Metodi 2 - Appunti teoria

TEOREMI

NOTE / OSS

SOTTOLINEATURE - TITOLI

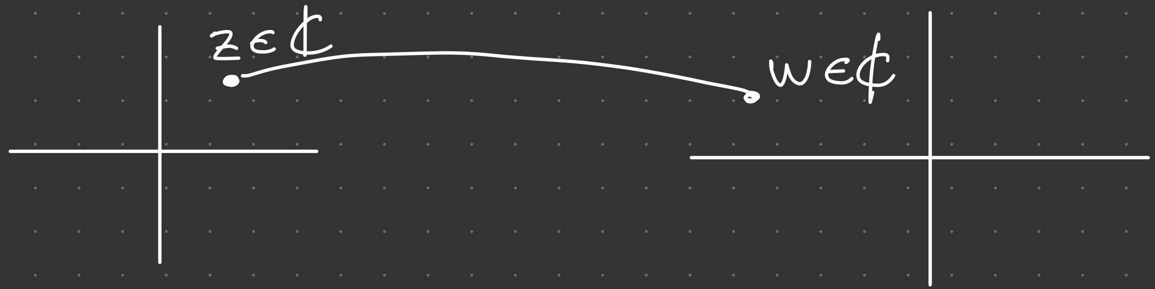
COMMENTI

ESEMPI

TRASFORMAZIONI CONFORMI

$f(z)$ ANALITICA IN $D \subset \mathbb{C}$ È UNA MAPPA $D \subset \mathbb{C} \to E \subset \mathbb{C}$

CONTINUA E DERIVABILE



ESSENDO ANALITICA (OVVERO CONTINUA E DERIVABILE) ALLORA MANDA UNA CURVA IN UNA CURVA $f : \gamma(z) \to \tilde{\gamma}(w)$

(PIÙ IN GENERALE MANDA APERTI IN APERTI, L'INTERNO VIENE MANDATO NELL'INTERNO E L'ESTERNO NELL'ESTERNO)

MI METTO IN z_0 t.c. $f'(z_0) \neq 0$

(PER LE FUNZIONI ANALITICHE LA DERIVATA È DEFINITA)

$$\exists \quad f'(z_0) = \frac{df}{dz} = \lambda(z_0)$$

(INDIPENDENTE DA $\arg dz$)

CON $f(z_0) = w_0$

PER CONTINUITÀ SE CALCOLO

$$f(z_0 + dz) = w_0 + dw$$

VOGLIO dw $\rightsquigarrow$ BASTA FARE SVILUPPO DI TAYLOR

$$f(z_0) + f'(z_0)dz = w_0 + dw$$

$$\Rightarrow dw = \lambda(z_0)dz$$

QUINDI UNA FUNZIONE ANALITICA IN UN z_0 IN CUI $f'(z_0) \neq 0$ GENERA UNA ROTODILATAZIONE (dz VIENE DILATATO DEL MODULO DELLA DERIVATA $|\lambda|$ E RUOTATO DI UN ANGOLO CHE È LA FASE DI $\lambda(z_0)$

RICORDA $\lambda(z_0)$ NUMERO IN $\mathbb{C}$ IN GENERE)

SE SCRIVO $f'(z_0) = \lambda(z_0) = \rho(z_0)e^{i\theta_0}$

$$\Rightarrow |dw| = \rho(z_0)|dz|$$

$$\arg dw = \arg \lambda + \theta_0$$

NOTA $\lambda(z_0)$ NON È COSTANTE MA È UNA ROTODILATAZIONE CHE DIPENDE DAL PUNTO.

[FATTO ANCHE

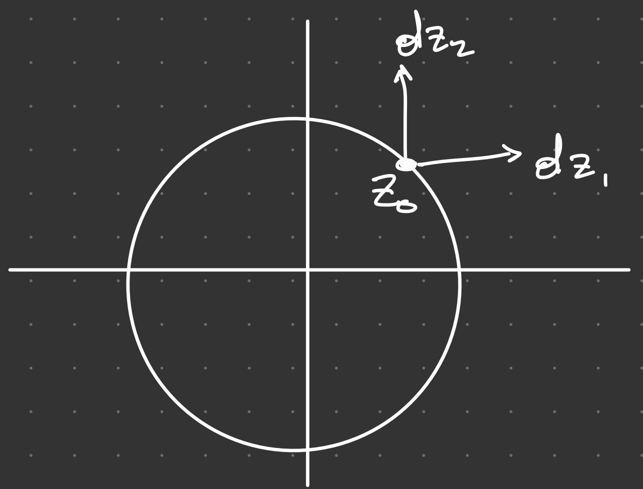
$$w = f(z) \longrightarrow dw = \frac{df}{dz}\Big|_z dz = \lambda(z)\, dz$$

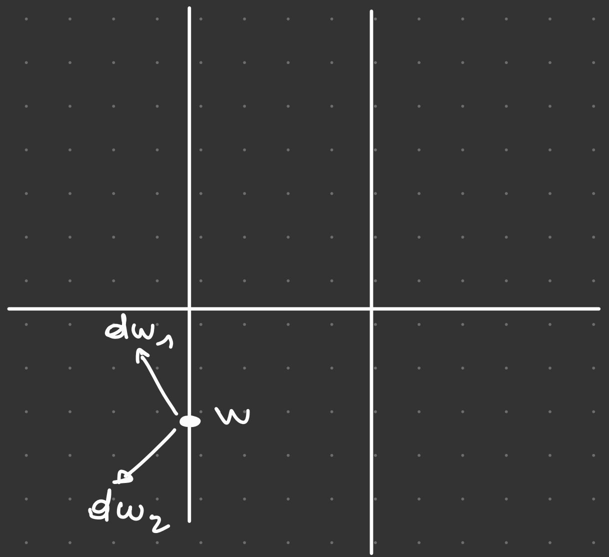
$$\Rightarrow |dw| = |\lambda(z)|\,|dz|$$

]

ORA SUPPONGO DI PRENDERE dz_1 E dz_2 CON

$$\arg(dz_2) - \arg(dz_1) = \varphi$$





HO VISTO CHE

$$dw_1 = f'(z_0)\,dz_1$$
$$dw_2 = f'(z_0)\,dz_2$$

E

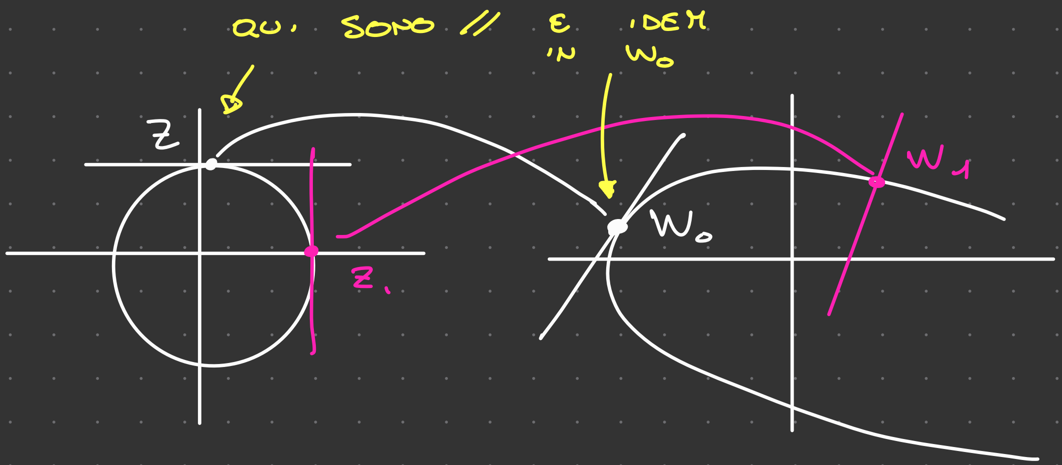
$$\arg dw_1 = \arg(dz_1) + \theta_0$$
$$\arg dw_2 = \arg(dz_2) + \theta_0$$

$$\Rightarrow \arg dW_2 - \arg dW_1 = \varphi$$

dw_i NON STESSE DIREZIONI DI dz_i MA LA DIFF. DEGLI arg È LA STESSA

QUESTO IMPLICA CHE GLI ANGOLI TRA LE CURVE VENGONO PRESERVATI

ESEMPIO



MA SE MI METTESSI IN UN PUNTO IN CUI $f'(z_0) = 0$ MI SALTA QUELLO CHE HO FATTO SVILUPPANDO TAYLOR (DEVO ANDARE AD UN ORDINE SUCCESSIVO)

$$f(z_0 + dz) = w_0 + dw$$

$$f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(dz)^2 = w_0 + dw$$

$$\Rightarrow dw = \frac{1}{2} f''(z_0)(dz)^2$$

E SE GUARDO $\arg dw = \arg f''(z_0) + 2\theta_0$

$\Rightarrow$ QUINDI SE PARTO CON 2 z_i CHE HANNO UN ANGOLO φ DI DIFFERENZA, TROVO CHE I w_i HANNO 2φ

E IN GENERALE SE MI METTO IN z_0 IN CUI $f(z)$ HA UNO ZERO DI ORDINE m AVRÒ

$$f(z_0 + dz) = f(z_0) + \frac{1}{m!}\left(\frac{d^m}{dz^m} f\right)_{z_0} (dz)^m$$

QUINDI $\arg dw = \arg f^{(m)}(z_0) + m \arg dz$

QUINDI $\Delta \arg dz = \varphi \Rightarrow \Delta \arg dw = m\varphi$

E QUI LA $f(z)$ NON È CONFORME, OVVERO, NON PRESERVA ANGOLI.

ESEMPIO $f(z) = w = z^2$

$f'(z) = 2z \neq 0 \quad \forall z \neq 0$ (QUINDI QUELLO DETTO SOPRA VALE OVUNQUE TRANNE NELL'ORIGINE)

$dw = 2z_0\, dz \qquad |dw| = 2|z_0|\, dz$

SE SUPPONGO $dz_1 = \underset{\in \mathbb{R}}{\varepsilon}$, $dz_2 = i\varepsilon$ ($= \varepsilon e^{i\pi/2}$) $\Rightarrow dw_1 = 2z_0\varepsilon$, $dw_2 = 2iz_0\varepsilon$

$\Rightarrow \arg dz_2 - \arg dz_1 = \pi/2$

E SI VEDE CHE $\arg dw_2 - \arg dw_1 = \pi/2$

GUARDO IL 2° ORDINE

$f''(z) = 2$

$\arg dw = 2 \arg dz$

$\arg dw_1 = 0 \qquad \arg dw_2 = \pi$

ORA, VOGLIO STUDIARE COME SI TRASFORMANO APERTI

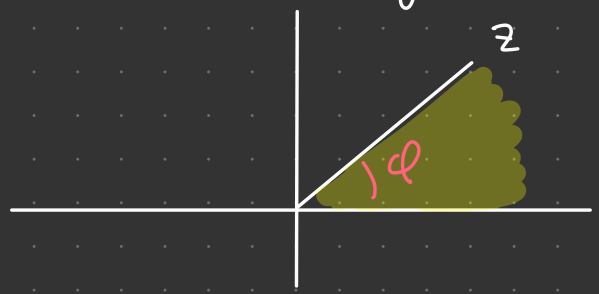
HO SEMPRE $f : D \subset \mathbb{C} \to E \subset \mathbb{C}$, f ANALITICA IN D

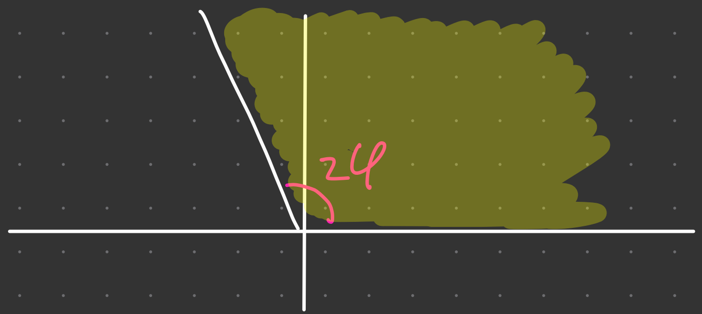
PER ESEMPIO

- $f(z) = w = z$, MAPPA $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$
- ROTAZIONE GENERALE (ROTODILATAZIONE) $f(z) = a z$
- TRASLAZIONE $f(z) = z + b$

LE UNICHE f ANALITICHE $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ SONO LE LINEARI IN z (LE 3 SOPRA)

SE PRENDESSI $f(z) = z^2$ → NON È INVERTIBILE PERCHÈ PER OGNI w HO 2 z POSSIBILI

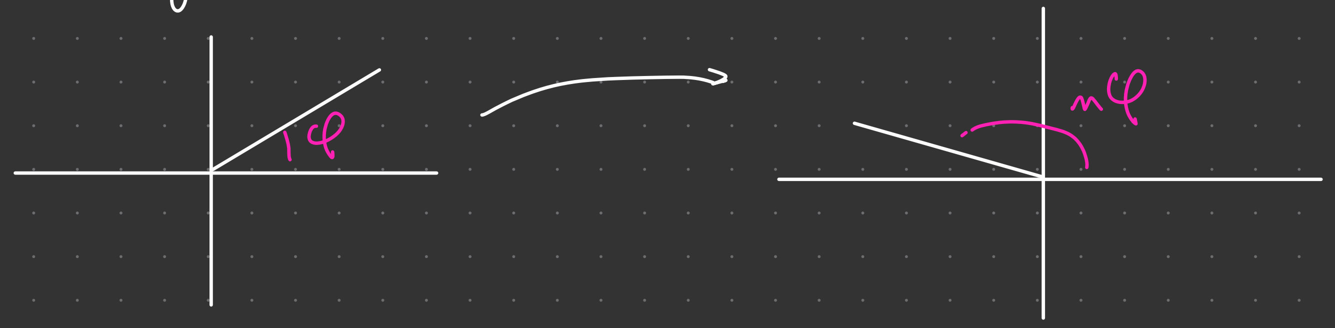




MANDA PUNTI $\arg < \varphi$ IN $\arg < 2\varphi$ (INTERNO IN INTERNO) QUINDI NON POSSO PRENDERE SOLO SEMIPIANO SUP. PER ARRIVARE IN $\mathbb{C}$, MA SE PARTO DA TUTTO $\mathbb{C}$ ARRIVO IN $2\mathbb{C}$.

È UNA FUNZIONE $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

SE USASSI $f(z) = z^m$

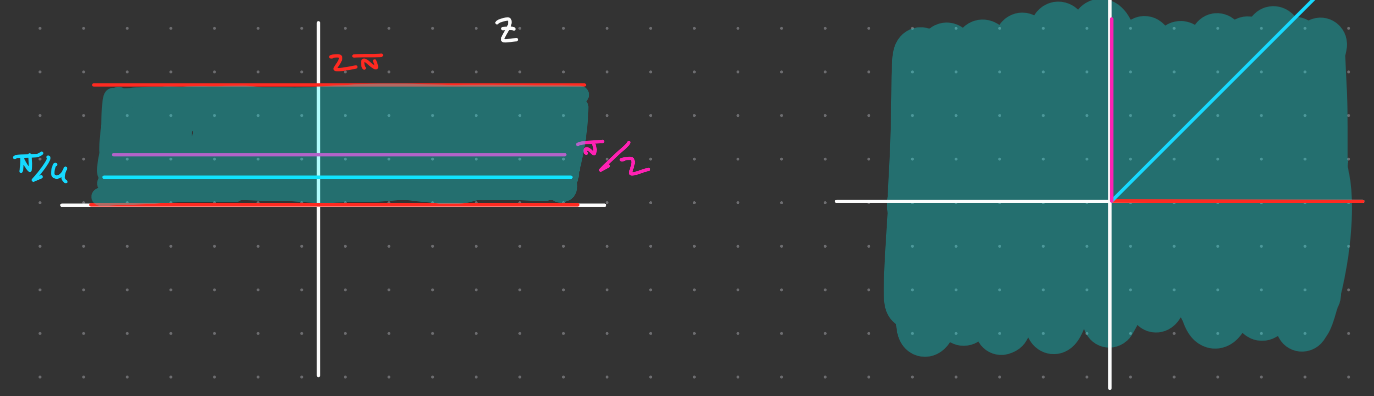


CHE MANDA $\mathbb{C} \to$ "$\mathbb{C}^m$"

UN' ALTRA FUNZIONE PROBLEMATICA È L'ESPONENZIALE

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy}$$

PRENDO L'ASSE REALE IN z



MA ANCHE 2π VIENE MANDATO NEL SEMIASSE POSITIVO IN w

SE PRENDESSI $\pi/4$ AVREI $w = e^x e^{i\pi/4}$

SE PRENDESSI TUTTA LA STRISCIA S OTTENGO $\mathbb{C}$

MA $\mathbb{C} =$ "$\mathbb{C}^\infty$" (ANGOLI $> 2\pi$ SONO UGUALI A QUELLI NELLA STRISCIA)

IL PROBLEMA DELL'INVERTIBILITÀ È LOCALMENTE RISOLVIBILE

ES $f(z) = z^2 = w \qquad z = \sqrt{w}$

SE $w = 4 \rightsquigarrow z = \pm 2$

SCELGO LE RADICI POSITIVE

SE MI METTO IN UN INTORNO CON $w = 4 \rightsquigarrow z = 2$
E RIMANGO IN UN INTORNO

$$w = 4 + \varepsilon \rightsquigarrow z = 2 + \frac{1}{2}\varepsilon$$

ALLORA L'INVERSIONE È BEN DEFINITA

SE VADO SU $\mathbb{C}$ ESTESO ($\overline{\mathbb{C}}$ SFERA) ANCHE f CON UN POLO SEMPLICE NON DANNO PROBLEMI

$$f(z) = w = \frac{1}{z}$$

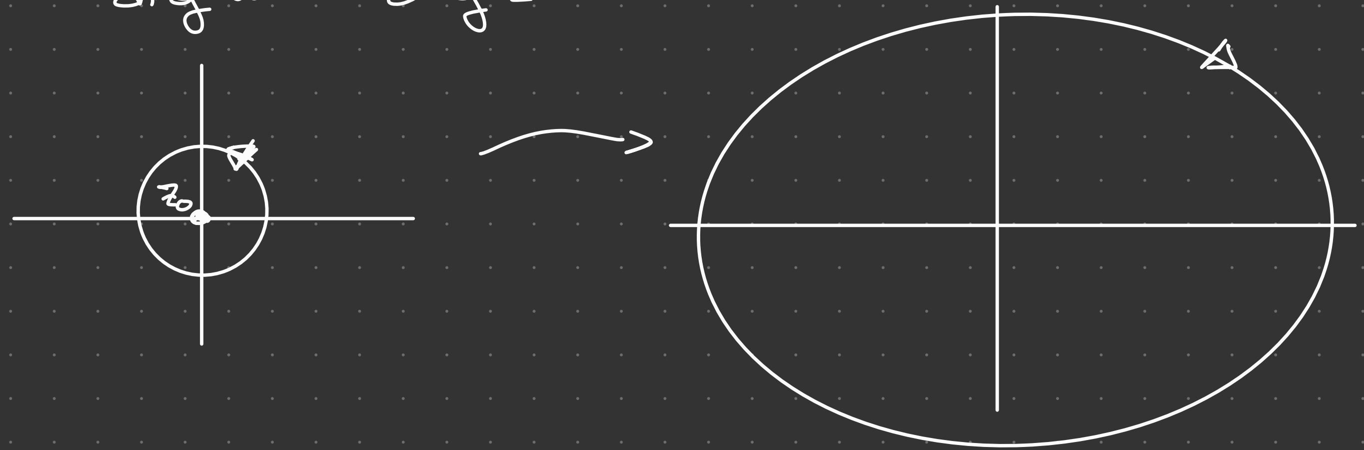
ANALITICA $\forall z \neq 0$ (IN $z=0$ AVREI $w=\infty$)

SE PRENDO $I_\delta(0) = \{ z \mid |z| < \delta \}$ (INTORNO DI ZERO)

$$I_\delta(0) \xrightarrow{f} \left\{ w \mid |w| > \frac{1}{\delta} \right\}$$

(INTORNO DI ∞)
(W È ALL'∞)

$$\arg w = -\arg z$$



MA GLI ANGOLI VENGONO PRESERVATI PERCHÉ z_0 È NELL'INTERNO DELLA CURVA E ANCHE ∞ È INTERNO (INTERNO = REGIONE A SX DELLA CURVA PERCORSA IN SENSO POSITIVO)

DIRE A TUTORAGGIO CHE UNICHE FUNZIONI $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ SONO LE $w = \frac{az+b}{cz+d}$ (RAZIONALI FRATTE)

CONTINUAZIONE ANALITICA

QUELLO CHE SO È CHE SE $f(z)$ È ANALITICA IN $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ PUÒ ESSERE CONTINUATA IN MODO UNIVOCO COME FUNZIONE ANALITICA IN ALTRE ZONE DI $\mathbb{C}$.

QUELLO CHE VOGLIO CAPIRE È: SE HO f DEFINITA SU $I \subset \bar{\mathbb{C}}$ IN QUALI CONDIZIONI PUÒ ESSERE ESTESA COME FUNZIONE ANALITICA SU D, CON $I \subset D$

LEMMA

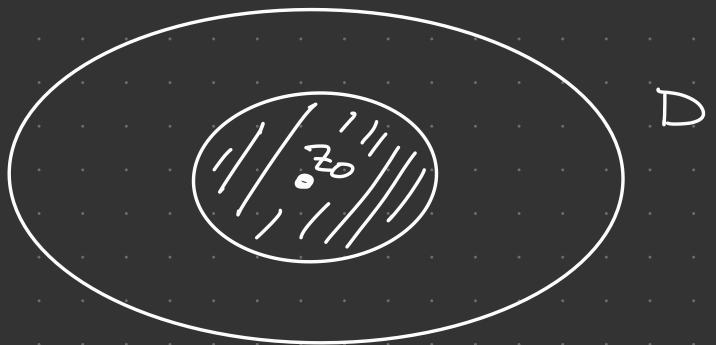
Hp: $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ PUNTO REGOLARE $f(z)$

z_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI ZERI DI $f(z)$

$$\left[S = \{ z \mid f(z) = 0 \} ,\quad z_0 \mid \forall I_\delta(z_0)\ \exists \hat{z} \in S\ (\hat{z} \neq z_0) \mid \hat{z} \in I_\delta(z_0) \} \right]$$

OVVERO IN QUALUNQUE INTORNO C'È ALMENO UNO ZERO

Th: $\exists I(z_0) \mid f(z) = 0 \quad \forall z \in I(z_0)$



DIM (ASSURDO)

SE $f(z)$ REGOLARE IN z_0 $\longrightarrow$ $f(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (z-z_0)^\ell$ PER $z \in I(z_0)$

SE Th VERA $\Rightarrow a_\ell = 0 \quad \forall \ell$

SUPPONIAMO PER ASSURDO $a_\ell = 0 \quad \ell = 0, 1, \dots, m-1 \quad a_m \neq 0$

MA COSÌ z_0 ZERO DI ORDINE m PER $f(z)$

QUINDI $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ CON $g(z)$ ANALITICA E $g(z_0) \neq 0$
E $(z-z_0)^m \neq 0 \quad \forall z \in I(z_0) - \{z_0\}$

MA ALLORA PER CONTINUITÀ DI g $\exists\, I(z_0) \quad g(z) \neq 0 \quad \forall z \in I(z_0)$

QUINDI PER $z \in I(z_0)$ $f(z) \neq 0$

MA QUESTO NON POSSIBILE SE z_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI ZERI.

ANALOGA DIMOSTRAZIONE CON z_0 PUNTO ALL'INFINITO

TEOREMA Hp: $f(z)$ REGOLARE IN $D \subset \mathbb{C}$ D CONNESSO (ANCHE NON SEMPLICEMENTE MA APERTO)

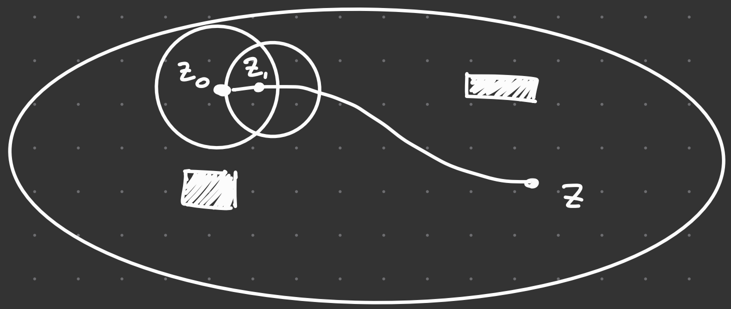
z_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI ZERI DI $f(z)$

Th: $f(z) = 0 \quad \forall z \in D$

DIM SE D CONNESSO È ANCHE CONNESSO PER ARCHI. POSSO RAGGIUNGERE TUTTI I PUNTI DI D CON UN ARCO

DAL LEMMA SO

$$f(z) = 0 \quad \forall z \in I(z_0)$$



SE PRENDO $z_1 \in I(z_0)$ È ANCORA PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI ZERI. POSSO CONTINUARE CON QUESTO RAGIONAMENTO ANDANDO AVANTI NELLA DIREZIONE DI z.

(L'UNICO MODO PER FERMARMI È SE CI SONO ZERI SUL BORDO DI I)

QUESTO MI FA DIRE CHE VALE IN TUTTO D. ∎

OSS SE D NON È CONNESSO NON VALE

$D = D_1 \cup D_2$

NOTA IL LEMMA DI PRIMA È UNA VERSIONE LOCALE DI QUELLO APPENA DIMOSTRATO.

COROLLARIO Hp: $f_1(z)$, $f_2(z)$ REGOLARI IN $D \in \mathbb{C}$ CONNESSO

$I = \{ z \mid f_1(z) = f_2(z) \}$ HA UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE IN D

Th: $f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in D$

(DIM SI APPLICA IL TEOREMA ALLA DIFFERENZA)

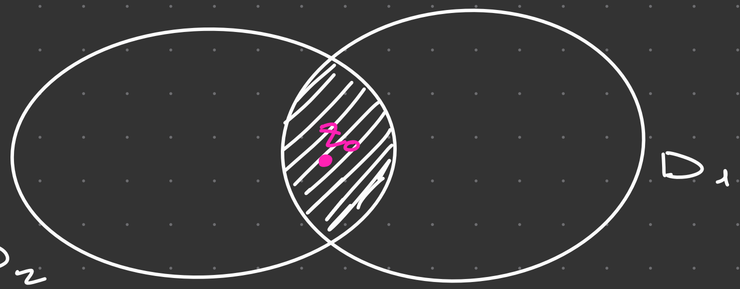
OSS PER ESSERE UGUALI OVUNQUE DEVONO ESSERLO IN UN INTORNO DI UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE

($\sin x$ E $\sin 2x$ NON SONO UGUALI OVUNQUE, MA LO SONO IN ∞ PUNTI, DOVE SI ANNULLANO, MA SONO CONCETTI DIVERSI).

COROLLARIO BIS

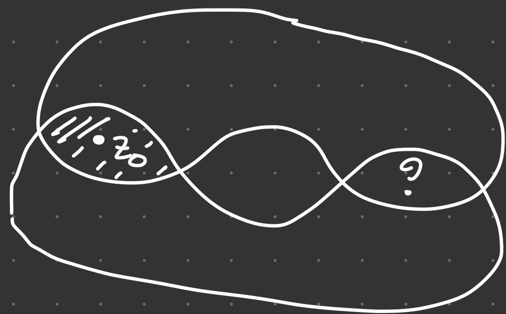
Hp: $f_1(z)$ ANALITICA IN D_1
$f_2(z)$ ANALITICA IN D_2
$I = \{ z \mid f_1(z) = f_2(z) \}$ HA UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE IN $D = D_1 \cap D_2$

Th: $f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in D_c$ DOVE D_c PARTE CONNESSA DI D IN CUI STA IL PUNTO DI ACCUMULAZIONE.



SE f_i SONO UGUALI IN UN INTORNO DI UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE, ALLORA LO SONO IN TUTTA L'INTERSEZIONE.

NOTA MA IL TH NON MI DICE NULLA DI REGIONI DELL'INTERZEZIONE NON CONNESSE.



DEF $f_1(z)$ DEFINITA SU $E \subset \mathbb{C}$ (E NON È IN GENERALE UN APERTO)

$f_2(z)$ ANALITICA IN $D \subset \mathbb{C}$ (D APERTO CONNESSO)

DICIAMO $f_2(z)$ È LA CONTINUAZIONE ANALITICA DI f_1 SE:

- $f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in E \cap D$
- $E \cap D$ HA ALMENO UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE IN D

(COME METODI INTRO CHE PORTAVAMO f REALI IN $\mathbb{C}$)

LA CONTINUAZIONE ANALITICA È UNICA. SE TROVO

$f_1 \to f_2 \quad E \cap D$

$f_1 \to f_3 \quad E \cap D$

ALLORA $f_2 = f_3$

CONTINUAZIONE ANALITICA ALLA WEIERSTRASS → MODO CONCETTUALE PER COSTRUIRNE UNA

$f(z)$ ANALITICA IN $D \longrightarrow f(z)$ SI PUÒ SVILUPPARE IN Σ DI TAYLOR IN D

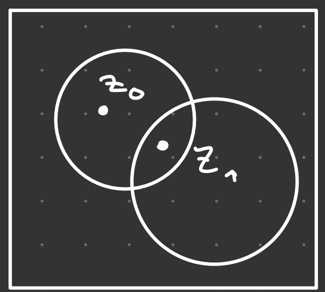
PRENDO $z_0 \in D$, $f_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m \quad I_\delta(z_0) \subset D$

DOVE CONVERGE Σ

POSSO PRENDERE UN'ALTRO $z_1 \in D$

$f_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_1)^m \quad I_\varepsilon(z_1)$

NON COINCIDE CON $I_\delta(z_0)$, PUÒ USCIRE, MA SICURAMENTE $z_1 \in I_\delta(z_0)$ E $I_\delta \cap I_\varepsilon \neq 0$

D


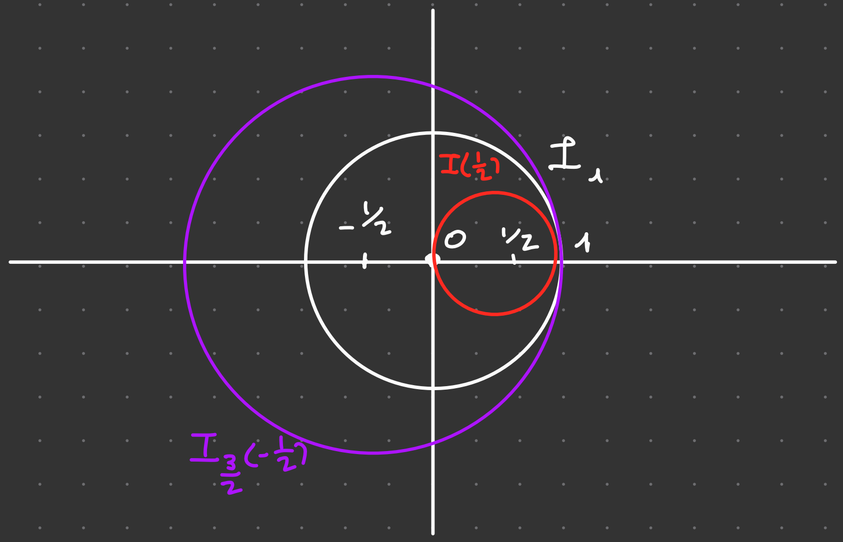
$I_\varepsilon(z_1) \not\subset I_\delta(z_0)$

HO COSTRUITO UNA CONTINUAZIONE ANALITICA DI $f_0 \Rightarrow f_1(z) = f_0(z) \quad \forall z \in I_\varepsilon(z_1) \cap I_\delta(z_0)$

POSSO DEFINIRE $f(z) = \begin{cases} f_0(z) & \forall z \in I_\delta(z_0) \\ f_1(z) & \forall z \in I_\delta(z_1) \end{cases}$

E IN GENERALE $f(z) = \bigcup_i f_i(z)$ UNIONE DI TUTTE LE f_i

ES $f_0 = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad z \in I_1(0)$



POSSO SCRIVERLA $f_0 = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z} = f(z)$

SVILUPPO INTORNO A $z = -\frac{1}{2}$ CHE TANTO $\in I_1(0)$

$$f_1 = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(z + \frac{1}{2}\right)^k$$

CHE CONVERGE IN $I_{\frac{3}{2}}(-\frac{1}{2})$

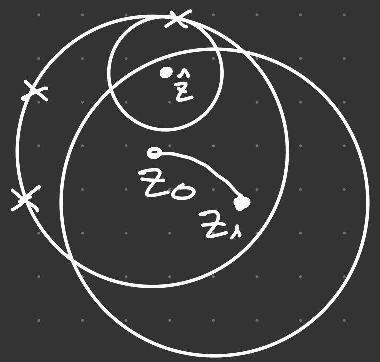
IN QUESTO CASO PARTICOLARE $I_1(0) \subset I_{\frac{3}{2}}(-\frac{1}{2})$

SE SVILUPPASSI IN $+\frac{1}{2}$ "NON CI GUADAGNO NIENTE" PERCHÈ SAREBBE STATO $I(\frac{1}{2}) \subset I_1(0)$

IL METODO DI WEIESTRASS COSTRUISCE FUNZIONI ANALITICHE PER SVILUPPI SUCCESSIVI, QUINDI ORA POTREI CONTINUARE SVILUPPANDO f IN $3/2$ E OTTENERE UNA CONTINUAZIONE ANALITICA f_2 DEFINITA IN $I(\frac{3}{2})$ E COSÌ VIA FINO A RICOPRIRE $\mathbb{C}$

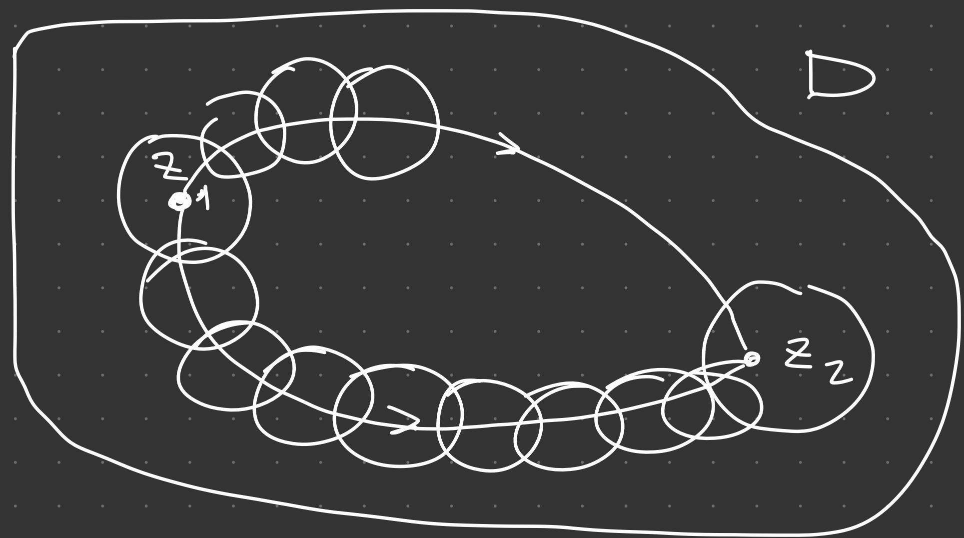
IL PROBLEMA È CHE NON È DETTO CHE UNA FUNZIONE ANALITICA, SCRITTA COME SERIE CONVERGENTE, NE POSSO FARE LA CONTINUAZIONE ANALITICA AL DI FUORI DEL CERCHIO DI CONVERGENZA.

NOTA SE HO A CHE FARE CON FUNZIONI "NORMALI", NEL SENSO CON SINGOLARITÀ IN NUMERO FINITO, POSSO SEMPRE COSTRUIRE UNA CONTINUAZIONE ANALITICA USANDO QUESTO METODO, PERCHÈ PARTENDO DA UN CERCHIO INIZIALE CI SONO SEMPRE DIREZIONI LUNGO CUI MI POSSO SPOSTARE E USCIRE DAL DOMINIO INIZIALE (SENZA BECCARE SINGOLARITÀ)



$\hat{z}$ NON MI FA USCIRE DAL DOMINIO MA z_1 SI

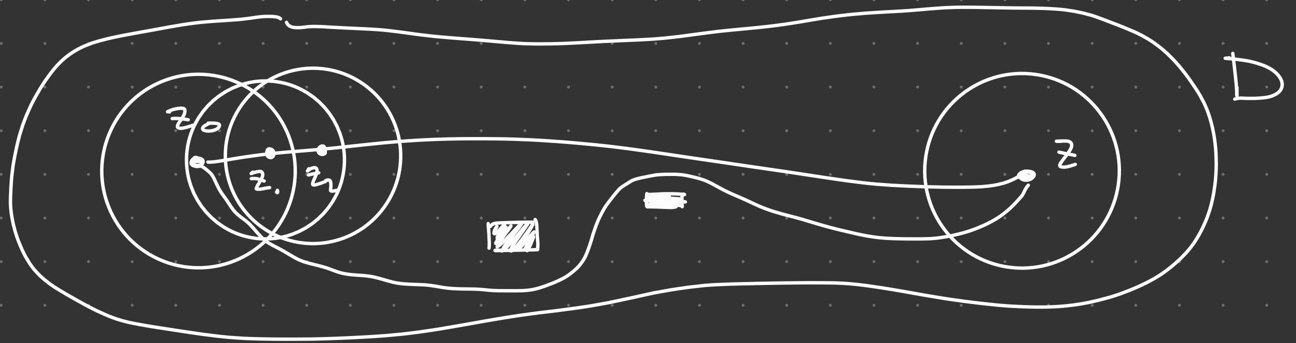
QUINDI POSSO FARE UNA COSA DEL TIPO:



SE HO ∞ SINGOLARITÀ SUL BORDO NON POSSO COSTRUIRE UNA CONTINUAZIONE ANALITICA ALLA WEIESTRASS (SONO CASI RARI)

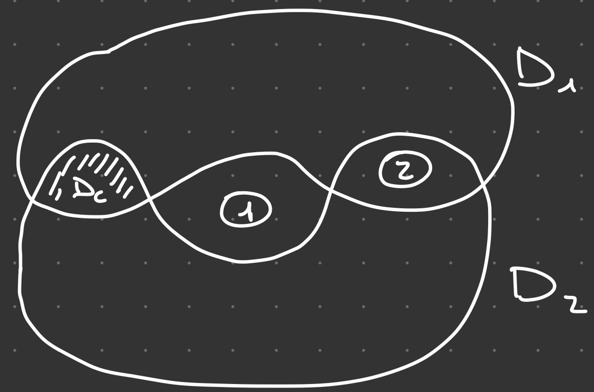
VEDI ESEMPIO (P. 35 DELLE DISPENSE DI SCIUTO) L'OSSERVAZIONE IN CUI PARLA DI $f(z) = \sum z^{2^n}$ CHE NON POSSO USCIRE DAL DOMINIO.

LA CONTINUAZIONE ALLA WEIESTRASS MI PERMETTE DI FARLA LUNGO UN CERTO CAMMINO



POSSO ANDARE DA z_0 A z IN VARI MODI, LUNGO DIVERSI CAMMINI (SO CHE LA CONTINUAZIONE ANALITICA SU CIASCUN PERCORSO È UNICA), MA LE CONTINUAZIONI FATTE SU CAMMINI DIVERSI NON È DETTO CHE COINCIDANO.

SUPPONGO DI AVERE:



$f(z)$ DEFINITA SU E

HO $f_1(z)$ CONT. ANALIT. SU D_1 UNICA

$f_2(z)$ CONT. ANALIT. SU D_2 UNICA

SICURAMENTE POSSO DIRE $f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in D_c$ (PARTE CONNESSA DELL'INTERSEZIONE)

IN 1 HO UN "BUCO", NON HO NE D_1 NE D_2

IN 2 NON SO CHE SUCCEDE

NOTA PERÒ SE IN 1 NON HO SINGOLARITÀ IL FATTO CHE SIA UNA REGIONE VUOTA È ARBITRARIO E POTREI SPOSTARE I DOMINI IN MODO DA AVERE 2 CONNESSO, ALTRO DISCORSO SE IN 1 HO SINGOLARITÀ NON POSSO SPOSTARE IL BORDO E LE INTERSEZIONI RIMARRANNO DISCONNESSE

FUNZIONI POLIDROME

FUNZIONI POLIDROME SONO FUNZIONI CHE QUANDO FACCIO LA CONTINUAZIONE ANALITICA E GIRO ATTORNO A QUALCOSA TROVO VALORI DIVERSI RISPETTO QUELLI DA CUI ERO PARTITO (A SECONDA DEL CAMMINO).

Sono LE FUNZIONI CHE NON MI DANNO UNA CORRISPONDENZA $1 \to 1$ MA 1 A TANTI.

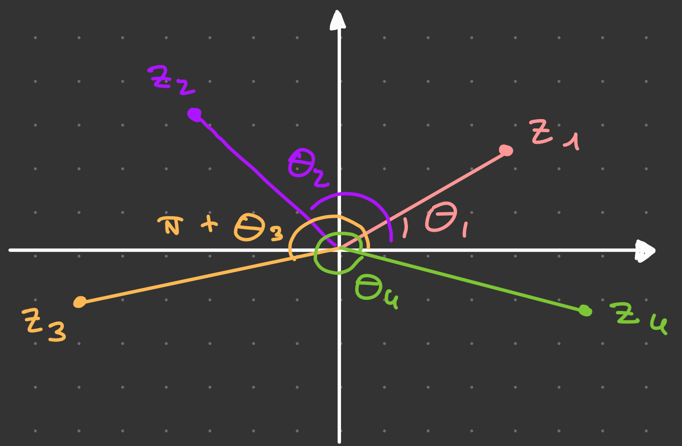
ES STUDIAMO $w = f(z) = z^2 \rightsquigarrow z = \sqrt{w}$, $f : \mathbb{C} \to \Pi = \underset{\sim \mathbb{C}}{\Omega} \cup \underset{\sim \mathbb{C}}{\Omega'}$

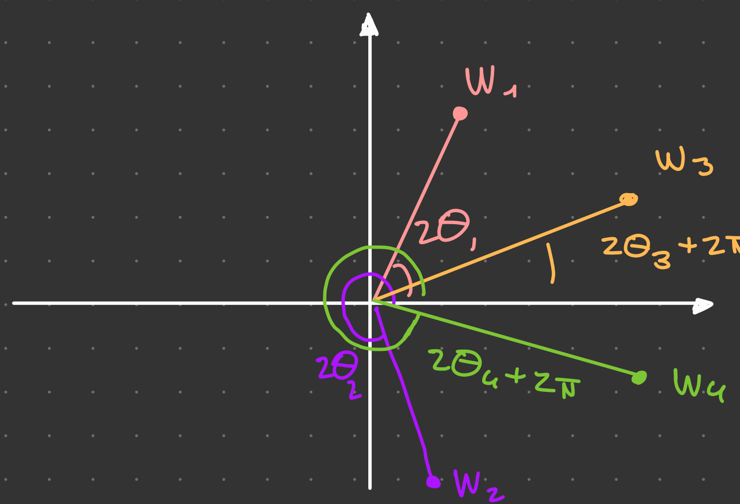
CODOMINIO È L'UNIONE DI $2\,\mathbb{C}$

DATO $z_0 = \sqrt{w_0}$ SO CHE HO ANCHE

$$-z_0 = \sqrt{w_0}$$

E QUESTO DERIVA DAL FATTO CHE QUANDO VADO DAL PIANO DI Z AL PIANO DI W OGNI SEMIPIANO DI Z COPRE INTERAMENTE QUELLO DI W.





QUINDI VEDENDO TUTTI QUESTI CASI CAPISCO PERCHÈ

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \Pi = \underset{\sim \mathbb{C}}{\Omega} \cup \underset{\sim \mathbb{C}}{\Omega'}$$

IL SEMIPIANO SUPERIORE VIENE MAPPATO IN TUTTO $\mathbb{C}$ DI w E IL SEMIPIANO INFERIORE VIENE MAPPATO IN UN $\mathbb{C}$ DI w, MA AL II GIRO

IO VORREI INVERTIRE LA FUNZIONE.
HO 2 POSSIBILITÀ:

1) INVERTO f PRENDENDO I PUNTI SOLO DI Ω O DI Ω'

SE FACCIO COSÌ NON HO PROBLEMI, PERÒ DEVO RICORDARE CHE I PUNTI DI Ω VENGONO MAPPATI SUL SEMIPIANO SUPERIORE.

$$f^{-1} : \Omega \longrightarrow H_+ \qquad \text{CON} \qquad 0 \leq \arg w < 2\pi \quad \text{(PRIMO GIRO)}$$

$$\left(-\pi < \arg w \leq \pi \quad f^{-1} : \Omega \longrightarrow \{ z \mid \operatorname{Re} z > 0 \} \right)$$

AVREI

$$\Omega' \longrightarrow 2\pi < \arg w < 4\pi$$

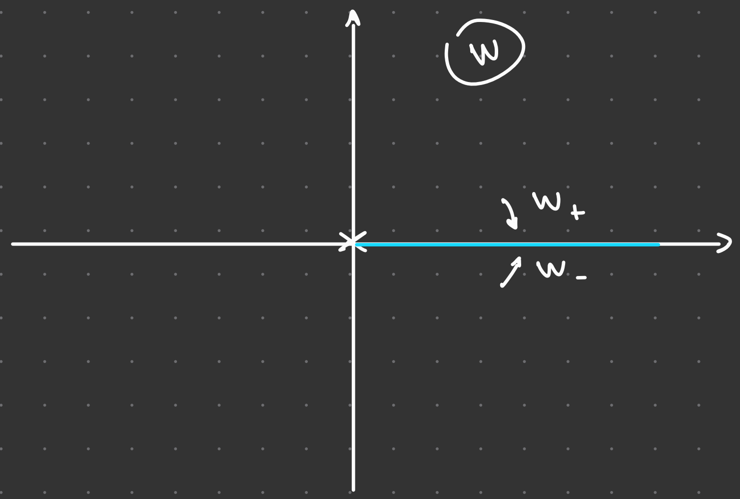
IL RANGE DI Ω DESCRIVE IL <u>PRIMO FOGLIO</u> E IL RANGE DI Ω' DESCRIVE IL <u>2° FOGLIO</u>

IL PUNTO È CHE SE RESTRINGO GLI ANGOLI DI LÀ HO LA CONTROIMMAGINE CHE È SOLO UN SEMIPIANO, PERÒ LA f COSÌ È BEN DEFINITA E INVERTIBILE.

QUELLO CHE PAGHIAMO PERÒ A RESTRINGERE IL DOMINIO È CHE LA FUNZIONE È DISCONTINUA SU TUTTA UNA SEMIRETTA CHE PARTE DALL'ORIGINE.

SCELGO $0 \leq \arg w < 2\pi$

MI CHIEDO CHE SUCCEDE SE CALCOLO f PER UN $w \in \mathbb{R}_+$ MA ARRIVANDOCI DA SOPRA PIUTTOSTO CHE DA SOTTO



SCRIVO :
$$\begin{cases} w_+ = x e^{i\varepsilon} \sim x + i\varepsilon \\ w_- = x e^{i(2\pi - \varepsilon)} \sim x - i\varepsilon \end{cases}$$

$$z = f^{-1}(w) = \sqrt{w}$$

SE CALCOLO
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{w_+} = \sqrt{x}$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{w_-} = \sqrt{x e^{i2\pi}} = -\sqrt{x}$$
$\Rightarrow$ DISCONTINUITÀ

QUINDI IL PREZZO CHE PAGO RENDENDO LA FUNZIONE INVERTIBILE È QUELLO DI AVERE DISCONTINUITÀ PER IL $\lim$ DA SOPRA E DA SOTTO.

IN GENERE LA LINEA DI DISCONTINUITÀ LA POSSO METTERE DOVE VOGLIO (BANALMENTE CAMBIO L'INTERVALLO DEGLI ANGOLI), PERÒ ESCE SEMPRE DALL'ORIGINE CHE È EFFETTIVAMENTE IL PUNTO PROBLEMATICO DOVE NON HO UNA MAPPA CONFORME (STESSO PROBLEMA ∞).

LA LINEA DI DISCONTINUITÀ SI CHIAMA TAGLIO E UNISCE I 2 PUNTI PROBLEMATICI 0 E ∞

SI CHIAMANO PUNTI DI DIRAMAZIONE

SONO GLI ESTREMI DEL TAGLIO

SONO UNITI DA UNA LINEA DI SINGOLARITÀ

$\Rightarrow$ I PUNTI DI DIRAMAZIONE SONO SINGOLARITÀ NON ISOLATE

2) NON INVERTO LA FUNZIONE SU $\mathbb{C}$, MA DEFINISCO IL CODOMINIO PROPRIO IN Π.
DEVO TENERE DISTINTI I PUNTI DEL PRIMO GIRO DA QUELLI DEL SECONDO.

$$\begin{cases} \text{SE} \quad w \in \Omega \Rightarrow \arg w \in [0, 2\pi) \\ \text{SE} \quad w \in \Omega' \Rightarrow \arg w \in [2\pi, 4\pi) \end{cases}$$

IN QUESTO CASO f^{-1} È PERFETTAMENTE DEFINITA:

$$\sqrt{w} = \sqrt{|w|}\, e^{i\frac{\theta}{2}} = z\, e^{i\varphi}, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad 0 \leq \varphi < \pi$$

INVECE SE $2\pi \leq \theta < 4\pi \qquad \pi \leq \varphi \leq 2\pi$

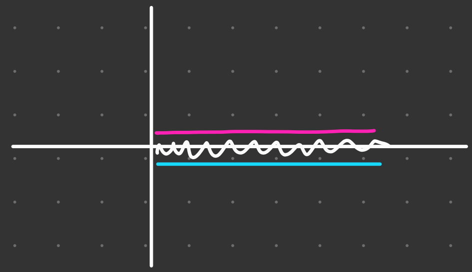
SOLITAMENTE : FISSO L'INTERVALLO DI θ , $0 \leq \theta < 2\pi$

DICO CHE IL PRIMO FOGLIO È CARATTERIZZATO DA $\theta_\Omega = \theta$

E IL SECONDO $\theta_{\Omega'} = \theta + 2\pi$

SU Ω HO

$$\sqrt{w}_+ = \sqrt{x}$$
$$\sqrt{w}_- = -\sqrt{x}$$

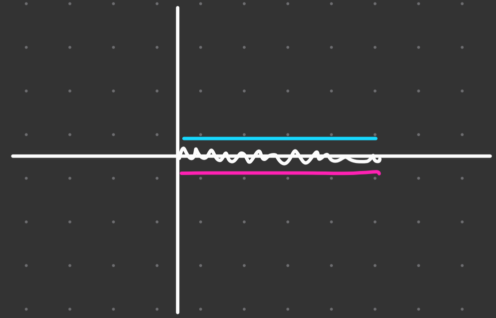


Ω

MA SU Ω'

$$\sqrt{w}_+ = \sqrt{x\, e^{i(2\pi+\varepsilon)}} = -\sqrt{x}$$
$$\sqrt{w}_- = \sqrt{x e^{i(4\pi+\varepsilon)}} = \sqrt{x}$$

$\varepsilon \to 0$



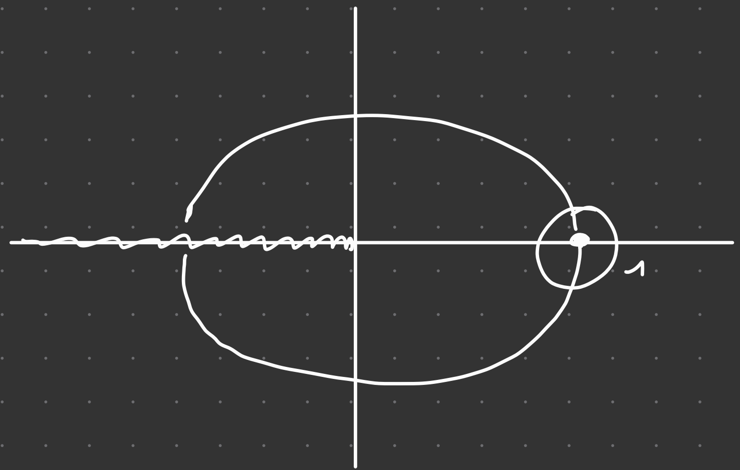
Ω'

$\Rightarrow$ NOTO CHE C'È CONTINUITÀ LUNGO I BORDI DEI DUE FOGLI, CHE EFFETTIVAMENTE HA SENSO, IL BORDO INFERIORE DEL SECONDO FOGLIO HA UN ARGOMENTO UGUALE A QUELLO DEL BORDO "FINALE" DEL PRIMO FOGLIO.

E POSSO VEDERE CHE Ω, Ω' SONO ENTRAMBI DEI $\mathbb{C}$ TAGLIATI (TOLGO UN ASSE), MA DI CUI POSSO "INCOLLARE" IL LEMBO FINALE DEL PRIMO FOGLIO AL LEMBO INIZIALE DEL SECONDO.
LA SUPERFICIE CHE SI OTTIENE CON QUESTA PROCEDURA SI CHIAMA SUPERFICIE DI RIEMANN DELLA RADICE QUADRATA E Ω, Ω' NE SONO I FOGLI.

USANDO QUESTO METODO OTTENGO UNA FUNZIONE CONTINUA.

ES PER CUI LA CONTINUAZIONE ANALITICA DA 2 VALORI DIVERSI



HO $-\pi < \theta \leq \pi$, $f(w) = \sqrt{w}$

SCELGO $z = 1$ HO $\sqrt{z}$ BEN DEFINITA E IN UN INTORNO DI 1 NON CAPITA NIENTE.

DETTO MEGLIO: $z = 1 e^{i\varepsilon} \Rightarrow \sqrt{z} = 1 e^{i\varepsilon/2} \sim 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$

E NON HO PROBLEMI POICHÈ C'È UN UNICO VALORE CHE MI CONNETTE IL FATTO CHE $f(1) = 1$,

MA IN -1 CI POSSO ANDARE DA SOPRA O SOTTO

$$\begin{cases} \text{(SOPRA)} & -1 = e^{i\pi} \\ \text{(SOTTO)} & -1 = e^{-i\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{-1} = i \\ \sqrt{-1} = -i \end{cases} \Rightarrow \text{HO 2 COSE DIVERSE}$$

IL LOGARITMO

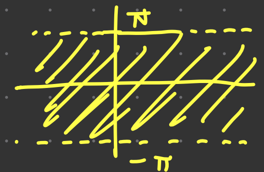
VOGLIO STUDIARE $w = f(z) = \log z$ E VOGLIO VEDERLA COME CONTINUAZIONE ANALITICA DI $f(x) = \log x$ $\quad x \in \mathbb{R}$

IO SO CHE $\forall z$ HO ∞ VALORI DI w (VEDI P. 9) OVVERO UNA STRISCIA DI AMPIEZZA 2π VIENE MANDATA IN $\mathbb{C}$ QUINDI PRESO UN $w \in \mathbb{C}$ POSSO TROVARE CON L'INVERSA UN PUNTO IN UNA DELLE ∞ STRISCE, QUINDI HO UN PROBLEMA.

HO LE STESSE 2 VIE DI SOPRA:

1) f HO ∞ COPIE DI $\mathbb{C}$ POSSIBILI IN CUI ARRIVARE, PER RISOLVERE FISSO $\arg z$ COSI PRENDO UNA SOLA COPIA DI $\mathbb{C}$

SCELGO $z \in 1$ COPIA DI $\mathbb{C}$, $\quad \theta_0 \le \arg z < \theta_0 + 2\pi$
$$\theta$$

$\left(f^{-1} : \text{"}\mathbb{C}\text{"} \to \right.$  $\left.\right)$

ORA LO PRENDO $-\pi < \theta \le \pi$ (ASSE REALE)

QUESTO È $\text{"}\mathbb{C}\text{"} = \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$

COSI $\quad z = |z| e^{i\theta}$

$$w = \log z = \log|z| + i\theta$$

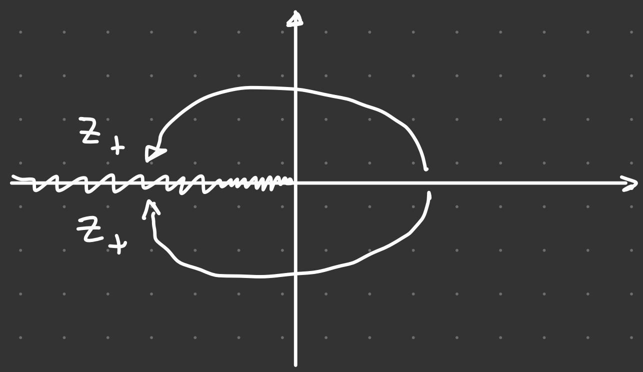
QUESTA È UNA DELLE POSSIBILITÀ DELLE CONTINUAZIONI ANALITICHE DI $\log(x)$ (QUESTO PERCHÈ SCEGLIENDO $\arg z = 0$ HO $\log|z|$ QUINDI QUELLO CHE VOGLIO)

PRENDO UNA POSSIBILE CONTINUAZIONE ANALITICA SCEGLIENDO L'INTERVALLO DI θ

NOTA POTREI ANCHE PRENDERE $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{3}{2}\pi$ E COMUNQUE $w = \log|z| + i\theta$

AD OGNI MODO QUESTA FUNZIONE È DISCONTINUA DOVE METTO IL BORDO DEGLI ARGOMENTI.

SCELTO $-\pi < \theta \leq \pi$ HO $\Rightarrow$



QUINDI, IN UN PUNTO SULLA DISCONTINUITÀ CI ARRIVO DA SOPRA O DA SOTTO

$$\begin{cases} z_+ = |z| e^{i(\pi - \varepsilon)} = x e^{i(\pi-\varepsilon)} \\ z_- = x e^{i(-\pi+\varepsilon)} \end{cases}$$

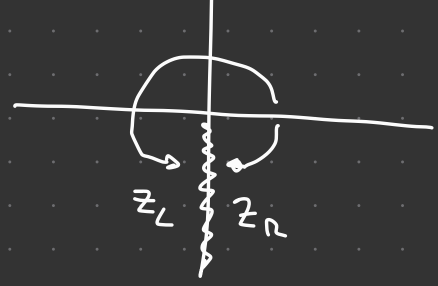
QUINDI

$$\begin{cases} \log(z_+) = \log x + i\pi \\ \log(z_-) = \log x - i\pi \end{cases}, \quad \varepsilon \to 0$$

E HO DISCONTINUITÀ : $\log z_+ - \log z_- = 2\pi i$

NOTA QUINDI TRA UN GIRO E L'ALTRO LA f CAMBIA DI UNA COSTANTE

SE INVECE $-\frac{\pi}{2} < \theta \le \frac{3}{2}\pi$



$$\begin{cases} z_R = x e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)} \\ z_L = x e^{i\left(\frac{3}{2}\pi - \varepsilon\right)} \end{cases} , \qquad \begin{cases} \log z_R = \log x - i\frac{\pi}{2} \\ \log z_L = \log x + i\frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

DISCONTINUITÀ $= 2\pi i$

QUINDI COSÌ TROVO UNA f NON CONTINUA E IN PIÙ TROVO SOLO LE IMMAGINI IN UNA PARTE DI $\mathbb{C}$

PERÒ ORA HO SIA PER $-\pi < \theta \le \pi$ CHE $-\frac{\pi}{2} < \theta \le \frac{3}{2}\pi$ UNA CONTINUAZIONE ANALITICA PER $\log x$ E MI CHIEDO SE QUESTE 2 CONTINUAZIONI ANALITICHE COINCIDONO E DOVE.

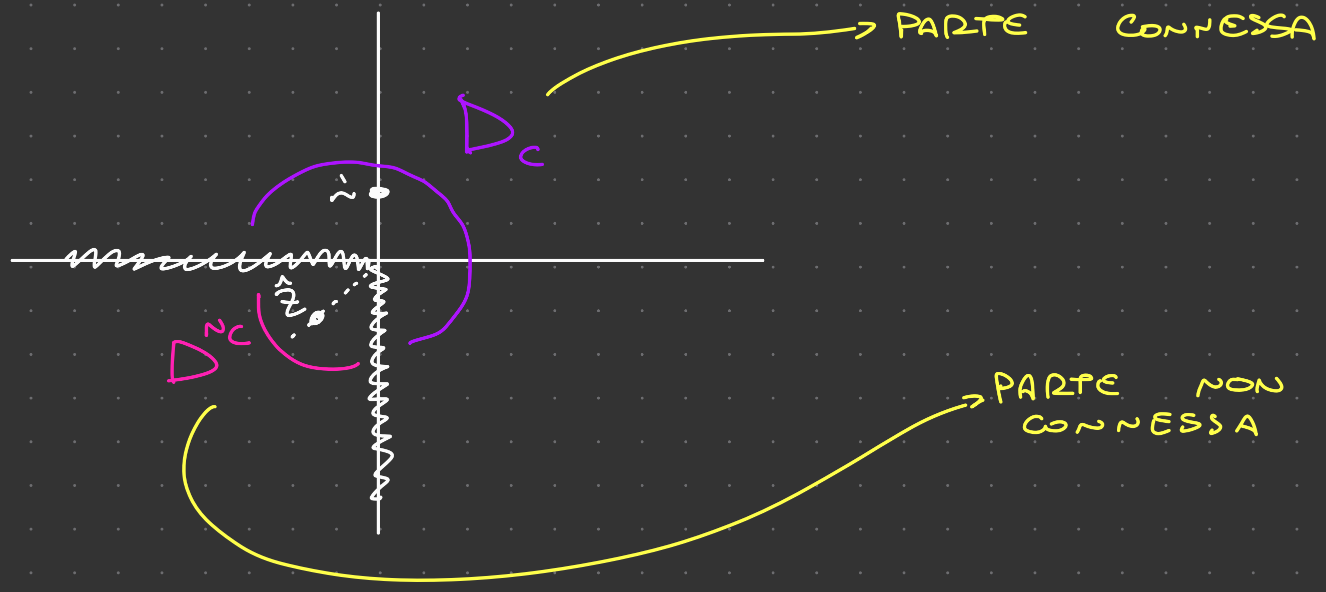
CHIAMO $\log_1 z$ IN $-\pi < \theta \le \pi$

$\log_2 z$ IN $-\frac{\pi}{2} < \theta \le \frac{3}{2}\pi$

HO $\log_1 z$ ANALITICO IN $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$

$\log_2 z$ ANALITICO IN $\mathbb{C} - \mathrm{Im}_-$

QUINDI HO, GUARDANDO L'INTERSEZIONE:



SE CALCOLO LE FUNZIONI IN UN PUNTO DI D_C HO GLI STESSI VALORI

$$\log_1 i = i\frac{\pi}{2} \quad , \quad \log_2 i = i\frac{\pi}{2} = \log_1 i$$

MA SE PRENDO $\hat{z} \in D^{NC}$ HO

$$\log_1 \hat{z} = -i\frac{3}{4}\pi \quad , \quad \log_2 \hat{z} = i\frac{3}{4}\pi$$

QUINDI $\log_1 \hat{z} \neq \log_2 \hat{z} \Rightarrow$ LA CONTINUAZIONE ANALITICA NON È UNICA

2) L'ALTRO MODO PER RISOLVERE È DI RICORDARSI CHE LA FUNZIONE $\arg z$ PERCORRE $\mathbb{C}$ ∞ VOLTE

$$\Rightarrow \Pi = \bigcup_i \Omega_i \qquad \text{CON} \qquad \Omega_i \sim \mathbb{C}$$

AVENDO $z = |z| e^{i\theta} = e^{w}$

$$\Rightarrow w = \log z = \log|z| + i\theta + i2\pi m \quad , \quad m \in \mathbb{Z}$$

TENGO CONTO DELLE ∞ SOL CHE POSSO AVERE

QUESTO VUOL DIRE CHE θ NON LO FACCIO ANDARE SOLO SU UN RANGE DI 2π MA

$$-\infty < \arg z < +\infty$$

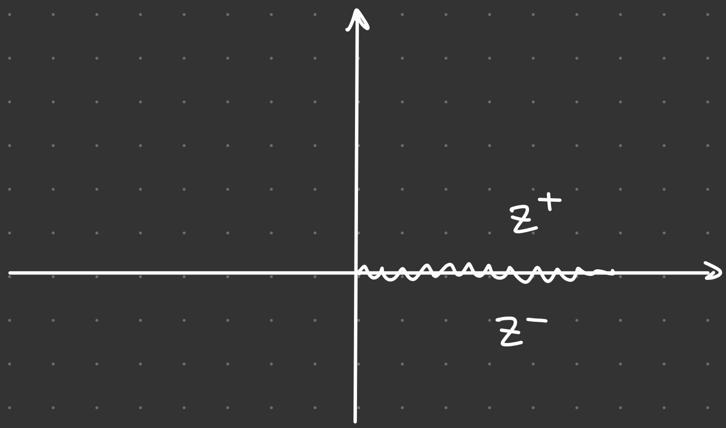
PERÒ DEVO COMUNQUE SEPARARE I VARI Ω_i, QUINDI

$$\arg z = \theta + 2\pi m \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

LE VARIE COPIE DI $\mathbb{C}$ SONO DATE DA m

CHIAMO $L_m(z) = w = \log z = \log|z| + i\theta + i2\pi m$

VALUTO CHE SUCCEDE SOPRA, SOTTO LA DISCONTINUITÀ



$$z_+ = x e^{i\varepsilon}$$
$$z_- = x e^{i(2\pi - \varepsilon)}$$

QUINDI HO

$$L_m(z_+) = \log x + i 2\pi m$$
$$L_m(z_-) = \log x + i 2\pi + i 2\pi m = \log x + i 2\pi (m+1) = L_{(m+1)}(z_+)$$

$\Rightarrow$ LA FINE DI UN FOGLIO È L'INIZIO DI QUELLO SUCCESSIVO (SUL SINGOLO FOGLIO HO UNA DISCONTINUITÀ, MA PER LA SOP. DI RIEMANN NON HO PROBLEMI)

$\Rightarrow$ OTTENGO UNA SPIRALE (ELICA) INFINITA

NOTA AD OGNI FUNZIONE POLIDROMA È ASSOCIATA UNA FIGURA DI RIEMANN = COLLEZIONE DEI FOGLI CHE SERVONO AD AVERE UNA FUNZIONE AD UN SOLO VALORE.

LA FORMA DELLA SUPERFICIE DIPENDE COME INCOLLO UN FOGLIO ALL'ALTRO; SE LE INCOLLO BENE LA MIA FUNZIONE POLIDROMA DIVENTA CONTINUA

TAGLI DIVERSI MI DANNO FOGLI DIVERSI, MA SE SALDO TUTTI I FOGLI OTTENGO SEMPRE LA STESSA SUPERFICIE DI RIEMANN.

ABBIAMO VISTO CHE SU OGNI FOGLIO IL LOGARITMO È DISCONTINUO

SI PUÒ SCRIVERE:

$$\log\left(x e^{i\theta_0}\right) = \log x + i\theta_0 + i 2\pi m \qquad x \in \mathbb{R}$$

SU OGNI FOGLIO

SO CHE DEVO SPECIFICARE L'INTERVALLO PRINCIPALE DI θ E COME VARIO I FOGLI, MA UNA VOLTA FATTO C'È CORRISPONDENZA UNIVOCA TRA I PUNTI SULLA SUP. DI RIEMANN E I VALORI DEL LOGARITMO

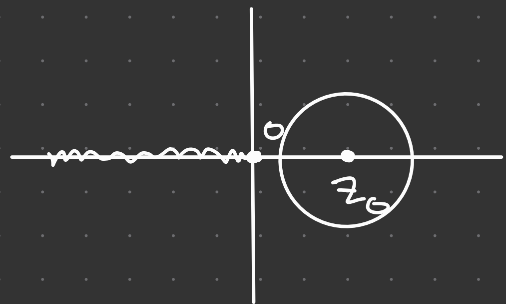
SO ANCHE CHE 0 E ∞ SONO PUNTI DI DIRAMAZIONE.

DOVENDO SCEGLIERE UN INTERVALLO PER θ CI SARÀ SEMPRE UNA LINEA DI DISCONTINUITÀ

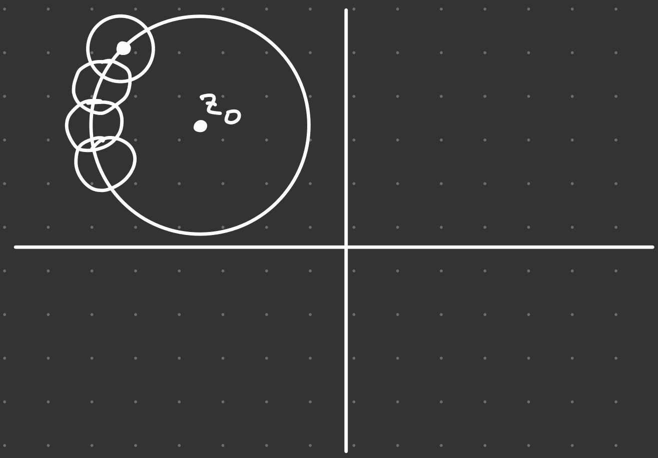
$\Rightarrow$ 0 E ∞ NON SONO SINGOLARITÀ ISOLATE
(INTORNO DI 0 HO ∞ SING.)

$\Rightarrow$ 0 E ∞ SONO PUNTI DI DIRAMAZIONE

ORA, VOGLIO SVILUPPARE IN z_0 E AFFINCHÈ f SIA ANALITICA BASTA CHE SCELGO IL TAGLIO OPPORTUNAMENTE (A SX) COSÌ CHE IO POSSA GIRARE ATTORNO AL MIO PUNTO SENZA PROBLEMI



MA DATA UNA f COME FACCIO A SAPERE SE HA UN PUNTO DI DIRAMAZIONE?



PRENDO z_0 E PARTENDO DA UN'ALTRO PUNTO LA PROLUNGO ANALITICAMENTE.

⇒ SE GIRANDOCI ATTORNO TROVO LO STESSO VALORE DELLA FUNZIONE ALLORA È SING. ISOLATA; INVECE, SE TROVO DUE COSE DIVERSE z_0 È UN PUNTO DI DIRAMAZIONE ED f È POLIDROMA

z_0 PUNTO DI DIRAMAZIONE $\iff f(z_0+\rho e^{i2\pi}) \neq f(z_0+\rho)$

MA SE TORNO IN UN PUNTO DIVERSO DA QUELLO DI PARTENZA PUÒ ESSERE CHE CON n GIRI RIESCA A TORNARCI?

↳ RAD Q CON 2 GIRI CI TORNO

NOTA IL NUMERO DI GIRI MENO 1 CHE DEVO FARE PER TORNARE AL PUNTO DI PARTENZA SI CHIAMA ORDINE

ES RADQ = FUNZIONE POLIDROMA DI ORDINE 1
log POLINOMIA ORDINE ∞

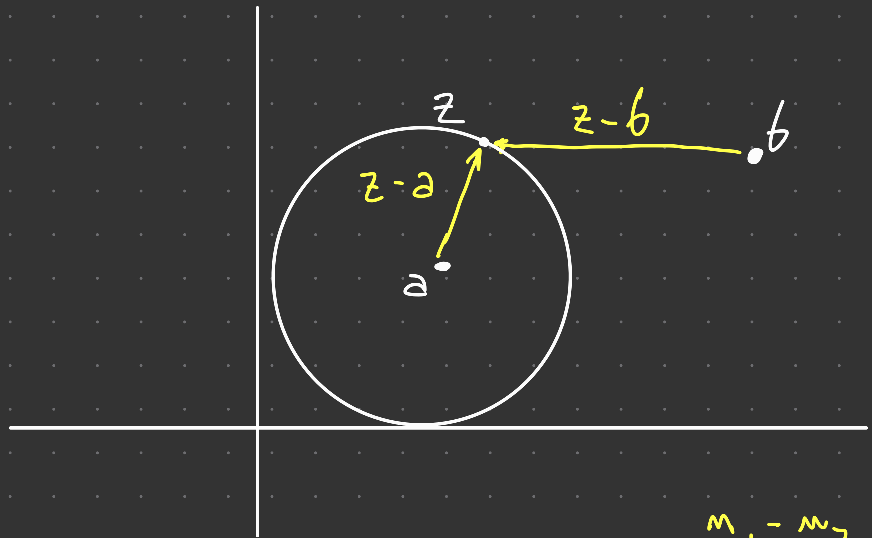
CAPIAMO MEGLIO CON UN ESEMPIO $\log \frac{z-a}{z-b}$

SE CAMBIO VARIABILE $W = \frac{z-a}{z-b}$

$\log W$ HO PUNTI DI DIRAMAZIONE DOVE $\log = 0$ E DOVE DIVERGE

$z = a$ E $z = b$

PRESI $z = a$, $z = b$ PARTO DA UN PUNTO QUALUNQUE, FACCIO UN GIRO ATTORNO E VEDO SE φ CAMBIA (CONTROLLO CHE SIANO PUNTI DI DIRAMAZIONE)



SUL FOGLIO m

$$\log \frac{z-a}{z-b}\Big|_m = \log(z-a)\Big|_{m_1} - \log(z-b)\Big|_{m_2}$$

$$= \log|z-a| + i\underbrace{\arg(z-a)}_{\varphi_a} - \log|z-b| - i\underbrace{\arg(z-b)}_{\varphi_B} + i2\pi \overset{m_1 - m_2}{m}$$

$$= \log\left|\frac{z-a}{z-b}\right| + i(\varphi_a - \varphi_b) + i2\pi m$$

OSS PER CONTROLLARE SE UNA FUNZIONE È POLIDROMA DEVO VEDERE COME VARIANO $z-a$ E $z-b$, MA NEL log ENTRANO GLI ARGOMENTI DI a E b E NON L'arg z.

z PUNTO DA CUI PARTO PER GIRARE ATTORNO AI PUNTI

QUANDO DA z GIRO ATTORNO AD a $\varphi_a \to \varphi_a + 2\pi$

$\varphi_b \to \varphi_b$

SE RUOTO ATTORNO AD a φ_b VARIA, MA ALLA FINE DEL GIRO TORNA UGUALE

QUINDI ORA

$$\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\Big|_m = \log\left|\frac{z-a}{z-b}\right| + i(\varphi_a - \varphi_b) + i2\pi(m+1) \neq \text{PRIMA}$$

QUINDI ESSENDO DIVERSO $\Rightarrow$ a PUNTO DI DIRAMAZIONE

SE GIRO INTORNO A b $\varphi_a \to \varphi_a$

$\varphi_b \to \varphi_b + 2\pi$

ORA PERÒ NEL log HO UN TERMINE $-i2\pi$

$\Rightarrow$ LA SUP. DI RIEMANN È TC SE GIRO INTORNO AD a SALGO DAL FOGLIO m AL FOGLIO $m+1$, MENTRE SE GIRO ATTORNO b SCENDO AL FOGLIO $m-1$.

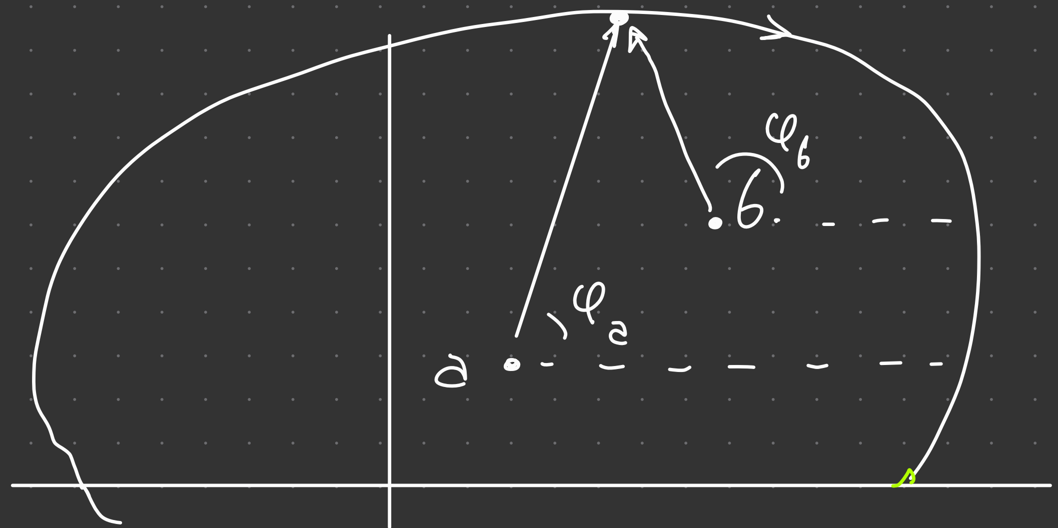
RAGIONANDO COSÌ NON HO ALTRI PUNTI DI DIRAMAZIONE, L'UNICO DUBBIO CHE RIMANE È L'∞.

GIRARE ALL'∞ $\Rightarrow$ GIRO ATTORNO TUTTI I PUNTI AL FINITO

QUA BASTA SOLO ATTORNO a, b

PERCHÈ IL CERCHIO LO POSSO MODIFICARE A PATTO CHE NON BATTO CONTRO ALTRE SING.

RIVEDI METODI I



$$\varphi_a \to \varphi_a - 2\pi$$

ORARIO

$$\varphi_b \to \varphi_b - 2\pi$$

MA
$$\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\Bigg|_M = \log\left|\frac{z-a}{z-b}\right| + i(\varphi_a - \varphi_b) + i2\pi M$$

$\Rightarrow$ RIMANE INVARIATA $\to$ I 2 TERMINI $i2\pi$ (CHE ESCONO DA $\varphi \to$) SI COMPENSANO

$\Rightarrow$ ∞ PUNTO REGOLARE

OSS MA ALLORA CAPISCO CHE SE STUDIASSI:

$$\log(z-a)(z-b) = \log|(z-a)(z-b)| + i(\varphi_a + \varphi_b) + i2\pi n$$

TROVO CON GLI STESSI CONTI CHE a, b SONO PUNTI DI DIRAMAZIONE MA IN QUESTO CASO TROVO CHE ANCHE ∞ LO È.

POSSO ANCHE VEDERE SE HO UN PUNTO DI DIRAMAZIONE IN UN ALTRO MODO:

POSSO SCRIVERE $\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \log\left(\frac{1-\frac{a}{z}}{1-\frac{b}{z}}\right) = \log\left(1-\frac{a}{z}\right) - \log\left(1-\frac{b}{z}\right)$

SE $z \to \infty$, $\frac{a}{z}, \frac{b}{z} \to 0$

MA IO CONOSCO $\log(1-w) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} w^k$ REGOLARE IN $w=0$

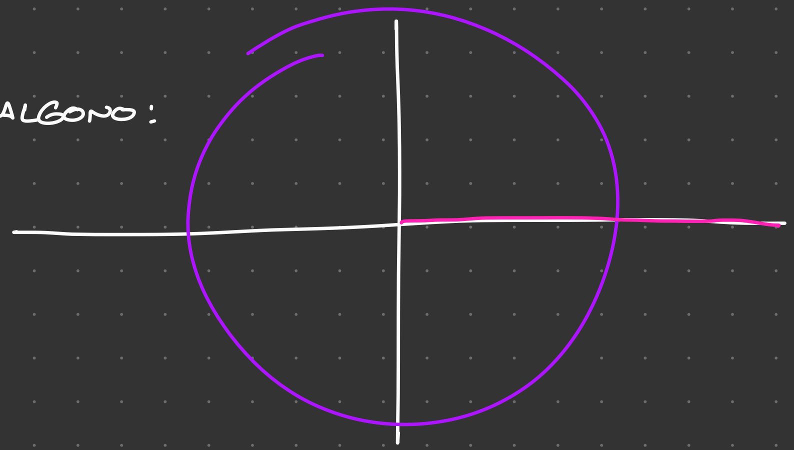
QUINDI

$$\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\left(\frac{a}{z}\right)^k - \left(\frac{b}{z}\right)^k\right)$$

$\Rightarrow$ RIUSCENDO A SCRIVERE TAYLOR IN UN INTORNO DI ∞ $\Rightarrow$ L'∞ È UN PUNTO REGOLARE

MA HO USATO UNA SERIE DI TAYLOR IN $\mathbb{C}$ CHE È LA CONTINUAZIONE ANALITICA DELLA SERIE IN $\mathbb{R}$

VALGONO:



- $\displaystyle -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} w^k \qquad w \in \mathbb{C}$
- $\displaystyle -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k \qquad x \in \mathbb{R}_+$

SO PERÒ CHE $\log x$ VALE SE $x>0$

E LA SERIE VIOLA È LA CONTINUAZIONE ANALITICA SOLO NEL FOGLIO 0 (DOVE HO L'ASSE $\mathbb{R}$ IN CUI $\arg w = 0$)

$\hookrightarrow$ NEGLI ALTRI FOGLI $\arg w = 2\pi m$

IO SO

$$\left.\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\right|_m = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\left(\frac{a}{z}\right)^k - \left(\frac{b}{z}\right)^k\right) + 2\pi i m$$

$$= (\text{SERIE SUL FOGLIO } 0) + 2\pi i m$$

MA COMUNQUE VEDO CHE L'∞ È REGOLARE POICHÈ

$$\left.\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\right|_m \xrightarrow[z\to\infty]{} 0 + i2\pi m \qquad \forall \text{ FOGLIO}$$

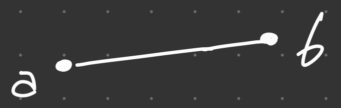
STUDIO DI FUNZIONI POLIDROME

ORA, VOGLIO VEDERE COME POSSO METTERE I TAGLI

a, b PUNTI DI DIRAMAZIONE DI ORDINE ∞

SCELTA:

I) TAGLIO FRA a E b



II) TAGLIO FRA (a, ∞) E (b, ∞)

MA AVEVO VISTO CHE RISCRIVENDO IL $\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ NON COMPARE L'$\arg z$, MA DEVO SOLO GUARDARE φ_a E φ_b

LA COSA CONVENIENTE È:
PRENDO UNO z E (IN BASE ALLA GEOMETRIA DEL PROBLEMA) SCELGO QUANTO DEVONO FARE φ_a, φ_b E SCELGO DOVE METTERE IL TAGLIO

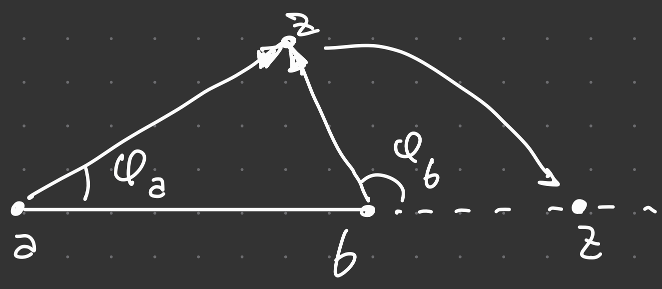
SPESSO LE $f(z)$ VENGONO FUORI COME FUNZIONI REALI CHE SONO DEFINITE SOLO IN ALCUNE CONDIZIONI

$$\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \rightsquigarrow \log\left(\frac{x-a}{x-b}\right)$$ DEFINITO QUANDO $(\dots) > 0$

E POSSO IMMAGINARE DI PRENDERE $a, b < x$. $a, b \in \mathbb{R}$

QUINDI SE VOGLIO CHE

$f(z) \rightsquigarrow f(x)$ SE $\arg z = 0$



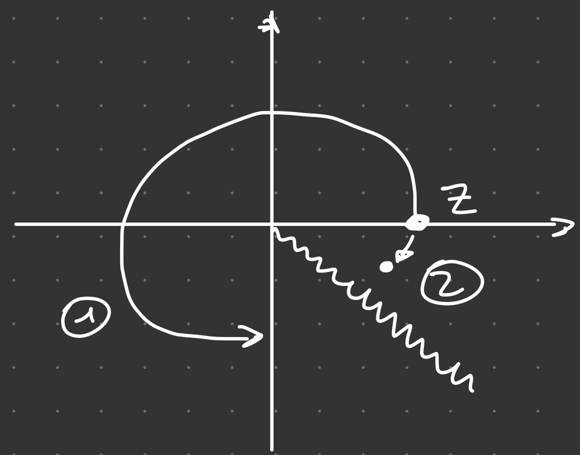
ALLORA QUANDO PORTO z SU $\mathbb{R} > b$ VOGLIO CHE SIA UNA COSA BEN DEFINITA

VOGLIO $z \in \mathbb{R}$ $\quad z > b > a \quad$ $\varphi_a = \varphi_b = 0$

O COMUNQUE CHE SU UN QUALSIASI FOGLIO IO ABBIA $\varphi_a = \varphi_b$ SE Z È SULL'ASSE REALE.

ORA PERÒ PRENDO $z \in \mathbb{R}$ E SCELGO QUANTO VALE $\arg z$ E SCELGO DOVE METTO IL TAGLIO

SCELGO $\arg z = 4\pi$



VOGLIO SAPERE $\arg z$ IN UN ALTRO PUNTO (CI DEVO ARRIVARE SENZA ATTRAVERSARE IL TAGLIO)

PER ANDARE CON IL PERCORSO ①:

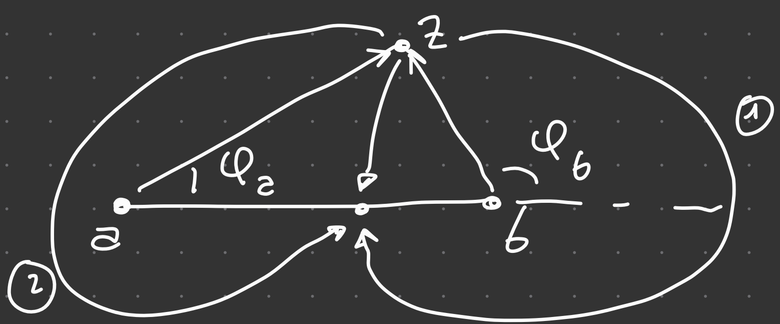
$$\arg z = 4\pi \longrightarrow 4\pi + \frac{3}{2}\pi$$

CON INVECE IL PERCORSO ②:

$$\arg z \longrightarrow 4\pi - \pi/6$$

NOTA QUINDI FISSATO arg z IN TUTTI GLI ALTRI PUNTI L'arg È BEN DEFINITO NON POTENDO ATTRAVERSARE IL TAGLIO E AVENDO UN SOLO MODO DI ARRIVARCI.

COSÌ CAPISCO CHE SUCCEDE IN ALTRI PUNTI SU $\mathbb{R}$



$z \in \mathbb{R} \qquad a < z < b$

$\varphi_a = 0 \longrightarrow \varphi_a = 0$

$\varphi_b = 0 \longrightarrow \varphi_b = \pi$

ED È L'UNICO CAMMINO CHE POSSO FARE PER STARE SOPRA IL TAGLIO.

CHIARO $\quad f(z)\Big|_{m} = \log \dfrac{z-a}{z-b}\Big|_{m}$

QUINDI IN QUESTO CASO TROVO:

$$f(z)\Big|_n = \log\left|\frac{z-a}{z-b}\right| - i\pi + i2\pi n$$

$$f(z)^+_0 = \log\left|\frac{z-a}{z-b}\right| - i\pi$$

SOPRA AL TAGLIO

SE LO GUARDASSI SOTTO AL TAGLIO:

$\varphi_a = 0 \longrightarrow \varphi_a = 0$ (CAMMINO 1)

$\varphi_b = 0 \longrightarrow \varphi_b = -\pi$

QUINDI

$$f(z)\Big|_n = \log\left|\frac{z-a}{z-b}\right| + i\pi + i2\pi n$$

$$f(z)^-_0 = \log\left|\frac{z-a}{z-b}\right| + i\pi$$

E SI VEDE

$$f(z)\Big|^-_0 - f(z)\Big|^+_0 = 2\pi i$$

MA CON IL CAMMINO 2 : $\varphi_a = 0 \longrightarrow \varphi_a = 2\pi$

$\varphi_b = 0 \longrightarrow \varphi_b = \pi$

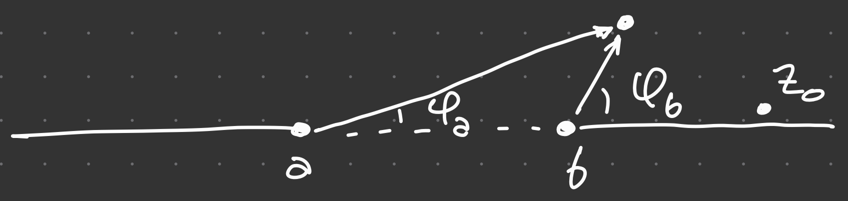
QUINDI

$$f(z)_0^- = \log\left|\frac{z-a}{z-b}\right| + i\pi$$

QUINDI QUALUNQUE CAMMINO MI DA LA STESSA COSA

$$f(z)\Big|_0^- - f(z)\Big|_0^+ = 2\pi i$$

VEDO LA SCELTA II DEL TAGLIO



ORA PERÒ NEI PUNTI $a<z<b$ SIA SOPRA CHE SOTTO HO LO STESSO VALORE (FACCIO LO STESSO CAMMINO)

$$f(z)\Big|_0^{\pm} = \log\left|\frac{z-a}{z-b}\right| - i\pi$$

SE GUARDO z_0 INVECE

$$f(z_0)\Big|_0^{+} = \log\left|\frac{z-a}{z-b}\right|$$

$$f(z_0)\Big|_0^{-} = \log\left|\frac{z-a}{z-b}\right| + i2\pi$$

$$\varphi_a = 0 \to \varphi_a = 0$$
$$\varphi_b = 0 \to \varphi_b = 2\pi$$

QUINDI LA DISCONTINUITÀ RIMANE LA STESSA, MA CAMBIA COME SI DISTRIBUISCE.

LO POSSO VEDERE COME: $z = x + i\varepsilon$

NEL CASO DI z_0 HO $x > b \Rightarrow z = x - i\varepsilon$, $\varepsilon \to 0^+$

ALLORA $\varphi_a \to 0$
$\varphi_b \to 2\pi$

POTENZE

SI PUÒ VEDERE CHE IL LOGARITMO È LA "MADRE" DELLE FUNZIONI POLIDROME.

SUPPONGO DI PRENDERE $g(z)$ NON POLIDROMA

E PRENDO $\hat{g}(z) = g(\log z)$

VEDO SUBITO CHE $\hat{g}(z)$ È POLIDROMA, OVVERO HO UNA SPECIFICAZIONE m DI $\hat{g}$

$$\hat{g}_m(z) = g(\log z|_m) = g(\log|z| + i\theta + i2\pi m)$$

SI VEDE SUBITO CHE È POLIDROMA

PRENDO $\theta_0 \le \theta < \theta_0 + 2\pi$

CALCOLO

INIZIO DEL GIRO

QUI

$$\hat{g}_m(xe^{i\theta_0})^i = g(\log x + i\theta_0 + i2\pi m)$$

$$\hat{g}_m(xe^{i\theta_0})^f = g(\log x + i\theta_0 + i2\pi + i2\pi m)$$

FINE GIRO

E VEDO $\hat{g}_m(xe^{i\theta_0})^f \neq \hat{g}_m(xe^{i\theta_0})^i$

MA $\quad \hat{g}_m(xe^{i\theta_0})^f = \hat{g}_{m+1}(xe^{i\theta_0})^i$

QUINDI VEDO CHE I FOGLI SONO COLLEGATI COME I log E SONO ∞.

DOPO CHE FACCIO UN GIRO TROVO IL FOGLIO $m+1$

MA ALLORA POSSO DIRE CHE z^α È UNA FUNZIONE POLIDROMA, POICHÈ

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

SPECIFICAZIONE m LA TROVO

$$z^\alpha\Big|_m = e^{\alpha \log z|_m} = e^{\alpha(\log|z| + i\theta + i2\pi m)}$$

$$= \underbrace{e^{\alpha \log|z|}}_{= |z|^\alpha} e^{i\alpha\theta} e^{i\alpha 2\pi m}$$

SE SCELGO $0 \le \theta < 2\pi$ E CALCOLO LA DISCONTINUITÀ SOPRA E SOTTO AL TAGLIO TROVO

$$z^\alpha\Big|_m^+ = |z|^\alpha e^{i\alpha 2\pi m}$$

$$z^\alpha\Big|_m^- = |z|^\alpha e^{i\alpha 2\pi} e^{i\alpha 2\pi m} = |z|^\alpha e^{i\alpha(m+1)2\pi} = z^\alpha\Big|_m^+ e^{i\alpha 2\pi}$$

MA ORA LA DISCONTINUITÀ NON È PIÙ ADDITIVA

$$z^\alpha\Big|_m^- - z^\alpha\Big|_m^+ = z^\alpha\Big|_m^+ \left(1 - e^{i2\pi\alpha}\right)$$

NOTA ORA LA DISCONTINUITÀ È MOLTIPLICATIVA
IN GENERALE CON UN α GENERICO È UNA FUNZIONE POLIDROMA CHE HA LE STESSE CARATTERISTICHE DEL log (P.TI DI DIRAMAZIONE $0, \infty$ E ORDINE ∞)

PERÒ IN GENERALE IL COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE DIPENDE DA COS'È α

→ COSA PRENDO DOPO CHE FACCIO UN GIRO

$\alpha \in \mathbb{C}$ $\qquad \alpha = \operatorname{Re}\alpha + i \operatorname{Im}\alpha$

QUELLO CHE PRENDO DOPO UN GIRO $\qquad e^{i\alpha 2\pi} = e^{i2\pi \operatorname{Re}\alpha} \underbrace{e^{-2\pi \operatorname{Im}\alpha}}_{\neq 0}$

OSS IL PRIMO FATTORE È QUELLO CHE VUOLE (EVENTUALMENTE 1), MA IL SECONDO NON È MAI $=1$, SE α GENERICO E QUINDI LA PRIMA COSA CHE SI VEDE È CHE SE α È GENERICO HO POLIDROMIA DI ORDINE ∞; SE LA VOLESSI FINITA, IL 2° TERMINE DEVE DIVENTARE 1 O SE LA VOLESSI NON POLIDROMA DOVREI AVERE $e^{i2\pi\alpha} = 1$.

MA SE $\alpha \in \mathbb{R}$ QUELLO CHE PRENDO È UNA FASE $e^{i2\pi \operatorname{Re}\alpha} \neq 1$ (IN GENERALE)

f_0 ANALITICA OVUNQUE CON UN POLO AL PIÙ IN 0 SE $m<0$

SE $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha = m \rightarrow e^{i2\pi m} = 1 \Rightarrow z^\alpha$ NON È POLIDROMA

È INTERESSANTE VEDERE SE $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{p}{q}$

GUARDO $f_0(z) = |z|^{\frac{p}{q}} e^{i\frac{p}{q}\theta}$ (USANDO $z^\alpha\big|_m = |z|^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{i2\pi m\alpha}$)

$$f_1(z) = |z|^{\frac{p}{q}} e^{i\frac{p}{q}\theta} e^{i\frac{p}{q}2\pi} \neq f_0$$

$$f_2(z) = |z|^{\frac{p}{q}} e^{i\frac{p}{q}\theta} e^{i2\frac{p}{q}2\pi} \neq f_0 \neq f_1$$

DOPO $q-1$ GIRI

$$f_{q-1}(z) = |z|^{p/q} e^{i p/q\,\theta} e^{i\frac{p}{q}(q-1)2\pi} \neq f_i(z) \quad i < q-1$$

$$f_q(z) = |z|^{p/q} e^{i p/q\,\theta} \underbrace{e^{i\frac{p}{q}q2\pi}}_{e^{ip2\pi} = 1} = f_0$$

QUINDI SE $\alpha \in \mathbb{Q}$ LA POLIDROMIA È DI ORDINE FINITO, DOPO q GIRI TORNO A f_0

$\Rightarrow$ POLIDROMIA DI ORDINE $q-1$ (DEVO FARE q GIRI)

NOTA COME $\sqrt{z}$ POLIDROMIA DI ORDINE 1

QUINDI LA SOP. DI RIEMANN HA FINITI FOGLI, È FATTA COME QUELLA DEL log, HA CHE AD UN CERTO PUNTO SI FERMA E TORNA AD f_0

SPIRALE

ESEMPI

- 1^i LA VEDO COME UNA FUNZIONE POLIDROMA CALCOLATA IN UN CERTO PUNTO

$$f(z)\Big|_m = z^i\Big|_m \qquad \text{CALCOLATA IN } z = 1$$

$$\Big|^m = e^{i\log z} = e^{i(\log|z| + i\theta + i2\pi m)}$$

$$= \underbrace{e^{i\log|z|}}_{\text{ARGOMENTO}} \underbrace{e^{-\theta}\, e^{-2\pi m}}_{\text{MODULO}} \quad (1)$$

ARGOMENTO: IN CUI C'È $\log|z|$, CHE È BEN DEFINITO

MODULO: CHE DIPENDE DAL FOGLIO IN CUI MI METTO

COSÌ

$$1^i\Big|_m = e^{-2\pi m} \qquad 1^i\Big|_0 = 1$$

QUINDI 1^i FA 1 (COME MI ASPETTO) SOLO SUL FOGLIO 0, ALTRIMENTI NO

POSSO VEDERE ANCHE (USANDO (1))

$$i^i\Big|_m = e^{-\pi/2}\, e^{-2\pi m}$$

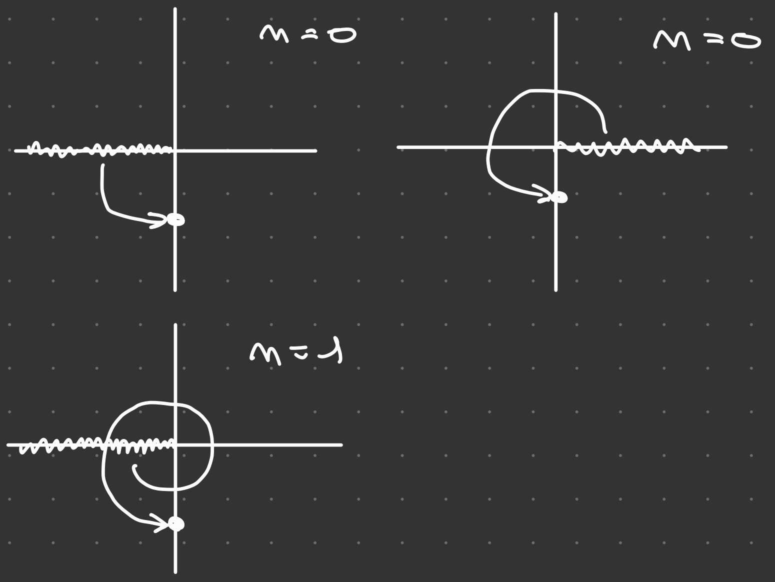
$$(-i)^{i}\Big|_{m} = e^{-\frac{3}{2}\pi}\, e^{-2\pi m}$$

MA SE SCEGLIESSI $-\pi \le \theta < \pi$

$$(-i)^{i}\Big|_{m} = e^{\pi/2}\, e^{-2\pi m}$$

OSS QUINDI APPARENTEMENTE SEMBRA CHE $(-i)^{i}$ PUÒ DARE RISULTATI DIVERSI, MA NON È COSÌ. LA DIFFERENZA VIENE DAL FATTO CHE CAMBIO L'INTERVALLO DI θ E DI CONSEGUENZA LA POSIZIONE DEL TAGLIO.

QUELLO CHE SO PER CERTO È CHE C'È UN PUNTO $(-i)^{i}$ CHE FA $\exp(-3/2\,\pi)$ (PUNTO INTESO COME PUNTO FISICO SULLA SUP. DI RIEMANN) E SO ANCHE CHE PER DIVERSE DETERMINAZIONI LA SUPERFICIE DI RIEMANN NON CAMBIA.
QUINDI PER QUALSIASI DETERMINAZIONE POSSO AVERE $(-i)^{i} = \exp(-3/2\,\pi)$, MA QUELLO CHE CAMBIA È L'ORDINE DEL FOGLIO IN CUI STO.



$$\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} = e^{\alpha \log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)} = e^{\alpha \log\left|\frac{z-a}{z-b}\right|} e^{i\alpha \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)} e^{i2\pi m\alpha}$$

$$= \left|\frac{z-a}{z-b}\right|^{\alpha} e^{i\alpha(\varphi_a-\varphi_b)} e^{i2\pi m\alpha}$$

AVRÒ PUNTI DI DIRAMAZIONE IN $z=a \vee z=b$

SE $\alpha \in \mathbb{C}$ DI ORDINE ∞

SE $\alpha = \frac{p}{q}$ DI ORDINE $q-1$

SE GIRO (IN VERSO POSITIVO) ATTORNO AD a

$z_b \longrightarrow z_b e^{i2\pi}$ QUINDI $f_m \longrightarrow f_{m+1}$

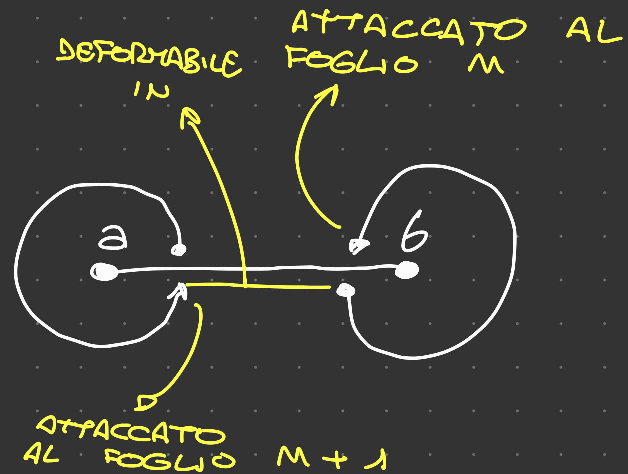
(VEDI CONTI ES SOPRA E CON $\alpha \in \mathbb{Z}$)

MA SE GIRO ATTORNO b

$z_b \longrightarrow z_b e^{i2\pi}$ QUINDI $f_m \longrightarrow f_{m-1}$

QUINDI GIRANDO a SALGO DI 1 FOGLIO E GIRANDO b SCENDO

(SEMPRE GIRANDO IN SENSO POSITIVO)



- $[(z-a)(z-b)]^\alpha = |(z-a)(z-b)|^\alpha e^{i(\varphi_a - \varphi_b)\alpha} e^{i2\pi m\alpha}$

PUNTI DI DIRAMAZIONE IN $z=a$, $z=b$, $z=\infty$

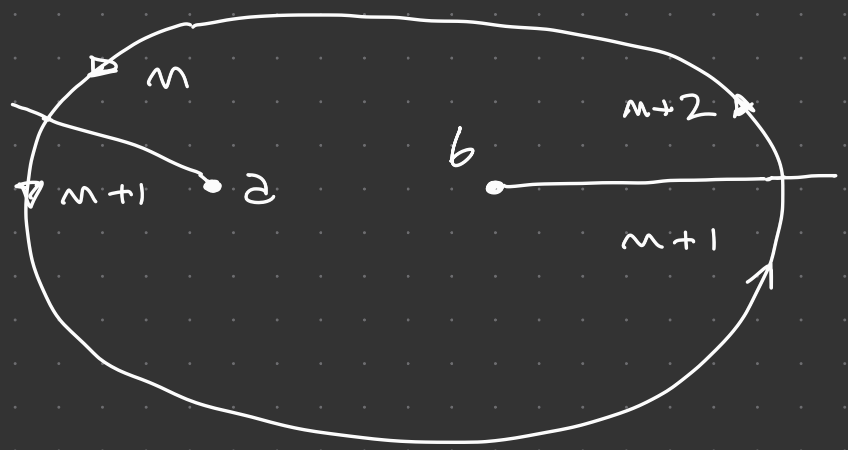
$$z_a \to z_a e^{i2\pi}, \quad f_m \to f_{m+1}$$

$$z_b \to z_b e^{i2\pi}, \quad f_m \to f_{m+1}$$

E QUANDO GIRO ATTORNO AD ∞

$$\varphi_a + \varphi_b \to \varphi_a + \varphi_b + 4\pi, \quad f_m \to f_{m+2}$$

IL TAGLIO LO DEVO DISEGNARE PASSANTE PER a, b, ∞



MA POSSO OSSERVARE COMPORTAMENTI DIVERSI SE $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = p/q$ SE q PARI O DISPARI

$$\boxed{\alpha = 1/3}$$

$$\left[(z-a)(z-b)\right]^{1/3}\Big|_{n} = |\ldots|^{1/3}\, e^{i(\varphi_a+\varphi_b)\frac{1}{3}}\, e^{i\frac{2\pi}{3}n}$$

VEDO

$$f_0 = |\ldots|^{1/3}\, e^{i(\varphi_a+\varphi_b)\frac{1}{3}}$$

GIRO ATTORNO AD a

$$f_0 \xrightarrow{a} f_1 = f_0\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$f_1 \xrightarrow{a} f_2 = f_1\, e^{i\frac{2\pi}{3}} = f_0\, e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$f_2 \xrightarrow{a} f_3 = f_2\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

MA SE GIRO ATTORNO L'∞

$$f_0 \rightarrow f_2 = f_0\, e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$f_2 \rightarrow f_4 = f_0\, e^{i\frac{8\pi}{3}} = f_0\, \underbrace{e^{i\frac{6\pi}{3}}}_{1}\, e^{i\frac{2\pi}{3}} \equiv f_1$$

$$f_1 \rightarrow f_1\, e^{i\frac{4\pi}{3}} = f_0\, e^{i\frac{6\pi}{3}} \equiv f_0$$

QUINDI QUANDO q DISPARI GIRANDO ATTORNO ∞ PERCORRO DI NUOVO TUTTI I FOGLI, MA SOLTANTO IN UN ORDINE DIVERSO.

MA SE $\boxed{\alpha = 1/4}$ (q PARI)

$$\left[(z-a)(z-b)\right]^{1/4}\Big|_n = |\ldots|^{1/4}\, e^{i(\varphi_a+\varphi_b)\frac{1}{4}}\, e^{i\frac{2\pi}{4}n}$$

VEDO $f_0 = |\ldots|^{1/4}\, e^{i(\varphi_a+\varphi_b)\frac{1}{4}}$

GIRO ATTORNO AD a

$$f_0 \xrightarrow{a} f_1 = f_0\, e^{i\frac{2\pi}{4}} = i f_0$$

$$f_1 \xrightarrow{a} f_2 = f_1\, e^{i\frac{2\pi}{4}} = f_0\, e^{i\frac{4\pi}{4}} = -f_0$$

$$f_2 \xrightarrow{a} f_3 = f_2\, e^{i\frac{2\pi}{4}} = -i f_0$$

$$f_3 \xrightarrow{a} f_4 = f_0\, e^{i\frac{8\pi}{4}} = f_0$$

MA SE GIRO ATTORNO L'∞

$$f_0 \to f_2 = f_0\, e^{i\frac{4\pi}{4}} = -f_0$$

$$f_2 \to f_4 = f_0\, e^{i\frac{8\pi}{4}} = f_0$$

$$f_1 \to f_1\, e^{i\frac{4\pi}{4}} = f_3 = -f_1$$

$$f_3 \to f_1$$

OSS QUINDI $f_2 \to f_4 = f_0$ ALLORA LA POLIDROMIA È DI ORDINE SOLO 2.

SE VEDO I FOGLI PARI $f_0 \to f_2 \to f_0$ QUINDI TORNO AL PUNTO DI PARTENZA, MA SENZA VEDERE I FOGLI DISPARI.

ANALOGAMENTE I FOGLI DISPARI $f_1 \to f_3 \to f_1$

QUINDI: q DISPARI, ∞ È DI ORDINE $q-1$
q PARI, ∞ È DI ORDINE $q/2 - 1$

E POSSO VEDERE CHE $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ ALL'∞ NON È POLIDROMA

$$\arg(z-a)(z-b) \longrightarrow \arg(z-a)(z-b) + 4\pi$$

QUINDI $e^{i4\pi\frac{1}{2}} = e^{i2\pi} = 1$

NOTA QUINDI LA POLIDROMIA ALL'INFINITO PUÒ ESSERE DI ORDINE DIVERSO O COMUNQUE I FOGLI SONO ATTACCATI IN MODO DIVERSI

- VEDI NEL FILE DI ESERCIZI QUELLI SULLE FUNZIONI POLIDROME E STUDI DI FUNZIONI POLIDROME.

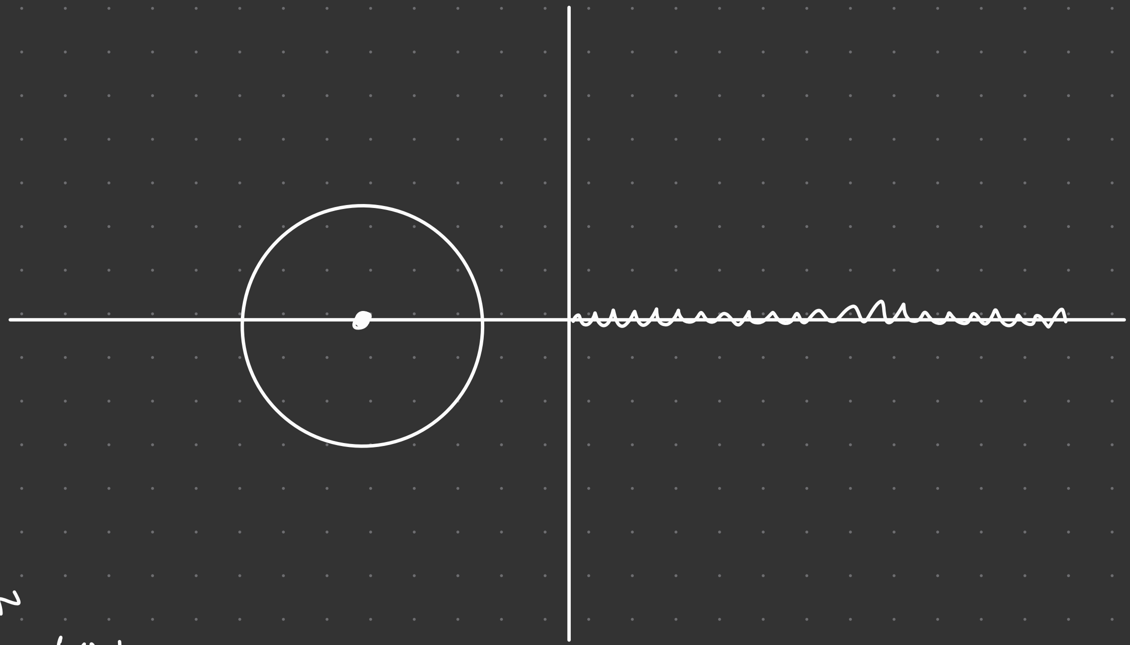
INTEGRALI DI FUNZIONI POLIDROME

VEDIAMO ALCUNI CASI "PARTICOLARI" DI INTEGRALI DI FUNZIONI POLIDROME.

INTEGRALI SU CAMMINI CHIUSI CON FUNZIONI POLIDROME

MI CALCOLO $$I = \oint_\gamma \frac{\cos \pi z}{\log z - i\pi}$$ CON $\gamma : |z+1| = 1/2$

SE NON È SPECIFICATO PERÒ DEVO VERIFICARE QUANTO FACCIA L'INTEGRALE SU CIASCUN FOGLIO ESSENDO LA FUNZIONE INTEGRANDA POLIDROMA.



MI CONVIENE METTERE IL TAGLIO DOVE NON MI DA PROBLEMI, OVVERO, NON TAGLIA LA CURVA PERCHÉ SE NO AVREI UN PEZZO DI INTEGRALE SU UN FOGLIO E UN ALTRO SU QUELLO SUCCESSIVO. (NON POTREI USARE IL TH DI CAUCHY)

SCELGO $0 < \theta \leq 2\pi$, VEDO IL DENOMINATORE:

$$g(z)\Big|_m = \log z\Big|_m - i\pi = \log|z| + i\theta + i2\pi m - i\pi$$
$$= \log|z| + i(\theta - \pi) + i2\pi m$$

VEDO CHE

$$g(z)\Big|_{M} = 0 \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta - \pi + 2\pi M = 0 \Rightarrow M = 0, \ \theta = \pi \end{cases}$$

QUINDI $I = 0 \quad \forall m \neq 0$ ⟶ POICHÈ NON HO POLI SE NON SONO SU QUEL FOGLIO

PERÒ PER VEDERE CHE TIPO DI SINGOLARITÀ HO DEVO SVILUPPARE $g(z) = \log z - i\pi$ E USO LA DEF DI SERIE DI TAYLOR

SVILUPPO IN $z = -1 \Rightarrow |z| = 1 \quad \theta = \pi$

MA NELLA SERIE DI TAYLOR SO CHE IL PRIMO TERMINE È LA FUNZIONE CALCOLATA NEL PUNTO E I TERMINI SUCCESSIVI SONO LE DERIVATE (ANALITICHE) E IL PROBLEMA DEL PEZZO DI g NON ANALITICO È SOLO IL PEZZO IN CUI COMPARE IL log CALCOLATO IN UN PUNTO, CHE È IL PEZZO COSTANTE, PERÒ QUI SONO SISTEMATO VEDENDO CHE $g(z)$ IN $z = -1$ È NULLA.

QUINDI

$$g(z) = \log(z) - i\pi = 0 + \frac{1}{z}\Big|_{-1}(z+1) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{z^2}\right)_{-1}(z+1)^2 + \dots$$

$$= -(z+1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \dots$$

$$= -(z+1)\left(1 + \frac{1}{2}(z+1) + \dots\right)$$

$$= -(z+1)\,\tilde{g}(z)$$

POICHÈ $g(z)$ HA UNO ZERO SEMPLICE

QUINDI VEDO CHE IN $z=-1$ HO UNO <u>POLO SEMPLICE</u>

ALLORA DEVO CALCOLARE

$$I = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{\cos \pi z}{g(z)}\right)_{-1}$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to -1} \cancel{(z+1)} \frac{\cos \pi z}{-\cancel{(z+1)}\,\tilde{g}(z)} = 2\pi i \,\frac{-1}{-1} = 2\pi i$$

POSSO ANCHE VEDERE IL CASO GENERALE.
VOGLIO SVILUPPARE UNA COSA DEL TIPO

$$\frac{1}{\log z - \alpha} = \frac{1}{\log z - \log \beta} = \frac{1}{\log\left(\frac{z}{\beta}\right)} = \frac{1}{\log\left(1 + \frac{z}{\beta} - 1\right)}$$

LECITO DIRE $\alpha = \log \beta$

α NUMERO

$$\sim \frac{1}{\frac{z}{\beta} - 1} = \frac{\beta}{z - \beta}$$

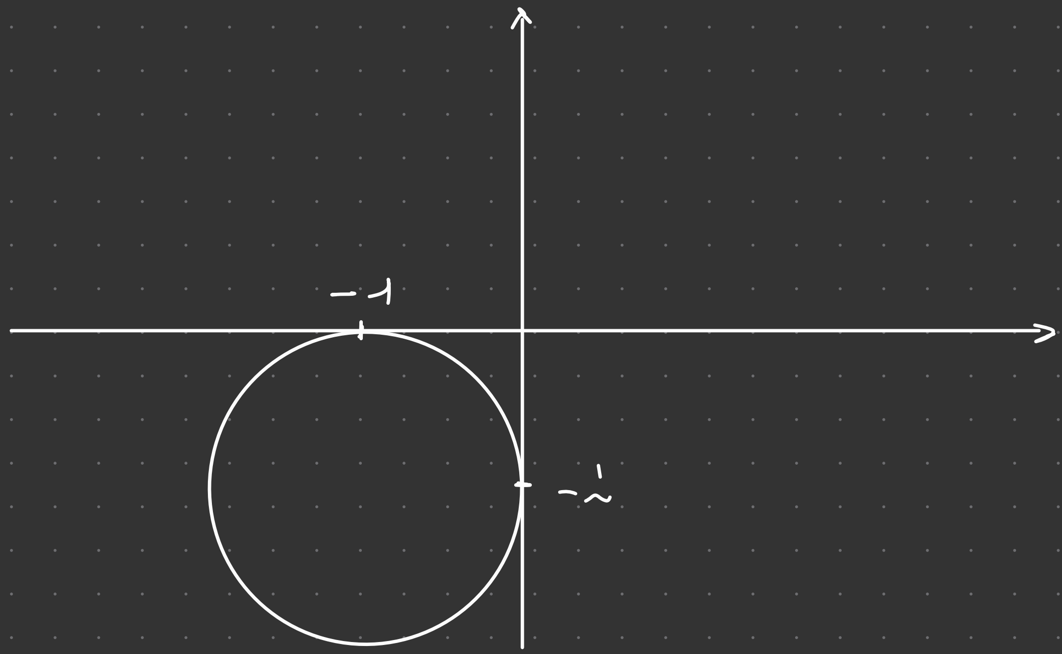
QUANDO FACCIO IL RESIDUO DEVO SEMPRE CALCOLARE COSE DEL TIPO:

$$\frac{z - z_0}{\log z - \log z_0} = \frac{z - z_0}{z - z_0} \cdot z_0 = z_0 \qquad (1)$$

ESEMPIO POSSO PROVARE A CALCOLARE

$$I = \oint_c f(z)\,dz \quad , \quad f(z) = \frac{3\cos\pi z^5}{(\log z)^2 + \frac{9\pi^2}{25}}$$

CON C CERCHIO



SCELGO $0 < \theta \le 2\pi$

$$f(z) = \frac{3\cos(\pi z^5)}{\underbrace{\left(\log z\big|_m + i\frac{3\pi}{5}\right)}_{g_1}\underbrace{\left(\log z\big|_m - i\frac{3\pi}{5}\right)}_{g_2}}$$

$$g_1(z)\Big|_m = \log|z| + i\left(\theta + \frac{3\pi}{5}\right) + i2\pi m$$

$$g_2(z)\Big|_m = \log|z| + i\left(\theta - \frac{3\pi}{5}\right) + i2\pi m$$

ANCHE QUA DEVO TROVARE UNA CONDIZIONE AFFINCHÉ $g = 0$

$g_1 = 0 \longrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{5} - 2\pi m$

NON POSSO $m=0$ POICHÈ SE NO SAREI FUORI $[0, 2\pi)$

PRENDENDO $m = -1 \Rightarrow \theta = \frac{7}{5}\pi$

$g_2 = 0 \longrightarrow \theta = \frac{3\pi}{5} - 2\pi m$

POSSO $m = 0 \Rightarrow \theta = \frac{3}{5}\pi$

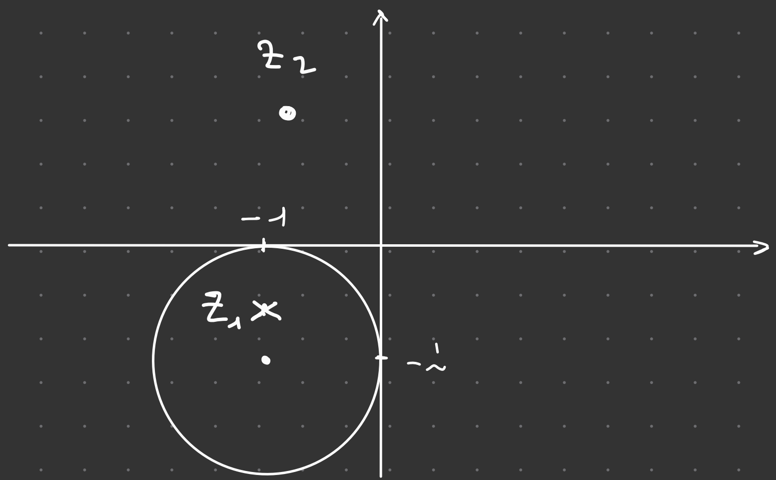
ENTRAMBI SE $|z| = 1$

QUINDI HO TROVATO DEI POLI IN

$m = -1$ IN $\theta = \frac{7}{5}\pi$ $|z| = 1$ $\Rightarrow z_1$

E $m = 0$ IN $\theta = \frac{3}{5}\pi$ $|z| = 1$ $\Rightarrow z_2$

MA VEDO



ALLORA

$I = 0 \qquad n \neq -1$ → POICHÈ NON HO SINGOLARITÀ IN $\mathbb{C}$

$$I = 2\pi i \lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{3 \cos \pi z^5}{\left(\log z + i\frac{3\pi}{5}\right)\left(\log z - i\frac{3\pi}{5}\right)}$$

LUI MI DA LO ZERO

TERMINI FINITI

CALCOLO I TERMINI FINITI

$$z_1 = e^{i\frac{7}{5}\pi}$$

CALCOLO $\qquad z^5 = e^{i7\pi} = -1$

$$\cos(\pi z^5) = \cos(-\pi) = -1$$

$$\log z \Big|_{-1} - i\frac{3\pi}{5} = i\frac{7}{5}\pi - i2\pi - i\frac{3\pi}{5} = i\frac{4}{5}\pi - i\frac{10}{5}\pi = -\frac{6}{5}\pi i$$

QUINDI AVRÒ

$$I = 2\pi i \frac{-3}{-\frac{6}{5}\pi i} \lim_{z \to z_1} \frac{(z - z_1)}{\log z\Big|_{-1} + i\frac{3\pi}{5}}$$

PERÒ POSSO RICORDARE (1) ANCHE SE AL DEN NON HO $\log - \log z_1$ POICHÈ POSSO NOTARE CHE:

PERÒ QUANDO SCRIVO $\log(1+z) \sim z$ IMPLICITAMENTE SONO SUL FOGLIO 0 POICHÈ STO USANDO LA CONTINUAZIONE ANALITICA DI UNA FUNZIONE REALE $\log(1+x) \sim x$

NEL LIMITE HO IL log SU $m=-1$ CHE DIFFERISCE DALLO SVILUPPO SU $m=0$ SOLO CON UN TERMINE COSTANTE

$$\log z\Big|_{-1} + i\frac{3\pi}{5} = \log z\Big|_{0} - 2\pi i + i\frac{3\pi}{5} = \log z\Big|_{0} - i\frac{7\pi}{5}$$

$$I = 2\pi i \frac{-3}{-\frac{6}{5}\pi i} \lim_{z \to z_1} \underbrace{\frac{(z-z_1)}{\log z\Big|_0 - \log z_1}}_{= z_1}$$

DA (1)

$$\Rightarrow I = 5\, e^{i\frac{7\pi}{5}}$$

INTEGRALI DI FUNZIONI POLIDROME

CONOSCENDO $f(z) = z^{\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{C}$ POSSIAMO CALCOLARE COSE

COME $I(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha} R(x)\, dx$ CON $R(x)$ FUNZIONE RAZIONALE

MA IN GENERE POSSO CALCOLARE INTEGRALI SU $\mathbb{R}$ USANDO $f : \mathbb{C}$

CALCOLIAMO PRIMA

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} dx \, \frac{x^{\alpha - 1}}{1 + x}$$

IN MEZZO A 0 E ∞ NON HO PROBLEMI E DEVO CONTROLLARE $\mathrm{Re}\,\alpha$ POICHÈ

$$x^{\alpha} = x^{\mathrm{Re}\,\alpha} + x^{i\,\mathrm{Im}\,\alpha}$$

CUI NON DA PROBLEMI

MA SO $\exists\, I(\alpha)$ SE NON DIVERGE TROPPO VELOCEMENTE IN 0 E NON $\to 0$ IN ∞ TROPPO LENTAMENTE, CHE SI TRADUCE IN CONDIZIONI SULL'ESPONENTE:

$x^{\alpha-1} \leftarrow 0$: $\mathrm{Re}(\alpha - 1) > -1 \longrightarrow \mathrm{Re}(\alpha) > 0$

$x^{\alpha-2} \leftarrow \infty$: $\mathrm{Re}(\alpha - 2) < -1 \longrightarrow \mathrm{Re}(\alpha) < 1$

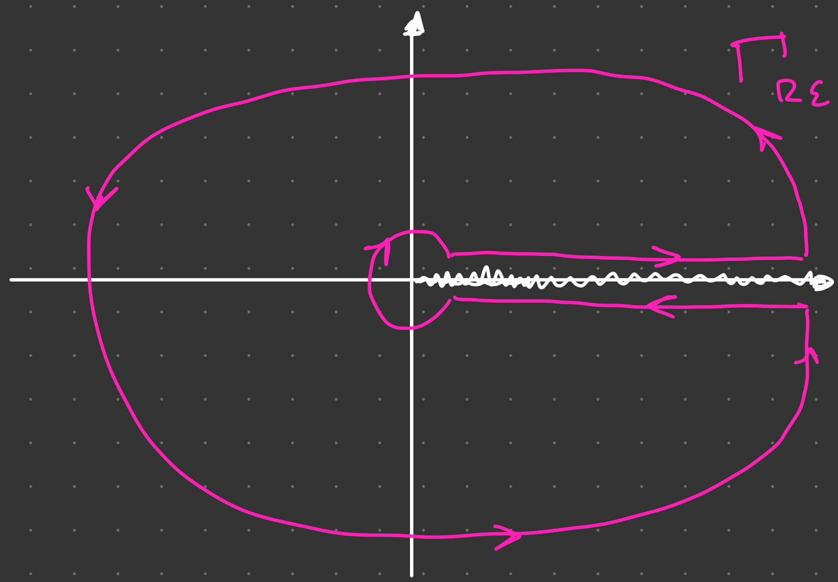
QUINDI $\exists\, I(\alpha)$ SE $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$

IL TRUCCO PER CALCOLARE $I(\alpha)$ È QUELLO DI SFRUTTARE UN INTEGRALE AUSILIARIO

$$J(\alpha) = \oint_\Gamma \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\, dz \qquad , \quad \Gamma \text{ CURVA CHIUSA SU } \mathbb{C}$$

SI VEDE CHE LA FUNZIONE INTEGRANDA È POLIDROMA CON PUNTI DI DIRAMAZIONE IN 0, ∞

TAGLIAMO SU $\mathbb{R}_+$ $\Rightarrow$ $\underline{|\, 0 < \theta < 2\pi \,|}$



SCELGO Γ:

CERCHIO DI RAGGIO ε INTORNO L'ORIGINE, DUE SEMIRETTE SOPRA E SOTTO $\mathbb{R}_+$ E UNA CURVA CHE CHIUDE DI RAGGIO R

$$\Gamma = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \Gamma_{R\varepsilon}$$

COSÌ Γ COPRE TUTTO $\mathbb{C}$ LASCIANDO FUORI IL TAGLIO ED ESSENDO CHIUSA E SCELTA PERCORRENDOLA IN VERSO POSITIVO POSSO CALCOLARE $\oint_\Gamma$ CON I RESIDUI

IN QUESTO CASO UNICO POLO IN $z = -1$

ASSUMO DI LAVORARE SUL FOGLIO $m = 0$

PERCHÈ COSÌ INTEGRANDO $[0, \infty)$ HO $f(z) = f(x)$

$$J(\alpha) = 2\pi i \left(\operatorname{Res} f(z) \right)_{z=-1} = 2\pi i \lim_{z \to -1} z^{\alpha - 1}$$

$$= 2\pi i \, |-1|^{\alpha-1} e^{i\pi(\alpha-1)} = -2\pi i \, e^{i\pi\alpha}$$

MA POTREI CALCOLARE $J(\alpha)$ COME SOMMA DEGLI INTEGRALI SU TUTTI I PEZZETTI DI Γ (CERCHI E RETTE)

$$J(\alpha) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \left[\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_\varepsilon^R f_+(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz - \int_\varepsilon^R f_-(x)\,dx \right]$$

SOPRA AL TAGLIO

LEMMA DI JORDAN (O TH DI DARBOUX)

MA LE CONDIZIONI SU $\exists\, I(\alpha)$, OVVERO, $f(z)$ IN 0 DIVERGE PIÙ LENTAMENTE DI QUANTO SI ACCORCI IL PERCORSO DI INTEGRAZIONE E CHE ALL'∞ VADA A 0 PIÙ VELOCEMENTE DI QUANTO SI ALLUNGHI IL PERCORSO DI INTEGRAZIONE, CI ASSICURANO CHE IL PRIMO E IL TERZO TERMINE SI CANCELLINO

QUINDI
$$J(\alpha) = \int_0^\infty dx\,\left(f_+(x) - f_-(x)\right) = \int_0^\infty dx\, f_+(x)\left(1 - e^{i2\pi\alpha}\right)$$

$$f_- = f_+ e^{i2\pi\alpha}$$

TRA $0,\infty$ $f(x) = f_+(x)$

$$\Rightarrow J(\alpha) = \left(1 - e^{i2\pi\alpha}\right)\int_0^\infty dx\, f(x)$$

$$\Rightarrow J(\alpha) = \left(1 - e^{i2\pi\alpha}\right) I(\alpha)$$

OSS QUINDI POSSO CALCOLARE $J(\alpha)$ CON I RESIDUI, OPPURE POSSO SCOMPORLO E TROVARE LA CONNESSIONE CON $I(\alpha)$.

UGUAGLIANDO I RISULTATI a $J(\alpha)$ TROVO

$$I(\alpha) = \frac{-2\pi i\, e^{i\pi\alpha}}{1 - e^{i2\pi\alpha}} = \frac{2\pi i}{e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

NOTA QUESTO $I(\alpha)$ PERÒ È UN CASO PARTICOLARE.

VEDIAMO IL CASO GENERALE:

$$I(\alpha) = \int_0^\infty x^\alpha R(x)\, dx \quad , \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

SUPPONGO

$$R(x) \underset{x \to 0}{\sim} A x^k$$

$$R(x) \underset{x \to \infty}{\sim} B x^l$$

ALLORA $\exists\, I(\alpha)$ SE $\begin{array}{l} Re(\alpha + k) > -1 \\ Re(\alpha + l) < -1 \end{array} \Rightarrow -1-k < Re\,\alpha < -1-l$

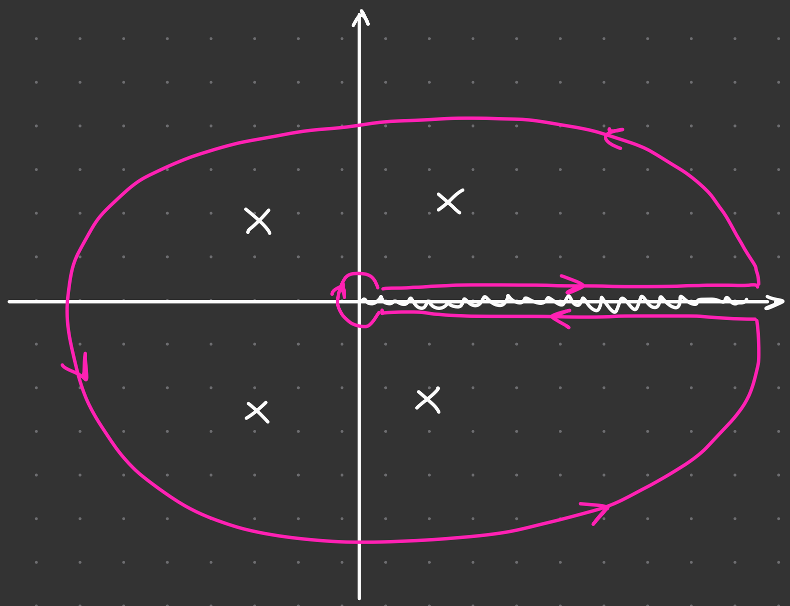
HO ANCORA UNA FUNZIONE INTEGRANDA POLIDROMA (DOVUTA A z^α)

SCELGO $0 < \theta \leq 2\pi$ E TAGLIO SU $\mathbb{R}^+$

OSS È FONDAMENTALE CHE IL TAGLIO SIA APPENA SOTTO IL CAMMINO DI INTEGRAZIONE

DEFINISCO

$$J(\alpha) = \oint_\Gamma z^\alpha R(z)\, dz$$



MA POSSO CALCOLARLO COME:

$$J(\alpha) = 2\pi i \sum_{\text{FINITO}} \text{Res}\left(z^{\alpha} R(z)\right)$$

$$J(\alpha) = \cancel{\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz} + \int_0^\infty f_+(z)\,dz + \cancel{\int_{C_R} f(z)\,dz} + \int_\infty^0 f_-(z)\,dz$$

PER LE CONDIZIONI VANNO VIA

QUINDI

$$J(\alpha) = \int_0^\infty \left(f_+(z) - \overset{= f_+ e^{i2\pi\alpha}}{f_-(z)}\right) dz = \left(1 - e^{i2\pi\alpha}\right)\int_0^\infty f_+(x)\,dx$$

$$= \left(1 - e^{i2\pi\alpha}\right) I(\alpha)$$

E CONFRONTANDO TROVO

$$I(\alpha) = \frac{2\pi i \sum \text{Res}\left(f(z)\right)}{1 - e^{i2\pi\alpha}}$$

(SOPRA E SOTTO PER $-e^{i\pi\alpha}$)

$$\Rightarrow I(\alpha) = \frac{-\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{-i\pi\alpha} \sum_{\text{FINITO}} \operatorname{Res}\left(f(z)\right)$$

$$= \frac{-\pi e^{-i\pi\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{\text{FINITO}} \operatorname{Res}\left(z^{\alpha} R(z)\right)$$

ORA GUARDIAMO UNA COSA DEL TIPO

$$I(\alpha) = \int_a^b \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^\alpha Q(x)\,dx \quad , \quad a,b \in \mathbb{R} \quad b>a \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$Q(x)$ FUNZIONE RAZIONALE
SENZA POLI IN (a,b)

$\exists \alpha$ tc $\exists I(\alpha)$

SUPPONGO
$$\begin{cases} Q(x) \underset{x\to a}{\sim} A(x-a)^k \\ Q(x) \underset{x\to b}{\sim} B(x-b)^\ell \end{cases}$$

AFFINCHÈ I NON DIVERGA
$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re}\alpha + k &> -1 \\ -\operatorname{Re}\alpha + \ell &> -1 \end{aligned}\right\} \; -1-k < \operatorname{Re}\alpha < 1+\ell$$

POSSO USARE ANCORA UN' INTEGRALE AUSILIARIO SU $\mathbb{C}$

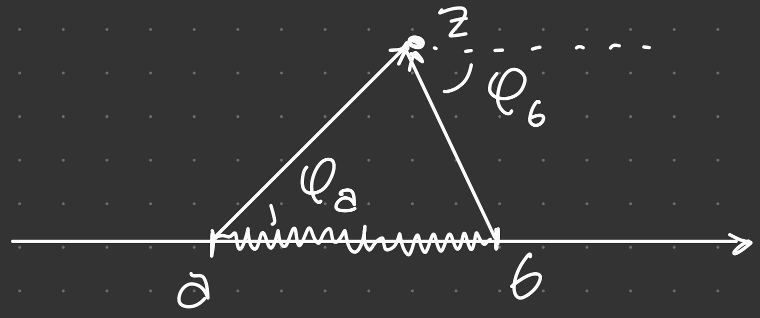
$$J(\alpha) = \oint_\Gamma dz \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^\alpha Q(z) = \oint_\Gamma dz\, f(z)$$

MA ORA HO UNA FUNZIONE POLIDROMA (POICHÈ POTENZA) E HA P.TI DI DIRAMAZIONE IN $z=a$ $\forall$ $z=b$

QUINDI DOVRÒ FARE UN TAGLIO E MI CONVIENE METTERLO SU $\mathbb{R}$ TRA a E b

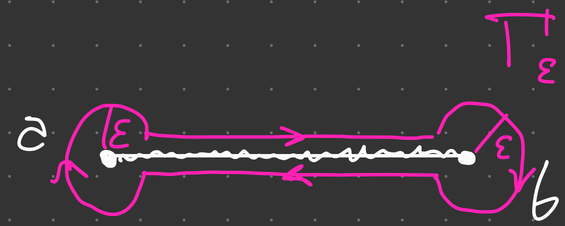
SCELGO L'ARGOMENTO DI UN PUNTO GENERICO Z CHE SE DIVENTA UN NUMERO REALE TRA a E b È TC

$$f(z) \to f(x)$$



QUINDI SCELGO $\varphi_a = \varphi_b = 0$ SE $z \in [a,b]$

LA CURVA Γ_ε CIRCONDA a CON RAGGIO ε PASSA SOPRA IL TAGLIO E GIRA ATTORNO b CON ε E POI VA A CHIUDERSI.



E DEFINISCO

$$\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \Gamma_\varepsilon$$

ESSENDO Γ CHIUSA POSSO CALCOLARE $J(\alpha)$ CON I Res

NOTA Γ_ε LA PERCORRO IN SENSO ORARIO QUINDI L'INTERNO DI Γ' È QUELLO CHE STA "FUORI" Γ'_ε

$$J(\alpha) = 2\pi i \sum_{\text{TUTTI}} \text{Res}\, f(z)$$

$\hookrightarrow$ FINITO $\cup \{\infty\}$

MA POSSO ANCHE CALCOLARE

$$J(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{C_{\varepsilon_2}} f(z)\,dz + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f_+(z)\,dz + \int_{C_{\varepsilon_1}} f(z)\,dz + \int_{1-\varepsilon}^{\varepsilon} f_-(z)\,dz \right]$$

LE CONDIZIONI tc $\exists I(\alpha)$ MI DICONO CHE 1° E 3° INTEGRALE SONO NULLI E FACENDO IL LIMITE TROVO

$$J(\alpha) = \int_0^1 dz \left(f_+(z) - f_-(z) \right) = \int_0^1 dz\, f(z) \left(1 - e^{i 2\pi \alpha}\right)$$

$f(z)$ " $\quad$ $f_+(z)\, e^{i2\pi\alpha}$ "

$$\Rightarrow J(\alpha) = \left(1 - e^{i2\pi\alpha}\right) I(\alpha)$$

QUINDI

$$I(\alpha) = \frac{2\pi i \sum_{\text{TUTTI}} \operatorname{Res}\left(\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} Q(z) \right)}{1 - e^{i2\pi\alpha}}$$

$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\alpha-1}$ $\quad \mathrm{Re}\,\alpha > 0$

$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)^{-\alpha}$ $\quad \mathrm{Re}\,\alpha < 1$

VEDIAMONE UN CASO PARTICOLARE

$$I(\alpha) = \int_0^1 dx \, \frac{1}{x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}$$

CHE $\exists$ SE $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$

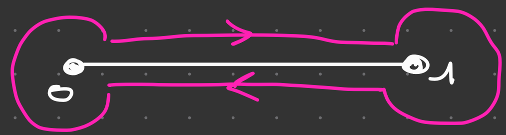
SE $x \in [0,1]$ LA BASE DELLA POTENZA È > 0

COSÌ HO

$$J(\alpha) = \oint_{\Gamma} \frac{1}{z}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} dz = \oint_{\Gamma} f(z)\, dz$$

E SO CHE $f(z)$ È POLIDROMA

$$= \left(1 - e^{i 2\pi\alpha}\right) I(\alpha)$$



(CURVA IN SENSO ORARIO)

QUINDI L'INTERNO È TUTTO $\mathbb{C}$ (ANCHE ∞)

E SO ANCHE

$$J(\alpha) = 2\pi i \sum_{\substack{\text{interni} \\ \text{a } \Gamma}} \mathrm{Res}\left(\underbrace{\frac{z^{\alpha}}{(1-z)^{\alpha}}\,\frac{1}{z}}_{f(z)}\right)$$

MA VEDO CHE $f(z)$ È REGOLARE OVUNQUE TRANNE IN $z=0$ CHE PERÒ INSIEME A $z=1$ È GIÀ UN PUNTO DI DIRAMAZIONE.

L'UNICO PUNTO PROBLEMATICO CHE HO È $z=\infty$

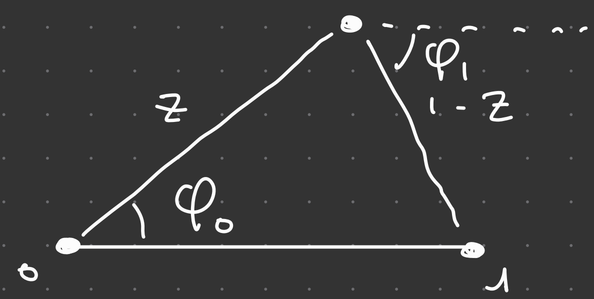
QUINDI

$$J(\alpha) = 2\pi i \, \mathrm{Res}\left(\frac{z^\alpha}{(1-z)^\alpha}\frac{1}{z}\right)\Big|_\infty$$

PER CALCOLARE IL $\mathrm{Res}\big|_\infty$ SFRUTTO LA FORMULA $\mathrm{Res}\big|_\infty = -a_{-1}$
DOVE a_{-1} È IL COEFFICIENTE DELLO SVILUPPO
IN $z=\infty$ CHE TROVO CON IL TERMINE $1/z$.
PERÒ HO $f(z) = g(z)\frac{1}{z}$ QUINDI IL TERMINE a_{-1} NON
È ALTRO CHE $g(z)\big|_\infty$.
DEVO STARE ATTENTO PERÒ CHE $g(z)$ È POLIDROMA.

DEVO VALUTARE φ_0 E φ_1 QUANDO $z=\infty$
CHE PERÒ DIPENDONO RISPETTO A CHE DIREZIONE MANDO
$z \to \infty$, MA NEL PEZZO POLIDROMO DI $f(z)$ NON
CAMBIA LA DIFFERENZA $\varphi_0 - \varphi_1$

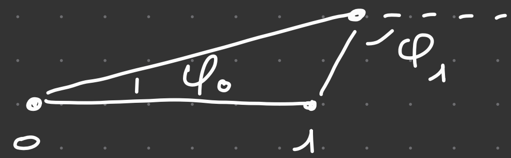
$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^\alpha = \left|\frac{z}{1-z}\right|^\alpha e^{i(\varphi_0-\varphi_1)\alpha}\, e^{i2\pi m\alpha}$$



IO VOGLIO CHE SE $z \in \mathbb{R}$ $f(z) \to f(x)$ QUINDI DEVO LAVORARE PER FORZA SUL FOGLIO $n=0$

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} = \left|\frac{z}{1-z}\right|^{\alpha} e^{i(\varphi_0 - \varphi_1)\alpha}$$

DEVO GUARDARE $\varphi_0 - \varphi_1$ SE MANDO $z \to \infty$, MA OSSERVO CHE



$z \to \infty$ SU $\mathbb{R}_+$

$\varphi_0 = 0 \qquad \varphi_1 = -\pi \qquad \varphi_0 - \varphi_1 = \pi$

$z \to \infty$ SU $\mathbb{R}_-$

$\varphi_0 = \pi \qquad \varphi_1 = 0 \qquad \varphi_0 - \varphi_1 = \pi$

$z \to \infty$ SU $\operatorname{Im} z > 0$

$\varphi_0 = \pi/2 \qquad \varphi_1 = -\pi/2 \qquad \varphi_0 - \varphi_1 = \pi$

$\Rightarrow \varphi_0 - \varphi_1 = \pi$ SEMPRE

È QUELLO CHE MI ASPETTAVO POICHÈ

$$f(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} \underset{z\to\infty}{\sim} (-1)^{\alpha}$$

PERÒ L'UNICA COSA CHE NON POTEVO CAPIRE ERA SE $\pm\pi$

POSSO CALCOLARE

$$\lim_{z\to\infty}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha} = \lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \varphi_0-\varphi_1=\pi}} \left|\frac{z}{1-z}\right|^{\alpha} e^{i(\varphi_0-\varphi_1)\alpha} = e^{i\pi\alpha}$$

MI SERVE POICHÉ DEVO CALCOLARE IL Res IN ∞
E SO CHE

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=\infty} = -a_{-1} \qquad \text{CON} \qquad \underbrace{f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{a_{-1}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)}_{\text{SVILUPPO}}$$

MA AVENDO

$$f(z) = \underbrace{\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha}}_{\text{REGOLARE IN } z=\infty} \frac{1}{z}$$

REGOLARE IN $z=\infty$ E IL SUO $\lim_{z\to\infty}$ MI DA ESATTAMENTE IL COEFFICIENTE CHE MI SERVE (CAMBIATO DI SEGNO)

QUINDI

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{\infty} = -e^{i\pi\alpha}$$

così

$$J(\alpha) = 2\pi i\left(-e^{i\pi\alpha}\right) = \left(1 - e^{i2\pi\alpha}\right) I(\alpha)$$

PEZZO CHE MI ESCE SCOMPONENDO $\oint = \int + \int \dots$

$$\Rightarrow \quad I(\alpha) = \frac{2\pi i\, e^{i\pi\alpha}}{e^{i2\pi\alpha} - 1} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

E SI VEDE CHE $I(\alpha)$ SU $[0,1]$ È UGUALE ALL'INTEGRALE SU $[0,\infty)$ MA SOLO CON UN CAMBIO DI VARIABILE

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{x}\frac{x^\alpha}{(1-x)^\alpha}\,dx$$

$$\frac{x}{1-x} = y \rightsquigarrow x = \frac{y}{1+y} \qquad dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$$

così

$$I(\alpha) = \int_0^\infty dy \left(\frac{1+y}{y}\right) y^\alpha \frac{dy}{(1+y)^2} = \int_0^\infty dy\, \frac{y^{\alpha-1}}{1+y}$$

OSS CHE È LO STESSO INTEGRALE CALCOLATO A P. 70.

QUESTO NON È UN CASO. QUALUNQUE INTEGRALE DEL TIPO

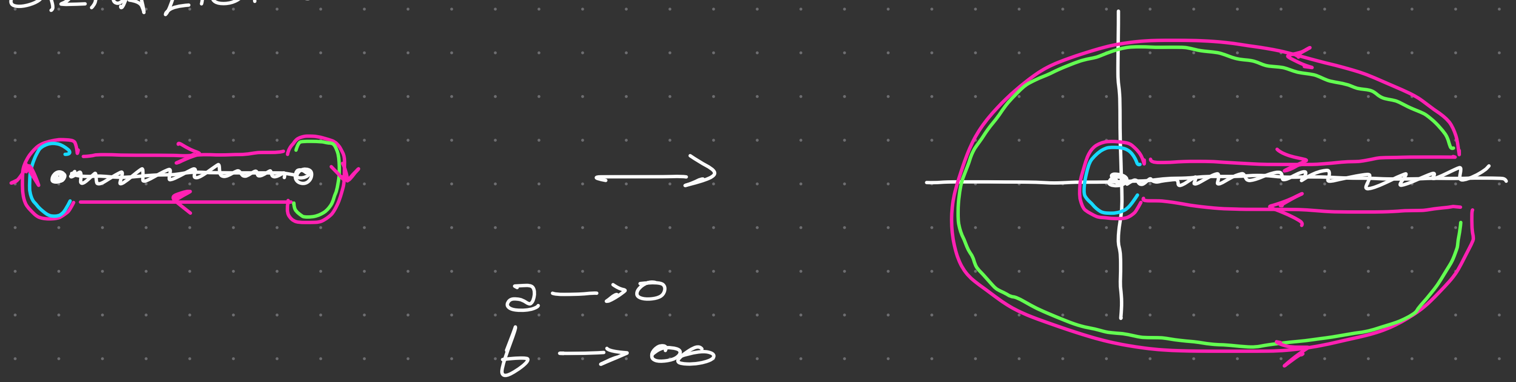
$$\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\alpha} Q(x)$$

PUÒ ESSERE PORTATO AD ESSERE UNA COSA DEL TIPO

$$\int_0^{\infty} y^{\alpha} R(y)\, dy$$

FACENDO IL CAMBIO DI VARIABILE $y = \frac{x-a}{b-x}$

È DA NOTARE CHE QUESTA TRASFORMAZIONE VALE ANCHE SE SONO IN $\mathbb{C}$, MA LA COSA IMPORTANTE È CHE LA CURVA CHIUSA VALGA LA TRASFORMAZIONE



PROVO A FARE IL CAMBIO NEL CASO GENERALE

$$w = \frac{z-a}{b-z} \quad , \quad z = \frac{a+bw}{1+w} \qquad dz = \frac{b-a}{(1+w)^2}\, dw$$

$$\Rightarrow \oint_\Gamma w^\alpha \underbrace{\underbrace{Q\left(\frac{a+bw}{1+w}\right)}_{\text{FUNZIONE RAZIONALE } R'(w)} \frac{b-a}{(1+w)^2}}_{\text{FUNZIONE RAZIONALE}} dw$$

- VEDI "ESEMPIO INTEGRALE 1"

ORA VORREI ESTENDERE IL METODO PER CALCOLARE I SU $\mathbb{R}$, USANDO UNA J IN $\mathbb{C}$ ANCHE IN CASI DEL TIPO:

$$I = \int_a^b R(x)\, dx$$

VEDO QUANDO $\exists I$: $R(x)$ NON DEVE AVERE POLI IN $[a,b]$ (NON DEVE DIVERGERE NELL'INTERVALLO)

E
$$\begin{cases} R(x) \underset{x\to a}{\sim} A(x-a)^k & k > -1 \\ R(x) \underset{x\to b}{\sim} B(x-b)^l & l > -1 \end{cases}$$

ASSICURANO CHE $R(x)$ NON DIVERGE AGLI ESTREMI a E b

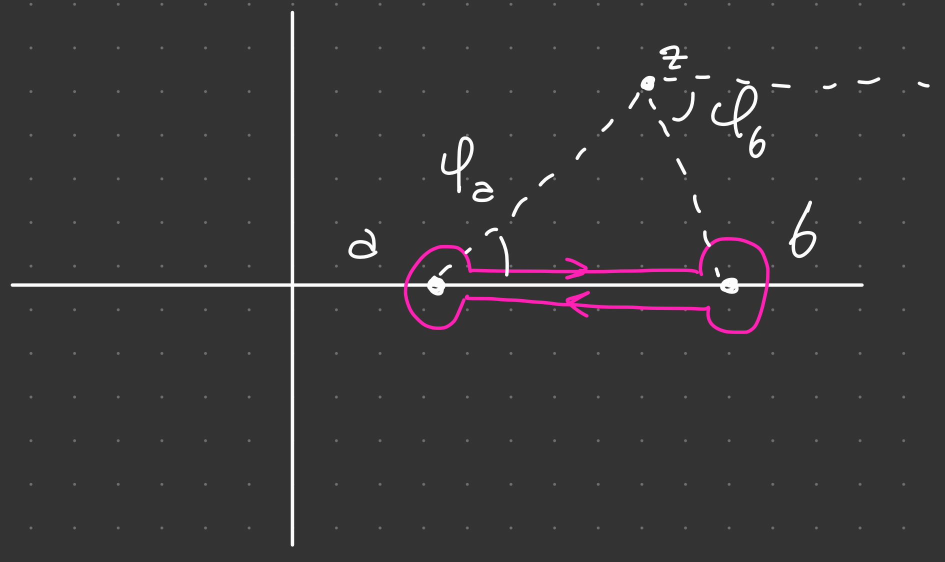
SFRUTTIAMO L'INTEGRALE

$$J = \oint_\Gamma \underbrace{R(x) \log\left(\frac{z-a}{b-z}\right)}_{f(z)} dz$$

$f(z)$ STO INTEGRANDO UNA FUNZIONE POLIDROMA

DALLA TEORIA SO AVERE PUNTI DI DIRAMAZIONE IN a, b E NON MI MODIFICA LE CONDIZIONI DI ESISTENZA POICHÈ LE POTENZE VINCONO SUL log

POSSO TAGLIARE NEL SEGMENTO SU $[a, b]$



$$\varphi_a = \arg(z-a)$$
$$\varphi_b = \arg(b-z)$$

E LI SCELGO t.c.

$\varphi_a - \varphi_b = 0$ SE $z \in [a,b]_+$

$$\Longrightarrow \varphi_a = \varphi_b = 0$$

IL PEZZO POLIDROMO POSSO SCRIVERLO

$$\log \frac{z-a}{b-z} = \log\left|\frac{z-a}{b-z}\right| + i(\varphi_a - \varphi_b) + i2\pi m$$

E SE MI METTO CON $z \in [a, b]$

$$\Longrightarrow \log \frac{z-a}{b-z} = \log\left|\frac{z-a}{b-z}\right| + i2\pi m$$

NOTA IL FATTO CHE IL log LO FACCIO COMPARIRE IO E NON C'È NELL' INTEGRALE DI PARTENZA MI DICE CHE QUESTO DEVE VALERE SU UN FOGLIO QUALSIASI

MI CALCOLO

$$J = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}\left(R(z)\log\left(\frac{z-a}{b-z}\right)\right)\Big|_{z_i}$$

DOVE z_i SONO LE SINGOLARITÀ (POLI) IN TUTTO $\mathbb{C}$

(L'INTERNO DELLA CURVA È QUELLO CHE C'È FUORI POICHÈ CURVA IN SENSO ORARIO)

MA POTREI ANCHE CALCOLARLO COME

$$J = \int_a^b f_+(z)\,dz + \int_{C_b} f(z)\,dz + \int_b^a dz\, f_-(z) + \int_{C_a} f(z)\,dz$$

LE CONDIZIONI DI J DI I MI FANNO ANDARE VIA IL 2° E 4° INTEGRALE. IN PIÙ IN $f(z)$ LA $R(z)$ NON RISENTE DEL CALCOLO SOPRA / SOTTO IL TAGLIO NON ESSENDO POLIDROMA, QUINDI CALCOLO

SOPRA / SOTTO IL TAGLIO SOLO IL $\log$

QUINDI

$$J = \int_a^b dz\, R(z) \Big(\underbrace{\log\left|\frac{z-a}{b-z}\right| + i2\pi m}_{\text{SOPRA}} \underbrace{- \log\left|\frac{z-a}{b-z}\right| - i2\pi(m+1)}_{\text{SOTTO}} \Big)$$

MA STO INTEGRANDO TRA a E b LA $R(z)$ MOLTIPLICATA PER LA DISCONTINUITÀ DEL $\log$ CHE SO ESSERE ADDITIVA $(= -2\pi i)$

$$J = -2\pi i\, I$$

NON COMPARE m, QUINDI VALE SU QUALSIASI FOGLIO

QUINDI TROVO

$$I = -\sum_{\text{TUTTI}} \operatorname{Res}\left(R(z) \log\frac{z-a}{b-z} \right)$$

LO STESSO SI TRUCCO SI PUÒ USARE PER!

$$\int_0^\infty R(x)\,dx = -\sum_{\text{TUTTI}} \operatorname{Res}\left(R(z)\log z\right)$$

E IN QUESTO CASO GUARDO UN CASO NOTEVOLE

$$I = \int_0^\infty R(x)\log x\,dx$$

IN 0 DIVERGE MENO DI $1/x$ E
ALL'∞ CONVERGE PIÙ DI $1/x$
(LE CONDIZIONI DI ∃ I SONO SEMPRE LORO)

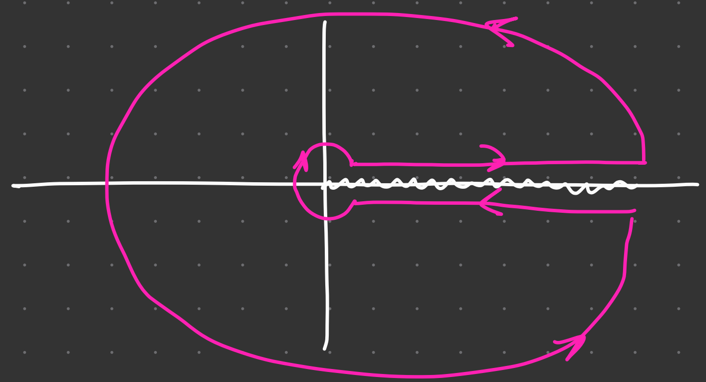
LO ESTENDO A $\mathbb{C}$, PERÒ AVENDO $\log$ GIÀ IN I DOVREI CONSIDERARE UN $\log z$ t.c.

$$\log z \underset{\substack{z\to x\\ x\in\mathbb{R}_+}}{\sim} \log x$$

OVVERO MI DEVO METTERE SUL FOGLIO $n=0$

E DEFINISCO

$$J = \oint_\Gamma R(z)\log^2 z\,dz$$



DIMOSTRO CHE EFFETTIVAMENTE È GIUSTO METTERE $\log^2$.

SO COME CALCOLARE J

$$J = 2\pi i \sum_{\text{TUTTI}} \operatorname{Res}\left(R(z)\log^2 z\right) \qquad (1)$$

E ANCHE COME SOMMA DI $\int$ MA CON DUE PEZZI CHE SI TOLGONO CON LE CONDIZIONI DI $\exists I$

IL FATTO CHE CI SIA UN $\log$ IN PIÙ NON CAMBIA NULLA

$$J = \int_0^\infty R(z)\left(\log^2 z\big|_0^+ - \log^2 z\big|_0^-\right) dz$$

SO $\log z\big|_m = \log|z| + i\theta + i2\pi m$

$\log z\big|_0 = \log|z| + i\theta$ SOPRA IL TAGLIO $\theta = 0$ E SOTTO $\theta = 2\pi$

VEDO $f_+(z) = (\log|z|)^2 R(z) \to \log^2 x\, R(x)$ E $f_-(z) = (\log|z| + 2\pi i)^2 R(z)$

$$= \int_0^\infty R(z)\left(\log^2|z| - (\log|z| + i2\pi)^2\right) dz$$

$$= \int_0^\infty R(z)\left(-4i\pi \log|z| - 4\pi^2\right) dz$$

QUINDI IN QUESTO CASO NEL CALCOLO DI J TROVO 2 CONTRIBUTI E IL PRIMO RIPRODUCE I

$$J = -4\pi i I - 4\pi^2 \int_0^\infty R(z)\,dz \qquad (2)$$

CONFRONTO I DUE RISULTATI DI J (1) (2)

PERÒ SO CHE VOLENDO POSSO CALCOLARE $\int_0^\infty R(z)dz$, CHE COMPARE IN (2), CON UNA FORMULA CHE USI DEI Res

$$(2) \Rightarrow J = -4\pi i I + 4\pi^2 \sum \mathrm{Res}\left(R(z)\log z\right)$$

ORA POSSO TROVARE

$$4\pi i I = -2\pi i \sum \mathrm{Res}\left(R(z)\log^2 z\right) - 4\pi^2 \sum \mathrm{Res}\left(R(z)\log z\right)$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} \sum \mathrm{Res}\left(R(z)\log^2 z\right) + \pi i \sum \mathrm{Res}\left(R(z)\log z\right)$$

RIESCO A RENDERLA PIÙ COMPATTA

$$I = -\frac{1}{2} \sum_{\text{TUTTI}} \mathrm{Res}\left(R(z)\left(\log z - i\pi\right)^2\right)$$

NOTA I TERMINI CON $\log^2$ E IL DOPPIO PRODOTTO MI DANNO I E BISOGNA NOTARE CHE METTENDO COME CONDIZIONI SU $R(z)$

$$z = 0 \qquad R(z) \sim z^k \qquad k > -1$$
$$z = \infty \qquad R(z) \sim z^l \qquad l < -1$$

MI ASSICURANO CHE $\text{Res}(R(z))_\infty = 0$, QUINDI MI ASSICURA CHE $\sum_{\text{FINITO}} \text{Res}(R(z)) = 0$ CHE È ESATTAMENTE IL 3° PEZZO CHE ESCE DAL QUADRATO IN I

OSS SE $I = \int_0^\infty \log^m x \, R(x) \, dx$

AVRÒ $J = \oint \log^{m+1}(z) R(z) \, dz$

E TROVO UNA FORMULA PER J IN CUI COMPAIONO, RES DI $\log^m$ + PEZZI DATI DA TUTTI I TERMINI CON POTENZE DI $\log$ $< m$ FINO A $\log^1$

NOTA POSSO FARE LO STESSO CAMBIO DI VARIABILE DELLE POTENZE

● VEDI "ESERCIZIO INTEGRALE arctg CON E SENZA log"

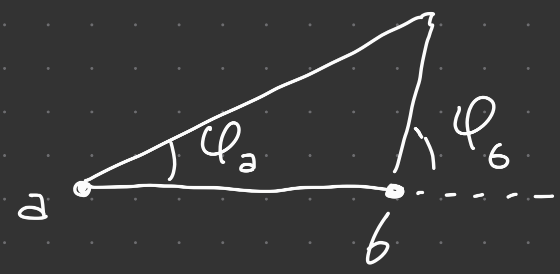
OSS MA IL TH DEI RESIDUI VALE PER FUNZIONI POLIDROME?

SICURAMENTE VALE IL TH DI CAUCHY $\Rightarrow \oint = \sum \text{Res}$

PERÒ ABBIAMO ANCHE NOTATO CHE $\sum\limits_{\mathbb{C}} \text{Res} \neq 0$ SE HO UNA FUNZIONE POLIDROMA. QUELLO CHE SALTA NEL TH È CHE NON ABBIAMO SOLO SINGOLARITÀ ISOLATE.

VEDIAMO UN ESEMPIO

$$f(z) = \frac{1}{z}\sqrt{(z-a)(z-b)}$$



HO 2 FOGLI (2 SPECIFICAZIONI DI $f(z)$)

$$f_0 = \frac{1}{z}\sqrt{(z-a)(z-b)}\Big|_0 = \frac{1}{z}|z-a|^{1/2}|z-b|^{1/2}e^{i(\varphi_a+\varphi_b)\frac{1}{2}}$$

$$f_1 = \frac{1}{z}\sqrt{(z-a)(z-b)}\Big|_1 = -f_0$$

$\underline{n=0}$

$$f \underset{z\to 0}{\sim} \frac{1}{z}\sqrt{ab}$$

$$\mathrm{Res}\, f_0\Big|_0 = \sqrt{ab}$$

$$f \underset{z\to\infty}{\sim} \sqrt{1-\frac{a}{z}}\sqrt{1-\frac{b}{z}} = \left(1-\frac{a}{z}\right)^{1/2}\left(1-\frac{b}{z}\right)^{1/2}$$

$$\sim \left(1-\frac{1}{2}\frac{a}{z}\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{b}{z}\right) \sim 1-\frac{1}{2}(a+b)\frac{1}{z}$$

$$\mathrm{Res}\, f_0\Big|_\infty = \frac{1}{2}(a+b)$$

E QUINDI $\displaystyle\sum_{z\in\overline{\mathbb{C}}} \mathrm{Res} \neq 0$

PERÒ FARÀ ZERO LA $\sum \mathrm{Res}$ SU TUTTA LA SUPERFICIE DI RIEMANN

SUL SINGOLO FOGLIO MAI $\sum \mathrm{Res} = 0$
MA CAPITA (A VOLTE) CHE $\sum \mathrm{Res} = 0$ SU SUP. RIEMANN

VEDI L'ESEMPIO

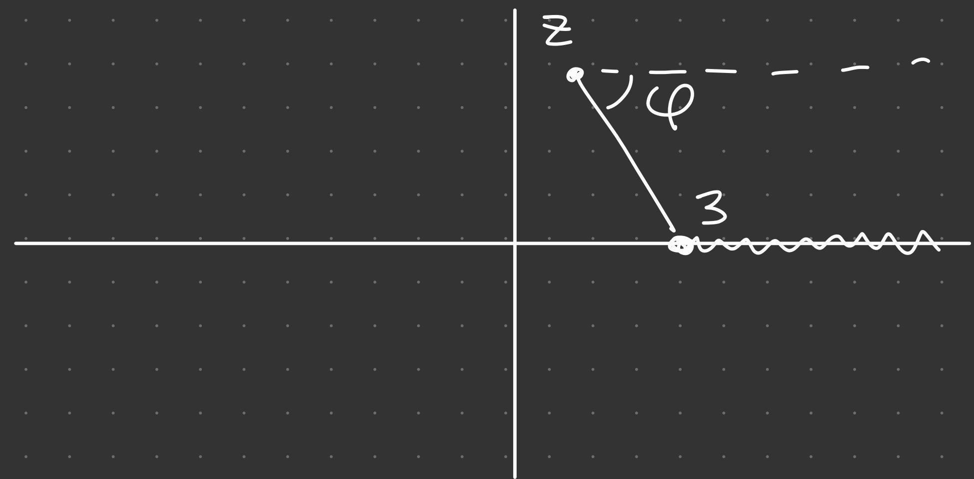
$$f(z) = \frac{1}{7 - z + 4\sqrt{3-z}} = \frac{7 - z - 4\sqrt{3-z}}{(z+1)^2}$$

AVRÒ

$$f_0 = \frac{7 - z - 4\sqrt{3-z}\Big|_0}{(z+1)^2}$$

$$f_1 = \frac{7 - z - 4\sqrt{3-z}\Big|_1}{(z+1)^2} = \frac{7 - z + 4\sqrt{3-z}\Big|_0}{(z+1)^2}$$

$$\sqrt{3-z}\Big|_0 = |3 - z|^{1/2} e^{i\frac{\varphi}{2}}$$



SEMBRA CHE ABBIAMO UN POLO DOPPIO IN $z = -1$

MA

$$f = \frac{7 + 1 - 4(\pm 2)}{(z+1)^2} \begin{cases} + \;\; 0 & \text{FOGLIO 0} \\ - \;\; 16 & \text{FOGLIO 1} \end{cases}$$

QUINDI POSSO DIRE:

$0, \infty$ HO PUNTI DI DIRAMAZIONE E SU CIASCUN FOGLIO HO UNA SINGOLA SINGOLARITÀ

f_0 È REGOLARE IN $z=-1$ E f_1 HA UN POLO DOPPIO

$$\operatorname{Res} f_1 \Big|_{-1} = \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz}\left(z - z - 4\sqrt{3-z} \right) = \lim_{z\to -1}\left(-1 - \frac{4}{2}\frac{-1}{\sqrt{3-z}} \right) = -2$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{\text{SUP} \\ \text{RIEMANN}}} \operatorname{Res} \neq 0$$

PERÒ NEL CASO DI UNA FUNZIONE CON UN SOLO TAGLIO CON POLIDROMIA DI ORDINE FINITO, ALLORA

$$\sum_{\substack{\text{TUTTI} \\ \text{FOGLI}}} \operatorname{Res} f(z) + \left(\sum_{\substack{\text{PUNTI} \\ \text{DI DIRAM}}} \oint f(z)\, dz \right) \frac{1}{2\pi i} = 0$$

SE HO POLIDROMIA DI ORDINE m PER FASE $\oint$ DEVO GIRARE INTORNO AL PUNTO DI DIRAMAZIONE m VOLTE

RIPRENDO L'ESEMPIO DI PRIMA $f(z) = \frac{1}{z}\sqrt{(z-a)(z-b)}$

FACCIO

$$I = \oint_a \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{z}$$

2 GIRI

VARIABILE UNIFORMIZZANTE

POSSO FARE UN CAMBIO DI COORDINATE IN MODO DA TOGLIERE LA POLIDROMIA QUANDO GIRO ATTORNO AD UN PUNTO

LOCALMENTE

$$z - a = w^2$$

$$I = \oint_0 dw\, 2w \frac{w\sqrt{w^2+a-b}}{w^2+a} = 2\pi i \operatorname{Res}\Big|_0 = 0$$

$f(w)$ REGOLARE IN 0

STESSA COSA IN b

$$\Rightarrow \sum_{\substack{\text{TUTTI}\\ \text{I FOGLI}}} \mathrm{Res} = 0$$ COME AVEVO TROVATO

INVECE NEL CASO DI $f(z) = \dfrac{1}{7 - z - 4\sqrt{z-3}}$

$$\oint_{\substack{3\\ \text{2 GIRI}}} f(z)\,dz = \oint_0 -2w\,dw \frac{1}{w^2+4+4w} = 0$$

$\hookrightarrow$ REGOLARE IN 0

$$w^2 = 3 - z$$

MA INTORNO AD ∞

$$= \oint_\infty -2w\,dw \frac{1}{w^2+4w+4} = 2\pi i \,\mathrm{Res}\Big|_\infty = 4\pi i$$

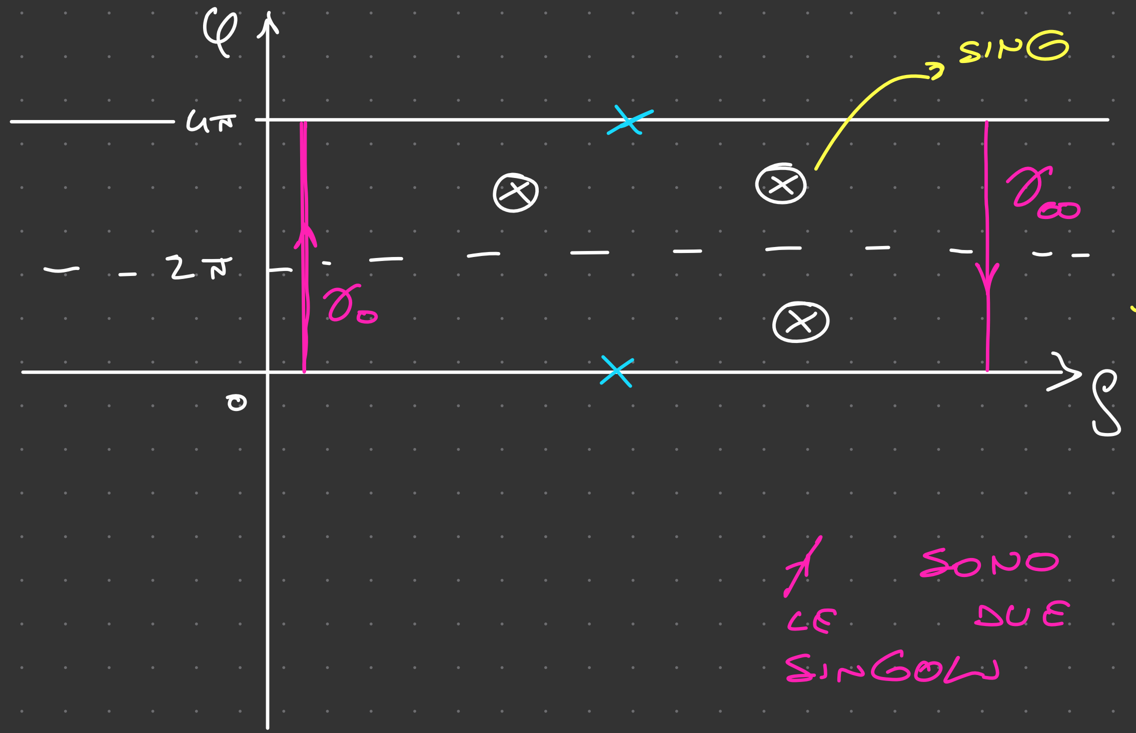
$$f(w) \underset{w\to\infty}{\sim} \frac{-2w}{w^2}$$

E QUINDI AVEVO VISTO $\sum_{\text{FOGLI}} \mathrm{Res} = -2$

$$\Rightarrow -2 + \frac{1}{2\pi i}(4\pi i) = 0$$

SI PUÒ VEDERE PERCHÈ HA SENSO L'ENUNCIATO CHE SOSTITUISCE IL TH DEI RESIDUI GUARDANDO COSA SONO CURVE CHIUSE SU UNA SUPERFICIE DI RIEMANN

POSSO RAPPRESENTARE LA SUPERFICIE DI RIEMANN CON UN PIANO (ρ, φ)



FOGLI IDENTIFICATI

PRIMO FOGLIO

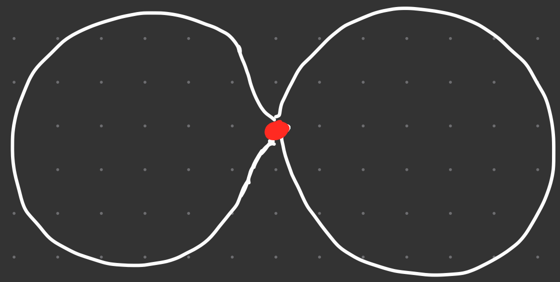
γ SONO CURVE CHIUSE POICHÈ LE DUE CURVE RETTE (QUINDI I LORO SINGOLI PUNTI) SONO IDENTIFICATE

E QUINDI HA SENSO SCRIVERE

$$\sum_{\text{FOGLI}} \text{Res} + \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{\text{P.TI DIR}} \oint f(z)\right) = 0$$

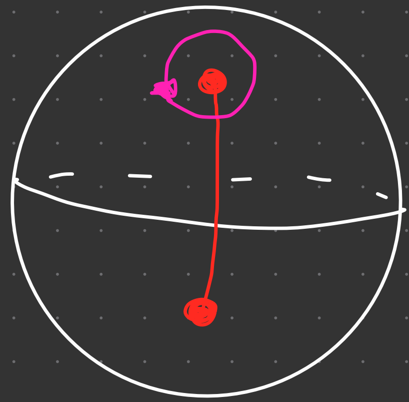
QUESTO MI DICE ANCHE PERCHÈ FUNZIONA SE HO UN SOLO TAGLIO E NON DI PIÙ

IMMAGINO UNA SUP. DI RIEMANN FATTA DALL'UNIONE DI DUE FOGLI CHE PERÒ HANNO L'∞, QUINDI SONO DUE $\overline{\mathbb{C}}$



PERÒ HO UNO SPAZIO "ELASTICO" È DA DUE $\mathbb{C}$ OTTENGO UNA SFERA SU CUI CI SONO 2 PUNTI DI DIRAMAZIONE, ATTORNO CUI CI POSSO GIRARE ATTORNO (CHE CORRISPONDE A GIRARE METÀ IN UN FOGLIO E METÀ NELL'ALTRO)

IL TAGLIO NON È SINGOLARITÀ



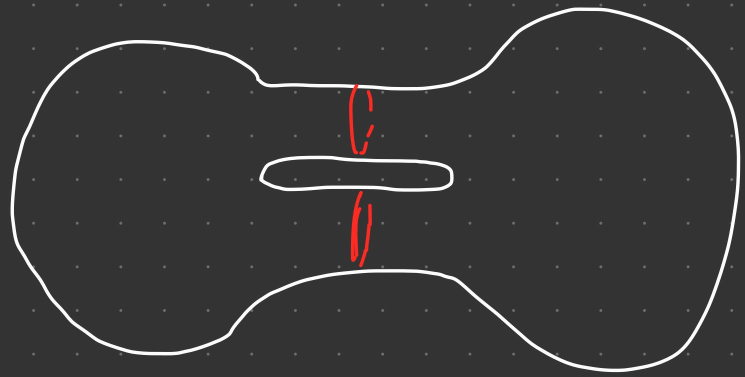
PERÒ SE HO 2 TAGLI NON OTTENGO UNA SUP. COMPLESSIVA A FORMA DI SFERA, MA UN TORO

CONVIENE VEDERE IL PIANO ANZICHÉ LA SFERA ALZANDO DEI "TUBI"

E ALLA FINE ESCE UN TORO.

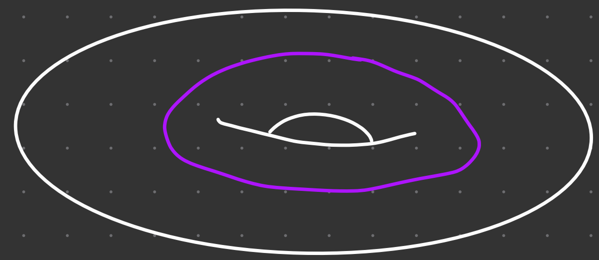
MA ORA CI SONO CERCHI NON BANALI QUALUNQUE COSA IO FACCIA.

SONO I CERCHI CHE GIRANO TUTTO IL TORO



E QUINDI DA $n \geq 2$ TAGLI NON RIESCO PIÙ A FAR VALERE

$$\sum_{\text{FOGLI}} \text{Res} + \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{\text{P.TI DIR}} \oint \right) = 0$$



IN GENERE TORO n- DIMENSIONALE