

Sviluppi Asintotici

per parlare conviene ripassare θ e Θ .

considero due funzioni $f(z)$ e $\varphi(z)$ analitiche in $D \subset \mathbb{C}$ e un punto $z_0 \in [D]$
 $\xrightarrow{\text{chiusura di } D} = D \cup \partial D$

diciamo:

$$\oplus \quad f(z) = O(\varphi(z)) \quad z \rightarrow z_0, \quad z \in D \quad \text{se}$$
$$\exists I_\delta(z_0) \quad / \quad \left| \frac{f(z)}{\varphi(z)} \right| < M \quad \forall z \in D \cap I_\delta(z_0)$$

oppure

$$\exists I_\delta(z_0) \quad / \quad |f(z)| < A |\varphi(z)| \quad \text{con } A > 0$$
$$\forall z \in D \cap I_\delta(z_0)$$

quindi $f(z)$ e $\varphi(z)$ sono dello stesso ordine. La seconda formulazione è più generale perché vale anche se z_0 è p.to di accumulazione di zeri di φ

$$\textcircled{A} \quad f(z) = o(\varphi(z)) \quad z \rightarrow z_0 \quad \text{se}$$

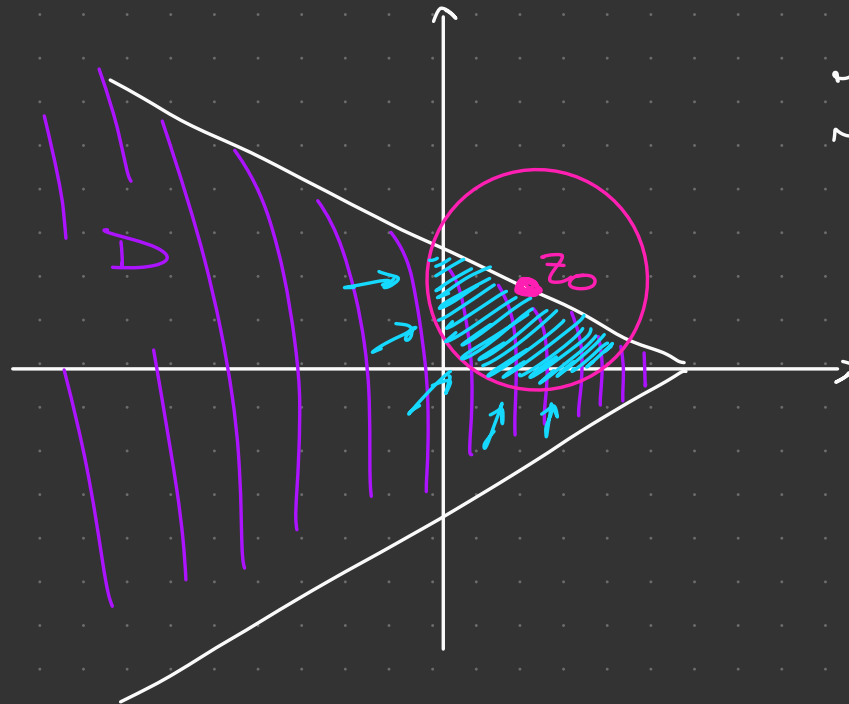
$$\exists I_\delta(z_0) \mid \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}} \frac{f(z)}{\varphi(z)} = 0 \quad \forall z \in D \cap I_\delta(z_0)$$

oppure

$$\exists I_\delta(z_0) \quad \forall \varepsilon > 0 \mid |f(z)| < \varepsilon |\varphi(z)| \quad \forall z \in D \cap I_\delta(z_0)$$

IDEA

GRAFICA:



MI CHIEDO CHE SUCCEDA
NELLA REGIONE AZZURRA

↓
COME SE VEDESSO
UN LIMITE DIREZIONALE
(ARRIVO A z_0 DA
DENTRO D)

DEF SUCCESIONE ASINTOTICA
 $\{\varphi_\ell(z)\}$ REGOLARI IN $D \subset \overline{\mathbb{C}}$

$\{ \}$ È UNA SUCCESIONE ASINTOTICA PER $z \rightarrow z_0 \in [D]$

SE $\varphi_\ell(z) = o(\varphi_{\ell-1}(z)) \quad z \rightarrow z_0, z \in D$

OGNI FUNZIONE È o DI QUELLA PRECEDENTE

ES $z_0 = \infty$, $\varphi_\ell = \frac{1}{z^\ell} g(z)$

oppure $\varphi_\ell = (z - z_0)^\ell g(z)$, $z_0 \in \mathbb{C}$

$\varphi_{\ell-1} = \frac{1}{z^{\ell-1}} z g(z)$

$\varphi_\ell = \frac{1}{z} \varphi_{\ell-1}$

$\frac{\varphi_\ell}{\varphi_{\ell-1}} = \frac{1}{z} \rightarrow 0$

DEF SVILUPPO ASINTOTICO

$f(z)$ ANALITICA IN $D \subset \bar{\mathbb{C}}$, f AMMETTE UNO SVILUPPO ASINTOTICO PER $z \rightarrow z_0$, $z \in D$

$$f(z) \underset{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}}{\sim} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \varphi_{\ell}(z)$$

SE: 1) $\{\varphi_{\ell}\}$ SUCCESSIONE ASINTOTICA PER $z \rightarrow z_0$, $z \in D$

2) IL RESTO m -ESIMO $R^m(z) = f(z) - \sum_{\ell=0}^{m-1} a_{\ell} \varphi_{\ell}$

È $O(\varphi_{m-1})$ PER $\begin{matrix} z \rightarrow z_0 \\ z \in D \end{matrix}$ → TOGLIAMO m TERMINI

IDEA: I TERMINI CHE NON USO SONO O DEI TERMINI CHE HO USATO

SE VALE POSSO SCRIVERE $f(z) \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \varphi_{\ell}(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \varphi_{\ell}(z) + O(\varphi_m(z))$

OSS UNA SERIE CONVERGENTE È UNA SERIE ASINTOTICA, MA IN GENERE UNA SERIE ASINTOTICA NON È UNA SERIE CONVERGENTE

ESEMPIO SVILUPPO ASINTOTICO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

$$F(s) = \mathcal{L}_s(f) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

CHE È DEFINITA PER $\operatorname{Re}(s) > \alpha_0$

$$\left(\alpha_0 = \begin{matrix} \text{ESTREMO} \\ \text{INFERIORE} \end{matrix} \right\} \alpha \} \quad \text{t.c.} \quad \operatorname{Re}(s) > \alpha \quad \exists F(s)$$

E SO

$$\mathcal{L}_s(f') = s \mathcal{L}_s(f) - f(0) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_s(f) = \frac{\mathcal{L}_s(f')}{s} + \frac{f(0)}{s} \quad \text{☁}$$

ITERANDO

$$\mathcal{L}_s(f^{(m)}) = s^m \mathcal{L}_s(f) - s^{m-1} f(0) - s^{m-2} f'(0) - \dots - f^{(m-1)}(0)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_s(f) \equiv F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{f'(0)}{s^2} + \dots + \frac{f^{(m-1)}(0)}{s^m} + \frac{\mathcal{L}_s(f^{(m)})}{s^m} \quad (\star)$$

VALIDO $\forall m \in \mathbb{N}$ ED È LO SVILUPPO ASINTOTICO DI $F(s)$
IN $D = \{s \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$ CON $s_0 = \infty$

POTREI SCRIVERE COME

$$F(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(l)}(0)}{s^{l+1}}$$

$$s \rightarrow \infty \quad | \quad \operatorname{Re}(s) > \alpha_0$$

CAPISCO CHE È UNO SVILUPPO ASINTOTICO POICHÈ È DELLA FORMA

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}} + \underbrace{R^n(s)}_{\rightarrow \frac{\mathcal{L}_s(f^{(n)})}{s^n}}$$

PER VERIFICARE CHE LO SIA EFFETTIVAMENTE DEVO CONTROLLARE LA CONDIZIONE DEL RESTO n -ESIMO PERCHÈ LA CONDIZIONE CHE $\{\varphi_l\}$ ASINTOTICA PER $s \rightarrow \infty \mid \operatorname{Re} s > \alpha_0$ È GIÀ VERIFICATA DAL MOMENTO CHE STIAMO USANDO LA SUCCESSIONE

$$\frac{1}{s^l} = \varphi_l$$

DA  VERO CHE $\mathcal{L}_s(f) = \frac{f(0)}{s} + \frac{\mathcal{L}_s(f')}{s}$ E A METODI 1 AVENAMO DIMOSTRATO CHE $\mathcal{L}_s(g)$ È SEMPRE LIMITATA $\rightarrow |\mathcal{L}_s(g)| < M$

MA ALLORA LA RELAZIONE SOPRA CI DICE CHE
 $\mathcal{L}_s(f)$ NON SOLO È LIMITATA, MA ANCHE CHE
SE f DERIVABILE CI DICE CHE $\mathcal{L}_s(f) = O(1/s)$

(POICHÈ HO $f(0)$ E $\mathcal{L}_s(f')$ CHE SONO ENTRAMBI NUMERI E
HO $\mathcal{L}_s(f) = \frac{\text{NUMERO}}{s}$)

QUINDI, IN QUESTO CASO $\star$: $\mathcal{I}_s^m(s) = F(s) - \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{f^{(\ell)}(0)}{s^{\ell+1}}$

$$\frac{O(1/s)}{s^m} = \frac{\mathcal{L}_s(f^{(m)})}{s^m} = O\left(\frac{1}{s^{m+1}}\right) \\ = O\left(\frac{1}{s^m}\right)$$

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

CERCO LO SVILUPPO ASINTOTICO DI $\mathcal{L}_s(f)$

NOTO

$$f^{(m)} = \frac{(-1)^m m!}{(1+x)^{m+1}}$$

$$f^{(m)}(0) = (-1)^m m!$$

CE LO ASPETTAVAMO
POICHÈ

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^m$$

È LA DERIVATA M-ESIMA NELLO
SVILUPPO DI TAYLOR È
DIVISA PER $m!$

$$F(s) \underset{\substack{s \rightarrow \infty \\ \operatorname{Re} s > \kappa_0}}{\sim} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m!}{s^{m+1}}$$

È SI VEDE SUBITO CHE LA SERIE NON È CONVERGENTE
(LE POTENZE NEGATIVE VANNO COME $m! \Rightarrow$ RAGGIO DI
CONVERGENZA $= 0$)

PERÒ

$$Z^m(s) = \frac{\mathcal{L}_s(f^{(m)})}{s^m} = \frac{1}{s^m} \int_0^\infty e^{-sx} \frac{(-1)^m m!}{(1+x)^{m+1}} dx$$

SI VEDE CHE SODDISFA LE CONDIZIONI, QUINDI È UNA SERIE ASINTOTICA

$$= (-1)^m m! \int_0^\infty \frac{s}{(s+sx)^{m+1}} e^{-sx} dx$$

SE $\notin$ MA PER COMODITÀ STUDIO $Z_m(s)$ SE $\mathbb{R} \quad s > 0$

CHIARO $y = sx \in \mathbb{R}$

$$Z_m(s) = (-1)^m m! \int_0^\infty dy \frac{e^{-y}}{(s+y)^{m+1}}$$

VALUTO IL MODULO

$$|Z_m(s)| = m! \left| \int_0^\infty f dy \right| \leq m! \int_0^\infty dy |f| = \frac{m!}{s^{m+1}} \int_0^\infty dy \frac{e^{-y}}{\underbrace{\left(1 + \frac{y}{s}\right)^{m+1}}_{\text{NUMERO REALE POSITIVO}}}$$

$$\Rightarrow |\Gamma_m(s)| \leq \frac{n!}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-y} dy = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

QUINDI HO VISTO

$$\Gamma_m(s) = O\left(\frac{1}{s^m}\right)$$

E QUESTO VALE IN GENERALE PER $s \mid \operatorname{Re} s > 0$

PROPRIETÀ SERIE ASINTOTICHE

2) È OPPORTUNO OSSERVARE CHE PER LE $\sum$ ASINTOTICHE NON È DETTO CHE LA PRECISIONE MIGLIORI SE m CRESCE, MA ANZI $\exists m_0$ OTTIMALE CHE MINIMIZZA L'ERRORE. E SE ω SUPERO PEGGIORO LA SITUAZIONE.

S. VEDI NELL'ESEMPIO APPENA SOPRA. AVEVAMO TROVATO $f(s)$ SERIE DIVERGENTE, MA CON UN TERMINE GENERICO

$$\frac{m!}{s^{m+1}} = a_m$$

E POSSO VALUTARE $\frac{\partial a_m}{\partial m}$ E VEDERE CHE HA UN MINIMO AD UN CERTO m_0

$$\frac{\partial a_m}{\partial m} = \frac{\partial_m(m!)s^{m+1} - m! \partial_m s^{m+1}}{s^{2m+2}}$$

$$\partial_m s^{m+1} = \partial_m e^{(m+1) \log s} = e^{(m+1) \log s} \log s = s^{m+1} \log s$$

$$\partial_m m! \stackrel{\text{STIRLING}}{=} \partial_m (\sqrt{2\pi m} e^{-m} m^m)$$

$$= \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{2} m^{-1/2} e^{-m} m^m - m^{1/2} m^{-m} m^m + m^{1/2} e^{-m} m^m (\log m + 1) \right)$$

$$\partial_m m^m = \partial_m e^{m \log m} = e^{m \log m} \log m + e^{m \log m} \frac{1}{m} = m^m (\log m + 1)$$

$$= \sqrt{2\pi} m^{1/2} e^{-m} m^m \left(\frac{1}{2m} - \log m \right) = m! \left(\frac{1}{2m} + \log m \right)$$

così

$$\frac{\partial a_m}{\partial m} = 0 \leadsto \frac{m! \left(\frac{1}{2m} + \log m \right) s^{m+1} - m! s^{m+1} \log s}{s^{m+2}} = 0$$

$$\Rightarrow m! s^{m+1} \left(\frac{1}{2m} + \log m - \log s \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} + \log m = \log s \Rightarrow \boxed{m e^{1/2m} = s}$$

SE m_0 RISPETTA LA RELAZIONE HO IL MINIMO, MA

NOTA CHE SE $m_0 \gg 1 \leadsto m_0 \sim s$

SE AGGIUNGO TERMINI OLTRE m_0 DELL'ORDINE DI
 s I TERMINI COMINCIANO A CRESCERE.

sì, PUÒ VERIFICARE CHE m_0 È UN MINIMO.
INFATTI

$$\frac{(m-1)!}{s^m} > \frac{m!}{s^{m+1}} \quad \xrightarrow{\substack{\text{DIVIDO} \\ \text{PER} \\ \frac{(m-1)!}{s^m}}} \quad 1 > \frac{m}{s} \Rightarrow m < s$$

QUINDI FINCHÉ $m < s$ I TERMINI DIMINUISCONO.
 $\Rightarrow m$ FERMO AD $m_0 = s$

⑥ DATA $f(z)$ $\hookrightarrow$ SVILUPPO ASINTOTICO PER $z \rightarrow z_0$
RISPETTO $\{\varphi_e\}$ È UNICO.

$$f(z) \underset{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}}{\sim} \sum_{e=0}^{\infty} a_e \varphi_e(z) = a_0 \varphi_0(z) + a_1 \varphi_1(z) + \dots$$

DIRE CHE È UNICO VUOL DIRE CHE DETERMINO a_e
IN MODO UNIVOCO.

SO CHE

$$\pi_1 = f(z) - a_0 \varphi_0 = o(\varphi_0), \quad z \rightarrow z_0, z \in D$$

$$\rightarrow \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}} \frac{f(z) - a_0 \varphi_0(z)}{\varphi_0(z)} = 0$$

$$\Rightarrow a_0 = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}} \frac{f(z)}{\varphi_0(z)}$$

ANALOGAMENTE POSSO ANDARE AVANTI

$$R_2 = f(z) - a_0 \varphi_0 - a_1 \varphi_1 = o(\varphi_1)$$

$\begin{matrix} z \rightarrow z_0 \\ z \in D \end{matrix}$

$$\rightarrow \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}} \frac{f(z) - a_0 \varphi_0 - a_1 \varphi_1}{\varphi_1} = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}} \frac{f - a_0 \varphi_0}{\varphi_1}$$

E COSÌ, DETERMINO TUTTI GLI a_k

ESEMPIO

$$z_0 = \infty$$

$$\varphi_e = \frac{1}{ze}$$

$$(\varphi_0 = 1)$$

SI VENE

$$a_0 = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in D}} f(z)$$

$$a_1 = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in D}} z(f(z) - a_0)$$

③ NON È VERO IL VICEVERSA DI 6.
UNIVOCO LA SVILUPPO ASINTOTICO NON INDIVIDUA IN MODO LA FUNZIONE.

PERCHÉ $\exists$ FUNZIONI CHE HANNO SVILUPPO ASINTOTICO NULLO.

ESEMPIO

$$z_0 = \infty$$

$$D = \left\{ z \mid \left| \arg z \right| < \frac{\pi}{2} - \delta \right\}$$

USIAMO

$$\left\{ \varphi_e = \frac{1}{ze} \right\}$$

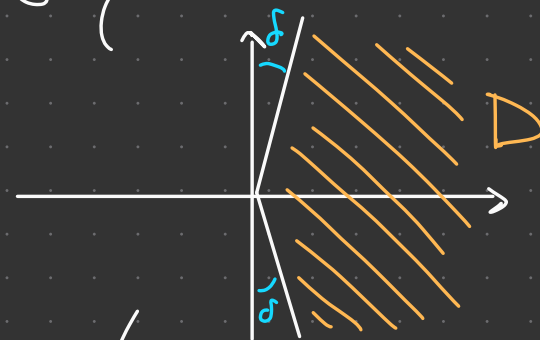
E

SCRIVO

LO

SVILUPPO

DI



$$e^{-z} \underset{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in D}}{\sim} 0 + \frac{0}{z} + \frac{0}{z^2} + \dots$$

↓
FATTO IN MODO
CHE SE $z \rightarrow \infty$
 $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$

INFATTI

$$a_0 = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in D}} e^{-z} = 0$$

$$a_1 = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in D}} z(e^{-z} - a_0) = 0$$

È IN GENERALE
$$a_n = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in D}} z^n e^{-z} = 0$$

QUINDI LO SVILUPPO DI UNA QUALSIASI $f(z)$ IN D

$$f(z) \underset{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in D}}{\sim} \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^{-l}$$

ANCHE

$$g(z) = f(z) + K z^m e^{-z}$$

HA LO STESSO SVILUPPO ASINTOTICO.

QUINDI UNO SVILUPPO DEFINISCE LA FUNZIONE A
MENO DI TERMINI $K z^m e^{-z}$

POTREI SCRIVERE $f(z) = \dots$ QUANDO z È GRANDE
E NON VEDREI DIFFERENZE CON LA g
ESSENDO $K z^m e^{-z}$ TRASCURABILE, MA SE LA
VEDO IN ALTRI REGIMI DI z ($z \rightarrow -\infty$)
ALLORA NON VALE PIÙ QUESTA COSA, (OPPURE
PUNTI QUALSIASI) E VEDO DIFFERENZE.

QUINDI SI VEDE CHE A DIFFERENZA DI UNA
SERIE CONV. CHE PUÒ ESSERE CONTINUATA
ANALITICAMENTE FUORI DAL DOMINIO DI
CONVERGENZA LA SERIE ASINTOTICA NON CI
DICE NIENTE' DI COSA SUCCEDDE FUORI DA z_i

$\Rightarrow$ LE SERIE ASINTOTICHE NON SI POSSONO
CONTINUARE ANALITICAMENTE IN MODO UNIVOCO
FUORI DAL DOMINIO IN CUI LE CALCOLO

SOMMA ALLA BOREL

CERCHIAMO UN METODO PER DARE UN SIGNIFICATO ALLA SOMMA DELLE SERIE

STUDIAMO UNA SERIE CONVERGENTE IN UN CERCHIO DI RAGGIO ρ INTORNO L'ORIGINE

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

POSSO DEFINIRE UN'ALTRA FUNZIONE

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$$

SI VEDE CHE SE $f(z)$ HA ρ FINITO $\Rightarrow \phi$ HA ρ INFINITO

$$\rho_\phi = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{k!} \frac{(k+1)!}{a_{k+1}} \right| = \rho \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty$$

ϕ LA CHIAMO TRASFORMATA DI BOREL DI $f(z)$

CI INTERESSA PERCHÉ CON ϕ POSSIAMO DEFINIRE

$$I(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \phi(zt) dt$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$$\text{con } |z| < \rho \Rightarrow I(z) = f(z)$$

DIM

$$I(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k t^k dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-t} t^k dt}_{\Gamma(k+1) = k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = f(z)$$

ϕ HA $\rho > 0$ QUINDI
È UNIF CONV SU ϕ
E POSSO INTEGRARE
TERMINE A TERMINE

QUINDI
È

SE
DEFINITA

$|z| < \rho$
 $\forall z$

HO

$$I(z) = f(z), \text{ HA } I(z)$$

$\Rightarrow I(z)$ PER VALORI DI z DIVERSI DA $|z| < \rho$
 (SE SONO IN GRADO DI CALCOLARLO E NON POSSO
 USARE $\phi = \sum$) È LA CONTINUAZIONE ANALITICA
 DI $f(z)$

ESEMPIO $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ HA $\rho = 1$

DEFINISCO $\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$

QUINDI

$$I(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{tz} dt = \int_0^t e^{-(1-z)t} dt = -\frac{1}{1-z} e^{-(1-z)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1-z}$$

HO TROVATO LA CONTINUAZIONE ANALITICA CHE GIÀ
 CONOSCEVO PER LA SERIE GEOMETRICA

POTREMMO PERÒ PARTIRE DA UNA SERIE NON CONVERGENTE

ALLORA $\phi(z)$ IN GENERALE HA UN RAGGIO DI
CONVERGENZA FINITO

$\Rightarrow I(z)$ DEFINISCE UN MODO PER DARE UN SIGNIFICATO
ALLA SOMMA DELLA SERIE DIVERGENTE

$\Rightarrow$ SE RIESCO A FARE QUESTA COSA DICO CHE
 $f(z)$ È SOMMABILE ALLA BOREL

ESEMPIO 1 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k! (-1)^k z^k$ È UNA SERIE DIVERGENTE

DEFINIAMO $\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$ CHE HA $\rho = 1$

È SE $|z| < 1$ SO $\phi(z) = \frac{1}{1+z}$

VEDO $I(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+tz} dt = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t + \frac{1}{z}} dt$ $w = t + \frac{1}{z}$

$$= \frac{1}{z} \int_{1/2}^{\infty} \frac{e^{1/2 - w}}{w} dw = \frac{e^{1/2}}{z} \underbrace{\int_{1/2}^{\infty} dw e^{-w} w^{-1}}$$

$= \Gamma(0)$ CHE NON ESISTEREBBE,
MA L'INTEGRALE CE L'HO DA $1/2$
E NON FINO 0

$\Gamma(0)$ DIVERGE
IN ZERO

SE $1/z$ NON È REALE < 0
OVVERO SE IL CAMMINO DI INTEGRAZIONE NON
ATTRAVERSA LO ZERO ALLORA L'INTEGRANDO È
DEFINITO

$\Rightarrow I(z)$ DEFINITO $\forall z \notin \mathbb{R}_-$

QUINDI $\zeta(z)$ È DEFINITO IN UNA REGIONE BEN PIÙ AMPIA ($\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$)
E SOPRATTUTTO $\neq$ CHE ERA DIVERGENTE

IN GENERE DEFINISCO

$$I(z) = \frac{e^{1/2}}{z} \Gamma(0, 1/2)$$

FUNZIONE
GAMMA
INCOMPLETA

FUNZIONE Γ CHE NON PARTE $\int_0^{\infty}$ DA 0

MA COME LEGO $I(z)$ AD $f(z)$?

SE NELLA DEF DI $I(z)$ METTO LO SVILUPPO DI
 ϕ , CHE POSSO FARE SE $|z| < 1$, POI PERÒ È
 MENO LEGITO SCAMBIARE $\int$ E $\sum$, MA SE IGNOTO
 QUESTA COSA TROVO ESATTAMENTE LO SVILUPPO
 ASINTOTICO IN SERIE DI POTENZE DI $f(z)$
 (VEDI PROSSIME LEZIONI)

ESEMPIO 2
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)! z^n$$

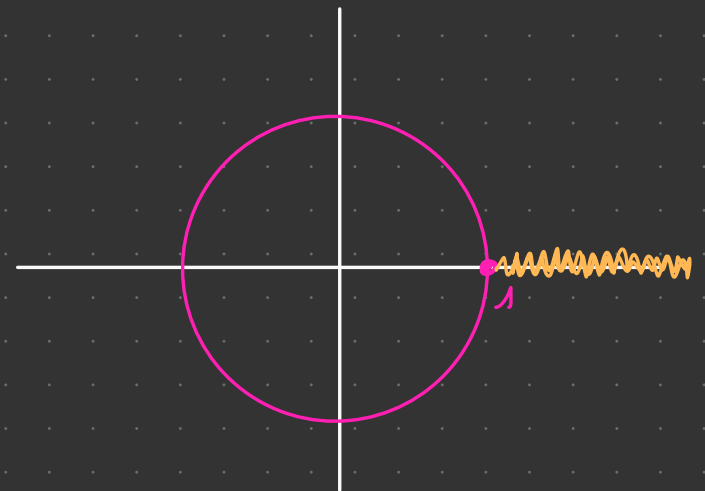
COSÌ,
$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

CHÉ CONVERGE SE $|z| < 1$, MA LA CONTINUAZIONE
 È $\phi(z) = -\log(1-z)$

QUINDI

CONVERGE LA SERIE DI ϕ

SCRITTURA $-\log(1-z)$ VALIDA
 OVUNQUE TRANNE SUL
 TAGLIO



VOGLIO VEDERE SE RIESCO A SCRIVERE $I(z)$ E
QUINDI SOMMARE $f(z)$

$$I(z) = - \int_0^{\infty} e^{-t} \log(1 - zt) dt$$

POSSO USARE QUESTA DEFINIZIONE INTEGRALE PER
SOMMARE EFFETTIVAMENTE LA $f(z)$.

SI POSSONO NOTARE DIVERSE COSE:

- $I(z)$ È AMBIGUA: PER $t > \frac{1}{|z|}$ (IL $\log$ HA IL TAGLIO)
E IL VALORE DEL $\log$ DIPENDE
DAL FOGLIO

AMBIGUITÀ $\log$ $\Delta \log = \log|_+ - \log|_- = 2\pi i$

CHE SI TRADUCE IN

$$\Delta I(z) = -2\pi i \int_{1/z}^{\infty} e^{-t} dt = 2\pi i e^{-1/z}$$

QUINDI L'AMBIGUITÀ SU $I(z)$ È UN $\exp < 0$ ED È
UNA DI QUELLE COSE CHE NON SI
VEDONO NELLO SVILUPPO ASINTOTICO.

Sviluppi asintotici di integrali

cominciamo con integrali tra 0 ed $a \in \mathbb{R}$

$$I_a(s) = \int_0^a e^{-sx} dx \quad s \rightarrow \infty \quad \text{in} \quad D = \{s \mid |\arg s| < \frac{\pi}{2} - \delta, \delta > 0\}$$

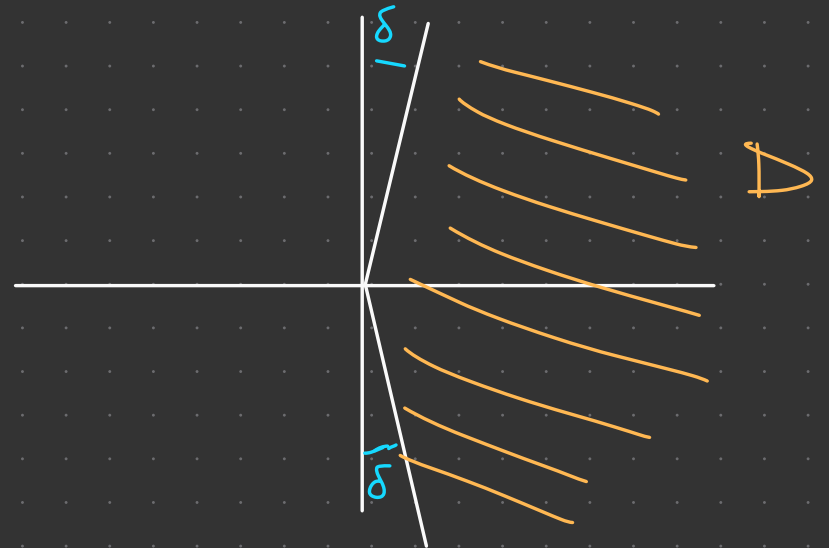
$$= -\frac{1}{s} e^{-sx} \Big|_0^a = \frac{1}{s} (1 - e^{-sa})$$

è vero

$$I_a(s) \underset[s \rightarrow \infty]{s \in D} \sim \frac{1}{s} \left(1 - 0 - \frac{0}{s} - \frac{0}{s^2} + \dots \right)$$

$$\text{quindi} \quad I_a(s) \underset[s \rightarrow \infty]{s \in D} \sim \frac{1}{s} = I(s)$$

$$\parallel \int_0^{\infty} e^{-sx} dx$$



$$s \in D \text{ e } s \rightarrow \infty \Rightarrow \operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty$$

POSSIAMO VEDERE UN SECONDO CASO

$$J_a(s) = \int_0^a x^m e^{-sx} dx = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m} \underbrace{\int_0^a e^{-sx} dx}_{\text{INTEGRALE DI PRIMA } I_a(s)}$$

$$= (-1)^m \frac{d^m}{ds^m} \left(\frac{1}{s} (1 - e^{-sa}) \right)$$

$$= \frac{m!}{s^{m+1}} + O(e^{-sa})$$

$s \rightarrow \infty$
 $s \in \mathbb{D}$

POICHÉ
RIMANE
DELLE

DERIVANDO M VOLTE M)
L'ESPOENZIALE CON
POTENZE DAVANTI

IN QUESTE CONDIZIONI
IL SUO SVILUPPO
ASINTOTICO È = 0

$$\Rightarrow J_a(s) \underset[s \rightarrow \infty]{s \in \mathbb{D}} \sim \frac{m!}{s^{m+1}} = J(s) = \int_0^\infty x^m e^{-xs} dx$$

QUINDI IN ENTRAMBI I CASI SE VEDO UNA
SITUAZIONE $s \rightarrow \infty$, $s \in \mathbb{D}$ NON VEDO DIFFERENZE
TRA L'INTEGRALE TRA 0 ED ∞ , POICHÉ LE 0 ED 2 OPPURE TRA
0 E ∞ , POICHÉ LE EVENTUALI DIFFERENZE

QUINDI IN ENTRAMBI I CASI SE VEDO UNA
SITUAZIONE $s \rightarrow \infty$, $s \in \mathbb{D}$ NON VEDO DIFFERENZE
TRA L'INTEGRALE TRA 0 ED ∞ , POICHÉ LE 0 ED 2 OPPURE TRA
0 E ∞ , POICHÉ LE EVENTUALI DIFFERENZE

SAREBBERO $\exp$ CHE PERÒ NON INFLUENZANO
LO SVILUPPO ASINTOTICO.

QUINDI HO MOSTRATO CHE:

$\int_a^\infty e^{-sx} dx$ e $\int_a^\infty e^{-sx} x^m dx$ SONO TRASCURABILI NEL LIMITE
ASINTOTICO $s \rightarrow \infty$, SET

SI PUÒ VEDERE UN TEOREMA PIÙ GENERALE.

TEO Hp: $g(x)$ ABBASTA TRASFORMATA DI LAPLACE
($g(x)$ LOCALMENTE SOMMABILE SU $\mathbb{R}_+$
CIOÈ $\exists$ L'INTEGRALE DI $|g(x)|$ SU QUALUNQUE
INTERVALLO DI $\mathbb{R}_+$, ED $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ TC
 $|e^{-\alpha x} g(x)|$ È SOMMABILE, CIOÈ $\exists$ L'ASCISSA
DI CONVERGENZA)
 $\rightarrow |e^{-\alpha x} g(x)| \in L_1(0, \infty)$ $\alpha > \alpha_0$

Th: $\forall \alpha > 0$ SI HA

$$\int_a^\infty e^{-sx} g(x) dx \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} O(e^{-sa})$$

SET

Dire

$$\int_a^\infty e^{-sx} g(x) dx = \int_0^\infty e^{-s(y+a)} g(y+a) dy = e^{-sa} \int_0^\infty e^{-sy} \hat{g}(y) dy$$

$x = y + a$

FUNZIONE INIZIALE
CALCOLATA IN
 $y+a$

SE $g(x)$ AMMETTEVA TL

ALLORA ANCHE $\hat{g}(y)$ AMMETTE TL

DATO CHE LA TRASFORMATA DI LAPLACE DI $\hat{g}$ È
LIMITATA

$$\Rightarrow \int_a^\infty e^{-sx} g(x) dx \underset[s \rightarrow \infty]{s \in D} \sim O(e^{-sa})$$

$\parallel$
 $e^{-sa} \cdot K$
COSTANTE

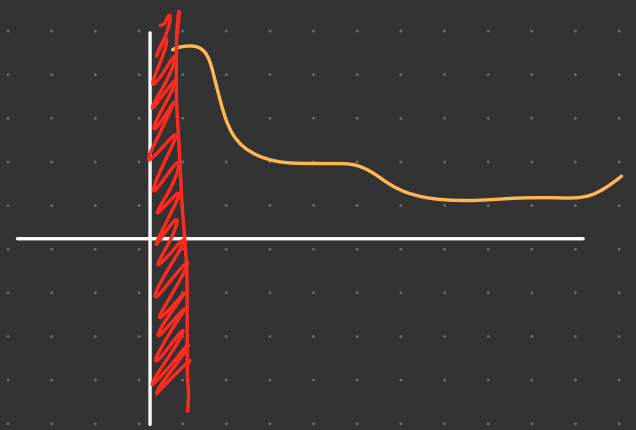


QUESTO TEOREMA CI DICE CHE POSSO IDENTIFICARE

$$\int_0^a e^{-sx} g(x) dx \underset[s \rightarrow \infty]{s \in D} \sim \int_0^\infty e^{-sx} g(x) dx$$

È NOTA CHE VALE $\forall a > 0$

QUINDI L'IDEA È CHE TUTTA
L'INFORMAZIONE CHE RISULTA È
NEL COMPORTAMENTO DI $g(x)$
IN ZERO.



QUINDI SE CONOSCO LO SVILUPPO
INTORNO A ZERO DOVEI RIUSCIRE
A CALCOLARE L'INTEGRALE.

SUPPONGO LO SVILUPPO IN ZERO LC

$$\forall x \in \mathcal{B}_p(0) \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^{n+\nu} \quad \nu \mid \operatorname{Re} \nu > -1, \quad g_0 \neq 0$$

↪ SERVE PER GENERALIZZARE

QUINDI

$$\int_0^a e^{-sx} \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^{n+\nu} dx \quad \forall a > 0$$

SCELGO $a \mid a < \rho$ ↪ RAGGIO DI CONVERGENZA

COSÌ POSSO INTEGRARE TERMINE A TERMINE

$$= \sum_{m=0}^{\infty} g_m \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{m+\nu} dx \quad \rightarrow \text{AMMETTE TL}$$

$$\underset{s \in D}{\sim} \sum_{k=0}^{\infty} g_k \int_0^{\infty} dx e^{-sx} x^{k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \frac{1}{s} \int_0^{\infty} dy e^{-y} \left(\frac{y}{s}\right)^{k+\nu}$$

$y = sx$

$\rightarrow$ DAL TH SOPRA

$$= \sum_{k=0}^{\infty} g_k \frac{1}{s^{1+k+\nu}} \int_0^{\infty} dy e^{-y} y^{\nu+k} = \Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} g_k \frac{\Gamma(1+k+\nu)}{s^{1+k+\nu}}$$

CON LE g_m CHE SONO LE DERIVATE DI $g(x)$ CALCOLATE IN $x=0$.

$\Rightarrow$ QUINDI QUELLO CHE CONTA È IL COMPORTAMENTO DI $g(x)$ IN ZERO
(COME SI VEDE NELLO SVILUPPO DELLA TL)

TEO

H_p: $I(s) = \int_0^a e^{-s f(x)} g(x) dx$, $a \in \mathbb{R}_+$

- $f(x)$ REGOLARE in $[0, a]$

$$\leadsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n x^n \quad \text{in } x \in [0, a]$$

$x=0$
MAX
RELATIVO

$\epsilon \quad f'(0) < 0 \quad (f_1 < 0)$

- $x=0$ È UN MASSIMO ASSOLUTO PER $f(x)$ in $[0, a]$

$$(\forall \epsilon > 0 \exists A < f(0) \mid f(x) \leq A \quad \forall x \in [0, a])$$

- $\exists \delta > 0 \mid g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} g_k x^{k+\nu} \quad (\nu \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \nu > -1)$
 $\forall x \in [0, \delta]$

Th: $I(s) \underset[s \rightarrow \infty]{s \in D} \sim g_0 \frac{e^{s f_0}}{|f_1|^{\nu+1}} \frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)$

DIM

$$I(s) = \int_0^a dx e^{sf(x)} g(x) = \int_0^a dx \exp\left(s \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} f_k x^k\right) g(x)$$

$$= \int_0^a dx e^{sf_0} e^{-s|f_0| x} A(x) g(x)$$

ESPLICITO LA SERIE
di TAYLOR di $f(x)$

$$e^x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!}$$

DOVE

$$A(x) = e^{s \sum_{m=2}^{\infty} f_m x^m} = 1 + s \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} f_m x^m + \frac{1}{2} s^2 \left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} f_m x^m \right)^2 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} s f_2 x^2 + \frac{1}{3!} s f_3 x^3 + \left(\frac{1}{4!} s f_4 + \frac{1}{2} s^2 f_2^2 \right) x^4 + \dots$$

QUINDI

$$A(x) g(x) = \left(1 + s f_2 x^2 + \dots \right) x^{\nu} \left(g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots \right)$$

MOLTIPLICO I
DUE SVILUPPI
IN SERIE

$$= g_0 x^{\nu} + g_1 x^{\nu+1} + \dots + c x^{m+\nu} s^k + \dots$$

QUINDA

$$I(s) = e^{sf_0} \int_0^a dx e^{-s|f_1|x} A(x) g(x)$$

$$= e^{sf_0} \int_0^a dx e^{-s|f_1|x} (g_0 x^{\tilde{\nu}} + g_1 x^{\tilde{\nu}+1} + \dots + C x^{m+\tilde{\nu}} S^k + \dots)$$

PERO' DI POSSO COMINCIARE A CALCOLARE IL CONTRIBUTO
LORO NELL'INTEGRALE

$$A(x)g(x) \sim x^{\tilde{\nu}} g_0$$

$$I(s) \underset[s \rightarrow \infty]{s \in D} \sim \int_0^a e^{sf_0} e^{-s|f_1|x} x^{\tilde{\nu}} g_0 dx$$

$$= g_0 e^{sf_0} \int_0^a e^{-s|f_1|x} x^{\tilde{\nu}} dx$$

$$y = s|f_1|x$$

$$= g_0 e^{sf_0} \frac{1}{|f_1|^{\tilde{\nu}+1} s^{\tilde{\nu}+1}} \int_0^a dy e^{-y} y^{\tilde{\nu}}$$

$$\begin{aligned} & \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} g_0 e^{sf_0} \frac{1}{|f_1|^{r+1} s^{r+1}} \int_0^\infty dy e^{-y} y^r \\ &= g_0 e^{sf_0} \frac{\Gamma(r+1)}{|f_1|^{r+1} s^{r+1}} \end{aligned}$$

QUINDI L'INTEGRALE LO POSSO IDENTIFICARE CON

$$\xrightarrow{s \rightarrow \infty} g_0 e^{sf_0} \int_0^\infty e^{-s|f_1|x} x^r dx = \underbrace{g_0 e^{sf_0} \frac{\Gamma(r+1)}{|f_1|^{r+1} s^{r+1}}}_{X(s)}$$

CHE È LA TESI DEL TH, PERÒ DEVO VERIFICARE CHE TUTTI GLI ALTRI TERMINI SIANO LO STESSO RISULTATO, MA CON ALTRE POTENZE DI s AL DENOMINATORE OVVERO MOLTIPLICATO PER $O(1/s)$.

PER VEDERLO PRENDI I TERMINI

$$A(x)g(x) \sim \dots + g_{r+1} x^{r+1}$$

→ più x prendo più s compariranno

M' VIENE

$$I(s) \sim \dots + \overset{\text{QUELLO DI PRIMA}}{\int_0^a e^{sf_0} e^{-s|f_1|x} g_1 x^{n+1} dx}$$

$$\underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \dots + g_1 e^{sf_0} \int_0^\infty e^{-s|f_1|x} x^{n+1} dx$$

$$y = s|f_1|x$$

$$= \dots + g_1 e^{sf_0} \frac{1}{|f_1|^{n+2} s^{n+2}} \int_0^a dy e^{-y} y^{n+1}$$

$$\underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \dots + g_1 e^{sf_0} \frac{1}{|f_1|^{n+2} s^{n+2}} \int_0^\infty dy e^{-y} y^{n+1}$$

$$= \dots + g_1 e^{sf_0} \frac{\Gamma(n+2)}{|f_1|^{n+2} s^{n+2}} \quad \xrightarrow{\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)}$$

$$= \dots + \left[g_0 e^{sf_0} \frac{\Gamma(n+1)}{|f_1|^{n+1} s^{n+1}} \right] \frac{g_1}{g_0} \frac{n+1}{|f_1|} \frac{1}{s}$$

$$= X(s) \left(1 + \frac{g_1}{g_0} \frac{(r+1)}{|f_1|s} \right)$$

QUINDI EFFETTIVAMENTE IL PEZZO CHE ESCE È UN NUMERO PER $1/s$ CHE È QUELLO CHE VOLEVO.

ANDANDO AVANTI PRENDENDO L'1 DA $A(x)$ E POTENZE DI x CRESCENTI DA $g(x)$ TROVERO' OGNI VOLTA UN COEFFICIENTE MOLTIPLICATO PER POTENZE DI $1/s$.

IN GENERALE IL CONTRIBUTO DI $C x^{n+r} s^k$ È :

$$e^{sf_0} \int_0^a dx e^{-s|f_1|x} C x^{n+r} s^k = C e^{sf_0} s^k \int_0^a dx e^{-s|f_1|x} x^{n+m}$$

$$y = s|f_1|x$$

$$= C e^{sf_0} s^k \frac{1}{|f_1|^{n+m+1} s^{n+m+1}} \int_0^a dy e^{-y} y^{n+m}$$

$$\begin{matrix} s \rightarrow \infty \\ \sim \\ s \in \mathbb{D} \end{matrix} C e^{sf_0} s^k \frac{1}{|f_1|^{n+m+1} s^{n+m+1}} \int_0^1 dy e^{-y} y^{n+m}$$

$$= C e^{sf_0} s^k \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{|f_1|^{\nu+m+1} s^{\nu+m+1}}$$

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$$

$$= \left[g_0 e^{sf_0} \frac{\Gamma(\nu+1)}{|f_1|^{\nu+1} s^{\nu+1}} \right] \underbrace{\frac{C}{g_0} \frac{(\nu+m) \dots (\nu+1)}{|f_1|^m} \frac{1}{s^{m-k}}}_{\text{CONTENUTO IN } O(1/s)}$$

PERO' GUARDANDO $A(x)$ CONTIENE POTENZE DI S E POTREBBERO "NEUTRALIZZARE" IL TUTTO, MA IN REALTA' NON SONO SUFFICIENTI A DARE DEI TERMINI DELLO STESSO LIVELLO DEL PRIMO PERCHÈ È VERO CHE CI SONO POTENZE DI S , MA VENGONO ACCOMPAGNATE DA POTENZE DI $x \geq 2$, QUINDI LA S CANCELLA UNA S NEL DENOMINATORE, MA LA x NE CREA DALL'INTEGRALE UN'ALTRA.

SI VEDE CHE SE PRENDO LORO OTTENGO UNA COSA DELLO STESSO ORDINE DI LORO

→ [FALLO PER ESERCIZIO $A(x)g(x) = \dots + f_2 s x^{2+\nu}$]

E QUINDI

$$I(s) \underset{s \in D}{\sim} \underset{s \rightarrow \infty}{g_0} e^{sf_0} \frac{\Gamma'(n+1)}{|f_1|^{n+1} s^{n+1}} \left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right]$$



CONSIDERAZIONI

• LE CONCLUSIONI DEL TEOREMA SI APPLICANO ANCHE AD INTEGRALI DEL TIPO

$$\int_a^b e^{sf(x)} g(x) dx$$

OVVERO AL POSTO DI AVERE COME MASSIMO ASSOLUTO $x=0$ ABBIAMO UN ALTRO PUNTO $x=a$.

SI PUO' FARE IN 2 MODI:

1) CAMBIO VARIABILE $w = x - a$

2) SVILUPPO f E g INTORNO AD $x=a$ AL POSTO DI $x=0$

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \Big|_{x=a} (x-a)^k$$

$$= f(a) - |f'(a)| (x-a) + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n}_{f_n}$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} g_k (x-a)^{k+\nu}$$

è così

$$I \sim \int_a^b e^{sf(a)} e^{-s|f'(a)|(x-a)} (1 + \dots) (g_0(x-a)^{\nu} + \dots)$$

è un nuovo

$$= e^{sf(a)} g_0 \int_a^b e^{-s|f'(a)|(x-a)} (x-a)^{\nu} dx$$

CHE SE CAMBIO VARIABILE OTTENDO SEMPRE
LA SOLITA ROBA E OTTENDO

$$= e^{sf(a)} g_0 \frac{\Gamma(\nu+1)}{|f'(a)|^{\nu+1}} \frac{1}{s^{\nu+1}}$$

- IL TEOREMA FUNZIONA ANCHE SE $f(x)$ HA UN MASSIMO ASSOLUTO ANCHE NEL SECONDO ESTREMO E S' TROVA UGUALE

$$I \sim e^{sf(b)} g_0 \frac{\Gamma(n+1)}{|f'(b)|^{n+1}} \frac{1}{s^{n+1}}$$

$$f'(b) > 0$$

E QUESTI RISULTATI COMPLESSIVAMENTE CI DICONO CHE NEL LIMITE $s \rightarrow \infty$, SE D IL CONTRIBUTO DOMINANTE CI VIENE DALLA ZONA IN CUI LA FUNZIONE AD ESPONENTE È MASSIMA.

QUINDI QUELLO CHE DOMINA IN $[a, b]$ È IL CONTRIBUTO DELL'INTERVALLO INTORNO AL MASSIMO ASSOLUTO DI $f(x)$! ($\text{Re}(s) > 0$)

Sviluppi Asintotici di Integrali: Metodo di Laplace

Abbiamo già studiato cose come $I(t) = \int_a^b e^{t f(x)} g(x) dx$

con $t \rightarrow \infty$
 $t \in D = \{t: |\operatorname{Arg} t| < \frac{\pi}{2} - \delta\}$

ossia $\operatorname{Re} t \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \infty$

E abbiamo studiato uno sviluppo asintotico nel caso in cui $f(x)$ ha un massimo assoluto in un estremo.

Ora vogliamo studiare ancora $I(t)$ con $t \rightarrow \infty, t \in D$ ma se $f(x)$ ha un max assoluto in un punto $x_0 \in (a, b)$

Abbiamo visto che si può fare una valutazione del genere poiché $I(t)$ è dominato da un piccolo intorno del punto in cui $f(x)$ ha un massimo assoluto, indipendentemente se $x \in \{a, b\}$ o $x \in (a, b)$

TEOREMA

$$H_p: I(t) = \int_a^b dx e^{t f(x)} g(x) \quad t \in \mathbb{C}:$$

- $\exists x_0 \in [a, b] \quad / \quad \begin{array}{l} x_0 \text{ sia un massimo assoluto} \\ \text{di } f(x) \end{array}$
 $(\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \quad A < |f(x_0)| \quad /$
 $|f(x)| \leq A \quad \forall x \notin I_\varepsilon(x_0))$

- $g(x)$ sia regolare in $[a, b]$

$\rightarrow$ così la posso sviluppare
come serie di Taylor

$$\rightarrow g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(x-x_0)^n$$

$$Th: \quad I(t) \underset[t \rightarrow \infty]{t \in \mathbb{D}} \sim \sqrt{2\pi} g(x_0) e^{t f(x_0)} \frac{1}{\sqrt{|f''(x_0)|}} t^{-1/2} \left(1 + o\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

DIM SUPPONIAMO CHE $(a, b) \in$ CERCHIO IN CUI
 CONVERGE LO SVILUPPO DI $g(x)$ E LO
 SVILUPPO DI $f(x)$

CONOSCO GIÀ:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g_n (x - x_0)^n$$

E AVRÒ UNA COSA DEL TIPO (RICORDANDO $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$):

$$f(x) = f(x_0) - \frac{1}{2} |f''(x_0)| (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)$$

REPTO IN $I(t)$ GLI SVILUPPI

$$I(t) = \int_a^b dx e^{t f(x)} g(x) = \int_a^b dx \exp \left\{ t \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} f_k (x - x_0)^k \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g_n (x - x_0)^n \right\}$$

$$= \int_a^b dx e^{t f(x_0)} e^{-\frac{1}{2} t |f''(x_0)| (x - x_0)^2} e^{t \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} f_k (x - x_0)^k} \sum_{n=0}^{\infty} g_n (x - x_0)^n$$

DERIVATE VALUTATE IN x_0

LI VEDO COME UN'UNICA
 FUNZIONE $H(x, t)$

VORREI LO SVILUPPO IN SERIE DI POTENZE DI $|H|$
 (LO TROVO MOLTIPLICANDO LO SVILUPPO DELL'exp
 E DI g)

$$H(x, t) = \underbrace{(1 + t f_3 (x - x_0)^3 + \dots)}_{\text{SVILUPPO } e^{\dots}} (g_0 + g_1 (x - x_0) + \frac{1}{2} g_2 (x - x_0)^2 + \dots)$$

RIORDINO I TERMINI CON
 $(x - x_0)^n$ CRESCENTI

$$= g_0 + g_1 (x - x_0) + \frac{1}{2} g_2 (x - x_0)^2 + (\frac{1}{3!} g_3 + \frac{1}{3!} g_0 f_3 t) (x - x_0)^3 + \dots$$

$$= g_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} h_{\ell}(t) (x - x_0)^{\ell}$$

E HO TROVATO UNA SCRITTURA CHE MI SARÀ
 COMODA.

RITORNO ALL'INTEGRALE

$$I(t) = e^{t f(x_0)} \int_a^b dx e^{-\frac{1}{2} t |f''(x_0)| (x - x_0)^2} (g_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} h_{\ell}(t) (x - x_0)^{\ell})$$

CAMBIO VARIABILE $w = x - x_0$

$$I(t) = e^{t f(x_0)} \int_{a-x_0}^{b-x_0} dw e^{-\frac{1}{2} t |f''(0)| w^2} (g_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} h_{\ell}(t) w^{\ell})$$

MA ORA POSSO FARE UN'OSSERVAZIONE:

SE CALCOLO

$$\int_c^\infty e^{-ty^2} dy \quad \text{con } t \rightarrow \infty, t \in D, c > 0$$

POSSO DIMOSTRARE CHE

$$\int \dots = O(e^{-tc^2})$$

E QUINDI TRASCURABILE NEL LIMITE ASINTOTICO.
INFATTI

$$\int_c^\infty e^{-ty^2} dy = e^{-tc^2} \int_c^\infty e^{-t(y^2 - c^2)} dy$$

$$\begin{aligned} y^2 - c^2 &= x \\ dx &= 2y dy \\ dy &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x+c^2}} dx \end{aligned}$$

$$= e^{-tc^2} \int_0^\infty dx \frac{e^{-tx}}{2\sqrt{x+c^2}}$$

NOTO CHE LEI È LA TRASFORMATA DI LAPLACE
DI UNA FUNZIONE CHE AMMETTE TL (NON
DIVERGE MAI SU $\mathbb{R}_+$ E HA $x_0 = 0$)

MA ALLORA SO CHE È LIMITATO
 $\begin{matrix} t \rightarrow \infty \\ t \in D \end{matrix} \sim O(e^{-tc^2})$

È LO STESSO VALE PER $\int_{-\infty}^{-c} e^{-ty^2} dy = O(e^{-tc^2})$
 POICHÉ LA FUNZIONE INTEGRANDA È PARI

MA VALE ANCHE PER $\int_{-\infty}^{-c} e^{-ty^2} g(y) dy = O(e^{-tc^2})$

$$\text{E } \int_c^{\infty} e^{-ty^2} g(y) dy = O(e^{-tc^2})$$

PURCHÉ $g(y)$ AMMETTA TL.

QUESTA OSSERVAZIONE CI È UTILE PERCHÉ IN
 $I(t)$ COMPARE UNA COSA SIMILE, OVVERO

$$\int_{a-x_0}^{b-x_0} dw e^{-\frac{1}{2}t} |\phi''(x_0)| w^2 [\dots]$$

È POSSO NOTARE CHE POSSO AGGIUNGERE IL
 PEZZO DI INTEGRALE CHE HA RANDA $a-x_0 \mapsto -\infty$
 O $b-x_0 \mapsto +\infty$ PERCHÉ TANTO QUELLO CHE

AGGIUNGO HA LA FORMA $\int e^{-ty^2} g(y) dy$
 CON UNA $g(y)$ CHE AMMETTE TL
 CHE È TRASCURABILE

È QUINDI TRASFORMATO $I(t)$ IN UN INTEGRALE DA
 $-\infty$ A $+\infty$

$$I(t) = e^{t f(x_0)} \int_{a-x_0}^{b-x_0} dw e^{-\frac{1}{2}t |f''(x_0)| w^2} \left(g_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} h_{\ell}(t) w^{\ell} \right)$$

↳ ATTACCO $\int_{-\infty}^{a-x_0}$ POICHÉ $a-x_0 < 0$
 È ANALOGO SU $b-x_0 > 0$

$$I(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{t f(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{-\frac{1}{2}t |f''(x_0)| w^2} \left(g_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} h_{\ell}(t) w^{\ell} \right)$$

NOTA A QUESTO PUNTO CAPISCO CHE L'IPOTESI CHE
 (a, b) È CERCHIO DI CONVERGENZA È SUPERFLUA
 POICHÉ TANTO IN $I(t)$ QUELLO CHE CONTA È
 COSA SUCCEDERE IN UN INTORNO NEL PUNTO
 DI MASSIMO (CHE ABBIAMO TRASLATO IN 0)
 E QUINDI PROPRIO PER QUESTO MOTIVO
 VEDO CHE QUALSIASI SIA L'INTERVALLO DI
 INTEGRAZIONE ORIGINARIO IO POSSO SPOSTARE
 GLI ESTREMI A PIACERE PERCHÉ MI
 TROVO COMUNQUE CON UN INTEGRALE TRA
 $(-\infty, +\infty)$. QUINDI, SE L'IDEA È DI

CALCOLARE I PER $t \rightarrow \infty$ POSSO SEMPRE
SVILUPPARE IN SERIE QUELLO CHE C'È DENTRO.

MA $I(t)$ SCRITTO COSÌ LO SO FARE POICHÉ
È LA SOMMA DI INTEGRALI GAUSSIANI.

RICORDA $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tAw^2} dw = \sqrt{\frac{\pi}{A}} t^{-1/2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

MA HO ANCHE INTEGRALI GAUSSIANI CON DELLE POTENZE
DENTRO.

HO:

$$I(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{tf(x_0)} g_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{-\frac{1}{2}t|f''(x_0)|w^2} + e^{tf(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{-\frac{1}{2}t|f''(x_0)|w^2} \underbrace{\sum_{\ell \geq 1} h_\ell(t) w^\ell}_{B(t)}$$

$A(t)$
 $B(t)$

QUINDI LI POSSO CALCOLARE SEPARATAMENTE

$$A(t) = e^{tf(x_0)} g_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{-\frac{1}{2}t|f''(x_0)|w^2} = e^{tf(x_0)} g_0 \left[\frac{t}{2}|f''(x_0)| \right]^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-y^2}$$

$y = \sqrt{\frac{t}{2}|f''(x_0)|} w$

$$= e^{tf(x_0)} g_0 \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}} t^{-1/2}$$

$$B(t) = e^{tf(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{-\frac{1}{2}t|f''(x_0)|w^2} \sum_{\ell \geq 1} h_\ell(t) w^\ell = e^{tf(x_0)} \sum_{\ell \geq 1} h_\ell(t) \int_{-\infty}^{+\infty} dw w^\ell e^{-\frac{1}{2}t|f''(x_0)|w^2}$$

SERIE UNIF. CONV.

DIFFERENZIO CASI CON POTENZE PARI O DISPARI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tAw^2} w^{2\ell+1} dw = 0 \quad \xrightarrow{\text{INTERVALLO}} \quad \int_{\text{INTERVALLO}} \Delta f \quad \begin{matrix} \text{DISPARI SU} \\ \text{PARI} \end{matrix}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tAw^2} w^2 dw = -\frac{1}{A} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tAw^2} dw$$

SE PARI
LA RIESCO
A SCRIVERE
COME
DERIVATA

$$= -\frac{1}{A} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \left(-\frac{1}{2}\right) t^{3/2} = \sqrt{\frac{\pi}{A}} t^{-1/2} \frac{1}{2t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2A^{3/2}} t^{-3/2}$$

E IN GENERALE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tAw^2} w^{2m} dw = \frac{(-1)^m}{A^m} \frac{d^m}{dt^m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tAw^2} dw$$

$$= \frac{(-1)^m}{A^m} \frac{d^m}{dt^m} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{A}} t^{-1/2} \right\}$$

$$= \frac{(-1)^m}{A^m} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2} - m\right) t^{m-1/2}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} (2m-1)!!}{2^m A^{m+1/2} t^{m+1/2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{A}} t^{-1/2} \left(\frac{(2m-1)!!}{2^m A^m t^m} \right)$$

and

$$B(t) = e^{t f(x_0)} \sum_{\ell \geq 1} h_\ell(t) \int_{-\infty}^{+\infty} dw w^\ell e^{-\frac{1}{2} t |f''(x_0)| w^2}$$

$$= e^{t f(x_0)} \sum_{\ell \geq 1} h_{2\ell}(t) \int_{-\infty}^{+\infty} dw w^{2\ell} e^{-\frac{1}{2} t |f''(x_0)| w^2}$$

$$A = \frac{1}{2} |f''(x_0)|$$

$$= e^{t f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}} t^{-1/2} \sum_{\ell \geq 1} h_{2\ell}(t) \frac{(2\ell-1)!!}{|f''(x_0)|^\ell} \frac{1}{t^\ell}$$

QUINDI AUMENTARE POTENZE DI ω SIGNIFICA AUMENTARE LA POTENZA DI t A DENOMINATORE E SE $t \rightarrow \infty$ È SOTTODOMINANTE.

QUINDI SE $t \rightarrow \infty$ LO SVILUPPO DI $I(t)$ LO FACCIAMO NON PRENDENDO NESSUNA POTENZA DI ω DALLA SOMMA, PERCHÉ TANTO SONO SOTTODOMINANTI.

$$I(t) \sim A(t) + B(t) = e^{tf(x_0)} \underbrace{g_0 \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}} t^{-1/2}} + e^{tf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}} t^{-1/2} \underbrace{h_2(t) \frac{(2t-1)!!}{|f''(x_0)|^t t^t}}_{\substack{\text{NON} \\ \text{ALTERA} \\ \text{TERMINI CHE NOI} \\ \text{CONSIDERIAMO } O(1/t)?}}$$

$$g_0 e^{tf(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t|f''(x_0)|\omega^2} d\omega$$

$$= g_0 e^{tf(x_0)} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|f''(x_0)|}} t^{-1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right)$$



NOTA ✳️ PERÒ NON PRENDENDO I TERMINI CON LE POTENZE
IN $I(t)$ SONO STATO SUPERFICIALE NEL NON
NOTARE CHE HO UN $h_e(t)$ DAVANTI ω^2 E
CHE MAGARI CAMBIA IL RISULTATO DELL'INTEGRALE
GAUSSIANO.

DOVREI DIMOSTRARE CHE $h_e(t)$ PRODUCE POTENZE A
DENOMINATORE IN MODO TALE CHE NON ω^2
MODIFICANO IL RISULTATO DEL TH.
(LO VEREMO SOLO IN UN CASO SPECIFICO)

VEDI "ESERCIZIO METODO DI LAPLACE"

ESEMPIO SVILUPPO ASINTOTICO DI $\Gamma(t)$ CON IL METODO DI LAPLACE

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx \quad \text{E VOGLIO } \Gamma(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} ?$$

PERÒ NON POSSIAMO APPLICARE GIÀ IL TEOREMA ALLA DEFINIZIONE DI Γ (t IN Γ COMPARE ALL'ESPONENTE E NEL TH È IN $\exp$)

CAMBIO VARIABLE $x = ty \quad dx = t dy, \quad t \in \mathbb{N}_+$

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \int_0^{\infty} dy \, t e^{-ty} t^{t-1} y^{t-1} \\ &= t^t \int_0^{\infty} dy \, e^{-t} y^{t-1} \end{aligned}$$

$$= t^t \int_0^{\infty} dy \, \frac{1}{y} e^{t f(y)} \quad \text{con } f(y) = \log y - y$$

E COSÌ NON CAMBIA IL CAMMINO DI INTEGRAZIONE (POI SI VEDRÀ CHE IL RISULTATO SARÀ ESTENDIBILE A t ANCHE AL DI FUORI)

A QUESTO PUNTO DEVO VEDERE I MAX DI $f(y)$

$$f'(y) = \frac{1}{y} - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

SONO NEL
CASO DI
LAPLACE

$$f''(y) = -\frac{1}{y^2} \Rightarrow f''(1) = -1 \Rightarrow y = 1 \text{ È UN MASSIMO}$$

QUINDA ORA DEVO SVILUPPARE SIA L'EXP CHE $\frac{1}{y}$
IN POTENZE DI $(y-1)$

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (y-1)^n = \log y - y$$

DERIVATE CALCOLO IN $y=1$

MA RICORDO CHE SO $\log(1+x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$

$$\rightarrow \log(y) = \log(1 + y - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (y-1)^n}{n}$$

$$= (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 + \dots$$

QUINDA

$$f(y) = \log y - y = -1 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 + \dots$$

È HO TROVATO LO SVILUPPO DELL'ESPONENTE.
DEVO ANCORA SVILUPPARE $1/y$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{1 + (y-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (y-1)^k = 1 - (y-1) + (y-1)^2 + \dots$$

È QUINDI POSSO METTERE TUTTO IN $\Gamma(t)$ USANDO
IL FATTO CHE NELL'INTEGRALE CONTRIBUISCE SOLO
LA ZONA VICINO AL PUNTO DEL MASSIMO.

$$\Gamma(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t^t \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} dy e^{t \left(-1 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \frac{1}{4}(y-1)^4 + \dots \right)} \left(1 - (y-1) + (y-1)^2 + \dots \right)$$

QUINDI ORA TENGO EXP DELLE COSTANTI E DEL
TERMINE QUADRATICO, MA SVILUPPO IL RESTO
NELL'EXP

$$= t^t e^{-t} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} dy e^{-\frac{t}{2}(y-1)^2} \left[e^{t \left(\frac{1}{3}(y-1)^3 + \frac{1}{4}(y-1)^4 + \dots \right)} \left(1 - (y-1) + (y-1)^2 + \dots \right) \right]$$

ELABORO SOLO [...]

$$[\dots] = \left(1 + t \left(\frac{1}{3} (y-1)^3 - \frac{1}{4} (y-1)^4 \right) + \frac{1}{2} t^2 \left(\frac{1}{3} (y-1)^3 - \frac{1}{4} (y-1)^4 \right)^2 \right) \cdot (1 - (y-1) + (y-1)^2 + \dots)$$

$$y-1 = w$$

$$= \left(1 + t \left(\frac{1}{3} w^3 - \frac{1}{4} w^4 \right) + \frac{1}{2} t^2 \left(\frac{1}{3} w^3 - \frac{1}{4} w^4 \right)^2 \right) (1 - w + w^2 + \dots)$$

DEVO PER CAMBIARE POTER INTEGRARE VARIABILE IN Γ E USO IL TEOREMA DA $-\infty$ A $+\infty$

$$\Gamma(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t^t e^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{-\frac{t}{2} w^2} \left(\underline{1} + t \left(\frac{1}{3} w^3 - \frac{1}{4} w^4 \right) + \frac{1}{2} t^2 \left(\frac{1}{3} w^3 - \frac{1}{4} w^4 \right)^2 \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\underline{1} - w + \underline{w^2} + \dots \right)$$

QUINDI HO OTTENUTO IL NUOVO INTEGRALE GAUSSIANO CHE NEL TEOREMA GENERALE.

CERCHIAMO DI VALUTARE I VARI CONTRIBUTI E TENGO SOLO IL TERMINE DOMINANTE E IL PRIMO TERMINE TRASCURABILE. (IL TERMINE 1. w NON CONTRIBUISCE PERCHÉ INT. GAUSSIANO DI UNA POTENZA DISPARI)

MA DEVO RICORDARE CHE OGNI TERMINE CON UN w^{2m}
MI PRODUCE CON IL CALCOLO DELL'INTEGRALE
UN $1/t^m$.

• QUINDI SE IO SALGO DI 2 POTENZE DI w E
DAVANTI HO 1 POTENZA DI t ALLORA OTTENG
UN RISULTATO UGUALE A QUELLO DI w^2 PRENDO w^4
+ +

$$= t^t e^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{-\frac{1}{2}tw^2} \left(1 + w^2 - \frac{1}{4}t w^4 - \frac{1}{3}t w^4 + \frac{1}{18}t^2 w^6 \right)$$

MI DARANNO DOPO
L'INTEGRALE $1/t$

TERMINI
+ +

$$= t^t e^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{-\frac{1}{2}tw^2} \left(1 + w^2 - \frac{7}{12}t w^4 + \frac{1}{18}t^2 w^6 \right)$$

QUINDI POSSO CALCOLARLI

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{-\frac{1}{2}tw^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{t}}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{-\frac{1}{2}tw^2} w^2 = -2 \frac{d}{dt} I(t) = -2 \sqrt{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \right) t^{-3/2}$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \frac{1}{t}$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{-\frac{1}{2}tw^2} w^4 = 4 \frac{d^2}{dt^2} I(t) = 4\sqrt{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) t^{-5/2}$$

$$= 3\sqrt{\frac{2\pi}{t}} \frac{1}{t^2}$$

$$I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{-\frac{1}{2}tw^2} w^6 = -8 \frac{d^3}{dt^3} I(t) = -8\sqrt{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) t^{-7/2}$$

$$= 15\sqrt{\frac{2\pi}{t}} \frac{1}{t^3}$$

QUINDI,

$$\Gamma(t) = t^t e^{-t} \left[I + I_2 - \frac{7}{12} t I_4 + \frac{1}{18} t^2 I_6 \right]$$

$$= t^t e^{-t} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \left[1 + \frac{1}{t} - \frac{7}{12} t \frac{3}{t^2} + \frac{1}{18} t^2 \frac{15}{t^3} \right]$$

TUTTI DELL'ORDINE $1/t$

$$= t^t e^{-t} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \left[1 + \frac{1}{t} \left(1 - \frac{7}{4} + \frac{5}{6} \right) \right]$$

$$= t^t e^{-t} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \left[1 + \frac{1}{12} \frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right]$$

QUINDI, VEDENDO $\Gamma(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t^t e^{-t} \sqrt{\frac{2\pi}{t}}$ CHE È L'ANDAMENTO
 CHE CI PERMETTE DI ARRIVARE ALLA FORMULA
 DI STIRLING.

serve $t!$

MA $t! = \Gamma(t+1) = t \Gamma(t)$

CON CONTI $\sim e^{-t} t^t t \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \left(1 + \frac{1}{12} \frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right)$

$$\sim e^{-t} t^t \sqrt{2\pi t}$$

METODO PUNTO A SELLA

ESTENDIAMO QUELLO CHE ABBIAMO FATTO CON INTEGRALI REALI IN REGIME ASINTOTICO AD INTEGRALI SU $\mathbb{C}$ E NON SOLO SULL'ASSE REALE.

VALUTIAMO

$$\int_{\gamma'}^b e^{t f(z)} g(z) dz = I(t)$$

PRENDENDO $t \in \mathbb{R}$ E VALUTANDO I CON $t \rightarrow +\infty$

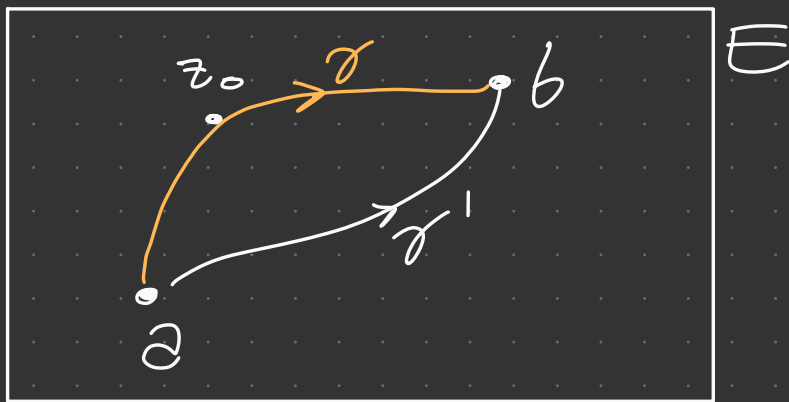
$f(z), g(z)$ SONO FUNZIONI ANALITICHE IN $E \subset \mathbb{C}$

γ' CURVA APERTA CHE UNISCE a, b E TUTTA INTERNA AD E .

SUPPONIAMO CHE $\exists z_0 \in E \mid f'(z_0) = 0$.

SO DAL COROLLARIO DEL TH DI CAUCHY CHE SE DEFORMO γ' RIMANENDO IN E $z \mapsto I(t)$ NON CAMBIA

QUINDI, SCELGO UNA NUOVA CURVA CHE PASSA PER z_0



VOGLIO DIMOSTRARE CHE SE SU γ RIESCO A FARE IN
 MODO CHE z_0 SIA MAX ASSOLUTO PER $\operatorname{Re}(f(z))$
 ALLORA

$$I(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\varphi} e^{t f(z_0)} g(z_0) \sqrt{\frac{\pi}{\Lambda t}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

DOVE Λ, φ SONO PARAMETRI LEGATI ALLA
 SCELTA DI γ (DIPENDONO DAL
 PROBLEMA)

L'AFFERMAZIONE È CHE SE HO $I(t)$, CON FUNZIONI
 ANALITICHE IN UNA CERTA REGIONE E TROVO
 UN PUNTO IN CUI LA $f' = 0$ ALLORA POSSO
 DEFORMARE γ E VALUTO I IN UN MODO
 SIMILE A COME ABBIAMO FATTO SU $\mathbb{R}$, OVVERO
 DOMINATO DA UN CERTO TERMINE.

DEMONSTRATION OPERATIVA:

VOLENDO
ANCHE

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \dots$$

HO $f(z)$ REGOLARE IN E (QUINDI $z_0 \in E$)
SVILUPPO CON TAYLOR IN z_0

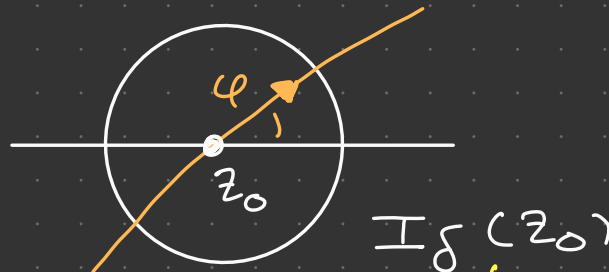
$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2 + O(|z - z_0|^3) \quad \forall z \in I_\delta(z_0)$$

VALUTO $f(z) - f(z_0) = A e^{i\alpha} (z - z_0)^2 + O(|z - z_0|^3)$

con $A = \frac{1}{2} |f''(z_0)|$ $\alpha = \arg(f''(z_0))$

VOGLIO PER z_0 PRENDERE γ DEFORMARLA E FARLA PASSARE

INEVITABILMENTE ATTRAVERSERÀ I_δ INTORNO
DOVE LO SVILUPPO DI f CONVERGE



$I_\delta(z_0)$

VOGLIO PRENDERE PICCOLO
ABBASTANZA DA VEDERE
 γ COME UN DIAMETRO

ABBIAMO GIÀ VISTO CHE IN $I(t)$ DOMINERÀ IL
 PEZZETTO INTORNO AL PUNTO STAZIONARIO z_0
 OVVERO I PUNTI DEL "DIAMETRO" IDENTIFICATO
 CON IL PEZZETTO DI δ DENTRO I_δ

PUNTI CHE POSSO PARAMETRIZZARE CON

$$z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$$

CON φ FISSATO
 $-\delta < \rho < \delta$

FACCIO UNA
 SCELTA SUL VERSO
 DI PERCORRENZA

NOTA CHE $\varphi + \pi$ AUREBBE
 COMUNQUE $\rho \in (-\delta, \delta)$ MA
 IDENTIFICHEREBBE IL CAMMINO
 IN SENSO OPPOSTO

ALLORA

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= A e^{-i\alpha} \rho^2 e^{-i2\varphi} + O(\rho^3) \\ &= A \rho^2 e^{-i(\alpha+2\varphi)} + O(\rho^3) \end{aligned}$$

MA QUELLO CHE INFLUISCE IN $I(t)$ È LA PARTE
 $\operatorname{Re}(f(z)) - \operatorname{Re}(f(z_0))$, QUINDI

$$\operatorname{Re}(f(z)) - \operatorname{Re}(f(z_0)) = A \rho^2 \cos(\alpha + 2\varphi) + O(\rho^3)$$

$$\operatorname{Im}(f(z)) - \operatorname{Im}(f(z_0)) = \rho^2 \sin(\alpha + 2\varphi) + O(\rho^3)$$

VEDO ANCORA CHE SE f ANALITICA E MI METTO IN z_0
 ALLORA NÈ RE NÈ IM POSSONO AVERE UN
 MAX ASSOLUTO DIPENDENDO ENTRAMBI, O DA $\cos$
 O $\sin$, CHE DIPENDONO DA φ (ANGOLO CON CUI
 MI AVVICINO A z_0) E CHE A SECONDA DI COME
 CI ARRIVO z_0 È UN MAX O MIN (SE
 $\cos > 0 \Rightarrow z_0$ MIN, MA SE $\cos < 0 \Rightarrow z_0$ MAX).

QUINDI RIVEDIAMO CHE PER UNA FUNZIONE ANALITICA
 NON ESISTONO MAX O MIN, MA SOLO
PUNTI A SELLA.

→ A SECONDA DI COME CI
 ARRIVO VEDO MAX O MIN

MA IO VOGLIO CHE $\operatorname{Re}(f(z)) - \operatorname{Re}(f(z_0))$ ABBI A UN
 MAX IN $z_0 \Rightarrow \cos(\alpha + 2\varphi) < 0$

MA DI PIÙ VOGLIO CHE L'APPROSSIMAZIONE CHE
 FARÒ SIA LA MIGLIORE POSSIBILE.

→ MAGGIORE È IL DISLIVELLO TRA $\operatorname{Re}(f(z))$ E
 $\operatorname{Re}(f(z_0))$ MIGLIORE È L'APPROSSIMAZIONE.

$\Rightarrow$ APPROX MIGLIORE : $\cos(\alpha + 2\varphi) = -1$

$$\Rightarrow \alpha + 2\varphi = \pi + 2k\pi$$

$\boxed{1}$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + k\pi$$

$$\left(\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

φ DELLA CURVA

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

φ IDENTIFICATO NEL DISEGNO CON $\varphi - \pi$

$\boxed{1}$ MI DICE ANCHE $\sin(\alpha + 2\varphi) = \sin \pi = 0$

$\Rightarrow \Delta I_{\text{M}}$

STAZIONARIA

$\rightarrow$ NON CHE VARIA NEL SEGMENTINO CONTRIBUISCE A $I(t)$

FONDAMENTALE PERCHÉ ALTRIMENTI LEMMA DI RIEMANN
MI DIREBBE CHE IL CONTRIBUTO DEL
PEZZO OSCILLANTE DOVUTO ALLA FASE PER
 $t \rightarrow \infty$ MI CANCELLEREBBE TUTTO IL VALORE
DELL'INTEGRALE

LEMA : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-itx} dx \sim 0$
 $t \rightarrow \infty$

QUINDI

$$I(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \int_{z_0 - \delta e^{i\varphi}}^{z_0 + \delta e^{-i\varphi}} dz e^{t f(z)} g(z)$$

INTEGRO SUL
DIAMETRO INCLINATO
DI φ

HO TEOREMI CHE
MI DICONO CHE LA
PARTE RILEVANTE
DELL'INTEGRALE È DATA
SOLO DA QUEL TRATTINO

CAMBIO $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$

$$\sim e^{i\varphi} \int_{-\delta}^{\delta} d\rho e^{t f(z(\rho))} g(z(\rho))$$

$$\text{io so } \frac{1}{2} f''(z_0) (z - z_0)^2 = A e^{i\alpha} \rho^2 e^{i2\varphi} = A \rho^2 e^{i(\alpha + 2\varphi)}$$

$$\alpha + 2\varphi = \pi \quad \text{---} \quad = -A \rho^2$$

QUINDI HO SCELTO LA DIREZIONE IN CUI IL
PEZZO CON f'' DIVENTA UN PEZZO QUADRATICO
GAUSSIANO

SCRIVO

$$f(z) = f(z_0) - A \rho^2 + \left(\sum_{m \geq 3} \frac{1}{m!} f_m \rho^m e^{im\varphi} \right)$$

E

$$g(z) = g_0 + \left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} g_k \rho^k e^{ik\varphi} \right)$$

4 METTO IN $I(t)$:

$$I(t) \sim e^{i\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp(t(\varphi(z_0) - \Lambda q^2 + \sum_{m \geq 3} \frac{1}{m!} f_m q^m e^{-im\varphi})) (g_0 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} g_k q^k e^{ik\varphi})$$

USO I TEOREMI
CHE CONOSCO, AVENDO
UN INTEGRALE IN
TERMINI IN $\mathbb{C}$

$$= e^{i\varphi} e^{t\varphi(z_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-t\Lambda q^2} \left[e^{t \sum_{m \geq 3} \frac{1}{m!} f_m q^m e^{-im\varphi}} (g_0 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} g_k q^k e^{ik\varphi}) \right]$$

QUINDI CI SIAMO RICONDOTTI AD UN CASO DI INTEGRALE
A VARIABILE REALE (E ABBIAMO DEI COEFFICIENTI
IN $\mathbb{C}$, MA CHE NEI TEOREMI GIÀ VISTI NON IMPORTANO)
E NON OCCORRE DIMOSTRARE CHE IL TERMINE
DOMINANTE È IL PRIMO TERMINE CHE VIENE DA
 $\exp(\dots)$ Moltiplicato con g_0 .

$$I(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} e^{i\varphi} e^{t\varphi(z_0)} g_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-t\Lambda q^2}$$

$$= e^{-i\varphi} e^{t\phi(z_0)} g_0 \sqrt{\frac{\pi}{At}}$$

CHE È IL TERMINE CHE CI ASPETTAVAMO.

MA POSSIAMO CALCOLARE TERMINI SOTTODOMINANTI, TENENDO POTENZE SUCCESSIVE DI g .

OSS IN I HO $\dots \exp\left(t \sum_{m \geq 3} \phi_m g^m e^{-im\varphi}\right) (g_0 + \sum g_k g^2 e^{-ik\varphi})$

1
2

DEVO PRENDERE g^2 CHE VIENE DA 2 MOLTIPLICATO PER L'1 DI 1, MA QUESTO TERMINE AVENDO g^2 A NUM. SO CHE MI FA SCENDERE UN g A DENOMINATORE NEL RISULTATO, MA ESSENDO LA t NELL'EXP CI SONO ULTERIORI TERMINI CHE CONTRIBUISCONO ALLO STESSO ORDINE, CHE IN PARTICOLARE HANNO LA FORMA:

$t g^4$

 $\rightarrow$ POI INTEGRATO IL g FA USCIRE UN t^2 A DEN E MOLTIPLICATO PER t DA ALLA FINE $1/t$

$\downarrow$
 TERMINI DI QUESTA FORMA LI POSSO TROVARE IN 2 MODI:
 $\oplus m=4$ NELL'EXP

$\oplus$ $m=3$ IN 1 MOLTIPLICATO PER
 $k=2$ IN 2

$\oplus$ PRENDO t^2 DA 1 MOLTIPLICATO CON
 $\int^6$ DA $m=6$

[VED. FILE SU MOODLE O LEZIONI PER CONTI. $\rightarrow$ VED. NELLA CARTELLA DEL CORSO SUL PC]

NOTA QUELLO FONDAMENTALE IN UNO SVILUPPO ASINTOTICO
 È FISSARE LA DIREZIONE CON CUI SI
 VA AD ∞ ; DIREZIONE CHE DIPENDE DA
 $\operatorname{Re}(\text{ESPONENTE})$, CHE IN QUESTO CASO È $t f(z)$
 (MA NOI NON CI SIAMO PREOCCUPATI DI $\operatorname{Re}(t)$
 POICHÉ $t \in \mathbb{R}$)

• MA SE $t \rightarrow \infty$ CON DIREZIONE θ
 ALLORA

$$t = \hat{t} e^{i\theta}$$

QUINDI $t f(z) = \hat{t} e^{i\theta} f(z)$ E POI FACCIO $\hat{t} \rightarrow +\infty$

E QUINDI NON DEVO STUDIARE SOLO LA FASE
di $f(z)$, MA $e^{-\theta} f(z)$.

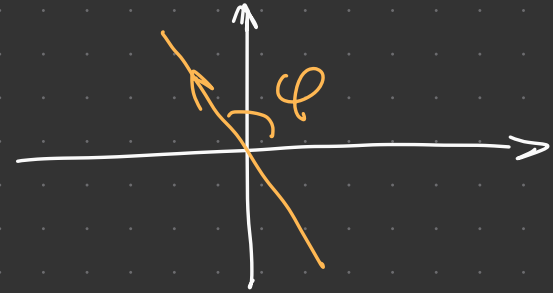
VEDI "ESEMPIO METODO PUNTO A SELLA" E
"ESEMPIO PUNTO A SELLA DI Γ "

NOTA GLOBALMENTE NON RIESCO SEMPRE A RISOLVERE

$$\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0)$$

PERÒ POSSO LAVORARE LOCALMENTE.

CONOSCO z_0 E L'ANGOLO
CON CUI DEVO
PASSARE ATTRAVERSO



CASO PUNTO A SELLA: SO $\alpha + 2\varphi = \pi \xrightarrow{\text{(MASSIMO)}} \cos(\alpha + 2\varphi) = -1$

RANDO $\varphi \mapsto \varphi + \pi/u$

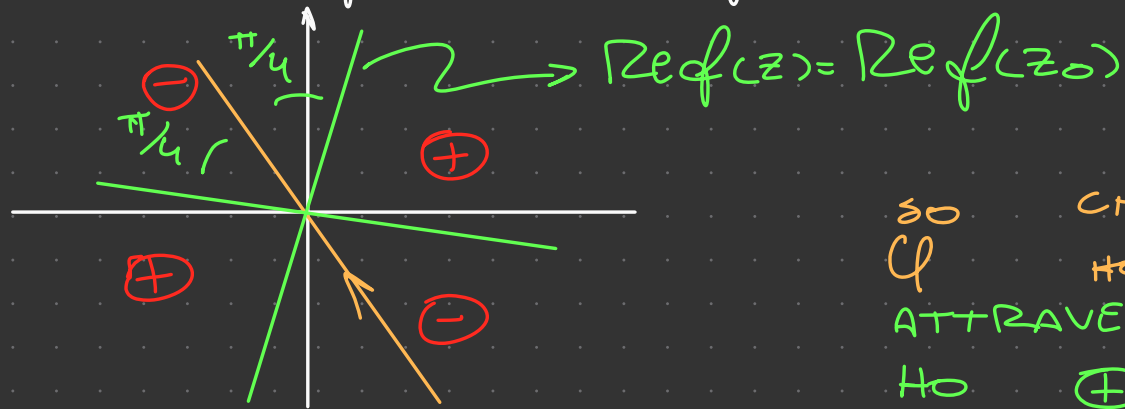
ALLORA $\alpha + 2\varphi \mapsto \alpha + 2\varphi + \pi/2 = \pi + \pi/2 = \frac{3\pi}{2}$

$$\cos(\alpha + 2\varphi) = 0$$

MA SE $\cos(\alpha + 2\varphi) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0)$

ED È SEMPRE VERO CHE SE RUOTO φ DI
 π/u SO CHE $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0)$

$\Rightarrow$ LA LINEA IDENTIFICATA DA γ È LA BISETTRICE
 DEL QUADRANTE CHE FORMANO LE LINEE
 SU CUI $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0)$



SO CHE DOVE PASSA
 γ HO $\ominus$ E SE
 ATTRAVERSO LA LINEA
 HO $\oplus$

QUINDI LOCALMENTE
 RAGIONAMENTO È
 CUI VA USARE.

RIESCO
 QUINDI A FARE QUESTO
 CAPIRE CHE

RAGIONAMENTO ALTERNATIVO

VEDO LA CONDIZIONE DI MAX $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0) \rightarrow \cos(\alpha + 2\varphi) = 0$
 $\Rightarrow \alpha + 2\varphi = \pi$

QUINDI HO

$$\cos(\alpha + 2\varphi) = -1$$

$$\alpha + 2\varphi = \pi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos(\alpha + 2\varphi) = 0$$

$$\alpha + 2\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

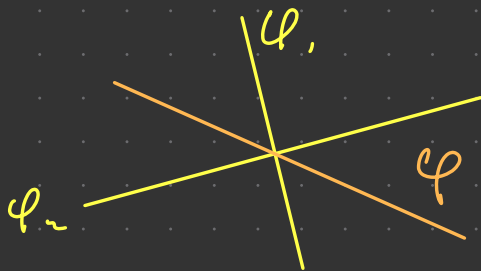
$$\alpha + 2\varphi = \frac{3\pi}{2}$$

$$\varphi^2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

E POSSO VEDERE CHE φ DISTA DA φ_1, φ_2 DI $\pm \pi/4$

$$\varphi - \varphi^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi - \varphi^2 = -\pi/4$$



QUINDI CI SONO 2 DIREZIONI
LA DIREZIONE LUNGO CUI DEVO PASSARE È LA
BISSETTRICE

METODO DELLA FASE STAZIONARIA

METODO CHE IN SOSTANZA È UN'APPLICAZIONE DEL METODO DEL PUNTO A SELLA E CON CUI POSSIAMO VALUTARE INTEGRALI DEL TIPO:

$$I(t) = \int_a^b e^{it h(x)} g(x) dx$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$h(x), g(x)$ FUNZIONI REALI
 $\forall x \in [a, b]$

IO LEMMA SO PERÒ CHE NEL LIMITE $t \rightarrow +\infty$ IL

$$I(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

INTUITIVAMENTE: QUANDO t CRESCE LE OSCILLAZIONI DI $h(x)$ CON LA $\dot{h}$ DAVANTI FANNO IN MODO CHE $\exp(it h(x))$ SIA UNA FUNZIONE PERIODICA, MA CON UN PERIODO BREVE, QUINDI L'exp IN $I(t)$ OSCILLA VIOLENTEREMENTE E PER OGNI CONTRIBUTO POSITIVO CE NE È UNO NEGATIVO CIRCA UGUALE E IL CONTRIBUTO TOTALE DIVENTA ZERO.

MA IL LEMMA VALE SE:

- $h(x)$ INTEGRABILE IN $[a, b]$
- $h(x)$ DERIVABILE E NON COSTANTE

ORA CERCO DI CAPIRE COSA POSSO DIRE SE:

$$\exists h'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

SCRIVO

$$I(t) = \int_a^b (e^{-th(x)} \cdot t h'(x)) \frac{g(x)}{t h'(x)} dx$$

POSSO INTEGRARE PER PARTI

$$I(t) = e^{-th(x)} \frac{g(x)}{t h'(x)} \Big|_a^b - \int_a^b dx e^{-th(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{g(x)}{h'(x)} \right) \frac{1}{t}$$

$$= \frac{1}{it} \left[e^{-ith(b)} \frac{g(b)}{h'(b)} - e^{-ith(a)} \frac{g(a)}{h'(a)} \right] - \frac{1}{it} J(t)$$

SE VALE RIEMANN $J(t) = o(1)$
 $t \rightarrow +\infty$

QUINDI

SE ANCHE $\frac{g(x)}{h'(x)}$ REGOLARE
 ω È

$$I(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t} [\dots] + o\left(\frac{1}{t}\right)$$

QUINDI HO RICONFERMATO CHE
 $I \rightarrow 0$ (LEMA DI RIEMANN) MA
 HO VISTO CHE $I(t) \sim O(1/t)$

ORA MI CHIEDO CHE SUCCEDEREBBE SE

$$\exists x_0 \in [a, b] \quad / \quad h'(x_0) = 0, \quad h''(x_0) \neq 0$$

NON POSSO CHIARAMENTE FARE QUELLO FATTO SOPRA
 SVILUPPO $h(x)$:

$$h(x) = h(x_0) + \frac{1}{2} h''(x_0) (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)$$

HO FATTO SU UN PEZZO DELL'ASSE REALE
 DI FUNZIONI UNA COMPLETAMENTE IMMAGINARIA
 E UNA REALE.

PERÒ $\mathbb{R}$ È UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{C}$ E POTREI
VEDERE IL MIO CAMMINO DI INTEGRAZIONE
FATTO IN $\mathbb{C}$ E QUINDI TRATTARE $I(t)$ CON
IL METODO DEL PUNTO A SELLA.

$$\hookrightarrow f(z) = i h(z)$$



IL PUNTO STAZIONARIO CE L'HO, COSÌ COME LO
SVILUPPO DI $f(z)$ (SVILUPPO DI $h(z)$ MOLTIPLICATO
PER i)

MI CHIEDO CON CHE ANGOLO VOGLIO PASSARE SU x_0

IO VOLEVO TROVARE

$$\operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} f(x_0) = \operatorname{Re}(i h(x_0)) = 0$$

$$\hookrightarrow \text{MA LO È } -\operatorname{Im} h(z)$$

$$\Rightarrow -\operatorname{Im} h(z) < 0$$

$\Rightarrow \operatorname{Im} h(z) > 0 \Rightarrow$ QUINDI STO CERCANDO
 x_0 MINIMO PER $\operatorname{Im} h(z)$

FACCIO IL PROCEDIMENTO CHE CONOSCO DEL METODO
DEL PUNTO A SELLA

$$\frac{1}{z} h''(x_0) = \Lambda e^{i\alpha} \quad (z - x_0) = \rho e^{i\varphi}$$

così

$$h(z) = h(x_0) + \Lambda \rho^2 e^{i(\alpha + 2\varphi)} + O(\rho^3)$$

QUINDI

$$\operatorname{Re} h(z) = h(x_0) + \Lambda \rho^2 \cos(\alpha + 2\varphi)$$

$$\operatorname{Im} h(z) = \Lambda \rho^2 \sin(\alpha + 2\varphi)$$

VOGLIO NON SOLO $\operatorname{Im} h(z) > 0$ MA ANCHE CHE
IL DISLIVELLO $\operatorname{Im} h(z) - \operatorname{Im} h(x_0)$ SIA IL PIÙ
RIPIDO POSSIBILE

$$\Rightarrow \sin(\alpha + 2\varphi) = 1$$

$$\Rightarrow \alpha + 2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + k\pi$$

OSS • TROVIAMO UN RISULTATO SIMILE A QUELLI GIÀ TROVATI E VEDIAMO SUBITO CHE CON QUESTA CONDIZIONE $\cos(\alpha + 2\varphi) = 0$

E SONO NELLA SOLITA SITUAZIONE IN CUI LA PARTE REALE DELL'ESPOENZIALE DIVENTA GAUSSIANA E LA PARTE IMMAGINARIA È STAZIONARIA AL II ORDINE (NON HO IL LEMMA CHE SCHIACCIA A ZERO)

• VISTO CHE $h''(x_0)$ È REALE $\Rightarrow x$ PUÒ ESSERE SOLO 2 COSE $0, \pi$

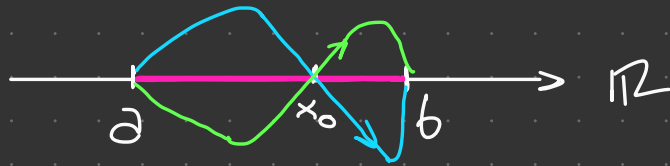
se $h''(x_0) > 0$ $\rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$
 se $h''(x_0) < 0$ $\rightarrow \alpha = \pi \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}$

+ $k\pi$ ABBASTANZA
 , UTILE

QUINDI
CARREINO

HO 2 POSSIBILITÀ

PER DEFORMARE IL



$$h''(x_0) > 0$$

$$h''(x_0) < 0$$

QUINDI

NOTE

QUESTE

COSE

HO

$$h(z) = h(x_0) + i\Delta g^2 + O(g^3)$$

COSSI

SCRIVENDO

$$z = x_0 + g e^{-i\varphi} \quad (dz = e^{-i\varphi} dg)$$

$$I(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \int_{-\delta}^{\delta} dg e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \exp\left[i t (h(x_0) + i\Delta g^2 + O(g^3)) \right] (g(x_0) + \dots)$$

PRENDENDO
TOGLIENDO
L'INTEGRALE

SOLO IL TERMINE
 $\exp(O(g^3))$
DA $-\infty$ A $+\infty$

DOMINANTE DA $g(x)$,
ESTENDENDO
OTTENGO

$$= e^{\pm i\frac{\pi}{4}} e^{-it h(x_0)} g(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dg e^{-t\Delta g^2}$$

$$= e^{\pm i \frac{\pi}{4}} e^{-th(x_0)} g(x_0) \sqrt{\frac{\pi}{A t}}$$

QUINDI ANCHE SE h HA UN PUNTO STAZIONARIO
 NEL CAMMINO DI INTEGRAZIONE VEDO CHE
 $I(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ (COME DAL LEMMA DI RIEHANN) MA
 NON CI VA COME $1/t$ MA COME $1/\sqrt{t}$

SI POTREBBE DIRE PERO' CHE NEL METODO DEL
 PUNTO A SELLA NOI CHIEDAVAMO NON CI
 FOSSERO ALTRI PUNTI IL CUI CONTRIBUTO
 SIA COMPARABILE CON IL CONTRIBUTO DEL
 MASSIMO MA ORA VEDO CHE IN a E b
 HO $I_m h$ UGUALE A QUELLA CHE HO
 IN x_0 .

PERO' SAPPIAMO PER CERTO CHE $h'(x_0) = 0$, MA IN
 GENERALE $h'(a) \neq 0$ O $h'(b) \neq 0$ E QUINDI COME
 ABBIAMO VISTO SOPRA L'ANDAMENTO DI $I(t)$
 IN SOTTOINTERVALLI $[a, x_1]$ CON $x_1 \in (a, x_0)$
 SEGUE IL LEMMA DI RIEHANN E QUINDI
 $I(t)$ VA COME $1/t$ E QUINDI SOTTODOMINANTE
 DELL'ANDAMENTO CHE TROVO CON IL PUNTO A SELLA.

VEDI "ESEMPIO FASE STAZIONARIA"