Funzioni speciali

In questa sezione studiamo le funzioni speciali Gamma, Beta, Zeta e le loro proprietà

FUNZIONE GAMMA

POSSIAMO VEDERLA COME UNA GENERALIZZAZIONE DEL FATTORIALE.

PRENDIAMO L'INTEGRALE I_1, CHE SO CALCOLARE

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$$

PERÒ ORA GUARDO E CALCOLO

$$I_2 = \int_0^\infty t e^{-t}\,dt = \underbrace{-te^{-t}\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1 \cdot I_1 = 1$$

E ANCORA

$$I_3 = \int_0^\infty t^2 e^{-t}\,dt = \underbrace{-t^2 e^{-t}\Big|_0^\infty}_{0} + 2\int_0^\infty t e^{-t}\,dt = 2\,I_2 = 2$$

E COSÌ VIA

SI PUÒ MOSTRARE CHE

$$I_m = \int_0^\infty t^{m-1} e^{-t} dt = -t^{m-1} e^{-t} \Big|_0^\infty + (m-1) \int_0^\infty t^{m-2} e^{-t} dt$$

$$= (m-1) I_{m-1}$$

E SI VEDE BENE CHE C'È UNA RELAZIONE DI RICORRENZA E SI VEDE CHE GENERALIZZA IL FATTORIALE

$$I_m = (m-1) I_{m-1} = (m-1)!$$

NOTA DA QUA (O MEGLIO DA I_1) VEDO PERCHÈ $0! = 1$

MA ORA MI CHIEDO SE IN I_m AL POSTO DI $m \in \mathbb{Z}$ METTO $z \in \mathbb{C}$

DEFINISCO LA FUNZIONE GAMMA (COME RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

OSS TROVO UN SOTTOPRODOTTO DEL RAGIONAMENTO SOPRA SE $z = m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$

$$\Gamma(m+1) = I_{m+1} = m!$$

QUELLO CHE VOGLIO CAPIRE SONO LE PROPRIETÀ DI ANALITICITÀ DI Γ

PRIMA DEVO VEDERE PER QUALI $z \in \mathbb{C}$ HA SENSO LA DEF. DI Γ:

- VEDO CHE LA FUNZIONE INTEGRANDA NON HA SINGOLARITÀ NELL'INTERVALLO E GLI UNICI PUNTI CRITICI POSSONO ESSERE GLI ESTREMI, MA VEDO CHE SE $t \to \infty$ HO L'exp CHE DOMINA E $\to 0$ QUINDI OK. SE GUARDO $t \to 0$ HO $\exp \to 1$, MA LA POTENZA CAMBIA COMPORTAMENTO A SECONDA DI z, IN PARTICOLARE $Re(z)$ E QUINDI AFFINCHÉ

$$\exists\, \Gamma \implies Re(z) > 0$$

COSÌ L'ESPONENTE DI t È > -1 E O NON DIVERGE O DIVERGE POCO

- DEVO VEDERE SE PERÒ È ANALITICA, OVVERO, SE

DERIVABILE

$$\exists\, \frac{d\Gamma}{dz}$$

VEDO

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \int_0^\infty \frac{d}{dz}(t^{z-1})\, e^{-t}\, dt$$

$$\left(\text{SFRUTTO} \quad t^{z-1} = e^{(z-1)\log t} \overset{d_z}{\Big\downarrow} = \log t\, e^{(z-1)\log t} = t^{z-1} \log t \right)$$

$$= \int_0^\infty t^{z-1} \log t\, e^{-t}\, dt$$

CHE È UN INTEGRALE CHE ESISTE SE $Re(z) > 0$
(IL log NON MI CAMBIA NULLA)

QUINDI $\Gamma(z)$ È ANALITICA PER $Re(z) > 0$

OSS PERÒ DERIVARE SOTTO INTEGRALE È LECITO SE

$$|f(z,t)| < g(t)$$

MA IN QUESTO CASO È VERO POICHÈ

DATI $\delta \geq 0$, $M < \infty$ $\forall z$ $\delta < z < M$ VALE

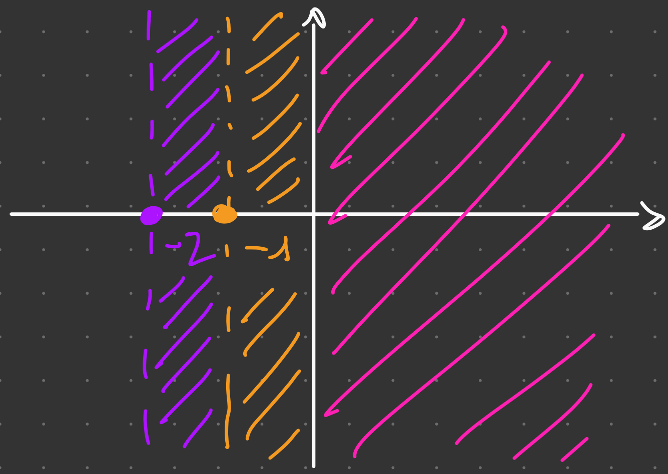
$$|e^{-t} t^{z-1}| \leq \begin{cases} e^{-t} t^{\delta-1} & t \leq 1 \\ e^{-t} t^{M-1} & t > 1 \end{cases}$$

UTILE SEPARARE IN INTERVALLI PERCHÈ POI SPEZZO L'INTEGRALE

$\Rightarrow$ L'INTEGRALE È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE, QUINDI TUTTO È LECITO

OK PER $Re(z) > 0$, MA CHE SUCCEDE NEL RESTO DI $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ SOSTANZIALMENTE VORREI TROVARE UNA CONTINUAZIONE ANALITICA DI Γ



IL MODO PIÙ SEMPLICE È QUELLO DI USARE LA RELAZIONE DI RICORRENZA DI Γ

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t}\, dt$$

DEFINITO SE $Re\, z > -1$

INTEGRO PER PARTI

$$= \underbrace{-t^z e^{-t}\Big|_0^{\infty}}_{=0} + z\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

SE $Re\, z > 0$

ESISTE SE $Re\, z > 0$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)}$$

QUEST'IDENTITÀ VALE PER $\mathrm{Re}(z) > 0$

PERÒ L'INTEGRALE DI $\Gamma(z+1)$ È DEFINITO PER $\mathrm{Re}(z) > -1$

QUINDI
$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

È UNA CONTINUAZIONE ANALITICA DELLA $\Gamma(z)$ POICHÈ IL SECONDO MEMBRO $\exists$ PER $\mathrm{Re}(z) > -1$ E MI FA VEDERE DOVE HO SINGOLARITÀ $\Rightarrow$ POLO IN $z = 0$

& QUINDI RIESCO A VEDERE DOV'È IL PROBLEMA PER CUI NON RIESCO AD ESTENDERE LA REGIONE DI CONVERGENZA DELL'INTEGRALE OLTRE $z = 0$

POTREI CONTINUARE QUESTA COSA

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad ; \quad \Gamma(z+1) = \frac{\Gamma(z+2)}{z+1}$$

$$\Rightarrow \Gamma(z) = \underbrace{\frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}}_{\text{DEFINITO PER } \mathrm{Re}(z) > -2}$$

MI FA VEDERE IL POLO IN -1

QUINDI ERO RIUSCITO A CONTINUARE ANALITICAMENTE FINO IN -1 E ORA SONO ARRIVATO A -2

VADO AVANTI

$$\Gamma(z) = \underbrace{\frac{\Gamma(z+m+1)}{z(z+1)\dots(z+m)}}_{} \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

HA SENSO PER $\mathrm{Re}(z) > -m$

E MOSTRA CHE Γ HA POLI SEMPLICI IN TUTTI GLI INTERI NEGATIVI $z_m = -m$ $\quad m \in \mathbb{N}$

E CHE SONO LE UNICHE SINGOLARITÀ (ALTROVE LA Γ È ANALITICA).

NOTA PERÒ SI VEDE CHE L'∞ È UN P.TO DI ACCUMULAZIONE DI POLI $\Rightarrow$ NON È UNA SINGOLARITÀ ISOLATA.

IL DOMINIO DI ANALITICITÀ: $D = \{ z \mid z \neq -m \}$

COSÌ POSSO SCRIVERE $\Gamma(z)$ COME INTEGRALE, MA USANDO $\Gamma(z+m)$, CON m CHE MI INTERESSA, DIVISA PER UN CERTO DENOMINATORE

POTREI VEDERE LA STESSA COSA IN MODO DIVERSO (RIESCO AD OSSERVARE I RES)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt = \underbrace{\int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt}_{P(z)} + \underbrace{\int_1^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt}_{Q(z)}$$

POSSO NOTARE CHE $Q(z)$ È UNA FUNZIONE INTERA E REGOLARE OVUNQUE (PRIMA AVEVO PROBLEMI IN 0) E LA $P(z)$ È IL PEZZO NON ANALITICO OVUNQUE. SE VOGLIO LA CONTINUAZIONE ANALITICA DI $\Gamma(z)$ DEVO TROVARE QUELLA DI $P(z)$.

SCRIVO

$$P(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt = \int_0^1 t^{z-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} t^m\, dt$$

SVILUPPO L'exp IN 0

LA SERIE CONVERGE E POSSO SCAMBIARE SERIE E INT.

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^1 t^{m+z-1}\, dt$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{t^{m+z}}{m+z} \Bigg|_0^1$$

RIESCO A CALCOLARLA SE $Re(z) > 0$, POICHÈ QUANDO LA VALUTO HO

$$P(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{m+z}$$

E POSSO OSSERVARE CHE HO UNA SERIE CONVERGENTE.

PRENDO IL DOMINIO $D = \{ z \mid |z+m| \geq \delta > 0 \}$ IN CUI I TERMINI DELLA SERIE DI $P(z)$ SONO MAGGIORATI DAI TERMINI DI

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{\delta}$$

QUINDI LA SERIE CHE COMPARE IN P È UNIFORMEMENTE CONVERGENTE

$\Rightarrow$ DEFINISCE UNA FUNZIONE ANALITICA

POSSO VEDERE QUINDI LA SERIE DI Γ COME UNA SUA CONTINUAZIONE ANALITICA IN TUTTI I PUNTI DI $\mathbb{C}$ DOVE Γ SCRITTO COME INTEGRALE NON ESISTE.

OGNI TERMINE DELLA SERIE MI DICE CHE $\Gamma(z)$ HA UN POLO IN $z = -m$

E LA FORMA DI $\Gamma(z)$ MI FA VEDERE

$$\Gamma(z) \underset{z \to -m}{\sim} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{z+m} + \Omega(z+m)$$

Σ DI TAYLOR REGOLARE IN $z = -m$

CI BUTTO DENTRO GLI ALTRI TERMINI DI Γ E TUTTA Q POICHÈ SONO ROBE REGOLARI IN $z = -m$

E POSSO ANCHE VEDERE CHI È IL RESIDUO NEL POLO

$$\operatorname{Res} \Gamma(z) \Big|_{z=-m} = \frac{(-1)^m}{m!}$$

NOTA ANCHE SE NON AVESSI SPEZZATO $\Gamma(z)$ AVREI POTUTO SVILUPPARE L'EXP E SCAMBIARE SERIE E INTEGRALE, PERÒ AVREI AVUTO PROBLEMI AD INTEGRARE t^{m+z-1} POICHÈ SE m GRANDE ARRIVO AD UN PUNTO IN CUI $m > \mathrm{Re}(z)$ E IN $t \to 0$ AVRÒ UN INTEGRALE DIVERGENTE, PERÒ SE LO FACCIO FINO AD 1 NON HO PROBEMI

NOTA SE AVESSI VOLUTO IL Res CON

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m+1)}{z(z+1)\dots(z+m)} \quad \text{IN} \quad z = -m$$

$$\mathrm{Res} = \lim_{z \to -m} \Gamma(z) = \frac{\Gamma(1)}{-m(-m+1)\dots(-1)} = \frac{\Gamma(1)}{(-1)^m\, m(m-1)\dots 1} = \frac{(-1)^m}{m!}$$

Funzione Beta di Eulero

VOGLIO METTERLA IN RELAZIONE CON LA FUNZIONE Γ
E TROVARNE LE PROPRIETÀ

LA DEFINISCO

$$B(z,u) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{u-1}\,dt$$

COME AL SOLITO DEVO VEDERE LE CONDIZIONI DI
ESISTENZA:

$$\mathrm{Re}(z),\ \mathrm{Re}(u) > 0$$

SE FACCIO $t \to t' = 1-t$

$$B(z,u) = \int_1^0 (-dt')(1-t')^{z-1}\,t'^{\,u-1} = B(u,z)$$

E QUINDI SI VEDE BENE LA SIMMETRIA RISPETTO LE
VARIABILI u E z

ESISTE UN'ALTRA RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE (A VOLTE COMODA)

FACCIO IL CAMBIO $t = \sin^2\theta$, $dt = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$$B(z,u) = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2z-2} \underbrace{(\cos\theta)}_{1-\sin^2\theta}^{2u-2} 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2z-1} (\cos\theta)^{2u-1}\, d\theta$$

VEDO LA RELAZIONE TRA B E Γ.

PER PRIMA COSA DEVO RISCRIVERE Γ CON UN CAMBIO DI VARIABILE

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$

$t = y^2$, $dt = 2y\, dy$

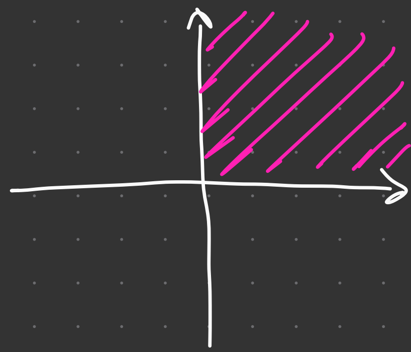
$$= 2\int_0^{\infty} e^{-y^2}\, y^{2z-1}\, dy$$

SE SCRIVO

$$\Gamma(z)\Gamma(\mu) = 4\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \; e^{-(x^2+y^2)} \; x^{2\mu-1} \; y^{2z-1}$$

POSSO ANCORA CAMBIARE VARIABILI $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\theta$

NOTANDO CHE STO INTEGRANDO SU UN QUADRANTE



$$\Gamma(z)\Gamma(\mu) = 4\int_0^\infty d\rho\,\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \; e^{-\rho^2} \rho^{2(z+\mu)-1} (\cos\theta)^{2\mu-1} (\sin\theta)^{2z-1}$$

CHE POSSO CONFRONTARE CON L'ESPRESSIONE DI $B(z,\mu)$

$$\Gamma(z)\Gamma(\mu) = \underbrace{2\int_0^\infty d\rho\, e^{-\rho^2} \rho^{2(z+\mu)-1}} \; B(z,\mu)$$

MA POSSO RICONOSCERE LA $\Gamma(z+\mu)$

$$\Rightarrow \Gamma(z)\Gamma(\mu) = \Gamma(z+\mu)\, B(z,\mu)$$

$$\Rightarrow \boxed{B(z,\mu) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\mu)}{\Gamma(z+\mu)}}$$

DA QUESTA RELAZIONE SI PUÒ VEDERE L'ANALITICITÀ DI $B(z,\mu)$

SO CHE SE $\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Re}\, \mu > 0$ LA B ERA BEN DEFINITA E MI TORNA POICHÈ ANCHE IL PEZZO A DX LO È.
POI VEDO CHE IL 2° MEMBRO HA DEI POLI SE $\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Re}\, \mu < 0$ E DI CONSEGUENZA ANCHE B HA POLI IN $z = -m$ E $\mu = -m$

SEMPLICI

RELAZIONI SODDISFATTE DA $\Gamma(z)$

°) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

°°) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z,1-z)\underbrace{\Gamma(1)}_{0!} = B(z,1-z)$

$$= \int_0^1 dt\, t^{z-1}(1-t)^{-z}$$

POSSO CALCOLARLO SE $0<\mathrm{Re}(z)<1$ MA NEL SENSO DELLA CONTINUAZIONE ANALITICA È UNA COSA GENERALE, POICHÈ $\Gamma(z)\ \exists$ SE $\mathrm{Re}\,z>0$ E $\Gamma(1-z)\ \exists$ SE $\mathrm{Re}(1-z-1)>-1$ $\Rightarrow \mathrm{Re}\,z<1$ E QUINDI IL LORO PRODOTTO $\exists$ SE $0<\mathrm{Re}\,z<1$

CHE È UN INTEGRALE GIÀ VISTO A P. 79 CON $z=\alpha$ E VENIVA $\pi/\sin(\pi z)$

$$\hookrightarrow \int_0^1 dt\, \frac{1}{t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^z$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}}$$

QUESTO PERMETTE DI FAR VEDERE CHE $\Gamma(z)$ NON HA MAI ZERI VEDENDO CHE L'INVERSA È ANALITICA

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(1-z)}{\pi}\sin(\pi z)$$

E VEDO CHE $\Gamma(1-z)$ HA DEI POLI IN $1-z=-k \rightsquigarrow z_k = 1+k$ INTERI, MA SO CHE IL $\sin$ HA ZERI SEMPLICI SE z INTERO, QUINDI $1/\Gamma(z)$ È REGOLARE E MAI SINGOLARE.

OSS POSSO VEDERE

$$\Gamma(z) \underset{z\to -k}{\sim} \frac{\pi}{\Gamma(1+k)} \frac{1}{(-1)^k \pi (z+k)} = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k}$$

$$-\sin \pi z \sim 0 + \pi \cos \pi z \Big|_{-k} (z+k)$$

$$\sim (-1)^k \pi (z+k)$$

DALLA 2° PROPRIETÀ POSSO CALCOLARE

$$z = 1/2 \longrightarrow 1-z = 1/2$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \pi/2} \Rightarrow \left(\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

E CON LA 1° POSSO CALCOLARE LA Γ IN PUNTI SPECIFICI PRECEDENTI O SUCCESSIVI IN MODO RICORSIVO

TROVERÒ $\boxed{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi}}$; $\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right) = \frac{(-2)^m}{(2m-1)!!}\sqrt{\pi}}$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2^2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{1/2-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = (-2)\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}-2\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{-\frac{1}{2}-1}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)(-2)\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{2^2}{3}\sqrt{\pi}$$

E COSÌ VIA ARRIVO ALLE RELAZIONI RIQUADRATE

...) UN'ALTRA PROPRIETÀ È DI RIUSCIRE A CALCOLARE LA FORMULA DI DUPLICAZIONE ($\Gamma(2z)$)

$$B(z,z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\,dt$$

CAMBIO VARIABILE $t = \frac{1+x}{2}$, $1-t = \frac{1-x}{2}$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}dx \left(\frac{1+x}{2}\right)^{z-1}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{z-1}$$

$$= 2^{-2z+1}\int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2)^{z-1}$$ → FUNZIONE PARI

$$= 2^{-2z+2}\int_0^1 dx\,(1-x^2)^{z-1}$$

PERÒ SO ANCHE $B(\mu,z) = \int_0^1 dt\, t^{\mu-1}(1-t)^{z-1}$

$t = x^2 \Rightarrow$ $= \int_0^1 2x\,dx\; x^{2\mu-2}(1-x^2)^{z-1}$

$$= 2\int_0^1 dx\, x^{2\mu-1}(1-x^2)^{z-1}$$

CHE SE LA CONFRONTO CON QUELLO CHE HO IO HA SOLO UN PEZZO $x^{2\mu-1}$ IN PIÙ, QUINDI LA μ È PRESA IN MODO CHE $x^{2\mu-1}=1$

$$\mu = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow B\left(\tfrac{1}{2}, z\right) = 2\int_0^1 dx\,(1-x^2)^{z-1}$$

QUINDI TROVO

$$B(z,z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = 2^{-2z+1} B\left(\tfrac{1}{2}, z\right)$$

LA TRASFORMO FACILMENTE IN UN'IDENTITÀ TRA FUNZIONI Γ

$$= 2^{-2z+1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(z)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = 2^{-2z+1}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Gamma(2z) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\,2^{2z-1}}$$

E HO TROVATO LA FORMULA DI DUPLICAZIONE PER LA FUNZIONE Γ

- VEDI "ESERCIZIO 1 Γ"

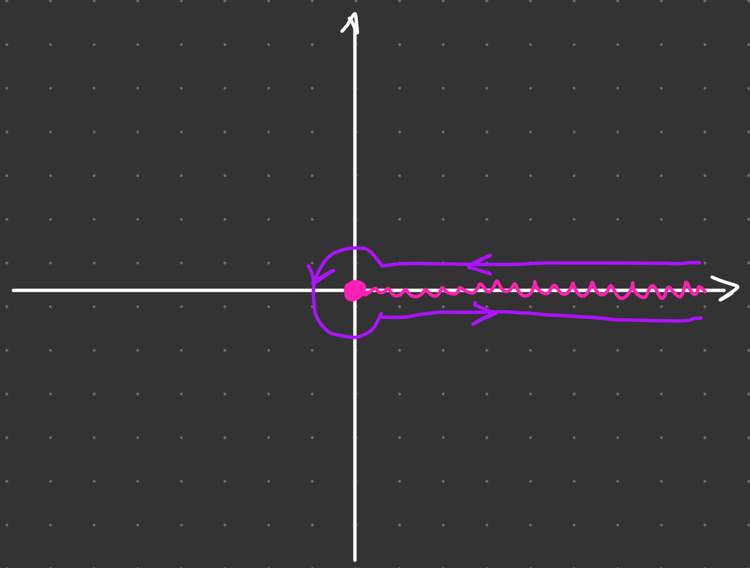
RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI HENKEL

ORA VOGLIAMO STUDIARE UNA RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI $\Gamma(z)$ VALIDA SU UNA REGIONE PIÙ VASTA DI $Re(z) > 0$ (VALIDA $\forall z$)

CONSIDERIAMO

$$I(z) = \int_{C_H} t^{z-1} e^{-t} \, dt \quad , \quad t \in \mathbb{C}$$

ORA QUINDI GUARDIAMO UN PIANO $\mathbb{C}$ DI t



MA ESSENDO $t \in \mathbb{C}$ ALLORA HO LA FUNZIONE INTEGRANDA UNA FUNZIONE POLIDROMA

$$t^z = e^{z \log t}$$

CHE HA POLIDROMIA DEL $\log$ (P.TI DI DIRAMAZIONE $z=0, z=\infty$)

SE IL CAMMINO DI INTEGRAZIONE NON INTERSECA IL TAGLIO NON HO PROBLEMI POICHÈ IN TUTTI GLI ALTRI PUNTI LA FUNZIONE È BEN DEFINITA

SCEGLIAMO COME CAMMINO DI INTEGRAZIONE IL CAMMINO DI HENKEL C_H

SCELTO C_H HO LA FUNZIONE BEN DEFINITA, SONO SU UN CERTO FOGLIO E SICURAMENTE L'INTEGRALE $\exists$

$\hookrightarrow$ HO $f(t,z)$ CHE $\to 0$ RAPIDAMENTE COME exp SE $t \to \infty$ QUINDI OK, E LA PARTE PROBLEMATICA IN $\int_0^\infty$, OVVERO, IL COMPORTAMENTO IN ZERO ORA NON DA PROBLEMI POICHÈ CON C_H LO AGGIRO

$$\exists\, I(z) \quad \forall z$$

$\Rightarrow$ $I(z)$ È UNA FUNZIONE ANALITICA $\forall z$

PERÒ ORA DEVO CAPIRE LA RELAZIONE TRA $I(z)$ E Γ. PER FARLO DEVO METTERMI NELLA REGIONE IN CUI ENTRAMBI ESISTONO.

OVVERO $\mathrm{Re}(z) > 0$

SE $\mathrm{Re}(z)$ POSSO SCOMPORRE $I(z)$ IN TRE PARTI

$$I(z) = \int_{\infty}^{\varepsilon} f_+(t)\,dt + \int_{C_\varepsilon} f(t)\,dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} f_-(t)\,dt$$

MA $f(t)$ SE t DIVENTA PICCOLO $f \to 0$
(ESSENDO IN $\mathrm{Re}\, z > 0$) E SCEGLIENDO $\varepsilon \to 0$ IL SECONDO INTEGRALE $= 0$

↳ (POSSO FARLO SEMPRE, MA A MAGGIOR RAGIONE PERCHÈ VOGLIO $\Gamma(z)$, OVVERO $\int_0^\infty$)

$$I(z) = \int_0^\infty (f_- - f_+)\,dt = \int_0^\infty \left(e^{i2\pi z} e^{-t} t^{z-1} - e^{-t} t^{z-1} \right) dt$$

f_- CON FASE PER AVER FATTO UN GIRO

f_+

$$= (e^{i2\pi z} - 1) \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt = (e^{i2\pi z} - 1)\,\Gamma(z)$$

COSI HO TROVATO $\boxed{I(z) = (e^{i2\pi z} - 1)\,\Gamma(z)}$

$$= e^{i\pi z}\left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right)\Gamma(z)$$

$$\Longrightarrow \quad I(z) = 2i\, e^{i\pi z} \sin(\pi z)\,\Gamma(z)$$

CHE È UNA RELAZIONE VALIDA DOVE $\exists\,\Gamma(z)$, MA POSSO ANCHE USARE LA CONTINUAZIONE ANALITICA

$$\boxed{\Gamma(z) = \frac{e^{-i\pi z}}{2i\sin(\pi z)}\, I(z)} \qquad (1)$$

$I(z)$ POSSO SEMPRE CALCOLARLO E DOVE NON CONOSCO Γ LA CALCOLO CON (1)
↳ OVVERO SE $\operatorname{Re} z \leq 0$

E POSSO ANCORA RICAVARE (USANDO $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$)

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-i\pi z}}{2i\pi}\, \Gamma(z)\Gamma(1-z)\, I(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{e^{-i\pi z}}{2\pi i}\, I(z)} \qquad (2)$$

E DA QUESTE RELAZIONI SI POSSONO RITROVARE LE GIÀ NOTE PROPRIETÀ DI $\Gamma(z)$ (PER ESEMPIO I POLI NEGLI INTERI NEGATIVI)
(LI VEDI DA (1) POICHÈ IL $\sin$ HA ZERI)

QUINDI POSSO USARE (1) E (2) PER POTER TROVARE LE PROPRIETÀ DI Γ (OVVERO I POLI NEGLI INTERI NEGATIVI). DA (1) VEDO SUBITO POLI DATI DAL [illegible] NEGLI INTERI NEGATIVI E POSSONO NON DARE POLI DI Γ SOLO SE $I(z)$ LI BILANCIA CON DEGLI ZERI.

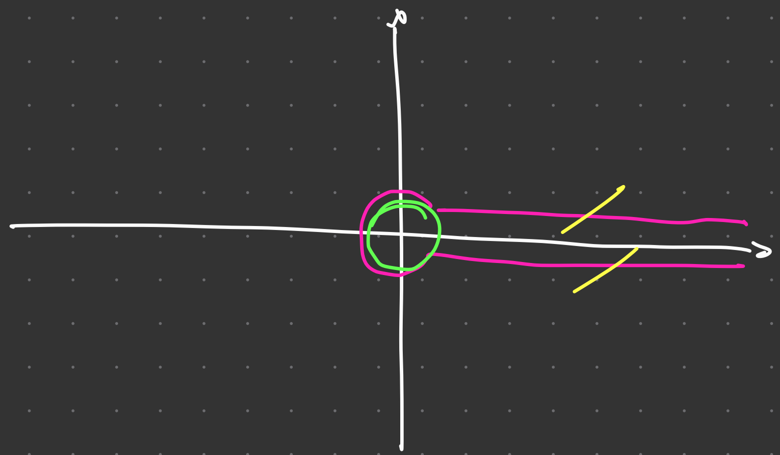
QUINDI DEVO VEDERE COSA FA $I(z)$

GUARDANDO LA DEFINIZIONE DI $I(z)$ NOTO CHE SE MI METTO NEI POLI DI $\Gamma(z)$, OVVERO GLI INTERI NEGATIVI, VEDO CHE LA FUNZIONE INTEGRANDA NON È PIÙ POLIDROMA

$\Rightarrow$ TRA I DUE RAMI DI C_H NON C'È PIÙ DISCONTINUITÀ

$\Rightarrow$ I DUE RAMI POSSO DEFORMARLI UNO SOPRA L'ALTRO E SI ANNULLANO A VICENDA

E POSSO VEDERE CHE C_H DIVENTA UN CERCHIO ATTORNO L'ORIGINE E POSSO USARE IL TH DEI RESIDUI



$$I(m) = \oint_0 e^{-t}\, t^{m-1}\, dt \qquad m \in \mathbb{N}$$

SE $m>0$ $\quad I(m)=0$

SE $m \leq 0$ VEDO CHE LA FUNZIONE INTEGRANDA DA UN POLO

$$m = -k$$

$$\oint e^{-t}\, t^{-k-1}\, dt = 2\pi i \lim_{t\to 0} \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}(e^{-t}) = 2\pi i \frac{(-1)^k}{k!}$$

POLO DI ORDINE k

OPPURE

$$I(m) = 2\pi i \, \mathrm{Res}(e^{-t}\, t^{m-1})\Big|_{t=0}$$

$$e^{-t}\, t^{m-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, t^{k+m-1}$$

CON COEFFICIENTE DI $1/t$ $\Rightarrow k=-m$

E IL TERMINE CHE VOGLIO È $\frac{(-1)^k}{k!}$

$$\Rightarrow \quad I(m) = 2\pi i \frac{(-1)^k}{k!}$$

E POSSO STUDIARE $\Gamma(z)$ SE $z \to -m$ USANDO (1)

$$\Gamma(z) \underset{z\to -m}{\sim} \frac{\cancel{e^{i\pi m}}}{\cancel{z\,i}} \frac{(-1)^m}{m!} \cancel{2\pi i} \frac{1}{\pi \cancel{\cos}(\pi m)} \frac{1}{z+m}$$

$\cancel{e^{i\pi m}} \to (-1)^m$

$\cos(\pi m) \to (-1)^m$

DEVO SVILUPPARE IL $\sin$

$$\sin \pi z \underset{-m}{\sim} 0 + \pi \cos \pi z \Big|_{-m} (z+m)$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(z) \underset{z\to -m}{\sim} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{z+m}$$

E INFATTI VEDO CHE $\Gamma(z)$ HA UN POLO SEMPLICE IN $z=-m$ E HA RESIDUO $\frac{(-1)^m}{m!}$

MA DA (1) OLTRE A VEDERE I POLI NEGLI INTERI NEGATIVI VEDO CHE NON HO POLI IN QUELLI POSITIVI POICHÈ GLI ZERI DEL DEN SONO BILANCIATI DA $I(z)$ CHE SI ANNULLA (POICHÈ SE $z \in \mathbb{N}$ ALLORA LA FUNZIONE INTEGRANDA NON È PIÙ POLIDROMA, È REGOLARE $\Rightarrow$ HA $\mathrm{Res}=0$ $\Rightarrow$ $I(z)=0$)

SI VEDE POICHÈ

$$\Gamma(z) \underset{z\to +k}{\sim} \frac{(-1)^k \cdot 0}{2\pi i \,(-1)^k (z-k)} \Rightarrow \underline{\text{REGOLARE}}$$

SVILUPPO

DA (2) PERÒ VEDO DOVE SONO I POLI DI $\Gamma(1-z)$ POICHÈ IN $z \in -\mathbb{N}$ ALLORA $I(z) \neq 0$ E QUINDI $1/\Gamma(1-z)$ È REGOLARE $\Rightarrow$ Γ MAI NULLA.

PERÒ SE $z \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $I(z)=0$ $\Rightarrow$ Γ HA DEI POLI ESSENDO $1/\Gamma$ HA DEGLI ZERI

Funzione Digamma

se sviluppo $\Gamma(z)$ in z_0

$$\Gamma(z) \underset{z \to z_0}{\sim} \Gamma(z_0) + \left.\frac{d\Gamma}{dz}\right|_{z} (z+z_0) + \dots$$

$$= \Gamma(z_0) + \left.\left(\Gamma \frac{d\log\Gamma}{dz}\right)\right|_{z_0} (z+z_0) + \dots$$

$$= \Gamma(z_0)\left[1 + \left.\frac{d\log\Gamma}{dz}\right|_{z_0} (z+z_0) + \dots\right]$$

VOGLIO QUESTA FUNZIONE

la definisco

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\log\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

DERIVATA RISPETTO L'ARGOMENTO

$$\left(\psi(4z^2) = \left.\frac{\frac{d}{dw}\Gamma(w)}{\Gamma(w)}\right|_{w=4z^2}\right)$$

e usando la definizione possiamo studiarne già le proprietà.

a) SO $\Gamma(z)$ NON HA ZERI $\rightsquigarrow$ DIVIDERE PER Γ NON PORTA SINGOLARITÀ

$\Rightarrow \psi(z)$ È SINGOLARE SOLO DOV'È SINGOLARE $\Gamma'(z)$ (CIOÈ $\Gamma(z)$) (OSSIA $z_m = -m$ $m \in \mathbb{N}$)

HO VISTO CHE $\Gamma(z) \underset{z \to -m}{\sim} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{z+m} + \Omega(z)$

CON $\Omega(z)$ REGOLARE IN z_m

ED È FACILE CALCOLARE COSA FA $\psi(z)$

$$\psi(z) \underset{z \to -m}{\sim} \Bigg(\frac{(-1)^{m+1}}{m!} \frac{1}{(z+m)^2} + \underbrace{\Omega'(z)}_{\text{REGOLARE}} \Bigg) \Bigg(\frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{z+m} + \Omega(z) \Bigg)^{-1}$$

DIVIDO SOPRA E SOTTO PER $\frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{z+m}$

$$\sim \Bigg(-\frac{1}{z+m} + \underbrace{(-1)^m m! (z+m) \Omega'(z)}_{\text{REGOLARE}} \Bigg) \Bigg(\underbrace{1 + (-1)^m m! (z+m) \Omega(z)}_{1 + \text{QUALCOSA} \to 0 \text{ SE } z \to -m} \Bigg)^{-1}$$

$$\sim \Bigg(-\frac{1}{z+m} + (-1)^m m! (z+m) \Omega'(z) \Bigg) \underbrace{\Bigg(1 - (-1)^m m! (z+m) \Omega(z) + O(z+m) \Bigg)}_{\text{È QUALCOSA DI REGOLARE (SONO POTENZE DI } (z+m))}$$

QUINDI L'UNICO TERMINE CHE MI DÀ QUALCOSA DI NON REGOLARE È IL PRIMO · PRIMO, MENTRE GLI ALTRI PRODOTTI DANNO COSE REGOLARI E POSSO SCRIVERE

$$\psi(z) \underset{z \to -m}{\sim} -\frac{1}{z+m} + \hat{\Omega}(z) \quad , \quad \hat{\Omega}(z) \text{ REGOLARE}$$

E SI VEDE CHE $\psi(z)$ HA SINGOLARITÀ IN $z = -m$ (POLI SEMPLICI) E CHE $\mathrm{Res} = -1$

UN'OSSERVAZIONE CHE SI FA È CHE LE PROPRIETÀ DI Γ SI TRADUCONO IN PROPRIETÀ DELLA ψ

b) RICORDO $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

SE CALCOLO
$$\psi(z+1) = \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{d}{dz}\left(z\Gamma(z)\right)\frac{1}{z\Gamma(z)}$$

LEIBNITZ
$$= \frac{1}{z} + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{z} + \psi(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z)}$$

AVENDO QUALCOSA DI MOLTIPLICATIVO DI Γ, USANDO log DIVENTA ADDITIVA PER ψ

c) SE INVECE RICORDO $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$

DERIVO
$$\Gamma'(z)\Gamma(1-z) - \Gamma(z)\Gamma'(1-z) = \pi^2(-1)\frac{\cos \pi z}{\sin^2 \pi z}$$

LA DIVIDO PER L'IDENTITÀ DI PARTENZA

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \frac{\Gamma'(1-z)}{\Gamma(1-z)} = \frac{-\pi^2 \cos \pi z}{\sin^2 \pi z} \frac{\sin \pi z}{\pi} = -\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \cot(\pi z)}$$

d) RICORDO LA FORMULA DI DUPLICAZIONE

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$$

DERIVO

$$2\log 2 \cdot 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right) + 2^{2z-1}\Gamma'(z)\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right) + 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma'\left(z+\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma'(2z)\cdot 2$$

$$2^{2z-1} = e^{(2z-1)\log 2} \xrightarrow{\partial_z} 2\log 2\, e^{(2z-1)\log 2}$$

DIVIDO PER LA FORMULA DI DUPLICAZIONE

$$\Rightarrow \boxed{2\log 2 + \psi(z) + \psi\left(z+\tfrac{1}{2}\right) = 2\psi(2z)}$$

ORA È UTILE INTRODURRE LA COSTANTE DI EULERO-MASCHERONI γ

$$\boxed{\psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma = 0{,}577}$$

USANDO LE PROPRIETÀ DI $\psi(z)$ POSSO CALCOLARE ψ IN NUMERI INTERI USANDO γ

USANDO b)

$$\psi(n+1) = \frac{1}{n} + \psi(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \psi(n-1) = \dots = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma$$

USANDO d) CALCOLO $\psi(1/2)$

$$\psi(1/2) + \psi(1) + 2\log 2 = 2\psi(1)$$

$$\Rightarrow \psi(1/2) = -\gamma - 2\log 2$$

E ORA POSSO CALCOLARE ψ IN OGNI SEMI-INTERO

$$\psi(n + 1/2) = \frac{1}{n - 1/2} + \psi(n - 1/2) = \frac{1}{n-1/2} + \frac{1}{n-3/2} + \psi(n - 3/2) = \dots$$

$$= 2\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2k-1} - \gamma - 2\log 2$$

RAPPRESENTAZIONI INTEGRALI DI $\psi(z)$

CONOSCIAMO:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \qquad \mathrm{Re}\, z > 0$$

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1} \log t\, dt$$

PER DARE UNA RAPPRESENTAZIONE DI $\psi(z)$ DEVO DARE UNA RAPPRESENTAZIONE DEL $\log$ (CHE È SEMPRE UTILE)

STUDIO $$I(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x}\, dt$$

QUELLO CHE POSSO OSSERVARE È CHE $I(t) = \log t$

POICHÈ DERIVANDO L'IDENTITÀ VERO

$$\frac{d}{dt} I(t) = \int_0^\infty - \frac{e^{-xt}}{x}(-x)\,dx = \int_0^\infty e^{-xt}\,dx = \left.\frac{e^{-xt}}{-t}\right|_0^\infty = \frac{1}{t} = \frac{d}{dt}\log t$$

E SE LE DERIVATE SONO UGUALI ALLORA LE DUE FUNZIONI DIFFERISCONO DI UNA COSTANTE CHE POSSO FISSARE CALCOLANDO LE FUNZIONI IN UN PUNTO

$$\log(1) = 0 \qquad I(1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = \log t}$$

AFFINCHE $I(t)$ CONVERGA IN $t = \infty$ $\Rightarrow \mathrm{Re}\, t > 0$
E POTREI AVERE PROBLEMI IN 0, MA $\exists\, I(t)$ PERCHÈ STO FACENDO LA DIFFERENZA POICHÈ SE GUARDASSI I DUE PEZZI SEPARATI DIVERGEREBBERO IN ZERO

SI VEDE GUARDANDO

$$\frac{e^{-x}}{x} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x}$$

$$\frac{e^{-xt}}{x} \sim \frac{1}{x}$$

E QUINDI NON INTEGRABILE $I(t)$ IN QUESTO CASO.

MA
$$\frac{e^{-x}-e^{-xt}}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1-x-1+xt+o(x^2)}{x} \sim t-1+o(x)$$

CHE È REGOLARE E INTEGRABILE.

QUINDI HO TROVATO LA RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DEL $\log$ CHE POSSO METTERE IN $\Gamma'(z)$

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_0^\infty dt\, e^{-t}t^{z-1}(e^{-x}-e^{-xt})$$

INTEGRALI UNIFORMEMENTE CONVERGENTI E LI POSSO SCAMBIARE

POSSO ANALIZZARE I DUE TERMINI

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[e^{-x}\Gamma(z) - \underbrace{\int_0^\infty dt\, e^{-t(x+1)}t^{z-1}}_{A}\right]$$

MI SERVE CALCOLARE L'INTEGRALE SU t (A)
E MI SAREBBE COMODO SE FACESSI USCIRE UNA Γ

FACCIO IL CAMBIO DI VARIABILE $w = t(x+1)$ $dw = (x+1)dt$

$$A = \int_0^\infty \frac{dw}{x+1} e^{-w} \left(\frac{w}{x+1}\right)^{z-1} = \frac{1}{(x+1)^z} \int_0^\infty e^{-w} w^{z-1} dw = \frac{\Gamma(z)}{(x+1)^z}$$

QUINDI

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z) \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left[e^{-x} - \frac{1}{(x+1)^z} \right]$$

QUINDI ORA RIESCO A DARE UNA RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI $\psi(z)$

$$\psi(z) = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left[e^{-x} - \frac{1}{(x+1)^z} \right]$$

MA NON POSSO SEPARARE ANCORA I DUE PEZZI PERCHÈ OTTERREI UN INTEGRALE CHE NON ESISTE

PERÒ VORREI SEPARARE I DUE TERMINI (MA SONO VINCOLATO A TENERLI INSIEME SOLO PERCHÈ SE NO $\nexists$ L'INTEGRALE) IL TRUCCO È DI MODIFICARE IL CAMMINO DI INTEGRAZIONE IN MODO DA EVITARE LE DIVERGENZE NELL'INTEGRALE IN CUI SONO UNITI E A QUEL PUNTO LI SEPARO.

$$\Psi(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dx}{x} e^{-x} - \underbrace{\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{1}{(x+1)^z}}_{B} \right]$$

GUARDO PRIMA B DA SOLO, CHIAMANDO $x = y$

$$B = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dy}{y} \frac{1}{(y+1)^z}$$

CAMBIO VARIABILE $y+1 = e^x$

$dy = e^x dx$

$$= \int_{\log(\varepsilon+1)}^{\infty} \frac{e^x dx}{e^x - 1} e^{-zx} = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \cdot \ldots = \int_{\varepsilon}^{\infty} dx \frac{e^{-zx}}{1-e^{-x}}$$

$\log(1+\varepsilon) \sim \varepsilon$

E QUINDI

$$\Psi(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} dx \left[\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-zx}}{1-e^{-x}} \right]$$

POSSO FARE IL LIMITE

$$\Longrightarrow \boxed{\Psi(z) = \int_{0}^{\infty} dx \left[\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-zx}}{1-e^{-x}} \right]}$$

CHE È UNA BUONA PRIMA RAPPRESENTAZIONE

E POSSO CALCOLARE MEGLIO LA γ

VARRÀ $\quad \psi(1) = -\gamma = \int_0^\infty dx \left[\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \right]$

SOMMO E SOTTRAGGO $\psi(1)$ A $\psi(z)$

$$\psi(z) = \underbrace{-\gamma - \int_0^\infty dx \left[\cancel{\frac{e^{-x}}{x}} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \right]}_{+\psi(1)} + \int_0^\infty dx \left[\cancel{\frac{e^{-x}}{x}} - \frac{e^{-zx}}{1-e^{-x}} \right]$$

QUESTO TERMINE CHE NON DIPENDE DA Z SARÀ UN TERMINE COSTANTE CHE RIESCO A SEMPLIFICARE

$$\Rightarrow \boxed{\psi(z) = -\gamma + \int_0^\infty dx \, \frac{e^{-x} - e^{-zx}}{1-e^{-x}}}$$

CAMBIO VARIABILE $\quad e^{-x} = y \rightsquigarrow -x = \log y \, , \; -dx = \frac{dy}{y}$

$$\Rightarrow \psi(z) = -\gamma + \int_1^0 \frac{dy}{y} (-1) \frac{y - y^z}{1-y}$$

DIVIDO SOPRA E SOTTO PER y

$$\boxed{\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 dy \, \frac{1-y^{z-1}}{1-y}} \quad (1)$$

CHE ESISTE SE $\mathrm{Re}\, z > 0$ PERCHÈ OTTENUTA DALLA RAPPRESENTAZIONE DI Γ

POSSIAMO ANCHE ARRIVARE AD UNA RAPPRESENTAZIONE PER SERIE

OSS SI PUÒ NOTARE CHE y, NELLA FUNZIONE INTEGRANDA DELLA RAPPRESENTAZIONE (1) NELL'INTERVALLO $[0,1]$ PUÒ ESSERE SVILUPPATA IN SERIE

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$$

UNIFORMEMENTE CONVERGENTE

QUINDI POSSO FARE L'INTEGRALE TERMINE A TERMINE

SCRIVO

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 dy \, (y^n - y^{n+z-1})$$

$$= -\gamma + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{y^{m+1}}{m+1} - \frac{y^{m+z}}{m+z} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= -\gamma + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+z} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(z) = -\gamma + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+z} \right)} \qquad (2)$$

MA POSSO ANCHE OSSERVARE CHE POSSO SCRIVERE LE SERIE PARTENDO DA $m = 1$

$$\boxed{\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z}{m(m+z)}} \qquad (3)$$

QUESTE RAPPRESENTAZIONI VALGONO SE $\mathrm{Re}\, z > 0$, MA POSSO NOTARE CHE

$\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z}{m(m+z)}$ È UNIFORMEMENTE CONV. $\forall z \;/\; |z| < \Omega < +\infty$

$|z+m| \geq \delta > 0$

INFATTI SI VEDE LA MAGGIORAZIONE

$$\left| \frac{z}{n(n+z)} \right| \leq \frac{M}{n\delta}$$

SE LA SERIE È UNIFORMEMENTE CONVERGENTE POSSIAMO DIRE CHE DEFINISCE UNA FUNZIONE ANALITICA

$\Rightarrow$ IL SECONDO TERMINE DI (3) LO POSSO VEDERE COME CONTINUAZIONE ANALITICA DI $\psi(z)$ IN $\mathbb{C} - \{z \mid z = -n\}$

E QUESA CONTINUAZIONE PERMETTE DI CALCOLARE LA SOMMA DI DIVERSE SERIE.

LA RAPPRESENTAZIONE DELLA ψ RISULTA UTILE ANCHE PER UNA RAPPRESENTAZIONE DI $\Gamma(z)$ COME PRODOTTO ∞

VOGLIO CALCOLARE

$$\int_0^z dw\, \psi(w+1) = \int_0^z dw\, \frac{d}{dw} \log \Gamma(w+1) = \log \Gamma(w+1) \Big|_0^z$$

$$= \log \Gamma(z+1) - \underbrace{\log \Gamma(1)}_{\log 1 = 0} = \log \Gamma(z+1)$$

MA POSSO ANCHE VEDERLO COME (USO (2))

$$\int_0^z dw\, \psi(w+1) = \int_0^z dw \left[-\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+w+1} \right) \right]$$

LA SERIE CHE COMPARE HO VISTO ESSERE UNIFORMEMENTE CONVERGENTE E POSSO INTEGRARE TERMINE A TERMINE

$$= -\gamma w \Big|_0^z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w}{n+1} \Big|_0^z - \sum_{n=0}^{\infty} \log(n+w+1) \Big|_0^z$$

$$= -\gamma z + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z}{n+1} - \log\left(\frac{n+z+1}{n+1} \right) \right]$$

E ORA PARAGONO I DUE RISULTATI OTTENUTI (CAMBIANDO INDICE $n \to n-1$ E LA SERIE PARTE DA 1)

$$\log \Gamma(z+1) = -\gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n} - \log\left(1 + \frac{z}{n}\right) \right)$$

$$\frac{n+z}{n} = 1 + \frac{z}{n}$$

$$\boxed{\Gamma(z+1) = e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{z}{n}} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1}} \qquad (4)$$

SE FACCIO L'EXP DI UNA SOMMA HO UN PRODOTTO

E QUINDI HO TROVATO UNA RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI $\Gamma(z+1)$.

OSSERVAZIONI

- TUTTE LE RAPPRESENTAZIONI INTEGRALI DI $\psi(z)$ CI PERMETTONO DI CALCOLARE LA γ:

$$\psi(z) \longrightarrow \gamma = -\psi(1) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx$$

$$\gamma = -\Gamma'(1) = -\int_0^{\infty} e^{-t} \log t \, dt$$

- ESISTONO ALTRE GENERALIZZAZIONI DELLE DERIVATE DI Γ E QUINDI ψ CHE SI CHIAMANO FUNZIONI POLIGAMMA DEFINITE COME

$$\psi^{(k)} = \frac{d^k}{dz^k} \psi(z)$$

$\rightarrow$ FUNZIONE POLIGAMMA DI ORDINE K

E DALLA SUA DEFINIZIONE ESCONO LE SUE PROPRIETÀ

$\oplus$ USANDO (3) $\longrightarrow$ $\psi^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k+1} k! \dfrac{1}{(n+z)^{k+1}}$

$$\psi(z) = -\gamma + \sum \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right)$$

- USANDO $$\psi(z) = -\gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-zx}}{1 - e^{-x}}$$

$$\rightarrow \psi^{(k)}(z) = \int_0^\infty (-1)^{k+1} \frac{x^k e^{-zx}}{1 - e^{-x}} dx$$

- USANDO $$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 dy \frac{1 - y^{z-1}}{1 - y}$$

$$\rightarrow \psi^{(k)}(z) = \int_0^1 dy \frac{(\log y)^k}{y-1} y^{z-1}$$

SI PUÒ STUDIARE IL COMPORTAMENTO DELLE FUNZIONI SPECIALI ALL'∞, MA SERVE CONOSCERE I METODI ASINTOTICI.

- VEDI "ESERCIZIO 2, 3 FUNZIONE Γ"

ES $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)(k+b)}$$

POSSO PROVARE AD UTILIZZARE LA FUNZIONE $\psi(z)$ CHE SI PUÒ RISCRIVERE COME

$$= \frac{1}{b-a} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b} \right) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1+(a+1)} - \frac{1}{k-1+(b+1)} \right)$$

CAMBIO INDICE $m = k-1$

$$= \frac{1}{b-a} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m+(a+1)} - \frac{1}{m+(b+1)} \right)$$

UTILE PERCHÈ RICORDANDO

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+z} \right)$$

ALLORA POSSO SCRIVERE

NON SEPARANDO LE SERIE POICHÈ SEPARATE DIVERGEREBBERO

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{m+1} + \frac{1}{m+(b+1)} \right) = -\psi(a+1) - \gamma$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+(b+1)}\right)=\psi(b+1)+\gamma$$

E A QUESTO PUNTO POSSO BUTTARLA DENTRO LA SERIE DI PARTENZA (CANCELLANDO TERMINI)

$$\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+(a+1)}-\frac{1}{n+(b+1)}\right)=\frac{1}{b-a}\left(\psi(b+1)-\psi(a+1)\right)$$

FUNZIONE ZETA DI RIEMANN

LA DEFINISCO COME $$\boxed{\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}} \quad (1) \quad , \quad \mathrm{Re}\, s > 1$$

NOTA SE $|s| \leq 1$ VEDO CHE LA SERIE DIVERGE (SERIE ARMONICA)

È IMPORTANTE LA ζ NELLA TEORIA DEI NUMERI SE LA SCRIVIAMO COME

$$\boxed{\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}} \quad (2)$$

PRODOTTO SU ∞ NUMERI PRIMI p

SI PUÒ PROVARE CHE LE DEFINIZIONI SONO EQUIVALENTI:

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{DISP.}}}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

DIFFERENZA $1/n^s$ - RECIPROCI NUMERI PARI

E POSSO VEDERE

$$\zeta(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s}) = \sum_{\substack{m=1 \\ \text{disp}}} \frac{1}{m^s} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(3m)^s} = \sum_{\substack{m \neq 2k \\ m \neq 3k}} \frac{1}{m^s}$$

TOLGO I MULTIPLI DISPARI DI 3

POSSO CONTINUARE

$$\zeta(s) \prod_{i=1}^{N} (1 - p_i^{-s}) = \sum_{m \neq \ell p_i} \frac{1}{m^s} = 1 + p_{N+1}^{-s} + \dots$$

MULTIPLO DI QUALSIASI p_i CHE PRENDO

E PIÙ VADO AVANTI, TROVO

$$\zeta(s) \prod_{p} (1 - p^{-s}) = 1$$

E QUINDI HO TROVATO LA SECONDA FORMULA

E CON QUESTA RAPPRESENTAZIONE SI DIMOSTRA CHE I NUMERI PRIMI SONO INFINITI

SE I NUMERI PRIMI FOSSERO FINITI TROVEREI

$$\zeta(s)\prod_{i=1}^{N}(1-p_i^{-s})=1$$

$$\zeta(s)=\prod_{i=1}^{N}\underbrace{(1-p_i^{-s})^{-1}}_{1-\frac{1}{p_i^s}=\frac{p_i^s-1}{p_i^s}}=\prod_{i=1}^{N}\frac{p_i^s}{p_i^s-1}$$

$$\zeta(1)=\prod_{i=1}^{N}\frac{p_i}{p_i-1}$$ SAREBBE FINITO

CHE PERÒ È UNA CONTRADDIZIONE CON $\zeta(s)$, QUINDI
$N=\infty$

OSS DALLA RAPPRESENTAZIONE (2) VEDO CHE $\zeta(s)$ NON HA MAI ZERI, PROPRIO PERCHÈ PRODOTTO ∞ DI COSE NON NULLE (I NUMERI PRIMI p SONO SEMPRE $\neq 1$)

$\Rightarrow \zeta(s)\neq 0 \quad \forall s \mid \operatorname{Re} s>1$ → OVVERO DOVE HA SENSO LA SCRITTURA $\prod$

E NEL SEMIPIANO $\operatorname{Re} s>0$ $\zeta(s)$ È UNA FUNZIONE INTERA (ANALITICA) → SEMIPIANO DI CONVERGENZA

RAPPRESENTAZIONI INTEGRALI

MI CHIEDO COS'È

$$\frac{\Gamma(s)}{\alpha^s} = \frac{1}{\alpha^s}\int_0^\infty dt\, e^{-t} t^{s-1} = \int_0^\infty \frac{dt}{\alpha} e^{-t}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{s-1} \qquad \frac{t}{\alpha} = x$$

$$= \int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x} x^{s-1}$$

NOTA IL FATTO CHE $\alpha \in \mathbb{C}$ NON MI DA PROBLEMI, QUINDI NON POTREI TRANQUILLAMENTE CAMBIARE VARIABILE SENZA CAMBIARE CAMMINO. È PERCHÈ POTREI SCRIVERE $\alpha = \lambda e^{i\theta}$ E AL POSTO DI ANDARE DA $0, \infty$ SE FACCIO IL CAMBIO CU VADO IN DIREZIONE θ

ORA PROVO A CALCOLARE (SE $\mathrm{Re}\, s > 0$)

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{m^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\infty dx\, e^{-mx} x^{s-1}$$

$$= \int_0^{\infty} dx \; x^{s-1} \sum_{m=1}^{\infty} (e^{-x})^m$$

[NOTA POSSO SCAMBIARE $\sum$ E $\int$ POICHÉ HO CONV. UNIFORME

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \int .. \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dt \; t^{\operatorname{Re}s-1} e^{-mt} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\operatorname{Re}s)}{m^{\operatorname{Re}s}} < \infty \quad \text{SE} \quad \operatorname{Re}s > 1$$

$\int |...|$]

POSSO ARRIVARE AD AVERE LA SERIE GEOMETRICA IN $\int_0^{\infty}$
(TOLGO IL TERMINE $m=0$ E FACCIO PARTIRE $\sum$ DA 0)

$$= \int_0^{\infty} dx \; x^{s-1} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - 1 \right)$$

$$\frac{1-1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dx \, \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}} \qquad (3)$$

CHE VALE SE $\operatorname{Re} s > 1$, POICHÈ

$$\frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^{s-1}}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 - 1} \sim x^{s-2}$$

PERÒ È CARINA (3), MA NON MI FA GUADAGNARE NULLA SULLA CONVERGENZA POICHÈ TANTO VALE SEMPRE PER $\operatorname{Re} s > 1$

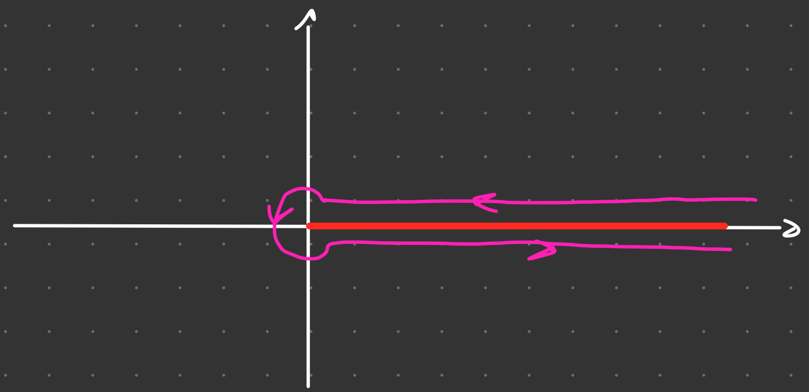
ORA VOGLIAMO TROVARE UNA EFFETTIVA CONTINUAZIONE ANALITICA DI $\zeta(s)$

RAPPRESENTAZIONE CON INTEGRALE DI HENKEL

DEFINISCO
$$I(s) = \int_{C_H} dz \, \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}$$

PERÒ ORA HO COME FUNZIONE INTEGRANDA UNA FUNZIONE POLIDROMA ($z \in \mathbb{C}$ SE $\mathbb{C}$) CHE È UNA ELEVATA A POTENZA z^s.

QUINDI AVRÒ UN TAGLIO



COME CAMMINO DI INTEGRAZIONE SCEGLIAMO QUELLO DI HENKEL

E VEDO CHE $\exists\, I(s)$ $\forall s$ POICHÈ L'INTEGRALE NON PUÒ DIVERGERE IN ZERO POICHÉ LO AGGIRO (SEPPUR DI POCO)

$\Rightarrow I(s)$ È ANALITICA

COME COLLEGO $I(s)$ CON $\zeta(s)$ DEFINITA IN $Re\, s > 1$?

MI METTO IN $\mathrm{Re}\, s > 1$ E LI PARAGONO.

POSSO SCRIVERE

$$I(s) = \int_{\infty}^{\varepsilon} f_+ \, dz + \int_{C_\varepsilon} f \, dz + \int_{\varepsilon}^{\infty} f_- \, dz$$

MA CON $\mathrm{Re}\, s > 1$ SE $z \to 0$ LA f DIVERGE POCO O COMUNQUE IN MODO INTEGRABILE E QUINDI NEL LIMITE $\varepsilon \to 0$ IL 2° INTEGRALE È NULLO.

$$\Rightarrow \quad I(s) = \int_0^{\infty} (f_- - f_+) \, dz$$

DOVE $\quad f_+ = \dfrac{z^{s-1}}{e^z - 1} \qquad z \in \mathbb{R}_+$

$$f_- = e^{i 2\pi s} f_+$$

$$\Rightarrow I(s) = \int_0^\infty dz\, \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \left(e^{i2\pi s} - 1\right)$$

QUEST' INTEGRALE È $\zeta(s)\Gamma(s)$

$$\Rightarrow I(s) = \left(e^{i2\pi s} - 1\right) \Gamma(s)\, \zeta(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\zeta(s) = \frac{I(s)}{\left(e^{i2\pi s} - 1\right)\Gamma(s)} = \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{e^{-i\pi s}}{2i \sin(\pi s)} I(s)}$$

E QUESTA IDENTITÀ VALE NELLA ZONA IN CUI MI SONO MESSO $\mathrm{Re}\, s > 1$, MA QUANDO SONO FUORI DA QUELLA ZONA QUESTA RELAZIONE LA POSSO VEDERE COME UNA POSSIBILE CONTINUAZIONE ANALITICA DI $\zeta(s)$. POSSO SCRIVERLA IN MODO DIVERSO SFRUTTANDO

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s}}{2\pi i} \Gamma(1-s)\, I(s)}$$

NOTA POSSO TROVARE LE SINGOLARITÀ $\zeta(s)$ ANALIZZANDO IL SECONDO MEMBRO (VEDENDO SIA LA Γ, MA ANCHE $I(s)$) (RICORDANDO PERÒ CHE $\zeta(s)$ NON HA SINGOLARITÀ, QUINDI DEVONO BILANCIARSI)

CERCHIAMO DI ANALIZZARE $I(s)$

$$I(m) = \int_{C_H} dz\, z^{m-2} \frac{z}{e^z - 1}, \qquad s = m$$

POICHÉ $\frac{z^{m-1}}{e^z - 1} \underset{z \to 0}{\sim} \frac{z^{m-1}}{z} = z^{m-2}$

QUINDI LA SCRIVO COME IL POLO. UNA FUNZ. REGOLARE INTERO

C'È DA NOTARE CHE SE METTO m INTERO NON HO PIÙ POLIDROMIA E SUI 2 TRATTI DA ε A ∞ LA f ASSUME LO STESSO VALORE

QUINDI $C_H \to C_\varepsilon$

$$I(m) = \oint dz\, z^{m-2} \underbrace{\frac{z}{e^z - 1}}_{\text{NELL'ORIGINE È REGOLARE}} =$$

SARÀ DATO DAI RESIDUI NELL'ORIGINE

EVENTUALI DIVERGENZE O MENO DIPENDONO SOLO DA z^{m-2}

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \underset{z \to 0}{\sim} \frac{z}{z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{4!} z^4 + \dots}$$

$$= \frac{1}{1+\underbrace{\left(\frac{1}{2}z+\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{4!}z^3+\dots\right)}_{\text{RAGIONE SERIE GEOMETRICA}}}$$

VEDO CHE IN $z=0$ È OK

LO SVILUPPO COME FOSSE UNA "SERIE GEOM"

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 \dots$$

$$= 1 - 1\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{4!}z^3 + \dots\right) + 1\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{4!}z^3 + \dots\right)^2 - \left(\frac{1}{2}z + \dots\right)^3$$

$$= 1 - \frac{1}{2}z + z^2\left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{4}\right) + z^3\left(-\frac{1}{4!} + 2\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3!} - \frac{1}{8}\right) + o(z^4) + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2 + 0\cdot z^3 + o(z^4) + \dots$$

$\dfrac{z}{e^z - 1}$ PUÒ ESSERE VISTA COME FUNZIONE GENERATRICE DEI NUMERI DI BERNOULLI:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{B_m}{m!} z^m$$

CHE TORNANO UTILI IN TANTI CASI INSIEME A POLINOMI DI BERNOULLI GENERATI DA:

$$\frac{z}{e^z - 1} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{1}{n!} z^n \qquad \Big| \qquad B_n(0) = B_n$$

NOI ABBIAMO VERIFICATO

$$B_0 = 1 \qquad B_1 = -\frac{1}{2} \qquad B_2 = \frac{1}{6} \qquad B_3 = 0$$

E SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $B_{2n+1} = 0 \quad n \neq 0$

PARTENDO DA

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

LAVORO CON LORO

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2}$$

$$= \frac{z}{2}\left(1 + \frac{2}{e^z - 1}\right) = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$$

$$= \frac{z}{2}\,\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} = \frac{z}{2}\,\mathrm{cotanh}\left(\frac{z}{2}\right)$$

FUNZIONE DISPARI

$$\frac{\text{FUNZIONE PARI}}{\text{FUNZIONE DISPARI}} = \text{DISPARI}$$

FUNZIONE PARI

QUINDI ANCHE IL 1° MEMBRO È PARI

$$\Rightarrow \quad B_{2n+1} = 0$$

ORA SIAMO IN GRADO DI CALCOLARE $I(n)$

$$I(n) = \oint dz\, z^{n-2} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{1}{k!} \oint_0 dz\, z^{m+k-2}$$ SEMPRE $=0$ TRANNE SE $m+k-2=-1$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{1}{k!} \delta_{k,1-m} \cdot 2\pi i$$

VEDIAMO DIVERSI CASI

LO VEDEVI GIÀ 4 PAG. FA NELLA SCRITTURA DI $I(m)$ POICHÈ SE $m \geq 2$ SI TOGLIE IL POLO

1) $m \geq 2$ $\quad I(m) = 0$ $\quad$ POICHÈ $1-m<0$ MA $k \geq 0$ $\Rightarrow \delta = 0$

2) $m = 1$, $\quad I(1) = 2\pi i B_0 = 2\pi i$ $\quad \delta_{k,1-m} \Rightarrow k=0$

3) $m = 0$, $\quad I(0) = 2\pi i B_1 = -\frac{1}{2} 2\pi i$

4) $m = -2\ell$, $\quad I(-2\ell) = 2\pi i \frac{1}{(2\ell+1)!} \underbrace{B_{2\ell+1}}_{=0} = 0$

5) $m = -2\ell+1$, $\quad I(-2\ell+1) = 2\pi i \frac{1}{(2\ell)!} B_{2\ell}$

RIPRENDIAMO $\zeta(s) = \frac{1}{2\pi i} e^{-i\pi s} \Gamma(1-s) I(s)$ E CERCHIAMO DI USARE QUELLO TROVATO SOPRA:

⊕ DA 1) $I(m) = 0$ $m \geq 2$ ALLORA NONOSTANTE $\Gamma(1-s)$ ABBIA DEI POLI PER $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ TROVO CHE $\zeta(m)$ È REGOLARE (COME AVEVO TROVATO NELLA RAPPR. IN SERIE)

⊕ DA 2) $I(1) = 2\pi i$ MI DICE CHE HO UN POLO DI ζ IN 1

$$\zeta(s) \underset{s\to 1}{\sim} \frac{1}{2\pi i}(-1)\, 2\pi i \underbrace{\frac{-1}{s-1}}_{} \sim \frac{1}{s-1}$$

$$\Gamma(1-s) = \frac{\Gamma(2-s)}{1-s} \underset{s\to 1}{\sim} -\frac{1}{s-1}$$

QUINDI $s = 1$ POLO SEMPLICE CON RESIDUO $= 1$

⊕ LA 3) CI DICE $I(0) = -\frac{1}{2} 2\pi i$ E VERO

$$\zeta(0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 1 \cdot \underbrace{\Gamma(1)}_{1} \left(-\frac{1}{2} 2\pi i \right) = -\frac{1}{2}$$

MA POSSO RICORDARE $\zeta(0) = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ (DIVERGE, MA VEDILA UN PO' COSÌ) E IN UN CERTO SENSO DIAMO UN SENSO DELLA SOMMA ∞ DELL'UNITÀ

⊕ LA 4) DICE $\underset{\ell=1}{I(-1)} = \frac{1}{2} B_2 2\pi i = 2\pi i \frac{1}{12}$

QUINDI $$\zeta(-1) = \frac{1}{2\pi i}(-1)\cdot \underset{\Gamma(2)}{1} \cdot 2\pi i \frac{1}{12} = -1/12$$

MA POSSO RICORDARE $\zeta(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} n$ (SOMMA NUMERI NATURALI)

E IN GENERALE TROVO

$\zeta(-2\ell) = 0 \longrightarrow$ ZERI BANALI DI $\zeta(s)$

$$\zeta(-2\ell+1) = -\frac{B_{2\ell}}{2\ell}$$

EQUAZIONE FUNZIONALE

CONNETTE I VALORI DI ζ IN $\mathrm{Re}\, s > 1$ CON QUELLI CHE ASSUME IN $\mathrm{Re}\, s < 0$

DOVE CONOSCO LA SERIE

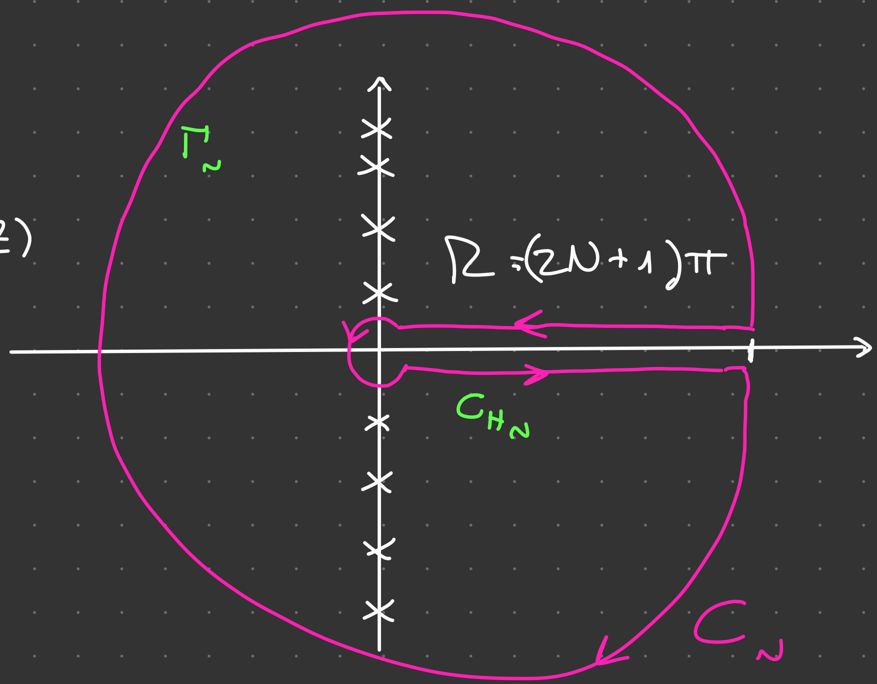
DOVE SO LO SVILUPPO IN SERIE DI $\zeta(1-s)$

$$\zeta(s) \longleftrightarrow \zeta(1-s)$$

$$\mathrm{Re}\, s > 1 \qquad \mathrm{Re}\, s < 0$$

COMINCIO A CALCOLARE

$$I_N = \oint_{C_N} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}\, dz = -2\pi i \sum \mathrm{Res}\, f(z)$$



COME IL CAMMINO DI HENKEL MA MI FERMO AD UN CERTO PUNTO E PERCORRO UNA CIRCONFERENZA PER CHIUDERE

MI FERMO A $R = (2N+1)\pi$

E SE LA CHIUDO COSÌ C_N NON PASSA SUI POLI DELLA FUNZIONE INTEGRANDA CHE SONO DOVE

$$e^{z} = 1 \Rightarrow \begin{cases} z_{+m} = i 2\pi m \\ z_{-m} = -i 2\pi m \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z}$$

OVVERO HO SINGOLARITÀ NEI MULTIPLI PARI DI $i\pi$, MA IL RAGGIO L'HO PRESO COME MULTIPLO DISPARI.

$\Downarrow$

LA CIRCONFERENZA NON PASSA MAI SUI POLI CHE SONO SULL'ASSE IMMAGINARIO E DENTRO LA CURVA TROVO SEMPRE 2N POLI (N SOPRA ED N SOTTO)

NOTA CHE FACENDO QUESTE SCELTE ESPLICITANDO i TROVI (POICHÈ FUNZIONE POLIDROMA)

$$z_{+m} = 2\pi m i = 2\pi m e^{i\pi/2}$$

$$z_{-m} = 2\pi m i = 2\pi m e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

POSSO CALCOLARE I_N USANDO I RESIDUI

$$I_N = \underbrace{-}_{\text{SENSO ORARIO}} 2\pi i \sum_{m=1}^{N} \left(\operatorname{Res} f \Big|_{z_{+m}} + \operatorname{Res} f \Big|_{z_{-m}} \right)$$

DEVO CAPIRE PERÒ CHE TIPO DI SINGOLARITÀ HO

$$g(z) = e^z - 1 \qquad \text{(IL DENOMINATORE)}$$

$$g(z) \underset{z_m^+}{\simeq} g(z_m^+) + \left.\frac{dg}{dz}\right|_{z_m^+} (z - z_m^+) + \dots$$

$$= 0 + \underbrace{1}_{\left. e^z \right|_{z_m^+} = 1} (z - z_m^+) + \dots$$

QUINDI $g(z)$ HA UNO ZERO SEMPLICE

$\Rightarrow$ LA FUNZIONE HA UN POLO SEMPLICE

CALCOLO I RESIDUI (HO POLI SEMPLICI)

$$\mathrm{Res}\, f\Big|_{z_{+m}} = \lim_{z \to z_{+m}} (z - z_{+m}) \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}$$

USANDO DE L'HOPITAL SUL PEZZO INDETERMINATO

$$= (2\pi m)^{s-1} e^{i\frac{\pi}{2}(s-1)} \lim_{z \to z_{+m}} \frac{1}{e^z}$$

$$= (2\pi m)^{s-1} e^{i\frac{\pi}{2}s} (-i)$$

OPPURE USO LO SVILUPPO FATTO SOPRA

$$\lim (z - z_m^+) \frac{z^{s-1}}{1 \cdot (z - z_m^+)}$$

$$= (z_m^+)^{s-1}$$

$$= (2\pi m)^{s-1} e^{i\frac{\pi}{2}(s-1)}$$

$$\mathrm{Res}\, f\Big|_{z_{-m}} = \lim_{z \to z_{-m}} (z - z_{-m}) \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}$$

$$= (2\pi m)^{s-1} e^{i\frac{3\pi}{2}s}\, i$$

COSI (SOSTITUISCO TUTTO IN I_N, TOGLI LE PARENTESI DELL'EXP DI $(s-1)$ E VIENE)

$$\boxed{I_N} = -2\pi i \sum_{m=1}^{N} (2\pi m)^{s-1} \frac{1}{-i} \left[e^{i\frac{3\pi}{2}s} - e^{i\frac{\pi}{2}s} \right] \Big)$$

MOLTIPLICO SOPRA E SOTTO PER 2 E TOLGO DALLA PARENTESI $e^{i\pi s}$

$$= -2\pi i \sum_{m=1}^{N} (2\pi m)^{s-1} (-2) \frac{1}{2i} e^{i\pi s} \left[e^{i\frac{\pi}{2}s} - e^{-i\frac{\pi}{2}s} \right]$$

$$= -2\pi i \sum_{m=1}^{N} (2\pi m)^{s-1} (-2)\, e^{i\pi s} \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)$$

$$\boxed{= 4\pi i\, (2\pi)^{s-1} e^{i\pi s} \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \sum_{m=1}^{N} m^{s-1}} \qquad (1)$$

PERÒ POSSO VEDERE CHE C_N È UNA CIRCONFERENZA Γ_N DI RAGGIO R UNITA AL CAMMINO C_{H_N} DI HENKEL DI RAGGIO R

$$C_N = \Gamma_N \cup C_{H_N}$$

QUINDI POTREI DIRE

$$I_N = \int_{\Gamma_N} f(z)\,dz + \int_{C_{H_N}} f(z)\,dz \qquad (2)$$

POSSO VEDERE COSA DIVENTA I_N CON $N \to +\infty$

(1) : $\lim_{N\to\infty} I_N = 4\pi i (2\pi)^{s-1} e^{i\pi s} \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \sum_{n=0}^{\infty} n^{s-1}$

RIESCO A BUTTARE DENTRO UNA $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$ MA DI $1-s$ SOLO SE MI METTO IN UNA REGIONE IN CUI CONVERGE OVVERO

$$\mathrm{Re}(1-s) > 1 \Rightarrow \boxed{\mathrm{Re}\, s < 0}$$

così

$$\lim_{N\to\infty} I_N = 4\pi i (2\pi)^{s-1} e^{i\pi s} \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \zeta(1-s)$$

(2) : SE $\boxed{\mathrm{Re}\, s < 0}$ SUCCEDE (COME LEMMA DI JORDAN) CHE CONTRIBUTO SU Γ_N È 0 $\int_{\Gamma_N} f(z)\,dz \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$
(DIM SU DISP. PASSARINO)

MENTRE L'ALTRO DIVENTA UN INTEGRALE SU UN CAMMINO DI HENKEL

$$\lim_{N\to\infty} I_N = \int_{C_H} dz \, \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} = I(s)$$

DOVE $I(s)$ È QUELLO CHE COMPARE NELLA DEF DELLA CONTINUAZIONE ANALITICA DI ζ, E AVEVAMO VISTO

$$I(s) = 2\pi i\, e^{i\pi s} \frac{1}{\Gamma(1-s)} \zeta(s)$$

QUINDI SE EGUAGLIO I LIMITI TROVO UNA RELAZIONE TRA $\zeta(s)$ E $\zeta(1-s)$

$$\cancel{2\pi i}\, \cancel{e^{i\pi s}} \frac{1}{\Gamma(1-s)} \zeta(s) = \overset{2}{\cancel{4\pi i}}(2\pi)^{s-1} \cancel{e^{i\pi s}} \sin\left(\frac{\pi}{2} s\right) \zeta(1-s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} s\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)}$$

SI POTREBBE TROVARE LA RELAZIONE DI $\zeta(1-s)$ IN FUNZIONE DI $\Gamma(s)$ E $\zeta(s)$

E DA QUESTA RELAZIONE RIVEDIAMO TUTTE LE PROPRIETÀ GIÀ NOTE:

•) $s = 1$: $$\zeta(s) \underset{s\to 1}{\sim} 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \underbrace{\frac{\Gamma(2-s)}{1-s}}_{\substack{\Gamma(1-s) \\ \text{È SINGOLARE}}} \zeta(1-s)$$

$$= -2 \frac{1}{s-1} \zeta(1-s) \quad \Rightarrow \zeta(1) \sim 2 \frac{1}{1-s} \zeta(0)$$

MA SE PER ESEMPIO CONOSCO CHE $\zeta(s)$ IN $s=1$ HA UN POLO SEMPLICE CON $\text{Res}=1$
ALLORA VEDO A DESTRA IL POLO SEMPLICE CON $\text{Res} = -2\zeta(1-s)$ E DI CONSEGUENZA CAPISCO $\zeta(1-s)\Big|_{s=1} = \zeta(0) = -\frac{1}{2}$

OPPURE SE SO $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ LO METTO NEL MEMBRO DI DESTRA E VEDO $\zeta(s)\Big|_{s=1}$ HA UN POLO CON $\text{Res}=1$

QUINDI È EQUIVALENTE DIRE

$$\text{Polo di Res} = 1 \longleftrightarrow \zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

•) $s = 2k$ INTERO POSITIVO

$$\zeta(s) \underset{s\to 2k}{\sim} 2^{2k}\pi^{2k-1} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)}_{\text{HA UNO ZERO}} \underbrace{\Gamma(1-s)}_{\text{POLO}} \zeta(1-2k)$$

GUARDO SOLO

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)\Gamma(1-s)$$

RICORDANDO

$$\Gamma(1-s) = \frac{\Gamma(2-s)}{1-s} = \frac{\Gamma(3-s)}{(1-s)(2-s)} = \dots = \frac{\Gamma(n+1-s)}{(1-s)(2-s)\dots(n-1-s)(n-s)}$$

$$\Gamma(1-s) \underset{s\to 2k}{\sim} \frac{\overbrace{\Gamma(2k+1-s)\Big|_{2k}}^{\Gamma(1)}(-1)^{2k}}{(2k-1)(2k-2)\dots(2k+1-2k)(s-2k)} = \frac{1}{(2k-1)!\,(s-2k)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \underset{s\to 2k}{\sim} 0 + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)\Bigg|_{2k}(s-2k) + \dots$$

$$= \frac{\pi}{2}(-1)^{k}(s-2k)$$

QUINDI MOLTIPLICANDOLI VEDO CHE ESCE QUALCOSA DI REGOLARE.

ME LO POTEVO ASPETTARE PERCHÈ SO CHE SE $2k>0$ LA $\zeta(2k)$ DEVE ESISTERE E NON HO UNA SINGOLARITÀ E QUINDI DOVEVO PER FORZA TROVARE UNA COMPENSAZIONE TRA LO ZERO DEL $\sin$ E IL POLO DI Γ

QUINDI

$$\zeta(s) \sim 2^{2k} \pi^{2k-1} \frac{\pi}{2} (-1)^k \frac{1}{(2k-1)!} \zeta(1-2k)$$

$$\sim 2^{2k-1} \pi^{2k} (-1)^k \frac{1}{(2k-1)!} \zeta(1-2k)$$

QUINDI ORA SE SO CHE $\zeta(s)$ NEGLI INTERI POSITIVI NON SI ANNULLA MAI E NON HA SINGOLARITÀ ALLORA ANCHE $\zeta(1-s)\big|_{2k}$ DEV'ESSERE UN NUMERO FINITO. OPPURE IL CONTRARIO:

SE SO $\zeta(1-2k) = -\dfrac{B_{2k}}{2k}$

$$\zeta(2k) = \frac{(2\pi)^{2k}}{2} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k!} B_{2k}$$

PARLIAMO DEGLI ZERI DI $\zeta(s)$

SO CHE SE $\operatorname{Re} s > 1$ $\zeta(s)$ NON HA ZERI
MA SE GUARDO $\zeta(1-s)$ LE. NON HA ZERI QUANDO
$\operatorname{Re}(1-s) > 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(s) < 0$

4 PAG. FA

QUINDI VISTO CHE POSSO USARE LA RELAZIONE TRA $\zeta(s)$ E $\zeta(1-s)$ PER CALCOLARE $\zeta(s)$ QUANDO $\operatorname{Re}(s) < 0$ USANDO LA CONOSCENZA DI $\zeta(1-s)$ ALLORA VEDENDO CHE $\zeta(1-s)$ NON HA ZERI E CHE PURE $\Gamma(1-s)$ NON HA ZERI SE $\operatorname{Re}(s) < 0$ VEDO SUBITO CHE $\zeta(s)$ NON AVRÀ ZERI DOVUTI A $\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$, MA CI SONO SOLO QUELLI BANALI DOVUTI AGLI ZERI DEL $\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)$ (QUINDI QUELLI $s = -2k$)

LA COSA CHE NON SI VEDE ANALITICAMENTE È COSA C'È NELLA STRISCIA CRITICA.

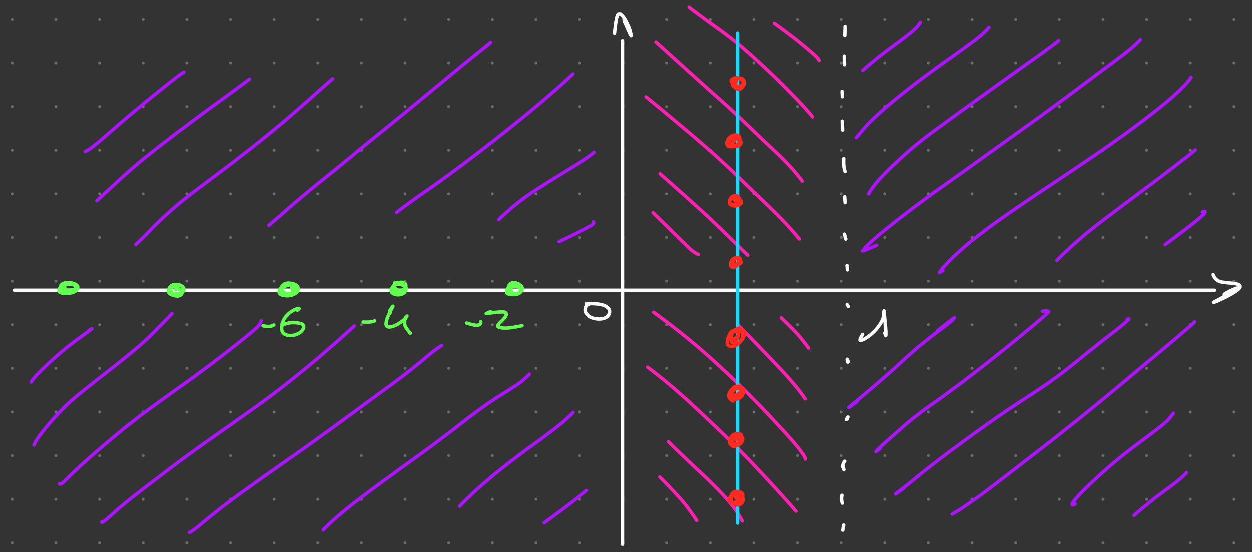
CONGETTURA DI RIEMANN: LA $\zeta(s)$ HA ∞ ZERI NON BANALI SULLA RETTA $\operatorname{Re}(s) = 1/2$

NO ZERI

ZERI BANALI

STRISCIA CRITICA

CONGETTURA DI RIEMANN ZERI



NOTA LA CONGETTURA NON È STATA PROVATA, MA È DIMOSTRATO CHE GLI ZERI SU $Re(s) = 1/2$ SONO ∞, MA NON CHE SIANO TUTTI QUELLI DI $\zeta(s)$

QUELLO CHE POSSIAMO ANCORA FARE È DI GENERALIZZARE LA $\zeta(s)$

$\zeta(s)$ GENERALIZZATA (DI HURWITZ)

$$\zeta(a,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s}$$

$s+1$?

NOTANDO CHE $\zeta(0,s) = \zeta(s)$ SI POSSONO DIMOSTRARE TUTTE LE COSE CHE ABBIAMO VISTO ANCHE PER QUELLA GENERALIZZATA.

IN PARTICOLARE

$$\zeta(a,s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt \, \frac{t^{s-1}}{1-e^{-t}} e^{-at}$$

$$\zeta(a,s) = \frac{e^{-i\pi s}}{2\pi i} \Gamma(1-s) \int_{C_H} dz \, \frac{z^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}}$$