{1}{1-z}\right)^a = (1-z)^{-a}$

QUINDI ESISTE UN'ALTRA SOLUZIONE

$$x = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b, c, \frac{z}{z-1}\right)$$

NOTA SI PUÒ FARE LA STESSA COSA METTENDO IN EVIDENZA UNA POTENZA DI b E TROVARE

$$y = (1-z)^{-b} F\left(b, c-a, c, \frac{z}{z-1}\right)$$

E VEDO CHE x, y SONO SERIE DI POTENZE IN z (F È REGOLARE IN ZERO POICHÈ POSSO SVILUPPARLA IN SERIE DI POTENZE POSITIVE DI z)

$$\frac{z}{z-1} \rightarrow \frac{z^m}{(z-1)^m} \sim z^m \left(\text{SVILUPPO DI} \frac{1}{(z-1)^m} \right)$$

POI ABBIAMO I PREFATTORI $(1-z)^{-a}$ E $(1-z)^{-b}$ CHE SONO REGOLARI IN ZERO
 REGOLARI IN ZERO

$$\Rightarrow X = K \mu_1, \quad Y = \hat{K}_1 \mu_1$$

POSSO DI NUOVO VEDERE I COEFFICIENTI
 STA VOLTA IN UN MODO DIVERSO USANDO LA
 RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt \, t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a}$$

CAMBIO VARIABILE $s = 1-t$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 ds \, s^{c-b-1} (1-s)^{b-1} (1-z+sz)^{-a}$$

ME TO IN EVIDENZA $(1-z)^{-a}$

$$= \frac{\Gamma(c) (1-z)^{-a}}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \int_0^1 ds s^{c-b-1} (1-s)^{b-1} \left(1 - s \frac{z}{z-1}\right)^{-a}$$

$$= (1-z)^{-a} F(a, c-b, c, \frac{z}{z-1}) \quad (=x)$$

$$\Rightarrow x = k u_1 \quad \Rightarrow k = 1$$

ANALOGAMENTE SI TROVA $y = u_1$

RIASSUNTINO

HO

TROVATO

4

MODI

PER

SCRIVERE

 μ_1

$$\mu_1^{(1)} = F(a, b, c, z)$$

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b \end{Bmatrix}$$

GUARDANDO INTORNO
A ZERO
SCAMBIAMO
COEFF. DI 1
CHE NON GUARDIAMO

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & a+b-c & c-b & z \\ 1-c & 0 & c-a \end{Bmatrix}$$

SCAMBIO
PUNTI
2

$$v = \mu_1^{(2)} = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c, z)$$

$$\mu_1^{(3)} = (1-z)^{-a} F(a, c-b, c, \frac{z}{z-1})$$

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a & \frac{z}{z-1} \\ 1-c & b-a & c-b \end{Bmatrix}$$

$$\mu_1^{(4)} = (1-z)^{-b} F(b, c-a, c, \frac{z}{z-1})$$

oppure

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & a-b & b \\ 1-c & 0 & c-a \end{Bmatrix}$$

OSS HO TROVATO 4 MODI DIVERSI PER SCRIVERE LA
STESSA COSA

$$u_1 = u_1^{(1)} = u_1^{(2)} = u_1^{(3)} = u_1^{(4)}$$

CHIARAMENTE NON SONO TRA LORO LINEARMENTE INDIPEND.

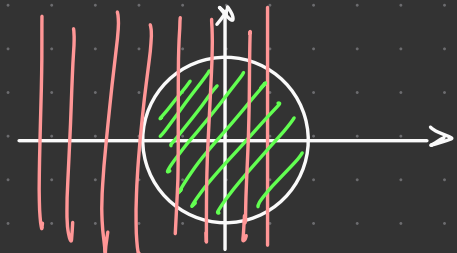
POSSO PERÒ VEDERE CHE $u_1^{(2)}$ NON MI INSEGNA
NULLA POICHÈ CONVERGE NELLA STESSA REGIONE DI
 $u_1^{(1)}$, OVVERO, CERCCHIO DI CONVERGENZA DI RAGGIO 1.

MENTRE $u_1^{(3)}$ E $u_1^{(4)}$ SONO CONTINUAZIONI ANALITICHE
DELLA $F(a, b, c, z)$ E CONVERGONO IN UNA ZONA
PIÙ AMPIA DEL CERCCHIO DI RAGGIO 1.

$$u_1^{(3)} \text{ CONVERGE } \left| \frac{z}{z-1} \right| < 1 \rightarrow |z-1|^2 > |z|^2$$
$$(x-1)^2 + y^2 > x^2 + y^2$$
$$-2x + 1 > 0$$

$$\boxed{x < \frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ CONVERGE NEL SEMIPIANO
DI z TC $\operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}$



conv. di $\sum$
di $F(a, b, c, z)$

N.B.

DAL P ORIGINARIO SO È CHE C'È UNA SOL REGOLARE
NELL'ORIGINE E NON È UN CASO CHE ABBA
TROVATO 4 MODI PER SCRIVERLA, PERCHÈ POSSO
FARLO PER TUTTI I PUNTI E IN OGNI
PUNTO PER CIASCUNA DELLE 2 SOLUZIONI

CHE VA
COME
 z^{1-c}

← CIOÈ OLTRE μ_5 CHE HO SCRITTO IO $\exists$ ALTRI
3 MODI DI SCRIVERE.

↓
POSSO USARE GLI STESSI TRUCCIAETTI CHE HO USATO
CON μ_1

- POSSO SCAMBIARE I 2 INDICI DI 1
E GUARDARE DAL 2° P VEDERE LA
SOLUZIONE CHE VA COME z^{1-c}
- POSSO FARE IL CAMBIO DI VARIABILE
LASCIANDO LO ZERO FERMATO E USANDO
LE PROPRIETÀ FAR USCIRE LA SOL
CHE VA COME z^{1-c}

MA IN GENERALE PER OGNI PUNTO E PER
OGNI TIPO DI SOLUZIONE POSSO FARE QUELLO
CHIAMATO HO FATTO PER LA SOLUZIONE REGOLARE
IN $z=0$

$\Rightarrow$ CI SONO QUINDI $6 \cdot 4 = 24$ MODI PER
SCRIVERE LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE
IPERGEOMETRICA IN TERMINI DI FUNZIONI
IPERGEOMETRICHE.

(CI SONO TUTTE E
24 SUL SITO INDICATO
NEL COMMENTO)

$\Rightarrow$ SOLUZIONI CLASSIFICATE DA
KUMMER

COME SOL. INDIPENDENTI USATO QUELLE RICAULATE
SOPRA $\rightarrow 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

0) $\mu_1 \quad \mu_5$

1) $\mu_2 \quad \mu_6$

∞) $\mu_3 \quad \mu_4$

SONO L.I. A COPPIE, MA NON TUTTE. IN TERMINI
DI CIASCUNA COPPIA IO RIESCO A SCRIVERE
L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE $\Rightarrow$ DEV'ESSERE UNA
RELAZIONE TRA LE VARIE COPPIE, POICHÉ DATA UNA
CERTA F POSSO SCRIVERLA COME C.L. DI
UNA DELLE 3 COPPIE.

RELAZIONE TRA $\mu_1 = F(a, b, c, z)$ E $\mu_2(z), \mu_6(z)$

μ_2 E μ_6 SONO L.I. E L'INTEGRALE GENERALE LO SCRIVO COME UNA LORO C.L. $\leadsto \mu_1$ LA POSSO ESPRIMERE COME UNA LORO C.L.

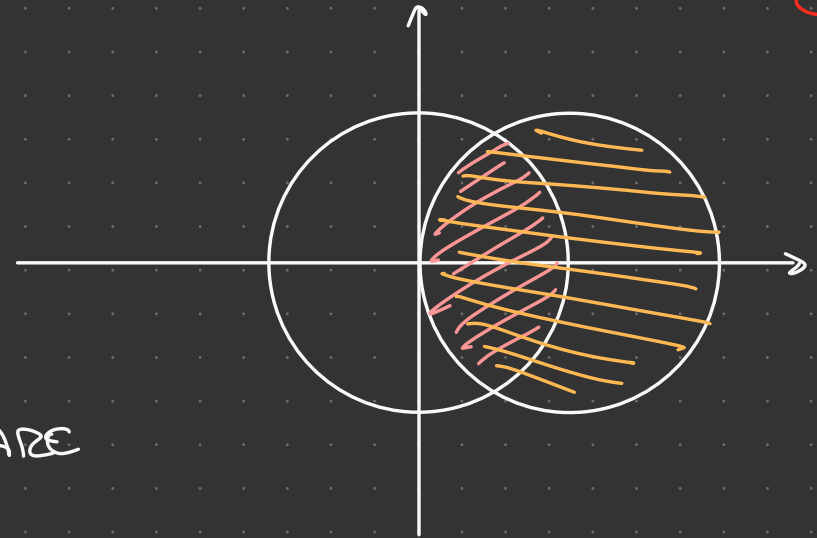
$$F(a, b, c, z) = C_1 F(a, b, a+b+1-c, 1-z) + C_2 (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c+1-a-b, 1-z)$$

$F(z)$ CONVERGE PER $|z| < 1$

$F(1-z)$ CONVERGE PER $|1-z| < 1$

QUINDI HO UNA REGIONE IN CUI ENTRAMBE LE SERIE SONO DEFINITE E LÌ POSSO VERIFICARE L'UGUAGLIANZA

DOVE ENTRAMBE CONVERGONO DEVO TROVARE UN'IDENTITÀ ALGEBRICA
ALTRIMENTI IL 2° MEMBRO LO POSSO VEDERE COME CONTINUAZIONE ANALITICA NEL CERCHIO



(1)

PER FISSARE I COEFFICIENTI POSSO CALCOLARE IL 1°
E IL 2° MEMBRO IN UN PUNTO IN
CUI ENTRAMBI SONO DEFINITI

PERÒ NESSUNO DEI DUE È
FACILE DA ESPRIMERE POICHÈ
RICHIEDEREBBE DI SOMMARE LA
SERIE

POSSIAMO USARE LA RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE, COSÌ
LA COSA SI SEMPLIFICA UN PO' POICHÈ ABBIAMO
2 PUNTI IN CUI È FACILE CALCOLARE I 2
PUNTI.

IO SO QUANTO FA F DOVE L'ARGOMENTO SI
ANNULLA ($= 1$), MA CON LA RAPP. INTEGRALE SO
ANCHE

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}$$

CHE SI PORTA DIETRO LE CONDIZIONI: $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$
 $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$

MA SO ANCHE DIRE

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} F(\alpha, \beta, \gamma, 1-z) = \lim_{w \rightarrow 1^-} F(\alpha, \beta, \gamma, w)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}$$

VALIDO SE:

$$\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\beta) > 0$$

$$\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$$

QUINDI, POSSO PARAGONARE I DUE MEMBRI PRIMA
IN 0 E POI IN 1.

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} {}^{(1)} \Rightarrow 1 = C_1 \frac{\Gamma(a+b+1-c) \Gamma(1-c)}{\Gamma(b+1-c) \Gamma(a+1-c)} + C_2 \frac{\Gamma(c+1-a-b) \Gamma(1-c)}{\Gamma(1-b) \Gamma(1-a)}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} {}^{(1)} \Rightarrow \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} = C_1 + C_2 \cdot 0 \cdot 1 = C_1$$

QUINDI, SE SOSTITUISCO C_1 NELLA PRIMA TROVO

$$1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \frac{\Gamma(a+b+1-c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(b+1-c)\Gamma(a+1-c)} + c_2 \frac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-b)\Gamma(1-a)}$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{\Gamma(1-b)\Gamma(1-a)}{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(1-c)} \left[1 - \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \frac{\Gamma(a+b+1-c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(b+1-c)\Gamma(a+1-c)} \right]$$

NON FACCIO IL DENOMINATOR COMUNE, MA METTO LE
 Γ A NUMERATORE IN EVIDENZA COSÌ HO UNA
 SEMPLIFICAZIONE DIRETTA $\Gamma(1-c)$ E UN'ALTRA SCRIVENDO
 $(c-a-b)\Gamma(c-a-b) = \Gamma(1+c-a-b)$

$$= \frac{\Gamma(1-b)\Gamma(1-a)\Gamma(c)\Gamma(a+b+1-c)}{c-a-b} T$$

DOVE

$$T = \frac{1}{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b+1-c)\Gamma(1-c)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(b+1-c)\Gamma(a+1-c)}$$

E SO

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

USANDO RIPETUTAMENTE POSSO TROVARE

$$T = \frac{1}{\pi^2} \left[\sin(\pi c) \sin(\pi(c-a-b)) - \sin(\pi(c-a)) \sin(\pi(c-b)) \right]$$

RICORDO $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$

$$T = \frac{1}{2\pi^2} \left[\cos(\pi(a+b)) - \cancel{\cos(\pi(zc-a-b))} - \cos(\pi(b-a)) + \cancel{\cos(\pi(zc-a-b))} \right]$$

$$= - \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} \cos(\pi(b-a)) - \frac{1}{2} \cos(\pi(b+a)) \right]$$

POTREI RIUSARE LA STESSA FORMULA TRIGONOMETRICA

$$T = - \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi a) \sin(\pi b)$$

RIUSO LA FORMULA RIQUADRATA NELLA PAG DI PRIMA

$$T = - \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)\Gamma(b)\Gamma(1-b)}$$

QUINDI TROVO

$$C_2 = \frac{\Gamma(\cancel{1-b})\Gamma(\cancel{1-a})\Gamma(c)\Gamma(a+b+1-c)}{c-a-b} \frac{(-1)}{\Gamma(a)\Gamma(\cancel{1-a})\Gamma(b)\Gamma(\cancel{1-b})}$$

USANDO IL MEMO SUL DEN TROVO L' IN MEZZO

$$\frac{\Gamma(a+b-c+1)}{a+b-c} \text{ CHE SO } = \Gamma(a+b-c)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}}$$

E SAPENDO ANCHE

$$c_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}$$

QUINDI POSSO RISCRIVERE (1)

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} F(a, b, a+b-c+1, 1-z) + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, 1+c-a-b, 1-z) \quad (2)$$



EQUAZIONE CHE MI DICE COME POSSIAMO ESPRIMERE
LA F DELLA VARIABILE Z IN TERMINI DI
F DI VARIABILE 1-z

OSS DA $\textcircled{2}$ SI VEDE BENISSIMO CHE IN $z = -1$
LA $F(a, b, c, z)$ HA UN PUNTO DI DIRAMAZIONE

VEDO

$$F(a, b, c, z) \underset{z \rightarrow -1}{\sim} K(c, -z)^{c-a-b}$$

→ RE CO DANNO LE Γ

IN GENERALE $c-a-b \in \mathbb{Z}$ E IN $z = -1$ HO P.T.O
DI DIRAMAZIONE

I VINCOLI CHE HO SU $\textcircled{2}$ SONO SICURAMENTE QUELLI
DATI DALLE Γ

LIMITI DI VALIDITÀ:

• $c \neq -n$ POICHÉ C'È $\Gamma(c)$

→ RISOLVIBILE PERCHÉ PRESENTE $\Gamma(c)$ AL SECONDO
MEMBRO E HO C ANCHE IN $\Gamma \Rightarrow$ SI
BASTEREBBE DIVIDERE AMB I MEMBRI PER
 $\Gamma(c)$ E SONO APPOSTO.

PIÙ IMPORTANTE INVECE:

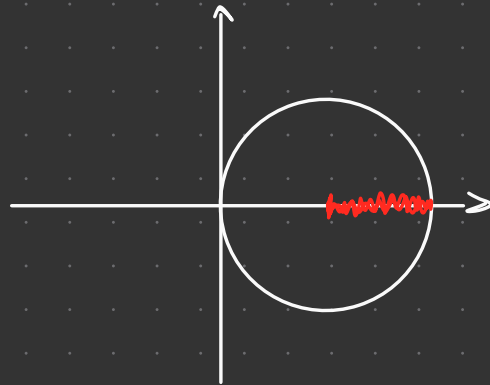
• $c-a-b \notin \mathbb{Z}$

POICHÉ HO $\Gamma(c-a-b)$ E $\Gamma(a+b-c)$
E SE NON VALESSE NON POTREI SCRIVERE
F COME C.L. DEI 2 PEZZI

SE VEDO LE F SCRITTE COME SERIE VEDO IL 2°
MEMBRO COME CONTINUAZIONE ANALITICA DELLA F
(GIÀ DETTO PRIMA) PERÒ VERO È CHE LE F A
DX CONVERGONO NEL CERCHIO UNITARIO CENTRATO
IN 1, MA NON POSSO NON TENERE CONTO DEL
FATTORE $(1-z)^{c-a-b}$ CHE HA UN TAGLIO TRA 1 E ∞



2° MEMBRO CONT. ANALITICA DEL PRIMO A $|z-1| < 1$
E $z \notin [1, 2]$



PIÙ INTERESSANTE SE USIAMO LE RAPPRESENTAZIONI
INTEGRALI PER LE F

LIMITI DI VALIDITÀ:

- 1° MEMBRO DEFINITO PER $z \notin [1, +\infty)$

TROVATA CHIEDENDO
CHE $(1-tz)$

CHE POSSO ANCHE SCRIVERE COME

$$\textcircled{?} |\arg(1-z)| < \pi$$

⦿ POTEVA ESSERE UNA CONDIZIONE UN PO' ANONIMA QUANDO
L'ABBIAMO TROVATA PARLANDO DI RAPP. INTEGRALE, MA
IN $\textcircled{2}$ NEL MEMBRO DI DX ABBIAMO UN TERMINE
POLIDROMO CHE NON È BEN DEFINITO SE NON
SPECIFICO DOVE STA L'ARGOMENTO, QUINDI, CHIEDENDO
⦿ ALLA $F(a, b, c, z)$ RENDE NON AMBIGUO
IL FATTORE $(1-z)^{c-a-b}$

- LE F A 2° MEMBRO SONO DEFINITE SE

$$1-t(1-z) \neq 0 \rightarrow z = \frac{t-1}{t}$$

t PARAMETRO
RAPP. INTEGRALE
 $t \in (0, 1)$

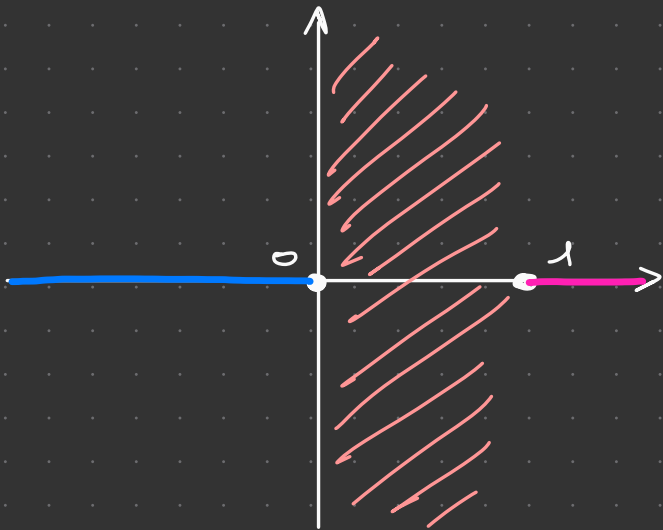
$$t = 0^+ \Rightarrow z = -\infty$$

$$t = 1^- \Rightarrow z = 0^-$$

$$\Rightarrow z \notin (-\infty, 0)$$

QUINDI HO DI NUOVO UN TAGLIO TRA $-\infty$ E 0

QUINDI AFFINCHÉ TUTTI E z MEMBRI SIANO DEFINITI, DEVO AVERE



$F(z)$ NON È DEFINITA

$F(1-z)$ NON DEFINITA

SONO DEFINITE ENTRAMBE COME SERIE

QUINDI SE VOGLIO L'UGUAGLIANZA DEVO METTERMI IN QUALUNQUE PUNTO DI $\mathbb{C}$ CHE NON STIA SUI TAGLI

VERIFICARE
VUOL DIRE

L'UGUAGLIANZA
PRENDERE UN

UNA
TRA

ZONA
0,1

BUONA
CHE

È
È

QUELLA
ANCHE

PUNTO, SOMMARE LE
SERIE E VEDERE CHE
I VALORI COINCIDONO

QUELLA IN CUI I 2
CERCHI DI CONVERGENZA
SI INTERSECAVANO.

USANDO LA RELAZIONE DI RICORDENZA POTREI AVERE
UNA ZONA DI CONVERGENZA MOLTO PIÙ AMPIA

IN PUNTI DIVERSI POSSO VEDERE UN MEMBRO
COME CONTINUAZIONE ANALITICA DELL'ALTRO

$$\operatorname{Re} > 1$$

IL 2° È
CONT. ANALIT.
DEL 1°

$$\operatorname{Re} < 0$$

IL 1° È
CONT. ANALITICA
DEL 2°

ABBIAMO CAPITO QUESTE COSE, MA IL NOSTRO INTENTO
ORA È TROVARE RELAZIONI TRA $F(z)$ E $F(1/z)$

NON SI PUÒ TROVARE IN MODO
DIRETTO POICHÉ LE 2 F CONVERGONO
IN z INSIEME, DISGIUNTI

$F(z)$ CONV NEL CERCHIO UNITARIO
IN 0

$F(1-z)$ CONV FUORI CERCHIO UNIT.
IN 0

PASSAGGIO INTERMEDIO:

TROVO LA RELAZIONE TRA $F(z)$ E $F(1/z)$

CONOSCIAMO PERÒ LA RELAZIONE DI AUTOTRASFORMAZIONE DI $F(z)$

$$F(a, b, c, z) = (1-z)^{-a} F(a, c-b, c, \frac{z}{z-1})$$

PERÒ DI LUI POSSO DIRE CHE È C.L. DELLE
FUNZIONI F CON VARIABILE $1 - \frac{z}{z-1}$ LA SUA VARIABILE
(COME FACCO NELLA
RELAZIONE (2))

$$1 - \frac{z}{z-1} = \frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z}$$

QUINDI

$$F(a, b, c, z) = (1-z)^{-a} \left[\frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a) \Gamma(b)} F(a, c-b, a-b+1, \frac{1}{1-z}) + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)} \frac{1}{(1-z)^{b-a}} F(c-a, b, b-a+1, \frac{1}{1-z}) \right]$$

COSÌ TROVO UNA RELAZIONE TRA LA $F(z)$ ED $F(\frac{1}{1-z})$

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a) \Gamma(b)} (1-z)^{-a} F(a, c-b, a-b+1, \frac{1}{1-z}) + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)} (1-z)^{-b} F(c-a, b, b-a+1, \frac{1}{1-z})$$

3

VEDIAMO I LIMITI DI VALIDITÀ:

- $c \neq -n$ POICHÉ $(\Gamma(c) \rightarrow +\infty)$

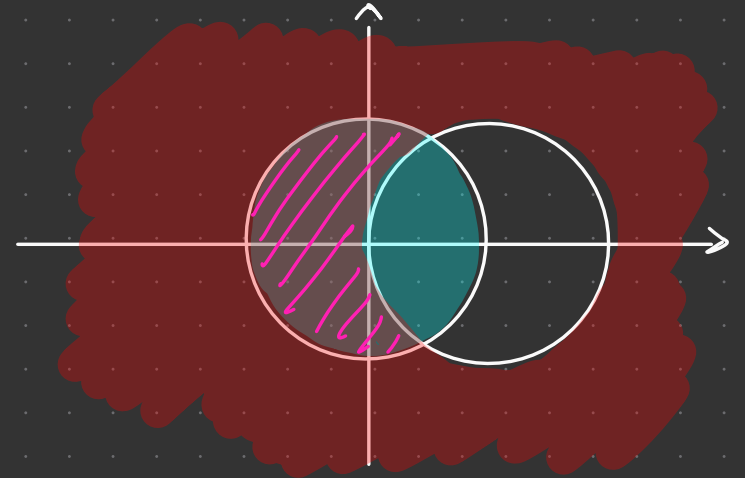
→ VINCOLO AGGIRABILE
POICHÉ POTREI
DIVIDERE PER $\Gamma(c)$
E VEDERLO COME
FATTORE DI
NORMALIZZAZIONE

• $b - a \in \mathbb{Z}$ (POICHÉ 4 SONO LE ALTRE DUE T')

SO CHE $F(z)$ CONVERGE IN $|z| < 1$
INVECE $F(\frac{1}{1-z})$ CONVERGE IN $|1-z| > 1$

QUINDI $F(z)$ DENTRO CERCHIO UNITARIO CENTRATO IN 0,
MENTRE $F(\frac{1}{1-z})$ FUORI DAL CERCHIO UNITARIO
CENTRATO IN 1.

VEDO CHE C'È UNA ZONA IN
CUI LE DUE ZONE DI
CONVERGENZA SI SOVRAPPONGONO
E POTREI VERIFICARE
L'UGUAGLIANZA CHE HO TROVATO.

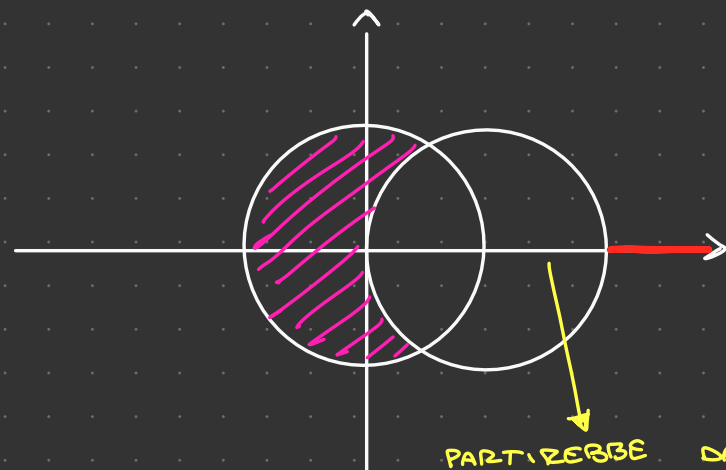


NOTA LE RELAZIONI (2) E (3) LE HO OTTENUTE
IN MODI DIVERSI.

LA (2) HO IMPOSTO CHE DOVESSE ESSERE UNA
GENERICA C.L. DI $F(1-z)$, MA PER LA
(3) NON POTREI FARLO VISTO CHE
I MEMBRI DI DX NON FANNO PARTE
DELLE SOL. FONDAMENTALI, MA (3) L'HO
TROVATA USANDO LA (2) CON UNA F
CON DIVERSO ARGOMENTO.

QUELLO CHE HO TROVATO ORA PERÒ È CHE ENTRAMBI I PEZZI A DX HANNO UN PEZZO POLIDROICO $(1-z)$ E AVRÒ SEMPRE UN TAGLIO TRA 1 E ∞ CHE MI CONVIENE NON ATTRAVERSI LA ZONA COMUNE DI CONVERGENZA

QUINDI, ANCORA, IL 2° MEMBRO POSSO VEDERLO COME CONTINUAZIONE ANALITICA DI $F(z)$ PER $|z-1| > 1$ CON $z \notin [2, +\infty)$



QUESTO SE LE INTERPRETO COME SERIE

PARTIREBBE DA 1 IL TAGLIO, MA NON LO VEDO PERCHÉ NESSUNA DELLE DUE CONVERGE IN QUEL CERCHIO

SE INTERPRETO $F(z)$ COME RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE:

1° MEMBRO ESISTE SE $z \notin [1, \infty) \leadsto |\arg(1-z)| < \pi$

$\Rightarrow (1-z)^{-a} (1-z)^{-b}$ SONO BEN DEFINITI

2° MEMBRO ESISTE SE $1 - t \frac{1}{1-z} = 0 \leadsto z = 1 - t$

$\Rightarrow \exists$ SE $z \notin [0, 1]$

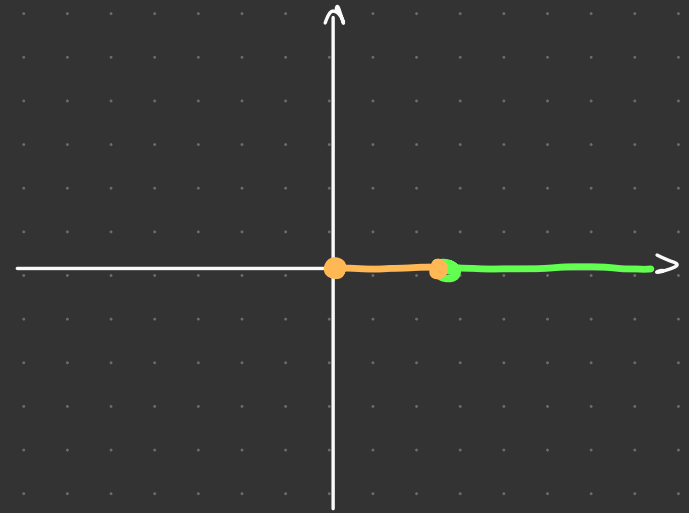
$t = 0^+ \rightarrow z = 1^-$

$t = 1^- \rightarrow z = 0^+$

MA QUINDI COMPLESSIVAMENTE:

1° MEMBRO TAGLIO DA $[1, +\infty)$

2° MEMBRO TAGLIO DA $[0, 1]$



QUINDI SE COMPLESSIVAMENTE NON
MI METTO SU $\mathbb{R}_+$ LA 3
MI DA UN'IDENTITÀ.

SE INVECE VADO SU $\mathbb{R}_+$ POTREI AVERE O SOLO IL
PRIMO O SOLO IL SECONDO

GLOBALMENTE $z \notin [0, +\infty)$

NOTA (DAL LIBRO DI PASSARINO) SE METTO INSIEME LE
RICHIESTE DEI 2 MEMBRI POTREI SCRIVERE

$$|\arg(-z)| < \pi$$

CIOE' LO POSSO ANCHE VEDERE COME:

$$\left| \arg\left(1 - \frac{1}{1-z}\right) \right| < \pi \leadsto \left| \arg\left(\frac{-z}{1-z}\right) \right| < \pi$$

↑
RICHIESTA SUL 2°

MA SUL PRIMO SE TENGO CONTO CHE $1-z \in \mathbb{R}_+$
POICHÈ HO IL VINCOLO $|\arg(1-z)| < \pi$, QUINDI $1-z$
NON È NEGATIVO $\rightarrow$ ALLORA 0 È $\notin$ (E NON
DA PROBLEMI) 0 È REALE POSITIVO, QUINDI $|\arg(1-z)| = 0$

ALLORA OTTENDO APPUNTO CHE $|\arg \frac{-z}{1-z}| > |\arg(-z)|$
E QUINDI HO LA CONDIZIONE

$$|\arg(-z)| < \pi$$

ORA POSSO PROVARE A TROVARE UNA RELAZIONE TRA
 $F(z)$ E $F(\frac{1}{z})$

OSSERVO CHE $1 - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{z-1}$

E CHE $\frac{\frac{1}{1-z}}{\frac{1}{1-z} - 1} = \frac{1}{1-1+z} = \frac{1}{z}$

QUESTO MI DICE CHE POTREI IN QUALCUNE MODI
RIAPPLICARE LA RELAZIONE DI AUTOTRASFORMAZIONE
POICHÈ AVEVO VISTO CHE METTEVA IN RELAZIONE
 z CON $\frac{z}{z-1}$, QUINDI LA F DI $\frac{1}{1-z}$ LA POSSO
METTERE IN RELAZIONE CON $\frac{\frac{1}{1-z}}{\frac{1}{1-z} - 1}$

QUINDI PRENDO LE F DA (3)

$$F(a, c-b, a-b+1, \frac{1}{1-z}) = \left(\frac{z}{z-1}\right)^{-a} F(a, a-c+1, a-b+1, \frac{1}{z})$$

$$F(c-a, b, b-a+1, \frac{1}{1-z}) = \left(\frac{z}{z-1}\right)^{-b} F(b, b-c+1, b-a+1, \frac{1}{z})$$

QUINDI POTREI RISCRIVERE LA (3) LEGANDO $F(z)$ CON
DELLE $F(1/z)$

$$F(a, b, c, z) = (-z)^{-a} \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a) \Gamma(b)} F(a, a-c+1, a-b+1, \frac{1}{z}) +$$
$$+ (-z)^{-b} \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)} F(b, b-c+1, b-a+1, \frac{1}{z})$$

(4)

QUINDI LA (4) MI LEGA FINALMENTE $F(z)$ CON $F(1/z)$

VEDO DA NUOVO I LIMITI DI VALIDITÀ:

$$\bullet \quad c \notin \mathbb{N}$$

• $a-b \notin \mathbb{Z}$

SE LE VEDO COME SERIE:

1° MEMBRO DEFINITO PER $|z| < 1$

2° MEMBRO DEFINITO PER $|z| > 1$

QUINDI COME GIÀ VISTO NON CI SONO ZONE COMUNI DI CONVERGENZA, MA VEDO IL 2° MEMBRO COME CONTINUAZIONE ANALITICA DEL 1° A $|z| > 1$, MA ALLLO STESSO TEMPO $z \notin [1, \infty)$

SE GUARDO LA RAPP. INTEGRALE

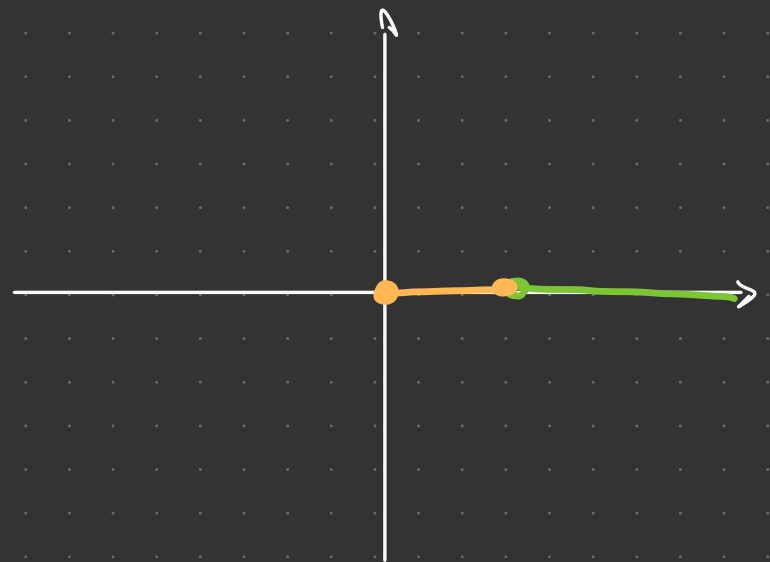
1° MEMBRO $z \notin [1, \infty)$

2° MEMBRO $1 - \frac{t}{z} \neq 0 \leadsto z \neq t$

$\Rightarrow$ $z \notin [0, 1]$

COMPLESSIVAMENTE

$z \notin [0, +\infty)$



QUINDI A QUESTO PUNTO ABBIAMO VISTO VARIE RELAZIONI
TRA $F(z)$ E F CON VARIABILI DIVERSE ($1-z, \frac{1}{z}, \frac{1}{1-z}$)
CHE SI BASANO SUL FATTO CHE SIAMO IN UN
RANGE DI PARAMETRI CHE RENDONO TUTTE E
DUE LE SOLUZIONI NELL'INTORNO CHE STIAMO CONSIDERANDO
(PER ES IN $\textcircled{2}$ IL PUNTO 1) BEN DEFINITE.

→ ABBIAMO ESCLUSO $c-a-b \in \mathbb{Z}$
SIA PERCHÈ Γ ESPLODE, MA ANCHE
PERCHÈ È IL 2° ESPONENTE DELLE
SOLUZIONI INTORNO AD 1 E SE
 $\in \mathbb{Z}$ NON È DETTO CHE LE DUE
 F A DX ESISTANO ENTRAMBE E
SIANO L.I. (SE $c-a-b = 0$ SONO UGUALI
E SICURAMENTE NON SONO L.I.) QUINDI
UNA DELLE 2 SOL DOVRÀ AVERE
IL TERMINE $\log$

QUINDI ORA MI CHIEDO SE LA RELAZIONE $\textcircled{2}$
CONTIENE ANCHE IL CASO PARTICOLARE DI $c-a-b$
INTERO E QUINDI POSSO RITROVARE L'ANDAMENTO
 $\log$ CON QUALCHE MAGHEGGIO NELLA STESSA FORMULA
DI $\textcircled{2}$

È VERO CHE (2) HA DEI LIMITI, SE $c-a-b \in \mathbb{Z}$
 MA ALLO STESSO TEMPO DA (2) RIUSCIAMO A
 RICAVARE QUAL È L'ANDAMENTO CORRETTO NEL CASO
 $c-a-b \in \mathbb{Z}$

LA RISCOVRO

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} F(a, b, a+b-c+1, 1-z) +$$

$$(2) + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, 1+c-a-b, 1-z)$$

USO LA DEF DI F IN TERMINI DI SERIE, MA
 SCRIVENDO I COEFFICIENTI IN TERMINI DI Γ

$$= \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} \frac{\Gamma(a+b-c+1)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k) \Gamma(b+k)}{k! \Gamma(a+b-c+1+k)} (1-z)^k +$$

$$+ \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \frac{\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(c-b) \Gamma(c-a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c-a+k) \Gamma(c-b+k)}{k! \Gamma(c-a-b+1+k)} (1-z)^{c-a-b} (1-z)^k$$

POSSO RACCOGLIERE E POSSO USARE $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \left[\frac{\pi}{\sin(\pi(c-a-b))} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{k!\Gamma(a+b-c+1+k)} (1-z)^k + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{\sin(\pi(a+b-c))} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c-a+k)\Gamma(c-b+k)}{k!\Gamma(c-a-b+1+k)} (1-z)^{c-a-b} (1-z)^k \right] \\ - \sin(\pi(c-a-b))$$

$$\textcircled{?} F(a,b,c,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \frac{\pi}{\sin(\pi(c-a-b))} [g_1(z) - g_2(z)]$$

DOVE

$$g_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{k!\Gamma(a+b-c+1+k)} (1-z)^k$$

$$g_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c-a+k)\Gamma(c-b+k)}{k!\Gamma(c-a-b+1+k)} (1-z)^{k+c-a-b}$$

POSSO VEDERE CHE SUCCEDE SE $c \rightarrow a+b+m$
 $c-a-b = m \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{c \rightarrow a+b+m} F(a, b, c, z) = \frac{0}{0}$$

È UN LIM CHE MI INTERESSA POICHÈ

$$c \rightarrow a+b+m \Rightarrow c-a-b = m \rightarrow \beta_1 = \alpha_1 + m \Rightarrow \text{LA SOL HA } \log(1-z)$$

LO ZERO A DEN RE LO DA IL SIN E A NUM
 HO ZERO POICHÈ $g_1 \xrightarrow{c \rightarrow a+b+m} g_2$

CONSIDERO $\boxed{m > 0} \rightarrow m < 0$ SCAMBIO g_1 E g_2

$$\lim_{c \rightarrow a+b+m} g_1(z) = \prod_{k=m}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k) \Gamma(b+k)}{k! \Gamma(1+k-m)}$$

$$\Gamma(\underbrace{a+b-c}_{-m} + 1 + k) = \Gamma(-m + 1 + k)$$

I PRIMI TERMINI SONO NULLI
 POICHÈ $-m + 1 + k < 0$ E IL
 PRIMO NON NULLO È $k = m$

CAMBIO INDICE $k = l + m$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+m+\ell) \Gamma(b+m+\ell)}{(\ell+m)! \underbrace{\Gamma(1+\ell)}_{\ell!}} (1-z)^{\ell+m}$$

INVECE

$$\lim_{c \rightarrow a+b+m} g_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+m+k) \Gamma(a+m+k)}{k! \Gamma(1+m+k)} (1-z)^{k+m}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+m+k) \Gamma(a+m+k)}{k! (m+k)!} (1-z)^{k+m} = g_1(z)$$

$\ell = k$

QUINDI, EFFETTIVAMENTE HO VERIFICATO CHE SE $CE \mathbb{Z}$
 HO FORMA INDETERMINATA QUINDI NON POSSO
 USARE  COSI' COM'E'.

FORMA $\frac{0}{0}$ FACCIO IL $\lim$ DELLE DERIVATE

$$\lim_{c \rightarrow a+b+m} \overline{F}(a, b, c, z) = \lim_{c \rightarrow a+b+m} $$

$$\textcircled{H} = \pi \frac{\Gamma(a+b+m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)} \lim_{c \rightarrow a+b+m} \left\{ \frac{\partial_c g_1 - g_2}{\partial_c \sin(\pi(c-a-b))} \right\}$$

$$= \cancel{\pi} \frac{\Gamma(a+b+m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)} \lim_{c \rightarrow a+b+m} \frac{\partial_c (g_1 - g_2)}{\cancel{\pi} \cos(\pi(c-a-b))}$$

$\cos(\pi m) = (-1)^m$

$$= (-1)^m \frac{\Gamma(a+b+m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)} \lim_{c \rightarrow a+b+m} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial c} g_1 - \frac{\partial}{\partial c} g_2 \right)}_G$$

CALCOLO G

$$\frac{\partial}{\partial c} g_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{k!} \left\{ \frac{\Gamma'(a+b-c+1+k)}{(\Gamma(a+b-c+1+k))^2} \right\} (1-z)^k$$

ricordo $\psi(\dots) = \frac{\Gamma'(\dots)}{\Gamma(\dots)}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{k! \Gamma(a+b-c+1+k)} \psi(a+b-c+1+k) (1-z)^k$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c-a+k)\Gamma(c-b+k)}{k! \Gamma(c-a-b+1+k)} (1-z)^{k+c-a-b} \right\}$$

= VERBANO 4 TERMINI, FAI I CONTI TU, SCRIVI $\frac{\partial}{\partial c} \Gamma(\dots) = \Gamma' = \frac{\Gamma'}{\Gamma} \Gamma = \psi \Gamma$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1-z)^{k+c-a-b} \frac{\Gamma(c-a+k)\Gamma(c-b+k)}{k! \Gamma(c-a-b+1+k)} \left[\log(1-z) + \psi(c-a+k) + \right. \\ \left. + \psi(c-b+k) - \psi(c-a-b+1+k) \right]$$

ORA DEVO FARE

$$\lim_{c \rightarrow a+b+m} \left(\frac{\partial g_1}{\partial c} - \frac{\partial g_2}{\partial c} \right)$$

POTREI FARLO CON M GENERICO
MA PER SEMPLICITÀ DI CONTI
SCELGO $m=0$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{k! \Gamma(1+k)} \psi(1+k) (1-z)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+k)\Gamma(a+k)}{k! \Gamma(1+k)} \left(\log(1-z) + \right. \\ \left. + \psi(b+k) + \psi(a+k) - \psi(1+k) \right) (1-z)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1-z)^k \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{k! \Gamma(1+k)} \left[2\psi(1+k) - \psi(b+k) - \psi(a+k) - \log(1-z) \right]$$

ORA IO METTO NELLA FORMULA COMPLETA

$$\lim_{c \rightarrow a+b} F(a, b, c, z) = F(a, b, a+b, z)$$

QUINDI

$$F(a, b, a+b, z) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)} \sum_{k=0}^{\infty} (1-z)^k \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{k! \Gamma(1+k)} \cdot \left[-\log(1-z) + \hat{C}(k) \right]$$

$2\psi(1+k) - \psi(b+k) - \psi(a+k)$ SONO
NUMERI CHE DIPENDONO DA k

$$= -\log(1-z) \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (1)_k} (1-z)^k + K \sum_{k=0}^{\infty} c_k (1-z)^k$$

$\swarrow$
 LE Γ DAVANTI.

$$F(a, b, a+b, z) = - \frac{\Gamma'(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \log(1-z) F(a, b, 1, 1-z) + K \sum_{k=0}^{\infty} c_k (1-z)^k$$

CHÉ È IL COMPORTAMENTO CHÉ LI ASPETTAREI
POICHÉ

$$c = a + b \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 = 0$$

QUINDI COME SOLUZIONI HO

$$u_1 = F(a, b, 1, 1-z) \longrightarrow \text{sol REGOLARE IN } z=1$$

$$u_2 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (1-z)^k + A F(a, b, 1, 1-z) \log(1-z)$$

ME
DICE
FUCHS

CHÉ È EFFETTIVAMENTE QUELLO CHÉ TROVIAMO.
OVVERO CHÉ $F(a, b, a+b, z)$, CHÉ È SOL DELL'EQ. I PERG.
PER $c = a + b$, SI PUÒ SCRIVERE IN TERMINI DELLE
SOLUZIONI INTORNO AD 1 (IL TERMINE $K \sum c_k (1-z)^k$
È LA C.L. TRA $\sum d_k (1-z)^k$ E $F(a, b, 1, 1-z)$ CHÉ

SONO ENTRAMBE REGOLARI IN z .)

$$F(a, b, a+b, z) = B_1 u_1 + B_2 u_2 = \\ = B_1 F(a, b, 1, 1-z) + B_2 \left[d_{\kappa} (1-z)^{\kappa} + B_2 A F(a, b, 1, 1-z) \log(1-z) \right]$$

RIASSUMENDO LE RELAZIONI CHE ABBIAMO TROVATO CHE CONNETTONO $F(z)$ CON $F(1-z)$ $\textcircled{2}$, A PRIMA VISTA VALGONO SOLO NEL RANGE DI PARAMETRI IN CUI ESISTONO LE 2 SOLUZIONI A DX L.I., MA SE LI INTERPRETO IN MANIERA OPPORTUNA RIESCO AD OTTENERE IL PEZZO $\log$ CHE MI ASPETTEREI, QUINDI, VUOL DIRE CHE LA $\textcircled{2}$ CONTIENE L'INTERA INFORMAZIONE SUL COMPORTAMENTO DELL'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE IPERGEOMETRICA IN TUTTO IL RANGE DEI PARAMETRI.

- VEDI "ESERCIZI FUNZIONI IPERGEOMETRICHE" SU MOODLE / PC
↳ SONO ES. STD. PER PREPARARE L'ESAME