

Appunti del corso di:
Relatività Generale

Gabriele Cembalo

A.A. 2024-2025



Università degli Studi di Torino
Dipartimento di Fisica
Via Giuria, 1, Torino (TO)

Informazioni legali

Questo materiale è una rielaborazione personale del corso di **Relatività Generale**, tenuto dal **Prof N. Fornengo** presso l'**Università degli Studi di Torino**.

Il contenuto riportato non rappresenta materiale ufficiale del docente né dell'università, e può contenere interpretazioni soggettive o errori. Tutti i diritti su slide, dispense o altri materiali forniti dal docente restano riservati ai rispettivi autori e non sono inclusi in questi appunti. Questi appunti sono condivisi a solo scopo didattico e divulgativo, senza fini di lucro, e sono destinati a supportare lo studio personale degli studenti.

È distribuito con licenza **Creative Commons Attribution - Non Commercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0)**.

Puoi copiarlo, distribuirlo e modificarlo, **a patto di attribuirne la paternità e non usarlo a fini commerciali**.

Per maggiori informazioni sulla licenza:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.it>

Spacetime tells matter how to
move; matter tells spacetime
how to curve.

John Archibald Wheeler

Prefazione

In questo documento voglio raccogliere le mie note rispetto gli appunti relativi al corso di "**Relatività Generale**" svolto dal professore N. Fornengo e seguito all' *Università degli studi di Torino* nell'a.a. 2024-2025 aggiungendo eventualmente i riferimenti a vari libri (più o meno utili a seconda della volontà di approfondire). Questi appunti sono una riscrittura degli appunti presi in aula, quindi la fonte principale sono le note del professore reperibili sulla sua pagina personale, ma i libri sono fondamentali per una completa comprensione degli argomenti. Ci tengo anche a segnalare il fatto che, pur essendo ampiamente ispirati alle già citate note del professore, sono stati fondamentali gli appunti di M. Robino (forte ispirazione) reperiti sul canale Telegram. Durante il corso sono stati consigliati diversi libri (indicati in Bibliografia), cercherò di indicare i vari riferimenti bibliografici all'inizio di ogni capitolo.

I testi consigliati sono:

- S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*. In particolare per la prima parte relativa al formalismo e al calcolo tensoriale.
- S. Carroll, *Spacetime and Geometry*. Principalmente per gli aspetti geometrici.
- B. Schutz, *A First Course in General Relativity*.
- A. Einstein, *The basis of the General theory of Relativity* e *The field equations of Gravitations*". Sono più che altro una lettura interessante.

Vorrei anche segnalare il testo di Lancaster e Blundell, *General Relativity for the Gifted Amateur*, che non è un testo molto tecnico, come il suo corrispettivo per la QFT, ma può essere utile per aspetti più discorsivi e di circostanza. Tra l'altro, quando possibile, prenderò le immagini proprio da questo testo.

Il corso tratterà inizialmente di una parte di ripasso della Relatività Speciale, per passare alla Relatività Generale vera e propria. Il corso ha un

approccio molto fisico ed è propedeutico a corsi di Cosmologia successivi.

Chiaramente sono da intendere come degli appunti personali scritti in bella, eventuali sviste, errori o inesattezze sono dovute alla mia ignoranza, ma soprattutto ho scritto questi appunti in modo da "*spiegare*" a me stesso l'argomento, quindi alcune parti potrebbero sembrare troppo prolisse o troppo superficiali per alcuni. In ogni caso fa piacere se possono aiutare qualcun'altro. Spero in ogni caso di esser riuscito a scrivere un documento chiaro e ben strutturato.

Alcune volte posso non far riferimento ad un particolare testo o corso passato, in questi casi mi sto riferendo ai MIEI appunti riguardanti quell'argomento. Una mia collezione di appunti è presente nella mia pagina personale di GitHub: [gCembalo.github.io](https://github.com/gCembalo).

Qualsiasi errore/refuso può essere inviato alla mia mail personale:
gabriele.cembalo02@gmail.com.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Unità naturali e scala di Planck	1
1.2	Situazione storica	5
2	Gemme di Geometria Differenziale	11
2.1	Diverse geometrie	11
2.2	Proprietà metriche	14
2.2.1	Funzioni metriche	16
2.2.2	Esempio calcoli funzioni metriche	21
2.2.3	La curvatura	25
2.2.4	Misura operativa della curvatura di uno spazio senza andare nello spazio di immersione	26
2.2.5	Trasporto parallelo	27
3	Richiami di Relatività Speciale e spazio-tempo piatto	31
3.1	Principi fondativi	31
3.1.1	La Meccanica Classica	31
3.1.2	La Relatività Speciale e le trasformazioni di Lorentz	33
3.1.3	Prime conseguenze	37
3.2	Lo spaziotempo	38
3.2.1	Spaziotempo di Minkowski	38
3.2.2	Proprietà metriche	44
3.2.3	Il tempo, gli osservatori inerziali e le world-line	47
3.2.4	Il cono luce	53
3.2.5	Diagrammi di Minkowski	54
3.3	Calcolo tensoriale	63
3.3.1	Definizioni, quadri vettori e derivate	64
3.3.2	Proprietà metrica	69
3.3.3	Trasformazioni di Lorentz	70
3.3.4	Dinamica	72
3.3.5	Tensori	77
3.4	Elettromagnetismo	80
3.4.1	Invarianza di gauge	84

3.5	Meccanica analitica	86
3.5.1	Correnti	89
3.5.2	Esempi	102
4	Una teoria della gravità	107
4.1	La gravità	108
4.2	Principio di equivalenza tra gravitazione ed inerzia	109
4.2.1	Esperimento mentale degli ascensori	111
4.2.2	Redshift gravitazionale	118
4.3	Connessione affine	121
4.3.1	Relazione tra connessione affine e tensore metrico	128
4.4	Le geodetiche	130
4.5	Limite newtoniano	137
4.5.1	Superamento del limite newtoniano	142
4.6	Dilatazione temporale gravitazionale	143
4.6.1	Esperimento di Pound e Rebka	146
4.6.2	Il GPS	148
5	Fondamenti della Relatività Generale	155
5.1	Principio di covarianza generale	155
5.2	Tensori	158
5.2.1	Tensore metrico	160
5.2.2	Simbolo di Kronecker	166
5.2.3	Algebra tensoriale	166
5.2.4	Proprietà di oggetti simmetrici e anti-simmetrici	171
5.2.5	Trasformazione della connessione	172
5.2.6	Equazione del moto della particella in caduta libera	174
5.3	Derivata covariante	176
5.3.1	Proprietà	179
5.3.2	Derivata covariante lungo un cammino	184
5.4	Trasporto parallelo	186
5.4.1	Proprietà del trasporto parallelo	188
5.4.2	Geodetica	190
5.5	L'effetto della gravitazione	191
5.5.1	Dinamica di un punto materiale in presenza di un campo gravitazionale	192
5.5.2	Elettrodinamica in presenza di campo gravitazionale	194
5.5.3	Tensore energia impulso	196
5.5.4	Fluidodinamica relativistica in presenza di gravità	197
5.6	Analogia con l'Elettromagnetismo	201
5.6.1	Confronto	205

6	Curvatura ed equazioni di campo	207
6.1	Tensore di Riemann	207
6.1.1	Teorema di unicità	211
6.1.2	Forme contratte del tensore di Riemann	211
6.2	Trasporto parallelo su curve chiuse	212
6.2.1	Corollario dell'annullarsi del tensore di Riemann	216
6.3	Sistemi di coordinate	217
6.3.1	Le componenti del tensore metrico	218
6.4	Proprietà algebriche del tensore di Riemann	222
6.4.1	Proprietà algebriche del tensore di Ricci	224
6.4.2	Proprietà dello scalare di curvatura	225
6.4.3	Identità differenziali del tensore di Riemann	225
6.4.4	Curvatura in N dimensioni	227
6.4.5	Scalari di curvatura	231
6.4.6	Deviazione delle geodetiche	233
6.5	Equazioni di Einstein	238
6.5.1	Costruzione per inferenza dall'equazione di Poisson	239
6.5.2	Costante cosmologica	246
6.5.3	Principio variazionale	249
6.5.4	Esempio	257
6.5.5	Costante cosmologica	259
6.5.6	La scelta minimale	261
6.6	Gauge	262
6.6.1	Gauge armonico	265
7	Test classici e applicazioni della Relatività Generale	269
7.1	Soluzioni dell'equazione di Einstein	271
7.2	Mettrica statica e isotropa	272
7.3	Mettrica di Schwarzschild	278
7.4	Moto di una test particle in un campo gravitazionale statico e isotropo	281
7.4.1	Interpretazione fisica delle costanti del moto J ed E	286
7.5	Moti orbitali	287
7.5.1	Orbite aperte	288
7.5.2	Il caso del fotone	291
7.5.3	Lente gravitazionale	296
7.5.4	Orbite chiuse	300
8	Orbits, stars and Black holes	309
8.1	Singolarità e Buchi Neri	309
8.1.1	Buco nero statico e isotropo	312
8.1.2	Formazione di un buco nero	324
8.2	Orbite e loro stabilità	324
8.3	Buchi neri	335

8.3.1	Coordinate di Kruscal	338
8.3.2	Evoluzione temporale	347
8.4	Onde gravitazionali	349
8.4.1	Analogia con l'Elettromagnetismo	358
8.4.2	Soluzione formale dell'equazione non omogenea	359
8.5	Onde piane	361
8.5.1	Analogia con l'Elettromagnetismo	361
8.5.2	Onde gravitazionali	365
8.5.3	Elicità	370
8.5.4	Effetto del passaggio di un'onda piana gravitazionale	373
Appendici		380
A	Convenzioni varietà	383
A.1	Segni	384
A.2	Varietà	384
B	Dimostrazioni proprietà derivata covariante	385
B.1	Proprietà 1	385
B.2	Proprietà 2	388
C	Approfondimento tensori	391
C.1	Il piano cartesiano	391
C.2	Generalizzazione a spazi euclidei di N dimensioni	395
D	Esercizi sulla curvatura	399
Bibliografia		406

Capitolo 1

Introduzione

Vediamo in questo capitolo la convenzione che adatteremo nel corso degli appunti e quale sia la situazione della Fisica ad oggi.

1.1 Unità naturali e scala di Planck

In Fisica è molto comune utilizzare le *God givens units*, ossia, le cosiddette unità naturali. I tipi indipendenti di grandezze sono la lunghezza $[L]$, il tempo $[T]$, la massa $[M]$ e - se consideriamo anche la termodinamica e la meccanica statistica - la temperatura $[T]$. In natura esistono delle costanti dimensionali universali, quali la velocità della luce c , la costante di Planck ridotta $\hbar$, la costante gravitazionale di Newton G_N e la costante di Boltzmann k . Usualmente vengono definite come unità naturali quelle in cui si pone:

$$\hbar = c = 1 \quad (1.1.1)$$

e di conseguenza quando si modificano le quantità (in unità standard):

$$\begin{cases} \hbar = 6.66 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s} \\ c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ \hbar c \sim 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \end{cases} \implies \begin{cases} \hbar = 1 \\ c = 1 \\ \hbar c = 1. \end{cases}$$

Dire che la velocità della luce è una grandezza unitaria adimensionale implica che le unità di lunghezza e tempo sono equivalenti:

$$[L] = [T] \quad (1.1.2)$$

di conseguenza anche:¹

$$[E] = [\vec{p}] = [M] \quad (1.1.4)$$

¹Come conseguenza della relazione tra massa ed energia della Relatività Speciale:

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (1.1.3)$$

Per una forza F si ha:

$$[F] = [EL^{-1}] = [ML^{-1}] \quad (1.1.5)$$

per cui una quantità, tipo $\hbar$, che ha le dimensioni di un'azione, ovvero $[ET]$, in unità naturali è:

$$[\hbar] = [ET] = [ML] = 1 \implies [M] = [L^{-1}]. \quad (1.1.6)$$

Dalle relazioni viste tra le grandezze si ha solo una di esse realmente indipendente. Scegliendo la lunghezza come indipendente vale:

$$[L] = [T] \quad , \quad [E] = [\vec{p}] = [M] = [L^{-1}] \quad , \quad [F] = [L^{-2}]. \quad (1.1.7)$$

Ovviamente, le unità naturali sono comode fintanto che si rimane sul lato teorico, ma nella pratica a noi interessano le unità standard. In generale (non solo per le sezioni d'urto), ricordando quali siano le unità di misura di $\hbar$ e c , è possibile passare dall'espressione di una grandezza in unità naturali in una sua espressione in unità del S.I. moltiplicando opportune potenze di $\hbar$ e c . Si ha:

$$[\hbar] = ML^2T^{-1} \quad ; \quad [c] = LT^{-1}.$$

Vediamo un esempio. Prendiamo la sezione d'urto di Thomson in unità naturali e rendiamola in unità standard. Abbiamo il processo:

$$\gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^-$$

con l' e^- libero e la sezione d'urto:

$$\sigma_T = \frac{8}{3}\pi \frac{\alpha^2}{m_e^2} \quad (1.1.8)$$

che riscriviamo come:

$$\sigma_T = \frac{8}{3}\pi \frac{\alpha^2}{m_e^2} \hbar^x c^y \quad (1.1.9)$$

di cui analizzando le dimensioni:

$$\begin{aligned} L^2 &= M^{-2} (ML^2T^{-1})^x (LT^{-1})^y \\ L^2 &= M^{x-2} L^{2x+y} T^{-x-y}. \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} L : 2 = 2x + y \\ M : 0 = x - 2 \\ T : 0 = -x - y \end{cases} \implies \begin{cases} x = -y \\ x = 2 \\ y = -2. \end{cases}$$

Dunque la sezione d'urto è:

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi \frac{\alpha^2}{m_e^2} \left(\frac{\hbar}{c} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{(m_e c^2)^2} (\hbar c)^2. \quad (1.1.10)$$

Fin qui tutto bene, abbiamo trattato con le unità naturali la velocità della luce c , che ricoprirà un ruolo molto importante nella teoria che costruiremo, la costante $\hbar$ di Planck, che in realtà non ci interessa molto essendo una costante che emerge dalla Meccanica Quantistica, e non abbiamo parlato di una costante fondamentale, che come ci disse Newton a suo tempo, è legata alla descrizione della gravità, ovvero:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$$

che sarà, per l'appunto, la costante di accoppiamento della gravità, anche nella nostra descrizione generale della gravità.

Le costanti fondamentali esprimono delle scale naturali per il mondo fisico; ad esempio i moti a cui siamo abituati avvengono a $v \ll c$ e solamente quando tali velocità diventano elevatissime entrano in gioco aspetti relativistici; le scale di azioni tipiche sono generalmente $\gg \hbar$; per quanto riguarda G , si tratta di una costante che ha dimensioni fisiche, molto diversa da α , costante di struttura fine che descrive l'accoppiamento del campo elettromagnetico. Mediante G possiamo definire l'accelerazione gravitazionale g , ad esempio sulla Terra:

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9.81 \text{ ms}^{-2}$$

che si tratta di un numero non molto grande, infatti, i campi gravitazionali a cui siamo abituati sono deboli o molto deboli. La Relatività Generale permetterà la descrizione della gravità anche in regimi lontani da quello di campo debole.

Se ci mettiamo nel sistema delle unità naturali, allora possiamo vedere che dimensioni assume la costante G :

$$[G] = L^3 M^{-1} T^{-2} \xrightarrow{\text{god given units}} [G] = L^3 L L^{-2} = L^2 = T^2 = M^{-2}.$$

Questo significa che il valore della costante di Newton definisce una scala fisica fondamentale che possiamo vedere come una scala di lunghezza (di tempo o di massa) che è quella lunghezza il cui valore è fissato dal valore fisico di G e che possiamo misurare con vari tipi di esperimenti che coinvolgono l'interazione gravitazionale.

Posso definire allora la scala fisica relativa alla costante di Newton, che viene detta **massa di Planck**, introducendo la massa di Planck che in un'unità naturali:

$$M_P \equiv G^{-1/2}$$

o equivalentemente, la lunghezza o il tempo di Planck:

$$\begin{aligned} L_P &\equiv G^{1/2} \\ T_P &\equiv G^{1/2}. \end{aligned}$$

Il modo che abbiamo per ricavare i valori della scala di Planck è lo stesso seguito in (1.1.9) per scrivere la sezione d'urto in termini di unità standard. Dobbiamo fare un cosa del tipo:

$$M_P^{-1/2} = G \hbar^\alpha c^\beta.$$

Facendo ciò troviamo:

$$\begin{aligned} M_P &= \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} = 2.2 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \\ T_P &= \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2} = 5.4 \cdot 10^{-44} \text{ s} \\ L_P &= \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} = 1.6 \cdot 10^{-35} \text{ m} \end{aligned}$$

queste rappresentano una scala fisica corrispondente al fatto che ho una costante G che quantifica l'intensità dell'accoppiamento gravitazionale tra due masse.

Sapendo che vale $E = M = L^{-1} = T^{-1}$ possiamo ancora definire l'energia di Planck:

$$E_P = \left(\frac{\hbar c^5}{G} \right)^{1/2} = 1.2 \cdot 10^{19} \text{ GeV}.$$

Utilizzeremo nel seguito del corso il set di unità naturali, per comodità di notazione, e dovremo tenere a mente il fatto di avere una costante fondamentale dimensionale per la teoria della gravità, il che implica l'esistenza della scala di Planck. Questa scala vista in termini di energia è un valore molto grande (pensiamo che ad esempio l'LHC non si avvicina minimamente a questo valore), mentre se vista a scale di tempi o lunghezza si tratta invece di valori molto piccoli. Questi valori non hanno nessun effetto sulla teoria della RG, ma pongono un limite oltre il quale non ci aspettiamo di poter estendere la tale teoria.

Infatti, ci aspettiamo che le equazioni della Relatività Generale siano corrette sino alla scala fisica che corrisponde alla scala di Planck. Oltre questo limite potrebbero intervenire fenomeni quantistici legati alla gravità; il problema è che per l'estensione quantistica della gravità non si ha al momento una teoria consolidata (ci sono la teoria delle stringhe o la gravità a loop). Questi limiti sono rappresentati nella figura 1.1.

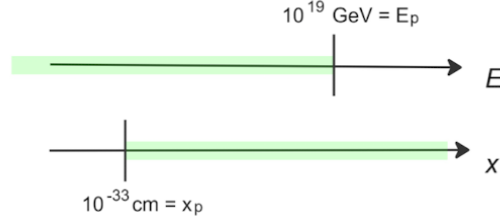


Figura 1.1: Rappresentazione scala di Planck.

Una situazione analoga si ha nel caso delle interazioni deboli. Tali interazioni sono descritte correttamente dalla teoria di Fermi, finché le energie coinvolte sono sufficientemente piccole rispetto la scala di Fermi:

$$E \ll E_F \sim 100 \text{ GeV}$$

ma quando questa condizione non risulta più essere vera, la descrizione corretta è data dal modello standard, che modifica la teoria di Fermi in una più fondamentale, che ha come limite proprio la teoria di Fermi.

La differenza tra i due regimi è che nel regime di Fermi si ha una costante dimensionale:

$$C_F = M^{-2}$$

si ha quindi anche in tal caso un'energia fondamentale, al di sotto della quale la teoria è valida. Invece, ad energie superiori, il vertice di contatto nasconde il fatto che l'interazione avviene per la produzione virtuale di un bosone virtuale W^+ .

L'interazione più fondamentale (modello standard) contiene due costanti di accoppiamento adimensionali g , ciascuna in un vertice, per cui:

$$G_F = \frac{g^2}{M_W^2}.$$

Ci potremmo aspettare che qualcosa di analogo avvenga anche per la gravità, in quanto abbiamo, come si è detto, una costante dimensionale G e quindi una scala fisica. Non sappiamo (ancora) se ci sia una teoria più fondamentale, ma questo potrebbe essere un'indicazione della sua possibile esistenza.

1.2 Situazione storica

In questa breve introduzione vediamo gli sviluppi concettuali che portano alla Relatività Generale, quali sono le teorie precorritrici della RG e quali sono eventualmente gli sviluppi futuri a cui possiamo pensare.

La relatività generale, come abbiamo detto precedentemente, è la teoria relativistica della gravità. Descrive fenomeni gravitazionali tenendo conto di quello che si è imparato con la Relatività Speciale. Questo aspetto la pone anche come teoria dello spazio-tempo.

Quelli che chiamiamo gravità, forza di gravità, ed effetti gravitazionali sono, in Relatività Generale, manifestazioni della curvatura dello spaziotempo. Abbiamo visto (e avremo modo di ripassare) che per la Relatività Speciale lo spazio-tempo è un concetto ben definito: spazio e tempo diventano due grandezze fisiche equivalenti e inscindibili ed è luogo in cui avvengono i fenomeni fisici e se ne diamo un'interpretazione geometrica lo possiamo vedere come un spazio quadri-dimensionale con determinate caratteristiche peculiari che ha rispetto ad altri spazi come quello euclideo. Condivide con quest'ultimo il fatto di essere uno spazio piatto, ma ha delle proprietà differenti, che chiameremo proprietà metriche, legate al modo in cui si definiscono le distanze all'interno di questo spazio.

Passando alla Relatività Generale lo spaziotempo diventa uno spazio che può curvarsi e il moto di un qualunque corpo in un campo gravitazionale è descrivibile come il moto di un punto materiale in uno spazio curvo. In altri termini, le traiettorie che compie un tale corpo, saranno indicate come geodetiche dello spazio-tempo curvo (sempre che non siano presenti altre forze).

Lo spazio-tempo, che come dicevamo è statico in Relatività Speciale, diventa dinamico in Relatività Generale. Non è più soltanto curvo, ma può avere una sua dinamica, cioè può quindi modificarsi ed evolvere curvandosi. Le equazioni che descrivono questa dinamica sono le equazioni del campo gravitazionale o *equazioni di Einstein*, e ciò che determina la curvatura dello spazio-tempo, quindi la dinamica stessa, sono la distribuzione di massa e di energia presenti nel sistema fisico, sono dunque le sorgenti dello spazio-tempo. La teoria della Relatività Generale ha dei precursori, se vogliamo chiamarli così.

Descrivendo il comportamento della gravità, essa estende la teoria della gravitazione universale di Newton (non la nega!), estendendone cioè la capacità di descrivere fenomeni gravitazionali in un regime in cui la gravitazione universale di Newton non sarebbe più adatta. Infatti, la teoria della gravitazione universale di Newton descrive sistemi in interazione gravitazionale nel caso di: campi deboli e moti lenti (dinamica Newtoniana).

In altri termini, i moti dei corpi nel campo gravitazionale sono moti lenti, quindi la meccanica è quella di Galileo e Newton, e i campi gravitazionali descritti dalla gravità newtoniana sono campi deboli. In questo limite, la teoria della Relatività Generale dovrà ritrovare la gravità newtoniana, in quanto sappiamo che questa funziona in questo regime di validità. Come spesso accade in fisica, la nuova teoria ingloba la precedente come suo limite².

²Possiamo anche notare la diversa relazione tra RG e Gravitazione universale rispetto

Un altro precursore fondamentale che sarà contenuto all'interno della teoria della RG è il *principio di relatività dei moti*, che porta nella formulazione di Einstein alla relatività speciale. Il principio di relatività dei moti era già presente con la meccanica galileiana del 600, ma Einstein aggiungendo il principio di costanza della velocità della luce per tutti gli osservatori inerziali, modifica la meccanica galileiana arrivando alla Relatività Speciale.

La RS è quindi parte della RG e anch'essa sarà un suo opportuno limite, ovvero il limite in cui non c'è campo gravitazionale. Ricordiamo che la Relatività Speciale descrive il moto di sistemi fisici dotati di velocità arbitrarie, anche prossime alla velocità della luce, e introduce il concetto di spazio-tempo. Si vede, quindi, come un'opportuna estensione dei concetti della RS porta a quello che abbiamo detto essere i concetti base della Relatività Generale.

Un altro precursore, o sistema formale matematico che è un linguaggio adatto alla descrizione di un comportamento di un sistema fisico in presenza di gravità, sono le *geometrie non euclidee*. Dato che la RS introduce il concetto di spaziotempo, questo spazio-tempo come vedremo assume una nuova capacità che è quella di essere non solo curvo ma anche dinamico; dunque è chiaro che le geometrie che estendono la geometria euclidea a spazi più generali, sono chiaramente un linguaggio matematico adatto a descrivere i fenomeni e le caratteristiche della teoria della Relatività Generale.

In definitiva abbiamo quindi capito che la Relatività Generale:

- Incorpora al suo interno il principio di relatività, che è uno dei due principi alla base della Relatività Speciale, nella descrizione dei fenomeni gravitazionali che, come vedremo, non sono descrivibili in modo ovvio in relatività speciale.
- Estende la descrizione degli effetti gravitazionali a tutti i sistemi fisici, anche in campi arbitrari. Infatti, la descrizione fatta dalla Relatività Generale è valida per campi gravitazionali di ogni tipo, deboli, in questo caso ritroveremo il limite della gravità newtoniana, ma anche a moti relativistici in un campo gravitazionale, che può essere debole o intenso. Un tipico esempio di moto relativistico in un campo debole è l'*effetto di deflessione della luce*. La luce è un corpo che si muove relativisticamente in quanto è per definizione una radiazione, quindi si muove alla velocità della luce, nel vuoto, però se c'è un campo gravitazionale, anche debole, essa ne sente l'effetto gravitazionale, cosa che non sarebbe dovuto accadere con la gravità newtoniana, in cui la massa del corpo era cruciale.

a QFT e MQ+RS. Infatti, se per costruire le varie teorie siamo sempre partiti dalle cose Classiche che conoscevamo, ne abbiamo esteso il regime di validità e poi abbiamo ritrovato le cose vecchie come un suo limite (la RG la costruiremo così), per la QFT abbiamo fatto il caso opposto, ossia, abbiamo preso una teoria classica e ne abbiamo fatto il limite.

- Porta a predizione di nuovi fenomeni, quali:
 - *Redshift gravitazionale della radiazione*, cioè il fatto che la radiazione che si propaga in un campo gravitazionale varia la sua lunghezza d'onda. Predizione collegata a questa, è che orologi, lo stesso orologio posto in due punti diversi di un campo gravitazionale, ha un tasso di avanzamento differente a seconda del punto in cui si trova nel campo gravitazionale.
 - *Deflessione della luce*, che quindi porta al concetto di *lente gravitazionale*.
 - Nuovi sistemi che si manifestano soprattutto in regimi di campo forte, come ad esempio il concetto di *buco nero*.
 - *Onde gravitazionali* come tipica manifestazione della dinamica del campo gravitazionale o della dinamica dello spazio-tempo. Sono fluttuazioni dello spazio-tempo indotte da una sorgente gravitazionale.
 - *Cosmologia moderna*.
- Introduce il concetto di curvatura dello spazio-tempo e sostanzialmente descrive fenomeni fisici in presenza di gravità con questi due aspetti:
 - Descrive il moto in un campo gravitazionale come moto in uno spazio-tempo curvo.
 - La curvatura dello spazio-tempo è determinata dalla distribuzione di materie ed energia. Come vedremo la grandezza fisica che determina la curvatura è la densità di massa o la densità di energia, cioè quanta massa o quanta energia è contenuta in un dato volume.

Le basi concettuali e fisiche su cui si fonda la Relatività Generale, e che sono il punto di contatto tra la descrizione fisica e la descrizione geometrica, è il *principio di equivalenza tra gravitazione ed inerzia*, che era già presente ai tempi di Galileo, il quale aveva già espresso questo principio, ma, con la RG, Einstein fa un passo in più e porta questo principio alla base di una nuova teoria che poi predice un insieme di nuovi fenomeni.

Se vogliamo mettere anche dal punto di vista storico, e concettuale, l'evoluzione del pensiero fisico sul mondo, possiamo vedere in figura 1.2 il *cubo delle teorie di Zelmanov* per vedere dove si colloca la Relatività Generale, e a che punto.

La descrizione del problema del moto, quindi della variazione relativa della posizione nel tempo, è descritto dalla meccanica classica, la quale è basata su tutta una serie di sviluppi formali, che si basano su alcuni principi fondamentali, espressi dallo stesso Galileo, come il principio di relatività

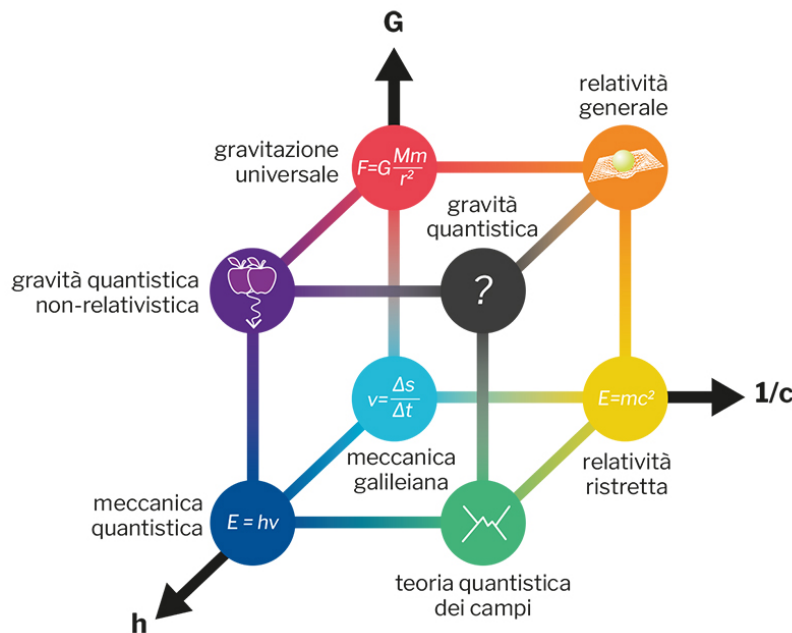


Figura 1.2: Cubo delle teorie di Zelmanov.

galileano, la definizione di sistemi di riferimento di osservatori di un particolare tipo (gli osservatori inerziali) e che descrivono il moto come conseguenza dell'azione di una forza (dinamica newtoniana).

Grazie alla meccanica classica, e a tutti i suoi sviluppi successivi, si descrive tramite la cosiddetta meccanica analitica di Hamilton, Jacobi e Lagrange, sia la meccanica del punto materiale, sia quella che si chiama *teoria dei campi classica*, cioè il comportamento di un sistema (il campo), funzione dello spazio e del tempo, al passare del tempo. È presente un principio fondamentale che ritorna, che è il principio di relatività galileano. All'interno della meccanica classica c'è la gravitazione di Newton e Galileo che ci porta una prima costante fondamentale di natura, che è la costante G di Newton.

La meccanica classica viene poi estesa a seguito della formulazione dell'elettromagnetismo, che è una teoria di campo classica, ma non nella forma galileiana e newtoniana. L'inquadramento di fenomeni meccanici ed elettromagnetici nella formulazione maxwelliana porta alla Relatività Speciale, che si basa quindi sul principio di relatività einsteiniano-galileiano, più un nuovo principio, che è quello della costanza della velocità della luce nel vuoto, posto da Einstein come fatto oggettivo (derivante da esperimenti). Questo porta in gioco una nuova costante fondamentale di natura, che è la velocità della luce c , che assume un ruolo speciale, particolare, in quanto è il parametro che entra in tutte le leggi che mettono in relazione ciò che osservano osservatori differenti; soprattutto, essa implementa una richiesta anche logica, cioè il

fatto che il fenomeno fisico non dipenda dall'osservatore. In ogni caso nasce la velocità della luce, che assume anche poi questo ruolo di velocità limite invalicabile.

C'è ancora un altro superamento della meccanica classica, che salta fuori nel momento in cui si trattano i fenomeni subatomici, che porta alla formulazione della Meccanica Quantistica, che introduce la costante di Planck $\hbar$.

L'unione della teoria della gravitazione con la relatività porta alla Relatività Generale, che sarà quindi una teoria con due costanti fondamentali di natura $[c, G]$; la MQ formulata relativisticamente, porta alla meccanica quantistica relativistica, con tutte le sue conseguenze, come per esempio la predizione dell'antimateria, e successivamente con la sua generalizzazione alla teoria dei campi porta alla QFT, la quale considera due costanti fondamentali di natura $[c, \hbar]$.

Questi vari sviluppi teorici e osservativi portano tre costanti fondamentali di natura in gioco, di cui due sono relative al settore della teoria relativistica della gravità (c e G) e due sono relative al settore della teoria quantistica relativistica (c e $\hbar$). Quello che manca ancora è l'unione di queste due, cioè una teoria quantistica della gravità che attualmente non è disponibile. Ci sono idee, ovviamente, ma la grande sfida del futuro è proprio riuscire a conciliare queste due teorie che hanno delle proprietà fondamentali che sono contraddittorie una per l'altra.

Quanto abbiamo detto permette quindi un inquadramento generale su dove si ponga la Relatività Generale nella linea di sviluppo delle teorie fondamentali alla base della natura. In questo settore c'è tutta la parte relativa alle interazioni fondamentali diverse dalla gravità, ovvero l'interazione elettromagnetica, l'interazione debole e l'interazione forte, le quali sono oggi compendiate all'interno di quello che si chiama il *modello standard*, che quindi contiene tre delle quattro forze conosciute (la gravità non è compresa proprio perché manca ancora una sua formulazione quantistica).

Lo scopo di questo corso è quello di dare una descrizione della Relatività Generale e del suo posto nell'inquadramento generale. Nella prossima sezione cominciamo con un po' di introduzione, non molto formale, anzi un po' euristica, sulle geometrie non euclidee in modo da introdurre dei concetti che poi svilupperemo. Successivamente passeremo a un richiamo di Relatività Speciale, visto che i suoi principi e le corrispettive conseguenze, dunque la teoria stessa, sono alla base di quello che poi formuleremo con la RG aggiungendoci il principio di equivalenza tra gravitazione ed inerzia.

Capitolo 2

Gemme di Geometria Differenziale

In questo capitolo vedremo alcuni brevi cenni (delle gemme), alcuni anche di tipo storico, sulle geometrie non euclidee, allo scopo di introdurre alcuni concetti di base in modo non formale, un po' euristico, ma in modo tale da averle a disposizione come concetti quando poi costruiremo in modo più formale la teoria.

2.1 Diverse geometrie

La geometria è un ramo della matematica che si occupa di discutere le proprietà dello spazio. Quindi i suoi concetti primitivi sono rappresentati da concetti come il *punto*, la *retta* e il *piano*, ma in particolare la *geometria euclidea*, si fonda su cinque postulati. Il postulato della geometria euclidea che ci interessa è il famoso **quinto postulato di Euclide**, in quanto sarà quello che verrà sostituito, nelle geometrie non euclidee, che si differenziano dalla geometria euclidea proprio per il quinto postulato. Non faremo tutta la descrizione di questo quinto postulato, ma ricordiamo solo due sue possibili formulazioni:

1. Date una retta e un punto P esterno alla retta data, allora per il punto P passa una e una sola parallela alla retta data.
2. Alternativamente, possiamo dimostrare che se prendiamo un triangolo, cioè tre rette che si incontrano ad angoli α , β e γ , allora la somma degli angoli interni del triangolo è pari a due angoli retti, cioè uguale a 180° , o a π se usiamo i radianti.

I postulati sono alla base di una teoria matematica e sono fatti oggettivi, non disputabili; sono il fondamento della teoria e da essi si derivano poi tutti i teoremi successivi. Il quinto postulato sembrava non essere necessariamente

un postulato, cioè che potesse essere in qualche modo derivabile da altri. Ci fu per secoli un tentativo di derivare il quinto postulato dagli altri quattro. In realtà non fu un tentativo vano, ma questi tentativi hanno portato al superamento delle geometrie euclidee a inizio dell'Ottocento, in particolare con i lavori di Gauss, Bolyai, Lobaczewski e altri, che di fatto fondano quelle che oggi chiamiamo *geometrie non euclidee*.

Nella geometria euclidea a due dimensioni il punto è un oggetto che non ha dimensioni, la retta ha una sola dimensione e il piano ha due dimensioni, in quanto è possibile muoversi sul piano in due direzioni. Nella geometria 2D di Gauss, Bolyai e Lobaczewski (GBL) si sostituisce il quinto postulato con un nuovo postulato che dice che:

Teorema 1 *Data una retta e un punto P esterno alla retta data, per questo punto P possono passare infinite rette parallele.*

Questo, ovviamente, è completamente in discordanza col quinto postulato di Euclide e se questo sistema formale, cioè questa geometria, non porta inconsistenze interne, significa che è un'altra geometria diversa da quella di Euclide.

Relativamente alla somma degli angoli interni di un triangolo, la geometria di GBL, afferma che è minore di 180° . Però attenzione, a noi non sembra proprio così se proviamo a disegnare, ma dobbiamo ricordare che noi stiamo disegnando una geometria non euclidea sul piano della lavagna che è invece un piano euclideo, quindi è richiesto un piccolo impiego della fantasia.

Un modo per dimostrare che le assunzioni della geometria di GBL conducono a una geometria che non porta a inconsistenze logiche può essere fatto nel modo seguente. Costruiamo un modello che soddisfa tutti i postulati di questa geometria, ma che si basa su un sistema formale matematico che per altra via si sa essere consistente. La geometria euclidea (che tratta di punti, rette, piani, relazioni tra punti, forme e dimensioni di oggetti formati da questi elementi) può essere messa in relazione biunivoca con un'altra teoria matematica: la teoria dei numeri reali. Cosa vuol dire questa relazione?

Prendiamo un elemento fondamentale della geometria che è il punto. Possiamo rappresentare un punto attraverso una coppia ordinata di numeri reali (x_1, x_2) , che è quella che viene normalmente indicata come *coordinata del punto*. Ma formalmente come lo faccio?

Facciamo riferimento alla figura 2.1. Quando abbiamo un punto, il punto è un elemento (un punto) del piano. Possiamo associare una coppia di numeri reali con una costruzione che è quella di Cartesio. Posso scegliere, ad esempio, un sistema di coordinate cartesiane e ne tracciamo gli assi di riferimento. Prendiamo il nostro punto e tracciamo la retta parallela all'asse 2 o, analogamente, perpendicolare all'asse 1 e, avendo messo gli assi arbitrariamente in questa posizione, possiamo associare un numero x_1 , che è la distanza della proiezione del punto sull'asse 1 dall'intersezione degli assi di

riferimento, che chiamiamo normalmente *origine degli assi*. In modo analogo possiamo proiettare il punto sull'asse 2 con una retta parallela all'asse 1 e troviamo il numero x_2 . Mettendo insieme la coppia (x_1, x_2) troviamo le coordinate del nostro punto nel sistema di riferimento scelto. Chiaramente dobbiamo definire un'unità di misura, ma x_1 e x_2 sono due numeri data l'unità di misura.

Possiamo definire, dati due punti, anche un oggetto che chiamiamo *distanza tra i due punti*. La distanza tra due punti su un piano cartesiano si ottiene costruendo una opportuna linea, che è una retta, che collega i singoli punti. Un altro degli elementi fondamentali della geometria, e la distanza, che possiamo indicare con d , ed è la lunghezza del segmento che unisce i punti. Usando i numeri reali, definiamo la distanza d tra il punto $P_1 (x_1, x_2)$ e il punto $P_2 (X_1, X_2)$ usando sostanzialmente il teorema di Pitagora:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - X_1)^2 + (x_2 - X_2)^2}. \quad (2.1.1)$$

Se io uso coppie di numeri reali per definire quello che chiamo punto, in geometria euclidea, e definiamo la distanza tra due punti, allora si può dimostrare che tale sistema formale ha tutte le caratteristiche della geometria euclidea, e che si tratti di un sistema formale non inconsistente, cioè che non introduce dei problemi logici.

Notiamo anche che abbiamo introdotto la distanza tra due punti, che assumerà un ruolo importante in tutto quello che diremo successivamente.

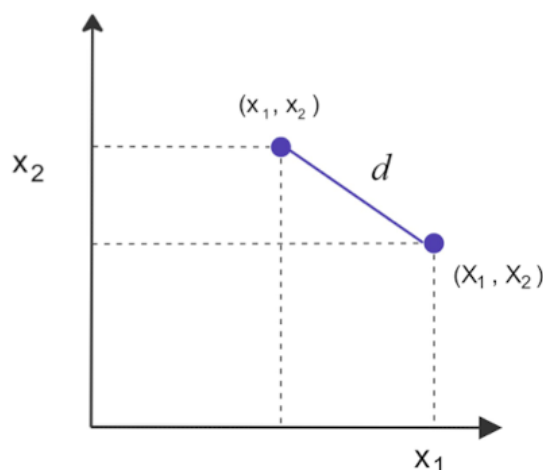


Figura 2.1: Distanza euclidea.

Se ora prendiamo la geometria di Gauss possiamo ripetere la stessa trattazione e metterla in relazione biunivoca con la teoria dei numeri reali. Associamo al punto nuovamente una coppia di numeri reali, ordinata, con la

condizione:

$$x_1^2 + x_2^2 < 1 \quad (2.1.2)$$

e definiamo la distanza tra due punti, che ora chiamiamo *distanza di Klein*, con la relazione leggermente più complicata (ma che non ci servirà nel corso):

$$\cosh \left[\frac{d(P_1, P_2)}{a} \right] = \frac{1 - x_1 X_1 - x_2 X_2}{\sqrt{1 - x_1 - x_2} \sqrt{1 - X_1 - X_2}} \quad (2.1.3)$$

in cui a è una lunghezza fondamentale che determina una caratteristica della geometria, ovvero, la scala della geometria.

Se distanza è definita da (2.1.3), allora si può dimostrare (anche in questo caso non lo facciamo esplicitamente) che un sistema basato su numeri reali, con la condizione che la somma dei loro quadrati sia < 1 , corrisponde a ciò che si ha nella geometria di Gauss, ossia ∞ retta parallele passanti da un punto e la somma degli angoli interni di un triangolo $< 180^\circ$, e che è una geometria perfettamente consistente. Dunque si deve accettare il concetto e l'idea che di geometrie ne possono esistere più di una, diverse da quella euclidea.

2.2 Proprietà metriche

Abbiamo detto che per lo spazio Euclideo, presi i due punti, la traiettoria che minimizza la distanza (2.1.1), è quella che chiamiamo retta. Nel caso della geometria di Gauss, la traiettoria che rende estrema (minimizza o massimizza) la distanza (2.1.3), è l'equivalente della retta nel piano Euclideo. Queste traiettorie particolari prendono il nome di **geodetiche**, in particolare la retta è la geodetica nello spazio Euclideo. Lo spazio di Gauss e lo spazio Euclideo sono due possibili spazi bidimensionali che possiamo trattare.

Gauss fa molto lavoro sulla teoria delle geometrie a due dimensioni, introducendo anche dei concetti molto importanti. Per esempio, Gauss fa una distinzione tra quelle che chiamiamo **proprietà interne** e **proprietà esterne** dello spazio. Vediamo cosa intende tramite una metafora:

Supponiamo di prendere una superficie, che può essere il piano Euclideo o la superficie di Gauss, e supponiamo di essere una formichina due dimensionale che può muoversi su questo spazio. Se ci muoviamo esploriamo la superficie, ma non siamo liberi di uscirne, cioè non possiamo staccarci. Tutte le proprietà intrinseche o interne della superficie sono quelle che possiamo sperimentare muovendoci su di essa. Le proprietà esterne della superficie sono quelle che può mettere in evidenza qualcuno o qualcosa che vede la superficie da uno spazio più grande, che contiene la superficie su cui ci troviamo.

Questo spazio maggiore viene chiamato **spazio di immersione** (embedding space), utile per poter studiare le proprietà di una varietà.

Per esempio se io prendo il piano euclideo $\mathbb{R}^2$, questo può essere immerso in uno spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$. Le proprietà che vedo di $\mathbb{R}^2$ visto dallo spazio di immersione, sono proprietà estrinseche o esterne della varietà.

Gauss comprese che le varietà devono poter essere descritte soltanto da proprietà interne, cioè in altri termini, le proprietà interne sono quelle che devono essere necessarie e sufficienti a descrivere il tipo di proprietà della geometria. Per esempio la superficie dello spazio di Gauss non può essere immerso in $\mathbb{R}^3$. Vedremo, successivamente, che lo spazio di immersione in cui io possiamo immergere completamente, non solo porzioni, lo spazio di Gauss è uno spazio tridimensionale di Minkowski.

Tra le proprietà interne della superficie o dello spazio, quella che Gauss identifica come proprietà importante è la **funzione metrica**. La funzione metrica è una proprietà intrinseca e fornisce la distanza tra i due punti $d(P_1, P_2)$ all'interno della varietà e lo fa lungo il cammino più breve tra i due punti, cioè lungo una geodetica.

Dato uno spazio e due punti P_1 e P_2 , possiamo prendiamo il cammino più breve che li unisce e la lunghezza di questa porzione di geodetica è proprio la distanza tra i punti P_1 e P_2 . Tutto vive all'interno della superficie.

La funzione metrica o distanza tra due punti sulla varietà euclidea è facile da scrivere, soprattutto se utilizziamo coordinate cartesiane. Notiamo però che nella discussione fatta precedentemente, abbiamo associato un punto a una coppia di numeri, che abbiamo chiamato coordinate (costruzione cartesiana), ma avremmo potuto benissimo utilizzare anche un altro set di coordinate, per esempio le coordinate polari, cioè il sistema di coordinate che utilizza come coppia di numeri reali la distanza tra un punto di riferimento, l'origine, e il punto P e l'angolo di cui questa retta si inclina rispetto a un asse di riferimento orizzontale. È del tutto equivalente utilizzare come coordinate (x_1, x_2) o quelle polari (r, θ) .

Questo ci dice che la scelta del sistema di coordinate è arbitraria, *il punto non dipende dal sistema di coordinate scelto*.

Infatti possiamo vedere che, usando le coordinate cartesiane, dato un punto P , lui non dipende dal sistema di coordinate. I numeri che gli associamo sono funzione del fatto che abbiamo scelto di posizionare gli assi cartesiani in una certa posizione, se ne avessimo utilizzata una diversa, allora avremmo usato una coppia di numeri differenti, (x'_1, x'_2) , ma il punto è sempre lo stesso, per cui possiamo dire che il punto è una quantità della varietà.

Le coordinate sono qualcosa che aggiungiamo noi osservatori, che però non hanno alcuna rilevanza relativamente al punto, perché possiamo cambiare sistema di coordinate spostando l'origine, oppure usandone un altro, e abbiamo sempre una coppia di numeri reale che ci rappresenta lo stesso punto. Questo discorso lo possiamo fare anche se la varietà è quella di Gauss, Bolyai e Lobaczewski.

Abbiamo anche visto come la distanza cartesiana sul piano di Euclide è (2.1.1), mentre quella sul piano di GBL ha una forma molto differente (2.1.3).

Gauss intuisce anche un'altra cosa, o meglio assume che: data una superficie, comunque essa sia fatta, prendendo un punto P , in ogni regione dello spazio sufficientemente piccola attorno al punto P in questione, possiamo sempre erigere un sistema di coordinate cosiddetto **localmente Euclideo**.

Cioè, se ci avviciniamo molto al punto P , allora possiamo confondere la superficie, con un piano Euclideo appoggiato proprio nel punto P e finché rimaniamo in un intorno sufficientemente piccolo attorno al punto P , possiamo utilizzare un sistema di coordinate euclideo, che possiamo indicare con ξ_1 e ξ_2 , in questo, che in geometria differenziale, viene chiamato **piano tangente in P**.

Quindi, Gauss ci dice che in ogni regione dello spazio sufficientemente piccola attorno al punto P è possibile erigere un sistema di coordinate localmente euclideo (ξ_1, ξ_2) tale che la distanza tra due punti infinitesimamente vicini sia:

$$\begin{cases} (\xi_1, \xi_2) \\ (\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2) \end{cases} \implies ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2. \quad (2.2.1)$$

Teniamo bene a mente che questo sistema di coordinate vale solo nell'intorno del punto, e non ovunque sulla varietà. La superficie che stiamo discutendo non è una superficie globalmente euclidea, cioè non può essere ricoperta ovunque dallo stesso piano euclideo, ma in ogni punto io posso erigere un piano euclideo ($\mathbb{R}^2$) tale che la distanza infinitesima tra due punti è una funzione metrica valida localmente. Vedi la figura 2.2. Ogni piano tangente è un piano euclideo, ma ognuno di essi non ricopre l'intera superficie; il ricoprimento completo avviene solo se la superficie di partenza è essa stessa euclidea, altrimenti abbiamo un insieme di piani che si appoggiano ad ogni punto della superficie. L'insieme dei piani tangenti di una varietà arbitraria viene chiamato anche **fibrato tangente della superficie**.

2.2.1 Funzioni metriche

Elaboriamo un po' meglio questo concetto della distanza locale.

Ricapitolando: preso un punto sulla superficie, possiamo associare una coppia di numeri, che sono le coordinate cosiddette *globali*, (x_1, x_2) , e che ricoprono la superficie; possiamo, allo stesso tempo, anche associarci un sistema di coordinate (ξ_1, ξ_2) , valido solo in un intorno del punto, che solo localmente euclideanee, ma che appartengono solo al piano tangente e che quindi non ricoprono la superficie. Definiamo il punto e gli spostamenti infinitesimi attorno ad esso usando o le coordinate ξ_i o le coordinate x_i . Ovviamente, avremo una trasformazione di coordinate locali tra un set di coordinate e

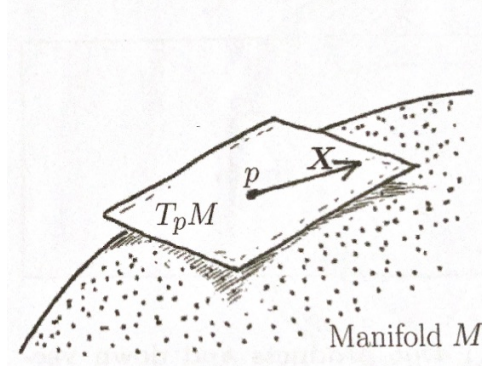


Figura 2.2: Piano tangente.

l'altro:

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_1(x_1, x_2) \\ \xi_2 = \xi_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.2.2)$$

che chiamiamo **trasformazione locale**. Possiamo scrivere il differenziale, cioè lo spostamento infinitesimo da ξ_1 a ξ_2 , con semplici operazioni differenziali:

$$d\xi_{1,2} = \frac{\partial \xi_{1,2}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_{1,2}}{\partial x_2} dx_2 \quad (2.2.3)$$

che se uguagliato a (2.2.1) da:

$$ds^2 = g_{11}(x_1, x_2) dx_1^2 + 2g_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + g_{22}(x_1, x_2) dx_2^2 \quad (2.2.4)$$

la quale ci dice che ds^2 è la distanza infinitesima sulla superficie e si ottiene mediante funzioni $g_{ij}(x_1, x_2)$, con $i, j = 1, 2$, che chiamiamo **funzioni metriche**. La forma di g_{ij} dipende da com'è fatta la superficie e possono cambiare da punto a punto. Per esteso abbiamo:

$$g_{11} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right)^2 \quad (2.2.5)$$

$$g_{12} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \quad (2.2.6)$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right)^2. \quad (2.2.7)$$

Come sono fatte queste derivate dipende dal punto in cui ci siamo messi, perché la relazione della trasformazione tra coordinate globali e locali dipende dal punto.

Cominciamo ad introdurre la notazione, che useremo sempre d'ora in avanti, scrivendo le coordinate con degli indici in alto:

$$x^1 = (x^1, x^2) \quad (2.2.8)$$

$$ds^2 = \sum_{a,b} g_{ab}(x^1, x^2) dx^a dx^b \quad (2.2.9)$$

e, introducendo la notazione di Einstein, in cui sommiamo sugli indici ripetuti, la relazione (2.2.9) diventa:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b. \quad (2.2.10)$$

Aver definito uno spazio geometrico (quindi che ha punti, rette, traiettorie, geodetiche e superfici) e avergli attaccato (conferito) una proprietà che è la distanza, cioè una metrica, fa sì che questo spazio (superficie) sia configurato come **spazio metrico**, ossia uno spazio che non ha soltanto elementi fondamentali, ma ha anche una distanza ben definita (dalla metrica).

Definiamo il concetto di **varietà** (manifold) come uno spazio continuo, localmente euclideo. Può essere visto come un insieme parametrizzabile o parametrizzato in modo continuo da un numero di parametri indipendenti, che rappresentano la dimensione della varietà, e che non sono altro che le coordinate.

Una varietà poi è **differenziabile** se è uno spazio continuo di classe C^∞ ; viene anche detta **varietà di Riemann**, una varietà differenziabile dotata di metrica, ossia della nozione di distanza. La metrica è esprimibile, come abbiamo visto, attraverso le funzioni metriche g_{ij} , definite in ogni punto. Sono le proprietà metriche che danno struttura alla varietà. Come facilmente intuibile, le proprietà dello spazio euclideo sono diverse da quelle di uno spazio non euclideo; possiamo già fare un esempio puramente astratto. Prendiamo lo spazio $\mathbb{R}^2$:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 \quad (2.2.11)$$

$$= g_{11}(x_1, x_2) dx_1^2 + 2g_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + g_{22}(x_1, x_2) dx_2^2 \quad (2.2.12)$$

in cui abbiamo già scritto il fatto che $g_{ij} = g_{ji}$, poiché accorgendoci subito che le coordinate commutano (cosa valida per tutte le geometrie canoniche), allora possiamo dire che le funzioni metriche sono simmetriche e quindi $g_{ij} = g_{ji}$. Le funzioni metriche sono:

$$\begin{cases} g_{11} = 1 \\ g_{12} = g_{21} = 0 \\ g_{22} = 1 \end{cases} \implies g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.13)$$

Quindi, il piano euclideo, se usiamo coordinate cartesiane, ha funzioni metriche che costanti, e possiamo darne una rappresentazione matriciale.

Per una varietà arbitraria non è detto che si abbiano funzioni costanti, visto che sono proprio le g_{ij} che sentono la diversa proprietà della varietà curva rispetto alla varietà piatta. In Relatività Generale saranno proprio le funzioni metriche (che eleveremo al ruolo di tensori metrici) che ci mostreranno gli effetti gravitazionali.

Vediamo alcuni esempi, semplici, di varietà.

- Lo spazio $\mathbb{R}^n$ è uno spazio in n dimensioni globalmente euclideo.
- Possiamo chiamare S^n la n -sfera, che è il luogo geometrico dei punti a distanza fissa da un dato punto, e si trova nello spazio di immersione euclideo $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ad esempio se vogliamo definire che cos'è un cerchio S^1 , prendiamo uno spazio euclideo bidimensionale ($\mathbb{R}^2$), prendiamo un punto, definiamo una distanza che chiamiamo *raggio* del cerchio e individuiamo il luogo geometrico di $\mathbb{R}^2$ a distanza fissa dal punto dato. In questo caso, utilizziamo per pura comodità descrittiva uno spazio di immersione, più grande dimensionalmente dallo spazio che ci interessa, per poter dare una rappresentazione della varietà.

Cosa analoga la possiamo fare per S^2 , che è la superficie sferica bidimensionale. Possiamo prendere uno spazio di immersione tridimensionale $\mathbb{R}^3$, disegniamo tre assi cartesiani, prendiamo l'origine e individuiamo la superficie sferica; tutte le proprietà intrinseche e rilevanti per descrivere la superficie sferica non richiedono l'utilizzo di $\mathbb{R}^2$, ma un modo per rappresentarla può essere quello di utilizzare tale spazio di immersione. Teniamo sempre a mente che non è lo spazio di immersione a determinare la geometria della superficie sferica. La superficie sferica è localmente euclidea, ma non globalmente, infatti, preso un punto qualunque, possiamo appoggiarci sopra il piano tangente, che è un piano euclideo $\mathbb{R}^2$ e ha la stessa dimensionalità della superficie sferica S^2 . Dato che non basta un piano tangente a ricoprire l'intera sfera, allora diciamo che questa non è una varietà globalmente euclidea, infatti sappiamo essere una varietà curva.

Però potremmo chiederci che cosa differenzia la varietà curva S^2 dalla varietà curva spazio di Lobacheschi? Per vedere questa differenza entra in gioco una quantità, che definiremo tra poco, e che chiameremo curvatura.

- Un altro esempio di varietà è il toro $\mathbb{T}^n$ n -dimensionale. Ad esempio, se prendiamo il toro in due dimensioni $\mathbb{T}^2$, esso è identificabile con un piano euclideo. Vediamo che se prendiamo due rette parallele orizzontali e due rette parallele verticali possiamo identificare i lati a due a due e vedere quello che si chiama effetto Pacman, ossia, se usciamo da un lato, rientriamo dall'altro. Questa cosa la possiamo visualizzare nella

figura 2.3. Otteniamo in questo modo una superficie bidimensionale sicuramente localmente euclidea. Però, il toro in due dimensioni, in realtà, non può essere immerso in $\mathbb{R}^3$, ma deve essere immerso in $\mathbb{R}^4$; poiché così possiamo fare la costruzione che abbiamo descritto, ovvero piegare il piano rispetto ad una dimensione, chiudendo a cilindro, poi senza deformare gli angoli chiudiamo a cilindro l'altra dimensione.

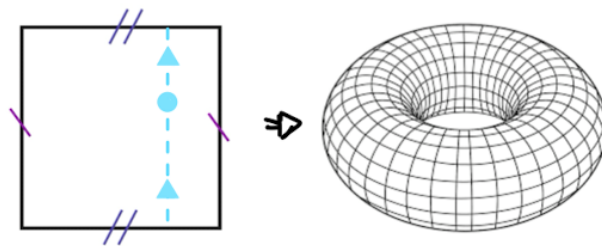


Figura 2.3: Costruzione del toro bidimensionale.

Una cosa particolare è che ha il toro $\mathbb{T}^n$ è che possiede un manico, o come si vuol dire, c'è un buco. Il numero di buchi viene anche chiamato *genere* (o *genus*), ma non è una proprietà metrica, bensì una proprietà topologica. Per esempio, la superficie sferica ha un genus 0, perché non ha buchi, invece il toro ha un genus 1, mentre una ciambellona doppia con due buchi (figura 2.4) ha genus 2.



Figura 2.4

- Un altro esempio è il cilindro, che si costruisce prendendo due rette parallele, infinite e identificandone i lati; gli angoli non vengono deformati in questa operazione.
- Un altro oggetto è il cono, che ha una proprietà particolare: ha il vertice, in cui succede qualcosa di diverso rispetto a quello che succede sul resto della superficie, in tutto e per tutto uguale al piano Euclideo. Il vertice è un punto singolare in quanto la curvatura, che non abbiamo ancora definito, è infinita. Il cono è raffigurato nella figura 2.5.

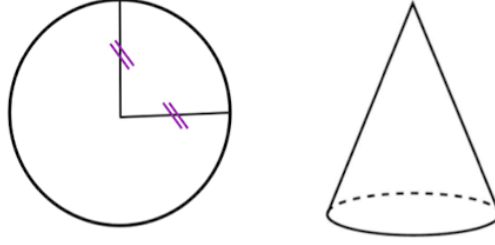


Figura 2.5: Raffigurazione cono.

2.2.2 Esempio calcoli funzioni metriche

Per arrivare al concetto di curvatura facciamo un po' di conti e calcoliamo le funzioni metriche in diversi sistemi di coordinate.

Prendiamo il piano bidimensionale euclideo e descriviamo utilizzando prima le coordinate cartesiane e poi le coordinate polari. Il caso cartesiano è:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 \quad , \quad \begin{cases} g_{11} = 1 \\ g_{12} = g_{21} = 0 \\ g_{22} = 1. \end{cases} \quad (2.2.14)$$

Il caso delle coordinate polari lo possiamo vedere ricordando quale sia la trasformazione di coordinate che ci permette di passare da un sistema cartesiano ad uno polare:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(r, \theta) = r \cos \theta \\ x_2 = x_2(r, \theta) = r \sin \theta \end{cases} \quad (2.2.15)$$

differentiandola troviamo:

$$\begin{cases} dx_1 = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta \\ dx_2 = dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta. \end{cases} \quad (2.2.16)$$

Nota l'espressione della distanza infinitesima, cioè la forma metrica (2.2.14), in un sistema di coordinate, allora possiamo sostituirci dentro (2.2.16) e ottenere la forma metrica nell'altro sistema di riferimento:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 \\ &= (dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta)^2 + (dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta)^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 \\ &\equiv g_{rr}(r, \theta) dr^2 + 2g_{r\theta}(r, \theta) dr d\theta + g_{\theta\theta}(r, \theta) d\theta^2 \end{aligned}$$

e da cui possiamo leggere:

$$\begin{cases} g_{rr} = 1 \\ g_{r\theta} = 0 \\ g_{\theta\theta} = r^2 \end{cases} \implies g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.17)$$

Possiamo quindi notare che nei due sistemi di coordinate lo stesso tensore metrico, che vogliamo descriva le proprietà della stessa varietà, è sì diagonale in entrambi i sistemi, ma non sempre a coefficienti costanti. La distanza non può cambiare perché è una proprietà invariante della superficie, mentre le funzioni g_{ij} dipendono dal sistema di coordinate e variano con il sistema stesso in modo da far sì che la distanza rimanga invariante.

Vediamo in modo analogo il caso della superficie sferica $\mathbb{S}^2$, raffigurata in figura 2.6. Proviamo a costruire le funzioni metriche, e per farlo la cosa più comoda è usare il concetto di spazio di immersione. Dunque prendiamo uno spazio $\mathbb{R}^3$. Scegliamo per convenienza un sistema di coordinate cartesiano (x_1, x_2, x_3) . La superficie sferica è definita come luogo geometrico dei punti a distanza fissa, a , da un punto di riferimento che scegliamo essere l'origine.

Prendiamo un punto P sulla superficie sferica, che sì, è un punto della superficie sferica, ma allo stesso tempo anche di $\mathbb{R}^3$; dunque se descriviamo P in $\mathbb{R}^3$ allora utilizziamo 3 coordinate (x_1, x_2, x_3) , mentre se lo descriviamo in $\mathbb{S}^2$, allora utilizzeremo solamente 2 coordinate.

Abbiamo l'equazione che ci definisce $\mathbb{S}^2$ all'interno dello spazio di immersione $\mathbb{R}^3$:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2. \quad (2.2.18)$$

Il fatto di avere una relazione funzionale che collega le tre coordinate (x_1, x_2, x_3) , ci dice che per stare sulla superficie sferica ci basta usare due delle tre coordinate, e la terza è ottenuta dalle altre due mediante la condizione (2.2.18). Ciò è perfettamente corretto perché $\mathbb{S}^2$ dev'essere esprimibile solo in funzione di due coordinate del piano di $\mathbb{R}^3$.

Ora, dato che lo spazio di immersione è euclideo e tridimensionale, sappiamo calcolare, abbastanza agevolmente, la distanza euclidea infinitesima tra due punti, essendo le coordinate (x_1, x_2, x_3) cartesiane, che è semplicemente il teorema di Pitagora in tre dimensioni:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (2.2.19)$$

Se dalla condizione (2.2.18) liberiamo x_3 e differenziamo:

$$x_3^2 = a^2 - (x_1^2 + x_2^2) \quad (2.2.20)$$

$$x_3 dx_3 = -(x_1 dx_1 + x_2 dx_2) \quad (2.2.21)$$

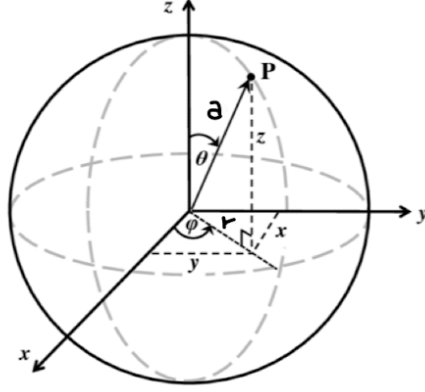


Figura 2.6: Superficie sferica $\mathbb{S}^2$ nello spazio di immersione $\mathbb{R}^3$. Indichiamo nell'immagine $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ e il raggio $r = a$.

allora la distanza infinitesima diventa:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{x_3^2} \quad (2.2.22)$$

$$= dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{a^2 - (x_1^2 + x_2^2)} \quad (2.2.23)$$

$$= \left(1 + \frac{x_1^2}{a^2 - (x_1^2 + x_2^2)}\right) dx_1^2 + \left(1 + \frac{x_2^2}{a^2 - (x_1^2 + x_2^2)}\right) dx_2^2 + \left(2 \frac{x_1 x_2}{a^2 - (x_1^2 + x_2^2)}\right) dx_1 dx_2 \quad (2.2.24)$$

$$\equiv g_{11}(x_1, x_2) dx_1^2 + g_{22}(x_1, x_2) dx_2^2 + g_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2.2.25)$$

e possiamo vedere che in questo set di coordinate (x_1, x_2) , la metrica non è diagonale avendo $g_{12} \neq 0$, ma ciò non ci preoccupa troppo perché possiamo sempre fare delle trasformazioni di coordinate in cui modifichiamo la forma di g_{ij} e mettiamo la metrica in forma diagonale.

Ripartiamo da (2.2.19) e consideriamo la il sistema di coordinate sferiche, facendo il passaggio $(x_1, x_2) \rightarrow (\theta, \varphi)$, in cui:

$$\begin{cases} x_1 = a \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 = a \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = a \cos \theta \end{cases} \quad (2.2.26)$$

in cui a è costante se rimaniamo sulla superficie sferica. Differenziando

(2.2.26) e sostituendo in (2.2.19) otteniamo:

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a \sin^2 \theta d\varphi^2 \equiv g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 \quad (2.2.27)$$

$$\begin{cases} g_{\theta\theta} = a^2 \\ g_{\varphi\theta} = 0 \\ g_{\varphi\varphi} = a^2 \sin^2 \theta \end{cases} \implies g = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.2.28)$$

che è una forma che ci potrebbe piacere di più rispetto quella cartesiana (2.2.24).

Però, notiamo che avremmo potuto fare un'altra cosa anziché passare in coordinate sferiche. Saremmo potuti partire da (x_1, x_2) e potuto prendere come nuovo sistema di coordinate quello formato da φ e la proiezione del punto P sul piano di (x_1, x_2) , che potremmo chiamare r . Avremmo fatto il cambio di coordinate:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \varphi \end{cases} \quad (2.2.29)$$

che ci restituisce:

$$ds^2 = \frac{a^2}{a^2 - r^2} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (2.2.30)$$

e una funzione metrica:

$$g = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^2 - r^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.31)$$

Da tutto questo esempio abbiamo imparato che: a seconda del set di coordinate la forma funzionale del tensore metrico cambia in funzione di esse. Le diverse g che abbiamo trovato sono comunque lo stesso tensore metrico, della stessa varietà, ma solamente espresso in sistemi di coordinate diversi.

Notiamo anche che in g , per la superficie sferica, che è curva, compare il parametro a che è un parametro dimensionale anche presente nella metrica. a ha la dimensione di una lunghezza. Nel caso del piano cartesiano non abbiamo nessun parametro dimensionale; questa caratteristica, del piano cartesiano, è legata al fatto che esso non ha curvatura.

Dunque intuimo che: per poter descrivere una curvatura, una varietà curva, dovrà essere presente un parametro aggiuntivo; che nel caso analizzato a è un parametro geometrico.

Una cosa analoga succedeva con quella forma (2.1.3) che avevamo scritto per la varietà di Gauss, anche lì avevamo un parametro dimensionale.

Ancora un paio di osservazioni. Cambiando il set di coordinate, cambia la forma del funzione metrica, però, probabilmente, solamente guardandole non saremmo stati in grado di dire che (2.2.28) e (2.2.31) fossero due funzioni metriche della stessa varietà. Questa cosa è collegata con il fatto che le funzioni metriche dipendono dal sistema di coordinate, mentre la distanza ds^2 è

invariante. Infatti, le funzioni metriche determinano le proprietà intrinseche dello spazio metrico, ma la loro espressione dipende dal sistema di coordinate e solo guardandole non siamo in grado di capire la varietà trattata.

Rimaniamo su questo punto. Notiamo che sappiamo fare la trasformazione da un sistema di riferimento all'altro, per esempio tra un sistema di coordinate (x_1, x_2) e un sistema di coordinate (x'_1, x'_2) , deve valere:

$$ds^2 = g_{ij}(x_1, x_2) dx^i dx^j = g'_{ab}(x'_1, x'_2) dx'^a dx'^b \quad i, j, a, b = 1, 2 \quad (2.2.32)$$

ossia, come già sappiamo, la distanza è ottenuta dai differenziali delle coordinate tramite le funzioni metriche sia in un set che nell'altro. Se le coordinate cambiano le funzioni metriche sono differenti. Ma la relazione tra esse è semplice, se conosciamo la relazione:

$$x'^a = x'^a(x^1, x^2). \quad (2.2.33)$$

Infatti, possiamo scrivere:

$$ds^2 = g_{ij}(x_1, x_2) dx^i dx^j = g'_{ab}(x'_1, x'_2) dx'^a dx'^b \quad (2.2.34)$$

$$\Rightarrow g_{ij}(x_1, x_2) dx^i dx^j = g'_{ab}(x'_1, x'_2) \frac{\partial x'^a}{\partial x^i} \frac{\partial x'^b}{\partial x^j} dx^i dx^j \quad (2.2.35)$$

$$\Rightarrow g_{ij} = g'_{ab} \frac{\partial x'^a}{\partial x^i} \frac{\partial x'^b}{\partial x^j} \quad (2.2.36)$$

quindi se conosciamo la trasformazione di coordinate possiamo riesprimere le funzioni metriche in un sistema di coordinate anche in un altro attraverso le derivate parziali. Un esempio di questi conti è a pag. 36 delle note del prof. Fornengo.

2.2.3 La curvatura

Armati delle cose imparate nella sezione §2.2.2 possiamo cercare di fare un ulteriore passo, che lo stesso che fece Gauss per le varietà bidimensionali.

A noi piacerebbe avere a disposizione un'opportuna funzione, che dipenda solo dalle proprietà intrinseche della varietà, non dalle coordinate e che ci dia qualche informazione sulla varietà stessa. In questo modo quella funzione nota in un sistema sarà nota in tutti gli altri possibili. In altre parole tutti i sistemi di coordinate concorderebbero sul suo valore. La funzione che cerchiamo è la **curvatura**.

Siccome siamo in due dimensioni (stiamo teorie di Gauss) la chiamiamo *curvatura gaussiana*. Gauss riuscì ad identificare una opportuna funzione $k(x_1, x_2)$ con dimensioni $[k] = L^{-2}$ univoca e tale:

$$k = k(g_{ij}, \partial g_{ij}, \partial^2 g_{ij}) \quad (2.2.37)$$

riuscì anche a darne un'espressione utilizzabile nella pratica, ma noi non la ricordiamo nemmeno, poiché quello che ci interesserà in Relatività Generale sarà il tensore di Riemann, che è leggermente differente.

Noi abbiamo già visto 3 esempi di varietà curve:

- Il piano euclideo ha $k = 0$ ovunque, ed è una superficie a curvatura nulla, dunque uno spazio piatto.
- La superficie sferica ha $k = \frac{1}{a^2}$, la curvatura è costante (non dipende dalle coordinate) ed è per definizione positiva.
- Il piano iperbolico $\mathbb{H}^2$ (lo spazio di Minkowski), ha $k = -\frac{1}{a^2}$, la curvatura è costante e negativa¹. È una varietà che non riusciamo a disegnare, ma una sua porzione è raffigurabile come una sella.

Questi tre spazi sono differenti poiché hanno curvature diverse, ma tutte le k sono costanti e ciò li caratterizza come *spazi omogenei*; in generale, infatti, la curvatura k , come scritto sopra dipende dal punto, ma non dal sistema di coordinate. Una patata, ad esempio, non è una superficie omogenea, avendo $k \neq$ costante. È chiaro che ci sono solo tre realizzazioni di spazi a curvatura costante cioè omogenei (positive, negative o nulle). Come vediamo dalla definizione la curvatura dipende dalle funzioni metriche, funzioni che sono fondamentali in Relatività Generale, infatti, esse conterranno le proprietà geometriche della varietà spazio-tempo, all'interno della quale vivono i fenomeni fisici; le funzioni metriche determineranno la curvatura dello spazio-tempo che è la manifestazione dell'effetto della gravità.

2.2.4 Misura operativa della curvatura di uno spazio senza andare nello spazio di immersione

Questa sezione potrebbe sembrare superficiale, ma in realtà è cruciale visto che se noi siamo una formichina che si muove su una varietà curva, non possiamo uscirne e misurarne la curvatura, ma dobbiamo trovarla rimanendo sulla superficie senza pensare allo spazio di immersione. Chiediamoci come una formichina possa determinare se la superficie su cui si trova è curva o meno.

Un modo è quello di fare un triangolo e misurare la somma degli angoli interni; se la superficie è curva, allora misuriamo che la somma non è 180° , ma è maggiore.

Prendiamo, per esempio, la superficie sferica $\mathbb{S}^2$ e costruiamo un triangolo camminando lungo archi di cerchio massimo, cioè le geodetiche (traiettorie estremali per una superficie sferica). Il nostro percorso è raffigurato in figura 2.7. Notiamo che per la superficie sferica vale una negazione del quinto postulato di Euclide nel senso opposto, ossia, per un punto esterno ad una retta

¹Notiamo che il concetto di positivo o negativo è arbitrario, basta ridefinire k con un segno differente.

data non passa nessuna retta parallela ad essa; infatti, se pensiamo ai cerchi massimi sulla superficie sferica, tutti si incontrano prima o poi. Ad esempio, fissato un punto, se prendiamo un cerchio massimo, come l'equatore, e una geodetica passante per il punto (un altro cerchio massimo); questo incrocia due volte l'equatore e quindi non ho rette parallele alla retta data.

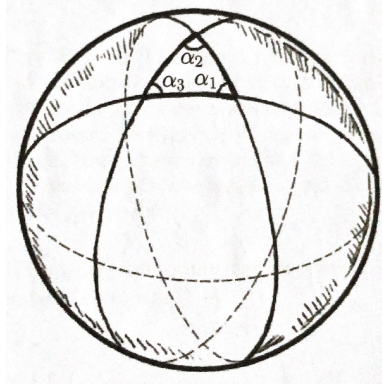


Figura 2.7: Triangolo costruito su una superficie curva.

L'area contenuta all'interno del triangolo che abbiamo costruito è data dal *teorema di Girard*:

$$A = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi)R^2 \quad (2.2.38)$$

il che ci permette di definire la curvatura (dimostrabile essere coincidente con la definizione di Gauss):

$$k = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi}{A}. \quad (2.2.39)$$

Se misuriamo la curvatura in punti diversi e il valore di k non cambia mai, allora capiamo di essere su una superficie omogenea. Se invece, la superficie non è omogenea, ma ha curvatura che cambia da punto a punto, allora possiamo ripetere la stessa costruzione di cui sopra, ma, cambiando la dimensione del triangolo, avremo dei valori differenti, e definiamo la curvatura nel punto P come:

$$k(P) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi}{A}. \quad (2.2.40)$$

Quello che abbiamo descritto è il modo per calcolarsi la curvatura per superfici bidimensionali.

2.2.5 Trasporto parallelo

Un altro oggetto che utilizziamo per capire se si è su una curvatura o meno è quello che si chiama **trasporto parallelo**. Formalizzeremo in seguito

questo concetto quando parleremo di tensori, ma cominciamo ad introdurlo. Limitiamoci per adesso a varietà bidimensionali, il concetto di trasporto parallelo è semplice: trasportare un vettore da un punto all'altro mantenendolo costante, senza ruotarlo. Quindi, facendo un'operazione del tipo quella in figura 2.8.

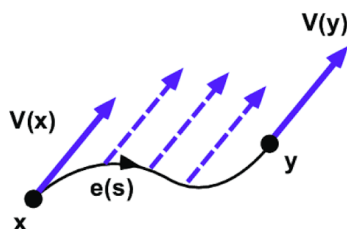


Figura 2.8: Trasporto parallelo.

Prendiamo in uno spazio euclideo un punto P , una traiettoria arbitraria e andiamo fino ad un altro punto Q ; questa, tra l'altro è la tecnica che si usa per fare l'addizione o sottrazione di vettori. Se partiamo da un certo punto con un vettore e lo trasportiamo parallelamente a sé stesso lungo una curva chiusa, allora quando ritorniamo nel punto di partenza il vettore ritorna nella posizione originale.

Facendo la stessa costruzione per una varietà curva, ad esempio la solita superficie sferica bidimensionale, non otteniamo lo stesso risultato. Il procedimento è raffigurato nella figura 2.9. Consideriamo un certo vettore e lo trasportiamo parallelamente. Se facciamo un trasporto parallelo su una traiettoria chiusa su questa varietà curva, allora il vettore torna ruotato. Però questo è un caso specifico, in cui ci sono tutti i cerchi massimi di 90° , però, in generale l'angolo dipende dal cammino (ad esempio lungo l'equatore il vettore torna in se stesso!).

Questo ci fa capire che c'è una relazione tra la curvatura della varietà e variazione dell'angolo o rotazione del vettore. Lo stesso concetto dice che trasportare parallelamente un vettore lungo due cammini diversi ci porta a rotazioni differenti. Poiché l'angolo di inclinazione finale dipende dal cammino, allora su una varietà curva è non ben definito fare il confronto tra due vettori che non sono nello stesso piano tangente.

Possiamo fare qualche ragionamento sulle varietà curve sfruttando quello che abbiamo capito del trasporto parallelo. Vediamo casi specifici:

- $\mathbb{R}^1$: siamo in dimensione $D = 1$, è una retta in uno spazio euclideo piatto e non ha curvatura.
- $\mathbb{S}^1$: luogo geometrico dei punti a distanza fissa da un punto dato, guardato dallo spazio di immersione $\mathbb{R}^2$ e non ha curvatura (un modo per vederlo è quello di fare trasporto parallelo).

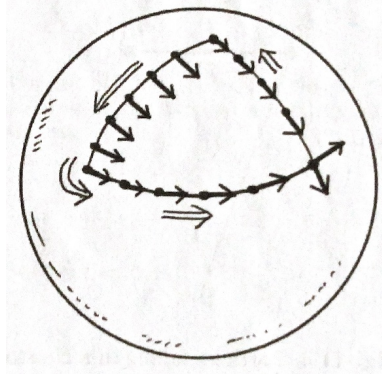


Figura 2.9: Trasporto parallelo su una superficie curva bidimensionale.

- Cilindro ($D = 2$): lo spazio di immersione è $\mathbb{R}^3$, risulta chiaro che se confrontiamo geodetiche della varietà cilindro, ovvero cerchi massimi che stanno sulla varietà, con geodetiche dello spazio di immersione, ossia delle rette, allora dallo spazio di immersione il cerchio massimo del cilindro ci appare curvo, ma questa non è una proprietà intrinseca del cilindro, visto che la stiamo vedendo da fuori.

Una proprietà intrinseca del cilindro è quella che possiamo descrivere facendo solo osservazioni sulla varietà senza uscirne, se facciamo questo ci accorgiamo che il cilindro è piatto. La curvatura che ha è estrinseca;

- Toro ($S^1 \times S^1$, $D = 2$); lo spazio di immersione dev'essere $\mathbb{R}^4$, la doppia identificazione con cui lo costruiamo non modifica gli angoli dei triangoli e non modifica le proprietà del trasporto parallelo, quindi anche il toro è geometricamente piatto.
- Cono ($D = 2$): fintanto che facciamo un cammino che non giri attorno al vertice abbiamo sempre che il trasporto parallelo ci riporta il vettore non ruotato, e questo vuol dire che in tutte queste configurazioni lo spazio è piatto. Però se seguiamo un cammino che gira attorno al vertice, allora l'operazione di incollaggio (dei due lembi del cono) determina una rotazione del vettore. Questo vuol dire che il cono è ovunque piatto tranne che al vertice. Infatti, il vertice concentra in sé una caratteristica peculiare: la curvatura è singolare e va a infinito.

Il motivo per cui stiamo facendo tutto questo discorso è che in Relatività Generale noi descriveremo lo spazio-tempo come una varietà Riemanniana, quindi metrica. Gli eventi fisici avvengono in un punto dello spazio-tempo; i diversi osservatori daranno diversi valori per le coordinate di questi punti, essi saranno rappresentabili come sistemi di coordinate su questa varietà e la relazione tra le varie coordinate sarà la trasformazione di coordinate tra i vari osservatori.

La varietà però, essendo metriche saranno dotate di un set di funzioni metriche g_{ij} che determinano in modo univoco la caratteristica della varietà. Questo set di funzioni cambia tra sistemi di coordinate, ma, abbiamo visto, che sarà possibile definire degli opportuni oggetti che descrivono la curvatura della varietà e che dovranno dipendere da $(g_{ij}, \partial g_{ij}, \partial^2 g_{ij})$. In dimensioni superiori a 2 questo oggetto particolare è il *tensore di Riemann* , attraverso il quale si possono anche costruire quantità invarianti come gli scalari di curvatura.

Il motivo per cui potremmo descrivere l'effetto della gravità come uno spazio-tempo curvo sarà dovuto all'implementazione del principio di equivalenza tra gravitazione ed inerzia nel contesto della già presente Relatività Speciale.

Capitolo 3

Richiami di Relatività Speciale e spazio-tempo piatto

In questo capitolo facciamo un richiamo di Relatività Speciale, essendo interessati a contestualizzarla sia come sviluppo di idee che come sviluppo formale. In particolare ci concentreremo sui principi costituenti, sulle caratteristiche dello spaziotempo, sul calcolo tensoriale, sulle varie applicazioni e sulle correnti (conservate) che possiamo avere. Per questa parte di appunti qualsiasi testo contiene dei riferimenti sufficienti, ma si può fare riferimento al libro di Barone [1].

3.1 Principi fondativi

3.1.1 La Meccanica Classica

Partiamo dall'inizio, ovvero da un elemento importante, che è il **principio di relatività** (o di relatività dei moti), che risale a Galileo e Newton nella loro prima formulazione, nell'ambito della meccanica pre-relativistica. Il principio di relatività si basa su una speciale classe di sistemi di riferimento che sono i **sistemi di riferimento inerziali**. La meccanica newtoniana li definisce come un insieme di sistemi di riferimento in cui le leggi della natura assumono la forma descritta nei Principia Mathematica di Newton. In particolare, le leggi del moto le possiamo riassumere attraverso la famosa equazione:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (3.1.1)$$

Facciamo un esempio rimanendo in meccanica pre-relativistica. Prendiamo un insieme di n punti materiali, ognuno dotato di massa, in interazione gravitazionale tra di loro. L'equazione che descrive questo sistema è della forma:

$$m_n \frac{d^2 \vec{x}_n}{dt^2} = G \sum_i \frac{m_n m_i (\vec{x}_i - \vec{x}_n)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_n|^3} \quad (3.1.2)$$

che è l'equazione del moto dell' n -esimo corpo. Facendo variare n su tutti i corpi presenti, otteniamo un insieme di equazioni differenziali. Tali equazioni sono invarianti sotto l'effetto di una classe di trasformazioni, del tipo:

$$O : (\vec{x}, t) \longrightarrow O' : (\vec{x}', t') \quad (3.1.3)$$

$$\begin{cases} \vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{d} \\ t' = t + \tau. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Trasformazioni del tipo (3.1.4) si chiamano anche *trasformazioni di Galileo* e rappresentano rotazioni (R), traslazioni nello spazio o nel tempo ($\vec{d}$, τ), e anche moto relativo tra i due osservatori con una velocità $\vec{v}$.

L'equazioni (3.1.2) sono invarianti in forma se le rotazioni e la velocità relative sono indipendenti dal tempo. La classe di trasformazioni che lascia invariate le equazioni del moto non può essere del tutto arbitraria, infatti, possiamo accettare una traslazione tra i due sistemi di riferimento, una rotazione rigida dei due sistemi e, al più, una velocità relativa costante (dunque moti non accelerati e sistemi non rotanti).

Indicando $\vec{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$, possiamo riscrivere (3.1.4) in componenti:

$$\begin{cases} x'_i = R_{ij}x^j + v_i t + d_i \\ t' = t + \tau \end{cases} \quad (3.1.5)$$

in cui dobbiamo chiedere che R sia una matrice ortogonale, quindi tale che:

$$RR^T = R^T R = \mathbb{1} \quad (3.1.6)$$

ed è una matrice di rotazione che dipende da tre angoli, ovvero, i tre angoli di Eulero. Come già detto, $\vec{v}$ è un vettore di velocità relativa tra i due osservatori, $\vec{d}$ è un vettore costante, che rappresenta la possibilità che i due sistemi di coordinate siano tra loro traslati, e τ è una costante che ci dice che l'orologio di un osservatore può non essere sincronizzato con quello dell'altro osservatore. Queste trasformazioni formano un gruppo, a dieci parametri, che è il **gruppo di Galileo**.

Abbiamo detto che le equazioni del moto classiche sono invarianti per trasformazioni del gruppo di Galileo. Possiamo verificarlo facilmente. Consideriamo una situazione semplificata, cioè orientiamo gli assi in modo che il moto sia solo nella direzione $\hat{x}$, in questo modo (3.1.4) diventa:

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t \\ t' = t. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

La velocità, per i diversi osservatori, di un corpo materiale che si sta muovendo nello spazio, al passare del tempo, sarà:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (3.1.8)$$

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'} = \frac{d\vec{x}'}{dt} = \frac{d\vec{x} + \vec{v}t}{dt} = \vec{u} + \vec{v} \quad (3.1.9)$$

in cui (3.1.9) ci dà la legge di trasformazione delle velocità. Possiamo a questo punto calcolarci l'accelerazione che l'osservatore O' vede:

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{u}'}{dt'} = \frac{d(\vec{u} + \vec{v})}{dt} = \vec{a} \quad (3.1.10)$$

il che ci permette di vedere che l'accelerazione è invariante per trasformazioni di Galileo e ciò rende le equazioni della Meccanica Classica invarianti per osservatori inerziali. Infatti, se l'accelerazione è invariante quando cambiamo osservatore, se gli osservatori sono inerziali, allora anche la forza lo è, poiché la forza è tipicamente una relazione tra i due corpi e dipende dalla differenza relativa delle posizioni, differenza che è invariante per trasformazioni di Galileo.

Teniamo a mente che non tutti i sistemi di riferimento sono inerziali; in questi casi le equazioni del moto che utilizziamo per descrivere un fenomeno fisico hanno delle modifiche e non sono invarianti in forma. Il tipico esempio è la nascita delle cosiddette forze fittizie.

3.1.2 La Relatività Speciale e le trasformazioni di Lorentz

Dal punto di vista della meccanica newtoniana, lo spazio e il tempo sono assoluti; in particolare, il tempo è un parametro rispetto a cui il sistema evolve. I sistemi di riferimento inerziali sono quei sistemi, a riposo o in moto rettilineo uniforme, rispetto a tale spazio assoluto.

Tutto questo viene superato con Einstein nel 1905. Ci si rende conto che tutta la Meccanica Classica, che deriva dalla formulazione galileiana e newtoniana, è invariante sotto l'effetto delle trasformazioni di Galileo (3.1.4), in realtà non è una teoria completa. Il problema sorge quando si arriva alla formulazione completa dell'elettromagnetismo tramite le equazioni di Maxwell, cioè le equazioni del moto del campo elettromagnetico. Esse non sono invarianti per trasformazione di Galileo, e ciò è legato al fatto che le onde elettromagnetiche si propagano alla stessa velocità indipendentemente dal fatto che la sorgente sia a riposo o in moto rispetto all'osservatore che descrive l'onda.

Nasce allora l'idea che le equazioni di Maxwell siano sì le equazioni del campo elettromagnetico, ma scritte in un sistema di riferimento a riposo, rispetto uno strano "corpo", chiamato *etere*. Se così fosse allora dovremmo

essere in grado di mettere in evidenza il nostro moto rispetto l'etere; come noto questo si è dimostrato non possibile.

L'etere è di fatto un'idea, qualcosa che non ha realtà fisica. Il famoso esperimento di Michelson e Morley diede infatti risultato negativo. Nel 1905 nasce la **Relatività Speciale** di Einstein.

Nella sua teoria, Einstein, generalizza il principio di relatività basandolo su due postulati, che non sono altro che le basi concettuali dalle quali discende tutto il resto:

- **Principio di relatività**, esteso a tutte le leggi fisiche. Il principio di relatività nella formulazione Einsteiniana dice che tutte le leggi di natura (meccanica ed elettromagnetismo) hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.¹
- **Costanza della velocità della luce nel vuoto.**

Quindi, rimane centrale il concetto di *sistema di riferimento inerziale*, essendo ancora fondamentale il principio di relatività, che esprime sostanzialmente un'invarianza delle leggi di natura dall'osservatore. Tutti gli osservatori inerziali danno la stessa descrizione degli stessi fenomeni meccanici ed elettromagnetici.

Questi postulati hanno delle conseguenze molto importanti. La prima cosa di cui ci rendiamo conto è che se noi abbiamo due sistemi di riferimento inerziali, O con $(\vec{x}, t)$ e O' con $(\vec{x}', t)$, allora le trasformazioni tra quello che descrivono i due osservatori non sono più le trasformazioni di Galileo (3.1.4), perché non permettono che la velocità della luce sia la stessa per entrambi.

Imponendo la costanza di c , le trasformazioni tra i due osservatori cambiano, rispetto la MC, e diventano le **trasformazioni di Lorentz**.

Facciamo riferimento alla figura 3.1. Supponiamo di essere l'osservatore O e vediamo arrivare l'osservatore O' da sinistra con velocità $\vec{v}$. Ad un certo istante ci troviamo nella stessa posizione, successivamente ci separiamo per il resto dei nostri giorni, ma per O' il discorso è esattamente simmetrico.

Se organizziamo le cose, per semplicità, in modo tale che quando ci incontriamo entrambi misuriamo $t = t' = 0$, (se non misuriamo la stessa cosa ci sarebbe un offset tra i due orologi e non sarebbe comunque un problema) e, allo stesso tempo, lanciamo un segnale luminoso, questo si propaga nello spazio, arrivando in P . Entrambi abbiamo due eventi (eventi in RS vuol dire punti dello spaziotempo), a cui associamo certe coordinate. Se la luce ha la

¹Si dice che vogliamo scrivere le leggi della natura in una forma covariante, il che vuol dire che esse conservano la loro forma sotto certe trasformazioni. Si potrebbe anche dire che si richiede che tutti i membri di una legge fisica trasformino allo stesso modo. Ad esempio, la legge $\vec{F} = m\vec{a}$ è una legge vettoriale e sotto rotazioni il membro di sinistra e quello di destra si trasformano allo stesso modo, per cui la legge rimane nella stessa forma anche in un SR ruotato rispetto quello di partenza. In RS richiediamo che le leggi fisiche siano invarianti per trasformazioni di Lorentz e per riuscirci dovremo introdurre dei nuovi oggetti, che sono i *tensori*.

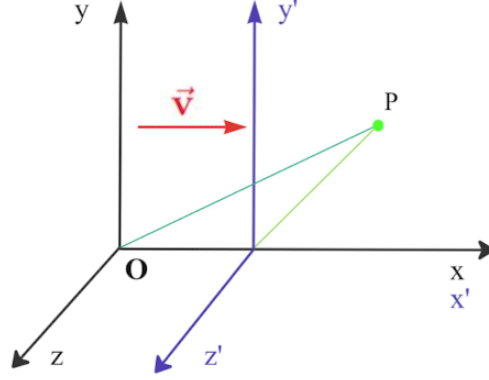


Figura 3.1: Trasformazione di Lorentz tra sistemi di riferimento inerziali.

stessa velocità per entrambi, allora è necessario che la distanza spaziale (al quadrato) compiuta per i due osservatori sia:

$$O : x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (3.1.11)$$

$$O' : x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (3.1.12)$$

in cui c è la stessa per entrambi gli osservatori, come imposto dal secondo postulato. Utilizzando le trasformazioni di Galileo (3.1.4) non riusciremmo a soddisfare le relazioni.

Da qui nascono le *trasformazioni di Lorentz* (nella direzione $\hat{x}$)²:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \beta x) \end{cases} \quad (3.1.14)$$

in cui valgono:

$$\beta = \frac{v}{c \text{ u.n.}} = v \quad (3.1.15)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.1.16)$$

che se $v < c$ allora $\beta < 1$ e $\gamma > 1$. Le trasformazioni di Lorentz ci dicono che la relazione tra i due osservatori non è più quella di Galileo, in particolare

²Per una direzione generica (vedi p. 8 delle note del prof. Fornengo) vale:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{r} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta}}{\beta^2} - \gamma \vec{\beta} t \\ t' = \gamma(t - \vec{\beta} \cdot \vec{r}). \end{cases} \quad (3.1.13)$$

il tempo non è più un tempo assoluto come in meccanica newtoniana, ma trasforma come le coordinate spaziali, per cui il tempo è relativo e dipende dall'osservatore.

Dunque, dalle trasformazioni (3.1.14) vediamo che spazio e tempo sono entrambe delle coordinate di ciò che avviene nel mondo fisico ed entrambe sono relative all'osservatore. Oltre alle trasformazioni di $(\vec{x}, t)$ possiamo calcolare anche la composizione della velocità, che sono della forma:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \quad (3.1.17)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left[1 - \frac{vu_x}{c^2}\right]} \quad (3.1.18)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma \left[1 - \frac{vu_x}{c^2}\right]} \quad (3.1.19)$$

in cui notiamo anche la trasformazione anche delle componenti y e z poiché quando scriviamo:

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad , \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'} \quad (3.1.20)$$

è vero che y' e z' non cambiano, ma cambia il tempo e dunque le velocità nelle direzioni ortogonali al moto relativo cambiano comunque.

Ovviamente, facendo la derivata delle velocità possiamo calcolare la trasformazione delle accelerazioni. Non lo facciamo esplicitamente, ma ci accorgiamo subito che l'accelerazione non è più invariante per trasformazioni di Lorentz, infatti, troviamo:

$$a'_x \neq a_x \quad , \quad a'_y \neq a_y \quad , \quad a'_z \neq a_z. \quad (3.1.21)$$

L'accelerazione era invariante per trasformazione di Galileo e questo permetteva sostanzialmente di far sì che le leggi della natura, nella formulazione newtoniana, fossero invarianti per gli osservatori inerziali, ora non è più così. Però attenzione, perché ciò non vuol dire che la forza non sia più legata con l'accelerazione del corpo, ma vuol dire se le equazioni del sistema fisico devono soddisfare il primo principio, quello di relatività, cioè devono essere le stesse per tutti gli osservatori, allora dobbiamo trovare un linguaggio che ci permetta di far sì che le equazioni che scriviamo siano invarianti in forma quando passiamo da un sistema ad un altro, cioè invarianti per trasformazioni di Lorentz.

Quindi dovremmo dare una descrizione un pochino più elaborata della Fisica e lo faremo con il calcolo tensoriale nel proseguo del capitolo.

Non lo abbiamo ricordato fin'ora, ma se facciamo un opportuno limite delle trasformazioni di Lorentz ritroviamo le trasformazioni galileane. Il limite che ci permette di passare dalla RS alla MC è il limite di basse velocità $v \ll c$, o equivalentemente $\beta \ll 1$. Questo dice che le trasformazioni di Lorentz sono una generalizzazione delle trasformazioni di Galileo.

3.1.3 Prime conseguenze

Ora che abbiamo visto quali siano le trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali in Relatività Speciale, ossia, le trasformazioni di Lorentz (3.1.14), possiamo vedere quali siano le principali conseguenze di tutto ciò.

La prima è la cosiddetta **contrazione delle lunghezze**, che si manifesta quando osserviamo una lunghezza nella direzione del moto relativo tra i due osservatori.

Prendiamo una sbarretta di metallo a riposo nel sistema di riferimento O' , che la vede lunga $L_0 = x'_2 - x'_1$. L'osservatore O vede l'asta in moto, lungo la direzione x , con velocità v e dunque i suoi estremi sono nelle posizioni:

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - vt) \\ x'_2 = \gamma(x_2 - vt) \end{cases} \quad (3.1.22)$$

dunque, la lunghezza misurata da O , in moto rispetto l'oggetto, è:

$$x'_2 - x'_1 = L_0 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L \implies L(v) = \frac{L_0}{\gamma} < L_0. \quad (3.1.23)$$

La seconda conseguenza importante di (3.1.14) è la **dilatazione temporale**. Infatti, se l'osservatore O' ha un orologio campione e in $x'_1 = x'_2$ misura un intervallo temporale $T_0 = t'_2 - t'_1$, allora un'osservatore O , in moto relativo rispetto O' , vede:

$$\begin{cases} t_1 = \gamma(t'_1 + \beta x'_1) \\ t_2 = \gamma(t'_2 + \beta x'_2) \end{cases} \quad (3.1.24)$$

e dunque un intervallo temporale:

$$T = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma T_0 \implies T(v) = \gamma T_0 > T_0. \quad (3.1.25)$$

La terza conseguenza importante è la **simultaneità**. Se guardiamo eventi che avvengono nella direzione lungo cui c'è moto relativo, se per uno dei due osservatori due eventi sono simultanei, quindi nella stessa posizione longitudinale, allora non lo sono per l'altro. Però, se invece gli eventi avvengono nella stessa posizione trasversalmente, allora non abbiamo differenze e sono simultanei.

Questo chiaramente porta con sé il potenziale problema dell'ordinamento temporale degli eventi. L'ordinamento non è di fatto un problema se i due eventi sono tra di loro causalmente scorrelati, ma lo diventa se uno è causa e l'altro è effetto. Infatti, l'ordinamento temporale potrebbe portare a una violazione della relazione causa-effetto, dunque della causalità.

Se un certo evento è stato causato da un altro è chiaro che temporalmente dovrà avvenire dopo, ma se la simultaneità è violata potrebbe capitare che un

osservatore vede la causa avvenire prima dell'effetto (quindi come dovrebbe essere) e un altro osservatore avviene l'effetto prima della causa (causalità violata).

Per mantenere la causalità, che è una richiesta fondamentale della fisica, bisogna imporre che ci sia una velocità limite con cui i fenomeni possono tra di loro avere interazione, tale velocità limite è c .

Notiamo che le trasformazioni di Lorentz di per sé non impediscono che ci siano sistemi che si muovono a velocità superiori alla velocità della luce. Però se due osservatori si muovono l'uno rispetto all'altro con velocità maggiori di c , al netto che questa cosa sia possibile, allora potremmo trovare un osservatore che ha la relazione di causa-effetto scambiati rispetto ad un altro. Per cui visto che vogliamo mantenere la causalità, richiediamo noi a mano che la velocità c sia una velocità limite.

Verifichiamo velocemente questo limite di velocità. Faccio riferimento al capitolo 2.8 del Barone [1]. Prendiamo due eventi A e B connessi causalmente in un certo sistema di riferimento O , supponendo ad esempio che un segnale viaggi da $A(x_a, 0, 0, t_a)$ fino $B(x_b, 0, 0, t_b)$. Se la velocità del segnale è $\vec{u} = u\hat{x}$ costante, allora vale:

$$x_b - x_a = u(t_b - t_a). \quad (3.1.26)$$

Ovviamente, stiamo sottintendendo che l'evento B si verifichi dopo l'evento A . Se a questo punto noi ci mettiamo in un sistema di riferimento O' , in moto rispetto O , con velocità $\vec{v} = v\hat{x}$ costante, allora lui vedrà l'intervallo temporale:

$$\Delta t' = t'_b - t'_a = \gamma \left[(t_b - t_a) - \frac{v}{c^2} (x_b - x_a) \right] \quad (3.1.27)$$

sostituendoci dentro (3.1.26) diventa:

$$\Delta t' = \gamma \left(1 - \frac{vu}{c^2} \right) \Delta t. \quad (3.1.28)$$

Vediamo da (3.1.28) che se u e v sono più piccole di c , allora il termine tra parentesi è positivo e il segno di $\Delta t'$ è lo stesso di Δt , altrimenti, se u e v fossero maggiori di c , allora avremmo la successione temporale degli eventi invertita e una rottura della causalità.

3.2 Lo spaziotempo

Vediamo in questa sezione tutte le nozioni fondamentali riguardanti lo spaziotempo della Relatività Speciale.

3.2.1 Spaziotempo di Minkowski

Per veder sorgere in modo naturale una descrizione unificata dello spazio e del tempo facciamo un passo indietro e in Meccanica Classica prendiamo due

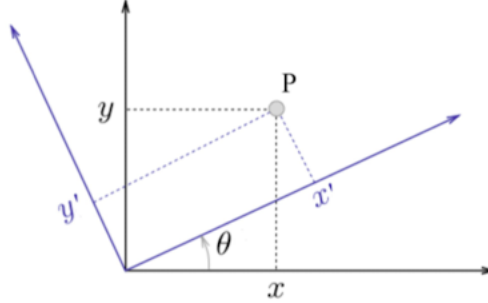


Figura 3.2: Sistemi di riferimento ruotati di un angolo θ .

sistemi di riferimento diversi, nel piano euclideo, ruotati tra di loro. Si veda la figura 3.2.

La relazione che abbiamo tra essi è:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (3.2.1)$$

di cui possiamo vedere la somma al quadrato dei coefficienti fare 1. Questo ha come conseguenza (è una proprietà dello spazio-euclideo):

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \quad (3.2.2)$$

ossia che la distanza tra due punti P e Q sia invariante e dunque non dipenda dal sistema di coordinate. Proprietà che avevamo già imparato nel capitolo §2.

Ritorniamo in RS e ripartiamo dalle trasformazioni (3.1.14) e scriviamole in un modo più simile a come le scrivevamo in Meccanica Classica. Questo nostro tentativo di riscrivere le trasformazioni di Lorentz ci permetterà di vedere in modo automatico una descrizione unificata dello spazio e del tempo, permettendo la nascita dello **spaziotempo**.

Consideriamo l'impostazione usuale dei sistemi di riferimento:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) = \gamma x - \gamma vt = \gamma x - \gamma \beta ct \\ ct' = c\gamma \left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \gamma ct - \gamma \beta x \end{cases} \quad (3.2.3)$$

in cui notiamo che ct ha le dimensioni di una lunghezza. Notiamo anche che una trasformazione del tipo (3.2.3) riguarda solo la velocità e non abbiamo traslazioni o rotazioni spaziali o temporali, e viene chiamata trasformazione di **boost**. È conveniente definire le trasformazioni di Lorentz anziché come (3.1.14), invece come trasformazioni che ci portino da (x, ct) a (x', ct') poiché così lavoriamo sempre con lunghezze, e che comunque quando passiamo in

unità naturali tornano ad essere (x, t) e (x', t') . Scrivendo le (3.2.3) in unità naturali abbiamo:

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \gamma\beta t \\ t' = \gamma t - \gamma\beta x. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

In un certo senso possiamo dire che le trasformazioni (3.2.1) e (3.2.4) non sono così tanto diverse nel profondo. Infatti se proviamo a fare la differenza dei quadrati dei coefficienti di (3.2.4) troviamo:

$$\gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1 \quad (3.2.5)$$

dunque, potremmo trovare un modo per riparametrizzare i coefficienti di (3.2.4) tramite dei parametri che permettano di verificare comunque (3.2.5). Noi conosciamo delle funzioni la cui differenza dei quadrati fa 1 e sono le funzioni iperboliche. Infatti, se definiamo:

$$\begin{cases} \gamma = \cosh \phi \\ \gamma\beta = \sinh \phi \end{cases} \quad (3.2.6)$$

in cui il parametro ϕ è legato alla velocità relativa tra i due sistemi di riferimento, allora abbiamo una cosa del tutto equivalente a (3.2.4) e tale per cui valga (3.2.5). Possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x' = x \cosh \phi - t \sinh \phi \\ y' = -x \sinh \phi + t \cosh \phi \end{cases} \quad (3.2.7)$$

che sono trasformazioni formalmente somiglianti alle rotazioni spaziali nel piano euclideo, ma di fatto molto diverse poiché coinvolgono spazio e tempo. Trasformazioni del tipo (3.2.7) è verificabile lascino invariata la quantità:

$$x'^2 - (ct')^2 = x^2 - (ct)^2 \quad (3.2.8)$$

che possiamo identificare come una *distanza*. Posso definire l'insieme di spazio e tempo in modo da formare una varietà spazio-tempo, che chiameremo **spazio-tempo di Minkowski** $\mathbb{M}^4$, dotarlo di metrica e definire una distanza come (3.2.8).

Quindi, lo spazio più il tempo lo vediamo come una varietà metrica, su cui possiamo definire una geometria (in analogia con quanto fatto nello spazio euclideo).

Notiamo che tutto questo deriva solo da una riscrittura delle trasformazioni di Lorentz, che a loro volta sono una conseguenza diretta e necessaria dei due postulati della Relatività Speciale, in particolare sono una forte conseguenza del secondo. Vedremo meglio le proprietà metriche di $\mathbb{M}^4$ nella sezione §3.2.2.

Se vogliamo utilizzare un linguaggio moderno, lo spaziotempo della meccanica classica pre-relativistica cosa vedeva? Vedeva lo spazio tridimensionale, in cui avvengono i fenomeni fisici, e le relazioni spaziali che cambiano nel

tempo, visto come parametro esterno assoluto. Ora, in Relatività Speciale sia spazio che tempo sono sullo stesso piano e lo vediamo come uno luogo geometrico quadridimensionale a cui associamo posizione e tempo a qualcosa che succede nel mondo fisico, cioè ad un **evento**. Dal punto di vista geometrico l'*evento* non è nient'altro che un punto, P , in uno spaziotempo quadridimensionale che coinvolge posizione e tempo.

Le trasformazioni di Lorentz hanno un'analogia formale con le rotazioni nello spazio euclideo, ma sono rotazioni rispetto alle trasformazioni di boost. Inoltre abbiamo anche visto che la distanza cambia rispetto alla distanza del caso Euclideo.

Per riassumere al meglio il tutto consideriamo un esempio, guardandolo dal punto di vista geometrico.

Mettiamoci nello spazio euclideo a due dimensioni e sediamoci in un sistema S , definito da:

$$\begin{aligned} S : \text{asse } x_1 : & \quad x_2 = 0 \\ & \text{asse } x_2 : \quad x_1 = 0 \end{aligned}$$

prendiamo anche un'altro sistema di riferimento S' :

$$\begin{aligned} S' : \text{asse } x'_1 : & \quad x'_2 = 0 \\ & \text{asse } x'_2 : \quad x'_1 = 0. \end{aligned}$$

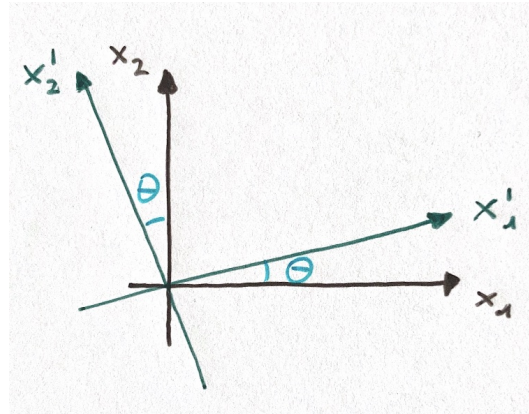


Figura 3.3: Diagramma spaziale.

Facendo riferimento alla figura 3.3 vogliamo mettere in relazione i due sistemi di riferimento guardando, ad esempio, gli assi di S' da S :

$$\begin{aligned} S : x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ x'_2 &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{aligned}$$

gli assi di S' saranno quindi:

$$\begin{aligned} S : \text{asse } x'_1 : \quad x'_2 &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta = 0 \\ \text{asse } x'_2 : \quad x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = 0. \end{aligned}$$

il che vuol dire che i due assi di S' sono le due rette:

$$\begin{aligned} S : \text{asse } x'_1 : \quad x_2 &= x_1 \tan \theta \\ \text{asse } x'_2 : \quad x_2 &= -x_1 \frac{1}{\tan \theta} \end{aligned}$$

Ma tutto ciò è ancora in uno spazio euclideo, cosa succede nello spazio di Minkowski?

La costruzione si fa allo stesso modo, ma chiaramente ci sarà qualche differenza, perché ϕ , il parametro attraverso il quale esprimiamo la, chiamiamola "rotazione", non è un angolo di Eulero. Poniamo $x = (t, \vec{x}) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ e prendiamo due osservatori:

$$\begin{aligned} O : \text{asse } x_0 : \quad x_1 &= 0 \\ \text{asse } x_1 : \quad x_0 &= 0 \\ O' : \text{asse } x'_0 : \quad x'_1 &= 0 \\ \text{asse } x'_1 : \quad x'_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ora facciamo riferimento alla figura 3.4, in cui posizioniamo l'asse x_1 come luogo geometrico dei punti che hanno tutti lo stesso tempo x_0 , e analogamente per l'asse x'_0 , come il luogo geometrico dei punti che hanno tutte le stesse x'_1 in comune.

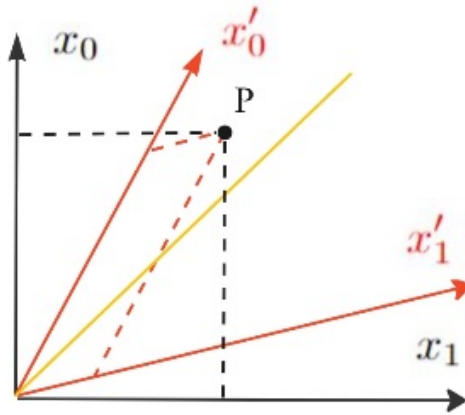


Figura 3.4: Diagramma spaziotemporale.

Come fatto prima, vogliamo vedere gli assi di O' dal punto di vista di O , quindi scriviamo:

$$\begin{aligned} O : \text{asse } x'_0 : \quad x'_1 &= x_1 \cosh \phi - x_0 \sinh \phi = 0 \\ \text{asse } x'_1 : \quad x'_0 &= -x_1 \sinh \phi + x_0 \cosh \phi = 0. \end{aligned}$$

dunque gli assi di O' appariranno come due rette.³

$$\begin{aligned} O : \text{asse } x'_0 : \quad x_0 &= x_1 \frac{1}{\tanh \phi} \\ \text{asse } x'_1 : \quad x_0 &= x_1 \tanh \phi. \end{aligned}$$

Notando che:

$$\tanh \phi = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} = \frac{\gamma \beta}{\gamma} = \beta \quad (3.2.9)$$

riusciamo ad intuire come posizionare reciprocamente gli assi di O e O' , ovvero, come in figura 3.5.

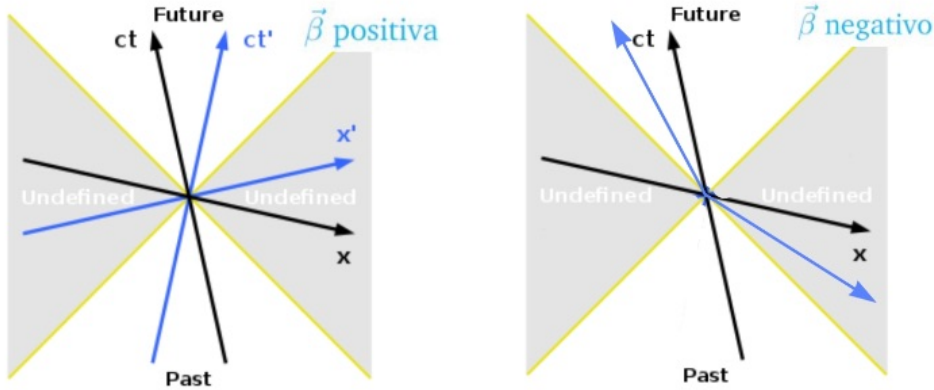


Figura 3.5: A sinistra la raffigurazione della posizione degli assi nel caso $\beta > 0$, cioè in caso di moto lungo la direzione delle $\hat{x}$ positive. A destra la raffigurazione della posizione degli assi nel caso $\beta < 0$, cioè in caso di moto lungo la direzione delle $\hat{x}$ negative.

Notiamo che la retta a 45° , è il luogo geometrico dei punti occupati da un segnale luminoso che parte al tempo $t = 0$ nella posizione $x = 0$, è la

³Notiamo che anche partendo dalle trasformazioni di Lorentz (3.1.14) saremmo giunti allo stesso risultato. Infatti:

$$\begin{aligned} O : \text{asse } x'_0 : \quad x'_1 &= \gamma(x_1 - \beta x_0) = 0 \implies x_0 = \frac{1}{\beta} x_1 \\ \text{asse } x'_1 : \quad x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x_1) = 0 \implies x_0 = \beta x_1. \end{aligned}$$

bisettrice dei due assi e rimane bisettrice degli assi anche dell'altro sistema di riferimento; ciò esprime il postulato della costanza della velocità della luce per i due osservatori.

Quindi, visto esplicitamente che anche lo spazio di Minkowski può essere scritto con uno spazio metrico, con una metrica diversa da quella euclidea (vedi la relazione (3.2.8)), che ha caratteristiche differenti e differenti relazioni tra gli osservatori.

3.2.2 Proprietà metriche

Vedi l'Appendice A per alcune convenzioni tipicamente utilizzate in geometria differenziale per quanto riguarda le varietà e le funzioni (tensori) metriche.

Rifacciamoci alla solita situazione fisica in cui l'osservatore O' passa esattamente in coincidenza di O al tempo $t = t' = 0$. Quando i due sono coincidenti, vengono azionati gli orologi e viene lanciato un segnale luminoso, che raggiunge un punto P posizionato nello spazio che, non dipende del sistema di riferimento. Vedi la figura 3.6. Per O quando il raggio giunge P ha percorso una distanza Δs nello spazio ed è passato un certo tempo Δt , allo stesso modo l'osservatore O' vede una distanza $\Delta s'$ ed è passato per lui un tempo $\Delta t'$.

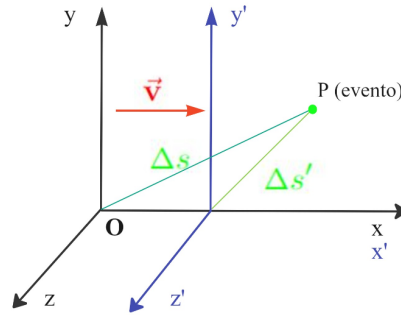


Figura 3.6: Distanze per due sistemi di riferimento.

Il secondo postulato, che dice che la velocità della luce nel vuoto c è la stessa per tutti gli osservatori inerziali, implica che per O e O' , per traiettorie di tipo luce, valgono (in unità naturali):

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2 = 0 \quad (3.2.10)$$

$$(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - (\Delta t')^2 = 0. \quad (3.2.11)$$

e da queste condizioni si ritrovano le trasformazioni di Lorentz.

Però, le trasformazioni (3.1.14), non solo permettono di cambiare sistema di riferimento $(t, x) \leftrightarrow (t', x')$ e tengono in conto del fatto che la velocità della

luce nel vuoto è la stessa per entrambi gli osservatori, ma è facile far vedere che definita la quantità:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2 \quad (3.2.12)$$

vale:

$$\Delta s^2 = (\Delta s')^2 \quad (3.2.13)$$

ovvero, la quantità Δs^2 , definita da (3.2.12), è **invariante per trasformazioni di Lorentz**.⁴ La relazione (3.2.13) è una proprietà di relazione tra due punti nello spazio tempo, cioè presi due punti A e B , ognuno dei quali ha coordinate (t_A, x_A) e (t_B, x_B) , questi sono tali per cui se definiamo una distanza come (3.2.12), cioè con il teorema di Pitagora per quanto riguarda la parte spaziale (usando coordinate cartesiane), e sottraendo il t^2 , allora tale distanza è un invariante di Lorentz.

Quello che abbiamo detto ha tutte le caratteristiche di quello visto nella discussione iniziale per definire una distanza in uno spazio e tale da renderlo uno spazio metrico. La differenza è che lo spazio che abbiamo trovato ora deve essere descritto da quattro parametri, cioè da quattro coordinate, quindi dobbiamo aggiungere il tempo alle tre coordinate spaziali. Creiamo formalmente così lo *spaziotempo di Minkowski* $\mathbb{M}^4$.

Cerchiamo ora un'espressione per le funzioni metriche di $\mathbb{M}^4$, ma prima rivediamo cosa succedeva nello spazio euclideo. Le tre coordinate spaziali le possiamo scrivere come $x^i = (x^1, x^2, x^3)$ e la distanza, infinitesima, nel sottospazio spaziale diventa in forma compatta:⁵

$$dl^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.2.14)$$

in forma matriciale la metrica del sottospazio spaziale è:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.15)$$

che è quello che chiameremo *tensore metrico della varietà euclidea*. Ovviamente (3.2.15) è scritto nelle coordinate cartesiane, in cui assume una forma

⁴Lo si può verificare facilmente inserendo le trasformazioni (3.1.14) in $(\Delta s')^2$:

$$\begin{aligned} (\Delta s')^2 &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - (\Delta t')^2 \\ &= \gamma^2(\Delta x - \beta \Delta t)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \gamma^2(\Delta t - \beta \Delta x)^2 \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2)\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \gamma^2(1 - \beta^2)\Delta t^2 + 2\beta\gamma^2(\Delta x \Delta t - \Delta t \Delta x) \\ &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2. \end{aligned}$$

⁵Usando la notazione di Einstein, in cui gli indici ripetuti sono sommati.

diagonale e a coefficienti costanti, ma potremmo utilizzare tranquillamente le coordinate sferiche $x^i = (r, \theta, \varphi)$, in cui:

$$dl^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j \quad (3.2.16)$$

$$= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (3.2.17)$$

$$= \eta_{rr} dr^2 + \eta_{\theta\theta} d\theta^2 + \eta_{\varphi\varphi} d\varphi^2 \quad (3.2.18)$$

$$= \eta_{11} dr^2 + \eta_{22} d\theta^2 + \eta_{33} d\varphi^2 \quad (3.2.19)$$

e dunque:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.2.20)$$

che è ancora una tensore metrico diagonale, ma non più a coefficienti costanti.

Tutta la descrizione che dovremmo fare dovrà tenere conto, del fatto che non è il set di coordinate a determinare le proprietà della varietà, ma è solo un set di parametri che ci permette di descriverlo. Come dopotutto avevamo già visto nel capitolo §2.

Si può dimostrare che per quanto riguarda uno spazio euclideo, quindi uno spazio piatto, che esiste sempre, un sistema di coordinate in cui il tensore metrico è diagonale con coefficienti costanti. Però, questo a noi ora interessa relativamente poiché siamo interessati allo spazio di Minkowski, di quattro dimensioni e in cui la distanza infinitesima tra due punti è definita dall'equazione (3.2.12).

Cominciamo a usare una notazione leggermente differente da quella a cui siamo abituati in Meccanica Classica, in cui indichiamo:

$$x^\alpha = (t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad , \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \quad (3.2.21)$$

Fatto questo la distanza (3.2.12) la possiamo scrivere in forma infinitesima, se i due punti sono infinitesimamente vicini, come:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.2.22)$$

$$= -dt^2 + dl^2 \quad (3.2.23)$$

$$= \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.2.24)$$

$$= \eta_{00} dx^{02} + \eta_{11} dx^{12} + \eta_{22} dx^{22} + \eta_{33} dx^{32}. \quad (3.2.25)$$

Guardando la forma (3.2.25) vediamo subito che il tensore metrico è diagonale nel set di coordinate scelto:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.26)$$

e di cui possiamo scrivere gli elementi di matrice:

$$\eta_{00} = -1 \quad , \quad \eta_{ij} = \delta_{ij}. \quad (3.2.27)$$

Rispetto alle varietà Euclidee in (3.2.26) c'è uno degli autovalori della metrica che ha segno opposto rispetto agli altri, il che è proprio la caratteristica dello spaziotempo.⁶ Avremo modo di verificare in seguito che si tratta di uno spazio piatto, ma un'anticipazione di ciò sta nel fatto che esiste un set di coordinate in cui la metrica è diagonale e costante.

Potremmo essere leggermente più precisi (usando il segno che balla nella definizione di η) e scrivere (3.2.25) come:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -\hat{\eta}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.2.29)$$

dove abbiamo le due forme matriciali:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.30)$$

Generalmente chiamiamo **distanza propria** la quantità ds^2 definita come spazio - tempo, mentre chiamiamo **tempo proprio** quella quantità definita come tempo - spazio:

$$d\tau^2 = -ds^2 = dt^2 - dl^2.$$

3.2.3 Il tempo, gli osservatori inerziali e le world-line

Facciamo una pausa e, consci di tutto quello che abbiamo visto, pensiamo a che cos'è per noi (osservatore O) l'asse temporale $x_0 = t$?

Potremmo dire che è il luogo geometrico dei punti in cui $x = 0$, e allo stesso modo anche per l'osservatore O' è la stessa cosa, infatti per esso l'asse tempo t' , è il luogo geometrico dei punti in cui $x' = 0$.

Però potrebbe sembrare strana questa rappresentazione ad alcuni. Perché noi stiamo cercando di rappresentare sul piano della lavagna, che è un piano euclideo, uno spazio non è euclideo. L'asse t' visto da O non è altro che

⁶Infatti, si osservi che lo spaziotempo non è euclideo! Lo spazio euclideo in quattro dimensioni avrebbe:

$$\eta_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.28)$$

Nello spaziotempo è possibile definire una classe di sistemi di coordinate, rispetto i quali le trasformazioni di coordinate sono quelle di Lorentz, del tipo (3.1.14), e per effetto delle quali la distanza (3.2.12) è invariante.

l'osservatore in moto, perché essendo esso il luogo geometrico dei punti in cui lui sta sempre nella sua origine, visto da O è lui che si sta muovendo con velocità positiva lungo l'asse x . Infatti, al passare del nostro tempo t , il tempo t' occupa posizioni x crescenti. Si faccia riferimento alla figura 3.7.

La bisettrice, come detto in precedenza, è il luogo geometrico dei punti, di tutti gli oggetti che si muovono esattamente alla velocità della luce. Notiamo che se ci volessimo porre nel sistema di riferimento del segnale luminoso, quindi sulla bisettrice, avremmo una situazione degenera, in cui il cono si chiude.

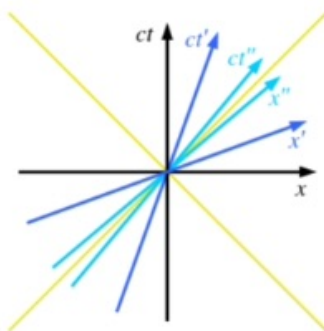


Figura 3.7: Rappresentazione che all'aumentare di β gli assi si chiudono fino a diventare degeneri nel caso di $\beta = v = c$.

Quindi non abbiamo capito molto. Vediamo come è naturale arrivare a una descrizione geometrica anche dello spaziotempo, ma diamo prima una *definizione geometrica* di che cos'è un *osservatore inerziale*.

Un'osservatore non va visto, come a volte può sembrare da certi esercizi di relatività, come una persona con in mano un binocolo, che si siede in un punto O e guarda cosa succede attorno a sé; in generale, pensando a tutto quello che abbiamo detto fino adesso, possiamo vedere un'osservatore come un sistema di coordinate che realizza un'osservazione misurando posizione, quindi (x, y, z) , e tempo (t) di un evento.

Già nella definizione generale di un osservatore stiamo già dando una definizione anche geometrica, perché lo vediamo come un sistema di coordinate e definiamo degli **eventi** come dei punti nello spazio-tempo.

Quindi tutto ciò che avviene, un evento, è un punto in uno spazio-tempo, cioè un punto su una varietà metrica. Un osservatore inerziale deve avere qualche caratteristica che lo renda inerziale.

Ritorniamo a ragionare sul tempo. Dal punto di vista dello spazio, la distanza $d(P_1, P_2)$ tra due punti non dipende dal tempo. Infatti, se ci pensiamo questa è la stessa cosa che abbiamo in uno spazio euclideo tridimensionale, in cui possiamo mettere, per esempio, una sbarretta lungo l'asse x , la cui lunghezza non dipende dalla coordinata y o z . Dal punto di vista puramen-

te geometrico, un modo per rappresentare il tempo come quarta coordinata può essere quello mostrato in figura 3.8, ovvero prendiamo lo spazio ordinario tridimensionale e costruiamo una griglia, in ogni nodo della griglia ci posizioniamo un orologio che misura la quarta coordinata che è il tempo.

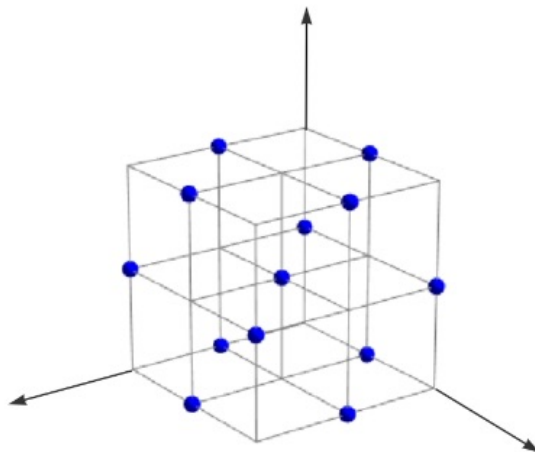


Figura 3.8: I punti in blu rappresentano gli orologi. A ogni nodo della griglia si associa un orologio (in figura ne sono rappresentati solo alcuni per semplicità).

L'**osservatore inerziale** lo definiamo nel seguente modo:

- Tutti gli orologi sono sincronizzati.
- Hanno lo stesso tasso di avanzamento.
- La geometria della parte spaziale, cioè le sottosezioni a t uguale costante, è euclidea.

Notiamo che solo se non c'è accelerazione riusciamo a fare in modo che gli orologi rimangano tutti sincronizzati, ciò vuol dire che lo stato dell'osservatore inerziale è uno stato di velocità costante.

Quindi, se noi accendiamo la gravità tutto quello detto non si può più fare, perché se c'è un campo gravitazionale ovunque andiamo a posizionarci subiamo un'accelerazione. In più notando che il range dell'interazione gravitazionale è formalmente infinito, ci rendiamo conto che se vogliamo definire una teoria della gravità dobbiamo modificare la nozione di osservatore inerziale. Ci sarà modo di capire come.

Facciamo una piccola considerazione generale solo per chiarire. **Osservare** significa registrare un evento, cioè misurare la posizione e il tempo in cui esso avviene. Attenzione però che non è il tempo in cui noi, seduti in O , lo vediamo, ma, ad esempio, se scoppia la supernova e nel nostro laboratorio

vediamo per la prima volta la luce, allora avremo l'evento: "ho visto per la prima volta la supernova", ma l'evento: "scoppio della supernova" è differente.

Aiutati dalla figura 3.9 facciamo un rapidissimo riassunto di quello che abbiamo visto fin'ora, in modo da prepararci ai concetti di cono luce, passato, presente e futuro.

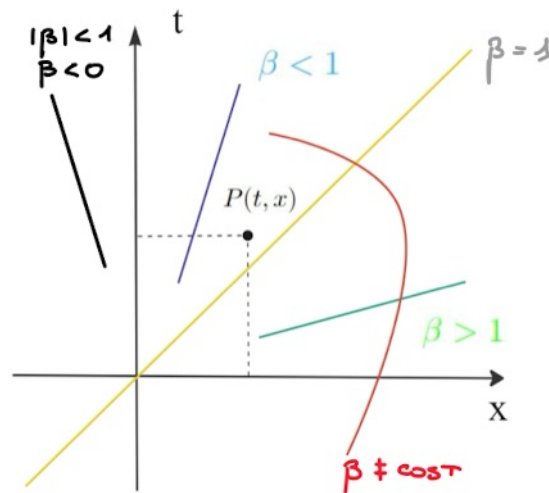


Figura 3.9: Rappresentazione diverse wordline.

- Un *evento* è un punto P dello spaziotempo e ha coordinate (t, x) .
- Una linea nel diagramma spazio-temporale si chiama **linea d'universo** o linea di mondo, in inglese *worldline*. Se la velocità è costante, allora la worldline è una retta.
- Una retta nello diagramma spaziotempo, a 45° , è il luogo geometrico dei punti in cui troviamo un segnale che si muove alla velocità della luce.
- Un punto materiale che si muove con velocità inferiore a c , avrà una worldline inclinata più verso l'asse tempo che verso l'asse spaziale. Ad esempio la retta azzurra.
- Un oggetto che si muove a velocità costante maggiore della velocità della luce è posizionato come raffigurato dalla retta verde. Oggetti di questo tipo possono essere i tachioni. La Relatività Speciale non impedisce l'esistenza di tachioni, ma quello che impedisce è che un tachione ed un oggetto che viaggi a velocità inferiore di c , possano parlarsi.

- Una linea retta posizionata con inclinazione come quella in nero rappresenta un oggetto che ha una velocità inferiore alla velocità della luce, ma che si muove nella direzione negativa dell'asse x .
- Una traiettoria curva è una worldline di un oggetto che non ha velocità costante.

Ora, parliamo del fatto che abbiamo cercato di analizzare il concetto di tempo, ma non abbiamo parlato di passato, presente e futuro di un evento. Il fatto che la velocità della luce sia un limite invalicabile, per non violare la causalità, ha un'implicazione nei diagrammi spazio-temporali. Infatti, produce quella che viene chiamata una **struttura causale** dello spaziotempo. Prendiamo il diagramma dello spazio-tempo in figura 3.10.

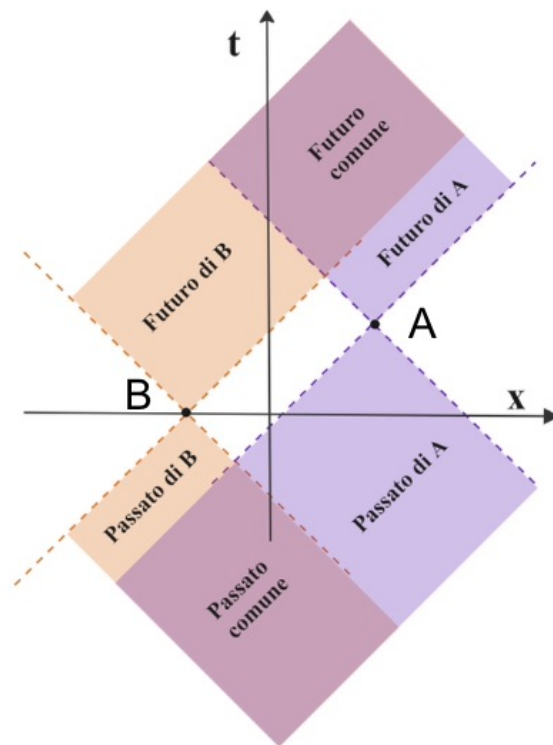


Figura 3.10: Rappresentazione passato e futuro di un evento.

Preso un evento A esso possiede un futuro e un passato, caratterizzati da tutti gli eventi che possono essere messi in relazione causale. In particolare si ha che:

- Tutti i punti che stanno all'interno delle worldline della luce rappresentano il **futuro causale** di A , ed il **passato causale** di A . Ognuno dei punti in queste porzioni di piano, può essere collegato ad A con una

worldline di un oggetto che si muove con velocità inferiore alla velocità della luce e che può trasportare quindi informazioni.

- I punti all'esterno delle worldline della luce non sono in connessione causale con il punto A , in quanto per poter mettere in relazione A con uno al di fuori del cono, dovremmo collegarli con una traiettoria che si riferisce a qualcosa che si muove più veloce della luce.
- Dalla figura 3.10 è evidente che due eventi possono avere una futuro (o un passato) causale in comune.
- Se aggiungiamo una terza e addirittura una quarta dimensione, le dimensioni spaziali, formano quello che si chiama il **cono-luce**, ossia, quel cono formato da tutti i punti collegabili con un segnale luminoso a partire dal punto detto. Tutti i punti all'interno di questo cono possono avere una connessione causale nel futuro dell'evento, mentre quelli che stanno al di sotto, possono avere una connessione causale per tempi precedenti relativi all'evento. Una raffigurazione del cono luce è in figura 3.11.

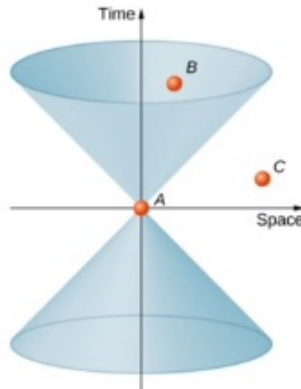


Figura 3.11: Rappresentazione cono luce di un evento A .

Quindi c'è una struttura nello spazio-tempo, ogni evento ha un suo cono-luce (come visibile nella figura 3.12) e ha una zona causalmente connessa o connettibile con sé.

Quindi, un certo evento lo possiamo raggiungere arrivando dal suo passato, e lasciarlo andando nel suo futuro; come mostrato in figura 3.13. Il **presente** di un evento coincide con l'evento stesso, mentre l'**altrove** di un evento rappresenta tutti i punti collegabili all'evento stesso con segnali superluminari, dunque, non accessibili, ma per cui (come vedremo nelle sezioni successive quando parleremo di intervalli di tipo spazio) è possibile trovare

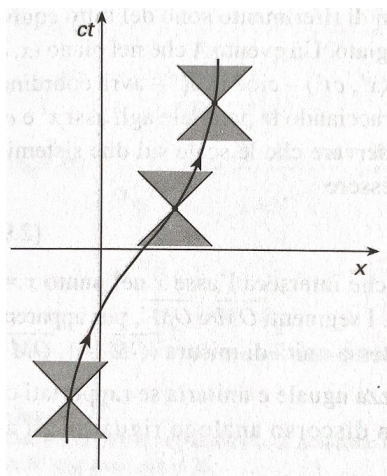


Figura 3.12: Rappresentazione con luce di diversi eventi.

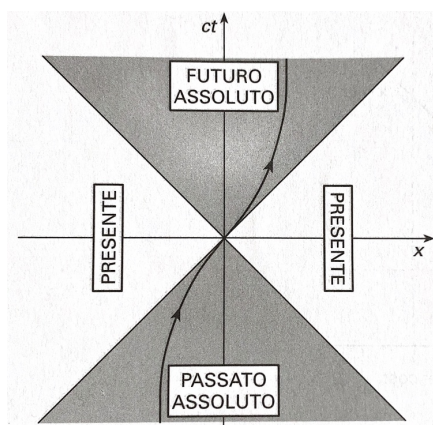


Figura 3.13: Rappresentazione passato e futuro di un evento.

un sistema di riferimento in cui l'evento è simultaneo con i punti che stanno nell'*altrove*. Dunque l'*altrove* di un evento rappresenta il suo presente.

Questa è una struttura particolare dello spaziotempo che dal punto di vista matematico è una caratteristica che ha lo spaziotempo di Minkowski, dal punto di vista fisico questo è collegato con il concetto di causalità.

3.2.4 Il cono luce

Abbiamo già intravisto il concetto di cono luce, ma in questa sezione lo analizzeremo meglio e vedremo alcune definizioni fondamentali.

Per prima cosa notiamo che la distanza ds^2 non è definita positiva e possiamo definire gli intervalli, rappresentati anche in figura 3.15:

- $ds^2 > 0$: **intervalli di tipo spazio**, in cui la separazione spaziale è maggiore della separazione rispetto al tempo.
- $ds^2 = 0$: **intervalli di tipo luce**. Poiché $dl^2 = c^2 dt^2$.
- $ds^2 < 0$: **intervalli di tipo tempo**, in cui la separazione nella direzione temporale è maggiore della separazione rispetto lo spazio.

Notiamo che essendo ds^2 invariante di Lorentz, una volta preso un certo intervallo esso non cambia e rimane lo stesso in tutti i sistemi di riferimento. Facendo riferimento alla figura 3.14, vediamo che:

- Se prendiamo un punto P , possiamo costruirci la superficie dei punti a separazione nulla da P , che saranno tutti quei punti sulla superficie detta **cono luce** e sono punti tutti collegabili tramite segnali luminosi. Si ha $ds_{PQ}^2 = 0$.
- I punti con separazione di tipo tempo, relativamente a P , ad esempio R , sono quelli per i quali ci spostiamo di più nella direzione temporale rispetto a quanto facciamo nella direzione spaziale. Punti separati da intervalli di tipo tempo sono quindi quelli per cui restiamo all'interno del cono luce. Sono dei punti che possono essere messi in relazione causale con il punto P , poiché possono essere raggiunti da segnali a velocità subluminali, visto che $dx^2 < c^2 dt^2$, ovvero, la distanza spaziale tra due punti è minore di quella che percorrerebbe la luce in un certo intervallo temporale.
- Per mettere in relazione due punti di tipo spazio (fuori dal cono luce) dovremmo viaggiare a velocità superiore alla velocità della luce, poiché $dx^2 > c^2 dt^2$, e questo quindi ci potrebbe a violare la causalità, quindi sono punti non causalmente connessi all'evento P .

Per i motivi elencati possiamo pensare alla Relatività Speciale come a una teoria della struttura dello spaziotempo in assenza di gravità. Puoi vedere il capitolo 2.9 di Barone [1], in cui ti fa vedere che se due eventi sono separati da un intervallo di tipo spazio, allora esiste un sistema di riferimento in cui essi sono simultanei, analogamente mostra che se due punti sono separati da un intervallo di tipo tempo esiste un sistema di riferimento in cui essi sono spazialmente coincidenti.

3.2.5 Diagrammi di Minkowski

Abbiamo visto nella sezione precedente che abbiamo per lo spazio tempo una struttura metrica piatto e che lo spaziotempo è il background in cui le particelle, i campi, le mele, i gatti si muovono, evolvono e fanno tutte le loro cose. Con il termine *muoversi* intendiamo dire cambiare posizione

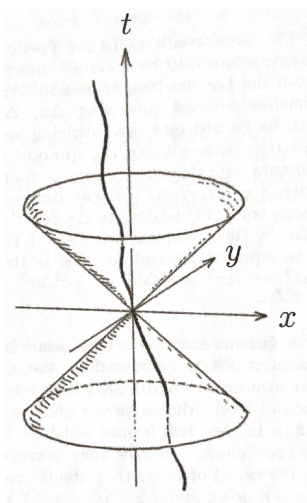


Figura 3.14: Rappresentazione cono luce.

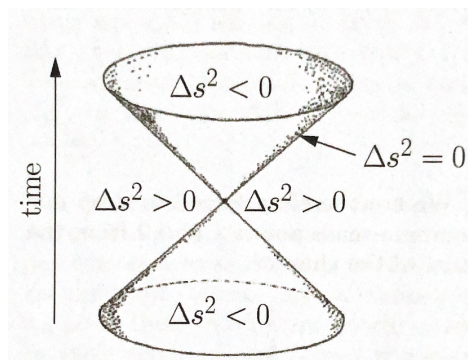


Figura 3.15: Rappresentazione intervalli sul cono luce.

nel tempo, cioè seguire una worldline, che è semplicemente una traiettoria all'interno dello spazio-tempo.

Vediamo in questo capitolo alcuni "effetti" particolari (rispetto a quello a cui siamo abituati nello spazio Euclideo) che emergono dallo spaziotempo di Minkowski e che in realtà non sono stranezze o incongruenze con la realtà, bensì sono semplicemente conseguenze naturali dello spazio in cui viviamo. Se vuoi una trattazione più rigorosa, per quanto possibile, e più quantitativa poi vedere il Barone [1].

Da tenere in tasca: un foglietto con su scritto di ricordare sempre che cercheremo di disegnare degli assi di uno spaziotempo quadridimensionale in uno spazio euclideo, il piano del foglio, quindi è chiaro che avremo delle cose che ci sembreranno strane.

Simultaneità Facciamo la costruzione illustrata in figura 3.16. Scegliamo un osservatore O e costruiamo le coordinate di un altro osservatore $\bar{O}$. Questa cosa la abbiamo fatta passo passo nella sezione §3.2.1. Noi, osservatore O misuriamo tempo e spazio, ma quando c'è un altro osservatore in moto, inerziale rispetto a noi, sappiamo descrivere, nel nostro spaziotempo, le coordinate dell'altro osservatore.

Noi, O , associamo ad un evento coordinate (t, x) , mentre $\bar{O}$, che si muove con velocità v lungo l'asse $\hat{x}$ associa $(\bar{t}, \bar{x})$. Inoltre, per definizione, sappiamo

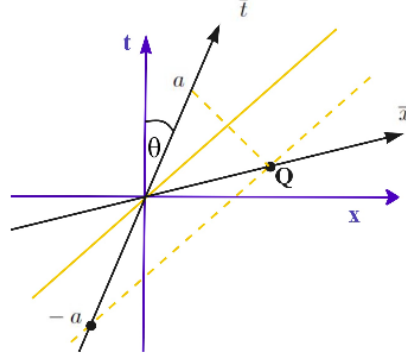


Figura 3.16: Un evento Q in due diversi sistemi di riferimento.

che:

$$\text{asse } t : \quad x = 0$$

$$\text{asse } \bar{t} : \quad \bar{x} = 0$$

e sappiamo anche, dalla sezione §3.2.1, che:

$$\text{asse } \bar{t} : \quad t = x \frac{1}{\tanh \theta}$$

in cui θ è l'angolo relativo alla trasformazione di boost.

Notiamo però che ora, l'asse tempo t è anche la worldline dell'osservatore O , poiché rimane sempre fermo, e analogamente l'asse $\bar{t}$ lo è per $\bar{O}$.

Ora per noi, l'asse x è il luogo degli eventi che hanno tutti lo stesso tempo $t = 0$ ed in particolare, esso corrisponde ad una **linea di simultaneità**. Attenzione però che il fatto che degli eventi siano simultanei vuol dire solo che avvengono insieme, ma non che noi ne abbiamo accesso. È chiaro che la stessa cosa vale per la costruzione reciproca all'asse $\bar{x}$.

Ora, se non lo sapessimo già fare, dovremmo cercare di costruire l'asse $\bar{x}$ nel riferimento di O . Un modo per costruirlo potrebbe essere quello illustrato in figura 3.17.

Supponiamo di spostarci e metterci in $\bar{O}$. Prendiamo un evento P , lanciamo un segnale luminoso al tempo $-a$, il segnale si muove a 45° , raggiunge uno specchietto posizionato in un punto che dista da me a , questo lo riflette (avremo un'altra retta, ma con inclinazione opposta) cosicché lo si incontri nuovamente ad un tempo a (nuovo evento R). Dunque, abbiamo tre eventi (P, Q, R) collegati da segnali luminosi. L'asse $\bar{x}$ è il luogo degli eventi che hanno la seguente caratteristica: se lanciamo un segnale al tempo $t = -a$ e lo ricevo al tempo $t = +a$, allora ha beccato uno specchietto a distanza a da me.

Ricostruiamo quanto appena visto anche nel sistema di riferimento O , come vediamo nella figura 3.16.

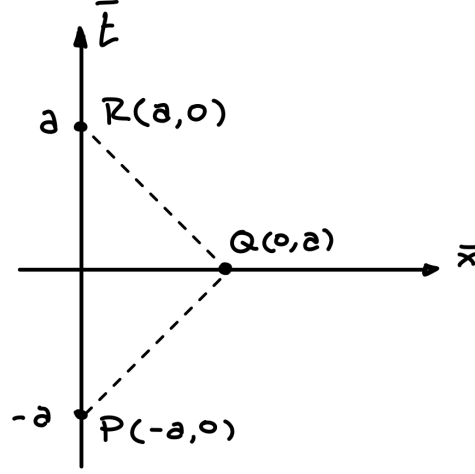


Figura 3.17: Costruzione asse $\bar{x}$.

Ora, osservando le worldline e linee di simultaneità dei due osservatori, emerge immediatamente che non c'è nessun problema nel fatto che la simultaneità non valga tra osservatori inerziali.⁷

Calibrazione Abbiamo disegnato gli assi reciproci dei due osservatori però dobbiamo anche **calibrarli**, ossia, dobbiamo scegliere un'unità di misura. Per calibrare gli assi in geometria euclidea sfruttiamo la distanza invariante:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = A^2 \quad (3.2.31)$$

in questo modo abbiamo calibrato gli assi, cioè sappiamo dare i valori relativi delle distanze, e in più entrambi gli assi concordano su distanze. Come puoi vedere in figura 3.18.

Per *calibrare* gli assi nello spaziotempo uso la stessa proprietà, ma tenendo conto del tensore metrico e quindi del fatto che la distanza ha un segno diverso. Dobbiamo usare quelle che chiamiamo **iperboli invarianti**. So che vale:

$$\Delta s^2 = x^2 - t^2 = a^2 \quad (3.2.32)$$

$$\Delta \bar{s}^2 = \bar{x}^2 - \bar{t}^2 = a^2 \quad (3.2.33)$$

che sono equazioni che rappresentano tutti i punti, per O e O' , per cui $\Delta s^2 = a^2$. Però potremmo avere anche delle iperboli di tipo B , poiché Δs^2

⁷Poiché semplicemente stiamo prendendo punti diversi e la simultaneità la perdiamo quando t diventa coordinata.

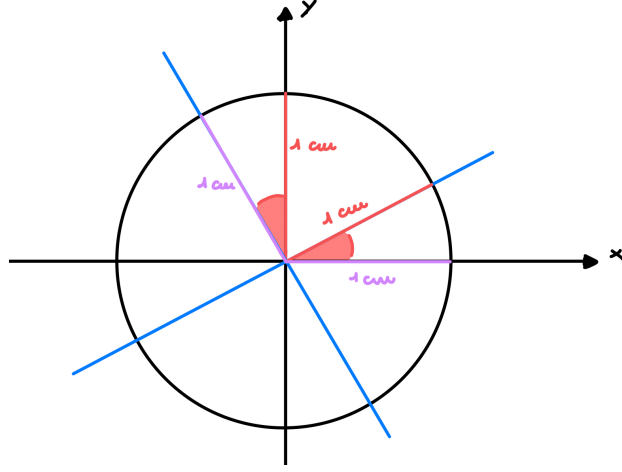


Figura 3.18: Calibrazione nel piano euclideo.

non è definita positiva:

$$x^2 - t^2 = -b^2 \quad (3.2.34)$$

$$\bar{x}^2 - \bar{t}^2 = -b^2. \quad (3.2.35)$$

Entrambi i tipi di iperboli invarianti sono rappresentate in figura 3.19. Così facendo, abbiamo calibrato gli assi esattamente come avremmo fatto con il piano euclideo.

Nella figura 3.20 sono rappresentati i due osservatori O e O' insieme alle iperboli invarianti. È interessante notare alcune cose di questa figura. Per prima cosa possiamo notare le iperboli di tipo tempo e di tipo spazio (quelle che nella figura 3.19 avevamo chiamato rispettivamente b e a). Ovviamente, c'è il solito cono luce rappresentato in giallo. La parte interessante però la possiamo vedere nei tratti fucsia e azzurrino. Vediamo ad esempio i tratti fucsia, essi partono dall'origine e finiscono in punti diversi, ma della stessa iperbole, per cui, dalle relazioni (3.2.32) e (3.2.33), sappiamo che i due segmentini sono della stessa lunghezza. Stesso discorso per i tratti azzurri.

Dilatazione temporale Grazie a ciò che abbiamo imparato nel paragrafo dedicato alla calibrazione e alle iperboli invarianti, possiamo vedere che il fenomeno della dilatazione temporale, che avevamo visto nella sezione §3.1.3, non sia paradossale, ma perfettamente normale.

Prendiamo i soliti osservatori O e O' e mettiamoli entrambi in un unico diagramma di Minkowski. Immaginiamo di sincronizzare gli orologi cosicché $t = \bar{t} = 0$. L'orologio di $\bar{O}$ sta seduto nel sistema di riferimento $\bar{O}$, quindi nel diagramma spazio-temporale sta sulla worldline $\bar{t}$. Facciamo riferimento alla figura 3.21. L'evento B , che notiamo avere $\bar{x} = 0$, è quello per cui

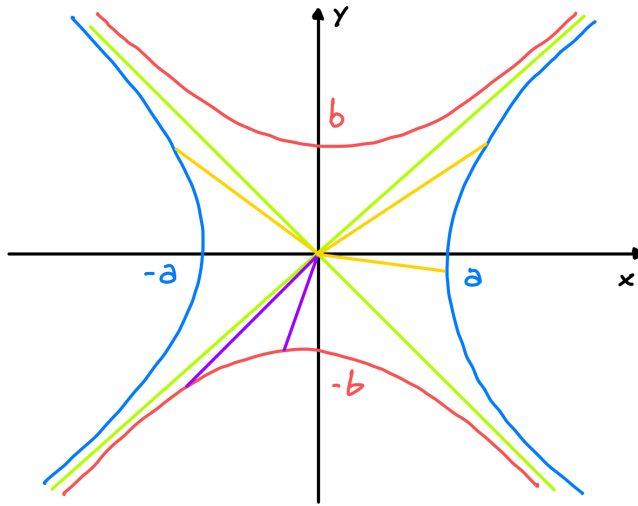


Figura 3.19: Calibrazione con le iperboli invarianti. In verde sono rappresentati i coni luce, mentre in blu e rosso sono le iperboli invarianti, rispettivamente di tipo *A* e *B*. Per le iperboli a destra (a): i segmenti in giallo (che sono eventi di tipo spazio) sono tutti equivalenti in lunghezza (valgono tutti *a*), valgono ad esempio tutti un metro; analogamente per le iperboli (b) e i segmenti in violetto (che sono eventi di tipo tempo).

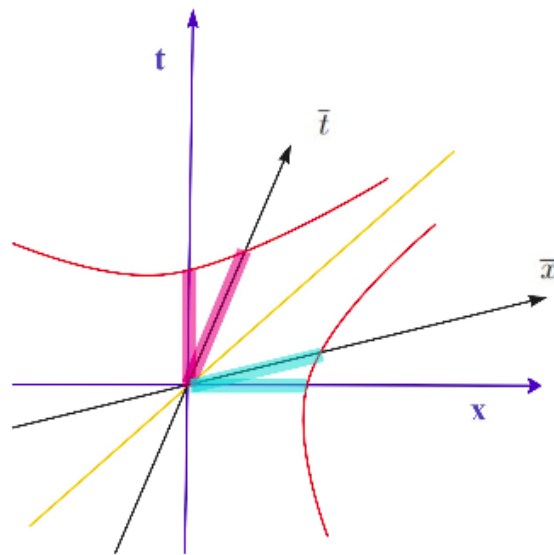


Figura 3.20: Sistemi di riferimento *O* e *O'* insieme alle iperboli invarianti.

l'osservatore *O* dice: "è passato un secondo", quindi per cui:

$$\Delta \bar{t} = 1 \text{ s} \equiv \Delta \tau \quad (3.2.36)$$

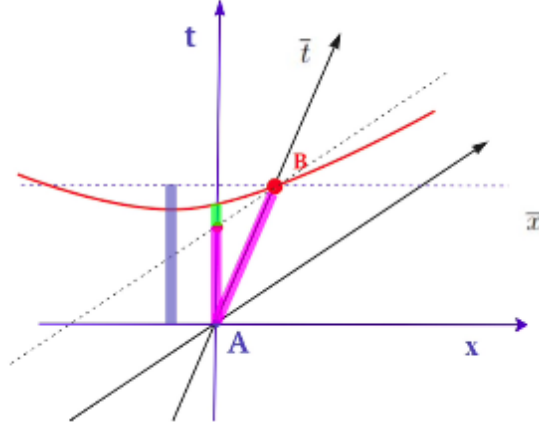


Figura 3.21: Diagramma per la dilatazione temporale.

dato che sul suo asse tempo questo coincide con il tempo proprio (perché non si è spostato nel suo riferimento) e che quest'ultimo è invariante (per definizione), allora:

$$\Delta\tau^2 = dt^2 - dx^2 = d\bar{t}^2 - d\bar{x}^2 \quad \xRightarrow{\bar{x}=0 \text{ in } B} \quad \Delta\tau^2 = d\bar{t}^2. \quad (3.2.37)$$

Cosa vede O ? Per noi che ci troviamo in O , l'evento B è posizionato alla coordinata (t, x) . Per misurare il tempo di B dobbiamo tracciare la linea di simultaneità, che per O è una retta orizzontale (come si vede in figura). Anche solo guardando la figura 3.21 ci rendiamo conto che in O misureremo un Δt diverso da quello che misura O' . Infatti, possiamo tracciare l'iperbole invariante e, confrontando i segmentini colorati, vediamo subito che per O il tempo che è trascorso tra l'evento "ci incontriamo" e l'evento "lui guarda l'orologio" (ovvero B) è:

$$\Delta t > \Delta\bar{t}. \quad (3.2.38)$$

Spieghiamo meglio. Se prendiamo il punto B e disegniamo la linea di simultaneità rispetto al sistema di riferimento O , allora disegniamo una retta orizzontale, e possiamo misurare il tempo che per O è trascorso da quando i due osservatori si sono incontrati e quando l'osservatore O' è arrivato in x e ha misurato il tempo del suo cronometro. Il tempo trascorso per O è Δt , che è rappresentato dal segmento in blu verticale. Possiamo vedere che $\Delta t > \Delta\bar{t}$ poiché, senza preoccuparci di O' , vediamo che il tratto di Δt è più lungo del tratto che va dall'origine a B , che a sua volta è equivalente al trattino fucsia+verde verticale visto che entrambi vivono sull'iperbole di calibrazione.

Però, ragioniamo anche dal punto di vista di O' . Sappiamo che l'intervallo spazio-temporale è invariante, ma non lo sono i tempi singolarmente, infatti il tempo che misura O è maggiore del tempo che misura O' . Questo però

è reciproco e non c'è nessun paradosso. Infatti, sedendoci in O' , guardando l'evento B e tracciando le linee di simultaneità, che sarà una retta parallela all'asse $\bar{x}$, possiamo vedere che intercetta un punto sull'asse t in un punto più in basso di quello che prima avevamo identificato con Δt . Per cui O' vede:

$$\Delta \bar{t} > \Delta t. \quad (3.2.39)$$

Questa differenza ci dà le relazioni di dilatazione temporale e non c'è paradosso perché sono sistemi di riferimento diversi che, come abbiamo visto, non sono d'accordo sulla simultaneità per via del fatto di avere gli assi inclinati in un certo modo. Quindi, una dilatazione temporale è reciproca tra i due osservatori, ognuno sostiene che il suo orologio vada più piano dell'altro e viceversa.

Un'altra figura che si può vedere per capire i discorsi è la figura 3.22.

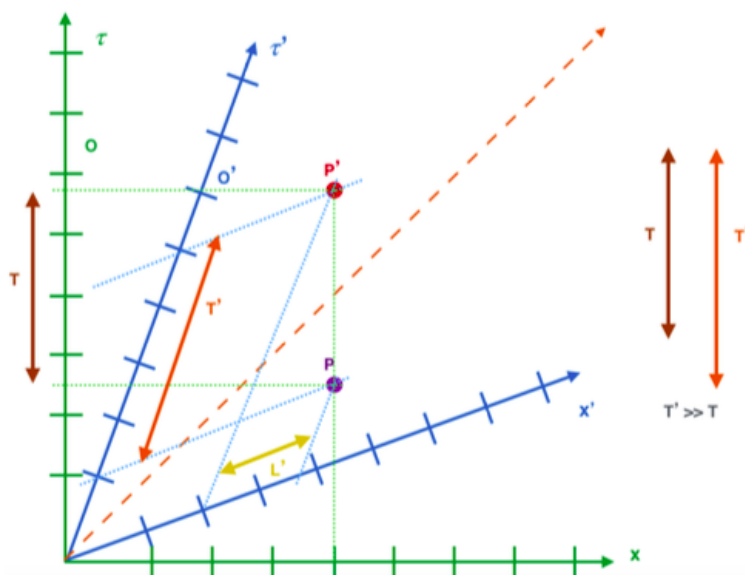
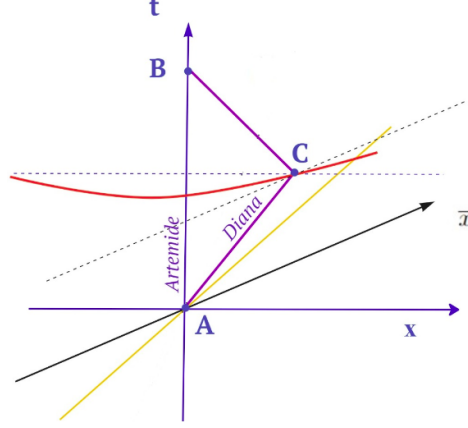


Figura 3.22: Diagramma per la dilatazione temporale.

Paradosso dei gemelli Trattiamo adesso il famoso paradosso dei gemelli facendo riferimento alla figura 3.23. La situazione è nota: abbiamo due gemelli, prendiamo per esempio Diana ed Artemide, che vengono separate a un certo istante e una resta sulla terra, mentre l'altra parte per un viaggio verso Alfa Centauri. Entrambe viaggiano sulla propria worldline (sul proprio asse temporale). Supponiamo che Diana sia quella che si allontana da Artemide.

Diana si muove con velocità v costante (ovviamente $v < c$) nella direzione positiva dell'asse scelto (in un sistema O) e si allontana dalla sorella, ma

**Figura 3.23:** Paradosso dei gemelli.

allo stesso tempo la sorella si allontana nella direzione negativa (di un altro sistema O'). Succede qualche cosa, Diana torna indietro, a un certo punto si rincontrano nel futuro e ci si chiede: quando si rincontrano nel futuro hanno la stessa età?

La risposta è no, non hanno la stessa età, ma una delle due è più giovane dell'altra. Questo chiaramente sembra un paradosso, ma in realtà non lo è per nulla. Quello che succede è che una delle due, per potersi rincontrare, deve aver subito un'accelerazione, cioè deve essere stata per un certo tempo non inerziale. È proprio quest'ultima che risulta più giovane nel futuro.

Usiamo il sistema di coordinate O di Artemide per fare il ragionamento. L'origine coincide con l'evento A , in cui le sorelle si salutano; dopodiché Artemide procede lungo la propria worldline (asse t), mentre Diana si muove su una traiettoria inclinata di un angolo che dipende dalla sua velocità. Successivamente c'è un evento C , che è il momento in cui Diana inverte la propria direzione. Come detto, inversione significa che c'è una variazione di velocità, quindi Diana ha un momento in cui non è inerziale. A un certo punto, tornando indietro, necessariamente dovrà rincontrare la sorella e questo evento lo indichiamo con B .

Però, come facciamo a capire qual è la più giovane? Guardiamo all'unica cosa su cui sono d'accordo: la lunghezza nello spaziotempo di segmenti di traiettoria. Separiamo il tempo totale percorso per Artemide per muoversi da A a B in due contributi:

$$T_A = \Delta t_A^{AC} + \Delta t_A^{CB} = \Delta \tau_A^{AC} + \Delta \tau_A^{CB} = \Delta \tau_A^{AB} \quad (3.2.40)$$

in cui abbiamo usato il fatto che Δt coincida con il tempo proprio poiché $x = 0$. Invece, per Diana la situazione è:

$$T_D = \Delta t_D^{AC} + \Delta t_D^{CB} = \Delta \tau_D^{AC} + \Delta \tau_D^{CB} = \Delta \tau_D^{AB}. \quad (3.2.41)$$

Entrambe sono d'accordo su quanto sia lungo $\Delta\tau$, ma se guardiamo il grafico ci accorgiamo subito che la lunghezza dei due segmenti non è uguale, fosse anche solo per il fatto che il punto C starà su una iperbole invariante, da cui osserviamo che:⁸

$$\Delta\tau_D < \Delta\tau_A \quad (3.2.42)$$

il che corrisponde a dire:

$$T_D < T_A \quad (3.2.43)$$

dunque Diana è più giovane.

Possiamo analizzare un po' meglio i vari step intermedi dell'esperimento servendoci delle figure 3.24 e 3.25. Il paradosso nasce dal fatto che nel passare dall'evento A all'evento C , per via dei discorsi sulla dilatazione temporale, Artemide dice che Diana, quando arriva in C , è più giovane di lei, ma in C allo stesso modo Diana dice che Artemide è più giovane di lei. Infatti, in C per Artemide è passato un tempo che equivale al segmento che congiunge A con la proiezione (linea di simultaneità orizzontale) di C sull'asse t , mentre per Diana è passato un tempo che equivale alla worldline che congiunge A e C , ma in senso di lunghezza di segmenti quest'ultimo è il più corto. Dopodiché nel tragitto inverso si cambia solo il segno alla velocità, quindi di nuovo, dal suo punto di vista, Artemide concluderebbe che Diana è più giovane di lei e lo stesso direbbe Diana di sua sorella.

Quello a cui bisogna prestare attenzione è che quello detto è vero durante il viaggio di andata a velocità costante e durante il viaggio di ritorno, ma c'è un intervallo di tempi in cui Diana è non inerziale, ovvero quando comincia a decelerare e cambia la sua traiettoria. In questa fase non inerziale di decelerazione succede che, chiamando I ed F (inizio e fine di accensione dei motori), allora la situazione degli intervalli temporali può essere analizzata con i segmenti colorati. Visto da Diana, nella fase di allontanamento e di riavvicinamento il tempo che passa per se e per sua sorella è il tempo verde, che per via delle iperboli invarianti, Artemide risulta essere più giovane (segmenti più corti). Però Diana può dire che sua sorella risulta più giovane solo nei due semi-tragitti, però, negli istanti in cui è non inerziale (tratti arancioni), vede il tempo di sua sorella andare molto più velocemente, quindi, quando comincia a tornare indietro, per lei sua sorella è invecchiata molto più di lei.

3.3 Calcolo tensoriale

Vediamo in questa sezione un rapida, ma essenziale, carrellata sul calcolo tensoriale. I riferimenti che si possono guardare sono diversi.

⁸In un piano euclideo la linea spezzata di Diana sarebbe senza ombra di dubbio più lunga, ma per via della definizione di ds^2 , si ha che le traiettorie "meno dirette" tra A e B siano quelle più corte.

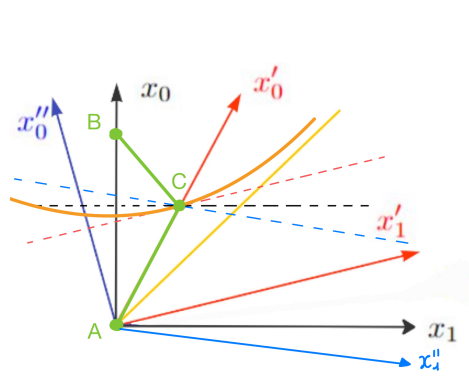


Figura 3.24

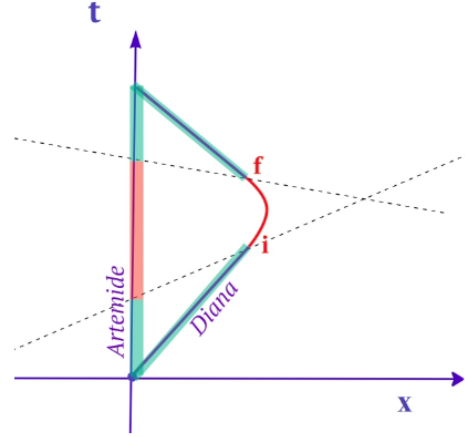


Figura 3.25

Figura 3.26: Nella figura 3.24 sono indicate con dei tratteggi colorati le varie linee di simultaneità, sia per il sistema di riferimento di Artemide (nero), sia per quello di Diana all'andata, in cui la velocità è > 0 (rosso) e anche quello di Diana nel viaggio di ritorno, con velocità < 0 (blu).

Noi parliamo in modo generico di vettori e tensori per riferirci ad oggetti che si comportano come tali rispetto una generica trasformazione (non singolare e differenziabile) delle coordinate. Quando trattiamo proprio le trasformazioni di Lorentz, allora parliamo di quadri-vettori e quadri-tensori.

Abbiamo visto come il secondo principio della relatività speciale, quello della costanza della velocità della luce, porta alle trasformazioni di Lorentz e alla possibilità di definire lo spaziotempo come una varietà metrica. Vogliamo però adesso implementare nella scrittura delle nostre equazioni anche il primo principio, cioè il principio di relatività, che ci dice che tutte le leggi della natura sono invarianti sotto l'effetto di un gruppo di trasformazioni spazio-temporali, ovvero le trasformazioni di Lorentz.

3.3.1 Definizioni, quadri-vettori e derivate

Diamo una definizione un pochino più formale. Riprendiamo la notazione compatta che abbiamo già introdotto:

$$x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) \quad (3.3.1)$$

di sistema di coordinate sulla varietà spaziotempo e che rappresenta fisicamente un osservatore. Se due sistemi di coordinate sono legati dalle trasformazioni di Lorentz, allora questi osservatori diciamo che sono **inerziali**. La trasformazione da un sistema ad un altro la possiamo scrivere in modo generale come:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + d^\alpha \quad (3.3.2)$$

in cui possiamo vedere Λ come una matrice 4x4, i cui elementi contengono le trasformazioni di Lorentz (i cui coefficienti abbiamo visto dover essere costanti), mentre d^α lo possiamo vedere come un quadrivettore (costante), che ci rappresenta una traslazione.

Ricordiamo la definizione del **tensore metrico** che abbiamo:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} -1 & \alpha = \beta = 0 \\ +1 & \alpha = \beta = 1, 2, 3 \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}, \quad \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (3.3.3)$$

Con il tensore metrico η abbiamo anche già visto che possiamo definire la distanza:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.3.4)$$

e il tempo proprio:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.3.5)$$

che sono per definizione due invarianti.

Si può anche far vedere (vedi p.48-50 delle note del prof. Fornengo), che le trasformazioni di Lorentz, con questi coefficienti costanti (Λ^α_β ed equivalentemente i termini d^α), sono le uniche trasformazioni di coordinate dai set x al set x' non singolari che lasciano invariato il $d\tau^2$.

Definiamo degli oggetti, che generalizzano quelli che negli spazi euclidei chiamavamo vettori, chiamiamo **tensori**, attraverso le loro proprietà di trasformazione quando cambiamo il sistema di coordinate. Definiamo **quadrivettore controvariante**, un oggetto a cui associo un indice in alto che trasforma come il differenziale delle coordinate (3.3.72):

$$v^\alpha \xrightarrow{\text{T.L.}} v'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta v^\beta. \quad (3.3.6)$$

Definiamo **quadrivettore covariante** un oggetto a cui associamo un indice basso e che trasforma come:

$$u_\alpha \xrightarrow{\text{T.L.}} u'_\alpha = \Lambda_\alpha^\beta u_\beta \quad (3.3.7)$$

in cui indichiamo:

$$\Lambda_\alpha^\beta = \eta_{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} \Lambda^\gamma_\delta \quad (3.3.8)$$

Teniamo a mente che in T^α_β intendiamo α l'indice delle righe e β delle colonne; quando li scambiamo, in oggetti T_β^α intendiamo solo dire che scambiamo righe e colonne.

Però, utilizzando la relazione (3.3.51) che è facile da anticipare, è dimostrabile che $\Lambda^\alpha{}_\beta$ è l'inversa di $\Lambda_\alpha{}^\beta$. Infatti, si ha:

$$\Lambda_\alpha{}^\gamma \Lambda^\alpha{}_\beta = \eta_{\alpha\delta} \eta^{\gamma\mu} \Lambda^\delta{}_\mu \Lambda^\alpha{}_\beta \quad (3.3.9)$$

$$= \eta_{\mu\beta} \eta^{\gamma\mu} \quad (3.3.10)$$

$$= \delta^\gamma{}_\beta. \quad (3.3.11)$$

Essendo la matrice inversa ci aspettiamo che agisca come una trasformazione inversa. Infatti, prendendo la legge di trasformazione delle coordinate:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta \quad (3.3.12)$$

moltiplicandola per la matrice di trasformazione inversa:

$$\Lambda_\alpha{}^\gamma x'^\alpha = \Lambda_\alpha{}^\gamma \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta \quad (3.3.13)$$

$$= \delta^\gamma{}_\beta x^\beta \quad (3.3.14)$$

$$= x^\gamma \quad (3.3.15)$$

quindi, la matrice che ha indice basso-alto realizza la trasformazione di Lorentz inversa:

$$x^\gamma = \Lambda_\alpha{}^\gamma x'^\alpha. \quad (3.3.16)$$

Possiamo quindi dire che i quadri-vettori controvarianti trasformano con la matrice delle trasformazioni di Lorentz e i quadri-vettori trasformano con la matrice di trasformazione inversa.

Dalle definizioni dei quadri-vettori possiamo verificare che le **contrazioni**⁹ sono invarianti. Ad esempio, prendiamo:

$$u'_\alpha u'^\alpha = \Lambda_\alpha{}^\gamma \Lambda^\alpha{}_\beta u_\gamma u^\beta \quad (3.3.17)$$

$$= \delta^\gamma{}_\beta u_\gamma u^\beta \quad (3.3.18)$$

$$= u_\beta u^\beta \quad (3.3.19)$$

dunque, la contrazione di un quadri-vettore covariante con uno controvariante è la stessa in qualsiasi sistema di riferimento e definiamo quello che chiameremo **scalare**. Uno *scalare* è un tensore senza indici e invariante, cioè un oggetto che non cambia sotto trasformazione di coordinate.

Ad ogni vettore controvariante corrisponde sempre un quadri-vettore covariante che possiamo costruire utilizzando il tensore metrico nel modo:

$$u_\alpha = \eta_{\alpha\beta} u^\beta \quad (3.3.20)$$

⁹Chiamiamo contrazione quando mettiamo un indice in alto e uno in basso e sommiamo sulle componenti.

quest'operazione prende anche il nome di **abbassamento dell'indice**. Notiamo che non è successo niente di particolare, abbiamo solo riscritto le componenti. Infatti, se partiamo da:

$$v^\beta = (v^0, v^1, v^2, v^3) \quad (3.3.21)$$

la componente v_0 sarà:

$$v_0 = \eta_{0\beta} v^\beta \quad (3.3.22)$$

$$= \eta_{00} v^0 + \eta_{0i} v^i \quad (3.3.23)$$

$$= -v^0 \quad (3.3.24)$$

dunque, nello spazio-tempo di Minkowski, con la metrica che abbiamo definito, la componente temporale di un quadrivettore, quando abbassiamo l'indice, cambia di segno. Notiamo che per quelle spaziali questo non succede:

$$v^i = v_i. \quad (3.3.25)$$

Allo stesso modo possiamo definire l'**innalzamento degli indici** come:

$$u^\alpha = \eta^{\alpha\beta} u_\beta. \quad (3.3.26)$$

Notiamo che una doppia operazione di innalzamento e abbassamento non produce effetti (come ci si aspetterebbe):

$$v^\alpha = \eta^{\alpha\beta} v_\beta \quad (3.3.27)$$

$$= \eta^{\alpha\beta} \eta_{\beta\gamma} v^\gamma \quad (3.3.28)$$

$$= \delta^\alpha_\gamma v^\gamma \quad (3.3.29)$$

$$= v^\alpha. \quad (3.3.30)$$

Possiamo anche definire delle operazioni come il **prodotto scalare** tra due vettori:

$$\eta_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta = v^\alpha w_\alpha = v_\beta w^\beta \quad (3.3.31)$$

che è una quantità invariante.¹⁰ Con il prodotto scalare possiamo definire anche l'**ortogonalità** e la nozione di **norma**. L'ortogonalità tra due quadrivettori la definiamo come:

$$\eta_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta = 0 \quad (3.3.33)$$

¹⁰È verificabile che ciò che abbiamo definito fa esattamente quello a cui siamo abituati nel piano euclideo. Se scendiamo di una dimensione e prendiamo $x^i = (x, y, z)$ e la metrica $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, allora:

$$\eta_{ij} v^i w^j = v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3 = \vec{v} \cdot \vec{w} \quad (3.3.32)$$

che sappiamo essere invariante.

e visto che il prodotto scalare tra due quadrivettori è uno scalare, sappiamo che se in un sistema di riferimento v e w sono ortogonali, allora lo saranno in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

La norma di un quadrivettore la definiamo attraverso il prodotto scalare di un quadrivettore con se stesso:

$$\eta_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = \begin{cases} > 0 & \text{spacelike} \\ = 0 & \text{lightlike} \\ < 0 & \text{timelike.} \end{cases} \quad (3.3.34)$$

Un esempio di prodotto scalare, che conosciamo già bene, è il tempo proprio $d\tau^2$, che possiamo vedere, a meno di un segno, come la norma del differenziale delle coordinate.

Ovviamente, anche in Relatività Speciale si lavora con le derivate, quindi definiamo l'**operatore gradiente** come:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (3.3.35)$$

che trasforma come:

$$\partial'_\alpha = \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \partial_\beta \quad (3.3.36)$$

dobbiamo quindi capire che cos'è $\partial x^\beta / \partial x'^\alpha$. Se differenziamo (3.3.16) vediamo che:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \Lambda^\alpha{}_\beta \implies \partial'_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta \partial_\beta \quad (3.3.37)$$

che ci rendiamo presto conto essere la legge di trasformazione di un'oggetto covariante (3.3.7). È chiaro che se vogliamo farlo diventare un operatore controvariante, lo possiamo fare semplicemente realizzando la combinazione lineare (innalzamento degli indici) che utilizza il tensore metrico:

$$\partial_\alpha \xrightarrow{\text{T.L.}} \partial^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta. \quad (3.3.38)$$

Se prendiamo la definizione:

$$\partial_\alpha = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z) \quad (3.3.39)$$

e ci alziamo gli indici, allora:

$$\partial^\alpha = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = (-\partial^t, \partial^x, \partial^y, \partial^z) \quad (3.3.40)$$

come facilmente verificabile. Possiamo anche definire l'operatore D'Alembertiano come:

$$\square = \partial_\alpha \partial^\alpha \quad (3.3.41)$$

$$= \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \quad (3.3.42)$$

$$= \eta^{00} \partial_0 \partial_0 + \eta^{ij} \partial_i \partial_j \quad (3.3.43)$$

$$= -\partial_t^2 + \nabla^2 \quad (3.3.44)$$

ed essendo costruito tramite una contrazione, è un oggetto invariante, per cui un altro osservatore O' avrà la stessa espressione per l'operatore, ma solamente con gli apici $'$.

3.3.2 Proprietà metrica

Possiamo notare che il tensore metrico è simmetrico nello scambio degli indici:

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}. \quad (3.3.45)$$

La proprietà importante però viene dal prendere la generica trasformazione (3.3.2) e differenziarla:

$$dx'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} dx^{\beta} \quad (3.3.46)$$

il tempo proprio nel secondo sistema di coordinate sarà:

$$d\tau'^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \quad (3.3.47)$$

$$= -\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\delta} dx^{\gamma} dx^{\delta} \quad (3.3.48)$$

però ricordando che il tempo proprio è invariante possiamo scrivere per confronto che deve valere:¹¹

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\delta} = \eta_{\gamma\delta} \quad (3.3.49)$$

che è una proprietà fondamentale della metrica e che ci ricapiterà di utilizzare.

Un'altra cosa che possiamo vedere e come sono legati i tensori metrici con indici alti e bassi. Valgono:

$$\begin{cases} \eta_{00} = -1 \\ \eta_{0i} = 0 \\ \eta_{ij} = \delta_{ij} \end{cases}, \quad \begin{cases} \eta^{00} = -1 \\ \eta^{0i} = 0 \\ \eta^{ij} = \delta_{ij} \end{cases} \quad (3.3.50)$$

e possiamo dimostrare (anche esplicitamente con le forme matriciali) che:

$$\eta^{\beta\delta} \eta_{\alpha\delta} = \delta^{\beta}_{\alpha}. \quad (3.3.51)$$

La relazione (3.3.51) è una proprietà che segue dall'aver definito la η con l'indice in alto con gli stessi valori numerici della η con l'indice in basso.

¹¹Nota che possiamo riordinare i vari oggetti perché una volta che contraiamo tutti gli indici essi rappresentano una somma e quindi possiamo girarla come ci pare.

3.3.3 Trasformazioni di Lorentz

Possiamo vedere quale sia il significato, e la forma, delle matrici $\Lambda^\alpha{}_\beta$. Vedremo che la scrittura (3.3.2) ingloba in sé le rappresentazioni delle traslazioni spazio-temporali, delle rotazioni nello spazio e infine delle trasformazioni di boost, cioè le trasformazioni di velocità.

Per prima cosa possiamo notare che le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo (come abbiamo imparato ad IQFT), in particolare se in (3.3.2) abbiamo $d^\alpha \neq 0$, allora parliamo di gruppo di Lorentz inhomogeneo e abbiamo il *gruppo di Poincaré*; nel caso in cui $d^\alpha = 0$, allora abbiamo il *gruppo di Lorentz omogeneo*.

Dalla proprietà (3.3.49) possiamo notare che, ponendo $\gamma = \delta = 0$, abbiamo:

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_0 \Lambda^\beta{}_0 = \eta_{00} \quad (3.3.52)$$

$$\eta_{00} \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0 + \eta_{ij} \Lambda^i{}_0 \Lambda^j{}_0 = \eta_{00} \quad (3.3.53)$$

$$- (\Lambda^0{}_0)^2 + \delta_{ij} \Lambda^i{}_0 \Lambda^j{}_0 = -1 \quad (3.3.54)$$

e dunque che:

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1. \quad (3.3.55)$$

Un'altra proprietà che possiamo osservare è che prendendo (3.3.49) in forma matriciale:

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \quad (3.3.56)$$

e calcolandone il determinante, allora:

$$\det\{\eta\} = \det\{\Lambda^T \eta \Lambda\} \quad (3.3.57)$$

$$= \det\{\Lambda^T\} \det\{\eta\} \det\{\Lambda\} \quad (3.3.58)$$

$$= (\det\{\Lambda\})^2 \det\{\eta\} \quad (3.3.59)$$

dunque:

$$(\det\{\Lambda\})^2 = 1. \quad (3.3.60)$$

In base ai valori di (3.3.55) e (3.3.60) possiamo distinguere:

- Se $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ e $\det\{\Lambda\} = 1$ parliamo di *trasformazioni proprie*.
- Se $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ o $\Lambda^0{}_0 \leq -1$, ma $\det\{\Lambda\} = -1$ parliamo di *trasformazioni improprie*.

Vediamo però alcuni casi specifici.

Traslazioni spaziali e temporali Prendiamo gli elementi:

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta = \mathbb{1} \quad , \quad d^\alpha \neq 0 \quad (3.3.61)$$

e l'equazione (3.3.2) diventa semplicemente:

$$x'^\alpha = x^\alpha + d^\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t' = t + p \\ x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c. \end{cases} \quad (3.3.62)$$

Rotazioni spaziali Prendiamo la matrice:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (3.3.63)$$

e poniamo $d^\alpha = 0$. La matrice Λ la possiamo anche scrivere con i suoi elementi:

$$\Lambda^0{}_0 = 1 \quad , \quad \Lambda^i{}_0 = \Lambda^0{}_i = 0 \quad , \quad \Lambda^i{}_j = R^i{}_j \quad (3.3.64)$$

in cui assumiamo che R sia una matrice ortogonale, quindi per cui:

$$RR^T = R^T R = \mathbb{1} \quad (3.3.65)$$

$$\det\{R\} = 1. \quad (3.3.66)$$

Scrivere una matrice tipo (3.3.63) equivale a disaccoppiare la trasformazione temporale da quella spaziale, infatti abbiamo che (3.3.2) è:

$$\begin{cases} t' = t \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.3.67)$$

in cui R rappresenta proprio una matrice 3x3 delle rotazioni spaziali con parametri i 3 angoli di eulero.

Trasformazioni di boost Prendiamo una matrice che trasformi solo il tempo e una delle 3 coordinate spaziali:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3.68)$$

infatti, con questa matrice trasformiamo t' e x' in una combinazione lineare di t e x , che sono tipiche trasformazioni che ci capitano in Relatività Speciale, che trasformano spazio e tempo. Ovviamente è dimostrabile (vedi p. 53-56 delle note del prof. Fornengo) che quando abbiamo osservatori in moto relativo, con velocità $\vec{v}$, una trasformazione Λ si può scrivere come:

$$\begin{cases} \Lambda^0_0 = \gamma \\ \Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = \gamma v^i \\ \Lambda^i_j = \delta^i_j + v^i v^j \frac{\gamma-1}{v^2} \end{cases} \implies \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3.69)$$

e si chiamano *trasformazioni di boost*. Notiamo che il parametro β rappresenta la velocità relativa tra due sistemi di riferimento, definita come:

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dx^0}. \quad (3.3.70)$$

3.3.4 Dinamica

Abbiamo visto che due sistemi di coordinate x e x' , rappresentanti due osservatori inerziali, possono essere collegati tramite le trasformazioni di Lorentz. Però, per quanto nel sappiamo ora ognuno dei due osservatori scrive le proprie leggi di natura (meccanica, dinamica, elettromagnetismo, etc.) e il che non è molto bello, poiché noi vorremmo rendere valido il primo principio della Relatività Speciale, ossia il principio che ci dice che tutte le leggi di natura (all'epoca di Einstein c'erano solo Meccanica ed EM) siano invarianti (scritti in forma covariante) sotto l'effetto di un gruppo di trasformazioni spazio-temporali, ovvero le trasformazioni di Lorentz. Dobbiamo inventarci un formalismo che ci permetta di scrivere le equazioni del moto, per qualsiasi osservatore (inerziale), sempre allo stesso modo, ossia in forma covariante. Questo nuovo formalismo sarà il **calcolo tensoriale**.

Vediamo che, ad esempio l'equazione di Newton, non è scritta in forma covariante:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \quad (3.3.71)$$

noi, sapendo già che l'accelerazione non è invariante per trasformazioni di Lorentz (lo è per trasformazioni di Galileo), possiamo dire che l'equazione (3.3.71) non è invariante, e quindi uguale in forma per tutti gli osservatori.

Facciamo un po' di dinamica. Prendiamo la trasformazione (3.3.2) e differenziamola:

$$dx'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta dx^\beta \implies \begin{cases} dt' = dx'^0 = \Lambda^0_\beta dx^\beta \\ dx'^i = dx'^i = \Lambda^i_\beta dx^\beta \end{cases} \quad (3.3.72)$$

sfruttiamo il fatto che il tempo proprio $d\tau^2$ è invariante e definiamo una grandezza fisica, che contenga l'informazione della velocità, ma scritta in un modo da avere una particolare proprietà (che vediamo tra pochissimo). Definiamo la **quadrivelocità**, che esprime la variazione delle quattro coordinate rispetto al tempo proprio:

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (3.3.73)$$

La proprietà di (3.3.73) è che se ne scriviamo l'espressione nel sistema di riferimento O' essa si trasforma come:

$$U'^\alpha = \frac{dx'^\alpha}{d\tau'} = \frac{dx'^\alpha}{d\tau} = \Lambda^\alpha{}_\beta \frac{dx^\beta}{d\tau} = \Lambda^\alpha{}_\beta U^\beta \quad (3.3.74)$$

ovvero, la quadrivelocità si trasforma come il differenziale delle coordinate (3.3.72).

Potremmo definire anche il **quadri-impulso**:

$$P^\alpha = mU^\alpha = m \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (3.3.75)$$

e segue che:

$$P'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta P^\beta. \quad (3.3.76)$$

Visto che ci siamo definiamo anche la **quadriforza**:

$$F^\alpha = \frac{dP^\alpha}{d\tau} = m \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} \quad (3.3.77)$$

che anch'essa si trasforma come:

$$F'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta F^\beta. \quad (3.3.78)$$

La cosa interessante delle quantità che abbiamo definito è che oggetti di questo tipo permettono di scrivere equazioni covarianti. Infatti, con questi oggetti le equazioni del moto e le leggi fisiche espresse in un sistema di coordinate rimangono uguali in forma se cambia il sistema di coordinate. Per esempio, se prendiamo il sistema di coordinate O , per cui una certa legge fisica si scrive come:

$$F^\alpha = G^\alpha \quad (3.3.79)$$

Se sia F che G sono scritte come oggetti che trasformano come differenziale delle coordinate, allora questa equazione la sappiamo scrivere facilmente nel sistema O' :

$$F'^\alpha = G'^\alpha \implies \Lambda^\alpha{}_\beta F^\beta = \Lambda^\alpha{}_\beta G^\beta \quad (3.3.80)$$

e visto che sappiamo che in O vale $F^\beta = G^\beta$, allora anche O' scriverà:

$$F'^\alpha = G'^\alpha \quad (3.3.81)$$

abbiamo un'equazione invariante in forma.

Prima di formalizzare la teoria nel nuovo formalismo del calcolo tensoriale, facciamo ancora un'osservazione. Noi siamo partiti dal ridefinire le grandezze fisiche in un modo che trasformino con le trasformazioni di Lorentz. Ad esempio, abbiamo preso la trivelocità, definita come variazione dello spazio nel tempo (3 componenti) e l'abbiamo ridefinita come quadri-velocità U^α , espressa come variazione delle coordinate (4 componenti) rispetto al tempo proprio (che sappiamo coincidere col tempo coordinata solo se siamo nel sistema di riposo dell'osservatore). Però, sembra che U^α sia una quantità più grande (con più informazioni) di $\vec{v}$ perché ora abbiamo quattro componenti:

$$U^\alpha = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) \quad (3.3.82)$$

e quindi sembra che costruendo la nuova teoria stiamo aggiungendo pezzi in più rispetto quelli che avevamo in Meccanica Classica, il tutto per avere una teoria covariante. In realtà non è vero, infatti la quadri-velocità, il quadri-impulso e la quadri-forza contengono dentro di sé le stesse informazioni dei vettori tridimensionali classici.

Possiamo verificarlo facilmente, ad esempio con la quadri-velocità:

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) = (\gamma, \gamma \vec{v}) \quad (3.3.83)$$

ricordando (3.3.5) possiamo vedere:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.3.84)$$

$$= -\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} dt^2 \quad (3.3.85)$$

$$= \left[-\eta_{00} \left(\frac{dt}{dt} \right)^2 - \eta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right] dt^2 \quad (3.3.86)$$

$$= [+1 - \delta_{ij} v^i v^j] dt^2 \quad (3.3.87)$$

$$= (1 - v^2) dt^2 \quad (3.3.88)$$

$$= \gamma^{-2} dt^2 \quad (3.3.89)$$

e dunque:

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma. \quad (3.3.90)$$

In modo analogo vediamo che $\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \gamma \vec{v}$ e possiamo scrivere una forma più compatta per la quadri-velocità:

$$U^\alpha = (\gamma, \gamma \vec{v}). \quad (3.3.91)$$

Da (3.3.90) ci rendiamo conto che in realtà le componenti indipendenti di U^α sono solamente 3 (poiché γ la fissiamo dalla velocità relativa tra i sistemi di riferimento). In particolare, se ci mettiamo nel sistema di riferimento di riposo $\vec{O}$, allora abbiamo $\vec{v} = \vec{0}$, $\gamma = 1$ e la quadrivelocità $U^\alpha = (1, \vec{0})$ che di fatto non ha informazioni al di fuori del fatto che la velocità sia nulla.

Possiamo notare che anche il quadri-impulso non ha più informazione di quanto abbia l'impulso ordinario:

$$P^\alpha = m U^\alpha = m (\gamma, \gamma \vec{v}) = (\gamma m, \gamma m \vec{v}) = (E, \vec{p}) \quad (3.3.92)$$

in cui abbiamo:

$$E = \gamma m \quad (3.3.93)$$

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (3.3.94)$$

il che è lecito poiché nel limite non relativistico, in cui $\gamma \rightarrow 1$, ritroviamo le definizioni classiche di energia ed impulso.

Un'altra relazione cruciale della quadrivelocità, e del quadri-impulso, che dobbiamo vedere la possiamo trovare con la *contrazione*:

$$U_\alpha U^\alpha = \eta_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta \quad (3.3.95)$$

$$= -(U^0)^2 + \sum_i (U^i)^2 \quad (3.3.96)$$

$$= -\gamma^2 + \gamma^2 \sum_i v^{i^2} \quad (3.3.97)$$

$$= -\gamma^2 + \gamma^2 v^2 \quad (3.3.98)$$

$$= -\gamma^2 (1 - v^2) \quad (3.3.99)$$

$$= -1. \quad (3.3.100)$$

Possiamo trovare la corrispondente relazione per il quadri-impulso:

$$\eta_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta = m^2 \eta_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = -m^2 \quad (3.3.101)$$

che viene anche chiamata **condizione di mass-shell**. Possiamo esplicitare la somma di (3.3.101):

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (3.3.102)$$

che è la relazione relativistica tra energia ed impulso. La relazione (3.3.102) non solo ci mostra che la quantità $P_\alpha P^\alpha$ è un'invariante, ma anche che pure per il quadri-impulso le componenti indipendenti sono solo 3 (visto che E e p sono legati).

Facciamo ancora un'ultima osservazione. L'invarianza di un'equazione fisica scritta in termini dei "quadri-oggetti" che abbiamo definito possiamo vederla nella legge di conservazione dell'energia e dell'impulso. Abbiamo un processo d'urto (raffigurato in figura 3.27) e scriviamo le leggi di

conservazione:

$$\begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \\ E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \end{cases} \quad (3.3.103)$$

ma sappiamo bene che nessuna delle grandezze che abbiamo scritto è invariante in forma per trasformazioni di Lorentz.



Figura 3.27: Processo d'urto.

Possiamo riscriverle in un'altra forma, ovvero come l'equazione di **conservazione del quadrimpulso**:

$$P_1^\alpha + P_2^\alpha = P_3^\alpha + P_4^\alpha \quad (3.3.104)$$

che possiamo anche riscrivere:

$$P^\alpha = P_1^\alpha + P_2^\alpha - P_3^\alpha - P_4^\alpha \quad (3.3.105)$$

allora:

$$P^\alpha = 0 \quad (3.3.106)$$

e un altro osservatore scriverebbe:

$$P'^\alpha = 0 \quad (3.3.107)$$

perché P trasforma come (3.3.76). Questo è fondamentale per tutti i processi d'urto relativistici.

Vediamo anche che tipo di informazioni contiene la quadriforza:

$$F^\alpha = m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{dP^\alpha}{d\tau} = \left(\frac{dP^0}{d\tau}, \frac{d\vec{P}}{d\tau} \right) \quad (3.3.108)$$

immaginiamo di porci, in un dato istante, nel sistema di riposo dell'oggetto che viene soggetto a forza. Tale oggetto non è inerziale perché cambia la sua velocità da un istante all'altro, però metterci istantaneamente in un sistema inerziale che ha la stessa velocità che ha il corpo accelerato in quell'esatto momento e vedere che la quadriforza ha forma:

$$F^\alpha = \left(0, \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right) = \left(0, \vec{F} \right) \quad (3.3.109)$$

ovviamente, quest'operazione la possiamo ripetere punto per punto (e ad ogni istante), dunque, la quadri-forza contiene dentro di sé la forza newtoniana che agisce sul corpo accelerato in quell'istante.

3.3.5 Tensori

Nella sezione §3.3.1 abbiamo definito cos'è un vettore e ora possiamo generalizzare il concetto. Definiamo che cos'è un **tensore**. Un *tensore* di rango kl è un oggetto matematico dotato di k indici controvarianti e l indici covarianti, e di conseguenza per ognuno dei quali presenta le proprietà di trasformazione covarianti e controvarianti. Ad esempio, un oggetto del tipo:

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} \quad (3.3.110)$$

Un po' più pratico è prendere un tensore di rango $(1, 2)$, quindi con 3 indici e che contiene in linea di principio $4 \times 4 \times 4$ elementi, che è un tensore se e solo se espresso in un altro sistema di coordinate si ottiene dalle sue componenti nel sistema originale attraverso una trasformazione:

$$T^{\gamma}_{\alpha\beta} \implies T'^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Lambda^{\gamma}_{\delta} \Lambda_{\alpha}^{\epsilon} \Lambda_{\beta}^{\eta} T^{\delta}_{\epsilon\eta}. \quad (3.3.111)$$

I tensori soddisfano determinate proprietà:

- *Combinazione lineare*: una combinazione lineare di tensori di un certo rango è ancora un tensore dello stesso rango:

$$T^{\alpha}_{\beta} = aR^{\alpha}_{\beta} + bS^{\alpha}_{\beta}. \quad (3.3.112)$$

Però attenzione che dobbiamo utilizzare tensori dello stesso rango.

Dimostrazione:

$$T'^{\alpha}_{\beta} = aR'^{\alpha}_{\beta} + bS'^{\alpha}_{\beta} \quad (3.3.113)$$

$$= a\Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\beta}^{\delta} R^{\gamma}_{\delta} + b\Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\beta}^{\delta} S^{\gamma}_{\delta} \quad (3.3.114)$$

$$= \Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\beta}^{\delta} (aR^{\gamma}_{\delta} + bS^{\gamma}_{\delta}) \quad (3.3.115)$$

$$= \Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\beta}^{\delta} T^{\gamma}_{\delta}. \quad (3.3.116)$$

- *Prodotto diretto*: possiamo fare il prodotto diretto tra tensori di rango diverso. Se facciamo il prodotto tra due tensori di rango (k, l) e (k', l') allora otteniamo un tensore di rango $(k + k', l + l')$. Ad esempio:

$$T^{\alpha}_{\beta}{}^{\gamma} = A^{\alpha}_{\beta} \otimes B^{\gamma} \quad (3.3.117)$$

$$(2, 1) = (1, 1) \otimes (1, 0). \quad (3.3.118)$$

Dimostrazione:

$$T'^{\alpha}_{\beta}{}^{\gamma} = A'^{\alpha}_{\beta} \otimes B'^{\gamma} \quad (3.3.119)$$

$$= \Lambda^{\alpha}_{\delta} \Lambda_{\beta}^{\epsilon} A^{\delta}_{\epsilon} \Lambda^{\gamma}_{\eta} B^{\eta} \quad (3.3.120)$$

$$= \Lambda^{\alpha}_{\delta} \Lambda_{\beta}^{\epsilon} \Lambda^{\gamma}_{\eta} (A^{\delta}_{\epsilon} B^{\eta}) \quad (3.3.121)$$

$$= \Lambda^{\alpha}_{\delta} \Lambda_{\beta}^{\epsilon} \Lambda^{\gamma}_{\eta} T^{\delta}_{\epsilon\eta}. \quad (3.3.122)$$

- *Contrazione degli indici*: se contraiamo gli indici di un tensore di rango (k, l) otteniamo un tensore $(k - 1, l - 1)$. Ad esempio:

$$T^\alpha{}_\beta{}^{\gamma\delta} \longrightarrow T^\alpha{}_\beta{}^{\gamma\beta} = T^{\alpha\gamma} \quad (3.3.123)$$

$$(3, 1) \longrightarrow (2, 0). \quad (3.3.124)$$

- *Alzare o abbassare gli indici*: se alziamo (o abbassiamo) gli indici di un tensore di rango (k, l) , allora otteniamo un tensore di rango $(k + 1, l - 1)$ (o $(k - 1, l + 1)$):

$$\text{Innalzamento } (k, l) \longrightarrow (k + 1, l - 1) \quad (3.3.125)$$

$$\text{Abbassamento } (k, l) \longrightarrow (k - 1, l + 1). \quad (3.3.126)$$

Nota che dobbiamo usare un tensore metrico η per ogni indice che vogliamo modificare, ad esempio:

$$T_\alpha{}^\delta{}_\gamma = \eta^{\delta\beta} T_{\alpha\beta\gamma} \quad (3.3.127)$$

$$T_\alpha{}^\delta{}_\gamma = \eta^{\delta\beta} \eta_{\gamma\rho} T_{\alpha\beta}{}^\rho. \quad (3.3.128)$$

- *Differenziazione o derivata*: se deriviamo un tensore (k, l) otteniamo un tensore $(k, l + 1)$. Ad esempio:

$$T^{\beta\gamma} \longrightarrow \partial_\alpha T^{\beta\gamma} = T_\alpha{}^{\beta\gamma} \quad (3.3.129)$$

$$(2, 0) \longrightarrow (2, 1). \quad (3.3.130)$$

Facciamo attenzione che ciò è vero solo se siamo nello spazio-tempo di Minkowski e le trasformazioni sono quelle di Lorentz, non sarà più così per i tensori che definiremo in relatività generale. **Dimostrazione**:

$$T'^{\beta\gamma} = \partial'_\alpha T'^{\beta\gamma} \quad (3.3.131)$$

$$= \Lambda_\alpha{}^\delta \partial_\delta \left(\Lambda^\beta{}_\epsilon \Lambda^\gamma{}_\xi T^{\epsilon\xi} \right) \quad (3.3.132)$$

$$T'^{\beta\gamma} = \Lambda_\alpha{}^\delta \Lambda^\beta{}_\epsilon \Lambda^\gamma{}_\xi \left(\partial_\delta T^{\epsilon\xi} \right) \quad (3.3.133)$$

l'ultima riga è proprio la relazione di trasformazione di un tensore due volte controvariante e una volta covariante.

- *La posizione degli indici conta*: ad esempio vale:

$$T_\alpha{}^{\beta\gamma} \neq T^\alpha{}_\beta{}^\gamma. \quad (3.3.134)$$

Ci sono un paio di tensori speciali che vale la pena di menzionare:

- *Tensore metrico*, che conosciamo già bene e per cui ci è nota la relazione:

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\gamma}^{\delta} \Lambda_{\delta}^{\epsilon} \eta_{\delta\epsilon} \quad (3.3.135)$$

che discende direttamente dalle trasformazioni di Lorentz e dall'invarianza del tempo proprio. L'analogo controvariante è $\eta^{\alpha\beta}$, che è tale per cui:

$$\eta_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \quad (3.3.136)$$

e possiamo dire che il tensore metrico controvariante è l'inverso di quello covariante, poiché se prendiamo delle matrici N e $\bar{N}$ e gli mettiamo gli elementi di matrice:

$$(N)_{\gamma\beta} = \eta_{\gamma\beta} \quad (3.3.137)$$

$$(\bar{N})_{\alpha\gamma} = \eta^{\alpha\gamma} \quad (3.3.138)$$

allora il loro prodotto (stiamo sommando su γ) ci da:

$$(N)_{\gamma\beta} (\bar{N})_{\alpha\gamma} = \mathbb{1}_{\alpha\beta} \quad (3.3.139)$$

per cui, sì, possiamo dire che $\eta^{\alpha\beta}$ è il **tensore metrico inverso**.

- *Tensore nullo*, è un tensore di rango (k, l) i cui elementi sono tutti nulli:

$$O^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} = 0 \quad (3.3.140)$$

e si trasforma come:

$$O_{\alpha\beta} \longrightarrow O'_{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda_{\beta}^{\delta} O_{\gamma\delta} = 0 \quad (3.3.141)$$

ovvero, il tensore nullo rimane il tensore nullo attraverso una trasformazione covariante due volte.

Vediamo, per concludere la sezione, un teorema importantissimo.

Teorema 2 (Teorema fondamentale dell'algebra tensoriale) *Se due tensori dello stesso rango sono uguali in un certo sistema di coordinate, essi rimangono tra di loro uguali in ogni altro sistema di coordinate legato alla trasformazione di Lorentz.*

Verifichiamolo brevemente. Mettiamoci nel sistema di coordinate O e prendiamo:

$$T^{\alpha}_{\beta} = S^{\alpha}_{\beta} \quad (3.3.142)$$

il teorema ci dice che se ci spostiamo in un altro sistema di riferimento O' , l'equazione (3.3.142) rimane della stessa forma. Infatti:

$$O' : T'^{\alpha}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda_{\beta}^{\delta} T^{\gamma}_{\delta} \quad (3.3.143)$$

$$= \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda_{\beta}^{\delta} S^{\gamma}_{\delta} \quad (3.3.144)$$

$$= S'^{\alpha}_{\beta} \quad (3.3.145)$$

come volevasi dimostrare. L'equazione (3.3.142) la possiamo chiamare **equazione tensoriale**. Le equazioni tra tensori assumono la stessa forma in tutti i sistemi di coordinate legati alla trasformazione di Lorentz. In particolare, l'affermazione che un tensore è uguale ad un tensore nullo è vera in tutti i sistemi di coordinate.

Il teorema fondamentale dell'algebra tensoriale ci permette di implementare in modo completo i due principi della Relatività Speciale allo stesso tempo, esprimendo le leggi della natura sotto forma di equazioni tensoriali. Quello che faremo sarà:

- Pendiamo osservatori inerziali, che sono alla base dei concetti della Relatività Speciale, e li vediamo come sistemi di coordinate su una varietà che chiamiamo spaziotempo.
- Il principio di costanza della velocità della luce ci dà delle proprietà:
 - fornisce delle specifiche trasformazioni tra sistemi di coordinate, ovvero le trasformazioni di Lorentz;
 - ci fornisce l'informazione che lo spazio-tempo è uno spazio-tempo metrico e ci definisce la metrica con la segnatura opportuna;
 - forniamo una struttura causale allo spazio-tempo, perché è attraverso essa che definiamo i coni luce e le separazioni di tipo tempo, spazio o luce.
- Il principio di relatività che dice che tutte le leggi della natura devono essere le stesse per tutti gli osservatori inerziali, e noi possiamo soddisfarlo utilizzando il teorema fondamentale dell'algebra tensoriale che ci dice che le equazioni tensoriali non cambiano forma per trasformazioni di Lorentz.

3.4 Elettromagnetismo

Vediamo alcune applicazioni del calcolo tensoriale per scrivere le equazioni di un sistema fisico, meccanico o elettromagnetico che sia, utilizzando il calcolo tensoriale. In particolare, studiamo il caso dell'elettromagnetismo e in particolare cerchiamo di scrivere nel formalismo tensoriale le equazioni di Maxwell che mettono in relazione i campi, responsabili dei fenomeni elettrici e magnetici, con le loro sorgenti che sono la densità di carica elettrica ϵ e la

corrente $\vec{j}$. In Elettromagnetismo classico abbiamo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon \quad (3.4.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.4.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (3.4.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \quad (3.4.4)$$

di cui ricordiamo alcune proprietà: notiamo che in totale sono $(1+1+3+3) = 8$ equazioni; date le sorgenti permettono di determinare i campi; il campo elettrico $\vec{E}$ è un vettore, mentre il campo magnetico $\vec{B}$ è uno pseudo-vettore; gli effetti dei campi sulle cariche sono dati dalla forza di Lorentz, che permette di trovare le equazioni del moto.

Vogliamo scrivere le grandezze che compaiono nelle equazioni di Maxwell all'interno di oggetti tensoriali, che ci permettano di ottenere una teoria covariante. Ci rendiamo subito conto che se vogliamo mettere $\vec{E}$ e $\vec{B}$ insieme, allora dovremo costruire un oggetto che ha $3 + 3$ elementi. In generale un tensore di rango $(1, 1)$, globalmente 2, ha:

$$T^{\alpha\beta} : 4 \times 4 = 16 \text{ componenti}$$

però, se noi lo simmetrizziamo o antisimmetrizziamo riusciamo a ridurle:

$$\text{simmetrico} : \quad T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \quad \text{comp. indep.} = \frac{1}{2}N(N+1) \underset{N=4}{=} 10$$

$$\text{anti-simmetrico} : \quad T^{\alpha\beta} = -T^{\beta\alpha} \quad \text{comp. indep.} = \frac{1}{2}N(N-1) \underset{N=4}{=} 6.$$

Dunque, se noi prendiamo un oggetto con due indici, che possiamo chiamare $F_{\alpha\beta}$, e imponiamo che sia antisimmetrico:

$$F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha} \quad (3.4.5)$$

allora, siamo sicuri che esso abbiamo 6 componenti indipendenti e possiamo sistemarci dentro il campo elettrico e magnetico. Sappiamo che un tensore antisimmetrico ha elementi sulla diagonale tutti nulli ed elementi off-diagonale uguali, a meno di un segno, a due a due:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ -F^{01} & 0 & F^{12} & F^{13} \\ -F^{02} & -F^{12} & 0 & F^{23} \\ -F^{03} & -F^{13} & -F^{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.6)$$

in particolare, possiamo posizionare prendere gli elementi:

$$F^{0i} = E^i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.4.7)$$

$$F^{ij} = \varepsilon^{ijk} B_k \quad (3.4.8)$$

in cui $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ è il tensore di Levi-Civita tridimensionale e per definizione completamente antisimmetrico. Si può brevemente verificare che la scelta degli elementi di $F^{\alpha\beta}$ che abbiamo fatto permette di rispettare l'antisimmetria, ma anche che cosa comporta un innalzamento o abbassamento degli indici:

$$\begin{aligned} F_{0i} &= \eta_{0\alpha} \eta_{i\beta} F^{\alpha\beta} = \eta_{00} \eta_{ii} F^{0i} = -F^{0i} \\ F_{ij} &= \eta_{i\alpha} \eta_{j\beta} F^{\alpha\beta} = \eta_{ii} \eta_{jj} F^{ij} = F^{ij}. \end{aligned}$$

Ora, se prendiamo le equazioni di Maxwell scritte in componenti, e la forma del tensore di rango 2 che abbiamo costruito:

$$\begin{cases} \partial_i E^i = \epsilon \\ \partial_i B^i = 0 \\ \epsilon^{ijk} \partial_j E_k + \partial_0 B^i = 0 \\ \epsilon^{ijk} \partial_j B_k - \partial_0 E^i = j^i \end{cases}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.9)$$

possiamo provare a scrivere in forma tensoriale le equazioni di Maxwell. Vediamo facilmente la prima equazione:

$$\partial_i E^i = \partial_i F^{0i} = \epsilon \quad (3.4.10)$$

ma in realtà anche la quarta è semplice da scrivere con $F^{\alpha\beta}$:

$$\partial_j F^{ij} - \partial_0 F^{0i} = j^i. \quad (3.4.11)$$

Se definiamo l'oggetto:

$$J^\alpha = (J^0, \vec{J}) = (\epsilon, \vec{j}) \quad (3.4.12)$$

allora le equazioni (3.4.10) e (3.4.11) le possiamo scrivere in un'unica equazione:

$$\boxed{\partial_\alpha F^{\beta\alpha} = J^\beta} \quad (3.4.13)$$

e rappresenta le equazioni di Maxwell¹² che legano le sorgenti ai campi, ovvero le equazioni non omogenee. Notiamo che nell'equazione (3.4.13) abbiamo a sinistra un tensore $(0,1)$ contratto con uno $(2,0)$ e che sappiamo, grazie a (3.3.124), fare un tensore $(1,0)$, come confermato dal membro di destra.

Se definiamo:

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \quad (3.4.14)$$

¹²Si verifica in modo quasi immediato che con $\beta = 0$ torniamo a (3.4.10) e con $\beta = i$ a (3.4.11):

$$\begin{aligned} \beta = 0 & : \partial_\alpha F^{0\alpha} = \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = \partial_i F^{i0} = J^0 = \epsilon \\ \beta = i & : \partial_\alpha F^{i\alpha} = \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = \partial_j F^{ji} - \partial_0 F^{0i} = J^i. \end{aligned}$$

allora le equazioni di Maxwell omogenee risultano:¹³

$$\boxed{\partial_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0}. \quad (3.4.16)$$

Dalle proprietà di trasformazione del campo elettrico e del campo magnetico, si può dimostrare che $F^{\alpha\beta}$, se cambiamo sistema di riferimento e facciamo una trasformazione di Lorentz, allora le componenti di $F'^{\alpha\beta}$ si ottengono dalle componenti di $F^{\alpha\beta}$ attraverso la trasformazione tensoriale di un tensore di rango 2:

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta F^{\gamma\delta} \quad (3.4.17)$$

e si può far vedere che anche J^α trasforma correttamente:

$$J'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta J^\beta. \quad (3.4.18)$$

Dunque, nota la densità di carica, o la corrente, in un sistema di coordinate allora lo conosciamo in tutti. Il tensore $F^{\alpha\beta}$ si chiama **tensore elettromagnetico**.

Quelle che abbiamo ottenuto sono tutte equazioni tensoriali, quindi sappiamo dal teorema fondamentale del calcolo tensoriale che in un altro sistema di riferimento la forma delle equazioni rimane invariata. Facciamo attenzione che ciò non vuol dire che i valori delle componenti dei vettori e dei tensori siano uguali nei due sistemi di riferimento, ma soltanto che essi trasformano con trasformazione di Lorentz. Quando un'equazione presenta tale invarianza in forma si dice anche equazione in forma **covariante**.

La stessa teoria, come già abbiamo fatto in Elettromagnetismo classico, la possiamo riscrivere utilizzando al posto del campo elettrico e del campo magnetico i potenziali elettromagnetici ϕ , $\vec{A}$. Possiamo scrivere le definizioni dei campi in termini di potenziale vettore e scalare:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.4.19)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.4.20)$$

¹³Per esercizio si potrebbe scrivere anche utilizzando $F^{\alpha\beta}$ e uscirebbe:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.4.15)$$

che utilizzando il tensore elettromagnetico diventano:

$$\begin{aligned} E^i &= -\partial^i \phi - \partial_0 A^i \\ &= -\partial^i \phi + \partial^0 A^i \quad \implies \quad F^{0i} = -\partial^i \phi + \partial^0 A^i \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

$$\begin{aligned} F^{lm} &= \varepsilon^{lmi} B_i \\ &= \varepsilon^{lmi} \varepsilon_{ijk} \partial^j A^k \\ &= \left(\delta^l_j \delta^m_k - \delta^l_k \delta^m_j \right) \partial^j A^k \\ &= \partial^l A^m - \partial^m A^l \quad \implies \quad F^{lm} = \partial^l A^m - \partial^m A^l. \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

Definendo un **quadripotenziale**:

$$A^\alpha = (A^0, \vec{A}) = (\phi, \vec{A}) \quad (3.4.23)$$

possiamo riscrivere, in senso del tutto generale:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad (3.4.24)$$

ovvero $F^{\alpha\beta}$, che contiene i campi elettromagnetici, lo scriviamo in termini delle derivate del quadripotenziale. Notiamo che (3.4.24) porta due condizioni in più su $F^{\alpha\beta}$, che quindi è scrivibile con 4 condizioni e non 6. Infatti, se prendiamo (3.4.24) e la mettiamo in (3.4.15) otteniamo (ricordando che le derivate commutano):

$$\partial_\alpha (\partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta) + \partial_\beta (\partial_\gamma A_\alpha - \partial_\alpha A_\gamma) + \partial_\gamma (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 0 \quad (3.4.25)$$

$$\implies \quad 0 = 0 \quad (3.4.26)$$

dunque, le equazioni omogenee non danno una vera informazione, ma rappresentano di fatto una condizione che devono soddisfare il campo $\vec{E}$ e il campo $\vec{B}$. Le vere equazioni dinamiche sono quelle non omogenee (3.4.13) che mettono in relazione le sorgenti del campo elettromagnetico al campo elettromagnetico.

3.4.1 Invarianza di gauge

Vediamo brevemente che cosa intendiamo con teoria di gauge e come si vede in Elettromagnetismo.

Riprendiamo l'equazione:

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = J^\alpha \quad (3.4.27)$$

e anziché contrarre il secondo indice, contraiamo il primo:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\partial_\alpha F^{\beta\alpha} = -J^\beta \quad (3.4.28)$$

usando (3.4.24) abbiamo:

$$-J^\beta = \partial_\alpha (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \quad (3.4.29)$$

$$= \partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta (\partial_\alpha A^\alpha) \quad (3.4.30)$$

$$= \square A^\beta - \partial^\beta (\partial_\alpha A^\alpha) \quad (3.4.31)$$

che possono essere viste come le quattro equazioni dinamiche del campo EM, scritte in forma tensoriale. Però, come sappiamo, A^α ha un grado di libertà e abbiamo un'invarianza poiché la soluzione che troviamo per il potenziale vettore non è univoca; l'invarianza che si manifesta è detta **invarianza di gauge**, che possiamo sfruttare per riscrivere in modo più compatto le equazioni (3.4.31). Possiamo vedere che se trasliamo il quadripotenziale di un gradiente di una funzione arbitraria:

$$A_\alpha \longrightarrow \hat{A}_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \chi(x) \quad (3.4.32)$$

allora il tensore elettromagnetico non cambia e quindi abbiamo le stesse informazioni sul campo elettromagnetico. Verifichiamo che facendo (3.4.32) abbiamo:

$$F_{\alpha\beta} \longrightarrow F'_{\alpha\beta} = \partial_\alpha (A_\beta + \partial_\beta \chi) - \partial_\beta (A_\alpha + \partial_\alpha \chi) \quad (3.4.33)$$

$$= \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha \partial_\beta \chi - \partial_\beta \partial_\alpha \chi \quad (3.4.34)$$

$$= \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad (3.4.35)$$

$$= F_{\alpha\beta}. \quad (3.4.36)$$

In generale non abbiamo bisogno di risolvere l'equazione del moto in un dato gauge, ma scegliere uno potrebbe risultare più comodo poiché potrebbe semplificare la forma delle equazioni. Scegliere uno specifico gauge, quindi una specifica forma di $\chi(x)$ si chiama **gauge fixing**. Uno dei tipici gauge fixing è quello di *Lorenz*:

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \quad (3.4.37)$$

che è un'equazione tensoriale, quindi una condizione invariante dal punto di vista delle trasformazioni di Lorentz. È una scelta comoda perché se prendiamo l'equazione di Maxwell per il potenziale (3.4.31) e imponiamo il gauge di Lorenz, allora l'equazione del moto diventa semplicemente:

$$\square A^\beta = -J^\beta \quad (3.4.38)$$

che è un'equazione di d'Alembert con termini di sorgente, sicuramente più semplice da risolvere rispetto (3.4.31). Nel vuoto abbiamo:

$$\square A^\beta = 0 \quad (3.4.39)$$

che non solo ci piace perché è un'invariante, ma perché troviamo, in modo immediato, l'equazione delle onde, che ci dice che il campo potenziale vettore ammette una soluzione di tipo ondulatorio.

Un altro gauge comodo per altri scopi è il cosiddetto *gauge di Coulomb* in cui scegliamo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_i A^i = 0 \quad (3.4.40)$$

ma che a differenza del gauge di Lorenz non è una scelta Lorentz invariante.

3.5 Meccanica analitica

Sospendiamo un attimo l'EM e prendiamo una teoria di campo classica, il che significa che abbiamo un certo numero i di gradi di libertà, che possiamo chiamare campi ϕ^i , che descrivono i nostri sistemi. I campi sono funzioni dello spazio-tempo, sono cioè le variabili dinamiche del sistema, e la loro evoluzione descrive il sistema fisico.

Possiamo dare una descrizione del sistema utilizzando il formalismo lagrangiano, definiamo una **densità di lagrangiana**, funzione dei campi, delle loro derivate prime e dei loro gradienti:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i) \quad , \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5.1)$$

La lagrangiana del sistema, L , è data dall'integrale sul volume della densità di lagrangiana:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i). \quad (3.5.2)$$

Introduciamo l'**azione** del sistema definita come:

$$S = \int dt L \quad (3.5.3)$$

$$= \int d^4x \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i) \quad (3.5.4)$$

con $d^4x = dt dx dy dz$ elemento di volume dello spaziotempo di Minkowski. L'azione dimensionalmente, è un'energia per un tempo, ma ricordando che usiamo le unità naturali essa è adimensionale. L'elemento di volume ha dimensioni:

$$[d^4x] = L^4 = M^{-4}. \quad (3.5.5)$$

Notiamo che nessuno ci vieta di usare coordinate adimensionali, per esempio tutte riferite in unità di una certa scala che abbiamo scelto. Per il momento lasciamo le cose così. Comunque, la dimensionalità di d^4x ci dice che la densità lagrangiana deve avere una dimensione:

$$[\mathcal{L}] = M^4 = L^{-4}. \quad (3.5.6)$$

Rendiamoci conto che l'elemento di volume dello spazio di Minkowski si trasforma per trasformazioni di Lorentz come:

$$d^4 \longrightarrow d^4x' = |\det\{J\}| d^4x \stackrel{J=1}{=} d^4x \quad (3.5.7)$$

ovvero non cambia, e questo ci dice che l'azione deve rispettare tutte le simmetrie del sistema. Dal punto di vista delle trasformazioni di Lorentz, dato che l'elemento di volume è invariante, allora è necessario che la densità di lagrangiana sia anch'essa un invariante per trasformazioni di Lorentz, cioè che essa sia quello che abbiamo chiamato uno scalare. Questo si traduce nel dire che se usiamo quadrivettori e tensori per descrivere i campi dinamici, allora la lagrangiana deve essere una combinazione di questi e deve rimanere invariante. Per esempio, (non lo dimostriamo, ma puoi vedere le note del corso di IQFT o FQFT) per quanto riguarda l'elettromagnetismo la densità lagrangiana che descrive un sistema di cariche correnti che generano un campo elettromagnetico è scritta come:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \quad (3.5.8)$$

in cui il primo termine contiene solo l'informazione sul campo elettromagnetico, mentre nel secondo c'è il campo elettromagnetico (nella forma di A) moltiplicato per le sorgenti, quindi questo mette in interazione diretta campo e sorgenti. Sappiamo anche che la teoria del campo elettromagnetico non è solo invariante di Lorentz, ma è anche invariante per effetto di trasformazioni di gauge, per cui abbiamo che anche la densità lagrangiana deve esserlo. Dobbiamo scrivere una combinazione delle quantità dinamiche A_μ e J_μ , in modo tale che sia anche invariante di gauge (ovviamente, non è scopo di questo corso per cui non lo facciamo).

L'importanza dell'azione risiede nel fatto che ci permette di scrivere l'equazione del moto delle variabili dinamiche da cui essa dipende, cioè ci porta alle equazioni di Eulero-Lagrange. Descriviamo il **principio variazionale**. Presa una densità lagrangiana $\mathcal{L}$ possiamo richiedere che l'azione sia stazionaria per variazioni dei campi del tipo:

$$\phi^i \longrightarrow \phi^i + \delta\phi^i \quad (3.5.9)$$

cioè trasformazioni che prendono i campi e li fanno variare lungo una certa traiettoria, cioè uno spazio di configurazione dei campi tale che segua l'equazione del moto. Però, imponiamo anche la condizione al contorno:

$$\delta\phi^i \Big|_{\text{estremi}} = 0 \quad (3.5.10)$$

ossia, che le variazioni dei campi negli estremi del cammino siano nulle. Vogliamo trovare quali siano le configurazioni di campo, a estremi fissati, che rendono estrema l'azione. Quindi quello che richiediamo è:

$$\delta S = 0. \quad (3.5.11)$$

La configurazione di campi che rende estrema, cioè massimale o minimale, l'azione è quella che in teoria di campi classica rappresenta l'equazione del

moto. La variazione dell'azione è:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta (\partial_\mu \phi^i) \right] \quad (3.5.12)$$

se scriviamo la variazione della derivata dei campi come:

$$\partial_\mu \phi^i \longrightarrow \partial_\mu \phi^i + \delta (\partial_\mu \phi^i) \quad (3.5.13)$$

e assumiamo che valga $\delta (\partial_\mu \phi^i) = \partial_\mu (\delta \phi^i)$, allora segue che:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\mu (\delta \phi^i) \right]. \quad (3.5.14)$$

Possiamo notare che:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i \right] = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\mu (\delta \phi^i) \quad (3.5.15)$$

che se inserito nell'espressione di δS porta a:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta \phi^i - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i \right) \right] \quad (3.5.16)$$

in cui l'ultimo termine è il solito (dipende se si è abituati a queste cose) termine di bordo che, sfruttando il teorema della divergenza, integrato da:

$$\int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i \Big|_{\text{bordo}} = 0 \quad (3.5.17)$$

poiché noi abbiamo richiesto (3.5.10), ovvero che le deformazioni dei bordi siano nulle. Rimangono quindi con:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta \phi^i - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i \right] \quad (3.5.18)$$

che se lo imponiamo uguale a 0, ci dà la relazione:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} = 0 \quad (3.5.19)$$

poiché le variazioni $\delta \phi^i$ sono arbitrarie e la condizione $\delta S = 0$ si traduce nel chiedere che la parentesi quadra sia nulla per ogni valore di i (che notiamo essere un'indice sommato). Le equazioni (3.5.19) vengono chiamate **equazioni di Eulero-Lagrange** e ci forniscono l'equazione del moto del sistema fisico descritto dalla Lagrangiana $\mathcal{L}$. Se prendessimo la Lagrangiana per il campo elettromagnetico (3.5.8) e ne facessimo la variazione rispetto ai campi A^μ , allora troveremmo l'equazione di Maxwell (3.4.31).

Il principio variazionale è un metodo generale per scrivere teorie che siano Lorentz invarianti.¹⁴ Questo varrà anche in Relatività Generale, ma ci saranno delle modifiche a cui dovremmo fare attenzione.

Per dettagli e discorsi più ampi (caso di invarianze non solo interne al campo e quindi definizioni di correnti e cariche più generiche) vedi la sezione §4.2 degli appunti di *Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi*, ma possiamo interpretare il termine (3.5.17):

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \quad (3.5.20)$$

come una **corrente** che, per via delle condizioni imposte, soddisfa (3.5.17) e dunque un'**equazione di continuità**:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (3.5.21)$$

Possiamo inoltre definire una **carica** conservata¹⁵, che è data dall'integrale spaziale della componente temporale di (3.5.20):

$$Q_\alpha \equiv \int d^3x J^0. \quad (3.5.22)$$

Ovviamente, conosciamo bene l'esistenza del *teorema di Noether*, che ci dice esattamente quello appena visto, ovvero: una simmetria di S , induce ad una corrente conservata e ad una legge di continuità (3.5.21), che a sua volta porta ad una legge di conservazione di una carica Q_α .

3.5.1 Correnti

Vediamo adesso come, in Relatività Speciale, organizzare e definire in modo covariante le sorgenti del campo elettromagnetico, in modo da riuscire anche a definire le corrispondenti quantità che, più avanti nel corso, diventeranno le sorgenti del campo gravitazionale.

Cominciamo con il dare una definizione di corrente elettrica e densità di carica elettrica. Prendiamo un sistema composto da un certo numero di cariche elettriche, e_n , con n numero grande, ognuna delle quali assume una posizione $\vec{x}_n(t)$. La densità di carica ϵ sarà funzione della posizione e del tempo, ovvero avremo $\epsilon(\vec{x}, t)$ visto che le cariche si possono muovere. Ne possiamo dare una rappresentazione:

$$\epsilon(\vec{x}, t) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.23)$$

¹⁴Tant'è che abbiamo costruito la QFT basandoci su di esso.

¹⁵La carica si conserva per via dell'equazione di continuità (3.5.21) soddisfatta da J^μ .

in cui la δ^3 ci dice che al tempo t la carica e_n si trova nel punto $\vec{x} = \vec{x}_n(t)$. In più conosciamo la seguente proprietà:

$$\int d^3x f(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{y}) \quad (3.5.24)$$

la quale ci permette di vedere quali siano le dimensioni di δ^3 , infatti, comparando ad entrambi i membri f la sua dimensione non conta e abbiamo $[\delta^3] = L^{-3}$.

Se ci ricordiamo che la corrente di carica è la carica stessa moltiplicata per la velocità, allora abbiamo che la corrente elettrica è della forma:

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \sum_n e_n \frac{d\vec{x}_n}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)). \quad (3.5.25)$$

L'insieme delle due equazioni (3.5.23) e (3.5.25) sono quelle che abbiamo messo nelle equazioni di Maxwell come sorgenti del campo elettromagnetico e le possiamo unificare in un'unica espressione. Possiamo notare che la corrente è una corrente vettoriale, mentre la densità è una quantità¹⁶ che può essere messa nella componente temporale di un quadri vettore, perché trasforma come un tempo. Definiamo una funzione vettoriale dello spazio-tempo:

$$J^\alpha(x) = \sum_n e_n \frac{dx_n^\alpha}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.26)$$

dove con x si intende il quadrivettore con tempo e spazio. Adesso facciamo vedere, per altra via, che questo è un vettore di Lorentz e che quindi tutto quello che abbiamo detto è consistente. Si noti che:

$$J^0(x) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \equiv \epsilon(x) \quad (3.5.27)$$

poiché quando $\alpha = 0$ è come avere $dt/dt = 1$, mentre:

$$J^i(x) = \sum_n e_n \frac{dx_n^i}{dt} = j^i(x) \quad (3.5.28)$$

con, adesso, x_n la coordinata spaziale o temporale occupata dall'ennesima particella, ossia, dal punto di vista spaziale le x_n sono il luogo dei punti della sua traiettoria, ma quando $\alpha = 0$ è il tempo.

Ora, ci possiamo chiedere se J^α è un quadrivettore? La risposta è sì, ma dimostriamolo. Scritto come in (3.5.26) non appare manifestamente un

¹⁶Il che non implica che sia uno scalare, poiché infatti si può dimostrare che non è invariante per trasformazioni di Lorentz.

vettore per trasformazione di Lorentz (c'è una delta solo spaziale). Per vederla meglio dobbiamo riscriverla in un altro modo, usando un po' di algebra.¹⁷ Sarebbe bello poterla scrivere facendo comparire una δ^4 sull'ulteriore coordinata che ci manca, ossia quella temporale. Usiamo la (3.5.24) per scrivere:

$$J^\alpha(x) = \int dt' \sum_n e_n \frac{dx_n^\alpha(t')}{dt'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t')) \delta(t' - x_n^0(t)) \quad (3.5.29)$$

riparametrizziamo lo spazio fisico come lo spaziotempo di Minkowski e riscriviamo la quadricorrente usando il tempo proprio:

$$J^\alpha(x) = \int d\tau \sum_n e_n \frac{dx_n^\alpha(\tau)}{d\tau} \delta^4(x - x_n(\tau)) \quad (3.5.30)$$

in cui, ora, $x_n(\tau)$ è la worldline nello spaziotempo della n -esima particella, che notiamo non è detto che sia una traiettoria rettilinea, poiché le cariche elettriche possono interagire elettromagneticamente e quindi possono essere accelerate.

Ora, scritta (3.5.30) possiamo far vedere che la combinazione a secondo membro è un vettore di Lorentz. Infatti:

- $d\tau$ è uno scalare.
- e_n è uno scalare.
- $\frac{dx_n^\alpha(\tau)}{d\tau}$ è un quadrivettore (prima la derivata rispetto a dt non lo era perché oltre a x^α si trasformava anche la variabile derivata, ossia t).

Però, dobbiamo mostrare che $\delta^4(x - x_n(\tau))$ è uno scalare. Se riprendiamo definizione matematica di delta di Dirac:

$$\int d^4x \delta^4(x - y) \phi(x) = \phi(y) \quad (3.5.31)$$

in cui la funzione ϕ può essere quello che vogliamo, ma tra tutte le possibilità che possiamo scegliere, prendiamo uno scalare di Lorentz, cioè un invariante. Notiamo, inoltre, che il volume d^4x è un invariante, quindi uno scalare. Perciò se la combinazione a primo membro deve dare uno scalare, allora la $\delta^4(x)$ deve anch'essa essere uno scalare.¹⁸

¹⁷Nota che noi vogliamo trovare un modo automatico per dire che J^α è un vettore di Lorentz, ma si potrebbe vedere che la derivata $d_t x_n^\alpha$ trasforma come un dt^{-1} e la δ^3 come d^3x^{-1} e si dimostrerebbe ugualmente.

¹⁸Poiché possiamo scrivere $d^4x = dt dx dy dz$ e se facciamo $x^\alpha \rightarrow \Lambda^\alpha_\beta x^\beta$, allora otteniamo $d^4x' = dt' dx' dy' dz' = |\det\{J\}| d^4x$, ma in cui $|\det\{J\}| = 1$ (per le trasformazioni proprie). Ovviamente, quello che abbiamo visto dimostra che δ^4 è uno scalare di Lorentz, ma resta vero che δ^3 non lo è. Infatti, la mancanza di $x^0 = t$ è cruciale; δ^3 ha le dimensioni di un volume, ma d^3x durante una trasformazione di Lorentz, tra due sistemi di riferimento in moto relativo risulta deformato, ossia schiacciato, per via delle contrazioni delle lunghezze ($\propto 1/\gamma$). Quando aggiungiamo anche il dt tutto torna invariante poiché aggiungiamo anche la dilatazione del tempo ($\propto \gamma$).

Quello visto implica che la J^α sia un vettore di Lorentz (ricorda quello che abbiamo detto del prodotto di tensori; ora abbiamo (scalare)·(scalare)·(4-vettore)·(scalare)=(4-vettore)). Quindi, abbiamo trovato il modo in cui noi possiamo scrivere, in modo covariante (per trasformazione di Lorentz), la corrente elettrica. Tale corrente, la (3.5.30) se non ci sono sorgenti di carica elettrica o di pozzi, è conservata in senso covariante. Ciò significa, in senso più stretto, che se calcoliamo la divergenza della corrente (in coordinate cartesiane), allora:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(t, \vec{x}) = \partial_i J^i(x) = \partial_i \left(\sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \right) \quad (3.5.32)$$

per svolgere la derivata rispetto alle coordinate x_i , notiamo che la dipendenza da x si ha attraverso la delta di Dirac, che in effetti individua la posizione della n -esima particella. Abbiamo quindi:

$$\partial_i J^i(x) = \sum_n e_n \frac{\partial \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))}{\partial x^i} \frac{dx_n^i(t)}{dt} \quad (3.5.33)$$

vediamo separatamente:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = \frac{\partial}{\partial (x^i - x_n^i(t))} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.34)$$

visto che le $x_n(t)$ sono indipendenti da x . Abbiamo anche:

$$\frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = - \frac{\partial}{\partial (x^i - x_n^i(t))} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.35)$$

vediamo quindi che le derivate della δ rispetto x^i e x_n^i sono uguali a meno di un segno; possiamo usare queste due relazioni nel calcolo di $\partial_i J^i$. Abbiamo:

$$\partial_i J^i(x) = \sum_n e_n \frac{dx_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.36)$$

$$= - \sum_n e_n \frac{dx_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.37)$$

$$= - \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.38)$$

$$= - \frac{\partial}{\partial t} \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.39)$$

$$= - \frac{\partial}{\partial t} \epsilon(t, \vec{x}) \quad (3.5.40)$$

$$= - \partial_t J^0 \quad (3.5.41)$$

$$= - \partial_0 J^0 \quad (3.5.42)$$

dunque, portando al lato sinistro la derivata temporale otteniamo:

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \quad (3.5.43)$$

che, come abbiamo già visto, si chiama **equazione di continuità** e notiamo che è un'equazione invariante per trasformazioni di Lorentz. Se la corrente J^α soddisfa l'equazione di continuità si dice che la *corrente è conservata*. Con questo si intende cioè che la carica totale del sistema di cariche è indipendente dal tempo. Infatti, definita:

$$Q = \int d^3x J^0(x) \quad (3.5.44)$$

$$= \int d^3x \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.45)$$

$$= \sum_n e_n \quad (3.5.46)$$

possiamo verificare che è indipendente dal tempo (usando l'equazione di continuità):

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \partial_0 J^0 \quad (3.5.47)$$

$$= \int d^3x \left[-\partial_i J^i \right] \quad (3.5.48)$$

$$= \int d^3x \left[-\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right] \quad (3.5.49)$$

$$= - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (3.5.50)$$

$$= - \int_{\Sigma=\partial V} d\Sigma \vec{J} \cdot \vec{n} \longrightarrow 0 \quad (3.5.51)$$

in cui nell'ultimo passaggio abbiamo detto che se prendiamo la superficie che contiene tutte le cariche e la mandiamo a infinito, allora l'integrale va a 0. Quindi, se vale l'equazione di continuità (3.5.43), allora la carica elettrica (3.5.44) non cambia nel tempo, è costante. Se invece avessimo avuto:

$$\partial_\alpha J^\alpha = S \quad (3.5.52)$$

con S qualche sorgente elettromagnetica, allora rifacendo i conti per la derivata di Q nel tempo, otterremmo che il termine di bordo andrebbe a 0, ma il contributo di S rimarrebbe. Avremmo dunque:

$$\frac{dQ}{dt} = T \quad (3.5.53)$$

in cui, se $T > 0$ (decadimenti) la carica aumenta, quindi si ha una sorgente di carica da qualche parte, mentre se $T < 0$ (annichilazione), allora la carica diminuisce e si ha un pozzo.

Si noti che Q è l'integrale sul volume della componente temporale del quadrivettore che descrive la carica: questa è una proprietà più generale che non vale solo per la carica elettrica, come abbiamo visto. Infatti, potremmo rifare lo stesso ragionamento, ma sta volta considerando una collezione di particelle a cui associamo una quantità q_n , caratteristica di ogni particella; anche in questo caso arriviamo ad una definizione di quadrivettore di corrente $J^\alpha = (\epsilon_q, \vec{j}_q)$ e ad una carica Q_q conservata, con l'unica differenza che ci mettiamo un pedice q per differenziarle dalle stesse quantità elettriche. I nomi quadrivettore di corrente e carica si usa per generiche quantità, anche se non sono sempre corrente e carica elettrica; vedremo un caso tra poco.

Ora, consideriamo una collezione di particelle, ad ognuna di esse possiamo associare come proprietà il suo quadrimpulso $p_n^\alpha(t) = (E_n, \vec{p}_n)$, che è una quantità dinamica e che può in generale dipendere dal tempo, visto che le particelle possono essere in interazione con un campo esterno o interagire tra di loro tramite urti. Possiamo definire la densità di quadrimpulso:

$$T^{\alpha 0} = \sum_n p_n^\alpha(x) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.54)$$

e la corrente di p_n^α :

$$T^{\alpha i} = \sum_n p_n^\alpha \frac{dx_n^i(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)). \quad (3.5.55)$$

Quando mettiamo $\alpha = 0$, allora T^{00} rappresenta la densità di energia, ma quando $\alpha = i$, allora T^{i0} è la densità di quantità di moto. Notiamo che in (3.5.55) abbiamo 3 quantità (date dall'indice i), per ognuna delle 4 componenti (indice α) di p_n^α .

Ora, abbiamo quattro densità, per l'energia e per ogni componente dell'impulso, e abbiamo un numero rilevante di correnti - tre direzioni delle velocità che si moltiplicano alle quattro grandezze di cui costruisco la corrente. Quindi, analogamente a quanto fatto fatto per la carica elettrica - componente temporale di un quadrivettore - e per la corrente di carica elettrica - componente spaziale -, possiamo riorganizzare queste quantità all'interno di un tensore $T^{\alpha\beta}$. Definiamo questa nuova quantità, che chiamiamo **tensore energia-impulso** o *stress energy tensor*:

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^\beta(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)). \quad (3.5.56)$$

Notiamo che (3.5.56) è valido per un sistema discreto, ma lo si può generalizzare anche per un sistema continuo (ad esempio un gas), facendone il limite al continuo. Notiamo anche che (3.5.56) è un tensore per trasformazioni di Lorentz. È dimostrabile ripercorrendo lo stesso ragionamento che abbiamo fatto per la corrente elettrica, ovvero: completiamo la δ^3 facendola

diventare una δ^4 moltiplicando per una delta sul tempo e integrandoci sopra; dopodiché nell'integrale sul tempo facciamo il cambio $dt \rightarrow d\tau$ e otteniamo:

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n \int d\tau p_n^\alpha \frac{dx_n^\beta(\tau)}{d\tau} \delta^4(x - x_n(\tau)) \quad (3.5.57)$$

a questo punto vedendo che $d\tau$ e δ^4 sono scalari e che ∂_n^α e $dx_n^\beta(\tau)$ sono quadrivettori, possiamo concludere che $T^{\alpha\beta}$ è un tensore di rango 2. Inoltre, possiamo vederne anche una proprietà:

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \quad (3.5.58)$$

ovvero, è simmetrico per scambio di indici. Infatti, considerando la relazione che mette collega l'energia e l'impulso:¹⁹

$$p_n^\beta = E_n \frac{dx_n^\beta}{dt} \quad (3.5.59)$$

riscriviamo (3.5.56) come:

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n \frac{p_n^\alpha(t) p_n^\beta(t)}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.60)$$

che è un'espressione identica a quelle altre già viste, ma più carina solo per il fatto che è evidente la simmetria per scambio di indici.

Ci chiediamo ora se (3.5.56) ha la proprietà di essere conservato in senso covariante, e quindi soddisfa un'equazione di continuità.

Per la corrente avevamo $\partial_\alpha J^\alpha = 0$ e ora ci chiediamo se vale:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (3.5.61)$$

in cui facciamo la divergenza su uno dei due indici, che in generale è rilevante su quale la faccio, ma fintanto che il tensore è simmetrico, ciò non conta.

Notiamo anche che in (3.5.61) si hanno quattro equazioni di continuità scritte attraverso un'espressione covariante (che è quindi è la stessa in tutti i sistemi di riferimento). Calcoliamo la divergenza spaziale:

$$\partial_i T^{\alpha i} = \sum_n p_n^i \frac{dx_n^i}{dt} \partial_i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.62)$$

$$= \sum_n p_n^i \frac{dx_n^i}{dt} \left(-\frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \right) \quad (3.5.63)$$

$$= -\sum_n p_n^i \frac{\partial \delta^3(\dots)}{\partial t} \quad (3.5.64)$$

¹⁹Facilmente dimostrabile prendendo $\beta = 0$, per cui si ha $p_n^0 = E_n$ e $E_n \frac{dx_n^0}{dt} = E_n \frac{dt}{dt} = E_n$, e $\beta = i$, per cui p_n^i è relazionato con $E_n \frac{dx_n^i}{dt} = E_n v_n^i$.

guardando la parte temporale (3.5.54) invece abbiamo:

$$\partial_0 T^{\alpha 0} = \sum_n \frac{dp_n^\alpha}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) + \sum_n p_n^\alpha \partial_t \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)). \quad (3.5.65)$$

Notando la somiglianza tra (3.5.64) e (3.5.65) possiamo scrivere:

$$\partial_i T^{\alpha i} = -\partial_0 T^{\alpha 0} + \sum_n \frac{dp_n^\alpha}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.66)$$

e dunque:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = \sum_n \frac{dp_n^\alpha}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)). \quad (3.5.67)$$

Se ribattezziamo il secondo membro di (3.5.67) come:

$$G^\alpha = \sum_n \frac{dp_n^\alpha}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.68)$$

esso corrisponde alla somma, su tutte le particelle prese spazialmente sulla loro traiettoria, della variazione di p rispetto al tempo. Però sappiamo bene che p varia rispetto al tempo t solo se è presente una forza. Possiamo allora scrivere:

$$G^\alpha = \sum_n \frac{dp_n^\alpha}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.69)$$

$$= \sum_n F^\alpha \frac{d\tau}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.70)$$

così da mettere in evidenza la quadriforza. Notiamo che G^α , che a volte viene chiamata **force density**, è un vettore di Lorentz (primo e secondo membro di (3.5.67) lo sono).

Possiamo riscrivere l'equazione di continuità (3.5.67) per il tensore di energia-impulso come:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = G^\alpha \quad (3.5.71)$$

che, se abbiamo *particelle libere*, cioè non ci sono campi di forze e $G^\alpha = 0$, allora diventa:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (3.5.72)$$

se invece abbiamo *particelle in interazione*, allora il campo di forze è presente, $G^\alpha \neq 0$ e abbiamo la forma generica (3.5.71).

Notiamo solamente una cosa, quando troviamo (3.5.72) per un sistema isolato (quindi quando non creiamo e distruggiamo nulla), l'equazione per $\alpha = 0$ corrisponde alla conservazione dell'energia, mentre $\alpha = i$ alle conservazioni dell'impulso totale e viene chiamata anche **equazione di Eulero** (è una legge di conservazione relativistica).

Ovviamente, in base a tutte le cose che abbiamo imparato, quando c'è assenza di forze e abbiamo l'equazione (3.5.72), allora abbiamo anche una quantità, la carica totale di cui $T^{\alpha\beta}$ è corrente, che è conservata. Scriviamo la carica:

$$P^\alpha = \int d^3x T^{\alpha 0} \quad (3.5.73)$$

che in realtà sono 4 quantità, che chiamiamo *cariche*, tutte conservate quando vale (3.5.72) e per cui:

$$\frac{dP^\alpha}{dt} = 0. \quad (3.5.74)$$

L'espressione delle cariche la possiamo vedere come:

$$P^\alpha = \int d^3x \sum_n p_n^\alpha(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.75)$$

$$= \sum_n p_n^\alpha(t) \quad (3.5.76)$$

$$= P_{tot}^\alpha \quad (3.5.77)$$

che unita al fatto che P^α è una quantità conservata ci dice che l'impulso totale del sistema è conservato se il sistema è isolato.

Però, non sarebbe male capire che cosa rappresenti effettivamente il tensore (3.5.56). Vediamone le componenti:

$$T^{00} = \sum_n E_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.78)$$

$$T^{i0} = \sum_n p_n^i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.79)$$

$$T^{0i} = \sum_n E_n v_n^i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.80)$$

$$T^{ij} = \sum_n p_n^i v_n^j \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.81)$$

vediamo che (3.5.78) è la densità di energia (una sola componente), mentre (3.5.79) e (3.5.80) le densità di impulso (3 componenti, una per ogni direzione spaziale), o analogamente le correnti di energia, per ultime (3.5.81) sono 3x3 quantità che misurano la corrente di impulso (indice i) in una data direzione (indice j). In particolare, le componenti (3.5.81) vengono chiamate *pressione del fluido*, poiché hanno dimensioni di una pressione:

$$[T^{ij}] = (\text{impulso}) \cdot (\text{velocità}) \cdot (\text{volume}^{-1}) \quad (3.5.82)$$

$$= (MLT^{-1}) \cdot (LT^{-1}) \cdot (L^{-3}) \quad (3.5.83)$$

$$= ML^{-1}T^{-2} \quad (3.5.84)$$

$$= MLT^{-2} \cdot L^{-2} \quad (3.5.85)$$

$$= F \cdot L^{-2} \quad (3.5.86)$$

$$= \text{pressione}. \quad (3.5.87)$$

Ovviamente, la pressione di cui stiamo parlando è più complicata rispetto quella studiata in Fisica Classica; i termini pressori, avendo 2 indici, sono rappresentati da una matrice 3x3 e sono legati a come le componenti di p_n^i agiscono in una certa direzione.

Possiamo scrivere in forma matriciale (3.5.56):

$$T = \left(\begin{array}{c|c} \text{densità di energia} & \text{flussi di energia} \\ \hline \text{flussi di energia} & \text{pressione} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} T^{00} & T^{0i} \\ \hline T^{i0} & T^{ij} \end{array} \right). \quad (3.5.88)$$

Un altro modo per chiedere che T^{ij} sono termini pressori è il seguente. Consideriamo una superficie attraversata da un fluido di particelle che idealmente sono tutte ortogonali alla superficie e con il medesimo impulso p . Si faccia riferimento alla figura 3.28. Nel tempo Δt le particelle percorrono un certo tratto $d = v\Delta t$. Passando attraverso la superficie generano una pressione su di essa. Tale pressione sarà data da:

$$\text{pressione} = \frac{F_A}{A} = \frac{p/\Delta t}{A} = \frac{p}{A \Delta t} \cdot \frac{v}{v} = \frac{p \cdot v}{\text{volume}} \quad (3.5.89)$$

dove il volume corrisponde alla regione disegnata in rosso. Si noti che questa definizione di pressione è esattamente quello che abbiamo scritto in (3.5.81).

Il tensore energia impulso quindi, data una distribuzione di materia o di energia nello spazio e nel tempo, è quell'oggetto che contiene la densità di energia, i flussi di energia nelle varie direzioni e i termini pressori di quel fluido. Tale oggetto assumerà un ruolo fondamentale nella scrittura dell'equazione di Einstein perché sarà l'oggetto con il quale noi definiremo le sorgenti del campo gravitazionale. In Meccanica Classica la sorgente del campo gravitazionale è la densità di massa, infatti l'equazione di Poisson, che è quella che collega il potenziale gravitazionale ψ alla sorgente, è:

$$\nabla^2 \psi = 4\pi G \rho. \quad (3.5.90)$$

In Relatività Generale le cose saranno più complesse, ma in ogni caso una distribuzione di massa, in una descrizione tensoriale, verrà inserita nel tensore energia impulso.

Visto che abbiamo discusso il tensore energia-impulso per un sistema di n corpi, possiamo fare ancora un passo. Consideriamo un certo sistema - come quello descritto prima - e vediamo in termini microscopici lo stesso tensore (3.5.56). È chiaro che questo poi non è quello che nella pratica faremo, poiché non è comodo sommare su un numero infinito di oggetti o avere a disposizione tutte le worldline nello spazio tempo.

Invece di considerare una descrizione corpuscolare prendiamo quindi una descrizione continua in termini di fluido. Esiste una particolare classe di fluidi nota come **fluidi perfetti**, che in quanto tali hanno delle proprietà semplici

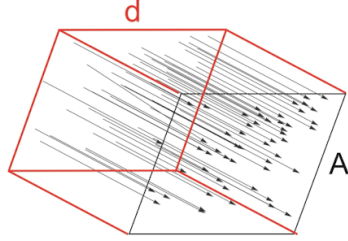


Figura 3.28

e che si portano dietro delle proprietà di simmetria. Un modo per definire il fluido perfetto è il seguente: un fluido perfetto è un fluido dotato di velocità v tale che un osservatore a riposo col fluido, cioè che *comuove* con il fluido, vede attorno a sé il fluido con proprietà semplici, ossia omogeneo o in certi casi isotropo. Se pensiamo, per esempio, ad un fiume che fluisce regolarmente, come un fluido laminare, e noi ci sediamo sulla riva, allora possiamo dire che ogni punto del tubo di flusso del fluido ha una certa velocità. Però, se comuiamo con il fluido, cioè ci muoviamo alla stessa velocità, il fluido diventa a riposo rispetto a noi.²⁰ Ovviamente, la Fisica non cambia e le singole particelle si muoveranno in tutte le direzioni, ma globalmente, nel sistema comovente - uno di tutti i possibili sistemi di riferimento inerziali -, l'osservatore assocerà una densità di energia ($\tilde{T}^{00} \neq 0$) ed una pressione del fluido ($\tilde{T}^{ij} \neq 0$), ma non avrà flussi netti di energia in alcuna direzione (quindi $T^{0i} = T^{i0} = 0$).

Per quest'ultimo motivo per un fluido perfetto, nel sistema comovente con il fluido, è molto facile scrivere il tensore di energia-impulso. Risulta:

$$\begin{cases} \tilde{T}^{00} = \rho \\ \tilde{T}^{0i} = \tilde{T}^{i0} = 0 \\ \tilde{T}^{ij} = p \delta_{ij} \end{cases}, \quad T = \left(\begin{array}{c|ccc} \rho & & & \\ \hline & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{array} \right). \quad (3.5.91)$$

Dunque, nel sistema di riferimento comovente, $\tilde{T}^{\alpha\beta}$ ha forma diagonale ed isotropo dal punto di vista spaziale. In più: $\tilde{T}^{00} = \rho$ ci dice che il fluido è omogeneo; $\tilde{T}^{0i} = \tilde{T}^{i0} = 0$ ci dice che non vediamo flussi di energia o impulso in nessuna direzione; $\tilde{T}^{ij} = p \delta_{ij}$ ci mostra che non sono presenti termini rotazionali e le pressioni sono uguali. In qualunque altro sistema ci mettiamo la forma del tensore è sempre la stessa. Possiamo scrivere, sempre nel sistema co-muovente, la forma del tensore di energia impulso in un modo più compatto:

$$\tilde{T}^{\alpha\beta} = p \eta^{\alpha\beta} + (p + \rho) \tilde{u}^\alpha \tilde{u}^\beta \quad (3.5.92)$$

²⁰Il che non vuol dire che le particelle siano ferme, infatti, in $T^{\alpha\beta}$ le $d_t x_n^\alpha$ non sono nulle.

dove intendiamo con $\tilde{u}^\alpha$ la velocità (relativa tra i due sistemi di riferimento) nel senso di quadrivelocità:

$$\tilde{u}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (3.5.93)$$

Genericamente abbiamo:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = (\gamma, \gamma \vec{v}) \quad (3.5.94)$$

ma nel sistema comoviente abbiamo $\vec{v} = 0$, per cui otteniamo:

$$\tilde{u}^\alpha = (1, 0). \quad (3.5.95)$$

Possiamo notare che (3.5.92) è chiaramente un tensore, poiché è una combinazione di tensori. Ovviamente è dimostrabile che (3.5.91) coincide con (3.5.92), infatti, basta vedere le varie componenti di (3.5.92) ricordando la definizione della metrica (3.3.3) e (3.5.95). Quello che ci interessa maggiormente è che essendo (3.5.92) una forma tensoriale essa rimane della stessa forma anche se ci mettiamo in un altro sistema di coordinate:

$$T^{\alpha\beta} = p \eta^{\alpha\beta} + (p + \rho) u^\alpha u^\beta. \quad (3.5.96)$$

Notiamo che il tensore metrico, scritto come (3.5.96), se cambiamo la convenzione dei segni che mettiamo nel tensore metrico, allora anch'esso ha un segno che cambia.

Noi abbiamo dato una definizione discreta del tensore energia-impulso (3.5.60):

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n \frac{p_n^\alpha(t) p_n^\beta(t)}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

ma anche continua (3.5.96):

$$T^{\alpha\beta} = p \eta^{\alpha\beta} + (p + \rho) u^\alpha u^\beta$$

e ovviamente dev'esserci un match tra i due quando il numero di particelle coincide, ovvero quando $n \rightarrow \infty$. Prendiamo un fluido perfetto con un numero n alto di particelle e vediamo sia il caso relativistico che non.

Fluido non relativistico. Abbiamo:

$$E_n = m + \frac{|\vec{p}_n|^2}{m}, \quad |\vec{p}_n| \ll E_n \sim m \quad (3.5.97)$$

e conosciamo:

$$T^{00} = \rho = \sum_n E_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.98)$$

$$T^{0i} = T^{i0} = 0 \quad (3.5.99)$$

$$T^{ij} = p \eta^{ij} \quad (3.5.100)$$

vediamo che:

$$\eta_{ij} T^{ij} = p \eta_{ij} \eta^{ij} = p \delta_{ij} \delta^{ij} = p \delta_i^i = p \eta_i^i = 3p \quad (3.5.101)$$

e quindi:

$$p = \frac{1}{3} \eta_{ij} T^{ij} \quad (3.5.102)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_n \frac{\eta_{ij} p_n^\alpha(t) p_n^\beta(t)}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.103)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_n \frac{|\vec{p}_n|^2}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.104)$$

ma guardando l'espressione della densità del fluido (3.5.98) e ricordando del limite $|\vec{p}| \ll E_n$ in cui ci troviamo, allora possiamo dire che:

$$p \ll \rho \quad (3.5.105)$$

o equivalentemente che, visto $|\vec{p}| \ll E_n \sim m$, $p \rightarrow 0$. Prendendo $E_n \sim m$ possiamo scrivere (3.5.98) come:

$$\rho = m \underbrace{\sum_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))}_{\text{numero} \cdot \text{volume}} = m n \quad (3.5.106)$$

dove n è la densità in numero. Quindi, un fluido newtoniano, detto anche fluido in polvere, è definito da:

$$\begin{cases} \rho = m n \\ p = 0 \end{cases}, \quad p \ll \rho. \quad (3.5.107)$$

Fluido relativistico. Ad esempio possiamo prendere un gas di fotoni. Abbiamo:

$$p_n^\alpha = (E_n, \vec{p}_n) \quad , \quad E_n = |\vec{p}_n| \quad m \rightarrow 0. \quad (3.5.108)$$

e ancora:

$$\rho = \sum_n E_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.109)$$

$$p = \frac{1}{3} \eta_{ij} T^{ij} \quad (3.5.110)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_n \frac{|\vec{p}_n|^2}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.111)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_n E_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.112)$$

$$= \frac{1}{3} \rho. \quad (3.5.113)$$

Dunque, un fluido relativistico è definito da:

$$p = \frac{1}{3} \rho \quad (3.5.114)$$

che è anche un'equazione di stato, del tipo (3.5.135), che in genere è della forma $p = w \rho$ e noi, infatti, abbiamo visto che nel caso newtoniano $w = 0$ e nel caso relativistico $w = 1/3$.

3.5.2 Esempi

Vediamo in questa breve sottosezione due esempi di ciò che abbiamo imparato riguardo il tensore energia impulso e le varie correnti e quantità conservate.

Esempio 1. In un sistema di riferimento in moto rispetto al fluido abbiamo la quadri-velocità espressa da (3.5.94). La componente T^{00} sarà:

$$T^{00} = p \eta^{00} + (p + \rho) u^0 u^0 \quad (3.5.115)$$

$$= -p + (p + \rho) \gamma^2 \quad (3.5.116)$$

$$= \gamma^2 (\rho + p \beta^2) \quad (3.5.117)$$

T^{00} è la densità d'energia del fluido. Dunque, abbiamo visto esplicitamente che un'osservatore in moto, noi, non misura ρ , come nel sistema comovente, ma una densità d'energia diversa. Immaginiamo di essere in una piscina. Se stiamo fermi rispetto alla piscina, prendiamo un dato volume e possiamo misurare la densità di massa dividendo la massa contenuta nel volume per il volume stesso. Però, se ci muoviamo, dato che nella direzione del moto le lunghezze sono contratte, la densità che assoceremo sarà diversa. Analogamente, come visto, la densità di energia che associate una data porzione di volume è diversa da quella stessa porzione di volume misurata dall'osservatore che comovente.

Abbiamo le altre componenti:

$$T^{i0} = p \eta^{i0} + (p + \rho) u^i u^0 \quad (3.5.118)$$

$$= \gamma^2 \beta^i (p + \rho) \quad (3.5.119)$$

in cui, il primo addendo è nullo perché η è diagonale. Questa è l'espressione dei flussi di energia nella direzione $i = 1, 2, 3$. Se ci muoviamo nella direzione 1, sia essa x per esempio, le componenti T^{i0} ci dice che il fluido ha un flusso di massa rispetto a noi. Essendo un osservatore inerziale "abbiamo l'aria in faccia".

Infine abbiamo i termini:

$$T^{ij} = p \delta_{ij} + \gamma^2 (p + \rho) v^i v^j \quad (3.5.120)$$

che ci mostra che non abbiamo più una pressione isotropa come nel caso in cui siamo a riposo con la piscina, ma generiamo dei termini che dipendono dal fatto che ci muoviamo rispetto alla piscina.

Esempio 2. Consideriamo il tensore energia impulso scritto in (3.5.96) . Se ci mettiamo in moto avremo un tensore $T'^{\alpha\beta}$ che possiamo scrivere con la trasformazione di Lorentz:

$$T^{\alpha\beta} \xrightarrow{\text{T.L.}} T'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta T^{\gamma\delta} \quad (3.5.121)$$

se le trasformazioni di Lorentz le facciamo in una direzione arbitraria, allora:

$$\Lambda^0_0 = \gamma \quad (3.5.122)$$

$$\Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = \gamma \beta^i \quad (3.5.123)$$

$$\Lambda^i_j = \delta^i_j + v^i v^j \frac{\gamma - 1}{v^2}. \quad (3.5.124)$$

Se prendiamo tale trasformazione di Lorentz e $T^{\alpha\beta} = \tilde{T}^{\alpha\beta}$ quello del sistema comovente, si può dimostrare che la $T'^{\alpha\beta}$ ha la forma del tensore energia-impulso che abbiamo descritto in precedenza.

Esempio 3 Possiamo definire un'ulteriore quantità: la densità in numero di queste particelle. In questo contesto lo posso scrivere come:

$$N^\alpha = n u^\alpha \quad (3.5.125)$$

dove $n = N/V$ è la densità in numero misurata nel sistema di riposo e indichiamo N^α come la versione covariante della densità in numero. Nel sistema comovente avremo:

$$\tilde{N}^\alpha = n \tilde{u}^\alpha \quad (3.5.126)$$

$$= (n, \vec{0}) \quad (3.5.127)$$

che ci dice che nel sistema comovente la densità in numero va a finire nella componente temporale di un quadri vettore e non ho flussi della energia. Invece, in un sistema in moto:

$$N^\alpha = n u^\alpha \quad (3.5.128)$$

$$= (\gamma, \gamma \vec{v}) \quad (3.5.129)$$

$$= (n\gamma, n\gamma \vec{v}) \quad (3.5.130)$$

dunque, la densità in numero aumenta di un fattore γ , poiché nella direzione del moto le lunghezze sono contratte, quindi il volume si contrae (come puoi vedere nella figura 3.29), e associando ad esso le stesse particelle ottengo una densità in numero più grande.

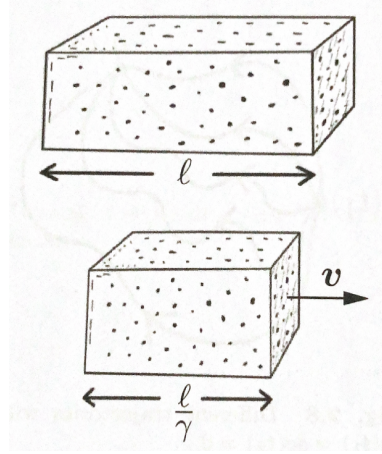


Figura 3.29: Contrazione dei volumi.

Si noti che in forma microscopica si ha:

$$N^\alpha = \sum_n \frac{dx_n^\alpha}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (3.5.131)$$

quando $\alpha = 0$ otteniamo proprio la densità in numero. Quando invece prendiamo le componenti spaziali $\alpha = i$ abbiamo solo la loro velocità.

Ora, in un sistema isolato anche la densità in numero di particelle soddisfa l'equazione di continuità:

$$\partial_\alpha N^\alpha = 0 \quad (3.5.132)$$

che esprime la conservazione del numero di particelle. Infatti se prendiamo l'integrale:

$$\int d^3x N^0 = \sum_n (1) = N_{tot} \quad (3.5.133)$$

e se facciamo lo stesso ragionamento che abbiamo fatto inizialmente per la carica totale otteniamo:

$$\frac{dN_{tot}}{dt} = 0. \quad (3.5.134)$$

Esempio 4. Il tensore energia-impulso contiene la densità e la pressione del fluido, che è univocamente definito se definiamo una equazione di stato:

$$p = p(\rho). \quad (3.5.135)$$

Definito un fluido attraverso la sua equazione di stato (3.5.135), se questo fluido è isolato, allora l'insieme delle equazioni (3.5.72) e (3.5.135) definisce il comportamento del fluido stesso e si pone alla base di quella che chiamiamo **fluidodinamica relativistica**. Vedremo un esempio di questo con la

presenza di un campo gravitazionale, in quel caso parleremo di fluidodinamica relativistica in cui c'è anche il campo gravitazionale, ma ovviamente per poterlo fare dobbiamo costruire la teoria.

Capitolo 4

Una teoria della gravità

Abbiamo visto, nel capitolo precedente, come descrivere un sistema fisico compatibile con i principi della Relatività Speciale. La RS identifica una classe di osservatori che hanno la proprietà di essere in moto relativo con velocità costante, chiamati sistemi di riferimento inerziali, e i due principi su cui si basa richiedono:

- La velocità della luce sia la stessa per tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- Le leggi della fisica siano le stesse per tutti gli osservatori inerziali.

Questo ci ha portato a definire il concetto di spaziotempo come background nel quale avvengono i fenomeni fisici, che possono essere come una sequenza di eventi nello spaziotempo; spazio-tempo che dal punto di vista geometrico è una varietà quadridimensionale con una particolare segnatura della metrica, in quanto il principio di costanza della velocità della luce richiede che la distanza propria tra due punti sia espressa attraverso delle funzioni metriche, che ora chiamiamo tensore metrico, e che hanno segnatura di Minkowski:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (4.0.1)$$

In più possiamo implementare il secondo principio utilizzando il calcolo tensoriale. Definiamo delle grandezze che chiamiamo tensori, i quali hanno delle leggi di trasformazione ben definite sotto l'effetto delle trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali, cioè le trasformazioni di Lorentz. Se scriviamo le equazioni come equazioni tensoriali, queste sono invarianti in forma proprio per il fatto che i tensori hanno questa proprietà. Quindi l'equazione tra due tensori T ed S con lo stesso numero di indici alti e bassi (quindi con lo stesso grado) sono equazioni che non cambiano se cambia osservatore o

sistema di riferimento; quindi osservatori diversi scrivono le stesse leggi per lo stesso sistema fisico.

Ora, dobbiamo inserire la gravità in tutto questo discorso e qui le cose si fanno sottili.

4.1 La gravità

Ora, sicuramente noi abbiamo bisogno di fare qualcosa nella scrittura delle equazioni che regolano la gravità perché nella meccanica pre-relativistica la gravità è descritta dalla teoria newtoniana in cui la forza che agisce tra due corpi dotati di massa m ed M , è proporzionale al prodotto delle masse, inversamente proporzionale al quadrato della distanza, c'è una costante di accoppiamento G che determina quanto è grande questa interazione e infine la direzione è nella direzione che collega le due masse, quindi una forza attrattiva:

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r. \quad (4.1.1)$$

Questa descrizione presenta alcuni problemi, in cui ora ci addentreremo.

Primo punto. La descrizione newtoniana della gravità non è compatibile con la Relatività Speciale perché nella visione pre-relativistica l'azione a distanza è sostanzialmente istantanea e, come abbiamo detto, in RS non possiamo avere una interazione, uno scambio di informazioni o di relazioni causali che viaggino a velocità superiore alla velocità della luce.

Punto secondo. La forza di gravità, come espressa dalla legge di Newton, è relativa al fatto che gli oggetti che interagiscono sotto forma della gravità sono dotati di una proprietà che chiamiamo *massa*. In altri termini la massa è la grandezza fisica in virtù della quale due corpi dotati di tale grandezza si sentono attraverso l'interazione gravitazionale. Già ai tempi di Newton si capiva che ciò si riferiva ad un particolare tipo di massa - o di proprietà di un corpo - relativo all'interazione gravitazionale, e che possiamo perciò richiamare **massa gravitazionale**. Però in Relatività Speciale abbiamo già visto che massa ed energia sono sostanzialmente la stessa grandezza fisica, cioè la massa è un'altra forma di energia. Quindi, se vogliamo una teoria che sia relativistica, è chiaro che la gravità dovrà valere anche per i corpi dotati di energia¹; l'energia stessa dovrà accoppiarsi alla gravità. Dovremo quindi trovare un modo più generale di descrivere l'interazione gravitazionale. Ma c'è di più, la gravità stessa dovrebbe accoppiarsi alla gravità stessa perché un campo gravitazionale ha un'energia, e quindi anche l'energia gravitazionale dovrebbe accoppiarsi alla gravità! Se così fosse, la teoria della gravità dovrebbe essere addirittura non lineare.² Tutto questo ovviamente

¹Dunque, non solo i corpi con $m_g \neq 0$ sentono effetti gravitazionali, ma in una teoria relativistica, anche l'energia pura, dunque la radiazione (mass-less), deve percepirla.

²A differenza della teoria classica.

non è contenuto nella descrizione newtoniana che fino ad ora è la migliore descrizione dei fenomeni che coinvolgono l'interazione gravitazionale: tutta la meccanica celeste è descritta benissimo dall'equazione di Newton. Tuttavia, si vorrebbe dare una descrizione che sia compatibile con la Relatività Speciale per incorporare l'elettromagnetismo in un quadro consistente.

Punto terzo. Il principio stesso su cui si basa la Relatività Speciale, cioè il fatto che c'è una classe particolare di sistemi di riferimento che sono i sistemi di riferimenti inerziali, se ci mettiamo in un campo gravitazionale siamo sicuri valga ancora? Il punto è che due osservatori posti in punti diversi di un campo gravitazionale sono entrambi soggetti ad accelerazione, però, per definizione i sistemi di riferimento inerziali non sono soggetti ad alcuna accelerazione, altrimenti non potrebbero avere una velocità relativa costante, a meno che non siano soggetti esattamente alla stessa accelerazione, ma in generale questo non è quello che succede. Dobbiamo dunque capire come generalizzare il concetto di osservatore inerziale nell'ambito della Relatività Generale.

4.2 Principio di equivalenza tra gravitazione ed inerzia

Tutto ciò che è stato esposto nei paragrafi precedenti viene risolto generalizzando la teoria della Relatività Speciale affinché contenga al suo interno anche la presenza dell'interazione gravitazionale. La base di partenza è il cosiddetto **principio di equivalenza tra gravitazione e inerzia**. Questo principio prende le basi da osservazioni che erano già presenti nella meccanica galileiana e newtoniana e si basa in particolare sull'osservazione che in meccanica, anche Meccanica Classica, ci sono due tipi di massa:

- La **massa gravitazionale** m_g , cioè la massa in virtù della quale due corpi dotati di quella massa interagiscono tra di loro per effetto dell'interazione gravitazionale. Possiamo scrivere:

$$\vec{F}_g = m_g \vec{g} \quad (4.2.1)$$

da cui:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m_g}. \quad (4.2.2)$$

Dunque, preso un corpo che ha una sua caratteristica m_g e nota la forza di gravità che agisce su quel corpo, allora si può misurare l'accelerazione $\vec{g}$ alla quale viene soggetto il corpo e risulta essere quella caratteristica del campo gravitazionale, che possiamo misurare con un esperimento dal rapporto³ (4.2.2).

³Sarebbe lo stesso esperimento che facciamo quando abbiamo un campo elettrico. Per misurare un campo elettrico $\vec{E}$, prendiamo una carica di prova q_0 e andiamo a vedere qual è la forza $\vec{F}$ che agisce sulla carica di prova.

- La **massa inerziale** m_i , che rappresenta la cosiddetta inerzia di un corpo, cioè la tendenza di un corpo a resistere ai cambiamenti di stato di moto, è quella che è espressa nella seconda legge della dinamica:

$$\vec{F} = m_i \vec{a} \quad (4.2.3)$$

da cui:

$$m_i = \frac{F}{a}. \quad (4.2.4)$$

Quindi, quando abbiamo un corpo all'interno di un campo gravitazionale, esso sperimenta una forza (4.2.1), che però è una forza esprimibile anche attraverso la legge di Newton (4.2.3). In particolare, la (4.2.3) ci dice che essendoci un campo gravitazionale che genera una forza F sul mio corpo, questo corpo viene messo in accelerazione. Quanto è grande l'accelerazione dipende da quanto è grande la sua massa inerziale. Resta però il fatto che le espressioni della forza a cui è soggetto il corpo devono essere uguali, quindi, ponendo l'uguaglianza tra (4.2.1) e (4.2.3) si arriva a:

$$\vec{a} = \left(\frac{m_g}{m_i} \right) \vec{g}. \quad (4.2.5)$$

Ripetendo: $\vec{g}$ è una proprietà del campo gravitazionale, cioè di chi genera il campo gravitazionale, mentre $\vec{a}$ è l'accelerazione con cui la massa inerziale m_i è messa in movimento dalla forza agente. Se noi consideriamo la forza di Newton tra due corpi:

$$\vec{F}_g = G \frac{m_g M_g}{r^2} \vec{u}_r \quad (4.2.6)$$

è immediato notare che:

$$\vec{g} = -\frac{G M_g}{r^2} \vec{u}_r. \quad (4.2.7)$$

Dunque, abbiamo un corpo che genera il campo gravitazionale, che ha massa M_g , in virtù dell'esistenza del quale, un corpo di prova di massa m_g , viene soggetto alla forza F_g . Quello che è sorprendente, è che prendendo corpi diversi (quindi con diversa composizione, di diverso materiale, etc.) il rapporto m_g/m_i è sempre lo stesso indipendentemente dal tipo di corpo. Questo va sotto il nome, di **equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale**. Benché siano due grandezze fisiche diverse sono in realtà uguali, o meglio, il loro rapporto è indipendente dal tipo di corpo, dunque è in un certo senso universale.

Notiamo che questo è diverso da quello che succede con il campo elettrico. Infatti, applicando lo stesso ragionamento si ha:

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E} = m_i \vec{a} \quad (4.2.8)$$

La carica sotto l'effetto di $\vec{F}_e$ viene accelerata che dipende dalla sua massa inerziale. Quindi si ha:

$$\vec{a} = \left(\frac{q_0}{m_i} \right) \vec{E}. \quad (4.2.9)$$

In questo caso il rapporto q_0/m_i non è universale. Corpi diversi avranno rapporti differenti. Inoltre, cariche diverse - positive e negative - possono addirittura avere la direzione della forza, ovvero dell'accelerazione, differenti.

Il fatto che nel caso dell'accelerazione di gravità, il rapporto m_g/m_i appaia universale porta a quello che si chiama l'*universalità della caduta dei gravi*, fatto che già aveva osservato Galileo, con i famosi esperimenti della torre di Pisa. Il teorema (se così vogliamo chiamarlo) afferma che: *tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione in un campo gravitazionale*.

Ripercorriamo il ragionamento della torre di Pisa. Prendiamo due corpi, come una piuma o una mela, se li lasciamo cadere dalla sommità di una torre, questi vengono accelerati con la stessa accelerazione $\vec{a} = \vec{g}$ e arrivano a terra allo stesso tempo. Questo esperimento in aria è chiaramente difficile da fare bene, perché se usiamo una piuma la resistenza dell'aria ne perturba la caduta libera, ma esso è comunque stato replicato più recentemente in laboratorio utilizzando delle camera a vuoto molto grandi.⁴

Quindi i gravi, gli oggetti dotati di massa, che sentono il campo gravitazionale, cadono alla stessa accelerazione. Questo è equivalente a dire che la massa inerziale e la massa gravitazionale di due corpi sono uguali, ovvero il loro rapporto è costante, indipendente dal tipo di materiale. L'uguaglianza tra massa gravitazionale e massa inerziale venne poi verificata successivamente da diversi esperimenti di vario tipo - già Huygens, Newton e Bessel avevano fatto esperimenti a riguardo. Uno degli esperimenti di test di tale equivalenza risale a fine '800 ed è la misura di Eötvös, che trova che la differenza relativa tra massa inerziale e massa gravitazionale è una parte in 10^9 , cioè:

$$\left| \frac{m_g - m_i}{m_g} \right| < 10^{-9}. \quad (4.2.10)$$

Questo è un fatto osservativo importante, perché a partire dall'equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale, Einstein compì una serie di ragionamenti, i cosiddetti *esperimenti mentali degli ascensori* che portarono alla formulazione di quello che chiameremo il principio di equivalenza tra gravitazione e inerzia.

4.2.1 Esperimento mentale degli ascensori

Facciamo riferimento alla figura 4.1. Supponiamo, di avere un ascensore, che è semplicemente un modo per rappresentare un laboratorio in cui un osservatore, Albert, conduce un esperimento. Supponiamo di metterci nella situazione 1, quindi tale che l'ascensore sia in un campo di gravità, condizione non nota a priori da Albert. Albert essendo in questo ascensore è soggetto

⁴A riguardo puoi vedere il video YouTube al seguente [link](#).

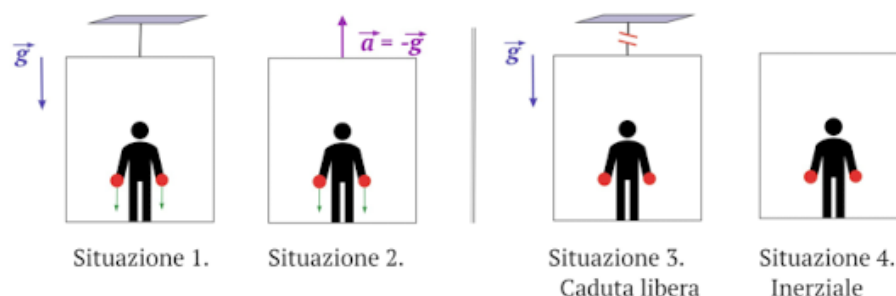


Figura 4.1

alla gravità, quindi si sente schiacciato sul pavimento. Se ha in mano delle mele e le lascia andare vede che queste vengono accelerate e cadono verso il pavimento, con un'accelerazione che sarà uguale al valore del campo di gravità, che lui non sa se c'è o meno.

Supponiamo ora di porre l'ascensore (i.e. Albert con il suo laboratorio) in una situazione fisica differente, la situazione 2. Non è presente un campo di gravità, ma c'è una causa dinamica esterna, quindi una forza, che agisce sull'ascensore e lo tira verso l'alto, con un'accelerazione costante $\vec{a} = -\vec{g}$. Anche in questa situazione Albert avrà i piedi appoggiati al pavimento e non fluttuerà liberamente, esattamente come nel caso precedente. Realizzando l'esperimento succede che le mele accelerano verso il basso, con un'accelerazione opposta alla direzione con cui la forza esterna tira su l'ascensore.

Si noti però che nel primo caso forza di gravità agisce sulla massa gravitazionale m_g del corpo, mentre nel secondo agisce sulla massa inerziale m_i . La differenza di osservazioni tra le due situazioni è esattamente nulla, se e solo se la massa gravitazionale e la massa inerziale sono uguali. Sono due situazioni fisiche molto diverse e Albert stando soltanto all'interno dell'ascensore non è in grado di mettere in evidenza la differenza tra i due casi.

Per provare a trovare una differenza possiamo considerare ancora un altro caso. Nel caso 1 l'ascensore è chiaramente attaccato al soffitto, quindi siamo nel campo gravitazionale, ma stazionari. Se ora tagliamo il filo all'ascensore, cosa succede? Essendoci gravità, ascensore e sperimentatore sono in caduta libera nel campo gravitazionale. Siamo nella situazione 3. L'osservatore realizza nuovamente l'esperimento: cosa succede alle mele? L'universalità della caduta dei gravi mi dice che tutto all'interno dell'ascensore nel campo di gravità cade allo stesso modo. Dunque, i due oggetti, inizialmente in mano all'osservatore, restano lì dove sono.

Considerando un'ultima situazione, la 4. Poniamo l'ascensore in assenza di gravità, ed in assenza di un acceleratore, cioè una forza esterna che produce un'accelerazione. Albert fa l'esperimento, e i due oggetti, restano

li dove sono. Nuovamente le due situazioni fisiche 3 e 4 sono esattamente indistinguibili per l'osservatore all'interno dell'ascensore.

Ora chiediamoci: nella situazione 4 Albert che tipo di osservatore è? Non c'è nessuna forza esterna che agisce, non c'è campo di gravità, dunque è un osservatore inerziale. Nella situazione 3 invece, l'osservatore è in caduta libera, ma mentre è in caduta libera lui non è in grado di determinare se sia in caduta libera in un campo gravitazionale o se invece sia un osservatore inerziale, perché tutti gli esperimenti che lui fa in questo ascensore gli sembrano uguali a quelli che farebbe in uno inerziale (li vede proprio uguali). Di nuovo questo è vero se, solo se, abbiamo universalità della caduta dei gravi, cioè se e solo se $m_i = m_g$. Questo fatto è vero, bisogna però prestare attenzione. Estendiamo il ragionamento.

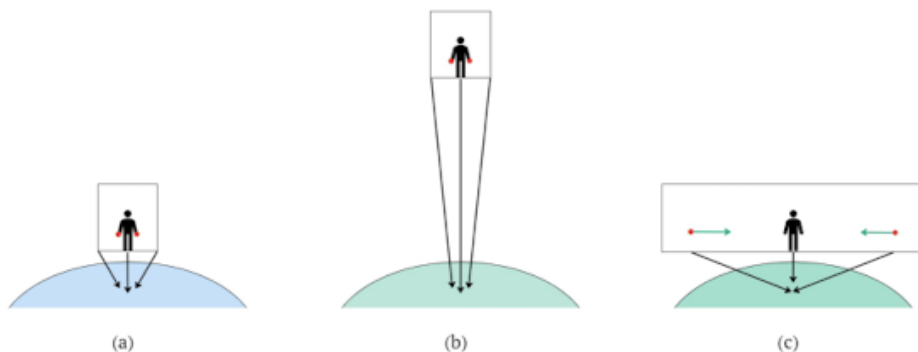


Figura 4.2

Facciamo riferimento alla figura 4.2. Consideriamo un osservatore in caduta libera che viene attratto verso il centro della Terra. Ovviamente anche gli oggetti che ha in mano vengono attratti verso il centro della Terra: se passa poco tempo e se gli oggetti sono sufficientemente vicini (situazione *a*), allora non si accorge di niente; se lascia passare molto tempo (situazione *b*), allora vedrà che i due oggetti cominciano a muoversi entrambi verso di lui, perché il campo gravitazionale terrestre non è un campo omogeneo. La situazione *a* è indistinguibile da un sistema di riferimento inerziale, ma se si lascia passare sufficiente tempo, allora ci accorgiamo che i due oggetti cominciano a muoversi verso di noi, ma se un oggetto si mette in moto, concludiamo che c'è una causa che ha generato il moto, cioè una forza che sta agendo.

La stessa situazione si ha nel caso di un ascensore molto grande (situazione *c*) e prendendo due oggetti posti all'estremità dell'ascensore. Ciascun oggetto cade verso il centro, ma quelli alle estremità sperimentano una componente di accelerazione "orizzontale", quindi i due oggetti dopo un po' cominciano ad accelerare verso l'osservatore. In conclusione, *l'osservatore dentro l'ascensore in caduta libera non si accorge di essere in caduta libera*

soltanto per intervalli di tempo o separazioni spaziali molto piccole - rispetto alle variazioni del campo -, cioè soltanto localmente.

Questo punto relativo alla località e alla indistinguibilità di un sistema di riferimento inerziale da un sistema di riferimento in caduta libera è il punto cruciale di passaggio che ci permette di inserire la gravità nella relatività.

Facciamo un ulteriore esempio. Mettiamoci in Meccanica Classica e consideriamo un sistema di N corpi in interazione gravitazionale ed eventualmente anche con altre forze esterne. L'equazione del moto per l'oggetto N -esimo risulta:

$$m_N^i \frac{d^2 \vec{x}_N}{dt^2} = m_N^g \vec{g} + \sum_M \vec{F}(\vec{x}_N - \vec{x}_M) \quad (4.2.11)$$

dove gli indici i e g stanno rispettivamente per inerziale e gravitazionale. Ciascun corpo sarà soggetto alla campo di gravità $\vec{g}$ ed è soggetto eventualmente, se il sistema è un sistema di cariche, alla forza elettrica, dovuta a interazioni mutue (o comunque a forze interne generiche). Si noti che le forze dovute a interazioni mutue è sempre solamente funzione della differenza della posizione, cioè dalla posizione relativa tra le due, non dalla posizione assoluta. Consideriamo $\vec{g}$ come un campo di gravità costante, quindi omogeneo. Ora, come possiamo scrivere le equazioni del moto se ci poniamo in un sistema di riferimento non inerziale in caduta libera nel campo $\vec{g}$. Avremo, usando le trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} t & \longrightarrow & t' = t \\ \vec{x} & \longrightarrow & \vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \end{cases} \quad (4.2.12)$$

perché sappiamo che il tempo in meccanica newtoniana è un parametro assoluto che, non dipende dal sistema di coordinate, e le coordinate $\vec{x}'$ trasformano secondo la legge di un moto uniformemente accelerato. Calcoliamo la velocità:

$$\frac{d\vec{x}'}{dt'} = \frac{d\vec{x}'}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} - \vec{g}t \quad (4.2.13)$$

$$\implies \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{x}'}{dt} + \vec{g} \quad (4.2.14)$$

l'accelerazione è:

$$\frac{d^2 \vec{x}'}{dt'^2} = \frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} - \vec{g} \quad (4.2.15)$$

$$\implies \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} + \vec{g}. \quad (4.2.16)$$

Se inseriamo le trasformazioni nell'equazioni del moto (4.2.11), e assumiamo (correttamente) che la massa inerziale sia uguale alla massa gravita-

zionale, allora otteniamo:

$$m_N^i \left(\frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} + \vec{g} \right) = m_N^g \vec{g} + \sum_M \vec{F}(\vec{x}'_N - \vec{x}'_M) \quad (4.2.17)$$

$$m_N^i \frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} + m_N^i \vec{g} = m_N^g \vec{g} + \sum_M \vec{F}(\vec{x}'_N - \vec{x}'_M) \quad (4.2.18)$$

$$m_N^i \frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} = \sum_M \vec{F}(\vec{x}'_N - \vec{x}'_M) \quad (4.2.19)$$

dunque, abbiamo trovato l'equazione del moto come vista dall'osservatore non inerziale in caduta libera. La forza di gravità sparisce soltanto se la massa inerziale e la massa gravitazionale sono uguali. L'effetto della gravità già sparisce nella Meccanica Classica - è il motivo su cui si basa l'universalità della caduta dei gravi sostanzialmente - e questo vale soltanto se $\vec{g}$ è costante o perlomeno lo posso fare ad ogni istante se mi sposto di poco dove $\vec{g}$ è approssimativamente costante.

L'osservazione degli esperimenti ideali degli ascensori in caduta libera e le conseguenze a cui porta, cioè l'uguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale, condussero Einstein a porre tale principio alla base della nuova teoria della Relatività Generale. Il principio di equivalenza tra gravitazione e inerzia afferma:

In ogni punto dello spaziotempo, in un campo gravitazionale arbitrario, è sempre possibile scegliere un sistema di coordinate localmente inerziale, tale che, in una regione di spazio sufficientemente piccola attorno al punto in questione, le leggi della natura assumono la stessa forma che hanno in un sistema di coordinate cartesiane in assenza di gravitazione.

Cioè in ogni punto dello spaziotempo in un campo gravitazionale arbitrario è sempre possibile scegliere un sistema di coordinate in caduta libera, che chiameremo localmente inerziale, tale che in un intorno sufficientemente piccolo (sia nel tempo t che nello spazio $\vec{x}$) del punto in questione le leggi della natura sono le stesse che abbiamo in Relatività Speciale.

Il principio di equivalenza supera il concetto di sistema di riferimento inerziale della relatività speciale, ma lo ritrova come sistema di riferimento localmente inerziale nel campo gravitazionale. Dal punto di vista geometrico, abbiamo visto che la Relatività Speciale possiamo anche descriverla come una teoria dello spaziotempo di Minkowski in cui gli eventi fisici avvengono nello spaziotempo. Attraverso il principio di equivalenza stiamo dicendo che se consideriamo un punto P nello spaziotempo e ci restringiamo una regione attorno a P sufficientemente piccola, non siamo in grado di mettere in evidenza la presenza del campo gravitazionale. Notiamo che questo è molto simile a quello che Gauss per le superfici bidimensionali diceva delle proprietà delle geometrie non euclidee. Gauss infatti identifica delle proprietà

dicendo che in ogni punto della varietà, si possa sempre erigere un sistema di coordinate cartesiane di un piano Euclideo, in modo tale che la distanza infinitesima tra due punti sia quella dello spazio piatto, ossia:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (4.2.20)$$

Questa analogia con quanto detto da Gauss ci può far capire che il principio di equivalenza ci dice che, per quanto riguarda la presenza della gravità, io posso vedere lo spaziotempo come una varietà curva che ammette in ogni punto un piano tangente di tipo Minkowski; dunque in un punto qualunque di un campo gravitazionale arbitrario io posso sempre trovare un sistema di riferimento localmente inerziale, cioè sistema in caduta libera, per il quale, localmente, le leggi della natura sono espresse come in un sistema di coordinate non accelerato, cioè un sistema di coordinate Minkowskiano della Relatività Speciale. Vedi per una rappresentazione grafica la figura 4.3.

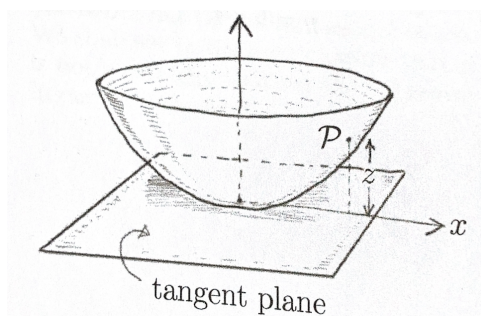


Figura 4.3: Raffigurazione piano tangente ad una varietà curva.

Ma se allora vediamo la Relatività Speciale come una teoria dello spaziotempo piatto in cui avvengono i fenomeni fisici, quando accendiamo la gravità, il fatto che solo localmente possiamo definire un sistema di riferimento inerziale, implica che solo localmente possiamo confondere lo spaziotempo con uno spaziotempo piatto di Minkowski, in cui le leggi sono espresse dalle equazioni tensoriali per trasformazione di Lorentz.

Quindi, è proprio il principio di equivalenza che ci permette di includere la relatività nella descrizione dei sistemi fisici, rimanendo completamente relativistica nel senso della RS. I sistemi di riferimento inerziali sono solo più validi localmente, ma in ogni punto dello spaziotempo, in un campo gravitazionale del tutto arbitrario.

Il principio di equivalenza viene anche declinato a volte in varie forme, c'è il cosiddetto *weak equivalence principle [WEP]*, per il quale con leggi di natura, intendiamo soltanto le leggi del moto, del corpo che cade, ed è sostanzialmente un altro modo di riesprimere la universalità della caduta dei gravi ($m_i = m_g$).

C'è poi una forma che viene chiamata a volte *Einstein equivalence principle (o strong equivalence principle) [EEP/SEP]* intendendo che il principio

di equivalenza si applica a tutte le leggi di natura, meccanica ed elettromagnetica, e poi lo si può stendere anche all'interazione debole e all'interazione forte, che però non erano note ai tempi di Einstein.

Talvolta si distingue in *strong o very strong equivalence principle* [SEQ / VSEQ] l'ulteriore condizione dove le leggi di natura sono tutte le leggi della natura inclusa la gravità.

Di fatto il principio di equivalenza porta nella direzione di vedere la gravità non più come una manifestazione di una forza, ma come una manifestazione di proprietà nuove dello spaziotempo e se pensiamo già al paragone con le geometrie non euclidee è abbastanza naturale pensare che nella descrizione geometrica in cui gli eventi sono punti dello spaziotempo e i fenomeni fisici avvengono nello spazio-tempo, allora lo spaziotempo di Minkowski piatto non vale più globalmente in presenza di gravità, ma solo localmente, cioè in punti diversi posso erigere diversi sistemi di coordinate Minkowskiani, in più è già naturale immaginare che lo spazio-tempo in presenza di gravità sarà curvo, ovvero che il fenomeno che chiamo gravità è una manifestazione della curvatura dello spazio-tempo.

Queste considerazioni portano anche al fatto che anche oggetti non dotati di massa dovranno sentire l'effetto della curvatura dello spaziotempo, perché i fenomeni fisici avvengono su di esso. In uno spaziotempo di Minkowski un fotone o onda elettromagnetica si propaga alla velocità della luce e la sua traiettoria, la sua world-line, sarà dunque $x = ct = t$ ($c = 1$), che come mostra figura 4.4 è rappresentata da una retta inclinata di 45° . Se lo spaziotempo diventa curvo la luce stessa dovrà rimanervi vincolata, questa traiettoria corrisponderà ad una nuova traiettoria equivalente sullo spaziotempo curvo e ciò vuol dire che anche la luce sente l'effetto della gravità, pur non essendo dotata di massa.

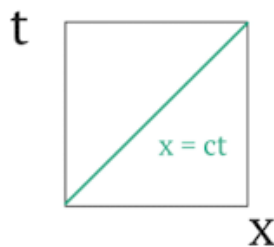


Figura 4.4: World-line fascio luminoso.

Notiamo, per concludere, che il principio di equivalenza contiene anche i principi della Relatività Speciale, perché la costanza della velocità della luce rimane presente, così come il principio della relatività, cioè il fatto che tutti gli osservatori devono dare la stessa descrizione.

4.2.2 Redshift gravitazionale

L'effetto, derivante dal principio di equivalenza, che si può subito mostrare, senza nemmeno aver fatto una scrittura formale della teoria, è quello che va anche sotto il nome di **redshift gravitazionale** della lunghezza d'onda della radiazione. Con redshift si intende che la lunghezza d'onda della radiazione si sposta verso il rosso, cioè a lunghezze d'onda maggiori, e con blueshift l'opposto.

Applichiamo il concetto del principio di equivalenza usando l'idea degli esperimenti ideali con gli ascensori, a due situazioni fisiche indistinguibili per il principio di equivalenza, ovvero, una in cui non c'è gravità e una in cui è invece presente. Entrambe le situazioni sono raffigurate in figura 4.5.

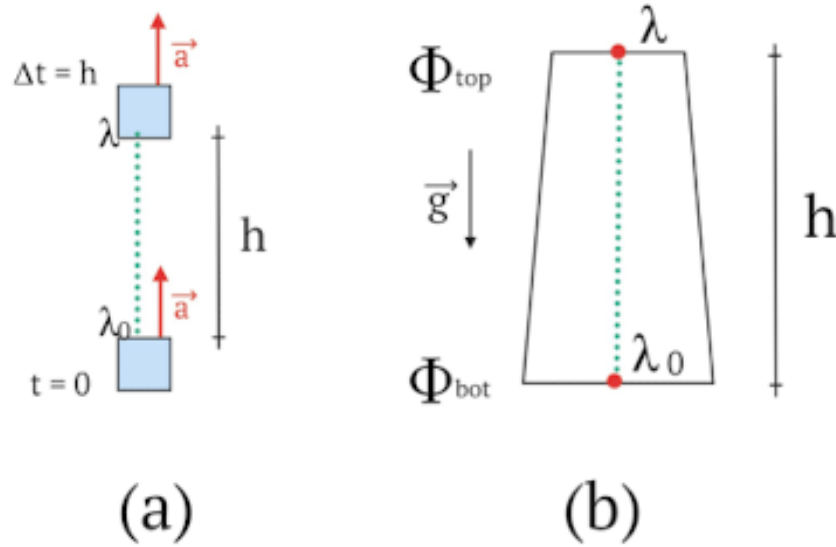


Figura 4.5: Laboratori per il redshift gravitazionale.

Consideriamo la situazione in cui non c'è gravità e costruiamo il setup sperimentale. Consideriamo due navicelle spaziali che viaggiano nel modo illustrato nella situazione *a* della figura 4.5. Sono entrambe soggette alla stessa accelerazione $\vec{a}$. A un certo tempo arbitrario, $t = 0$ la navicella che sta dietro emette un fotone che viaggia verso l'altra navicella. Sia h la distanza tra le due navicelle. Se entrambe sono soggette alla stessa accelerazione, allora h non cambia. Il tempo che il fotone impiega a percorrere il tratto h è:

$$\Delta t = \frac{h}{c} \quad (4.2.21)$$

e nell'intervallo di tempo Δt le navicelle acquisiscono velocità, poiché sono accelerate. La variazione di velocità delle due navicelle è:

$$\Delta v = a \Delta t = a h. \quad (4.2.22)$$

Supponiamo che il fotone venga emesso dalla navicella con una lunghezza d'onda λ_0 , quando esso viene ricevuto dalla seconda navicella, quest'ultima ha incrementato la sua velocità rispetto quella che aveva durante l'emissione del segnale. La sorgente della radiazione e il ricettore della radiazione non viaggiano alla stessa velocità, si ha quindi un effetto Doppler relativistico. Dunque la lunghezza d'onda ricevuta è diversa da quella emessa e vale:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \gamma (1 + \Delta v) \quad (4.2.23)$$

se consideriamo il limite non relativistico, in cui le velocità coinvolte v siano piccole rispetto alla velocità della luce, $v \ll c$, in tal caso $\gamma = 1$ e otteniamo:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + \Delta v. \quad (4.2.24)$$

Possiamo esprimere lo shift di radiazione come:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \quad (4.2.25)$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \quad (4.2.26)$$

$$= \Delta v \quad (4.2.27)$$

$$= a h \quad (4.2.28)$$

ora, se vale il principio di equivalenza, la situazione (a) è indistinguibile dalla (b) che ora descriviamo.

Consideriamo una torre alta esattamente h (come la distanza tra le navicelle), in presenza di un campo di gravità $\vec{g}$ omogeneo. Alla base della torre abbiamo la sorgente di fotoni di lunghezza d'onda λ_0 e in cima alla torre misuriamo i fotoni con lunghezza d'onda λ . Se vale il principio di equivalenza è necessario che ci sia uno shift della lunghezza della radiazione perché l'esperimento che fa l'osservatore nella situazione precedente è equivalente a quello che realizza l'osservatore in questa nuova situazione. Avremo ora:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = g h = \phi_{top} - \phi_{bot} = \Delta \phi \quad (4.2.29)$$

e dobbiamo accettare il fatto che una radiazione che si propaga in un campo gravitazionale sperimenti una variazione di lunghezza d'onda.

Si noti inoltre che da questa seconda descrizione osserviamo che lo spostamento è uguale alla differenza di energia potenziale del campo gravitazionale, $\Delta \phi$, tra la base e l'altezza. Questa è una conseguenza fisica necessaria se vale il principio di equivalenza.

Questo fenomeno è stato verificato sperimentalmente grazie all'esperimento realizzato nel 1959 da Pound e Rebka. Prendendo una torre alta

$h = 22.5$ m, si trovò che lo shift della lunghezza d'onda in cima alla torre fosse proprio uguale alla quantità $\Delta\phi$. Questa fu una verifica diretta che il principio di equivalenza fosse corretto.

Il fenomeno ci può anche dare delle indicazioni, nuovamente, del fatto che lo spaziotempo debba essere curvo. Consideriamo lo spaziotempo di Minkowski. Prendiamo i due eventi: "emissione del fotone alla base della torre" e "ricezione del fotone in cima alla torre". Il fotone segue una world-line inclinata di 45° in uno spazio-tempo piatto, come già illustrato in figura 4.4.

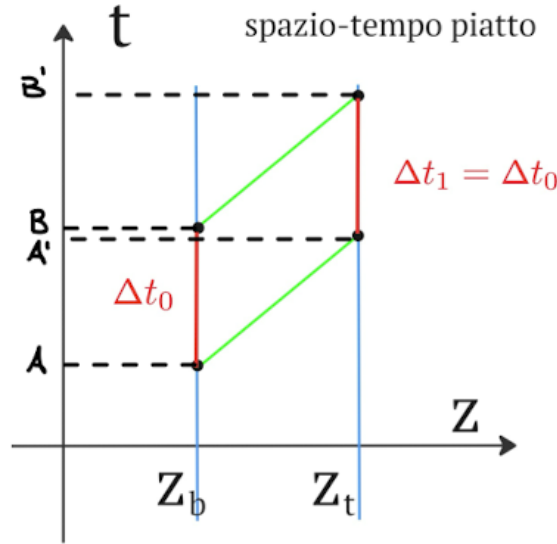


Figura 4.6: Laboratori per il redshift gravitazionale.

Rappresentiamo la medesima situazione in un altro modo, ovvero, come raffigurato in figura 4.6. Le due basi, inferiore e superiore della torre hanno come world-line una retta verticale, perché stanno sempre alla stessa posizione - rispettivamente z_b e z_t indipendentemente dal tempo. Sia t_A in tempo in cui avviene l'evento A , cioè l'emissione della prima cresta d'onda dell'onda elettromagnetica e t_B quello in cui avviene B , cioè la emissione della seconda cresta d'onda (piana). Il fotone emesso in A si propaga a 45° , chiamiamo A' l'evento "Arrivo della prima cresta dell'onda elettromagnetica in cima alla torre" e B' l'evento "Arrivo della seconda cresta dell'onda elettromagnetica". Sulle worldline passanti per z_b e z_t individuiamo gli intervalli di tempo Δt_0 e Δt_1 misurati alla base e alla cima della torre. Poiché le due rette sono entrambe a 45° , risulta evidente che, se non c'è gravità, il tempo misurato in cima alla torre è uguale a quello misurato alla base, cioè $\Delta t_1 = \Delta t_0$.

Però, se c'è gravità non è quello che misuriamo. Per far sì che la lunghezza d'onda sia aumentata, ci deve essere una distorsione dei tempi. Osserviamo

da questo diagramma che siccome i fotoni si muovono in ogni punto a 45° , la condizione $\delta t_1 > \Delta t_0$ non può verificarsi su uno spazio piatto! Dunque, l'unico modo è che la superficie, cioè lo spaziotempo sia curva. Vedi la figura 4.7.

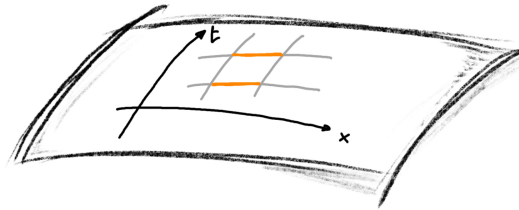


Figura 4.7: Laboratori per il redshift gravitazionale in uno spaziotempo curvo. I tratti arancioni, in uno spazio curvo, potrebbero non essere uguali.

In tal modo, effettuando la stessa costruzione della figura 4.6 sulla superficie curva, quelle che sono parallele sullo spazio piatto cessano di esserlo. Questa è una visione geometrica dello spaziotempo, ma è basata in modo molto profondo su un'osservazione fisica e su concetti fisici.

In conclusione:

- In Relatività Generale lo spaziotempo diventerà una varietà differenziale curva che ammette come spazio tangente lo spazio-tempo di Minkowski.
- Ciò significa che in ogni punto possiamo erigere un sistema di coordinate di tipo Minkowskiano, che corrisponde al sistema di coordinate localmente inerziale di un osservatore in caduta libera.
- La descrizione della gravità la potremo equivalentemente riscrivere come una teoria geometrica dello spaziotempo curvo.
- Le traiettorie delle particelle in caduta libera saranno quindi geodetiche su uno spaziotempo curvo.
- L'effetto della gravità sarà la manifestazione della curvatura dello spaziotempo - la forza di gravità non sarà più una forza in questo caso.

4.3 Connessione affine

Applichiamo il principio di equivalenza al moto di una particella libera, cioè unicamente soggetta alla gravità. Associamo all'osservatore in presenza di gravità un sistema di coordinate $x^\mu = (t, x, y, z)$ (generale). Il principio di equivalenza ci dice che in ogni punto dello spaziotempo posso definire un

sistema di coordinate in caduta libera. Chiamiamo $\xi_P^\alpha = (\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ (localmente inerziale) il sistema di coordinate in P , che possiamo sempre scrivere nella forma di Minkowski, in quanto è un sistema di coordinate di un osservatore inerziale, come in Relatività Speciale. In P , usando il sistema di coordinate in caduta libera, so scrivere subito l'equazione del moto dell'oggetto non soggetto a forze; le equazioni sono quelle che scriverei in RS, cioè in forma di un'equazione tensoriale:

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = 0 \quad (4.3.1)$$

sempre con la solita definizione di tempo proprio:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \quad (4.3.2)$$

Le equazioni (4.3.1) e (4.3.2) valgono soltanto in P , ma possiamo scriverle in ogni altro punto dello spaziotempo. D'ora in poi non ripeteremo più il pedice P . Facciamo la trasformazione di coordinate *locale* in P tra il sistema di coordinate dell'osservatore in caduta libera e un osservatore qualunque nel campo gravitazionale:

$$\xi^\alpha \longrightarrow x^\mu \quad (4.3.3)$$

grazie cui possiamo guardare alle $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x)$. La trasformazione di coordinate sull'equazione del moto risulta:

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) \quad (4.3.4)$$

$$= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \quad (4.3.5)$$

$$0 = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (4.3.6)$$

Ora, non sarebbe male togliere di mezzo la derivata parziale che moltiplica la derivata seconda; moltiplichiamo per $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$ e sommiamo su α . Concentriamoci sul primo termine:

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \delta^\lambda_\mu \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \quad (4.3.7)$$

analogamente si fa per l'altro termine e otteniamo il risultato completo:

$$\delta^\lambda_\mu \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0 \quad (4.3.8)$$

dunque:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0 \quad (4.3.9)$$

in cui abbiamo definito:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \quad (4.3.10)$$

che si chiamano **simboli di Christoffel** e rappresentano la *connessione affine* della nostra teoria, della nostra metrica. Si noti che questa quantità è simmetrica per scambio dei due indici bassi. Inoltre è ben definita in ogni punto perché se conosciamo la trasformazione di coordinate tra la ξ e la x , possiamo fare questo calcolo in P e ripeterlo in ogni punto. L'equazione del moto della particella libera assume quindi la forma riportata in (4.3.9). Usando le coordinate di un osservatore generico nel campo gravitazionale, l'equazione assomiglia, ma non è uguale alla precedente. Prima di commentarlo vediamo anche cosa accade per la relazione che definisce il tempo proprio quando cambiamo il sistema di coordinate:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (4.3.11)$$

$$= -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (4.3.12)$$

$$= -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.3.13)$$

in cui abbiamo definito:⁵

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (4.3.14)$$

Il tempo proprio $d\tau^2$ scritto come (4.3.13) ci mostra che $g_{\mu\nu}$ svolge lo stesso ruolo che $\eta_{\alpha\beta}$ svolgeva nello spaziotempo di Minkowski, cioè è il **tensore metrico**. La definizione di $g_{\mu\nu}$, ovviamente dipende dal punto P (essendoci le coordinate locali), dunque cambiano punto di riferimento, cambiano le derivate e quindi l'espressione di $g_{\mu\nu}$. Possiamo anche definire il tensore metrico inverso per lo spaziotempo in presenza di gravità, ricordando la proprietà (3.3.51) per $\eta_{\alpha\beta}$:

$$g^{\nu\sigma} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta}. \quad (4.3.15)$$

Possiamo verificare che (4.3.15) è una scrittura corretta vedendo che $g_{\mu\nu}$

⁵Nota che gli indici sono contratti e li spostiamo dove vogliamo.

soddisfa una relazione analoga a (3.3.51):

$$g^{\nu\sigma} g_{\kappa\nu} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^\nu} \eta_{\gamma\sigma} \quad (4.3.16)$$

$$= \underbrace{\eta^{\alpha\beta} \eta_{\gamma\sigma}}_{\delta^\beta_\gamma} \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^\nu}}_{\delta^\delta_\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\kappa} \quad (4.3.17)$$

$$= \delta^\beta_\gamma \delta^\delta_\alpha \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\kappa} \quad (4.3.18)$$

$$= \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\gamma} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\kappa} \quad (4.3.19)$$

$$g^{\nu\sigma} g_{\kappa\nu} = \delta^\sigma_\kappa. \quad (4.3.20)$$

Dunque, sfruttando direttamente il principio di equivalenza, abbiamo riscritto l'equazione del moto. L'equazione (4.3.9) vale in realtà in ogni punto dello spazio-tempo e non solo in P , perché in ogni punto dello spazio-tempo possiamo sfruttare il principio di equivalenza e rifare la stessa costruzione. Tali equazioni ci dicono che, in un punto arbitrario dello spaziotempo, in presenza di gravità, abbiamo una quadri-accelerazione diversa da zero, data da:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (4.3.21)$$

si noti che qui non si hanno forze oltre alla gravità, ma l'effetto della gravità si manifesta. Questo, in un certo senso, è all'effetto della "forza uguale massa per l'accelerazione", ma attenzione al fatto che la massa dell'oggetto non compare mai. Il termine $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ incorpora l'effetto della forza di gravità, in quanto induce una quadri-accelerazione nel sistema.

Ricapitoliamo brevemente: abbiamo visto l'equazione del moto (4.3.1) per un particella libera in un sistema di riferimento in caduta libera, che noi non possiamo distinguere da un sistema di riferimento inerziale; abbiamo fatto una trasformazione di coordinate locali, intorno ad un dato punto P , andando in un sistema di riferimento x^μ di un osservatore in presenza di gravità e abbiamo trovato l'equazione del moto (4.3.9) che ci mostra l'effetto della gravità; facendo tutto ciò abbiamo trovato una nuova espressione per il tempo proprio (4.3.13) valida in uno spaziotempo curvo, in cui il tensore metrico è definito da (4.3.14), dipendente dal punto; volendo potremmo vedere la traiettoria della particella in caduta libera con la forma parametrica $x^\mu(\tau)$, soluzione dell'equazione del moto.

Notiamo però che se abbiamo un oggetto massivo, con $m \neq 0$, allora le equazioni (4.3.9) va bene perché in questo caso il $d\tau^2$ lungo quella traiettoria è una quantità positiva; se, invece, una particella ha massa nulla ($m = 0$), come un fotone in caduta libera nel campo gravitazionale, la quantità $d\tau^2$ su

quella traiettoria è nulla, quindi non ha senso utilizzare l'equazione (4.3.9). Nel caso in cui non possiamo utilizzare l'equazione (4.3.9) e il tempo proprio come parametro, allora possiamo utilizzare un altro parametro evolutivo, chiamato λ , che viene anche chiamato **parametro affine**, (nel primo caso τ stesso gioca il ruolo di parametro affine) e l'equazione del moto risulta:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\lambda} = 0 \quad (4.3.22)$$

con la condizione:

$$d\tau^2 = 0 \quad (4.3.23)$$

che equivale a:

$$-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0. \quad (4.3.24)$$

Se vediamo $x^\mu(\lambda)$ possiamo dire che l'equazione del moto (4.3.22) è complementata dalla condizione (4.3.24), che è in effetti una condizione sulle traiettorie che ci assicura che stiamo propagando un oggetto a massa nulla.

Esercizio

Vediamo in questa sottosezione un rapido esempio di come si facciano i conti ed è una sottosezione che può anche essere vista come un rapido riassunto di quello imparato fin'ora.

Esprimiamo la forma del campo gravitazionale in un caso semplificato. L'equazione del moto scritta sopra (4.3.9), se non c'è campo gravitazionale, ritorna ad essere l'equazione da cui siamo partiti per ottenerla, ovvero (4.3.1). Prendiamo un sistema di coordinate ξ^α in uno spaziotempo piatto di Minkowski. L'equazione del moto di una particella con massa $m \neq 0$, non soggetta a forze è:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (4.3.25)$$

con:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.3.26)$$

essendo in uno spazio-tempo piatto di Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Se però prendessimo un fotone, quindi $m = 0$, allora l'equazione sarebbe:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\lambda^2} = 0 \quad (4.3.27)$$

con la condizione:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = 0 \quad (4.3.28)$$

che possiamo riscrivere come condizione sulle coordinate:

$$-\eta_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (4.3.29)$$

La soluzione all'equazione del moto (4.3.27) la scriviamo come:

$$\xi^\alpha(\lambda) = a^\alpha + b^\alpha \lambda \quad (4.3.30)$$

con a^α e b^α quadri-vettori costanti. Dobbiamo però assicurarci che (4.3.30) soddisfi la condizione (4.3.29), ossia, bisogna assicurarsi di essere su una traiettoria luce. La condizione (4.3.29) diventa:

$$0 = -\eta_{\alpha\beta} b^\alpha b^\beta \quad (4.3.31)$$

$$= -\eta_{00} b^0 b^0 - \eta_{0i} b^0 b^i - \eta_{i0} b^i b^0 - \eta_{ij} b^i b^j \quad (4.3.32)$$

$$= -\eta_{00} b^0 b^0 - 2\eta_{0i} b^0 b^i - \eta_{ij} b^i b^j \quad (4.3.33)$$

$$= (b^0)^2 - \sum_i (b^i)^2 \quad (4.3.34)$$

è una condizione che i coefficienti b^α devono avere norma nulla, ovvero consentono di stare sul cono luce. Infatti, ce ne saremmo potuti accorgere già da (4.3.31), che è proprio la definizione di norma di un quadri-vettore.

Prendiamo il caso specifico in cui $a^\alpha = 0$, ovvero il caso in cui non abbiamo time-shift e space-shift in $\lambda = 0$. Porre tutti gli $a^\alpha = 0$ fissa la posizione di un evento attraverso cui passa la world line, che è l'origine degli assi. Se ci mettiamo con $\lambda = 0$ allora abbiamo la soluzione:

$$\xi(\lambda) = 0 \quad (4.3.35)$$

come ci aspettavamo. Dopodiché prendiamo le componenti spaziali 2 e 3 del vettore b^α , e le annulliamo $b^2 = b^3 = 0$. Prendere $b^2 = b^3 = 0$ significa porsi sul piano $y = 0$ e $z = 0$, cioè nel piano $t - x$. Riscrivendo per esteso le quattro soluzioni abbiamo:

$$x^0 = t = a^0 + b^0 \lambda = b^0 \lambda \quad (4.3.36)$$

$$x^1 = x = a^1 + b^1 \lambda = b^1 \lambda \quad (4.3.37)$$

$$x^2 = y = a^2 + b^2 \lambda = 0 \quad (4.3.38)$$

$$x^3 = z = a^3 + b^3 \lambda = 0 \quad (4.3.39)$$

$$(4.3.40)$$

in cui dobbiamo ancora imporre la condizione (4.3.31):

$$(b^0)^2 - \sum_i (b^i)^2 = 0 \quad (4.3.41)$$

$$\implies (b^0)^2 = \sum_i (b^i)^2 \quad (4.3.42)$$

$$\implies b^0 = \pm b^1. \quad (4.3.43)$$

Abbiamo dunque due equazioni del moto:

$$\text{Soluzione 1 } (b^0 = b^1): \quad \begin{cases} t = b^0 \lambda \\ x = b^0 \lambda \end{cases} \implies x = t \quad (4.3.44)$$

$$\text{Soluzione 2 } (b^0 = -b^1): \quad \begin{cases} t = b^0 \lambda \\ x = -b^0 \lambda \end{cases} \implies x = -t \quad (4.3.45)$$

e otteniamo le due worldline, rappresentate in figura 4.8, inclinate di 45° nel piano $x - t$.

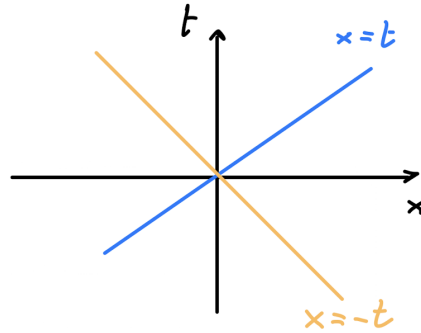


Figura 4.8

Il problema che abbiamo risolto è del tutto analogo a quello che risolveremo in presenza di gravità. La differenza sta nel fatto che le coordinate che abbiamo considerato adesso sono traiettorie della worldline di luce sulla varietà piatta $\mathbb{M}^4$; mentre in presenza di gravità avremo un set di coordinate sullo spaziotempo curvo e la traiettoria - di un oggetto che cade senza subire altra forza che non sia la gravità - segue una world line soluzione dell'equazione (4.3.9). Se la traiettoria è di tipo luce, allora l'equazione sarà data da (4.3.22) con la condizione aggiuntiva data da (4.3.24) che ci darà la condizione tale per cui avremo l'equivalente della worldline luce sulla superficie curva.

La curvatura sarà presente, poiché, come vedremo, avremo un tensore metrico che non è quello di Minkowski e compare il simbolo di Christoffel che denomineremo *connessione affine* e che codifica l'informazione del campo gravitazionale. Per il momento abbiamo visto che l'oggetto (4.3.10) è ottenibile punto per punto attraverso la trasformazione di coordinate tra le coordinate di Minkowski del piano tangente e le coordinate curvilinee della varietà curva, idem per $g_{\mu\nu}$. Quello che dobbiamo determinare è la relazione che c'è tra la connessione affine e il tensore metrico.

4.3.1 Relazione tra connessione affine e tensore metrico

Abbiamo visto l'equazione del moto di una particella libera massiva, in presenza di gravità:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0 \quad (4.3.46)$$

e la definizione del simbolo di Christoffel:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \quad (4.3.47)$$

quantità che possiamo scrivere punto per punto nel campo gravitazionale o, geometricamente, nel punto dello spaziotempo. È chiaro tale scrittura non è particolarmente comoda, proprio perché dovrei conoscere in ogni punto la trasformazione del sistema di coordinate in caduta libera e il sistema di coordinate in quel punto. Converrebbe dare un'espressione che sia manifestamente, funzione della posizione x , coordinate sulla varietà curva, senza dover in ogni punto passare attraverso il sistema di coordinate localmente inerziale. Questo ci porta a scoprire che $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ è parente di $g_{\mu\nu}$, nel senso che si può ottenere conoscendo il tensore metrico.

Vedremo in particolare che $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ si costruisce a partire dalle derivate di $g_{\mu\nu}$. Portando a destra il termine con la connessione in (4.3.46), possiamo leggere l'equazione come "quadri-accelerazione uguale alla forza di gravità diviso la massa, per unità di massa":

$$a^\mu = \frac{F^\mu}{m}. \quad (4.3.48)$$

Però, se Γ contiene in qualche modo l'effetto della "forza" di gravità e si costruisce a partire dalle derivate di $g_{\mu\nu}$, allora significa che quest'ultimo deve essere parente del potenziale gravitazionale, poiché la gravità è una forza conservativa, e quindi tale per cui:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi. \quad (4.3.49)$$

Infatti, $g_{\mu\nu}$ è geometricamente la metrica della varietà, ma fisicamente contiene quello che nel limite newtoniano riproduce il potenziale gravitazionale.

Cerchiamo di quantificare l'informazione presente in questi oggetti. Innanzitutto $g_{\mu\nu}$ è un oggetto con due indici ed è simmetrico cioè tale che:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad (4.3.50)$$

il suo numero di elementi indipendenti, cioè non ricostruibili per simmetria, è uguale a:

$$\frac{1}{2} D(D+1) = \frac{1}{2} 4(4+1) = 10 \quad (4.3.51)$$

dove D , dimensione del nostro spazio, pari a 4. Tale oggetto, $g_{\mu\nu}$, quando ci mettiamo in condizioni di campo debole, cioè nel limite Newtoniano, dovrà contenere il potenziale newtoniano. Esso però contiene al più 10 funzioni indipendenti e ha quindi molta più informazione del semplice potenziale newtoniano. Da un altro punto di vista, la descrizione relativistica del campo gravitazionale è molto più complessa rispetto quella classica.

Per quanto riguarda la connessione invece, "parente della forza", notiamo che si tratta di un oggetto simmetrico per scambio degli indici bassi $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$, dunque 10 possibili combinazioni indipendenti come nel caso precedente, mentre per l'indice di sopra ne abbiamo 4. In totale si hanno quindi 40 quantità indipendenti dentro il semplice di Christoffel! Vediamo rapidamente una proprietà del simbolo di Christoffel. Moltiplichiamo la definizione (4.3.47) per:

$$\frac{d\xi^\beta}{dx^\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{d\xi^\beta}{dx^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \quad (4.3.52)$$

$$= \delta^\beta_\alpha \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \quad (4.3.53)$$

e dunque stiamo sommando su λ . Vale quindi la proprietà:

$$\frac{d\xi^\alpha}{dx^\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \quad (4.3.54)$$

che è equivalente all'espressione da cui siamo partiti, però questa proprietà risulterà utile per trovare la relazione che lega tensore metrico e connessione. Cerchiamo suddetta relazione. Ricordiamo che $g_{\mu\nu}$ si può ottenere in ogni punto a partire dal tensore metrico del piano tangente di Minkowski grazie alla relazione:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (4.3.55)$$

possiamo derivare rispetto λ :

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\lambda} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \eta_{\alpha\beta} \quad (4.3.56)$$

ricordando la proprietà dei simboli di Christoffel (4.3.54) scriviamo:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta} \quad (4.3.57)$$

se in quest'ultima scrittura individuiamo le relazioni del tipo (4.3.55), allora otteniamo:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\nu\lambda} g_{\mu\rho} \quad (4.3.58)$$

notando che l'indice alto di Γ è saturato (contratto) e che abbiamo a che fare con oggetti simmetrici, allora scriviamo:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}. \quad (4.3.59)$$

La relazione (4.3.59) ci permette di individuare la struttura degli indici. Infatti, indicando λ, μ, ν con 1,2,3 abbiamo:

$$\partial_1 g_{23} = \Gamma_{12}^\rho g_{\rho 3} + \Gamma_{13}^\rho g_{\rho 2}. \quad (4.3.60)$$

Ovviamente, la scrittura (4.3.59) ci piace, ma fino ad un certo punto, noi siamo partiti con l'intenzione di ottenere un'espressione semplice per calcolare Γ . Prendiamo (4.3.59) e sommiamo diverse strutture di indici:

$$(\lambda\mu\nu) + (\mu\lambda\nu) - (\nu\mu\lambda) \quad (4.3.61)$$

$$\begin{aligned} \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda} = & \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu} + \\ & + \Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\rho\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho g_{\rho\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho g_{\rho\mu} \end{aligned} \quad (4.3.62)$$

possiamo usare il fatto che Γ sia simmetrica nello scambio degli indici per sommare e sottrarre i termini a due a due e ottenere:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda} = 2\Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} \quad (4.3.63)$$

possiamo introdurre il tensore metrico inverso:

$$g^{\nu\alpha} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda}) = 2\Gamma_{\lambda\mu}^\rho g^{\nu\alpha} g_{\rho\nu} \quad (4.3.64)$$

$$= 2\Gamma_{\lambda\mu}^\rho \delta^\alpha_\rho \quad (4.3.65)$$

dunque concludiamo con la relazione tra connessione affine e tensore metrico:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda}). \quad (4.3.66)$$

La (4.3.66) è una riespressione della connessione affine che però adesso non contiene più la trasformazione di coordinate punto per punto. Se $g_{\mu\nu}$ lo conosciamo punto per punto - teoricamente lo possiamo conoscere - ed è la metrica della mia varietà curva, allora la Γ è definita punto per punto attraverso questa combinazione che contiene proprio le derivate di g .

In conclusione, se Γ rappresenterà, in un opportuno limite, la forza di Newton, allora g , sempre in tale limite, conterrà l'informazione sul potenziale. Si noti ancora che l'indice ν è saturo in tutti e tre i termini. È facile accorgersi che tale oggetto è simmetrico, come d'altronde già sappiamo.

4.4 Le geodetiche

Abbiamo visto come determinare l'equazione del moto di un corpo in caduta libera in un sistema gravitazionale arbitrario, per il quale abbiamo utilizzato un sistema di coordinate x^μ , sistema di coordinate su una varietà quadridimensionale con metrica 3 + 1, cioè su uno spazio-tempo curvo. Il set x^μ rappresenta un osservatore nel campo gravitazionale. Però possiamo avere una quantità arbitraria di osservatori x'^μ che descrivono il moto di oggetti

nello stesso campo gravitazionale. Il moto di questi oggetti viene descritto da una traiettoria nello spazio-tempo che chiamiamo *worldline*, che è soluzione di un'equazione del moto che, scritta in un sistema di coordinate generico, assume la forma (4.3.9) con la condizione (4.3.13). Abbiamo anche visto la relazione (4.3.66) tra la connessione affine $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ e la funzione metrica $g_{\mu\nu}$.

Quindi, il sistema di coordinate x^μ dal punto di vista geometrico è un sistema di coordinate su una varietà genericamente curva e le *worldline* di qualunque corpo in caduta libera seguono delle precise traiettorie $x^\mu(\tau)$, trovate risolvendo l'equazione del moto. Un corpo non in caduta libera, cioè soggetto a una forza, seguirà una *worldline* che tiene conto di ciò e quindi avrà una traiettoria diversa rispetto il caso libero.

Su questo spaziotempo possiamo definire un certo set di 4 coordinate. Il principio di equivalenza tra gravitazione e inerzia dice che preso un qualunque punto P , che in uno spaziotempo descrive un evento fisico, possiamo erigere un sistema di coordinate localmente inerziale. Tale sistema è quello del piano tangente in P , che è un piano di Minkowski. Questo piano non può ricoprire l'intera varietà, perché se lo facesse allora la varietà di cui parliamo sarebbe il piano di Minkowski stesso e di conseguenza non avremmo gravità.

Si noti che questo concetto di piano tangente in un punto vale per qualunque varietà. Il piano tangente ha in comune con la varietà di cui esso è il piano tangente la segnatura della metrica.

Abbiamo già detto che la soluzione dell'equazione (4.3.9) è una traiettoria nello spazio-tempo ed è la *wordline* dell'osservatore o di un oggetto in caduta libera. Come possiamo osservare in tale equazione non compare la massa dell'oggetto, in quanto la gravità è universale. Tutti i corpi cadono nello stesso modo nel campo gravitazionale, indipendentemente dalla loro composizione. Proviamo ora a ricavare nuovamente l'equazione (4.3.9), ma da un punto di vista geometrico e, come vedremo, ciò ci sarà utile perché tale equazione definirà le geodetiche della varietà. Il risultato dell'equazione differenziale che troveremo sarà l'equazione di una geodetica su una varietà curva ed essa vedremo che coinciderà con l'equazione del moto di un corpo in caduta libera in un campo gravitazionale; sarà dunque una conferma del fatto che le *wordline* degli oggetti in caduta libera sono geodetiche della varietà curva.

Per dimostrare quello appena detto definiamo che cosa intendiamo per **geodetica**. Consideriamo un cammino sulla varietà curva, scritto in un dato sistema di coordinate da un'equazione parametrica del tipo:

$$x^\mu = x^\mu(p) \quad (4.4.1)$$

in cui p è il parametro attraverso cui, mettendo in relazione le quattro coordinate, otteniamo una traiettoria sulla varietà quadridimensionale (è il nostro

parametro affine)⁶. Nota che non usiamo il tempo proprio come parametro affine poiché nel caso in cui $m = 0$ allora porterebbe a $d\tau = 0$ e perderemmo tutto il significato, per cui conviene tutelarsi ed usarne uno differente.

Ricordiamo che il tempo proprio $d\tau$ rappresenta la distanza infinitesima tra due punti molto vicini sulla varietà, allora quando due punti non sono molto vicini, possiamo calcolare, dato un cammino eventualmente arbitrario, la distanza tra i due integrando l'elemento di cammino infinitesimo, ovvero:

$$T_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B dp \frac{d\tau}{dp} \quad (4.4.2)$$

però, se vediamo τ come funzione di p abbiamo:

$$\frac{d^2\tau}{dp^2} = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \quad (4.4.3)$$

e dunque:

$$T_{AB} = \int_A^B dp \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)^{1/2}. \quad (4.4.4)$$

Qualunque cammino prendiamo possiamo calcolare, grazie a (4.4.4), la sua lunghezza; però, noi siamo interessati a determinare, tra tutti i possibili cammini, quello che rende estemale⁷ la distanza tra A e B . Dobbiamo quindi utilizzare il principio variazionale, descritto anche nella sezione §3.5. Facciamo la trasformazione:

$$x^\mu(p) \longrightarrow x^\mu(p) + \delta x^\mu(p) \quad (4.4.5)$$

in cui $\delta x^\mu(p)$ sono variazioni che descrivono cammini diversi. Imponiamo la solita condizione che mantiene gli estremi dei cammini fissi:

$$\delta x^\mu(p_A) = \delta x^\mu(p_B) = 0 \quad (4.4.6)$$

e imponiamo che T_{AB} , scritto in (4.4.4), sia stazionario rispetto le variazioni del cammino, ovvero che:

$$\delta T_{AB} = 0 \implies \frac{\delta T_{AB}}{\delta x^\mu} = 0. \quad (4.4.7)$$

Implementiamo i conti. Riscriviamo in un altro modo (4.4.4):

$$T_{AB} = \int_A^B dp \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)^{1/2} = \int_A^B dp F(x) \quad (4.4.8)$$

⁶Nota che questo discorso vale per qualunque segnatura della metrica e in qualunque dimensione.

⁷Nota che nello spazio euclideo saremmo in grado di dire se estemale vuol dire massimo o minimo, ma essendo in una varietà curva non lo siamo.

con:

$$F(x) = G(X)^{1/2} \quad , \quad G(x) = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = \frac{d^2\tau}{dp^2}. \quad (4.4.9)$$

La variazione della lunghezza di cammino sarà:

$$\delta T_{AB} = \int_A^B dp \delta F(x) = 0 \quad (4.4.10)$$

vediamo chi è la variazione di $F(x)$:

$$\delta F(x) = \frac{1}{2} G^{-1/2}(x) \delta G(x) = \frac{1}{2} \frac{dp}{d\tau} \delta G(x) \quad (4.4.11)$$

in cui:

$$\delta G(x) = G(x + \delta x) - G(x) \quad (4.4.12)$$

$$= -g_{\mu\nu}(x + \delta x) \frac{d(x^\mu + \delta x^\mu)}{dp} \frac{d(x^\mu + \delta x^\mu)}{dp} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \quad (4.4.13)$$

possiamo assumere che le variazioni δx siano piccole attorno al cammino x , e quindi fare uno sviluppo in serie di g troncando al primo ordine di δx :

$$= - \left[g_{\mu\nu}(x) + \partial_\lambda g_{\mu\nu} \delta x^\lambda \right] \left[\frac{dx^\mu}{dp} + \frac{d(\delta x^\mu)}{dp} \right] \left[\frac{dx^\nu}{dp} + \frac{d(\delta x^\nu)}{dp} \right] + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \quad (4.4.14)$$

$$= -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} - 2g_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} - (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} + g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \quad (4.4.15)$$

$$= -(\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} - 2g_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \quad (4.4.16)$$

in cui abbiamo tenuto conto (nel secondo passaggio) che $g_{\mu\nu}$ è simmetrico per lo scambio degli indici μ e ν , oltre al fatto che sono indici sommati. Possiamo quindi mettere dento (4.4.11) la variazione della funzione $G(x)$ che abbiamo trovato e vedere la variazione di T_{AB} :

$$\delta T_{AB} = \frac{1}{2} \int_A^B \frac{dp}{d\tau} \left[-(\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} - 2g_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right] dp \quad (4.4.17)$$

$$= \frac{1}{2} \int_A^B \left[-(\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - 2g_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] d\tau \quad (4.4.18)$$

in cui abbiamo notato che nell'integrale compare $dp/d\tau$ e che noi stiamo integrando in dp con tra le graffe una doppia derivata sempre rispetto dp , dunque valgono:

$$dp = \frac{dp}{d\tau} d\tau \quad (4.4.19)$$

$$\frac{dp}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dp} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (4.4.20)$$

$$\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dp}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (4.4.21)$$

e analogamente per l'altro termine.

Ci piacerebbe manipolare (4.4.18) in modo da scriverla nella forma:

$$\delta T_{AB} \propto \int_A^B \left(\dots \right)_\lambda \delta x^\lambda. \quad (4.4.22)$$

Il primo termine di (4.4.18) è già in una forma che ci piace, il secondo dobbiamo manipolarlo in modo da riuscire ad integrare per parti e riscriverlo meglio. Calcoliamo la derivata totale dei termini costituenti il secondo termine di (4.4.18):

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\mu + g_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \quad (4.4.23)$$

isolando il termine che compare in (4.4.18) troviamo:

$$g_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\mu - g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2}. \quad (4.4.24)$$

Riscriviamo la variazione (4.4.18):

$$\delta T_{AB} = - \int_A^B \left[\frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\mu - g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \right] d\tau \quad (4.4.25)$$

$$= - \int_A^B \left[\frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\mu\nu}) \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\mu - g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \right] d\tau + \int_A^B \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) d\tau \quad (4.4.26)$$

il secondo integrale è immediato, e grazie alle condizioni sugli estremi del cammino (4.4.6), sappiamo essere nullo. Manipoliamo ancora i termini rimanenti. Nel riscrivere il secondo e il terzo termine tra graffe, notando

che non ci sono indici liberi e che cioè tutti gli indici sono muti, possiamo rinominare $\mu \rightarrow \lambda$:

$$\delta T_{AB} = - \int_A^B \left[\frac{1}{2} \partial_\lambda g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \partial_\sigma g_{\lambda\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \right] \delta x^\lambda d\tau \quad (4.4.27)$$

notiamo che possiamo esprimere i primi due termini (la cui somma indichiamo con T_λ) usando la connessione, visto che contengono le derivate di $g_{\mu\nu}$ (omettiamo per il momento il $d\tau$):

$$T_\lambda = \frac{1}{2} \partial_\lambda g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \partial_\sigma g_{\lambda\nu} dx^\sigma dx^\nu \quad (4.4.28)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\lambda\nu} \right) dx^\mu dx^\nu \quad (4.4.29)$$

$$= \left[\frac{1}{2} (\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu}) - \partial_\mu g_{\lambda\nu} \right] dx^\mu dx^\nu \quad (4.4.30)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + \frac{1}{2} \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} - \partial_\mu g_{\lambda\nu} \right) dx^\mu dx^\nu \quad (4.4.31)$$

$$= (\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} - \partial_\mu g_{\lambda\nu}) dx^\mu dx^\nu \quad (4.4.32)$$

$$= (\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda}) dx^\mu dx^\nu \quad (4.4.33)$$

$$= -\Gamma^\kappa_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda} dx^\mu dx^\nu \quad (4.4.34)$$

spiego meglio i passaggi: per arrivare a (4.4.29) abbiamo solo rinominato $\sigma \rightarrow \mu$; per (4.4.30) abbiamo utilizzato la relazione (4.3.59); per (4.4.32) abbiamo contratto il termine centrale dx^μ e dx^ν , così che:

$$\frac{1}{2} \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} dx^\mu dx^\nu \underset{\mu \leftrightarrow \nu}{=} \frac{1}{2} \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad (4.4.35)$$

per (4.4.33) abbiamo lavorato su $\partial_\mu g_{\lambda\nu}$ come fatto in (4.4.30); in (4.4.33) abbiamo fatto solo i conti.

Arrivati a (4.4.34) possiamo riscrivere la variazione di T_{AB} (reinserendo i $d\tau$) come:

$$\delta T_{AB} = \int_A^B \left(\Gamma^\kappa_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \right) \delta x^\lambda d\tau \quad (4.4.36)$$

rinominando, nel secondo termine, $\nu \rightarrow \kappa$ otteniamo:

$$\delta T_{AB} = \int_A^B \left(\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) g_{\lambda\kappa} \delta x^\lambda d\tau \quad (4.4.37)$$

imponendo la stazionarietà, quindi $\delta T_{AB} = 0$. Tenendo conto che le variazioni δx^μ sono arbitrarie e che le funzioni $g_{\lambda\kappa}$ sono non tutte nulle, otteniamo che la stazionarietà è soddisfatta solo se tutti i coefficienti sono nulli:

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (4.4.38)$$

La richiesta di stare sul cammino che rende estemale τ porta al cammino descritto dall'equazione (4.4.38), che per definizione, è il cammino che definisce la geodetica della varietà. Se questo sia il cammino con la distanza maggiore o con la distanza minore dipende dalla segnatura della metrica, quindi non siamo in grado di dirlo a priori. Se siamo in uno spazio euclideo sarà la distanza minore tra i due punti. Se siamo su uno spazio minkowskiano bisogna invece prestare attenzione al fatto che la distanza quadra non è definita positiva, avendo:

$$d\tau^2 = \begin{cases} > 0 & \text{tipo tempo} \\ = 0 & \text{tipo luce} \\ < 0 & \text{tipo spazio} \end{cases} \quad (4.4.39)$$

dunque, per traiettorie di tipo tempo o luce è la distanza maggiore. Quindi l'interpretazione geometrica di quello che stiamo facendo, dal punto di vista fisico, è che una particella in caduta libera in un campo gravitazionale, si muove sul cammino spazio-temporale estemale. La lunghezza spazio-temporale da estremizzare è il tempo proprio e il cammino che troviamo, che è la world line del sistema in caduta libera (4.3.9), coincide con la geodetica della varietà spazio-temporale (4.4.38).

Vediamo un paio di esempi alcuni casi particolari di quello che abbiamo visto.

Esempio 1. Supponendo che ci sia solo il sole in tutto l'universo, questi deforma lo spazio-tempo attorno a sé e lo curva. Il cammino di una cometa, o di qualche altro corpo celeste, che si muove attorno al sole descrive una traiettoria, la quale corrisponde alla la geodetica della varietà spazio-temporale del campo gravitazionale dovuto dal sole. Quella traiettoria rappresenta la world line del corpo o del pianeta. Si possono avere un'orbita aperta o chiusa, ma in ogni caso la traiettoria seguita sarà un estemale della lunghezza del cammino (cioè τ).

Esempio 2. Supponiamo di metterci in una situazione in cui la gravità non ci sia. In questo caso abbiamo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e siamo in Relatività Speciale. La relazione (4.3.66), essendo η costante, ci da:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0. \quad (4.4.40)$$

Dunque, le equazioni del moto (4.3.9), in assenza di gravità, diventano:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (4.4.41)$$

e dunque le worldline saranno della forma:

$$x^\mu(\tau) = a^\mu \tau + b^\mu \quad (4.4.42)$$

che è l'equazione di una retta in $\mathbb{M}^4$. Infatti vediamo, per gli indici $\mu = 0$ e $\mu = 1$:

$$\begin{cases} t(\tau) = a^0 \tau + b^0 \\ x(\tau) = a^1 \tau + b^1 \end{cases} \implies \tau = \frac{x - b^1}{a^1} \quad (4.4.43)$$

$$\implies t = a^0 \frac{x - b^1}{a^1} + b^0 = \frac{a^0}{a^1} x - \frac{a^0 b^1}{a^1} + b^0 \equiv A x + B. \quad (4.4.44)$$

4.5 Limite newtoniano

Abbiamo visto come scrivere l'equazione del moto di un corpo in caduta libera in presenza di gravità secondo il principio di equivalenza e abbiamo trovato la relazione (4.3.9), che sono quattro equazioni, visto che l'indice libero è $\mu = 0, 1, 2, 3$. Se vale il principio di equivalenza, quella vista deve anche essere la corretta equazione del moto per un qualunque corpo in caduta in un campo gravitazionale arbitrario. Ovviamente, la (4.3.9) deve essere compatibile le corrette equazioni del moto che scriviamo nel limite newtoniano. In altri termini la meccanica newtoniana deve potersi ritrovare come opportuno limite della Relatività Generale in quanto descrive in modo corretto i fenomeni gravitazionali sulle scale per le quali essa è applicabile. Vediamo cosa intendiamo per limite newtoniano e se l'equazione (4.3.9) è in grado di riprodurre nel limite newtoniano quello che potremmo scrivere secondo la meccanica newtoniana, ovvero:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi \quad (4.5.1)$$

le cui soluzioni le possiamo indicare con $x^a = x^a(t)$, con $a = 1, 2, 3$. Notiamo che se a (4.5.1) moltiplichiamo a sinistra per la massa inerziale m_i e a destra per la massa gravitazionale m_g ritroviamo proprio $\vec{F} = m\vec{a}$. Riscriviamo (4.5.1) in componenti, usando un sistema di coordinate cartesiane⁸ e il tempo è soltanto un parametro rispetto a cui abbiamo l'evoluzione:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial^i \phi, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.5.2)$$

⁸Lo spazio in meccanica newtoniana è uno spazio piatto, quindi possiamo prendere uno spazio euclideo e scegliere coordinate cartesiane

Ovviamente, le equazioni (4.3.9) sono una in più rispetto quelle del caso classico (4.5.1).

Quando parliamo di moto di una particella in un campo gravitazionale, con limite newtoniano, intendiamo dire che, non solo il corpo si muove in un campo gravitazionale *debole*, ma anche che il moto del corpo è *non relativistico*, ossia:

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \ll c \quad (4.5.3)$$

che mettendosi in unità naturali diventa:

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{d\tau}{dt}. \quad (4.5.4)$$

Consideriamo un caso semplice in cui il campo è anche *stazionario*, cioè non dipende dal tempo. Dato che il potenziale gravitazionale ϕ andrà a finire da qualche parte all'interno del tensore metrico (come accennato nella sezione §4.3.1), allora richiedere che il potenziale non dipenda dal tempo, significa richiedere che il tensore metrico non dipenda dal tempo, quindi che:

$$\partial^0 g_{0\nu} = 0. \quad (4.5.5)$$

Per scrivere il campo debole possiamo utilizzare la visione geometrica. Se il campo gravitazionale non c'è abbiamo uno spaziotempo piatto, quindi $g_{\mu\nu}$ è descrivibile con il tensore metrico di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Avere un campo debole significa avere un campo tale per cui il tensore metrico sarà ottenuto da una piccola deformazione attorno allo spazio tempo piatto e di conseguenza possiamo esprimere la condizione di campo debole attraverso:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad , \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (4.5.6)$$

in cui le quantità $h_{\mu\nu}$ sono dei campi, possono dipendere dalla posizione e che devono essere tutte quantità molto piccole. Il tensore metrico è diagonale in questo contesto, dunque tutte le quantità non diagonali e diagonali sono piccole:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 + h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & 1 + h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & 1 + h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & 1 + h_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.5.7)$$

Ovviamente vale che quando $h_{\mu\nu} \rightarrow 0$ ritroviamo $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$, ovvero ritroviamo lo spazio piatto che ci dice che siamo in assenza di gravità. Aggiungiamo la condizione che anche le derivate delle funzioni $h_{\mu\nu}$ siano piccole:

$$|\partial_\lambda h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (4.5.8)$$

perché se una funzione è piccola in un punto, ma con una derivata molto grande, allora se ci spostiamo un po' da quel punto la funzione può diventare molto grande. Per verificare se la meccanica newtoniana è contenuta

nell'equazione (4.3.9) occorre specificare tale equazione nel limite (4.5.6) e vedere se ritroviamo l'espressione (4.5.1). In caso affermativo potremo accettare (4.3.9) come l'equazione valida per qualunque moto in un campo gravitazionale arbitrario, da cui potremo predire tutto un insieme di fenomeni ulteriori.

Consideriamo esplicitamente il limite newtoniano e sviluppiamo rispetto agli indici bassi le somme in (4.3.9):

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + 2 \Gamma^\mu_{0i} \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} + \Gamma^\mu_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0. \quad (4.5.9)$$

Nel limite newtoniano abbiamo che sono piccole le componenti delle tri-velocità ordinarie e le funzioni $h_{\mu\nu}$, dunque proveremo a sviluppare all'ordine più basso rispetto queste quantità. Ripartiamo dalla scrittura della connessione in termini delle derivate del tensore metrico e sviluppiamola:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda}) \quad (4.5.10)$$

ovviamente se scriviamo (4.5.6), in cui $\eta_{\mu\nu}$ sono costanti, rimane:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu h_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda h_{\nu\sigma} - \partial_\sigma h_{\nu\lambda}) \quad (4.5.11)$$

in cui abbiamo lasciato davanti la parentesi tonda il tensore metrico $g^{\mu\sigma}$, con indici alti, poiché non sappiamo ancora come scriverlo. Diamo una rappresentazione di $g^{\mu\sigma}$ tramite le funzioni $h_{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2) \quad (4.5.12)$$

che è una scrittura sufficiente se tronciamo il nostro limite classico al primo ordine. Per provare quest'ultima affermazione possiamo verificare che valga:

$$g^{\mu\sigma} g_{\sigma\lambda} = \delta^\mu_\lambda \quad (4.5.13)$$

sostituendo (4.5.6) e (4.5.12):

$$(\eta^{\mu\sigma} - h^{\mu\sigma}) (\eta_{\sigma\lambda} + h_{\sigma\lambda}) = \eta^{\mu\sigma} \eta_{\sigma\lambda} + \eta^{\mu\sigma} h_{\sigma\lambda} - h^{\mu\sigma} \eta_{\sigma\lambda} + \mathcal{O}(h^2) \quad (4.5.14)$$

$$= \delta^\mu_\lambda + h^\mu_\lambda - h^\mu_\lambda \quad (4.5.15)$$

$$= \delta^\mu_\lambda. \quad (4.5.16)$$

Dunque, siamo contenti di (4.5.12) e se la sostituiamo in (4.5.11), otteniamo:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\sigma} - h^{\mu\sigma}) (\partial_\nu h_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda h_{\nu\sigma} - \partial_\sigma h_{\nu\lambda}) \quad (4.5.17)$$

che, se trascuriamo tutti i termini superiori al primo, diventa:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} (\partial_\nu h_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda h_{\nu\sigma} - \partial_\sigma h_{\nu\lambda}) \quad (4.5.18)$$

che è la forma che assume la connessione nel limite newtoniano.

Ritornando all'equazione (4.5.9) possiamo notare che nel limite newtoniano abbiamo:

- $\Gamma \sim \mathcal{O}(\partial h) \sim \mathcal{O}(h)$.
- Il termine $dt/d\tau$ non è necessariamente un termine piccolo, per cui lo dobbiamo tenere.
- Il secondo termine che compare è di ordine $\mathcal{O}(h v^i)$, quindi di ordine superiore al primo e lo possiamo trascurare.
- Il terzo termine è di ordine $\mathcal{O}(h v^2)$, quindi di ordine superiore e trascurabile.

Fatte queste osservazioni otteniamo che (4.5.9) diventa:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (4.5.19)$$

Dunque, di tutte le componenti della connessione che possiamo avere, ce ne interessano solamente 4, ovvero:

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} (\partial_0 h_{0\sigma} + \partial_0 h_{0\sigma} - \partial_\sigma h_{00}) \quad (4.5.20)$$

che per via della condizione di stazionarietà (4.5.5), che si traduce in $\partial_0 h_{\sigma 0} = \partial_0 h_{0\sigma} = 0$, otteniamo:

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} \partial_\sigma h_{00} \quad (4.5.21)$$

$$= -\frac{1}{2} \partial^\mu h_{00}. \quad (4.5.22)$$

L'equazione del moto nel limite newtoniano è dunque:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \partial^\mu h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (4.5.23)$$

in cui possiamo separare componente temporale e spaziale:

$$\mu = 0 \quad \frac{d^2 t}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \partial^0 h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (4.5.24)$$

$$\mu = i \quad \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \partial^i h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (4.5.25)$$

Analizziamo prima (4.5.24). La condizione di stazionarietà $\partial^0 h_{00} = 0$ ci dice che:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad (4.5.26)$$

la quale ci permette di ottenere una relazione tra tempo e tempo proprio in termini differenziali:

$$\frac{dt}{d\tau} = C. \quad (4.5.27)$$

Le equazioni (4.5.25) possiamo riscriverle in termini della derivata del tempo rispetto al tempo proprio, infatti si ha:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) \quad (4.5.28)$$

$$= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d}{dx^i} [t] C \right) = C \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{dt} \right) \quad (4.5.29)$$

$$= C^2 \frac{d^2 x^i}{dt^2} \quad (4.5.30)$$

che ci porta all'equazione del moto spaziale:

$$C^2 \left[\frac{d^2 x^i}{dt^2} - \frac{1}{2} (\partial^i h_{00}) \right] = 0 \implies \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} (\partial^i h_{00}) \quad (4.5.31)$$

che se confrontata con l'equazione di Newton (4.5.2) ci porta a dire:

$$h_{00} = -2\phi + \text{cost.} \quad (4.5.32)$$

Perciò abbiamo imparato che l'equazione del moto (4.3.9) riproduce la corretta equazione del moto, nel limite newtoniano, per un corpo che cade in presenza di un campo di gravità e che il potenziale newtoniano ϕ va a sistemarsi nella componente 00 del campo del tensore metrico. La metrica è quindi:

$$g_{\mu\nu} : g_{00} = -1 - 2\phi + \text{cost} \quad (4.5.33)$$

e ritroviamo il fatto che in meccanica classica il potenziale è sempre definito a meno di una costante, che possiamo fissare opportunamente.

Facciamo una breve considerazione dimensionale. Siamo partiti da:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial^i \phi \implies \vec{a} = -\vec{\nabla} \phi$$

che dimensionalmente vediamo essere:

$$L T^{-2} = L^{-1} [\phi] \implies [\phi] = L^2 T^{-2}$$

che in unità naturali diventa adimensionale. Questo va bene perché abbiamo scritto g_{00} come un numero adimensionale.

Esempio 1. Se prendiamo il sole e studiamo il moto di un corpo nel campo gravitazionale descritto dal sole. Il moto è regolato dal potenziale ϕ :

$$\phi = \frac{GM}{r} + k \quad (4.5.34)$$

con k costante arbitraria. Se vogliamo che $\phi \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$, allora poniamo $k = 0$. In meccanica classica la grandezza fisica che determina il

moto è la forza, che essendo definita attraverso un operatore differenziale, rende tale costante irrilevante. Nella nostra notazione però, quando ci allontaniamo dal sole e andiamo a distanze infinite, il tensore metrico deve necessariamente andare nel tensore di Minkowski ($g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$). Quindi la cosa migliore è definire il potenziale in modo tale che dove il potenziale diventa inefficace la costante si annulla. Avremo allora:

$$g_{00} = -(1 + 2\phi) \quad (4.5.35)$$

dunque, di tutte le dieci componenti indipendenti del tensore metrico $g_{\mu\nu}$, ne abbiamo fissata una, g_{00} . Quindi, il potenziale determina il tensore metrico e a sua volta il potenziale sarà determinato dalla distribuzione di materie d'energia.

Esempio 2. Potremmo domandarci quanto sia grande il termine ϕ che distorce il termine minkowskiano del tensore metrico, per alcuni sistemi noti per i quali la meccanica newtoniana è stata applicata. Prendiamo come esempio il potenziale gravitazionale sulla superficie della Terra (in modulo):

$$|\phi| = \frac{GM}{R_T} \simeq 10^{-9} \quad (4.5.36)$$

che effettivamente è $\ll 1$. Analogamente sulla superficie del Sole:

$$|\phi| = \frac{GM_\odot}{R_\odot} \simeq 10^{-6} \quad (4.5.37)$$

comunque sempre molto piccola. Se prendiamo uno degli oggetti più densi in natura come una nana bianca:

$$\phi \simeq 10^{-4}. \quad (4.5.38)$$

Se andiamo sulla superficie di stelle di neutroni, gli oggetti più densi in natura, allora:

$$\phi \simeq 1 \quad (4.5.39)$$

e ciò significa che in questo caso la deformazione è molto grande e non vale più il limite di campo debole.

4.5.1 Superamento del limite newtoniano

Facciamo ancora un'altra osservazione. La teoria che stiamo costruendo ci permette di superare il limite newtoniano. Ripercorrendo quanto abbiamo fatto nel limite newtoniano (campi deboli e moti lenti), abbiamo preso:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad (4.5.40)$$

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \ll 1 \quad (4.5.41)$$

fermandoci all'ordine $\mathcal{O}(h)$. Facendo il limite al primo ordine dell'equazione del moto in caduta libera, la Relatività Generale riproduce esattamente la meccanica newtoniana. Però potremmo andare avanti, fino all' n -esimo ordine e queste correzioni sono dette *post newtonian corrections*. Se ad esempio prendessimo anche termini di ordine $\mathcal{O}(vh)$, è chiaro che otterremo dei pezzi in più nell'equazione del moto, i quali sarebbero le correzioni relativistiche alla meccanica newtoniana.⁹

Possiamo però spingerci oltre. L'equazione (4.3.9) vale per un campo gravitazionale arbitrario ed è un'equazione che parte dalla Relatività Speciale, quindi deve essere valida anche per velocità comparabile alla velocità della luce. Potremmo per esempio prendere *campi deboli, ma moti arbitrari*, quindi anche corpi che si muovono con velocità comparabili con la velocità della luce. Un esempio in questa direzione è la propagazione della luce in un campo gravitazionale, fenomeno che porta ad effetti come la deflessione della luce. La luce stessa sente il campo gravitazionale, quindi la sua traiettoria non è rettilinea, ma segue una geodetica e questo determina come effetto che, attorno a un corpo massivo, si abbia una deflessione rispetto al cammino percorso in assenza di gravità; questo porta a effetti fisici osservati in astrofisica come effetto di *lente gravitazionale* (che vedremo nel seguito del corso).

Un altro caso è quello in cui si hanno *campi forti e moti lenti*. Un esempio è il moto attorno a un buco nero (che vedremo alla fine): nelle vicinanze di un buco nero il campo è molto più intenso dei campi di cui abbiamo parlato fino adesso, però il moto potrebbe non essere necessariamente relativistico.

Esiste anche il caso di *campi forti e moti relativistici*, in cui si colloca la propagazione della luce attorno o nelle vicinanze di un buco nero.

4.6 Dilatazione temporale gravitazionale

Vediamo ora l'effetto che ha la presenza di un campo gravitazionale sull'avanzamento di un orologio. In Relatività Speciale due osservatori inerziali hanno i due riferimenti temporali legati dalle trasformazioni di Lorentz. Ora, in presenza di gravità, non soltanto i riferimenti temporali sono influenzati eventualmente da moti relativi, ma anche dalla presenza del campo gravitazionale.

Mettiamoci in un campo gravitazionale arbitrario e consideriamo un orologio che ha un suo tasso di avanzamento in quel punto del campo gravitazionale. Noi sappiamo che, in virtù del principio di equivalenza, possiamo sempre trovare un sistema di coordinate in caduta libera nel quale valgono le leggi della Relatività Speciale. Quindi, il sistema di riferimento in caduta

⁹Sono correzioni che vengono applicate, per esempio, al calcolo dei moti nel sistema solare, quando c'è bisogno di estrema precisione o per fare test della teoria della relatività generale.

libera rappresenta una classe di osservatori tra loro collegati localmente da trasformazioni di Lorentz. Dal punto di vista geometrico è equivalente a dire che il piano tangente in P ammette una classe di sistemi di coordinate che sono tutti gli osservatori inerziali in RS. Nel sistema localmente inerziale nel campo gravitazionale, che usa delle coordinate $\xi^\alpha = (t_\xi, x^i)$ il tempo proprio è:

$$\Delta\tau = \left(-\eta_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{dt_\xi} \frac{d\xi^\beta}{dt_\xi} \right)^{1/2} dt_\xi \quad (4.6.1)$$

in cui t_ξ è il tempo coordinata dell'osservatore in caduta libera localmente inerziale. Tra tutti gli osservatori localmente inerziali in caduta libera ce n'è uno che è a riposo con l'orologio. In quel sistema di coordinate $\xi_r^\alpha = (t_\xi, x_r^i)$ avremo:

$$\Delta\tau = dt_{\xi_r}. \quad (4.6.2)$$

Nello stesso punto P però, in presenza di gravità, possiamo definire un sistema di coordinate generale $x^\mu = (t_x, x^i)$ sulla varietà curva. Possiamo definire $\Delta\tau$ rispetto a queste coordinate come:

$$\Delta\tau = \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt_x} \frac{dx^\nu}{dt_x} \right)^{1/2} dt_x \quad (4.6.3)$$

in cui dt_x è l'intervallo di tempo misurato da un osservatore in presenza di gravità in quel punto del campo gravitazionale. Tra tutti i possibili sistemi di coordinate in cui l'orologio può muoversi, considero quello a riposo $x_r^\mu = (t_{x_r}, x_r^i)$, per cui:

$$\Delta\tau = \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt_{x_r}} \frac{dx^\nu}{dt_{x_r}} \right)^{1/2} dt_{x_r} \quad (4.6.4)$$

$$= \left(-g_{00} - 2g_{0i} \frac{dx_r^i}{dt_r} - g_{ij} \frac{dx_r^i}{dt_r} \frac{dx_r^j}{dt_r} \right)^{1/2} dt_r \quad (4.6.5)$$

ma se non ci muoviamo rispetto il sistema di riferimento le velocità che compaiono sono nulle e arriviamo a:

$$\Delta\tau = (-g_{00})^{1/2} dt_{x_r}. \quad (4.6.6)$$

Per la trasformazione tra le coordinate locali e quelle generali nel punto P scelto il $\Delta\tau$ delle equazioni (4.6.1), (4.6.2), (4.6.3) e (4.6.6) sono equivalenti. Il tempo t_ξ (dell'equazione (4.6.1)) è quello che passa tra due tic dell'orologio visto da un osservatore in caduta libera, che si muove però con una velocità v - contenuta nelle derivate - rispetto all'osservatore in caduta libera, in quel punto a riposo con l'orologio (equazione (4.6.2)).

Invece t_x (dell'equazione (4.6.3)) è il tempo misurato tra due tic da un osservatore arbitrario in presenza di gravità e che si muove rispetto l'orologio; il tempo t_{x_r} (equazione (4.6.6)) è quello misurato da un osservatore arbitrario, in campo di gravità, a riposo con l'orologio.

Effettuando il confronto tra cosa dice un osservatore istantaneamente in caduta libera che misura il tempo tra due tic (4.6.1) e quello in presenza di gravità (4.6.6) si trova una differenza, che però non è evidenziabile. L'effetto dovuto al campo gravitazionale può essere messo in evidenza solo se confronto due punti diversi. La relazione tra t_{ξ_r} e t_{x_r} dipende dal campo attraverso g_{00} , tuttavia nel punto P per dire che il tempo tra due tic è alterato, dovrei usare un riferimento di tempo, ossia un altro orologio, ma che a sua volta, daltronde come tutti i fenomeni fisici e tutti i riferimenti di tempo in quel punto, è ugualmente alterato in quanto la gravità ha un effetto universale. Quindi tale alterazione può essere messa in evidenza semplicemente stando nel punto specificato.

Invece, il confronto tra due punti diversi del campo gravitazionale ci permette di accorgerci di questa alterazione. Cerchiamo di comprendere perché. Riconsideriamo le due espressioni (4.6.2) ed (4.6.6). Dato che il $\Delta\tau$ è lo stesso per definizione abbiamo:

$$dt_{x_r} = \frac{\Delta\tau}{(-g_{00})^{1/2}} = \frac{dt_{\xi_r}}{(-g_{00})^{1/2}} \quad (4.6.7)$$

per semplicità riferiamoci a dt_{ξ_r} come al tempo "intrinseco" dell'orologio - il tempo di riferimento di base - cioè quello che misura un osservatore in assenza di gravità essendo a riposo con quell'orologio. Dal confronto di due orologi diversi posti nei punti 1 e 2 del campo gravitazionale, si ha:

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{[-g_{00}(1)]^{1/2}}{[-g_{00}(2)]^{1/2}}. \quad (4.6.8)$$

Quindi, confrontando il tasso di avanzamento in due punti diversi di un campo gravitazionale, si trova una differenza tra i due. Se poi il dt è l'intervallo relativo alla frequenza legata all'emissione di radiazione:

$$dt = \frac{1}{\nu} \quad (4.6.9)$$

allora il confronto tra i due orologi si può esprimere anche come:

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1}. \quad (4.6.10)$$

In modo ancora più generale, possiamo prendere l'osservatore in moto in moto rispetto al processo fisico che produce un riferimento temporale e usare direttamente l'espressione (4.6.3). Quello che troviamo nella forma più generale è perciò:

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\left[-g_{\mu\nu} \frac{d\xi^\mu}{dt} \frac{d\xi^\nu}{dt}\right]_2^{1/2}}{\left[-g_{\mu\nu} \frac{d\xi^\mu}{dt} \frac{d\xi^\nu}{dt}\right]_1^{1/2}}. \quad (4.6.11)$$

Quest'ultima relazione è una diretta e immediata predizione della Relatività Generale, che è di nuovo diretta conseguenza del principio d'equivalenza: il tasso di avanzamento degli orologi in punti diversi del campo gravitazionale non è lo stesso se confrontiamo quello che succede in due punti diversi.

4.6.1 Esperimento di Pound e Rebka

Vediamo un'esempio fisico di quello detto riguardo la dilatazione temporale gravitazionale. L'esperimento di Pound e Rebka, fu l'effetto sperimentale che mise in evidenza il fatto che effettivamente il campo gravitazionale ha un effetto sulla frequenza o la lunghezza d'onda della radiazione.

L'esperimento prevedeva il seguente setup, raffigurato in figura 4.9. Alla base di una torre di altezza $h = 22.6$ m venne posizionata una sorgente che emette raggi gamma (14.4 keV), radiazione associata a una ben precisa transizione del ^{57}Fe . Alla cima della torre venne posizionato un rivelatore per misurare se la radiazione in arrivo avesse o meno la stessa lunghezza d'onda di quella di partenza. Per poter realizzare l'assorbimento, sempre con un rivelatore di ^{57}Fe , hanno dovuto utilizzare l'*effetto Mossbauer*, altrimenti lo shift sarebbe stato talmente piccolo da non esser misurabile.

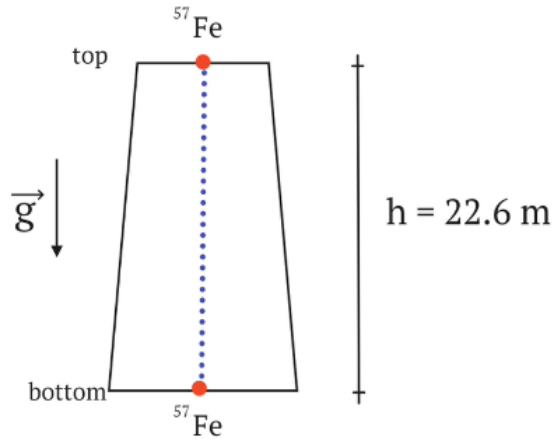


Figura 4.9: Set up sperimentale esperimento di Pound e Rebka.

Che cosa si aspettavano? Consideriamo innanzitutto il rapporto tra la frequenza nei due punti diversi (e stazionari) del campo gravitazionale terrestre (bottom e top):

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \left[\frac{g_{00}(2)}{g_{00}(1)} \right]^{1/2} \quad (4.6.12)$$

e dato che abbiamo visto con (4.5.35):

$$g_{00} = -1 - 2\phi \quad (4.6.13)$$

allora si ha:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{(1 + 2\phi_2)^{1/2}}{(1 + 2\phi_1)^{1/2}} \quad (4.6.14)$$

$$\sim \frac{1 + \phi_2}{1 + \phi_1} \quad (4.6.15)$$

$$= (1 + \phi_2)(1 - \phi_1) \quad (4.6.16)$$

$$= 1 + \phi_2 - \phi_1 \quad (4.6.17)$$

in cui: in (4.6.15) abbiamo troncato lo sviluppo in serie al primo ordine; in (4.6.16) abbiamo sviluppato il denominatore; in (4.6.17) trascuriamo il termine di ordine ϕ^2 .

Se indichiamo con $\Delta\phi_{21} = \phi_2 - \phi_1$, allora:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 + \Delta\phi_{21} \quad (4.6.18)$$

che possiamo riscrivere come:

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} = \phi_2 - \phi_1. \quad (4.6.19)$$

Questo è lo stesso risultato che avevamo trovato parlando del redshift gravitazionale (4.2.29), semplicemente applicando il principio di equivalenza alla condizione equivalente in cui ho campo gravitazionale oppure le due astronavi uniformemente accelerate.

Possiamo poi calcolare esattamente a quanto ammonta la variazione $\Delta\phi_{21}$. Questo dipende da chi indichiamo come punto 1 o punto 2 - che vuol dire avere un fotone che va verso l'alto o verso il basso. In ogni caso, sia:

$$\phi_b = -\frac{G M}{R} \quad (4.6.20)$$

$$\phi_t = -\frac{G M}{(R + h)} = -\frac{G M}{R(1 + h/R)} \sim -\frac{G M}{R} \left(1 - \frac{h}{R}\right). \quad (4.6.21)$$

Possiamo calcolare:

$$\frac{\nu_t - \nu_b}{\nu_b} = \phi_t - \phi_b \quad (4.6.22)$$

$$= -\frac{G M}{R} \left(1 - \frac{h}{R} - 1\right) \quad (4.6.23)$$

$$= \frac{h}{R} \frac{G M}{R} \quad (4.6.24)$$

$$= \frac{G M}{R^2} h \quad (4.6.25)$$

$$= g h > 0 \quad (4.6.26)$$

in cui vediamo comparire l'accelerazione di gravità g e otteniamo dunque un termine positivo. Analogamente possiamo invertire top e bottom:

$$\frac{\nu_t - \nu_b}{\nu_b} = \phi_b - \phi_t = -g h < 0. \quad (4.6.27)$$

Quindi concludiamo che: Quindi, un fotone (γ) che cerca di uscire (che sa-

γ :	top $\longrightarrow$ bottom	$\phi_t - \phi_b > 0$	$\nu_t > \nu_b$	blueshift
γ :	bottom $\longrightarrow$ top	$\phi_b - \phi_t < 0$	$\nu_t > \nu_b$	redshift

le) dal campo gravitazionale terrestre, viene spostato verso il rosso (redshift), cioè verso frequenze più basse. Se invece "cade" nel campo gravitazionale ha uno spostamento verso il blu (blueshift). In entrambi i casi però $\nu_t > \nu_b$, che possiamo anche vedere come $\Delta t_{top} < \Delta t_{bottom}$. Laddove Δt è maggiore, il tempo tra due tick dell'orologio è maggiore e ciò significa che il tempo scorre più lentamente, quindi nella parte bassa il tempo scorre più lentamente che in cima.

4.6.2 Il GPS

Vediamo adesso un altro esempio che ci mostra come l'effetto del redshift gravitazionale abbia al giorno d'oggi anche un'applicazione pratica. Consideriamo il caso di redshift gravitazionale su satellite.

Supponiamo di essere fermi a livello del suolo in un punto O e che esattamente sopra la nostra testa ci sia un satellite geostazionario. Sia v_s la velocità del satellite rispetto a questo sistema di riferimento ed h la sua altezza dal suolo. Siano inoltre ϕ_T il potenziale gravitazionale a livello terrestre e ϕ_S il potenziale gravitazionale a livello del satellite. Facciamo riferimento alla figura 4.10. Per quello che abbiamo detto i riferimenti temporali su satellite e a Terra non sono coincidenti, ma c'è un effetto di shift gravitazionale. Ciò è importante nelle applicazioni pratiche perché, sebbene lo trattiamo adesso in modo un po' idealizzato, è quello che abbiamo per il Global Positioning System (GPS). Infatti, il GPS funziona utilizzando almeno tre satelliti in orbita geostazionaria ed eseguendo delle triangolazioni, cioè delle misure di posizione relativa tra il satellite e la mia posizione a terra in modo tale da potermi posizionare sulla cartografia terrestre. La comunicazione con il satellite avviene mediante un segnale radio, cioè radiazione elettromagnetica, che viaggia a velocità c . Ma per poter trasformare i tempi di volo con posizioni spaziali è necessario essere d'accordo sul riferimento temporale a terra e in orbita. Infatti se non tenessimo conto del fatto che i due riferimenti temporali sono differenti, allora il GPS non funzionerebbe.

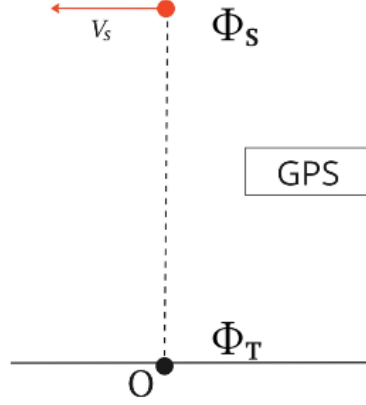


Figura 4.10

Questo effetto è implementato praticamente nel software che gestisce il sistema GPS, che utilizza quindi sia le correzioni dovute al fatto che il satellite si muove rispetto a voi, dunque di un effetto relativistico di RS, ma allo stesso tempo c'è anche un effetto di RG dovuto al fatto che sono in due quote diverse del campo gravitazionale. Questo fu testato in modo pratico quando fu acceso il sistema GPS. Una volta che fu messo in funzione, furono azzerate le correzioni date dalla Relatività Generale. Il sistema nel giro di qualche ora non era più in grado di posizionare gli oggetti sul terreno perché semplicemente stava accumulando un delay temporale, di cui non si teneva conto, che falsava i riferimenti. Questo è da un lato una dimostrazione della correttezza della RG e dall'altro un'applicazione pratica della stessa.

Però, come possiamo noi fare il calcolo? Usiamo le formule che abbiamo scritto in precedenza:

$$\frac{\nu_S}{\nu_T} = \frac{\Delta t_T}{\Delta t_S} \quad (4.6.28)$$

$$= \frac{\left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}\right)_S^{1/2}}{(-g_{00})_T^{1/2}} \quad (4.6.29)$$

in cui in (4.6.28) abbiamo usato il fatto che alla quota del terreno usiamo il sistema di riferimento rispetto al quale siamo fermi. Dunque avremo solo g_{00} . Sviluppiamo i termini separatamente nel limite di campo debole, ovvero per $\phi \ll 1$:

$$\left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}\right)_S^{1/2} = \left(-g_{00} - 2g_{i0} \frac{dx^i}{dt} - g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}\right)_S^{1/2} \quad (4.6.30)$$

$$(-g_{00})_T^{1/2} = (1 + 2\phi_T)^{1/2} = 1 + \phi_T + \mathcal{O}(\phi^2). \quad (4.6.31)$$

Vediamo che in (4.6.30) compaiono le velocità del satellite, che sono anch'esse quantità piccole perché il satellite non si muove a velocità relativistiche. In

un sistema di riferimento cartesiano abbiamo:

$$v_S^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \eta_{ij} v^i v^j \quad (4.6.32)$$

in cui tutte le componenti sono quantità piccole.

Abbiamo quindi diverse quantità piccole su cui fare lo sviluppo: il potenziale, la velocità del satellite e anche dei termini misti. Infatti:

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 - 2\phi \quad (4.6.33)$$

$$g_{i0} = \eta_{i0} + h_{i0} = h_{i0} \quad (4.6.34)$$

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij} \quad (4.6.35)$$

e ricordiamo che nell'approssimazione di campo debole $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Nell'espressione (4.6.30) possiamo riscrivere:

$$g_{i0} \frac{dx^i}{dt} = h_{i0} v^i \quad (4.6.36)$$

$$g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = (\eta_{ij} + h_{ij}) v^i v^j. \quad (4.6.37)$$

Fino a che ordine dobbiamo spingerci in ϕ e in v per essere consistenti? Osserviamo che dato che il satellite è in orbita vi deve essere una relazione tra il potenziale e la velocità orbitale. Infatti il potenziale a livello dell'orbita è:

$$\phi_S = -v_S^2 \quad (4.6.38)$$

ricordando che $\phi_S \sim 10^{-9}$, allora abbiamo che $v_S^2 \sim (10^{-4})^2$, dunque chiaramente non relativistico come ci aspettavamo. Se consideriamo una scala di ordini di grandezza da confrontare con 1, allora abbiamo: quindi se vogliamo

1	v_S	v_S^2	ϕ_S	$v_S \phi_S$	$v_S^2 \phi_S$
1	10^{-4}	10^{-9}	10^{-9}	...	...

prendere dei termini che sono di ordine 10^{-9} dobbiamo prendere i termini v_S^2 e trascurare quelli misti. Trovo quindi per il termine (4.6.30):

$$\left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)_S^{1/2} = (-g_{00} - v_S^2)_S^{1/2} \quad (4.6.39)$$

$$= (1 + 2\phi_S - v_S^2)^{1/2} \quad (4.6.40)$$

e facendo lo sviluppo rispetto ϕ_S e v_S^2 :

$$\left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)_S^{1/2} = 1 + \phi_S - \frac{1}{2} v_S^2. \quad (4.6.41)$$

Possiamo a questo punto calcolare il rapporto (4.6.28) tra i due riferimenti temporali:

$$\frac{\nu_S}{\nu_T} = \frac{1 + \phi_S - \frac{1}{2}v_S^2}{1 + \phi_T} \quad (4.6.42)$$

$$= \left(1 + \phi_S - \frac{1}{2}v_S^2\right) (1 - \phi_T) \quad (4.6.43)$$

$$= 1 + (\phi_S - \phi_T) - \frac{1}{2}v_S^2 \quad (4.6.44)$$

per cui:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_T} = (\phi_S - \phi_T) - \frac{1}{2}v_S^2 \quad (4.6.45)$$

dunque vediamo che c'è uno shift delle frequenze dei tempi, dovuto a due effetti:

- Il pezzo $(\phi_S - \phi_T)$ è un effetto di *Relatività Generale* pura, dovuto semplicemente al fatto che siamo in due punti diversi del campo gravitazionale.
- Il pezzo $\frac{1}{2}v_S^2$ è un effetto di *Relatività Speciale*, ed è semplicemente l'effetto Doppler relativistico del sistema.

Ricordiamo, infatti, che il rapporto tra la frequenza osservata, e quella emessa, secondo l'effetto Doppler è:

$$\frac{\nu_0}{\nu} = (1 + v_r) \gamma^{-1} \quad (4.6.46)$$

$$= (1 + v_r)(1 - v^2)^{-1/2} \quad (4.6.47)$$

in cui indichiamo con v_r la velocità relativa nella direzione che ci congiunge al satellite. Siccome il satellite è geostazionario, cioè sta sempre sopra la nostra testa (ruota con lo stesso periodo di rotazione delle Terra), esso ha solo velocità trasversale alla direzione che ci congiunge. Quindi $v_r = 0$, e $v = v_S$. Quindi è presente un effetto Doppler dovuto al fatto che c'è un moto trasverso rispetto alla congiungente. Dunque si ha semplicemente:

$$\frac{\nu_S}{\nu_T} = (1 - v_S^2)^{1/2} \underset{v \ll c}{=} 1 - \frac{1}{2}v_S^2 \quad (4.6.48)$$

$$\implies \frac{\Delta\nu}{\nu_T} = -\frac{1}{2}v_S^2 \quad (4.6.49)$$

esattamente come nel caso precedente. Quindi, il formalismo che abbiamo scritto è sia relativistico, in senso di velocità arbitrarie, che relativistico in presenza di gravità. Se sostituiamo i numeri, possiamo stabilire quanto è

grande tale effetto. Presi:

$$\phi_T = -\frac{G M}{R} \quad (4.6.50)$$

$$\phi_S = -v_S^2 = -\frac{G M}{R + h} \quad (4.6.51)$$

e i valori:

$$R = 6400 \text{ km} \quad (4.6.52)$$

$$h = 5.6 \cdot R \quad (4.6.53)$$

possiamo riscrivere (4.6.45):

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{G M}{2 R_T} \left(\frac{3 R_T}{R + h} - 2 \right) \simeq -3 \cdot 10^{-10} \left(\frac{3 R_T}{R + h} - 2 \right). \quad (4.6.54)$$

Vediamo quindi che l'effetto di shift della frequenza della radiazione è molto piccolo. Inoltre, il termine tra parentesi può cambiare segno a seconda del valore di h . Per h piccolo il termine che tiene conto dell'effetto RG è trascurabile rispetto a quello di RS. Al crescere di h i due termini diventano confrontabili e lo shift può quindi risultare negativo o positivo. L'effetto totale è:

blueshift	$h > R_T/2$
redshift	$h < R_T/2$

Quello appena fatto è un calcolo puramente accademico. Per stare in orbita geostazionaria infatti $h = 5.6 \cdot R$ e ciò determina uno shift verso il blu. Siccome poi questo effetto è progressivo, cioè man mano che passa il tempo gli orologi si shiftano sempre di più, calcoliamo allora la quantità di tempo (guadagnata o persa) rispetto al tempo stesso:

$$\frac{\Delta t}{t} = -\frac{\Delta\nu}{\nu} \quad (4.6.55)$$

calcolando il contributo dovuto all'effetto di RS, otteniamo:

$$\left. \frac{\Delta t}{t} \right|_{RS} = \frac{G M}{2 R} \left(\frac{R}{R + h} \right) = 4 \text{ } \mu\text{s/giorno.} \quad (4.6.56)$$

L'effetto della RG è:

$$\left. \frac{\Delta t}{t} \right|_{RG} = \frac{G M}{2 R} \left[2 \left(\frac{R}{R + h} - 1 \right) \right] = -50 \text{ } \mu\text{s/giorno.} \quad (4.6.57)$$

L'effetto totale di variazione della sincronizzazione degli orologi è quindi:

$$\frac{\Delta t}{t} = -46 \mu\text{s}/\text{giorno}. \quad (4.6.58)$$

Tuttavia poiché per fare misure di distanza si utilizza la luce che viaggia a una velocità di 300.000 km/s, la differenza di distanza corrispondente a questo effetto è:

$$\Delta d = c\Delta t \quad (4.6.59)$$

$$\approx 50 \cdot 10^{-6} \text{ s} \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ km s}^{-1} \quad (4.6.60)$$

$$= 15 \text{ km}. \quad (4.6.61)$$

Questo effetto è stato provato e rapidamente il posizionamento sul terreno perde di precisione fino a non funzionare più. Quindi l'effetto è reale e al giorno d'oggi è anche utilizzato per una ampia serie di applicazioni pratiche (oltre che per il GPS).

Capitolo 5

Fondamenti della Relatività Generale

Discutiamo in questo capitolo (che forse risulterà un po' lungo) i principi fondativi di questa nuova teoria della gravità che stiamo costruendo.

5.1 Principio di covarianza generale

Abbiamo discusso un metodo che utilizza il principio di equivalenza per determinare l'effetto della gravità su un sistema fisico. In particolare:

- Abbiamo scritto l'equazione per quel sistema fisico valido in relatività speciale.
- Abbiamo effettuato una trasformazione di coordinate, in un punto P , tra le coordinate di un spazio-tempo piatto di Minkowski e un sistema di coordinate generico su una varietà curva, ovvero in presenza di gravità. Abbiamo potuto fare questo in quanto il principio di equivalenza ci dice che in un campo gravitazionale arbitrario, in ogni punto localmente, possiamo trovare un sistema di coordinate in caduta libera, localmente inerziali, in cui valgono le leggi della Relatività Speciale.

Abbiamo quindi implementato il principio di equivalenza facendo esattamente quello che ci dice. Nel caso di una particella in caduta libera, mettendoci nel punto P e definendo un sistema di coordinate di un osservatore inerziale in RS, l'equazione del moto di una particella libera è:

$$x_P^\alpha \quad : \quad \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = 0 \quad (5.1.1)$$

facendo la trasformazione di coordinate in P , dal sistema ξ_P^α ad uno generico x^μ , che descrive un osservatore in presenza di gravità, siamo stati in grado

di scrivere l'equazione del moto:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + T^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0. \quad (5.1.2)$$

Il principio di equivalenza ci dice che in ogni punto di un campo gravitazionale arbitrario io posso fare questo, e quindi l'equazione (5.1.2) vale in ogni punto per costruzione. Risulta evidente che per un sistema fisico arbitrario potrebbe non essere facile fare questo passaggio ogni volta; si può però utilizzare una riformulazione del principio di equivalenza in una forma che ci permette di esprimere immediatamente l'effetto della gravità su un sistema fisico, se conosciamo come scrivere il comportamento di quel sistema in assenza di gravità. Riformuliamo il principio di equivalenza in una sua forma equivalente che chiamiamo **principio di covarianza generale** (PCG). Il principio dice che:

Un'equazione che descrive un sistema fisico in presenza di un campo gravitazionale arbitrario è l'equazione corretta se sono soddisfatte due condizioni:

- *l'equazione riproduce la corretta equazione in assenza di gravità, cioè riproduce le equazioni scriviamo in Relatività Speciale.*
- *L'equazione è generalmente covariante. Per **generalmente covariante** si intende che mantiene invariata la sua forma quando si effettua una trasformazione generale di coordinate (TGG) $x \rightarrow x'$.*

Il principio di covarianza generale contiene la stessa informazione del principio di equivalenza. Supponiamo di essere in un campo gravitazionale arbitrario e supponiamo di avere un'equazione come (5.1.2), come facciamo ad assicurarci che questa è la corretta equazione del sistema fisico che stiamo trattando, cioè di un corpo in caduta libera?

Chiaramente dobbiamo dimostrare che l'equazione è generalmente covariante. Se l'equazione è generalmente covariante, significa che è invariante in forma per trasformazioni generali di coordinate, qualunque trasformazione di coordinate io faccia. Notiamo che effettivamente nel caso di (5.1.2) sia che la scriviamo con le coordinate dell'osservatore x^μ , o che la scriviamo con le coordinate x'^μ , essa risulta sempre scritta nello stesso modo; il che vuol dire che è generalmente covariante. La covarianza generale non è rispettata (in genere) da tutte le equazioni.

Ora, se l'equazione è generalmente covariante, vuol dire che scritta in quella forma vale in tutti i sistemi di coordinate. Il principio di equivalenza però mi dice che in ogni punto del campo gravitazionale, è sempre possibile mettersi nel sistema di coordinate in caduta libera, tale che nell'intorno di quel punto, le equazioni che descrivono il sistema siano quelle della Relatività

Speciale. Dobbiamo ancora verificare che essa riproduca le corrette equazioni del moto della RS.

Si noti che, data un'equazione generalmente covariante, per verificare se sia la corretta equazione in assenza di gravità, è sufficiente una semplice operazione. Infatti, spegnere l'effetto della gravità significa mandare:

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \eta_{\alpha\beta} \quad , \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \longrightarrow 0 \quad (5.1.3)$$

cioè il tensore metrico nel tensore di Minkowski e la connessione a 0. Infatti, ricordando che la connessione è costruita a partire dalle derivate del tensore metrico:

$$\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda}) \xrightarrow{\text{Minkowski}} 0 \quad (5.1.4)$$

poiché nel set di coordinate di Minkowski g è costante.

Quindi, il principio di covarianza generale contiene la stessa informazione del principio di equivalenza, però consente di trovare un modo per scrivere le corrette equazioni in presenza di gravità a partire da quelle in assenza di gravità. In altri termini, per scrivere le equazioni in presenza di gravità, sarà sufficiente conoscerle in assenza di gravità, e promuoverle a generalmente covarianti sotto l'azione di una trasformazione generale di coordinate - non di una trasformazione di Lorentz (come per la RS), cioè tra osservatori inerziali, ma generale!

Quindi, la covarianza generale non ha in sé un significato fisico. Il significato fisico che ha il principio di covarianza generale sta nell'affermazione degli effetti della gravità sul sistema fisico. Noto il comportamento del sistema fisico in assenza di gravità, utilizzando questo principio noi riusciamo ad affermare qual è l'effetto della gravità sul sistema stesso.

Se vogliamo vedere lo stesso cosa dal punto di vista geometrico, queste considerazioni mostrano come la Relatività Generale si configuri come la geometria di una varietà curva che ammette in ogni suo punto uno spazio tangente minkowskiano - quindi è di fatto lo stesso contenuto del principio di equivalenza visto in modo geometrico.

Il principio di covarianza generale, in quanto principio attraverso il quale affermiamo il comportamento di un sistema fisico sotto l'azione di una interazione, è quello che va sotto il nome di **simmetria dinamica**. Utilizzando il principio di covarianza generale è possibile affermare gli effetti della gravità, su qualsiasi sistema fisico che si voglia descrivere, e risulta sostanzialmente l'analogo del *principio di invarianza di Gauge locale* dell'elettromagnetismo. L'invarianza di gauge locale è il principio, il metodo, attraverso il quale si esprimono gli effetti del campo elettromagnetico su un sistema fisico.

Torneremo a considerare le analogie tra la gravità ed elettromagnetismo in un altro momento, ma iniziamo a notare che entrambi sono basati sulla

esistenza di una simmetria dinamica che è esprimibile attraverso il principio di invarianza. Nel caso dell'elettromagnetismo si ha invarianza della teoria sotto l'azione di trasformazione di gauge locali, mentre la gravità afferma gli effetti della gravità sul sistema fisico attraverso il principio di covarianza generale.

Come visto in Relatività Speciale il formalismo che ci serve per esprimere il principio di covarianza generale è il formalismo tensoriale, che analizzeremo nel dettaglio nella prossima sezione.

5.2 Tensori

Vediamo in questa sezione tutta una trattazione, sufficientemente dettagliata, del calcolo tensoriale, ma è doveroso anche segnalare il fatto che l'Appendice C sia molto importante per la completezza della conoscenza di tale argomento. Consiglio pertanto di leggere l'Appendice una volta terminato il capitolo §5, ovvero quello corrente.

Per poter esprimere in modo compiuto il principio di covarianza generale è conveniente definire un opportuno linguaggio matematico che implementi in modo automatico il concetto di covarianza generale o di invarianza in forma sotto l'azione di trasformazioni generali di coordinate. Il linguaggio che stiamo cercando è quello del **calcolo tensoriale**.

Questo è identico a quanto fatto in RS per esprimere la covarianza delle leggi fisiche. Infatti, per implementare il principio di RS, cioè il fatto che tutti gli osservatori inerziali danno la stessa descrizione di tutti i fenomeni fisici, meccanici ed elettromagnetici, avevamo definito gli osservatori inerziali come sistemi di coordinate. Abbiamo osservatori che usano un sistema di coordinate x^μ e altri che usano x'^μ , legati da trasformazioni di Lorentz, cioè trasformazioni di coordinate a coefficienti costanti, tali da far sì che la velocità della luce tra i due sistemi di coordinate a velocità relativa costante, sia indipendente dal sistema di coordinate. Le trasformazioni di Lorentz sono trasformazioni del tipo:

$$x^\mu \xrightarrow{\text{T.L.}} x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (5.2.1)$$

e la loro forma è fissata dalla richiesta del secondo postulato della RS. Per fare in modo che una equazione, ad esempio quella del moto, fosse la stessa in tutti i sistemi di coordinate, avevamo definito degli oggetti (vettori e tensori) che avessero una particolare legge di trasformazione sotto l'effetto delle trasformazioni di Lorentz. Dalla trasformazione del differenziale delle coordinate:

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) dx^\nu \quad (5.2.2)$$

avevamo definito un vettore controvariante, un oggetto con indice in alto che, quando cambio sistema di coordinate si trasforma esattamente come il differenziale delle coordinate:

$$v^\alpha \xrightarrow{\text{T.L.}} v'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta v^\beta \quad (5.2.3)$$

e poi un vettore covariante, oggetto con l'indice in basso, che trasforma con la matrice inversa:

$$v_\alpha \xrightarrow{\text{T.L.}} v'_\alpha = \Lambda_\alpha^\beta v_\beta \quad (5.2.4)$$

e infine il tempo proprio (invariante):

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (5.2.5)$$

Facendo questo in RS, avevamo ottenuto che un'equazione del tipo:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = \delta^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} \quad (5.2.6)$$

cioè come uguaglianza tra tensori, si scrive sempre allo stesso modo in tutti i sistemi di coordinate. Si dice dunque covariante per trasformazione di Lorentz.

Adesso, nella nostra nuova teoria della gravità, non abbiamo più osservatori collegati da trasformazioni di Lorentz, perché in presenza di gravità, possiamo definire osservatori inerziali solo localmente e non sull'intera varietà dello spazio-tempo. Ogni osservatore avrà un suo sistema di coordinate x^μ . Possiamo definire degli oggetti, vettori o tensori, non più sotto l'azione delle trasformazioni di Lorentz, ma sotto l'azione delle trasformazioni generali di coordinate. Per una trasformazione generale di coordinate:

$$\text{TGC:} \quad x^\mu \longrightarrow x'^\mu \quad \begin{array}{ll} x^\mu = x^\mu(x') & \text{trasformazione} \\ x'^\mu = x'^\mu(x) & \text{trasformazione inversa.} \end{array} \quad (5.2.7)$$

Il differenziale delle coordinate lo scriviamo come:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (5.2.8)$$

da cui vediamo che il legame tra i differenziali delle coordinate è ottenuto attraverso le derivate parziali della trasformazione di coordinate.

Definiamo allora degli oggetti che hanno proprietà di trasformazione basate su questa semplice osservazione. Chiamiamo **scalari** gli oggetti che sono invarianti per (5.2.7):

$$\phi = \phi' \quad (5.2.9)$$

e possono ad esempio essere i numeri puri o il tempo proprio $d\tau^2$.

Chiamiamo **vettore controvariante** un oggetto, che per convenzione ha l'indice alto, che si trasforma come il differenziale delle coordinate:

$$v'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} v^{\nu}. \quad (5.2.10)$$

Un esempio di vettore controvariante è banalmente il differenziale delle coordinate dx^{μ} .

Chiamiamo **vettore covariante** un oggetto, che per convenzione ha l'indice basso, che si trasforma come:

$$u'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} u_{\nu}. \quad (5.2.11)$$

Un esempio di vettore controvariante è la derivata di uno scalare. Infatti abbiamo:

$$\partial'_{\mu} \phi' = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial \phi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \phi. \quad (5.2.12)$$

Facciamo attenzione solo ad una cosa. La derivata di una funzione scalare è un vettore covariante per trasformazioni generali di coordinate, mentre la derivata di un vettore, o più genericamente di un tensore, non è a sua volta un tensore. Lo era per trasformazioni di Lorentz, ma non lo sarà più per trasformazioni generali di coordinate.

Salendo di rango rispetto i vettori, chiamiamo **tensore di rango** (k, l) un oggetto con k indici alti, l bassi e che per ognuno di essi si trasforma secondo la rispettiva regola di trasformazione. Facciamo un esempio; supponiamo di avere un tensore:

$$T^{\mu}_{\nu}{}^{\lambda} \longrightarrow T'^{\mu}_{\nu}{}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} T^{\rho}_{\sigma}{}^{\kappa} \quad (5.2.13)$$

che è un tensore misto; potremmo anche avere un tensore di rango $(k, 0)$, che è tutto controvariante, un tensore di rango $(0, l)$ tutto covariante.

Vediamo nella prossima sezione uno dei tensori fondamentali della nostra nuova teoria, il tensore metrico.

5.2.1 Tensore metrico

Un oggetto importante nella descrizione della geometria differenziale, che ora vediamo essere effettivamente un tensore secondo la definizione che abbiamo dato, è il **tensore metrico**. Ha un'importanza fondamentale perché è l'oggetto attraverso cui si descrivono le proprietà metriche della varietà e per spazi e tempi, quindi in RG, contiene l'informazione del campo gravitazionale. Ricordando l'applicazione del principio di equivalenza alla equazione del corpo in caduta libera (la sezione §4.6) abbiamo visto che il tensore metrico

$g_{\mu\nu}$ nel punto P era definito attraverso, dal tensore metrico di Minkowski, attraverso la trasformazione di coordinate locale:

$$g_{\mu\nu}^{(x)} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad (5.2.14)$$

in cui ξ^α è il sistema di coordinate locali nel punto P . Possiamo poi replicare questa scrittura e scriverla in ogni punto P della varietà. Si noti che nella scrittura precedente si è scritto $g_{\mu\nu}$ nel punto P usando le coordinate x^μ , ma avremmo potuto usare un sistema di coordinate x' (o x'') sempre allo stesso modo, usando la relazione che ho tra le ξ e le x' (x'').

Consideriamo la relazione tra $g_{\mu\nu}^{(x)} \equiv g_{\mu\nu}$, scritto nel primo sistema di coordinate, e $g_{\mu\nu}^{(x')} \equiv g'_{\mu\nu}$, scritto nel secondo sistema di coordinate curvilineare. Nel secondo sistema di coordinate abbiamo:

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\nu} \quad (5.2.15)$$

e facendo la trasformazione di coordinate $x' \rightarrow x$ diventa:

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \quad (5.2.16)$$

in cui possiamo ritrovare (5.2.14):

$$g'_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}. \quad (5.2.17)$$

Quest'ultima espressione dice che $g'_{\mu\nu}$ si ottiene da $g_{\mu\nu}$ attraverso la regola di trasformazione di un tensore di rango 2 controvariante. Quindi il tensore metrico è un tensore per trasformazione generale di coordinate di rango 2.

Facciamo una considerazione sull'oggetto che permette di ottenere la trasformazione. Il vettore controvariante si trasforma con:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

che sono 16 quantità, che possiamo infilare in una matrice A , il cui elemento $(A)_{\mu\nu}$ è proprio:

$$(A)_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad (5.2.18)$$

gli indici sono in basso, ma non hanno nessuna proprietà di trasformazione in questo discorso, sono solo due etichette per indicare la posizione nella matrice A 4x4. Per il vettore covariante, invece abbiamo:

$$(B)_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma}. \quad (5.2.19)$$

Proviamo a fare il prodotto matriciale tra A e B e consideriamo l'elemento di matrice $(AB)_{\alpha\beta}$. Il prodotto matriciale è:

$$(AB)_{\alpha\beta} = \sum_{\mu} A_{\alpha\mu} B_{\mu\beta} = \sum_{\mu} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \quad (5.2.20)$$

$$= \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} = \delta_{\alpha,\beta} = (\mathbb{1})_{\alpha\beta}. \quad (5.2.21)$$

Otteniamo dunque la proprietà matriciale:

$$AB = \mathbb{1} \implies B = A^{-1}. \quad (5.2.22)$$

Dunque, abbiamo visto un'importantissima proprietà, ovvero che il vettore controvariante e covariante trasformano con una legge di trasformazione inversa l'una rispetto all'altra.

Noi, all'inizio della sezione, abbiamo dimostrato la natura tensoriale del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ partendo dalla relazione (5.2.14), ma avremmo potuto farlo anche usando l'invariante $d\tau^2$. Abbiamo:

$$d\tau^2 = d\tau'^2 \quad (5.2.23)$$

$$-g'_{\rho\sigma} dx'^{\rho} dx'^{\sigma} = -g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (5.2.24)$$

$$= -g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} dx'^{\rho} dx'^{\sigma} \quad (5.2.25)$$

da cui effettivamente vediamo che $g'_{\rho\sigma}$ si trasforma esattamente come un tensore con due indici controvarianti.

Facciamo altre considerazioni, andando a studiare le proprietà degli **autovalori** del tensore metrico, i quali determinano il tipo di geometria che abbiamo.¹ Vediamo la relazione che c'è tra la metrica di Minkowski e il tensore metrico dal punto di vista degli autovalori. In ogni punto del campo gravitazionale possiamo scrivere:

$$g_{\mu\nu}^{(x)} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \quad (5.2.26)$$

e possiamo riorganizzare nei prodotti di ogni addendo (indici uguali sono sommati) le quantità come:

$$g_{\mu\nu}^{(x)} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}. \quad (5.2.27)$$

¹Infatti sappiamo già che una varietà quadridimensionale con quattro autovalori tutti positivi (spazio euclideo) è diversa da una varietà quadridimensionale con tre autovalori positivi e uno negativo (spazio di Minkowski), uno lo spazio che generalizza, in caso curvo, Euclide di quattro dimensioni, il secondo, quello con tre e uno, è uno spazio genericamente curvo, ma che generalizza lo spazio tempo di Minkowski.

Possiamo definire una matrice G i cui elementi contengono le funzioni $g_{\mu\nu}$ del tensore metrico e una matrice N in cui elementi contengono il tensore metrico di Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$:

$$G : \quad (G)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad (5.2.28)$$

$$N : \quad (N)_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad (5.2.29)$$

Definiamo anche la matrice D e la sua trasposta, i cui elementi sono:

$$D : \quad (D)_{\alpha\mu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \quad (5.2.30)$$

$$(D)_{\mu\alpha}^T = D_{\alpha\mu} \quad (5.2.31)$$

così possiamo scrivere (5.2.27) come:

$$(G)_{\mu\nu} = (D)_{\mu\alpha}^T (N)_{\alpha\beta} D_{\beta\nu} = D_{\alpha\mu} D_{\beta\nu} N_{\alpha\beta}. \quad (5.2.32)$$

Quest'ultima è una relazione che esprime il prodotto matriciale righe per colonne di tre matrici (somma su α e su β). Svolgendo il conto infatti abbiamo:

$$(D)_{\mu\alpha}^T (N)_{\alpha\beta} D_{\beta\nu} = (D)_{\mu\alpha}^T (ND)_{\alpha\nu} \quad (5.2.33)$$

$$= (D^T N D)_{\mu\nu} \quad (5.2.34)$$

da cui:

$$G = D^T N D \quad (5.2.35)$$

che ci fornisce una particolare relazione tra G ed N , cioè tra la matrici che contengono il tensore metrico nel caso curvo e nel caso piatto.

La scrittura (5.2.35) è utile perché esiste un teorema noto come **teorema di Sylvester**, che si applica alla teoria delle matrici e che ora utilizzeremo (senza dimostrarlo).

Teorema 3 *Per due matrici G ed N in cui G si ottiene da N attraverso la trasformazione matriciale espressa in (5.2.35), allora il numero di autovalori rispettivamente positivi, negativi e nulli della matrice N e della matrice G è lo stesso.*

Se $N : (3+, 1-) \implies G : (3+, 1-)$. La trasformazione in (5.2.35) va anche sotto il nome di **trasformazione di congruenza**. Il teorema di Sylvester dice che sotto l'effetto di una trasformazione di congruenza il numero di autovalori positivi negativi e nulli non cambia. Quindi, questo vuol dire che se $\eta_{\alpha\beta}$ è $(3, 1)$, nel senso di autovalori, anche $g_{\mu\nu}$ è $(3, 1)$. Dal punto di vista geometrico, preso uno spazio curvo e il piano tangente il numero di autovalori positivi negativi e nulli rimane invariato in ogni punto.

Parliamo un attimo dell'inverso del tensore metrico. Possiamo definire un oggetto g , con degli indici alti, definito come:

$$g^{\lambda\mu} : \quad g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta^\lambda{}_\nu \quad (5.2.36)$$

che in termini matriciali diventa:

$$(\hat{G} G) = \mathbb{1}. \quad (5.2.37)$$

Dimostriamo che $g^{\lambda\mu}$ sia effettivamente un tensore di rango $(2, 0)$. Consideriamo la definizione di tensore metrico inverso in un sistema primo:

$$g'^{\lambda\mu} g'_{\mu\nu} = \delta^\lambda{}_\nu \quad (5.2.38)$$

e mostriamo che l'oggetto:

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma} \quad (5.2.39)$$

ha la proprietà cercata, cioè che contratto con $g'_{\mu\nu}$ dà la δ . Se così fosse allora avremmo:

$$g'^{\lambda\mu} \equiv \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma} \quad (5.2.40)$$

cioè che $g'^{\lambda\mu}$ trasforma come un tensore di rango 2 controvariante. Dimostriamo che effettivamente è così:

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma} g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\nu} g_{\kappa\eta} \quad (5.2.41)$$

$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\nu} g^{\rho\sigma} \delta^\kappa{}_\sigma g_{\kappa\eta} \quad (5.2.42)$$

$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\nu} \delta^\rho{}_\eta \quad (5.2.43)$$

$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\nu} \quad (5.2.44)$$

$$= \delta^\lambda{}_\nu \quad (5.2.45)$$

trovando la $\delta^\lambda{}_\nu$ significa proprio che l'oggetto di cui siamo partiti è proprio $g'^{\lambda\mu}$ e vale (5.2.40).

Si osservi che non basta avere degli indici per essere un tensore! Mentre uno scalare è un tensore di rango 0 e un vettore è un tensore di rango 1, vedremo per esempio che il simbolo di Christoffel $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ non è un tensore.

L'importanza di aver definito i tensori è che essi ci permettono di implementare la covarianza generale di un'equazione. Possiamo definire una

classe di equazioni generalmente covarianti esprimendole come eguaglianza tra tensori dello stesso rango, cioè con lo stesso numero di indici alti e bassi:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = \delta^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} \quad (5.2.46)$$

$$O^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = 0. \quad (5.2.47)$$

Un'uguaglianza tra tensori rimane la stessa in tutti i sistemi di coordinate o, alternativamente, l'annullarsi di un tensore è un'affermazione covariante perché se un tensore è uguale al tensore nullo abbiamo comunque un'eguaglianza tra tensori. Una dimostrazione del fatto che (5.2.46) (che contiene poi anche la seconda) sia effettivamente covariante è molto semplice. Consideriamo due tensori di rango (2, 1). Siano A e B due tensori nel sistema di coordinate x^μ , tali che:

$$A^\mu{}_\nu{}^\lambda = B^\mu{}_\nu{}^\lambda \quad (5.2.48)$$

trasformiamo:

$$A'^\rho{}_\sigma{}^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} A^\rho{}_\sigma{}^\mu \quad (5.2.49)$$

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} B^\rho{}_\sigma{}^\mu \quad (5.2.50)$$

$$= B'^\rho{}_\sigma{}^\mu \quad (5.2.51)$$

in cui abbiamo semplicemente sfruttato il fatto che nel primo riferimento valga (5.2.48) e la relazione di trasformazione di $B^\rho{}_\sigma{}^\mu$.

Però ancora attenzione, il fatto che gli oggetti siano tensori non è condizione sufficiente, infatti, le equazioni tensoriali devono essere scritte nel modo corretto, cioè con lo stesso numero di indici alti e bassi. Ad esempio, l'equazione:

$$T^{\mu\nu} = 5 \quad (5.2.52)$$

non è un'equazione tensoriale. Tale equazione sta dicendo che nel sistema di riferimento in cui ci siamo messi tutte le 16 componenti di questo oggetto sono uguali a 5. Se facciamo la trasformazione di coordinate per spostarci in un altro sistema di coordinate le componenti $T^{\mu\nu}$ saranno delle combinazioni di questi "5" in base alle derivate parziali. Analogamente, non è un'equazione tensoriale:

$$v^\mu = u_\mu \quad (5.2.53)$$

se ciò può verificarsi in un certo sistema di coordinate, in un altro sistema di coordinate i due oggetti trasformano in modo diverso e non saranno più uguali.

5.2.2 Simbolo di Kronecker

Anche la δ^λ_ν si può vedere come tensore $(1, 1)$. Se consideriamo la combinazione:

$$\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \delta^\lambda_\nu = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x'^\sigma} = \delta^\rho_\sigma \quad (5.2.54)$$

guardata così possiamo dire che confrontando il primo e l'ultimo termine, la possiamo vedere come due δ in sistemi differenti legati da una trasformazione di coordinate. In particolare, i valori di questo tensore rimangono sempre gli stessi (1 sulla diagonale), mentre per i tensori generici la trasformazione è molto più complessa. Si tratta di un caso particolare, infatti solo gli scalari, il tensore nullo (in qualunque numero di dimensioni) e il simbolo di Kronecker sono gli unici tensori le cui componenti sono le stesse in tutti i sistemi di coordinate.

5.2.3 Algebra tensoriale

I tensori soddisfano un'algebra, quindi valgono:

- **Combinazione lineare.** La combinazione lineare di tensori dello stesso rango è ancora un tensore dello stesso rango. Infatti, non posso sommare tensori di rango diverso tra loro.

$$a A^\alpha_\beta + b B^\alpha_\beta = T^\alpha_\beta.$$

- **Prodotto diretto.** Il prodotto diretto di un tensore di rango (k, l) con un altro tensore di rango (k', l') da un tensore di rango $(k + k', l + l')$. Dunque, il prodotto diretto aumenta il rango del tensore.

$$A^\mu_\nu B^\rho = T^\mu_\nu{}^\rho.$$

- **Contrazione di indici.** L'operazione di contrazione degli indici riduce il rango da (k, l) a $(k - 1, l - 1)$:

$$T^\mu_\nu{}^{\rho\kappa} \longrightarrow T^\mu_\nu{}^{\rho\nu} = T^{\mu\rho}. \quad (5.2.55)$$

Dimostriamo la relazione (5.2.55). Consideriamo:

$$T^{\mu\rho} = T^{\mu\nu}{}^{\rho\nu} \quad (5.2.56)$$

$$= \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta} T^\alpha_\beta{}^{\gamma\delta} \quad (5.2.57)$$

$$= \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma} \delta^\beta_\delta T^\alpha_\beta{}^{\gamma\delta} \quad (5.2.58)$$

$$= \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma} T^{\alpha\gamma} \quad (5.2.59)$$

ci accorgiamo dunque che i due indici che sono rimasti liberi trasformano proprio come due indici controvarianti.

Vediamo le conseguenze della proprietà (5.2.55). Consideriamo un vettore controvariante ed effettuiamo l'operazione di contrazione:

$$v^\mu : \quad g_{\mu\nu} v^\nu = v_\mu \quad (5.2.60)$$

$$(0, 2) \times (1, 0) = (1, 2) \longrightarrow (0, 1). \quad (5.2.61)$$

Questa operazione prende quindi un vettore controvariante e lo manda in una sua rappresentazione covariante attraverso la metrica della varietà. Tale operazione è detta **abbassamento dell'indice** (è solo il tensore metrico, per definizione, che fa questo). Allo stesso modo se consideriamo un vettore covariante e lo contraiamo con il tensore metrico inverso:

$$u_\mu : \quad g^{\mu\nu} u_\nu = u^\mu \quad (5.2.62)$$

otteniamo una sua versione controvariante. Questa è l'operazione di **innalzamento dell'indice**. Facendo una concatenazione:

$$v^\mu \longrightarrow v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu \longrightarrow v^\rho = g^{\rho\mu} v_\mu = g^{\rho\mu} g_{\mu\nu} v^\nu = \delta^\rho_\nu v^\nu = v^\rho \quad (5.2.63)$$

ritorniamo di nuovo al vettore originale. L'operazione di innalzamento e abbassamento dell'indice ci ridefinisce le componenti del vettore. In uno spazio piatto avevamo visto che:

$$v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3) \xrightarrow{\eta_{\alpha\beta}} v_\mu = (-v_0, v_1, v_2, v_3). \quad (5.2.64)$$

Ora, nello spazio curvo, sarà in generale più complicato perché abbiamo una trasformazione arbitraria e di conseguenza le componenti originali possono essere mescolate in tutte le componenti nuove.

Con il tensore metrico e i vettori possiamo anche definire alcune operazioni. Dati i due vettori controvarianti u^μ , v^μ , si definisce **prodotto scalare**:

$$g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = u^\mu v_\mu \quad (5.2.65)$$

Tale oggetto sarebbe un tensore di rango 4, ma con le contrazioni degli indici diventa uno scalare, e quindi non trasforma, cioè è un invariante. Dal prodotto scalare possiamo definire la **norma** di un vettore semplicemente facendo il prodotto scalare con se stesso:

$$n = v^\mu v_\mu = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = \begin{cases} > 0 & \text{spacelike} \\ = 0 & \text{lightlike} \\ < 0 & \text{timelike.} \end{cases} \quad (5.2.66)$$

In uno spazio-tempo con metrica non definita positiva, come nel nostro caso, la norma n può essere uguale a zero, positiva o negativa. Si distingue quindi tra vettore di tipo luce ($n = 0$), di tipo tempo ($n < 0$), e di tipo spazio ($n > 0$).²

Una trasformazione di coordinate non cambia la norma di un vettore, non ne cambia il prodotto scalare e non cambia neanche la condizione di ortogonalità. Dire che due vettori sono **ortogonali** significa che il loro prodotto scalare è nullo:

$$g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = 0 \quad (5.2.68)$$

il che non è altro che una generalizzazione di ciò che avevamo visto nello spazio euclideo:

$$\eta_{ij} u^i v^j = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Facciamo ancora un paio di considerazioni prima di passare oltre.

- Un tensore con n indici può essere scritto in $2n$ modi diversi, tutti fisicamente equivalenti. Per esempio, possiamo scrivere $T^{\mu\nu\lambda}$ oppure $T^{\mu\nu}{}_\lambda$. Le due scritture sono parenti, infatti:

$$T^{\mu\nu}{}_\lambda = g_{\lambda\sigma} T^{\mu\nu\sigma}.$$

Però attenzione, sono equivalenti, ma non sono uguali, ad esempio $T^{013} \neq T^{01}{}_3$ perché l'indice alto e basso trasformano in modo diverso.

- Il tensore che si ottiene alzando un indice al tensore metrico è il simbolo di Kronecker. Infatti:

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = g^\mu{}_\nu \doteq \delta^\mu{}_\nu.$$

- La derivata di un tensore, sebbene non l'abbiamo ancora dimostrato, non è in generale un tensore:

$$\partial_\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_n}{}_{\nu_1 \dots \nu_m} \quad (5.2.69)$$

infatti, se $T^{\mu_1 \dots \mu_n}{}_{\nu_1 \dots \nu_m}$ è un tensore di rango (n, m) , ∂_λ ha un indice ma non è un tensore di rango $(n, m + 1)$. Definiremo, più avanti negli appunti, un nuovo operatore derivativo, che chiameremo *derivata covariante*, che generalizza la derivata ordinaria in modo tale che contenga l'operazione di derivazione, ma trasformi come un tensore con un indice in più, cosa che non fa la derivata ordinaria.

²I termini ...like derivano dalla nostra definizione della segnatura della metrica. Noi avevamo preso $(-, +, +, +)$ e avevamo definito:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -d\tau^2. \quad (5.2.67)$$

Quando $d\tau^2 > 0$ le separazioni sono di tipo timelike e quando $n = ds^2 < 0$ sono spacelike.

- Parliamo ancora di **densità scalari e tensoriali**. Esse sono delle quantità che si trasformano in modo simile a un tensore, ma non in modo esatto. Per una trasformazione di coordinate $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ sappiamo che vale:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

il determinante della matrice che contiene le derivate parziali è il determinante jacobiano della trasformazione:

$$J(x \rightarrow x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|. \quad (5.2.70)$$

Si definisce **scalar density di peso** w , un oggetto che si trasforma come uno scalare a meno di una potenza w dello jacobiano, ossia come:

$$\Delta \rightarrow \Delta' \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^w \Delta. \quad (5.2.71)$$

Si definisce **tensor density di peso** w un oggetto, che chiamiamo $\hat{F}^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}$ di rango (n, m) che si trasforma quasi come un tensore, cioè che per ogni indice ha la legge di trasformazione tensoriale, ma è poi ancora moltiplicato per una potenza w del determinante jacobiano:

$$\hat{F}^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\alpha_n}} F^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^w. \quad (5.2.72)$$

Esiste una particolare densità tensoriale che ci sarà utile, il **determinante del tensore metrico**, il quale è una densità scalare di peso $w = -2$. Definiamo con g il determinante del tensore metrico:

$$g \equiv -\det[g_{\mu\nu}]. \quad (5.2.73)$$

Ciò significa considerare la matrice G , i cui elementi sono $(G)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ e calcolarne il determinante. Il segno meno compare per un motivo: nel caso della matrice N del tensore di Minkowski, il determinante è pari a -1 , ed è cambiando il segno diventa positivo. Il determinante si trasforma come una scalar density:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \quad (5.2.74)$$

quindi:

$$g' = -\det[g'_{\mu\nu}] \quad (5.2.75)$$

$$= -\det\left[\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\right] \quad (5.2.76)$$

$$= -\det[g_{\mu\nu}] \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 \quad (5.2.77)$$

in cui vediamo l'argomento del determinante come prodotto di matrici e usiamo la proprietà del determinante. Notiamo che:

$$\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|$$

è l'inverso del determinante jacobiano. Dimostriamo che vale:

$$\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-1}. \quad (5.2.78)$$

Scriviamo che:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu \quad (5.2.79)$$

pertanto il determinante:

$$\left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} \right| = |\delta^\mu_\nu| \quad (5.2.80)$$

$$\left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \right| \left| \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} \right| = 1 \quad (5.2.81)$$

che è una relazione equivalente a ciò che volelamo dimostrare. Possiamo riscrivere (5.2.77) come:

$$g' = g \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-2}. \quad (5.2.82)$$

Dunque il determinante del tensore metrico si trasforma come una densità tensoriale di peso -2 .

Un caso importante riguarda la trasformazione dell'elemento di volume sulla varietà. Consideriamo l'elemento:

$$dV = d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (5.2.83)$$

sappiamo che esso trasforma come:

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x \quad (5.2.84)$$

cioè come una scalar density con $w = 1$. Se lo moltiplichiamo per la radice quadrata di una scalar density di peso $w = -2$ il termine di trasformazione si cancella.

Più in generale possiamo scrivere:

$$(\text{scalar density})^{w_1} \times (\text{scalar density})^{w_2} = (\text{scalar density})^{w_1+w_2}$$

Allora se prendiamo il prodotto $\sqrt{g} d^4x$ abbiamo:

$$(-2)^{1/2} \times (1) = -1 + 1 = 0 \quad (5.2.85)$$

definiamo quindi:

$$dV = \sqrt{g} d^4x \quad (5.2.86)$$

l'**elemento di volume invariante**. Si noti che nel caso di Minkowski:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \implies g = 1 \implies dV = d^4x. \quad (5.2.87)$$

Una breve nota sulle notazioni. Se abbiamo uno spazio-tempo, dato che il determinante ha segno negativo, a volte viene usato $\sqrt{g} d^4x$ con $g = -\det[g_{\mu\nu}]$, mentre a volte si usa $\sqrt{g} d^4x$ dove però scegliamo $g = +\det[g_{\mu\nu}]$.

5.2.4 Proprietà di oggetti simmetrici e anti-simmetrici

Vediamo in questa rapida sezione alcune proprietà degli oggetti simmetrici e antisimmetrici.

Dato un oggetto con due indici esso si dice simmetrico se non cambia per scambio degli indici, ossia:

$$S^{\alpha\beta} = S^{\beta\alpha} \quad (5.2.88)$$

oppure antisimmetrico se cambia di segno quando scambiamo degli indici:

$$A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}. \quad (5.2.89)$$

Un oggetto generico $T^{\alpha\beta}$, può non avere nessuna proprietà di simmetria o di antisimmetria, però possiamo sempre decomporlo nella sua parte simmetrica e nella sua parte antisimmetrica. Rispettivamente abbiamo:

$$T_{sim}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (T^{\alpha\beta} + T^{\beta\alpha}) = T^{(\alpha\beta)} \quad (5.2.90)$$

$$T_{anti}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}) = T^{[\alpha\beta]} \quad (5.2.91)$$

e l'oggetto di partenza è esattamente uguale alla somma della sua parte simmetrica più la sua parte antisimmetrica:

$$T^{\alpha\beta} = T_{sim}^{\alpha\beta} + T_{anti}^{\alpha\beta}. \quad (5.2.92)$$

Notiamo che l'oggetto con due indici può essere un tensore, ma può essere anche una matrice. Se abbiamo oggetti a simmetria definita, vale la seguente proprietà: "la contrazione di un oggetto simmetrico con un oggetto antisimmetrico è pari a zero":

$$A_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0 \quad (5.2.93)$$

infatti:

$$A_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} S^{\beta\alpha} = -A_{\beta\alpha} S^{\beta\alpha} = -A_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \quad (5.2.94)$$

in cui abbiamo solo usato le proprietà di simmetria, antisimmetria e rinominando gli indici contratti.

In virtù di questo, per un oggetto T a simmetria non definita, valgono le seguenti proprietà:

- Possiamo scriverlo come decomposizione di parte simmetrica e parte antisimmetrica.
- La sua contrazione con tensore antisimmetrico, ne seleziona la parte antisimmetrica:

$$T_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} = T_{[\alpha\beta]} A^{\alpha\beta}. \quad (5.2.95)$$

- La sua contrazione con tensore simmetrico, ne seleziona la parte simmetrica:

$$T_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)} S^{\alpha\beta}. \quad (5.2.96)$$

Queste proprietà si dimostrano in modo immediato. Infatti, la prima espressione:

$$T_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} = (T_{(\alpha\beta)} + T_{[\alpha\beta]}) A^{\alpha\beta} \quad (5.2.97)$$

$$= T_{(\alpha\beta)} A^{\alpha\beta} + T_{[\alpha\beta]} A^{\alpha\beta} \quad (5.2.98)$$

$$= 0 + T_{[\alpha\beta]} A^{\alpha\beta} \quad (5.2.99)$$

$$= T_{[\alpha\beta]} A^{\alpha\beta}. \quad (5.2.100)$$

In modo analogo si fa con la parte simmetrica.

5.2.5 Trasformazione della connessione

Vediamo ora come trasforma la connessione affine, ovvero i simboli di Christoffel, sotto l'effetto di trasformazione generale di coordinate e verifichiamo se ha una natura tensoriale o meno. Abbiamo visto che la connessione affine è legata al tensore metrico da:

$$\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda}). \quad (5.2.101)$$

Facciamo una precisazione. I due concetti, trasformazione affine e simboli di Christoffel, non sono necessariamente coincidenti, ma nelle teorie di geometria differenziale su cui si basa la Relatività Generale lo sono; si possono avere delle teorie della gravità più estese rispetto alla RG in cui i due concetti possono avere delle differenze.

Partiamo dalla definizione di connessione affine:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \quad (5.2.102)$$

mettendo in relazione, punto per punto, il sistema di coordinate locali in caduta libera, ξ_P^α , e il sistema di coordinate generali x^μ , valido sullo spazio-tempo curvo. Facendo la trasformazione di coordinate sulla varietà curva, cioè passando dal sistema di coordinate $x \rightarrow x'$, possiamo scrivere la

connessione affine nel punto P relativamente al sistema di coordinate primo:

$$\begin{array}{ccc} x^\mu & \xleftrightarrow{\xi_P^\alpha} & x'^\mu \\ & \text{TGC} & \end{array}$$

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} \quad (5.2.103)$$

ovviamente le ξ^α rappresentano uno qualunque degli infiniti sistemi di coordinate in assenza di gravità, o meglio, localmente inerziali in quel punto. Possiamo guardare le coordinate $x = x(x')$ o viceversa, e riscrivere:

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\nu} \right) \quad (5.2.104)$$

$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \right) \quad (5.2.105)$$

$$= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \left[\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \right] \quad (5.2.106)$$

notiamo che, dopo aver moltiplicato, il primo termine tra le parentesi quadre ci fornisce una delta:

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} = \delta^\rho_\sigma \quad (5.2.107)$$

mentre il secondo è la definizione della connessione:

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} \equiv \Gamma^\rho_{\sigma\tau}. \quad (5.2.108)$$

Sostituendo e facendo agire la delta abbiamo:

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \Gamma^\rho_{\sigma\tau} \quad (5.2.109)$$

che è la relazione che ci fornisce la trasformazione della connessione. Risulta evidente che Γ non è un tensore. Affinché lo fosse dovrebbe comparire solo il secondo termine. Possiamo dare anche una forma alternativa all'espressione (5.2.109) sfruttando l'identità:

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = \delta^\lambda_\nu \quad (5.2.110)$$

derivandola rispetto x'^μ :

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \right) \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} = 0 \quad (5.2.111)$$

in cui ci siamo ricordati che la δ di Kronecker contiene solamente costanti. Il primo termine lo possiamo scrivere come:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \right) = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \right) = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \quad (5.2.112)$$

per cui arriviamo all'identità:

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} = - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \quad (5.2.113)$$

che se inserita in (5.2.109) ci fornisce:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma^{\rho}_{\sigma\tau} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}. \quad (5.2.114)$$

5.2.6 Equazione del moto della particella in caduta libera

Consideriamo adesso un'applicazione del principio di covarianza generale. Applicchiamolo all'equazione della particella in caduta libera che sappiamo essere valida in presenza di gravità. Approcciamo il problema da questo punto di vista: consideriamo l'equazione del moto nel sistema di riferimento curvo x^{μ} e vediamo se essa soddisfa il principio di covarianza generale. In caso ciò avvenisse, allora concluderemmo che essa è la giusta equazione in presenza di gravità - come d'altronde già sappiamo. Abbiamo:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} = 0 \quad (5.2.115)$$

sempre con la definizione:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (5.2.116)$$

Ci chiediamo se questa è la corretta equazione di un corpo in caduta libera? Usiamo il principio di covarianza generale per verificarlo; dunque vediamo a cosa si riduce l'equazione (5.2.115) in assenza di gravità? In tal caso il tensore metrico diventa ovunque, non solo in un punto, il tensore di Minkowski; contemporaneamente la connessione va a zero, perché possiamo sempre scegliere un sistema di coordinate di Minkowski in cui η è diagonale, a coefficienti costanti e le sue derivate sono nulle. Dunque in assenza di gravità abbiamo:

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \eta_{\mu\nu} \quad (5.2.117)$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \longrightarrow 0 \quad (5.2.118)$$

$$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (5.2.119)$$

$$\implies \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = 0 \quad (5.2.120)$$

che è la corretta equazione di una particella libera in assenza di gravità!

Possiamo definire la quadri-velocità (nel senso di vettore di Lorentz essendo in assenza di gravità):

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (5.2.121)$$

così l'equazione asserisce che la quadri-velocità non varia durante l'evoluzione del sistema, ovvero che l'oggetto non varia lo stato di moto. In più, questa è la giusta definizione di tempo proprio in assenza di gravità in Relatività Speciale.

Quello che abbiamo fatto però non è sufficiente a dimostrare che (5.2.115) siano le corrette equazioni del moto, infatti bisogna anche verificare la seconda condizione del principio di covarianza generale, ovvero che sia un'equazione tensoriale. Dobbiamo quindi verificare che sia un vettore per trasformazioni generali di coordinate, dunque una cosa che si comporti come:

$$v^\mu \longrightarrow v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} v^\rho$$

e in più anche la corretta trasformazione per il $d\tau^2$. In realtà però quest'ultima è automaticamente verificata, infatti abbiamo già dimostrato che:

$$d\tau'^2 = -g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = d\tau^2. \quad (5.2.122)$$

Verifichiamo la trasformazione dei due termini che compongono (5.2.115):

$$\frac{d^2 x'^\mu}{d\tau'^2} = \frac{d^2 x'^\mu}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx'^\mu}{d\tau} \right) \quad (5.2.123)$$

$$\stackrel{\text{TGC}}{=} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx'^\mu}{dx^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \quad (5.2.124)$$

$$= \frac{dx'^\mu}{dx^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (5.2.125)$$

Da quest'ultima equazione leggiamo che il termine da cui siamo partiti non si trasforma come un tensore. Però, per fare le cose bene dobbiamo considerare anche il secondo termine di (5.2.115), relativo alla connessione affine, che ora sappiamo come si trasforma. Nel nuovo sistema di coordinate usando (5.2.114):

$$\Gamma'^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx'^\nu}{d\tau} \frac{dx'^\lambda}{d\tau} = \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\tau} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\tau} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right] \frac{dx'^\sigma}{d\tau} \frac{dx'^\tau}{d\tau} \quad (5.2.126)$$

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma} \frac{dx'^\sigma}{d\tau} \right) \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\tau} \frac{dx'^\tau}{d\tau} \right) \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\tau} \frac{dx'^\tau}{d\tau} \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma} \frac{dx'^\sigma}{d\tau} \right) \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \quad (5.2.127)$$

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \quad (5.2.128)$$

osserviamo nuovamente che anche questo termine, da solo, non trasforma come un tensore. Si noti infatti che l'unico indice libero è μ e l'oggetto non trasforma come un vettore. Sommiamo allora i due termini (5.2.125) e (5.2.128) che abbiamo ottenuto nel sistema primo. L'equazione (5.2.115) trasforma come:

$$\frac{d^2 x'^\mu}{d\tau^2} + \Gamma'^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx'^\nu}{d\tau} \frac{dx'^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (5.2.129)$$

sostituendo quello che abbiamo trovato, e notando che i due termini hanno un pezzo uguale, rimaniamo con:

$$\frac{d^2 x'^\mu}{d\tau^2} + \Gamma'^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx'^\nu}{d\tau} \frac{dx'^\lambda}{d\tau} = \frac{dx'^\mu}{dx^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \quad (5.2.130)$$

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \left[\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \right] \quad (5.2.131)$$

in cui abbiamo rinominato gli indici contratti ν e α come κ . La (5.2.131) è una trasformazione di un vettore controvariante. Dunque l'equazione del moto è generalmente covariante. L'equazione (5.2.115) è quindi un'equazione tensoriale che ha il giusto limite in assenza di gravità; è per questo l'equazione che accettiamo come la corretta equazione del moto, per quello stesso sistema, in presenza di gravità in un campo gravitazionale arbitrario.

Risulta evidente che non sarà questo il procedimento operativo, non è comodo dover prima inventare l'equazione e poi verificare che sia tensoriale. Ma vedremo che definendo degli opportuni operatori, che generalizzano quelli derivativi in uno spazio piatto, otterremo un modo operativo per promuovere un'equazione che conosciamo in assenza di gravità alla giusta equazione in presenza di gravità.

5.3 Derivata covariante

In questa sezione definiamo la generalizzazione degli operatori derivativi su spazi piatti, in modo tale da avere le giuste proprietà di trasformazione sotto trasformazioni generali di coordinate. Questo si rende necessario poiché la derivata ordinaria di un generico vettore (o tensore) non è a sua volta un tensore, come visto nell'equazione (5.2.69). Definiamo a questo scopo la **derivata covariante** che ha la proprietà di trasformarsi tensorialmente e come limite, quando lo spazio diventa piatto, quello della derivata ordinaria.

Vediamo prima il caso di un *vettore controvariante*, che trasforma come il differenziale delle coordinate:

$$v^\mu \longrightarrow v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu. \quad (5.3.1)$$

Siccome un vettore generico può essere funzione delle coordinate della varietà, cioè ad esempio $v^\alpha = v^\alpha(x)$, allora facciamo la derivata di v'^μ rispetto

alle coordinate x^λ :

$$\partial'_\lambda v'^\mu \equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} v^\nu. \quad (5.3.2)$$

Risulta chiaro che se vi fosse solo il primo termine allora $\partial'_\lambda v'^\mu$ risulterebbe un tensore con un indice covariante in più, perché avremmo una trasformazione rispetto all'indice alto μ come un vettore controvariante e, in virtù dell'indice basso, una trasformazione covariante. Tuttavia, è presente un secondo termine che dobbiamo manipolare in qualche modo. Tale termine contiene la derivata seconda di un set di coordinate rispetto alle altre, tale quantità ci rimanda alla connessione, la quale sarà quindi l'oggetto attraverso cui riusciremo a definire un operatore derivativo che trasforma come vogliamo (infatti sappiamo già che la connessione si annulla quando ci mettiamo in uno spazio tempo piatto). Consideriamo un termine:

$$\Gamma'^\mu_{\lambda\kappa} v'^\kappa = \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa} \Gamma^\nu_{\rho\sigma} - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa} \right] \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\eta} v^\eta \quad (5.3.3)$$

in cui per Γ utilizziamo l'espressione con il meno perché è quello di cui abbiamo bisogno affinché alcuni termini si cancellino. Facendo i prodotti ci accorgiamo che vale:

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\eta} = \delta^\sigma_\eta \quad (5.3.4)$$

che ci permette di scrivere:

$$\Gamma'^\mu_{\lambda\kappa} v'^\kappa = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} v^\sigma - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} v^\sigma. \quad (5.3.5)$$

Ci accorgiamo che sommando (5.3.2) e (5.3.5) otteniamo:

$$\frac{\partial v'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\mu_{\lambda\kappa} v'^\kappa = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \left[\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma^\nu_{\rho\sigma} v^\sigma \right]. \quad (5.3.6)$$

Definiamo la **derivata covariante di un tensore controvariante** come:³

$$D_\lambda v^\mu \equiv v^\mu_{;\lambda} \equiv \partial_\lambda v^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} v^\kappa \quad (5.3.7)$$

che è un oggetto che trasforma come un tensore di rango 2. Infatti abbiamo:

$$(D_\lambda v^\mu)' = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} (D_\lambda v^\mu). \quad (5.3.8)$$

Se il vettore ha rango 1 la derivata ha rango 2. Il vettore in questo caso ha rango (1,0) e la derivata covariante diventa di rango (1,1).

³Si indica con il punto e virgola vicino l'indice che deriviamo.

Vediamo la stessa cosa, ma per un vettore *covariante*. Consideriamo un vettore che trasformi come:

$$v_\mu \longrightarrow v'_\mu = \frac{\partial x_\rho}{\partial x'^\mu} v_\rho. \quad (5.3.9)$$

La derivata covariante in questo caso - la verifica è immediata - è definita come:

$$D_\lambda v_\mu \equiv v_{\mu;\lambda} \equiv \partial_\lambda v_\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} v_\kappa. \quad (5.3.10)$$

Possiamo anche fare considerazioni su un *tenore generico*. Consideriamo un tensore $T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}$ noi possiamo costruire la derivata covariante allo stesso modo di quanto fatto per i vettori covarianti e controvarianti:

$$D_\rho T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} \equiv \partial_\rho T + \Gamma T + \dots - \Gamma T + \dots \quad (5.3.11)$$

in cui indichiamo $T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = T$ per brevità. Facciamo un esempio per chiarire meglio. Consideriamo un tensore $T^{\mu\sigma}_\lambda$ di rango $(2, 1)$. La derivata covariante è un vettore di rango $(2, 2)$ che si scrive come:

$$D_\rho T^{\mu\sigma}_\lambda = \partial_\rho T^{\mu\sigma}_\lambda + \Gamma^\mu_{\rho\kappa} T^{\kappa\sigma}_\lambda + \Gamma^\sigma_{\rho\kappa} T^{\mu\kappa}_\lambda - \Gamma^\kappa_{\rho\lambda} T^{\mu\sigma}_\kappa. \quad (5.3.12)$$

Facciamo sempre attenzione a mantenere l'ordine degli indici nell'espressione alto-basso.

Notiamo inoltre che la derivata covariante di un tensore, qualunque esso sia, si riduce alla derivata ordinaria se ci mettiamo in uno spazio piatto perché il tensore metrico va nel tensore metrico di Minkowski e la connessione va a zero. Però, sullo spazio curvo la derivata covariante assume una forma molto più complessa che trasforma come abbiamo richiesto.

Oltre a vettori e tensori, abbiamo definito anche le tensor densities con peso w . Il modo per definire la derivata covariante di una tensor density, è il seguente. Consideriamo una tensor density di peso w , che chiamiamo $\hat{T}^{(\dots)}_{(\dots)}$, e la facciamo diventare un tensore moltiplicandola per il determinante del tensore metrico g alla potenza $w/2$. Dopodiché facciamo la derivata covariante di tale oggetto secondo le regole opportune:

$$D_\rho \left[g^{w/2} \hat{T}^{(\dots)}_{(\dots)} \right] \quad (5.3.13)$$

questo è chiaramente un tensore con un rango aumentato di 1 covariante. Infine, la rifacciamo diventare tensor density, moltiplicando per $g^{-w/2}$:

$$g^{-w/2} D_\rho \left[g^{w/2} \hat{T}^{(\dots)}_{(\dots)} \right] \quad (5.3.14)$$

e otteniamo una nuova tensor density con lo stesso peso w della tensor density di partenza.

5.3.1 Proprietà

Vedremo la dimostrazione di alcune proprietà nell'Appendice B.

La derivata covariante ha delle proprietà che sono simili alle proprietà della derivata ordinaria:

- È un **operatore lineare**, quindi ha proprietà di linearità, il che significa che la derivata covariante di una combinazione lineare di tensori è la combinazione lineare delle derivate covarianti. Per esempio:

$$D_\lambda (aA^\mu{}_\nu + bB^\mu{}_\nu) = aD_\lambda A^\mu{}_\nu + bD_\lambda B^\mu{}_\nu.$$

- Vale la **regola di Leibnitz** per la derivata di un prodotto. Ad esempio:

$$D_\lambda (A^\mu{}_\nu B^\lambda) = (D_\lambda A^\mu{}_\nu) B^\lambda + A^\mu{}_\nu (D_\lambda B^\lambda).$$

- **Contrazione.** La derivata covariante di un tensore contratto si ottiene calcolando la derivata covariante relativamente solo agli indici che rimangono liberi. Ad esempio, partendo dal tensore $T^{\mu\lambda}{}_\nu$ di rango $(2, 1)$, contraiamo un indice e abbiamo $T^{\mu\lambda}{}_\lambda$, ovvero un tensore $(1, 0)$. La derivata covariante di $T^{\mu\lambda}{}_\lambda$ si ottiene lavorando sull'indice libero μ :

$$D_\rho T^{\mu\lambda}{}_\lambda = \partial_\rho T^{\mu\lambda}{}_\lambda + \Gamma^\mu{}_{\rho\kappa} T^{\kappa\lambda}{}_\lambda.$$

Abbiamo tre indici, quindi avremmo dovuto usare tre volte i termini gamma-tensore, due volte col $+$ (controvariante) e una volta col meno (covariante), però sono termini che si elidono quando lavoriamo sull'indice alto e sull'indice basso contratti.⁴

- La derivata covariante del tensore metrico è sempre uguale a zero:

$$D_\rho g_{\mu\nu} = 0. \quad (5.3.15)$$

- A partire da (5.3.15) possiamo dimostrare⁵ che la δ di Kronecker ha la proprietà che non solo la derivata ordinaria è nulla, ma anche la sua derivata covariante lo è:

$$D_\lambda (\delta^\mu{}_\nu) = 0. \quad (5.3.16)$$

⁴È molto semplice da verificare. Consideriamo il tensore prima di contrarre gli altri due indici e deriviamo:

$$D_\rho T^{\mu\sigma}{}_\lambda = \partial_\rho T^{\mu\sigma}{}_\lambda + \Gamma^\mu{}_{\rho\kappa} T^{\kappa\sigma}{}_\lambda + \Gamma^\sigma{}_{\rho\kappa} T^{\mu\kappa}{}_\lambda - \Gamma^\kappa{}_{\rho\lambda} T^{\mu\sigma}{}_\kappa$$

se contraiamo, cioè mettiamo $\sigma = \lambda$, allora vediamo che gli ultimi due termini sono uguali e si elidono.

⁵Infatti, basta ricordare la proprietà fondamentale della metrica $\delta^\mu{}_\nu = g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu}$ e derivarla (in modo covariante) utilizzando la proprietà di Leibnitz e usando (5.3.15).

- Un'altra proprietà, generica, che discenda da (5.3.15) è che:

$$(g^{\mu\nu} v_\nu)_{;\lambda} = g^{\mu\nu} v_{\nu;\lambda} \quad (5.3.17)$$

in cui si nota che se è nulla la derivata del tensore metrico lo è anche quella del tensore metrico inverso.

La proprietà (5.3.15) ci sono due modi per dimostrarla. Il primo è quasi immediato, infatti se riprendiamo la relazione (4.3.59):

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}$$

possiamo vedere che esplicitando la derivata covariante:

$$D_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu} g_{\mu\kappa} = 0 \quad (5.3.18)$$

l'uguaglianza viene in automatico usando (4.3.59).

Il secondo modo per dimostrare la derivata covariante del tensore metrico identicamente nulla è quello di utilizzare il principio di covarianza generale. Scriviamo la derivata covariante del tensore metrico:

$$D_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu} g_{\mu\kappa} \quad (5.3.19)$$

se ci mettiamo in un punto del campo gravitazionale e ci mettiamo nel sistema in caduta libera, allora:

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \eta_{\mu\nu} \quad , \quad \Gamma \longrightarrow 0 \quad (5.3.20)$$

e di conseguenza possiamo scrivere:

$$D_\rho g_{\mu\nu} = D_\rho \eta_{\mu\nu} = 0. \quad (5.3.21)$$

Questo è vero in quello specifico punto, ma possiamo ripeterlo in tutti i punti, di conseguenza diventa vero in tutti i punti dello spazio-tempo.

Un altro modo per vedere la derivata covariante di $g_{\mu\nu}$ è il seguente. $g_{\mu\nu}$ è un tensore e la derivata covariante di un tensore è un tensore. L'espressione:

$$D_\rho g_{\mu\nu} = 0 \quad (5.3.22)$$

è un'equazione tensoriale, perché è l'annullarsi di un tensore ed è un'affermazione invariante per trasformazione generale di coordinate. In assenza di gravità questa espressione diventa:

$$\partial_\rho \eta_{\mu\nu} = 0 \quad (5.3.23)$$

poiché η è costante. Quindi l'espressione di partenza è un'equazione tensoriale corretta in assenza di gravità e quindi per il principio di covarianza

generale è valida sempre.

Notiamo una cosa importante riguardo (5.3.15). Quando la derivata ordinaria di una funzione è pari a zero significa che la funzione non dipende dalle coordinate, dunque è costante. Ma noi qui non stiamo dicendo questo, infatti non stiamo utilizzando la derivata ordinaria. Il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ non è indipendente dalle coordinate.

Nell'elenco fatto prima abbiamo omissso la **proprietà fondamentale** della derivata covariante. Infatti si è detto che:

- La derivata covariante trasforma tensori in tensori con un rango più alto.
- La derivata covariante si riduce alla derivata ordinaria in assenza di gravità (sullo spazio piatto).

Queste due proprietà ci permettono di esprimere la regola per determinare l'effetto della gravità su qualunque sistema fisico sfruttando il principio di covarianza generale. Per scrivere l'effetto della gravità su qualunque sistema fisico seguiamo una semplice ricetta:

- Scriviamo le equazioni del sistema valide in Relatività Speciale (il che vuol dire scrivere equazioni tensoriali per trasformazione di Lorentz tra sistemi di riferimento inerziali).
- Facciamo la sostituzione formale:

$$\eta_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} \quad , \quad \partial_\mu \longrightarrow D_\mu.$$

Il che significa che con la varietà in presenza di gravità, che è una varietà curva, passiamo dallo spazio-tempo di Minkowski allo spazio-tempo curvo descritto da quello specifico tensore metrico. La derivata covariante contiene la connessione che a sua volta contiene le derivate del tensore metrico. Quindi le equazioni che otteniamo contengono l'effetto della gravità, se non altro in virtù del fatto che la derivata covariante si porta dietro una connessione.

Seguendo questi due semplici passi otteniamo nella nostra teoria equazioni che sono:

- Generalmente covarianti.
- Valide in assenza di gravità.

Quindi, per il principio di covarianza generale (PCG), le equazioni che abbiamo scritto sono le corrette equazioni in presenza di un campo gravitazionale arbitrario, il quale è codificato dentro il tensore metrico.

Queste nuove equazioni, che erano tensoriali per trasformazione di Lorentz, sono automaticamente equazioni tensoriali per trasformazioni generali di coordinate. Però, equazioni tensoriali sotto una trasformazione generale di coordinate (che hanno inoltre il giusto limite in assenza di gravità, poiché siamo partiti proprio da lì) implementano il principio di covarianza generale (che come abbiamo visto è una riscrittura del principio di equivalenza).

Questo lo utilizzeremo esattamente per far vedere come si scrive un'equazione in presenza di un campo gravitazionale arbitrario.

Vediamo, rapidamente, alcune **proprietà matematiche**:

- La derivata covariante di uno scalare coincide con la derivata ordinaria dello scalare:

$$D_\mu S = \partial_\mu S.$$

Infatti:

$$(\partial_\lambda S)' = \frac{\partial S'}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial S}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial S}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \partial_\rho S$$

quindi l'oggetto di partenza trasforma sull'indice λ esattamente come un vettore.

- Il rotore covariante coincide col rotore ordinario:

$$D_\lambda v_\mu - D_\mu v_\lambda = \partial_\lambda v_\mu - \partial_\mu v_\lambda.$$

- La divergenza di un vettore controvariante - facciamo la derivata e poi contraiamo gli indici - è pari a:

$$D_\mu v^\mu = \partial_\mu v^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} v^\lambda \quad (5.3.24)$$

che può anche essere scritta in modo diverso, più comodo. Conosciamo la relazione tra la connessione e le derivate della funzione metrica (4.3.66). Dalla contrazione il primo e il terzo termine sono uguali, ma con segno opposto quindi si cancellano (bisogna anche sfruttare la simmetria del tensore metrico per cui $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$). Dunque:

$$\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \partial_\lambda g_{\mu\rho}.$$

Esiste anche un **teorema** che afferma⁶ che:

$$(\partial_\lambda g) = g g^{\mu\rho} \partial_\lambda g_{\mu\rho} \quad (5.3.25)$$

che sfruttandolo possiamo riscrivere:

$$\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2g} (\partial_\lambda g) = \frac{1}{2} \partial_\lambda (\log g) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\lambda \sqrt{g}.$$

⁶Puoi vedere la dimostrazione di questa relazione nell'Appendice B.

Grazie a quest'ultima relazione la divergenza (5.3.24) diventa:

$$D_\mu v^\mu = v^\mu{}_{;\mu} = \partial_\mu v^\mu + \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_\lambda \sqrt{g}) v^\lambda = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} v^\mu). \quad (5.3.26)$$

Da (5.3.26) vediamo bene come se passiamo dallo spazio curvo allo spazio piatto ritroviamo che la divergenza covariante è uguale alla divergenza ordinaria.

Vediamo un paio di esempi di divergenze covarianti. Consideriamo un tensore di rango $(2,0)$ che chiamiamo $T^{\mu\nu}$ e calcoliamone la divergenza covariante. Possiamo scriverlo in due modi. Avremo:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda} \quad (5.3.27)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda}. \quad (5.3.28)$$

Se invece supponiamo di prendere un altro tensore, di stesso rango, ma che sia antisimmetrico:

$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu} \quad (5.3.29)$$

allora in questo caso la divergenza covariante risulta:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda}. \quad (5.3.30)$$

Però, in quest'ultima relazione gli indici μ e λ di Γ sono simmetrici, mentre gli indici μ e λ di T sono antisimmetrici, quindi la contrazione dà 0.⁷ Infatti se consideriamo un oggetto $A^{\alpha\beta}$ antisimmetrico, e un oggetto simmetrico $S_{\beta\alpha}$ e li contraiamo, avremo:

$$A^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha} S_{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha} S_{\beta\alpha} = -A^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \quad (5.3.31)$$

$$\implies A^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = 0 \quad (5.3.32)$$

in cui nell'ultimo passaggio abbiamo semplicemente scambiato i nomi degli indici, cosa che possiamo fare perché sono indici contratti.

Come altro esempio possiamo considerare:

$$A_{\mu\nu;\lambda} + A_{\nu\lambda;\mu} + A_{\lambda\mu;\nu} \quad (5.3.33)$$

e se A è antisimmetrico si può dimostrare che valga la seguente uguaglianza con le permutazioni delle derivate ordinarie:

$$A_{\mu\nu;\lambda} + A_{\nu\lambda;\mu} + A_{\lambda\mu;\nu} = \partial_\lambda A_{\mu\lambda} + \partial_\mu A_{\nu\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda\mu}.$$

⁷Se vuoi c'è una sottosezione con le motivazioni negli appunti del corso di *Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi*.

5.3.2 Derivata covariante lungo un cammino

Vediamo ora la definizione di derivata covariante lungo un cammino. Noi possiamo definire i tensori come funzione delle coordinate, ma possiamo anche definire dei tensori soltanto lungo una curva. Se così fosse, cioè l'oggetto tensoriale che stiamo studiando è definito lungo una curva e non ovunque nello spazio, anche la derivata covariante avrà senso definirla soltanto per variazioni lungo il cammino e non in direzioni arbitrarie. Per esempio, per un cammino $x^\mu(\tau)$, il quadri-impulso $p^\mu(\tau)$ di una particella è definito solo lungo la traiettoria e non ovunque nello spazio-tempo o sulla varietà.

Consideriamo un vettore controvariante definito lungo un cammino:

$$A'^\mu(\tau) = \left. \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right|_{x^\mu(\tau)} A^\nu(\tau) \quad (5.3.34)$$

definiamo la derivata di $A'^\mu(\tau)$ lungo il cammino come:

$$\frac{dA'^\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dA^\nu}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tau} A^\nu(\tau). \quad (5.3.35)$$

Questa derivata chiaramente non trasforma come un tensore, ma contiene di nuovo la derivata seconda di un set di coordinate rispetto all'altro, quindi se riusciamo nuovamente a collegata con la Γ , risolveremo il problema. Usiamo la legge di trasformazione:

$$\Gamma'^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \Gamma^\rho{}_{\tau\sigma} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \quad (5.3.36)$$

e ridefiniamo la **derivata covariante lungo un cammino**:

$$\frac{D A^\mu}{\tau} \equiv \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu. \quad (5.3.37)$$

L'oggetto (5.3.37) trasforma come un vettore e si riduce alla derivata ordinaria lungo il cammino quando spengo l'effetto della gravità, cioè quando $\Gamma \rightarrow 0$. La dimostrazione è analoga, basta prendere (5.3.37) in un sistema primo. I termini con la derivata seconda andranno via e rimarrà:

$$\frac{D A'^\mu}{\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dA^\nu}{d\tau}. \quad (5.3.38)$$

Se invece vogliamo la derivata lungo un cammino di un vettore controvariante, del tipo:

$$B_\mu(\tau) \longrightarrow B'_\mu(\tau) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu(\tau) \quad (5.3.39)$$

avremo:

$$\frac{D B_\mu}{\tau} \equiv \frac{dB_\mu}{d\tau} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} B_\lambda \quad (5.3.40)$$

la dimostrazione è analoga al vettore covariante.

Parliamo di tensori. La derivata covariante di un tensore lungo un cammino si costruisce come quella di un vettore per ogni indice del tensore, quindi per un tensore di rango $(1, 1)$ abbiamo:

$$\frac{D T^\mu{}_\nu}{\tau} = \frac{dT^\mu{}_\nu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} T^\rho{}_\nu \frac{dx^\lambda}{d\tau} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} T^\nu{}_\rho \frac{dx^\lambda}{d\tau}. \quad (5.3.41)$$

Teniamo a mente che se un tensore è definito ovunque e non solo lungo un cammino, possiamo definire la derivata covariante (e ordinaria) lungo qualunque cammino. Solitamente si chiama **campo tensoriale** un vettore che dipende dalle coordinate, poiché un campo non è definito solo su un cammino, ma è definito ovunque. Ad esempio se consideriamo un tensore $T^\mu{}_\nu(x)$, definito ovunque nello spaziotempo, esisteranno la derivata ordinaria covariante $D_\lambda T^\mu{}_\nu$, ma anche la derivata covariante lungo un cammino di nostra scelta $D T^\mu{}_\nu / D\tau$. Le due derivate sono legate secondo:

$$\frac{D T^\mu{}_\nu}{\tau} = T^\mu{}_{\gamma;\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau}. \quad (5.3.42)$$

Più in generale per un tensore di qualunque rango diciamo:

$$\frac{D T^{(l)}{}_{(m)}}{\tau} = D_\rho T^{(l)}{}_{(m)} \frac{dx^\rho}{d\tau}. \quad (5.3.43)$$

Dimostriamo brevemente la relazione (5.3.42). Scriviamo:

$$T^\mu{}_{\gamma;\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = \frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} T^\rho{}_\nu \frac{dx^\lambda}{d\tau} - \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} T^\mu{}_\sigma \frac{dx^\lambda}{d\tau}$$

in cui abbiamo esplicitato la derivata covariante del campo tensoriale T . Riconoscendo il primo termine come la derivata ordinaria, cioè $dT^\mu{}_\nu / d\tau$, essendo gli altri termini proprio i pezzi che compaiono nella definizione della derivata covariante lungo un cammino, otteniamo:

$$T^\mu{}_{\gamma;\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = \frac{D T^\mu{}_\nu}{\tau}.$$

Quindi se il tensore con cui abbiamo a che fare è un campo tensoriale, c'è un legame tra la derivata lungo un qualsiasi cammino e le sue derivate parziali - possiamo chiamarle in modo un po' improprio - covarianti. Chiaramente il termine $dx^\lambda / d\tau$ va preso sul cammino lungo cui vogliamo fare la derivata covariante. Questa relazione non vale per un tensore che non è un campo tensoriale in quanto non sono in generale definite le derivate parziali.

Si ricorda di guardare l'Appendice B per le dimostrazioni delle proprietà e relazioni viste nel corso della sezione.

5.4 Trasporto parallelo

Definiamo un'operazione applicabile a vettori o a tensori e che chiamiamo **trasporto parallelo** lungo una curva. In uno spazio piatto è facile definire il concetto "lungo una curva" quando pensiamo a dei vettori. Infatti, consideriamo uno spazio piatto, ad esempio euclideo. Il trasporto parallelo di un vettore lungo una curva si effettua muovendo il suo punto di applicazione lungo la curva senza mai ruotarlo e tenendolo parallelo a se stesso. Quindi se consideriamo una curva, da un punto A ad un altro punto B e prendiamo un vettore, che al momento può rappresentare qualunque cosa, allora trasportarlo parallelamente significa muovere il suo punto di applicazione da A a B senza effettuare deformazioni di alcun tipo. Facciamo riferimento alla figura 5.1.

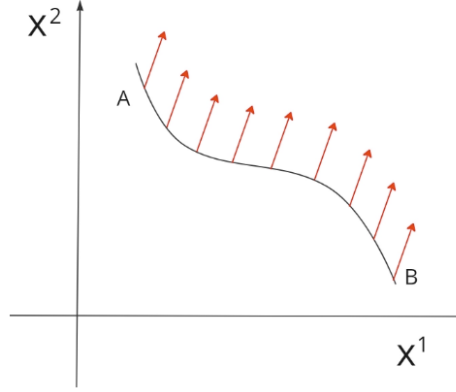


Figura 5.1: Trasporto parallelo in uno spazio piatto.

Per esprimere questo concetto matematicamente utilizziamo delle coordinate cartesiane sullo spazio piatto, x_1 , x_2 e definiamo il cammino attraverso una forma parametrica $x^\lambda(\tau)$. Consideriamo il vettore v^μ che è parallelamente trasportato se vale questa proprietà:

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} = 0 \quad (5.4.1)$$

derivata che chiaramente va intesa lungo il cammino parametrizzato dal parametro τ . Se le componenti di v^μ non cambiano, questo è trasportato parallelamente.

Si può generalizzare a un tensore arbitrario $T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}$ per cui definiamo il trasporto parallelo richiedendo che:

$$\frac{dT^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}}{d\tau} = 0. \quad (5.4.2)$$

Osserviamo una proprietà di questa operazione nello spazio piatto: se il vettore viene trasportato parallelamente su una curva chiusa, esso torna pa-

parallelo a se stesso, non ruotato.

Ora, consideriamo uno spazio curvo. L'intera operazione diventa meno banale e quest'ultima proprietà non è più necessariamente vera. Realizzare l'operazione di trasporto parallelo di un vettore dipende dal cammino seguito. Un esempio molto intuitivo è quello di prendere la superficie sferica bidimensionale. Si faccia riferimento alla figura 5.2. Consideriamo per esempio un vettore in un punto P orientato in modo tale che in P sia lungo il cerchio massimo. Se facessimo due trasporti paralleli diversi, il primo partiamo dal punto P e lo portiamo fino all'equatore; il secondo partiamo da P lo trasportiamo parallelamente lungo l'equatore fino ad un punto Q e infine lo trasportiamo di nuovo verso il polo nord. Quando ritorniamo al polo nord i due vettori, se abbiamo preso cammini lungo i cerchi massimi, sono ruotati di 90° uno rispetto all'altro. Se però questo vettore seguisse un altro cammino, arriverebbe al polo nord ruotato probabilmente con un angolo differente.

Se tracciassimo un cammino chiuso che parta dal punto P , passi dal polo nord, scenda fino al punto Q per poi ritornare in P , cioè un cammino chiuso, osserveremmo che il vettore torna ruotato rispetto a com'era inizialmente.

Mentre nello spazio piatto abbiamo detto che su un cammino chiuso il vettore torna parallelamente a se stesso in uno spazio curvo questo non succede. Esistono però dei cammini chiusi, come ad esempio quello lungo l'equatore, rispetto ai quali il vettore trasportato parallelamente ritorna non ruotato! Quindi, concludiamo che in uno spazio curvo l'operazione di trasporto parallelo dipende dal cammino.

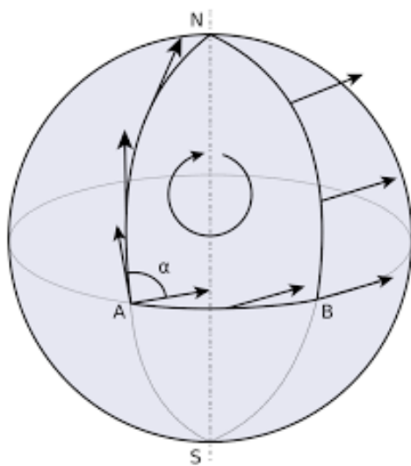


Figura 5.2: Trasporto parallelo in uno spazio curvo.

Si noti che l'equazione (5.4.1) trasforma vettorialmente, è cioè un'equazione tensoriale. Quindi se v^μ fosse un vettore in uno spaziotempo, trasfor-

merebbe con le trasformazioni di Lorentz e l'equazione (5.4.1) rimarrebbe uguale a se stessa.

Ovviamente su uno spazio curvo vogliamo definire l'operazione di trasporto parallelo scritta attraverso un'equazione tensoriale e che si riduca a (5.4.1) nel caso di varietà piatta. Per riuscirci generalizziamo la definizione di trasporto parallelo espressa da (5.4.1) utilizzando la derivata covariante:

$$\frac{D v^\mu}{D \tau} = 0. \quad (5.4.3)$$

Trasportando il vettore, esso mantiene la sua derivata covariante uguale a zero. Tale derivata è fatta lungo il cammino scelto per fare l'operazione di trasporto parallelo. Scrivendo la definizione di derivata covariante, otteniamo:

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dv^\nu}{d\tau} v^\lambda \quad (5.4.4)$$

che ci mostra che le componenti del vettore (e di un tensore) cambiano, e ciò che determina il modo in cui queste ruotano è proprio la connessione. In altri termini si può anche dire che è la connessione a determinare il trasporto parallelo, in quanto è lei che esegue l'operazione di trasportare parallelo per il vettore. Infatti, si può anche pensare che il vettore nel punto P sia appoggiato su un piano tangente e si trasporti il piano tangente parallelamente a se stesso, in modo tale che in ogni punto della traiettoria su cui mi muovo, il vettore poggi su quel piano tangente.

Si noti che l'equazione (5.4.4) generalizza (5.4.1) e allo stesso tempo ha come limite la stessa (5.4.1) se lo spazio è piatto.

Inoltre l'equazione (5.4.4) la possiamo vedere anche come un'equazione differenziale del primo ordine. Definiamo (5.4.1) come l'equazione del trasporto parallelo. Essa è un'equazione tensoriale in quanto v^μ è un vettore, e la derivata covariante trasforma vettori in vettori, mentre non lo fa la derivata ordinaria.

Se invece che un vettore abbiamo un tensore, allora l'equazione (5.4.2) si generalizza come:

$$\frac{D T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}}{D \tau} = 0 \quad (5.4.5)$$

che si può scompartire secondo la definizione di derivata covariante facendo comparire esplicitamente la connessione.

5.4.1 Proprietà del trasporto parallelo

Elenchiamo in questa rapidissima sezione due proprietà dell'operazione di trasporto parallelo.

Proprietà 1. Il tensore metrico soddisfa sempre l'equazione del trasporto parallelo. La derivata lungo un qualunque cammino del tensore metrico,

essendo $g_{\mu\nu}$ definito ovunque - quindi è un campo - la possiamo scrivere in questo modo:

$$\frac{D g_{\mu\nu}}{D \tau} = g_{\mu\nu;\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau}. \quad (5.4.6)$$

Abbiamo visto che dato un campo tensoriale, la derivata lungo un cammino la posso scrivere come le derivate parziali covarianti moltiplicate a $dx^\lambda/d\tau$, ma abbiamo anche visto che per il tensore metrico le derivate covarianti sono $g_{\mu\nu;\lambda} = 0$ sempre e quindi l'espressione precedente si riduce a:

$$\frac{D g_{\mu\nu}}{D \tau} = 0 \quad (5.4.7)$$

cioè, otteniamo che $g_{\mu\nu}$ soddisfa l'equazione del trasporto parallelo.

Proprietà 2. La proprietà 1 comporta a sua volta un'altra proprietà. Il trasporto parallelo conserva il prodotto scalare di due vettori. Il che implica ancora che esso conservi la norma di un vettore e l'ortogonalità.

Il prodotto scalare di due vettori è uno scalare costruito facendo la contrazione dei vettori col tensore metrico, vale a dire:

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu. \quad (5.4.8)$$

Calcolando la derivata covariante:

$$\frac{D}{D \tau} [g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu] = \frac{D g_{\mu\nu}}{D \tau} v^\mu v^\nu + g_{\mu\nu} \frac{D v^\mu}{D \tau} v^\nu + g_{\mu\nu} v^\mu \frac{D v^\nu}{D \tau}. \quad (5.4.9)$$

Eseguendo l'operazione di trasporto parallelo, le derivate $Dv^\mu/D\tau$ e $Dv^\nu/D\tau$ sono uguali a zero perché stiamo trasportando parallelamente il vettore, e la derivata del tensore metrico è pari a 0 per la proprietà 1. Quindi:

$$\frac{D g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu}{D \tau} = 0. \quad (5.4.10)$$

Il che ci dice che il prodotto scalare, quando ci muoviamo lungo il cammino, non cambia. Ciò significa che il trasporto parallelo conserva il prodotto scalare tra due vettori.

Riconsideriamo l'esempio fatto prima sulla superficie sferica. Consideriamo due vettori in P che inizialmente sono inclinati di un certo angolo l'uno rispetto all'altro. Trasportando i due vettori lungo cammini diversi, essi torneranno in P generalmente ruotati rispetto alla loro direzione iniziale. Tuttavia, il loro prodotto scalare rimane invariato, quindi l'angolo che essi formano rimane invariato.

Ciò vale per spazi con metrica arbitraria e di dimensioni arbitrarie.

In virtù della seconda proprietà, la norma del vettore non cambia essendo infatti $u = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$ e inoltre se abbiamo due vettori che hanno tra di loro prodotto scalare nullo, cioè sono ortogonali, $g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0$, l'ortogonalità non cambia e restano tali.

5.4.2 Geodetica

L'operazione trasporto parallelo ci permette di dare un'altra definizione di geodetica. La geodetica è la generalizzazione agli spazi curvi della linea retta in uno spazio euclideo. L'abbiamo definita come la traiettoria che estremizza la distanza tra due punti sulla varietà e in virtù di questo, usando un principio variazionale, abbiamo determinato l'equazione delle geodetiche:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0. \quad (5.4.11)$$

Nello spazio piatto, la soluzione di questa equazione è la retta. La retta è il cammino che ha, tra l'altro, la proprietà di trasportare parallelamente il suo vettore tangente.

Consideriamo una retta, un punto P e definiamo il vettore tangente nel punto P , che sarà ovviamente orientato lungo la retta. Trasportando il vettore tangente parallelamente a se stesso lungo la retta, esso rimarrà sempre parallelo a se stesso. Quindi la retta è quel cammino che trasporta parallelamente il suo vettore tangente. Possiamo estendere questo concetto agli spazi curvi. Consideriamo un cammino $x^\mu(\tau)$ e generalizziamo la definizione di geodetica ricercando quel cammino che trasporta parallelamente il proprio vettore tangente. Definiamo il vettore tangente come:

$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (5.4.12)$$

il trasporto parallelo del vettore tangente, si esprime attraverso:

$$\frac{D v^\mu}{D \tau} = 0 \quad (5.4.13)$$

ed esplicitando:

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} v^\lambda = 0. \quad (5.4.14)$$

Ma usando la definizione precedente (5.4.12) di vettore tangente otteniamo che il trasporto parallelo è:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (5.4.15)$$

che coincide con l'equazione (5.4.11). Soluzione di tale equazione è la traiettoria x^μ che ha la proprietà di trasportare parallelamente il vettore a se stesso, e che chiamiamo *geodetica*. Si noti che ciò vale per qualunque spazio, ma se lo spazio è uno spazio-tempo, la geodetica coincide anche con la world-line di un oggetto che non è soggetto a nessuna forza.

Adesso abbiamo tutti gli elementi per poter esprimere gli effetti della gravitazione su un sistema fisico in un campo gravitazionale arbitrario.

5.5 L'effetto della gravitazione

Grazie alla sezione §5.4, e alle precedenti, abbiamo tutti gli elementi per poter scrivere la corretta equazione del moto per un qualsiasi sistema fisico in presenza di gravità ed in presenza di un campo gravitazionale del tutto arbitrario.

Utilizziamo sostanzialmente il principio di covarianza generale, utilizzando le cose che abbiamo imparato fino ad adesso. Richiamiamo, per completezza, la regola operativa per poter scrivere le equazioni in presenza di gravità:

1. Consideriamo il sistema fisico che vogliamo descrivere e scriviamo le equazioni che lo descrivono valide in Relatività Speciale (assenza di gravità). Queste saranno chiaramente equazioni tensoriali per trasformazione di Lorentz, che implementano il principio di relatività, scritte nello stesso modo per tutti gli osservatori inerziali. Il principio di costanza della velocità della luce è contenuto nel fatto che questi osservatori sono in relazione proprio mediante trasformazioni di Lorentz.
2. Le grandezze fisiche in gioco sono tutte inserite in oggetti che sono o scalari o vettori o tensori, a seconda delle grandezze che dobbiamo discutere. Abbiamo fatto l'esempio del campo elettromagnetico, vedi la sezione §3.4, che per poter essere descritto completamente ha bisogno di sei quantità, che si possono organizzare in un tensore di rango 2 antisimmetrico, che abbiamo chiamato $F^{\mu\nu}$.
3. A questo punto dobbiamo generalizzare queste grandezze alla presenza di gravità, quindi gli oggetti che sono tensori per trasformazioni di Lorentz dovranno diventare dei tensori per trasformazioni generali di coordinate, perché, abbiamo visto che in presenza di gravità i sistemi inerziali valgono solo più localmente, e la descrizione di un osservatore la facciamo utilizzando un sistema di coordinate del tutto generale. Le equazioni tensoriali in Relatività Speciale vanno generalizzate ad equazioni tensoriali per trasformazioni generali di coordinate.

Per fare tutto ciò è sufficiente:

- Ogni volta che compare il tensore metrico dobbiamo far comparire il tensore metrico della varietà curva:

$$\eta_{\alpha} \longrightarrow g_{\mu\nu}.$$

- Promuovere tutte le derivate a derivate covarianti:

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} &\longrightarrow D_{\mu} \\ \frac{d}{d\tau} &\longrightarrow \frac{D}{D\tau}. \end{aligned}$$

Le equazioni che si ottengono sono le corrette equazioni in presenza di gravità in virtù del principio di covarianza generale, perché le equazioni che otteniamo sono equazioni:

- Generalmente covarianti per costruzione.
- Sono le corrette equazioni in assenza di gravità.

L'insieme di queste due condizioni per il principio di covarianza generale assicura che esse siano le corrette equazioni in presenza di campo gravitazionale.

Facciamo alcuni esempi di come questo metodo operativo possa funzionare nel darci le equazioni del moto corrette. Come sempre, partiamo da un principio, il principio di equivalenza, che riscriviamo con il principio di covarianza generale, e successivamente da questo scriviamo le equazioni che diciamo essere corrette in presenza di gravità; che ovviamente dovremo testarle con l'esperimento (ci sarà un'apposita sezione in cui vedremo i test della Relatività Generale).

5.5.1 Dinamica di un punto materiale in presenza di un campo gravitazionale

Consideriamo innanzitutto il caso in cui il punto materiale **non è soggetto a forza** e dimostriamo come l'applicazione di questo metodo ci riporti all'equazione del moto che abbiamo già ricavato per altra via. Dicendo "particella non soggetta a forze in presenza di gravità" significa che consideriamo solamente l'interazione gravitazionale e nessun'altra forza esterna. Seguiamo il procedimento descritto nell'elenco numerato precedente.

1. Dobbiamo ricordarci qual è l'equazione del moto di una particella non soggetta a forze in Relatività Speciale. Definiamo la quadrivelocità:

$$u^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \quad (5.5.1)$$

se il corpo non è soggetto a forze, allora:

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (5.5.2)$$

e tale equazione ha come soluzione delle world-line che sono traiettorie rettilinee nello spazio-tempo:

$$\xi^\alpha(\tau) = a^\alpha + b^\alpha\tau. \quad (5.5.3)$$

2. Per scrivere l'equazione in presenza di gravità promuoviamo la quadrivelocità a un oggetto che risulterà in una quadrivelocità rispetto al sistema di coordinate curvilineo:

$$u^\alpha \longrightarrow u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (5.5.4)$$

e ricordiamo che nel passaggio precedente, anche se non lo abbiamo esplicitato, avevamo una certa definizione per il $d\tau^2$ e che ora si modifica:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \longrightarrow d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (5.5.5)$$

In un certo senso, nel tempo proprio, c'è già la presenza della metrica curva della varietà. L'equazione del moto, secondo le regole dette, risulterà:

$$\frac{D u^\mu}{D \tau} = 0 \quad (5.5.6)$$

che, non solo possiamo notare essere uguale all'equazione del trasporto parallelo (di u^α), ma può essere anche sviluppata:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} u^\lambda = 0 \quad (5.5.7)$$

in cui se sostituiamo la quadrivelocità:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0. \quad (5.5.8)$$

Quest'ultima, a sua volta, ha soluzione $x^\mu(\tau)$ che è la worldline nello spazio-tempo curvo dell'oggetto non soggetto a forze. La quadri-accelerazione non è zero, ma è pari a meno il termine contenete la connessione, dentro al quale c'è l'effetto della gravità.

Ora, il modo in cui abbiamo espresso la generalizzazione della quadrivelocità è il modo corretto e possiamo anche vederlo geometricamente. Abbiamo che la quadrivelocità nel punto P , che chiamiamo u^α , scritta sul piano tangente, e u^μ che è quella invece definita, rispetto sempre a P , e poi iterata per ogni punto P sullo spazio curvo. Le due sono compatibili e un modo molto veloce di mostrarlo è il seguente: u^μ generalizza direttamente u^α , il $d\tau$ è quindi definito mediante $g_{\mu\nu}$ e quindi $dx^\mu/d\tau$ è effettivamente un vettore per trasformazioni generali di coordinate semplicemente perché per sua natura:

$$dx^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} dx^\rho. \quad (5.5.9)$$

Ripetiamo lo stesso procedimento nel caso in cui l'oggetto è **soggetto a forze**.

1. In Relatività Speciale l'equazione del moto si esprime mediante:

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} = \frac{F^\alpha}{m} \quad (5.5.10)$$

e se definiamo il quadri-impulso $P^\alpha = m u^\alpha$, assumendo che la particella abbia massa costante, avremo:

$$F^\alpha = \frac{dP^\alpha}{d\tau}. \quad (5.5.11)$$

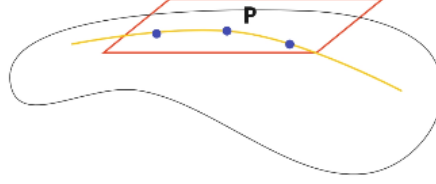


Figura 5.3

2. Generalizziamolo nel caso di presenza di gravità. Un modo per vedere come sia fatta F^μ è illustrato in figura 5.3.

Prendiamo un punto nello spazio curvo, lì si prende un sistema di riferimento in caduta libera per il quale possiamo definire un sistema di coordinate minkowskiano, e, sempre nello stesso punto tale forza corrisponderà alla forza che misura un osservatore in caduta libera. Possiamo poi ripetere per ogni punto. Abbiamo per questo:

$$u^\alpha \longrightarrow u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (5.5.12)$$

$$F^\alpha \longrightarrow F^\mu. \quad (5.5.13)$$

e l'equazione risulta:

$$\frac{D u^\mu}{D \tau} = \frac{F^\mu}{m} \quad (5.5.14)$$

che possiamo riscrivere come:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = \frac{F^\mu}{m} \quad (5.5.15)$$

cioè:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu - m \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \quad (5.5.16)$$

e otteniamo un'equazione in cui a primo membro compare la massa per l'accelerazione e a secondo la forza esterna e il termine dovuto alla gravità.

5.5.2 Elettrodinamica in presenza di campo gravitazionale

Vogliamo descrivere il comportamento di un campo elettromagnetico generato da una distribuzione di cariche e di correnti, in presenza di un campo gravitazionale dato.

1. Scriviamo l'equazione di Maxwell in Relatività Speciale in forma vettoriale (è questo il linguaggio che ci aiuta a farlo). Definito un tensore totalmente antisimmetrico $F^{\alpha\beta}$ che contiene le tre componenti del campo elettrico e del campo magnetico, le equazioni di Maxwell sono:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -J^\beta \quad (5.5.17)$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.5.18)$$

Le prime, sono le quattro equazioni non omogenee, quelle che mettono in relazione le sorgenti del campo elettromagnetico con il campo elettromagnetico, le seconde invece sono le equazioni omogenee, le quali non hanno le sorgenti dentro di loro e danno una condizione su come deve essere fatto il tensore $F^{\alpha\beta}$. Se vuoi rivedi la sezione §3.4.

2. Le equazioni in presenza di un campo gravitazionale diventano semplicemente:

$$D_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu \quad (5.5.19)$$

$$D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu} = 0. \quad (5.5.20)$$

Il campo gravitazionale lo sentiamo e si accoppia al campo elettromagnetico attraverso derivata covariante che si porta dentro la connessione, quindi c'è un accoppiamento tra il campo elettromagnetico ed il campo gravitazionale.

Le soluzioni delle equazioni di Maxwell nel vuoto, in assenza di gravità, saranno diverse dalla soluzione delle equazioni di Maxwell in presenza di gravità, perché la derivata covariante porta dei termini in più. Possiamo riscrivere le equazioni in un modo più conveniente, ma prima è necessario ricordare che la divergenza covariante di un tensore antisimmetrico si può riscrivere in un modo molto più semplice:

$$D_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\kappa} F^{\kappa\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\kappa} T^{\mu\kappa} \quad (5.5.21)$$

ma siccome $T^{\mu\kappa}$ è antisimmetrico e gli indici $\Gamma^\nu_{\mu\kappa}$ sono simmetrici la loro contrazione è zero. Ciò che resta si può riscrivere in un modo molto più compatto, che contiene solo la radice del determinante della metrica. Le equazioni non omogenee si riducono dunque a:

$$\partial(\sqrt{g} F^{\mu\nu}) = -\sqrt{g} J^\nu. \quad (5.5.22)$$

Per quanto riguarda le equazioni omogenee, se $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico la combinazione ciclica di derivate covarianti è uguale alla stessa combinazione ciclica di derivate ordinarie:

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0. \quad (5.5.23)$$

Ora, la (5.5.23) esprime la condizione che deve soddisfare F ed è uguale a quella del caso piatto. Invece la (5.5.22), se la confrontiamo con quella del caso piatto ci permette di toccare con mano il fatto che c'è dentro il campo gravitazionale e quindi la soluzione di queste equazioni, date le cariche per ottenere il campo, sarà diversa.

La corrente, come avevamo visto a suo tempo, se non si ha produzione o distruzione di cariche elettriche soddisfa l'equazione di continuità. Nel caso piatto ciò si esprime dicendo:

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \quad (5.5.24)$$

in presenza di campo gravitazionale invece:

$$D_\mu J^\mu = 0 \quad (5.5.25)$$

che possiamo riesprimere come:

$$\partial_\mu (\sqrt{g} J^\mu) = 0. \quad (5.5.26)$$

La conservazione in presenza di gravità o su spazio curvo si porta dietro questo $\sqrt{g}$ che è funzione della posizione del tempo in generale e quindi la conservazione della distribuzione della densità di carica e della corrente, è diversa nella situazione in cui c'è gravità rispetto a quella in cui non c'è gravità.

5.5.3 Tensore energia impulso

Consideriamo il tensore energia impulso di una distribuzione di materia o di energia.

1. In Relatività Speciale, il tensore $T^{\alpha\beta}$ contiene nella componente $(0,0)$ la densità di energia del sistema, nelle componenti $(0,i)$ i flussi di energia nella direzione i -esima e nelle componenti (i,j) i cosiddetti termini pressori. Avevamo visto che il tensore energia impulso soddisfa un'equazione di continuità. Se ci sono forze esterne agenti sul sistema essa è:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = G^\beta \quad (5.5.27)$$

mentre se il sistema è isolato e non ci sono forze esterne:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0. \quad (5.5.28)$$

Se il sistema è isolato la sua massa totale, o la sua energia totale, rimangono costanti del tempo e dunque sono costanti del moto. Se invece ci sono delle forze, queste modificano la dinamica del sistema e possono modificare la distribuzione di masse e di energia.

2. In presenza di gravità, il tensore energia impulso deve diventare un tensore per trasformazione generale di coordinate e deve essere conservato in senso covariante per trasformazione generale di coordinate. Se il sistema è sottoposto a forze soddisferà l'equazione di continuità:

$$D_\mu T^{\mu\nu} = G^\nu \quad (5.5.29)$$

Nel caso in cui invece è isolato:

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.5.30)$$

Notiamo che possiamo sviluppare (5.5.29) in:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) = G^\nu - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda}. \quad (5.5.31)$$

La divergenza del tensore energia impulso è distorta rispetto al caso piatto dalla presenza del campo gravitazionale e rispetto al caso piatto contiene un termine che avevamo indicato con il nome di *force density*. In tal caso la possiamo vedere come *force density* della gravità stessa.

5.5.4 Fluidodinamica relativistica in presenza di gravità

Quanto abbiamo detto ci permette di scrivere le equazioni che regolano la fluidodinamica relativistica in presenza di gravità. Adottiamo il solito procedimento basato sul principio di covarianza generale.

1. Siamo in Relatività Speciale e lavoriamo nel caso semplice di *fluido perfetto*. Se ci mettiamo nel sistema di riferimento comovente con il fluido, le componenti del tensore energia impulso saranno:

$$\tilde{T}^{00} = \rho \quad (5.5.32)$$

$$\tilde{T}^{0i} = \tilde{T}^{i0} = 0 \quad (5.5.33)$$

$$\tilde{T}^{ij} = p \delta_{ij} \quad (5.5.34)$$

in cui p e ρ sono la pressione e la densità del fluido misurate dall'osservatore comovente con il fluido. Questo si può scrivere in forma tensoriale. Ricordando che il tensore d'energia impulso di un fluido perfetto in un sistema di riferimento inerziale arbitrario si esprime attraverso:

$$T^{\alpha\beta} = p \eta^{\alpha\beta} + (p + \rho) u^\alpha u^\beta \quad (5.5.35)$$

in cui u^α è la velocità dell'elemento di fluido nel sistema di riferimento in cui ci siamo posizionati. Questo fluido se non produco o non distruggo il fluido, soddisfa l'equazione di continuità:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (5.5.36)$$

essa comprende 4 equazioni che esprimono la conservazione dell'energia e della massa. Applicando esplicitamente la derivata alla forma del tensore energia impulso si ha:

$$(\partial^\alpha p) + \partial_\beta \left[(p + \rho) u^\alpha u^\beta \right] = 0. \quad (5.5.37)$$

L'equazione per $\alpha = 0$ è quella che viene chiamata anche **equazione di conservazione dell'energia** trasportata dal fluido, mentre le equazioni $\alpha = 1, 2, 3$ sono quelle relative invece alla conservazione dell'impulso che vanno anche sotto il nome di **equazioni di Eulero**. Una volta che specifichiamo un'equazione di stato, cioè una relazione pressione densità per il fluido, allora abbiamo specificato che tipo di fluido abbiamo e siamo in possesso di tutto ciò che ci serve, poiché il comportamento del fluido è descritto da queste equazioni.

2. Ora, dobbiamo descrivere il comportamento di tale fluido in campo gravitazionale. Facciamo un esempio. Consideriamo una distribuzione isotropa d'acqua e applichiamo lo stesso procedimento che abbiamo adoperato più volte. Il tensore energia impulso diventa un tensore per trasformazioni generali di coordinate:

$$T^{\alpha\beta} \longrightarrow T^{\mu\nu} = p g^{\mu\nu} + (p + \rho) u^\mu u^\nu \quad (5.5.38)$$

dove mentre prima u^α era la velocità del fluido, ora $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ è la velocità del fluido come visto dall'osservatore in presenza di gravità, abbiamo cioè:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \longrightarrow u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (5.5.39)$$

oltre alla trasformazione del tempo proprio (5.5.5). L'equazione di continuità del fluido diventano il loro analogo in presenza di gravità:

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.5.40)$$

che sono quattro equazioni, in cui l'equazione $\nu = 0$ esprime sempre la conservazione dell'energia, ma con la presenza della gravità perché la divergenza covariante contiene la connessione, e $\nu = 1, 2, 3$ sono le equazioni di Eulero in presenza del campo gravitazionale. Proviamo a esprimere proprio esplicitamente l'equazione di conservazione del tensore $T^{\mu\nu}$. Sviluppiamo esplicitamente l'equazione (5.5.40):

$$D_\nu (p g^{\mu\nu}) + D_\nu [(p + \rho) u^\mu u^\nu] = 0. \quad (5.5.41)$$

Riscriviamo il primo termine a secondo membro. Sfruttando il fatto che la divergenza covariante del tensore metrico è nulla e osservando che la pressione è uno scalare, dunque che la divergenza covariante di uno scalare coincide con la divergenza ordinaria, possiamo scrivere:

$$D_\nu (p g^{\mu\nu}) = (D_\nu p) g^{\mu\nu} = (\partial_\nu p) g^{\mu\nu}. \quad (5.5.42)$$

Per il secondo termine abbiamo invece:

$$D_\nu A^{\mu\nu} \quad \text{con} \quad A^{\mu\nu} = (p + \rho) u^\mu u^\nu \quad (5.5.43)$$

con A simmetrico:

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}. \quad (5.5.44)$$

Possiamo infine scrivere la divergenza come:

$$D_\nu A^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu (\sqrt{g} A^{\mu\nu}) + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^{\nu\lambda}. \quad (5.5.45)$$

Sostituendo (5.5.42) e (5.5.45) nell'equazione di partenza (5.5.40) avremo:

$$g^{\mu\nu} (\partial_\nu p) + g^{-1/2} \partial_\nu [g^{1/2} (p + \rho) u^\mu u^\nu] + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} (p + \rho) u^\nu u^\lambda = 0. \quad (5.5.46)$$

Queste sono le quattro equazioni della fluidodinamica relativistica in presenza di gravità. Esse si riducono a quelle che abbiamo in assenza di gravità, perché spegnendo la gravità $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$, $g = 1$ e $\Gamma \rightarrow 0$. L'equazione in presenza di gravità è molto più complessa, la gravità è presente in ogni termine g , nella connessione e la stessa quadrivelocità è definita rispetto al tempo proprio definito con la metrica curva. L'equazione della fluido dinamica relativistica vale in generale per qualsiasi campo gravitazionale, per fluidi relativistici e non relativistici.

Vediamo ora un altro caso. Utilizziamo l'equazione che abbiamo appena ricavato per studiare un caso di interesse astrofisico. Consideriamo il caso di un **fluido in equilibrio idrostatico**. Lavoriamo in presenza di gravità. Nel sistema di coordinate comoventi col fluido abbiamo:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = 0 \quad (5.5.47)$$

inoltre, il fluido è statico, per cui:

$$\partial_0 p = \partial_0 \rho = \partial_0 g_{\mu\nu} = 0 \quad (5.5.48)$$

cioè la pressione, la densità e il campo gravitazionale non dipendono dal tempo.

Osserviamo due cose. La prima è che in un qualunque sistema di riferimento la norma della quadrivelocità è:

$$-1 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \quad (5.5.49)$$

$$= g_{00} u^0 u^0 + 2g_{0i} u^0 u^i + g_{ij} u^i u^j \quad (5.5.50)$$

$$= g_{00} (u^0)^2 \quad (5.5.51)$$

in cui: in (5.5.50) abbiamo semplicemente esplicitato i conti; in (5.5.51) ci siamo messi, tra tutti i possibili sistemi generali che abbiamo in presenza del campo gravitazionale, in quello in cui $u^i = 0$. È importante però che da (5.5.51) ricaviamo:

$$u^0 = (-g_{00})^{-1/2} \quad (5.5.52)$$

ed è indipendente dal tempo.

La seconda cosa che dobbiamo notare deriva direttamente dall'equazione della fluidodinamica relativistica (5.5.46). Possiamo scriverne i diversi termini:

- Abbiamo:

$$\partial_0 \left[g^{1/2} (p + \rho) u^\mu u^0 \right] + \partial_i \left[g^{1/2} (p + \rho) u^\mu u^i \right] = 0 \quad (5.5.53)$$

questa somma è pari a 0 perché il secondo termine è una combinazione di u^i , tutti pari a 0 nel sistema di riferimento comoviente, il primo addendo è anch'esso nullo poiché è una derivata rispetto al tempo di quantità indipendenti dal tempo.

- In (5.5.46) abbiamo anche:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda = \Gamma^\mu_{00} (u^0)^2 \quad (5.5.54)$$

poiché ogni altro termine della somma è nullo visto che contengono o λ o ν che è di tipo spazio, cioè vale i , termini che sono nulli. Riscrivendo usando (4.3.66):

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_0 g_{0\nu} + \partial_0 g_{\nu 0} - \partial_\nu g_{00}) \quad (5.5.55)$$

$$= -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{00} \quad (5.5.56)$$

in cui abbiamo usato la simmetria della metrica. Abbiamo dunque:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda = \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{00} \right) (u^0)^2. \quad (5.5.57)$$

Se sostituiamo (5.5.53) e (5.5.57) in (5.5.46) abbiamo:

$$(\partial_\nu p) g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{00} (u^0)^2 (p + \rho) = 0 \quad (5.5.58)$$

che possiamo moltiplicare per $g_{\mu\lambda}$, in modo che compaia una δ^ν_λ , e possiamo usarci dentro la (5.5.52) per ottenere:

$$(\partial_\lambda p) - \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{00}) (-g_{00})^{-1} (p + \rho) = 0 \quad (5.5.59)$$

$$\partial_\lambda p + \frac{1}{2} \frac{1}{(-g_{00})} \partial_\lambda (-g_{00}) (p + \rho) = 0 \quad (5.5.60)$$

$$\partial_\lambda p + \frac{1}{2} \partial_\lambda [\ln(-g_{00})] (p + \rho) = 0 \quad (5.5.61)$$

$$-\partial_\lambda p = (p + \rho) \partial_\lambda [\ln(-g_{00})^{1/2}] \quad (5.5.62)$$

e la (5.5.62) è la cosiddetta **equazione dell'equilibrio idrostatico** per un fluido perfetto con densità di energia ρ e densità di pressione p .

Se ripensiamo a tutto quello che abbiamo detto la densità di energia ρ e la pressione p sono la densità di energia e la pressione come misurate da un osservatore in caduta libera comovente con il fluido. Ora, queste equazioni sono quattro e possiamo vedere che la componente temporale risulta un'identità:

$$\lambda = 0 : \quad 0 = 0 \quad (5.5.63)$$

chiaramente tale equazione non ha informazione dinamica. Le uniche equazioni dinamiche sono quelle spaziali:

$$\lambda = i : \quad -\partial_i p = (p + \rho) \partial_i [\ln(-g_{00})^{1/2}]. \quad (5.5.64)$$

Adesso facciamo ancora due ulteriori richieste. Innanzitutto chiediamo di avere un campo debole - richiesta che coinvolge la maggior parte dei casi fisici - per il quale:

$$g_{00} = -1 - 2\phi = -(1 + 2\phi) \quad (5.5.65)$$

dove ϕ indica il potenziale Newtoniano. Dopodiché richiediamo di avere un fluido newtoniano, cioè un fluido che ha poca pressione $p \rightarrow 0$ (poiché i sottocomponenti del fluido sono non relativistici) e ha una densità che coincide sostanzialmente con la densità di massa $\rho \rightarrow \rho_M = M/V$ (mi dice quanta massa abbiamo in un dato volume del fluido). Per un fluido simile quindi $p \ll \rho$ e quindi $(p + \rho) \simeq \rho$.

Sotto queste ipotesi l'equazione dell'equilibrio idrostatico (5.5.62) si riduce a:

$$-\partial_i p = \rho_M \partial_i [\ln(1 + 2\phi)^{1/2}] \quad (5.5.66)$$

$$= \rho_M \partial_i [\ln(1 + \phi)] \quad (5.5.67)$$

$$= \rho_M \partial_i \phi \quad (5.5.68)$$

che, generalizzando al caso 3D, diventa:

$$-\vec{\nabla} p = \rho_M \vec{\nabla} \phi. \quad (5.5.69)$$

Quest'ultima è l'equazione dell'equilibrio idrostatico nel limite non relativistico (campo debole) che vede un bilanciamento tra la pressione e la forza di gravità; è un'equazione che vale per esempio per la descrizione dell'equilibrio stellare. Una stella è un equilibrio tra una pressione interna che contrasta con l'asso gravitazionale e la gravità che tenderebbe a farla collassare. I termini successivi nello sviluppo si possono aggiungere come correzioni relativistiche (piccole).

5.6 Analogia con l'Elettromagnetismo

Vediamo adesso come il modo in cui abbiamo definito gli effetti della gravità su un sistema fisico abbia un'analogia molto forte con il modo in cui noi affermiamo gli effetti dell'interazione elettromagnetica su una distribuzione di cariche elettriche e di correnti. Questo discende dal fatto che il principio di covarianza generale (PCG), su cui ci siamo basati per costruire l'equazione del moto di un sistema in presenza di gravità, esprime di fatto quella che va anche sotto il nome di **simmetria dinamica**.

Avevamo già commentato dicendo che questo è molto simile a quello che si fa nell'elettromagnetismo utilizzando l'invarianza di gauge locale (IGL), la quale anch'essa è una simmetria dinamica attraverso cui esprimiamo l'effetto del campo elettromagnetico su un sistema fisico dotato di cariche elettriche. Le equazioni che descrivono il comportamento di un campo carico $\psi(x)$, dove x rappresenta le coordinate spaziali e temporali, in presenza di un

campo elettromagnetico, che descriviamo con il potenziale vettore $A^\alpha(x)$, sono invarianti in forma per effetto di trasformazioni di gauge locali, ovvero:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{ie\phi(x)} \psi(x) \quad (5.6.1)$$

$$A_\alpha(x) \longrightarrow A'_\alpha(x) = A_\alpha(x) + \partial_\alpha \phi(x). \quad (5.6.2)$$

Il che significa che se prendiamo il campo e ne facciamo una rotazione di fase con una funzione arbitraria $\phi(x)$ e contemporaneamente shiftiamo il potenziale vettore di una quantità che è il gradiente di tale funzione $\phi(x)$, allora otteniamo che le equazioni del moto sono invarianti. La funzione $\phi(x)$ dipende dal punto, quindi questa è un'invarianza che chiamiamo di gauge locale. Quando facciamo una trasformazione di gauge locale sul campo $\psi(x)$ che descrive un campo carico, la derivata del campo si trasforma in un modo diverso da come si trasforma il campo. Infatti:

$$\partial_\alpha \psi(x) \longrightarrow \partial_\alpha \psi'(x) = \partial_\alpha \left[e^{ie\phi(x)} \psi(x) \right] \quad (5.6.3)$$

$$= [\partial_\alpha \psi(x)] e^{ie\phi(x)} + \psi(x) [ie\partial_\alpha \phi(x)] e^{ie\phi(x)}. \quad (5.6.4)$$

La derivata del campo presenta un pezzo in più, un termine "non omogeneo" che ne modifica le proprietà di trasformazione. Dunque la derivata del campo si trasforma in un modo non conforme a come si trasforma il campo stesso. Questo è analogo a quello che abbiamo in Relatività Generale, dove abbiamo che la derivata di tensori, che sono le grandezze fisiche, non si trasforma come un tensore. Per esempio, supponiamo che il campo $\psi(x)$ sia un campo scalare e che quindi la sua equazione del moto sia l'equazione di Klein-Gordon:

$$(\square^2 + m^2)\psi(x) = 0 \quad (5.6.5)$$

dove il D'Alambertiano⁸ corrisponde a:

$$\square^2 = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta. \quad (5.6.6)$$

Non lo dimostriamo, ma l'equazione del moto, dopo aver applicato una rotazione di fase espressa dalla trasformazione di Gauge locale, dato che sono presenti delle derivate, non rimane invariante in forma. In Relatività Generale per sistemare questo aspetto utilizziamo la connessione $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ mediante la quale definiamo una nuova derivata, la derivata covariante D_μ , che ha la proprietà di trasformare tensori in tensori. Quindi le equazioni scritte con la derivata covariante rimangono equazioni tensoriali. In Elettromagnetismo lo stesso ruolo è svolto di fatto dal potenziale A_μ , che ha anch'esso una legge di trasformazione particolare per trasformazione di gauge, attraverso il quale

⁸A volte indichiamo il D'Alambertiano con $\square$ e altre con $\square^2$, ma solo la stessa cosa; è un operatore derivativo del secondo ordine.

definiamo un nuovo operatore derivativo, che chiameremo *derivata covariante*, ma relativa all'elettromagnetismo, che, applicata a un campo, trasforma come trasforma il campo. Nel caso dell'elettromagnetismo quindi:

$$\partial_\alpha \longrightarrow D_\alpha = \partial_\alpha - i e A_\alpha. \quad (5.6.7)$$

Se applichiamo l'operatore di derivata covariante al campo ψ e faccio una trasformazione di gauge locale:

$$D_\alpha \psi(x) \xrightarrow{\text{DGL}} [D_\alpha \psi(x)]' = (\partial_\alpha - i e A'_\alpha) \psi'_\alpha(x) \quad (5.6.8)$$

$$= [\partial_\alpha - i e (A_\alpha + \partial_\alpha \phi)] (\psi(x) e^{i e \phi(x)}) \quad (5.6.9)$$

$$= (\partial_\alpha \phi) e^{i e \phi(x)} + \psi e^{i e \phi(x)} (i e \partial_\alpha \phi) - i e A_\alpha \psi(x) e^{i e \phi(x)} - i e \partial_\alpha \phi \psi e^{i e \phi(x)} \quad (5.6.10)$$

$$= [(\partial_\alpha - i e A_\alpha) \psi] e^{i e \phi(x)} \quad (5.6.11)$$

e troviamo dunque:

$$[D_\alpha \psi(x)]' = [D_\alpha \psi(x)] e^{i e \phi(x)} \quad (5.6.12)$$

da cui vediamo che la derivata covariante trasforma come il campo. Nel fare questa operazione si genera l'interazione elettromagnetica tra il campo A_α , che contiene l'informazione in senso di potenziale del campo elettromagnetico, e il campo ψ stesso. Abbiamo quindi nuovamente un'analogia di nuovo con ciò che abbiamo in relatività generale: la derivata di tensori assieme alla connessione affine permette di definire la derivata covariante per trasformazioni generali di coordinate; in elettromagnetismo si ha una situazione analoga, ma le trasformazioni saranno differenti, perché stiamo parlando di un altro tipo di invarianza, e l'interazione è differente. Ogni interazione ha la sua proprietà di invarianza, ma attraverso di essa noi possiamo esprimere l'effetto dell'interazione modificando il termine di derivata rendendola tale da trasformarsi come il campo rispetto al set di trasformazioni opportuno; dobbiamo fare:

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu. \quad (5.6.13)$$

Vediamo come si genera l'interazione tra A_μ e ψ nel caso dell'interazione elettromagnetica. Consideriamo l'equazione del moto del campo scalare ψ . Il D'Ambertiano si trasforma come:

$$\square = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \longrightarrow \square = \eta^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \quad (5.6.14)$$

con $D_\alpha = \partial_\alpha - i e A_\alpha$. L'equazione del moto diventa:

$$0 = (\square + m^2) \psi(x) \quad (5.6.15)$$

$$= (\eta^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta + m^2) \psi(x) \quad (5.6.16)$$

$$= [\eta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha - i e A_\alpha)(\partial_\beta - i e A_\beta) + m^2] \psi(x) \quad (5.6.17)$$

$$= [\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta - i e \eta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha \partial_\beta) - e^2 \eta^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta + m^2] \psi(x) \quad (5.6.18)$$

$$= [\square - 2i e A^\alpha \partial_\alpha - i e (\partial_\alpha A^\alpha) - e^2 A_\alpha A^\alpha + m^2] \psi(x) \quad (5.6.19)$$

dove ritroviamo l'operatore D'Alambertiano ordinario. Ora, l'operatore derivata covariante (contenuto nel nuovo D'Alambertiano) applicato a ψ trasforma come il campo stesso. L'equazione del moto scritta in questo modo qua è invariante in forma sotto trasformazioni di gauge locali. Parallelamente però si generano dei termini di interazione di A con ψ , quale ad esempio $(A^\alpha \partial_\alpha \psi)$. L'equazione contiene dei termini in più, relativi all'interazione con il campo elettromagnetico del campo carico col campo elettromagnetico. Questa è la stessa cosa che abbiamo fatto nel contesto della gravità. Per esempio, se noi prendiamo una particella libera, mentre in assenza di gravità l'equazione del moto è:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = 0 \quad (5.6.20)$$

in presenza di gravità è la derivata covariante ad essere uguale a 0:

$$\frac{D u^\mu}{D \tau} = 0 \quad (5.6.21)$$

ma la derivata covariante è data la derivata ordinaria più i termini che competono con la connessione:

$$\frac{D u^\mu}{\tau} = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (5.6.22)$$

in presenza di gravità la derivata diventa covariante, ciò che era un vettore continua a trasformare come un vettore, la derivata covariante trasforma come un vettore, ma si genera l'interazione gravitazionale con il termine che contiene la connessione.

Riassumendo dunque:

- In Elettromagnetismo:

$$\partial_\alpha \psi(x) \longrightarrow D_\alpha \psi(x) = (\partial_\alpha - i e A_\alpha) \psi(x) \quad (5.6.23)$$

e si genera l'interazione tra il campo elettromagnetico e il campo carico.

- In Relatività Generale:

$$\partial_\alpha v^\alpha \longrightarrow D_\alpha v^\mu = \partial_\alpha v^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} v^\lambda. \quad (5.6.24)$$

In questo senso la Relatività Generale è una teoria invariante per trasformazioni generali di coordinate. Il motivo per cui è così discende dal principio della relatività e per poter far sì che le equazioni siano invarianti per trasformazioni generali di coordinate, bisogna scrivere una derivata che trasformi vettori in vettori e in questa operazione genero l'interazione tra la gravità e il sistema fisico.

Entrambe le teorie hanno una versione in cui l'interazione non c'è. Nel caso delle trasformazioni di gauge dell'elettromagnetismo, se la trasformazione di gauge è globale, essa non genera l'interazione elettromagnetica perché per trasformazioni di gauge globali, cioè quelle in cui la fase non cambia con la posizione, la derivata del campo trasforma come il campo. La stessa cosa accade in relatività: in Relatività Speciale la derivata di un vettore trasforma come un vettore per trasformazione di Lorentz.

5.6.1 Confronto

L'Elettromagnetismo e la Relatività Generale sono due teorie che descrivono due tipi di interazione differenti, ma da un punto di vista euristico possiamo domandarci: quale ruolo in analogia compie che cosa?

In EM il potenziale vettore svolge un ruolo analogo alla connessione nell'affermare l'interazione su un sistema fisico, attraverso la derivata covariante. Sono oggetti molto differenti, che però hanno lo stesso ruolo. La connessione contiene il tensore metrico e le sue derivate prime. In entrambi i casi la scelta è in un certo senso minimale: si prende il modo più semplice di tutti per definire la derivata covariante. Dato che le teorie costruite con accoppiamento minimale funzionano, almeno per quello che vediamo non aggiungiamo termini. Quello che vorremmo fare da adesso in avanti è comprendere che cosa genera il campo. In Elettromagnetismo, il campo lo definiamo attraverso un tensore antisimmetrico:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad (5.6.25)$$

e le equazioni di Maxwell risultano:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -J^\beta \quad (5.6.26)$$

in cui a sinistra abbiamo il campo e a destra abbiamo le sorgenti. Data una distribuzione di cariche e correnti, la soluzione ci dà F , noto il quale possiamo ricostruirci A . Vorremmo fare qualcosa di analogo anche per la gravità. Possiamo trovare un'equazione che mi metta in relazione il campo e le sue sorgenti? Le sorgenti sappiamo già dove metterle: nel limite newtoniano

la sorgente del campo gravitazionale è la distribuzione di materia, cioè la densità di materia, e questo entra nell'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (5.6.27)$$

che mette in relazione le sorgenti con il potenziale gravitazionale (newtoniano). Nella nostra descrizione la densità di materia dovrà entrare in un tensore perché stiamo costruendo una teoria il cui linguaggio naturale è quello dei tensori. Noi però sappiamo che la densità di materia, per distribuzioni non relativistiche, va a finire nel tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$. Vorremo scrivere quindi qualcosa del tipo:

$$G_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} \quad (5.6.28)$$

dove a primo membro dovremo avere un altro tensore $G_{\mu\nu}$ che dovrà contenere al suo interno qualche cosa che contiene in ultima analisi ciò che abbiamo associato al campo gravitazionale, ovvero è il tensore metrico. In altri termini $G_{\mu\nu}$ dovrà essere un oggetto tale da mettersi in relazione con le sorgenti per poter dare l'equivalente dell'equazione di Maxwell ma per la gravità, cioè le **equazioni di Einstein**. Per costruire $G_{\mu\nu}$ dovremo andare un po' oltre la connessione. Tale oggetto dovrà essere un tensore, per via del fatto che dobbiamo descrivere le grandezze tensorialmente, e tale tensore in ultima analisi sarà quello che si chiamerà il **tensore di Riemann** (vadi la sezione §6.1). Quest'ultimo tensore contiene le derivate di Γ e quindi le derivate seconde del tensore metrico, dovrà avere una struttura tensoriale e dal punto di vista geometrico sarà quell'oggetto matematico che contiene l'informazione sulla curvatura dello spazio-tempo. È infatti la curvatura dello spaziotempo che è quello che noi percepiamo come effetto di gravità.

Guardando l'equazione (5.6.28) la sorgente del campo è quello che dice al campo com'è fatto, ovvero allo spaziotempo come curvarsi, mentre l'equazione del moto di un oggetto in quel campo gravitazionale, ottenuta attraverso le derivate covarianti, dice quali sono le worldline degli oggetti.

Si noti anche che le equazioni che scriveremo saranno equazioni tensoriali, equazioni valide in generale anche in un contesto di campo gravitazionale arbitrario, poiché stiamo implementando il principio di equivalenza che non distingue tra campo debole o campo intenso. Allo stesso tempo dovrà valere non solo per le distribuzioni di materia non relativistica, come l'equazione di Poisson, ma sarà valida in qualunque contesto, in quanto in un tensore di energia impulso può rientrare l'informazione sulla densità di materia o di energia del tutto arbitraria. Quindi le equazioni che scriveremo dovranno essere valide per un sistema arbitrario, presente in un campo gravitazionale arbitrario per una distribuzione di materia e di energia arbitrarie e dovranno ritornare alle corrette equazioni nel limite opportuno, cioè quello che chiameremo il limite newtoniano.

Capitolo 6

Curvatura ed equazioni di campo

Vediamo in questo capitolo come quantifichiamo effettivamente la curvatura dello spazio tempo all'interno di un tensore e come scriviamo le equazioni di campo, le equazioni di Einstein.

6.1 Tensore di Riemann

L'obiettivo che abbiamo adesso è di determinare le equazioni che regolano il campo gravitazionale. Le equazioni che otterremo dovranno innanzitutto rispettare il principio di equivalenza, quindi dovranno essere sostanzialmente scritte come equazioni tensoriali. Dovranno essere equazioni differenziali per il campo gravitazionale, ovvero per il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ e, come tutte le equazioni del moto, dovranno contenere anche le sue derivate prime $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ e tipicamente anche le derivate seconde $\partial_\rho \partial_\lambda g_{\mu\nu}$ o termini di ordine derivativo superiore. Abbiamo quindi bisogno necessariamente di ottenere una combinazione di $g_{\mu\nu}$ e delle sue derivate in una forma che sia un tensore. Sicuramente non ci basta usare soltanto la derivata prima del tensore metrico, la quale ci ha permesso di scrivere la connessione che però non è un tensore, in quanto non trasforma come un tensore. Se ci pensiamo un attimo, un tensore che contenga soltanto $g_{\mu\nu}$ e le sue derivate prime non è possibile realizzarlo: se avessimo un tensore così fatto, in ogni punto del campo gravitazionale possiamo sempre trovare un sistema di coordinate in caduta libera in cui le derivate prime sono nulle e quindi sostanzialmente il tensore sarebbe soltanto una combinazione lineare delle $g_{\mu\nu}$, ma non riusciamo a costruirlo in tal modo. Dobbiamo quindi almeno includere le derivate seconde. I tensori sono definiti attraverso le loro proprietà di trasformazione rispetto al cambio di coordinate, quindi dobbiamo lavorare su questo. Partiamo dalla connessione, oggetto che già contiene le derivate prime, che ci permetterà di ottenere il nuovo tensore. Scriviamo quindi la legge di trasformazione della

connessione:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma'^\alpha_{\rho\sigma} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (6.1.1)$$

notiamo che di solito data la Γ nel sistema di coordinate x la scriviamo come è nel sistema primo, mentre qui abbiamo scritto semplicemente trasformazione $x' \rightarrow x$. Per prima cosa è isoliamo il termine qui che contiene la derivata seconda:

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma'^\alpha_{\rho\sigma} \quad (6.1.2)$$

si vuole liberare la derivata seconda dal termine che la moltiplica, quindi moltiplichiamo per $\partial x'^\tau / \partial x^\lambda$, in modo tale che si abbia la combinazione che dia una δ^τ_α . Facendo agire la δ :

$$\frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma'^\alpha_{\rho\sigma} \quad (6.1.3)$$

riconoscendo di nuovo la δ^τ_α :

$$\frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma'^\tau_{\rho\sigma} \quad (6.1.4)$$

deriviamo ulteriormente questa espressione rispetto a una coordinata x^κ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu \partial x^\kappa} &= \left(\frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} \right) \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \left(\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right) - \left(\frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} \right) \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma'^\tau_{\rho\sigma} - \\ &- \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \right) \Gamma'^\tau_{\rho\sigma} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \Gamma'^\tau_{\rho\sigma}}{\partial x'^\eta} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \right) \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

in cui notiamo che il primo termine contiene la derivata seconda delle coordinate rispetto all'altro set, di cui abbiamo un'espressione. Riconosciamo poi il secondo termine, che lasciamo così, il terzo termine, che contiene di nuovo le derivate seconde, il quarto termine, che contiene di nuovo le derivate seconde, infine un ultimo termine, che lasciamo così. Ogni volta che compaiono le derivate seconde, riutilizziamo l'equazione (6.1.4), bisogna solo fare attenzione agli indici. Troviamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu \partial x^\kappa} &= \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\eta} \Gamma^\eta_{\lambda\kappa} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \Gamma'^\tau_{\rho\sigma} \right) + \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \\ &- \Gamma'^\tau_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\eta} \Gamma^\eta_{\mu\kappa} - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\mu} \Gamma'^\rho_{\eta\xi} \right) - \\ &- \Gamma'^\tau_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\eta} \Gamma^\eta_{\nu\kappa} - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\nu} \Gamma'^\sigma_{\eta\xi} \right) - \\ &- \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \Gamma'^\tau_{\rho\sigma}}{\partial x'^\eta} \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

possiamo raccogliere i vari termini in modo tale da mettere assieme cose simili. Gli indici liberi sono τ, μ, ν, κ e dobbiamo lasciarli dove sono, mentre gli altri sono sommati e quindi li possiamo anche rinominare. Avremo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu \partial x^\kappa} &= \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + \Gamma^\lambda_{\eta\kappa} \Gamma^\eta_{\mu\nu} \right) - \\ &- \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \left(\frac{\partial \Gamma'^\tau_{\rho\sigma}}{\partial x'^\eta} - \Gamma'^\tau_{\rho\lambda} \Gamma'^\lambda_{\eta\sigma} - \Gamma'^\tau_{\lambda\sigma} \Gamma'^\lambda_{\eta\rho} \right) - \\ &- \Gamma'^\tau_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} + \Gamma^\lambda_{\kappa\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\kappa\mu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \right) \quad (6.1.7) \end{aligned}$$

i raccoglimenti che ci hanno portato alla precedente riscrittura, partendo da (6.1.6), sono stati rispettivamente:

- I termini che contengono una derivata della trasformazione di coordinate (termine della seconda riga e primo termine tra parentesi nella prima riga), rinominiamo $\lambda \leftrightarrow \eta$.
- I termini che hanno tre termini di derivate delle coordinate (ultima riga; seconda riga, secondo termine tra parentesi). Nella terza riga scambiamo $\xi \leftrightarrow \sigma$, ma attenzione perché σ è già presente contratto, quindi richiamiamo anche il σ presente λ . Nella terza riga chiamiamo $\xi \rightarrow \rho$, ma nuovamente ρ era già contratto dunque per quelli già presenti $\rho \rightarrow \lambda$.
- I termini rimanenti hanno tutti due termini di derivata, un termine Γ e un termine Γ' . Adattiamo i termini della seconda e terza riga rispetto a quello della prima riga (sempre guardando l'equazione (6.1.6)). Prendiamo prima quello della seconda riga: richiamo $\eta \rightarrow \lambda$. Infine per quello della terza riga, richiamando: $\eta \rightarrow \lambda$ e $\sigma \leftrightarrow \rho$.

Ora possiamo prendere l'equazione (6.1.7), calcolare la stessa derivata scambiando $\nu \leftrightarrow \kappa$ e poi sottrarre quest'ultima alla stessa equazione (6.1.7). Questa operazione chiaramente fa zero, perché le derivate terze di una funzione commutano l'ordine derivativo:

$$\frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\kappa \partial x^\nu} = 0 \quad (6.1.8)$$

allora la differenza tra l'equazione (6.1.7) con se stessa con gli indici $\nu \leftrightarrow \kappa$ scambiati deve fare zero. Nell'operare tale differenza osserviamo:

- I termini Γ e Γ' si semplificano, in quanto sono uguali e di segno opposto. Possiamo vederlo proprio per ispezione dei singoli termini.
- Gli altri termini si semplificano.

Otteniamo:

$$0 = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\eta\kappa} \Gamma^\eta_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\eta\nu} \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \right) - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \times \\ \times \left[\frac{\partial \Gamma'^\tau_{\rho\sigma}}{\partial x'^\eta} - \frac{\partial \Gamma'^\tau_{\rho\eta}}{\partial x'^\sigma} - \Gamma'^\tau_{\rho\sigma} \Gamma'^\lambda_{\eta\sigma} - \Gamma'^\tau_{\lambda\sigma} \Gamma'^\lambda_{\eta\rho} + \Gamma'^\tau_{\rho\lambda} \Gamma'^\lambda_{\sigma\eta} + \Gamma'^\tau_{\lambda\eta} \Gamma'^\lambda_{\sigma\rho} \right] \quad (6.1.9)$$

in cui notiamo che nel termine della seconda riga, nel termine che moltiplica la parentesi, siccome σ ed η sono indici sommati posso scambiarli, a condizione che lo faccia anche nella parentesi. In altri termini, facciamo lo scambio $\nu \leftrightarrow \kappa$, il che equivale a fare lo scambio $\sigma \leftrightarrow \eta$, quindi fuori dalla parentesi continuiamo a mantenere un σ/ν , e η/κ , mentre dentro la parentesi scambiamo invece $\sigma \leftrightarrow \eta$. Otteniamo:

$$\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\eta\kappa} \Gamma^\eta_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\eta\nu} \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \right) = \\ = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \left[\frac{\partial \Gamma'^\tau_{\rho\sigma}}{\partial x'^\eta} - \frac{\partial \Gamma'^\tau_{\rho\eta}}{\partial x'^\sigma} - \Gamma'^\tau_{\lambda\sigma} \Gamma'^\lambda_{\eta\rho} + \Gamma'^\tau_{\lambda\eta} \Gamma'^\lambda_{\sigma\rho} \right]. \quad (6.1.10)$$

Adesso, facciamo comparire una δ^ξ_λ moltiplicando entrambi i membri di questa uguaglianza per un $\partial x^\xi/\partial x'^\tau$. Prima però facciamo un'osservazione: a primo membro abbiamo una struttura $R^\xi_{\mu\nu\kappa}$; a secondo membro abbiamo la stessa struttura scritta nel sistema primo, ovvero $R'^\tau_{\rho\sigma\eta}$. Facendo agire la δ otteniamo:

$$R^\xi_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\tau} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} R'^\tau_{\rho\sigma\eta}. \quad (6.1.11)$$

Abbiamo trovato un oggetto, definito attraverso l'equazione (6.1.10), che si trasforma come un tensore perché passando da un sistema di coordinate all'altro gli indici alti trasformano proprio come un vettore controvariante e i tre indici bassi trasformano con la legge di trasformazione inversa dei vettori covarianti. Riscriviamolo in modo da evidenziare la sua struttura:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\eta\kappa} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\eta\nu} \quad (6.1.12)$$

tale oggetto è un tensore di rango 4 e prende il nome di **tensore di Riemann-Christoffel** o *tensore di curvatura* in quanto contiene informazioni relative alla curvatura della varietà di cui esso è tensore.¹ Il tensore di Riemann rappresenta la generalizzazione della curvatura di Gauss, ovvero quella funzione

¹Bisogna fare attenzione alle definizioni che si trovano su vari libri perché a volte viene definito con un segno meno davanti a tutto.

attraverso la quale Gauss aveva identificato come esprimere la curvatura di una superficie bidimensionale. Lo stesso ragionamento di Gauss si può fare per varietà a N dimensioni e con signature della metrica arbitrarie, usando questo oggetto.

La struttura del tensore di Riemann contiene prodotti e derivate di Γ , la quale a sua volta, strutturalmente, è una derivata del tensore metrico: il tensore di Riemann contiene strutturalmente derivate seconde del tensore metrico (nelle derivate della Γ) e derivate prime al quadrato (nei prodotti). Si tratta di un oggetto complesso a quattro indici in N dimensioni, ha cioè N^4 componenti che non saranno tutte indipendenti, in virtù della presenza di proprietà di simmetria o antisimmetria che discuteremo.

6.1.1 Teorema di unicità

Esiste un teorema, detto **teorema di unicità**, il quale afferma che il tensore di Riemann $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ è l'unico tensore che si può costruire a partire dal tensore metrico, dalle sue derivate prime e dalle sue derivate seconde che sia lineare nelle derivate seconde. La linearità la si vede nei termini di derivata della Γ , ricordiamo infatti che:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (6.1.13)$$

nella derivata della Γ avremo un termine che contiene la derivata del tensore metrico inverso per le derivate del tensore metrico, ma anche dei termini che saranno dati dal prodotto del tensore metrico inverso $g^{\lambda\sigma}$ per la derivata seconda del tensore metrico. È possibile costruire oggetti più complessi di $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$, ma quello che ha le derivate seconde lineari è soltanto questo. Non dimostreremo tale teorema.

6.1.2 Forme contratte del tensore di Riemann

A partire dal tensore di Riemann possiamo definire due forme contratte. La prima è il cosiddetto **tensore di Ricci** a due soli indici $R_{\mu\kappa}$, che si ottiene dalla contrazione del tensore di Riemann negli indici λ e ν :

$$R_{\mu\kappa} = R^\lambda_{\mu\lambda\kappa}. \quad (6.1.14)$$

Sappiamo già che il tensore di Ricci è un tensore perché la contrazione di indici di un tensore dà un tensore di rango più basso. Dopodiché possiamo fare la contrazione sugli ultimi due indici rimanenti:

$$P \equiv g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \quad (6.1.15)$$

ottenendo un oggetto che è per costruzione uno scalare, che porta il nome di *scalare di curvatura* o **scalare di Ricci**, il quale contiene, essendo uno scalare, informazioni sulla curvatura in modo invariante.

6.2 Trasporto parallelo su curve chiuse

Per vedere che il tensore di Riemann ha qualcosa a che fare con la curvatura della varietà effettuiamo un calcolo specifico per vedere cosa succede a un vettore trasportato parallelamente su una curva chiusa. Avevamo già fatto questo ragionamento: se ci mettiamo sul piano euclideo, consideriamo un vettore e una traiettoria chiusa e trasportiamo parallelamente il vettore, tornando nel punto di applicazione, il vettore non ruota, rimane parallelo a se stesso. Se questa operazione la facciamo invece su una superficie bidimensionale come la superficie sferica $\mathbb{S}^2$, allora, a seconda del cammino che facciamo, il vettore tornerà al punto di partenza non necessariamente parallelo a se stesso. A questo riguardo avevamo discusso di come, ad esempio, il trasporto parallelo del vettore lungo l'equatore, non ruoti il vettore quando questi ritorna al punto di partenza, mentre il trasporto parallelo lungo un cammino chiuso, condotto su cerchi massimi e che passi dal polo nord induce una rotazione di un certo angolo - 90° , in tal caso.

Dunque, su una varietà curva è ammissibile che $\Delta\vec{v} = 0$, ma in generale si ha $\Delta\vec{v} \neq 0$. La cosa interessante però non è tanto la dipendenza dal cammino, quanto il fatto la presenza di una variazione $\Delta\vec{v} \neq 0$ è una anifestazione del fatto che la varietà su cui siamo seduti sia curva.

Calcoliamo l'entità della variazione di un vettore trasportato parallelamente lungo un cammino chiuso, che vedremo, dipendere dal tensore di Riemann. Svolgiamo il calcolo su una curva infinitesima. Questo è sufficiente perché lo si può poi generalizzare a qualunque curva arbitraria, basta infatti prendere la regione interna della curva, dividerla in domini infinitesimi e fare su ognuno di questi un trasporto parallelo. Ogni link interno verrà percorso due volte, una volta in un senso e un'altra nel senso opposto, portando un contributo pari a zero. Quindi per un cammino C la cui area racchiusa sia suddivisa in cammini infinitesimi c_i :

$$(\Delta s_\mu)_C = \sum_i (\Delta s_\mu)_{c_i} \quad (6.2.1)$$

ci interessa quindi fare il calcolo sul cammino infinitesimo. Consideriamo un vettore nella sua formulazione covariante s_μ . L'equazione del trasporto parallelo del vettore è:

$$\frac{D s_\mu}{D \tau} = 0 \quad (6.2.2)$$

in cui se esplicitiamo tutto:

$$\frac{ds_\mu}{d\tau} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} s_\lambda = 0 \quad \implies \quad \frac{ds_\mu}{d\tau} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} s_\lambda. \quad (6.2.3)$$

Dopodiché, prendiamo un punto e un *cammino chiuso infinitesimo*. Il cammino lo possiamo scrivere utilizzando come al solito una forma del tipo:

$$x^\mu = x^\mu(\tau) \quad (6.2.4)$$

e la condizione di cammino chiuso implica che:

$$x^\mu(\tau_0) = x^\mu(\tau_1). \quad (6.2.5)$$

Data l'equazione trasporto parallelo, la variazione Δs_μ lungo il cammino chiuso sarà:

$$\Delta s_\mu \Big|_C = \int_{(0)}^{(1)} ds_\mu \Big|_C \quad (6.2.6)$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{ds_\mu}{d\tau} d\tau \Big|_C \quad (6.2.7)$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} s_\lambda d\tau \Big|_C \quad (6.2.8)$$

$$= \oint_{\tau_0}^{\tau_1} \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) s_\lambda(\tau) dx^\nu \Big|_C. \quad (6.2.9)$$

Si noti che Γ è una funzione definita ovunque sullo spazio, mentre il vettore potrebbe essere definito anche solo sul cammino, quindi lo scriviamo come funzione di τ . Il fatto di esserci messi su un cammino infinitesimo permette adesso di fare uno sviluppo in serie della Γ attorno al punto di partenza P , che ha coordinate $P^\rho = x^\mu(\tau_0)$ e anche di s_λ . Scriviamo:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(P) + \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Big|_P (x^\rho - P^\rho) + \dots \quad (6.2.10)$$

in cui trascuriamo i termini di ordine successivo al primo. Il cammino s è sviluppato come:

$$s_\lambda(\tau) = s_\lambda(\tau_0) + ds_\lambda \quad (6.2.11)$$

l'avanzamento del vettore ds_λ lo prendiamo dall'equazione del trasporto parallelo, dunque:

$$s_\lambda(\tau) = s_\lambda(\tau_0) + \Gamma^\sigma_{\lambda\rho}(P) s_\sigma(\tau_0) (x^\rho - P^\rho). \quad (6.2.12)$$

Possiamo a questo punto sostituire in (6.2.9) le scritture (6.2.10) e (6.2.11):

$$\Delta s_\mu = \oint \left[\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(P) + \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Big|_P (x^\rho - P^\rho) \right] \left[s_\lambda(\tau_0) + \Gamma^\sigma_{\lambda\rho}(P) s_\sigma(\tau_0) (x^\rho - P^\rho) \right] dx^\nu \quad (6.2.13)$$

facciamo i prodotti rimanendo il primo ordine. Notiamo che i termini $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(P)$ e $\partial_P \Gamma^\lambda_{\mu\nu}|_P$ sono costanti, così come anche P^ρ e $\Gamma^\sigma_{\lambda\rho}(P) s_\sigma(\tau_0)$. Non esprimeremo più la dipendenza dal punto per alleggerire la notazione. Abbiamo:

$$\Delta s_\mu = \oint \left[\Gamma^\lambda_{\mu\nu} s_\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} s_\sigma (x^\rho - P^\rho) + \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} s_\lambda (x^\rho - P^\rho) \right] dx^\nu \quad (6.2.14)$$

separiamo i termini puramente costanti da quelli non:

$$\begin{aligned} \Delta s_\mu = & \left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} s_\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} s_\sigma (-P^\rho) + \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} s_\lambda (-P^\rho) \right) \oint dx^\nu + \\ & + \left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} s_\sigma + \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} s_\lambda \right) \oint x^\rho dx^\nu \quad (6.2.15) \end{aligned}$$

il primo integrale è chiaramente nullo perché è l'integrale circuitale lungo un circuito è chiuso. Quindi la variazione del vettore risulta essere:

$$\Delta s_\mu = \left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} s_\sigma + \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} s_\lambda \right) \oint x^\rho dx^\nu \quad (6.2.16)$$

rinominando l'indice sommato $\lambda \rightarrow \sigma$ abbiamo:

$$\Delta s_\mu = \left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} s_\sigma + \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \right) s_\sigma \oint x^\rho dx^\nu \quad (6.2.17)$$

ci rendiamo conto che la struttura del termine tra parentesi è del tipo $T^\sigma_{\mu\nu\rho}$ e possiamo scrivere:

$$\Delta s_\mu = T^\sigma_{\mu\nu\rho} s_\sigma \oint x^\rho dx^\nu. \quad (6.2.18)$$

Notiamo ora che l'integrale circuitale è antisimmetrico:

$$\oint x^\rho dx^\nu = - \oint x^\nu dx^\rho \quad (6.2.19)$$

il che si dimostra facendo un'integrazione per parti, infatti:

$$d(x^\rho x^\nu) = x^\rho dx^\nu + dx^\rho x^\nu \quad (6.2.20)$$

se sostituiamo:

$$\oint x^\rho dx^\nu = \oint d(x^\rho x^\nu) - \oint x^\nu dx^\rho \quad (6.2.21)$$

nuovamente vediamo che:

$$\oint d(x^\rho x^\nu) = x^\rho x^\nu \Big|_{\tau_0}^{\tau_1} \quad (6.2.22)$$

$$= x^\rho(\tau_1) x^\nu(\tau_1) - x^\rho(\tau_0) x^\nu(\tau_0) \quad (6.2.23)$$

$$= 0 \quad (6.2.24)$$

poiché il cammino è chiuso. Dunque vale:

$$\oint x^\rho dx^\nu = - \oint x^\nu dx^\rho. \quad (6.2.25)$$

Sfruttiamo a questo punto le proprietà dei tensori simmetrici e antisimmetrici che abbiamo visto nella sezione §5.2.4. La variazione Δs_μ su un cammino infinitesimo è:

$$\Delta s_\mu = T^\sigma_{\mu\nu\rho} s_\sigma \oint x^\rho dx^\nu \quad (6.2.26)$$

$$= (T^\sigma_{\mu\nu\rho} s_\sigma) A^{\rho\nu} \quad (6.2.27)$$

e siccome l'integrale è antisimmetrico, nel termine tra parentesi sopravviverà solo:

$$\Delta s_\mu = T^\sigma_{\mu[\nu\rho]} s_\sigma \oint x^\rho dx^\nu \quad (6.2.28)$$

$$= \frac{1}{2} (T^\sigma_{\mu\nu\rho} - T^\sigma_{\mu\rho\nu}) s_\sigma \oint x^\rho dx^\nu \quad (6.2.29)$$

guardando com'è fatto questo oggetto rispetto all'oggetto di partenza, stiamo ottenendo:

$$\Delta s_\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma^\sigma_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \right) s_\sigma \oint x^\rho dx^\nu \quad (6.2.30)$$

l'oggetto che compare tra parentesi è proprio il tensore di Riemann (6.1.12). Dunque, la variazione del vettore sul cammino chiuso è pari a:

$$\Delta s_\mu = \frac{1}{2} R^\sigma_{\nu\mu\rho} s_\sigma \oint x^\rho dx^\nu. \quad (6.2.31)$$

La variazione dipende sia dal tensore di Riemann, sia dal cammino che facciamo. La variazione è nulla per quei particolari cammini in cui l'integrale circuitale è nullo, ma per cammini arbitrari la variazione sarà nulla se e solo se il tensore di Riemann è nullo. Quindi la variazione è non nulla se il tensore di Riemann non è identicamente nullo, dunque, esso contiene l'informazione di quanto ruota il vettore per trasporto parallelo. Ma siccome la rotazione del vettore per trasporto parallelo è una manifestazione del fatto che la varietà è curva, allora il tensore di Riemann contiene informazioni sul fatto che la varietà sia una varietà curva. Allo stesso tempo vediamo che se indipendentemente dal cammino abbiamo:

$$\Delta s_\mu = 0 \quad \text{sempre} \quad \implies \quad R^\sigma_{\nu\mu\rho} = 0 \quad (6.2.32)$$

ciò significa che almeno nella regione in cui abbiamo il cammino, la varietà è piatta. Questa è tra l'altro un'affermazione tensoriale, quindi valida in ogni sistema di coordinate. Se poi abbiamo:

$$R^\sigma_{\nu\mu\rho} = 0 \quad \text{ovunque} \quad (6.2.33)$$

cioè in tutta la varietà, allora il vettore non ruoterà mai per cammini arbitrari e la varietà è piatta. L'annullarsi del tensore di Riemann ovunque

assicura che la varietà sia piatta. Quindi il tensore di Riemann ci permette di affermare se la varietà sia curva o meno. Esso potrebbe essere nullo solo in una porzione dell'intera varietà.²

6.2.1 Corollario dell'annullarsi del tensore di Riemann

Supponiamo che $R^\sigma_{\nu\mu\rho} = 0$ in una certa zona dello spazio della varietà (la zona verde della figura 6.1). Se prendiamo un vettore e lo trasportiamo parallelamente con curve all'interno della sola regione verde, il risultato che otteniamo non dipende dal cammino.



Figura 6.1

Dimostriamolo con il seguente ragionamento. Consideriamo un cammino chiuso e prendiamo un punto P e un punto Q . Se il tensore di Riemann in quella porzione di spazio è nullo, la variazione Δs_μ per andare da P a Q e poi per tornare da Q a P è pari a zero:

$$(\Delta s_\mu)_{tot} = (\Delta s_\mu)_{P \rightarrow Q}^A + (\Delta s_\mu)_{Q \rightarrow P}^B = 0 \quad (6.2.34)$$

allora:

$$(\Delta s_\mu)_{P \rightarrow Q}^A = -(\Delta s_\mu)_{Q \rightarrow P}^B \quad (6.2.35)$$

che possiamo anche vedere come:

$$(\Delta s_\mu)_{P \rightarrow Q}^A = (\Delta s_\mu)_{P \rightarrow Q}^B \quad (6.2.36)$$

e abbiamo ottenuto che la variazione del vettore per andare da P a Q è uguale lungo due cammini diversi. Questo vale solo se la varietà in quella zona è piatta.

²Supponiamo di avere, l'orografia della pianura padana e dell'Italia. È chiaro che se andiamo in montagna la varietà superficie è chiaramente curva. Se stiamo nella pianura Padana è piatta. Quindi nella zona della pianura padana il tensore di Riemann è nullo, mentre andando in montagna il tensore di Riemann non avrà componenti nulle. Il valore di queste componenti sarà dipendente da come e quanto è curva la varietà in ogni punto in montagna.

6.3 Sistemi di coordinate

In questa sezione vediamo delle cose, già viste sicuramente, riguardo al tensore metrico, ma con dei dettagli che prima non eravamo in grado di osservare.

Mettiamoci in uno spazio tempo di Minkowski e facciamo qualche considerazione sulla forma che assume, nei vari sistemi di coordinate, il tensore metrico. Finora abbiamo sempre considerato un sistema di coordinate minkowskiano $\xi^\alpha = (t, x, y, z)$, dove le coordinate sono ortogonali nel senso che la coordinata 0, è la coordinata di tempo, e le coordinate 1, 2, 3 sono le coordinate cartesiane del sottospazio tridimensionale euclideo. In questo set di coordinate:

$$-d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = -(d\xi^0)^2 + \sum_i (d\xi^i)^2 \quad (6.3.1)$$

con le componenti del tensore metrico pari a:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} -1 & \alpha = \beta = 0 \\ +1 & \alpha = \beta = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (6.3.2)$$

Possiamo però utilizzare un sistema di coordinate diverso dal sistema di coordinate di Minkowski e passare al sistema di coordinate delle coordinate polari sferiche:

$$\xi^\alpha = (t, x, y, z) \longrightarrow x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \varphi) \quad (6.3.3)$$

e in questo set di coordinate:

$$-d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6.3.4)$$

e ciò da un set all'altro trasforma come un tensore, che è $g_{\mu\nu}$. La trasformazione di coordinate è semplice da fare:

$$\begin{cases} \xi^0 = x^0 \\ \xi^1 = x = r \sin \theta \cos \varphi = x^1 \sin(x^2) \cos(x^3) \\ \xi^2 = y = r \sin \theta \sin \varphi \\ \xi^3 = z = r \cos \theta \end{cases} \quad (6.3.5)$$

si noti che le coordinate non devono necessariamente essere dimensionalmente delle lunghezze, in questo caso abbiamo due grandezze che all'unità naturale sono delle lunghezze e due quantità che sono degli angoli. Inoltre:

- Nella trasformazione di coordinate che abbiamo fatto, l'elemento di linea $d\tau^2$:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\eta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = d\tau'^2 \quad (6.3.6)$$

rimane invariante.

- Affinché ciò avvenga deve valere questa relazione:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (6.3.7)$$

che ci dice che $g_{\mu\nu}$, ovvero $\eta_{\alpha\beta}$, è un tensore di rango $(0, 2)$. Per ottenere la trasformazione diretta, infatti, basta semplicemente che:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (6.3.8)$$

e richiedere:

$$\eta_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta}. \quad (6.3.9)$$

Se vogliamo la trasformazione inversa:

$$-d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6.3.10)$$

e per definizione:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (6.3.11)$$

6.3.1 Le componenti del tensore metrico

Posso allora calcolare come sono fatte le componenti del tensore metrico nel nuovo set di coordinate, innanzitutto:

$$g_{00} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^0} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^0} \eta_{\alpha\beta} \quad (6.3.12)$$

$$= \frac{\partial \xi^0}{\partial x^0} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^0} \eta_{00} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^0} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^0} \eta_{ij} + 2 \frac{\partial \xi^0}{\partial x^0} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^0} \eta_{0i} \quad (6.3.13)$$

essendo il tensore metrico quello di Minkowski abbiamo $\eta_{00} = -1$, $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ e $\eta_{0i} = 0$. Quindi, guardando all'equazione (6.3.5):

$$g_{00} = -1 + 0 = -1 \quad (6.3.14)$$

ma calcoliamo, sempre tenendo a mente (6.3.5), anche le altre componenti:

$$g_{0i} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^0} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^i} \eta_{\alpha\beta} \quad (6.3.15)$$

$$= \frac{\partial \xi^0}{\partial x^0} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^i} \eta_{00} + \frac{\partial \xi^a}{\partial x^0} \frac{\partial \xi^b}{\partial x^i} \eta_{ab} \quad (6.3.16)$$

$$= 0 \quad (6.3.17)$$

e a questo punto possiamo specificare le derivate che non sono nulle. Ad esempio prendiamo $g_{22} = g_{\theta\theta}$:

$$g_{\theta\theta} = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^2} \frac{\partial \xi^b}{\partial x^2} \eta_{ab} \quad (6.3.18)$$

$$= \frac{\partial \xi^a}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^b}{\partial \theta} \delta_{ab} \quad (6.3.19)$$

$$= \sum_a \left(\frac{\partial \xi^a}{\partial \theta} \right)^2 \quad (6.3.20)$$

$$= (r \cos \theta \cos \varphi)^2 + (r \cos \theta \sin \varphi)^2 + (r \sin \theta)^2 \quad (6.3.21)$$

$$= r^2. \quad (6.3.22)$$

Riscriviamo il risultato. Mentre nel sistema di coordinate ξ^α avevamo:

$$\eta_{00} = -1 \quad , \quad \eta_{0i} = \eta_{i0} = 0 \quad , \quad \eta_{ij} = \delta_{ij} \quad (6.3.23)$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.24)$$

nel sistema di coordinate x^μ ci ritroviamo con:

$$g_{00} = g_{tt} = -1 \quad , \quad g_{0i} = g_{i0} = 0 \quad (6.3.25)$$

$$g_{11} = g_{rr} = 1 \quad , \quad g_{22} = g_{\theta\theta} = r^2 \quad , \quad g_{33} = g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta \quad (6.3.26)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (6.3.27)$$

e inoltre:

$$d\tau^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (6.3.28)$$

Dunque, nel nuovo set di coordinate il tensore metrico rimane diagonale, ma non è più costante. Ciò significa che lo spazio-tempo è diventato curvo? Chiaramente no, lo spazio-tempo è sempre lo spazio-tempo piatto della Relatività Speciale di Minkowski, ma abbiamo soltanto scelto un set di coordinate nuove e in questo set di coordinate nuove il tensore metrico assume una forma diversa.

Possiamo farci allora delle domande. Se abbiamo un tensore metrico $g_{\mu\nu}(x)$, dipendente dalle coordinate, che non è costante, come facciamo a dire se esso descrive uno spazio curvo oppure lo spazio-tempo piatto di Minkowski? Infatti, è presente un'importante differenza: se descrivo uno spazio curvo, nel caso di uno spazio-tempo, abbiamo un campo gravitazionale, ma se lo spazio è piatto, non c'è campo gravitazionale! Se fossimo in grado trovare una trasformazione di coordinate che ci portano in un set di coordinate

opportuno in cui il tensore metrico è ovunque diagonale e costante, allora sapremmo di essere in uno spazio-tempo piatto. La domanda che ci vogliamo porre per capire se questo tensore metrico descrive una varietà curva oppure no è: dato un tensore metrico, come facciamo a sapere se esiste una trasformazione di coordinate $x^\mu \rightarrow \xi^\alpha$ che ci porta in un set di coordinate in cui ovunque vale:

$$\eta^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (6.3.29)$$

Ora, in un punto specifico P possiamo sempre trovare un sistema di coordinate ξ_P^α che in quel punto ha questa proprietà. Se ragioniamo in termini di teoria della gravità, quindi di principio di equivalenza, sappiamo che questo esiste sempre in virtù dello stesso principio di equivalenza, infatti tale sistema di riferimento è il sistema di coordinate che in quel punto è in caduta libera. Se ragioniamo in termini geometrici, questo è il sistema di coordinate del piano tangente in quel punto. Per sapere se il tensore metrico descrive una varietà curva o piatta non importa però che noi possiamo trovare in un punto solo un sistema di coordinate in cui il tensore metrico è quello di Minkowski. Vorremmo piuttosto che questo sia vero ovunque, per ogni punto P . Infatti se è vero che in ogni punto il piano tangente è sempre il piano di Minkowski, nel caso di varietà piatta sarebbe sufficiente un singolo piano per ricoprire l'intera varietà. Nel caso in cui invece avessimo una varietà curva, avremmo il cosiddetto *fibrato tangente*, realizzato dall'insieme disgiunto di tutti i piani tangenti ciascuno per ogni singolo punto. In altri termini, la sola varietà il cui fibrato tangente coincide con un unico piano è lo spazio-tempo piatto.

Stiamo dunque cercando un insieme di coordinate che soddisfino ovunque la proprietà precedente. Per sapere se tale sistema di coordinate esiste, utilizziamo un teorema:

Teorema 4 *Condizione necessaria e sufficiente affinché il tensore metrico $g_{\mu\nu}(x)$ sia equivalente al tensore metrico di Minkowski è:*

- *Il tensore di Riemann è nullo ovunque $R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = 0$.*
- *In un qualunque punto P la matrice $g_{\mu\nu}(P)$ ha tre autovalori di un segno e un autovalore del segno opposto $(3+, 1-)$.*

In questo caso allora il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ è equivalente al tensore metrico di Minkowski, ovvero vale:

$$\eta^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad (6.3.30)$$

$$\eta_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta}. \quad (6.3.31)$$

Non dimostriamo il teorema, ma questo discende da quello che abbiamo visto. Il tensore di Riemann è costruito a partire dalle derivate prima e seconda del tensore metrico: dato il tensore metrico, possiamo calcolare il tensore di Riemann e verificare se questo sia uguale a zero ovunque. Tale affermazione poi è un'affermazione tensoriale, quindi la possiamo calcolare in qualunque sistema di coordinate. Affinché poi il tensore metrico sia quello di uno spazio-tempo bisogna che abbia anche gli autovalori corretti.³

Esempio Dato un tensore metrico in un sistema di coordinate $x^\mu = (x^0, r, \theta, \varphi)$:

$$(A) : g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (6.3.32)$$

e un altro, sempre in un sistema di coordinate $x^\mu = (x^0, r, \theta, \varphi)$, per cui:

$$(B) : g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (6.3.33)$$

per risponderci sul fatto che tali tensori metrici siano tensori metrici di spazi piatti o spazi curvi dobbiamo calcolare:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = 0 \quad (6.3.34)$$

Svolgendo il conto per entrambi, otterremmo che entrambi soddisfano tale condizione: sono entrambi spazi piatti. Tuttavia solo il tensore metrico (A), dato un valore r e θ diversi da zero, possiede tre autovalori positivi e un autovalore negativo. Il tensore (B) invece ne ha quattro tutti positivi. Quindi, lo spaziotempo piatto descritto da (A) è lo spazio di Minkowski, mentre quello descritto da (B) è semplicemente lo spazio Euclideo in quattro dimensioni $\mathbb{R}^4$.

In conclusione, il tensore di Riemann ci permette di determinare subito se un tensore metrico che ci viene dato è il tensore metrico di una varietà curva piuttosto che piatta. Tutto ciò basa sul fatto che la proprietà dello spazio che stiamo studiando sono codificate nel tensore metrico, attraverso il quale possiamo definire la distanza tra due punti e anche il tensore di Riemann, cioè il tensore di curvatura. Dunque $g_{\mu\nu}$ è la grandezza fondamentale che determina sia la metrica cioè la distanza tra due punti sia la *curvatura* della varietà.

³Ricordiamo che la segnatura $(3, 1)$ discende dalla richiesta della costanza della velocità della luce.

6.4 Proprietà algebriche del tensore di Riemann

Il tensore di Riemann (6.1.12) è un tensore con quattro indici, quindi il numero totale di componenti che esso ha dipende chiaramente dalla dimensionalità dello spazio. In uno spazio a N dimensioni ognuno di questi indici può correre su quattro valori, e ne avremmo in generale N^4 . In realtà le componenti indipendenti del tensore di Riemann sono di meno e questo discende dal fatto che il tensore di Riemann ha delle proprietà algebriche che deve soddisfare. Per vedere quali siano le proprietà algebriche del tensore di Riemann possiamo riscriverlo con indici bassi, contraendo con il tensore metrico:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma} R^{\sigma}_{\mu\nu\kappa} \quad (6.4.1)$$

$$= g_{\lambda\sigma} \left\{ \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} \Gamma^{\sigma}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa} \Gamma^{\sigma}_{\nu\eta} \right\} \quad (6.4.2)$$

ricordiamo la relazione (4.3.66) e per la derivata prima avremo:

$$\begin{aligned} \partial_{\kappa} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_{\kappa} g^{\sigma\rho}) (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_{\kappa} \partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\kappa} \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\kappa} \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

e possiamo manipolare i vari termini. Possiamo utilizzare (4.3.59), che abbiamo già visto in passato, e scrivere inoltre:

$$\partial_{\kappa} g^{\rho\sigma} = -g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} \left(\Gamma^{\eta}_{\kappa\alpha} g_{\beta\eta} + \Gamma^{\eta}_{\kappa\beta} g_{\alpha\eta} \right) \quad (6.4.4)$$

che esprime la derivata del tensore metrico inverso e che assomiglia alla derivata del tensore metrico espressa da (4.3.59), ma in più contiene dei fattori g davanti. Inoltre, g non commuta con l'operatore derivativo ordinario. Per dimostrare (6.4.4) prendiamo la relazione che c'è tra il tensore metrico e il tensore metrico inverso:

$$g_{\lambda\sigma} g^{\rho\sigma} = \delta^{\rho}_{\lambda} \quad (6.4.5)$$

deriviamo e otteniamo:

$$\partial_{\kappa} (g_{\lambda\sigma} g^{\rho\sigma}) = \partial_{\kappa} (\delta^{\rho}_{\lambda}) \quad (6.4.6)$$

$$(\partial_{\kappa} g_{\lambda\sigma}) g^{\rho\sigma} + g_{\lambda\sigma} (\partial_{\kappa} g^{\rho\sigma}) = 0 \quad (6.4.7)$$

$$g_{\lambda\sigma} (\partial_{\kappa} g^{\rho\sigma}) = (\partial_{\kappa} g_{\lambda\sigma}) g^{\rho\sigma} \quad (6.4.8)$$

possiamo moltiplicare per $g^{\alpha\lambda}$, in modo da far comparire una δ^{α}_{σ} ed isolare $(\partial_{\kappa} g^{\rho\sigma})$:

$$(\partial_{\kappa} g^{\rho\sigma}) = -g^{\lambda\alpha} g^{\rho\sigma} ((\partial_{\kappa} g_{\lambda\sigma})) \quad (6.4.9)$$

$$= -g^{\lambda\alpha} g^{\rho\sigma} (\Gamma^{\eta}_{\kappa\lambda} g_{\sigma\eta} + \Gamma^{\eta}_{\kappa\sigma} g_{\lambda\eta}) \quad (6.4.10)$$

in cui abbiamo utilizzato la (4.3.59), che ci permette di dimostrare ciò che volevamo.

Comunque, utilizzando (4.3.59) e (6.4.4), possiamo riscrivere il primo termine del tensore $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$. Notiamo che si generano dei termini $\Gamma\Gamma$ con una certa struttura di indici; notiamo anche che compaiono termini del genere anche in (6.4.3). Il secondo termine invece contiene le derivate seconde di g , e si noti che $\partial_\kappa \Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ compare in (6.4.3), dove poi ne è presente un altro con gli indici ν e κ scambiati: vediamo dunque esplicitamente che il tensore di Riemann è una combinazione lineare di derivate seconde. Abbiamo quindi un risultato del tipo:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \underbrace{\partial_\kappa \partial_\mu g_{\nu\rho} + \dots}_{\text{derivate 2° lineari}} + (\Gamma\Gamma) \quad (6.4.11)$$

esplicitando i diversi termini:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right] + g_{\eta\sigma} \left[\Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\eta_{\kappa\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \right] \quad (6.4.12)$$

espressione che ci fa vedere esplicitamente come il tensore di Riemann sia una combinazione lineare delle derivate seconde del tensore metrico e di termini che contengono il prodotto di $\Gamma\Gamma$. Da qui possiamo studiare quali siano le proprietà per scambio degli indici.

La prima proprietà che si può vedere è la **proprietà di simmetria** per scambio di certi indici, infatti si ha:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}. \quad (6.4.13)$$

Esiste anche la **proprietà di anti-simmetria**:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} \quad (6.4.14)$$

$$= -R_{\mu\lambda\kappa\nu} \quad (6.4.15)$$

$$= +R_{\mu\lambda\kappa\nu} \quad (6.4.16)$$

in cui abbiamo fatto due scambi nell'ultima riga.

Abbiamo anche la **proprietà di ciclicità**:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0. \quad (6.4.17)$$

Il fatto che $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ soddisfi tali proprietà ha conseguenza che non tutte le componenti siano indipendenti, quindi il numero di componenti indipendenti alla fine sarà minore di quanto avremmo se contassimo soltanto il fatto che ha quattro indici.

6.4.1 Proprietà algebriche del tensore di Ricci

Il *tensore di Ricci* è definito come:

$$R_{\mu\kappa} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (6.4.18)$$

è un tensore che ha dunque meno indici del tensore di Riemann, ma eredita alcune proprietà da quelle algebriche del tensore di Riemann.

Partendo da (6.4.13) possiamo vedere che il tensore di Ricci sia simmetrico per scambio di indici:

$$R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu} \quad (6.4.19)$$

infatti si ha:

$$R_{\kappa\mu} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (6.4.20)$$

$$= g^{\lambda\nu} R_{\nu\mu\lambda\kappa} \quad (6.4.21)$$

$$= R_{\mu\kappa} \quad (6.4.22)$$

in cui: in (6.4.21) abbiamo utilizzato la proprietà (6.4.13); nell'ultima riga abbiamo utilizzato la definizione di tensore di Ricci.

La proprietà (6.4.16) permette di dimostrare che il tensore di Ricci è *essenzialmente unico*, cioè è l'unico tensore di rango 2 che posso formare per contrazione di indici del tensore di Riemann. Infatti, qualunque altra combinazione di contrazioni è o uguale o nulla. Essendo il tensore di rango 4, potremmo scegliere di contrarre il primo indice col secondo o col quarto, il secondo col quarto etc... Ognuna di queste combinazioni ci riproduce o il tensore di Ricci già definito oppure fa zero. Infatti, utilizzando a cascata la (6.4.16):

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (6.4.23)$$

$$= -g^{\lambda\nu} R_{\mu\lambda\nu\kappa} \quad (6.4.24)$$

$$= +g^{\lambda\nu} R_{\mu\lambda\mu\kappa\nu} \quad (6.4.25)$$

$$= -g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\kappa\nu} \quad (6.4.26)$$

otteniamo delle uguaglianze tra diverse contrazioni. Ottengo lo stesso tensore, al massimo scambiato di segno. Se invece contraiamo due indici della prima o della seconda coppia otteniamo 0, infatti:

$$g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0 \quad (6.4.27)$$

poiché gli indici del tensore metrico sono simmetrici e quelli del tensore di Riemann sono antisimmetrici all'interno della coppia e abbiamo contrarre un oggetto simmetrico con un antisimmetrico fa 0.

6.4.2 Proprietà dello scalare di curvatura

Lo *scalare di curvatura* è definito da:

$$R \equiv g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} = g^{\mu\kappa} g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}. \quad (6.4.28)$$

Dalla proprietà (6.4.16) possiamo dimostrare che R è essenzialmente unico, cioè è l'unico scalare di curvatura che possiamo ottenere contraendo gli indici del tensore di Riemann. Infatti, Partendo da Riemann, dobbiamo contrarre 1 con 3 per ottenere (6.4.28) e poi 2 con 4:

$$R = g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (6.4.29)$$

la contrazione 1-3, 2-4 è uguale, ma cambiata di segno rispetto alla seguente:

$$R = -g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} R_{\mu\lambda\nu\kappa} \quad (6.4.30)$$

ora stiamo contraendo 2-3 e 1-4, tale operazione produce lo stesso numero, ma cambiata di segno. Se invece eseguiamo la contrazione 1-2 e 3-4:

$$R = g^{\lambda\mu} g^{\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0 \quad (6.4.31)$$

per via delle stesse proprietà di simmetria e antisimmetria del tensore metrico e di Riemann.

6.4.3 Identità differenziali del tensore di Riemann

Il tensore di Riemann però ha anche identità differenziali, che si chiamano **identità di Bianchi**. Non le dimostreremo, ma è importante però sapere cosa dicono.

Vale la seguente identità per la derivata covariante⁴ del tensore di Riemann rispetto a una coordinata x^η :

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0. \quad (6.4.32)$$

Nota. un modo per dimostrarlo sfruttando il principio di equivalenza, sarebbe semplicemente far vedere che se ci mettiamo in un punto del campo gravitazionale, in un sistema in caduta libera in cui:

$$D_\mu \longrightarrow \partial_\mu \quad , \quad \Gamma \longrightarrow 0 \quad (6.4.33)$$

siccome la precedente, che è un'eguaglianza tensoriale, quindi vale per tutti i sistemi di riferimento, si riduce ad un'espressione che è vera anche in assenza

⁴Si noti che la derivata covariante è data dalla derivata ordinaria di $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ più tanti termini "Γ volte tensore" per ogni indice che abbiamo, e si tratta quindi un oggetto complesso.

di gravità, e ripetendo lo possiamo ripetere ovunque.

Dall'identità di Bianchi del tensore di Riemann possiamo ottenere le *identità di Bianchi* per il tensore di Ricci, che sono poi quelle più utilizzate. Per farlo contraiamo opportunamente gli indici in modo tale da arrivare all'espressione che ci interessa. Ricordiamo che:

$$D_\lambda g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu;\lambda} = 0 \quad (6.4.34)$$

questa proprietà garantisce che le operazioni di "contrarre e poi derivare" e "derivare e poi contrarre" siano uguali.

Per fare il calcolo ripartiamo dall'identità di Bianchi per il tensore di Riemann ed eseguiamo la contrazione dell'indice λ con l'indice ν . Ciò produce proprio il tensore di Ricci, quindi abbiamo:

$$R_{\mu;\eta} - R_{\mu\eta;\kappa} + R^\nu_{\mu\kappa\eta;\nu} = 0 \quad (6.4.35)$$

l'ultimo termine corrisponde effettivamente a una divergenza. Contraiamo μ con κ :

$$R_{;\eta} - R_{\eta;\kappa} - R^\nu_{\eta;\nu} = 0. \quad (6.4.36)$$

Allora, la prima contrazione ci dà lo scalare di curvatura derivata covariante rispetto ad η , la seconda è una divergenza covariante, l'ultima è un'altra divergenza covariante. Rinominando gli indici sommo i due termini uguali (divergenze). Otteniamo:

$$R_{;\eta} - 2R^\mu_{\eta;\mu} = 0 \quad (6.4.37)$$

questa espressione posso riscriverla come:

$$\left(R^\mu_{\nu} - \frac{1}{2} \delta^\mu_{\eta} R \right)_{;\mu} = 0 \quad (6.4.38)$$

Vorremmo riscriverla con tutti gli indici in alto, quindi possiamo contrarre semplicemente con $g^{\eta\nu}$, che possiamo far filtrare dentro la derivata perché ha derivata covariante nulla. Allora, l'espressione finale che otteniamo:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\mu} = 0 \quad (6.4.39)$$

quest'ultima espressione rappresenta quattro equazioni, che sono le **identità di Bianchi per il tensore di Ricci** e lo scalare di curvatura.

Si noti che assume la forma di una divergenza covariante. Se definiamo il tensore:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (6.4.40)$$

allora:

$$D_\mu G^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 \quad (6.4.41)$$

tale tensore è conservato. Quest'ultima cosa vale per qualunque spazio, di qualunque dimensione, con qualunque tipo di metrica. Il tensore $G_{\mu\nu}$ porta il nome di **tensore di Einstein** e sarà l'elemento che ci servirà per scrivere l'*equazione di Einstein*.

Tale oggetto contiene il tensore di Riemann e lo scalare di curvatura, quindi dentro questo oggetto ci sono le derivate seconde del tensore metrico in forma lineare, sommate o sottratte, più termine del tipo "derivata prima al quadrato". Solo questa combinazione ha divergenza covariante uguale a 0.

6.4.4 Curvatura in N dimensioni

Sfruttando adesso le proprietà algebriche del tensore di Riemann, andiamo a contare quante siano le componenti algebricamente indipendenti del tensore di Riemann. Sfruttando le proprietà (6.4.13), (6.4.16) e (6.4.17). Rispetto a $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ è facile capire che all'interno della coppia $\lambda\mu$, essendo antisimmetrica, il numero di combinazioni indipendenti dei due indici è un numero:

$$m = \frac{1}{2} N(N-1). \quad (6.4.42)$$

Analogamente per la coppia $\nu\kappa$. Sappiamo anche che lo scambio delle due coppie è simmetrico. Per un oggetto simmetrico il numero di componenti indipendenti:

$$s = \frac{1}{2} m(m+1) \quad (6.4.43)$$

sostituendo m in s otteniamo un primo risultato. Dobbiamo però togliere un'altra combinatorica legata alla proprietà (6.4.17). Il numero di componenti indipendenti - importante! - in N dimensioni è:

$$C_N = \frac{1}{12} N^2 (N^2 - 1). \quad (6.4.44)$$

Il numero di componenti indipendenti del tensore di Riemann, del tensore di Ricci e del tensore metrico in funzione della dimensione N della varietà sono riportate in tabella 6.2.

N	$R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$	$R_{\mu\nu}/g_{\mu\nu}$
1	0	1
2	1	3
3	6	6
4	20	10

Figura 6.2

Essendo il tensore di Ricci e il tensore metrico entrambi di rango 2, simmetrici, il numero di componenti indipendenti è lo stesso. Si noti che per il

tensore di Riemann, in una dimensione non si hanno componenti indipendenti ciò equivale a dire che in una dimensione non abbiamo curvatura. In due dimensioni ne abbiamo solo una, e questo coincide con quello che trovava Gauss per le varietà bidimensionali in cui aveva identificato una funzione di curvatura per descrivere la curvatura di uno spazio. In 3 dimensioni ne abbiamo 6, in 4 dimensioni 20 e così via.

Notiamo che in tre dimensioni il numero di componenti indipendenti di Riemann e di Ricci è uguale. Dalle quattro dimensioni in su, Riemann ne ha progressivamente molti di più.

Vediamo ora in dettaglio le varietà nelle diverse dimensioni.

Varietà 1D. Mettiamoci in varietà unidimensionale. Il numero di componenti indipendenti del tensore di Riemann è $C_N = 0$. Questo è un fatto ovvio, infatti il tensore di Riemann sarà un oggetto R_{abcd} in cui $a, b, c, d = 1$. Possiamo solo scrivere allora solo R_{1111} , ma questo non può che essere 0, poiché lo scambio all'interno della prima coppia ci dà lo stesso oggetto cambiato di segno!

$$R_{1111} = -R_{1111} \implies R_{1111} = 0 \quad (6.4.45)$$

in cui abbiamo utilizzato la proprietà di antisimmetria. Quello che abbiamo trovato equivale a dire che in una dimensione non c'è curvatura. Se consideriamo come varietà unidimensionale la retta, risulta intuitivo. Del resto se consideriamo un vettore, e lo trasportiamo parallelamente lungo un cammino chiuso (andiamo da A a B per poi tornare indietro), esso resta parallelo a se stesso. Ciò è vero anche se ci metto su una varietà come il cerchio $\mathbb{S}^1$, guardandolo sul piano cartesiano che è lo suo spazio di immersione. La differenza tra la retta e il cerchio è che quest'ultimo è uno spazio compatto, ha una condizione di periodicità, mentre la retta è uno spazio infinito. Sono comunque una varietà senza curvatura.

Varietà 2D. Per $N = 2$ abbiamo visto che il numero di componenti indipendenti del tensore di Riemann è $C_N = 1$. Nuovamente, dato R_{abcd} con $a, b, c, d = 1, 2$ si ha essenzialmente una sola componente, tutte le altre sono o 0 uguale a quella. L'unica componente che possiamo prendere è R_{1212} . Infatti:

$$R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121} \quad (6.4.46)$$

Invece:

$$R_{1111} = R_{1122} = R_{2211} = R_{2222} = 0 \quad (6.4.47)$$

poiché scambiare all'interno della prima coppia o della seconda coppia è antisimmetrico, ci porta nella stessa configurazione, come abbiamo visto prima. Quindi abbiamo otto quantità, ma *essenzialmente* ce n'è solo una. Chiaramente R_{1212} dipende dalla varietà, se conosco il suo tensore è metrico, posso

calcolarla. Ci piacerebbe poter dare un'espressione manifestamente tensoriale che contiene tale informazione. Un modo per farlo è il seguente. Si può mostrare per ispezione che $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ si può scrivere usando solo il tensore metrico e quell'unica funzione che dipende dalla varietà:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = (g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu}) \frac{R_{1212}}{g} \quad (6.4.48)$$

dove g è il determinante della metrica. Rispetto a questa espressione, le proprietà di simmetria e antisimmetria sono perfettamente soddisfatte. Dobbiamo però verificare che le otto quantità siano correttamente espresse in questa forma. Per ispezione:

$$R_{1212} = (g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}) \frac{R_{1212}}{g} \quad (6.4.49)$$

Notiamo però che il termine tra parentesi corrisponde proprio a g , determinante della metrica. Quindi:

$$R_{1212} = g \frac{R_{1212}}{g} = R_{1212}. \quad (6.4.50)$$

Se calcoliamo poi:

$$R_{1122} = (g_{12} g_{12} - g_{12} g_{12}) \frac{R_{1212}}{g} = 0 \quad (6.4.51)$$

e così via per le altre componenti.

La scrittura (6.4.48) non è palesemente un tensore poiché contiene una componente di un tensore, che non trasforma come un tensore, ma come una componente specifica. Per andare in questa direzione, calcoliamo il tensore di Ricci:

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g^{\lambda\nu} (g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu}) \frac{R_{1212}}{g} \quad (6.4.52)$$

però osserviamo che:

$$g^{\lambda\nu} g_{\lambda\nu} = \text{Tr}\{g_{\mu\nu}\} = N = 2 \quad (6.4.53)$$

dove N è il numero delle dimensioni dello spazio, infatti:

$$g^{\lambda\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta^\lambda_\nu \implies g^{\lambda\sigma} g_{\sigma\lambda} = \delta^\lambda_\lambda = N \quad (6.4.54)$$

dopodiché la contrazione $g^{\lambda\nu} g_{\lambda\kappa} = \delta^\nu_\kappa$. Otteniamo dunque che (6.4.52) si scrive come:

$$R_{\mu\kappa} = g_{\mu\nu} \frac{R_{1212}}{g}. \quad (6.4.55)$$

Infine contraendo gli ultimi due indici:

$$R = \frac{2 R_{1212}}{g} \quad (6.4.56)$$

invertendo la relazione scriviamo:

$$\frac{2 R_{1212}}{g} = \frac{1}{2} R \quad (6.4.57)$$

allora l'equazione (6.4.48) si può riscrivere come:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} R (g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu}). \quad (6.4.58)$$

Quest'ultima scrittura è palesemente tensoriale. Essa non contiene nessuna informazione in più di quella contenuta nello scalare di curvatura. Infatti è giusto che R contenga tutta l'informazione sulla curvatura poiché abbiamo detto che in due dimensioni abbiamo una sola componente del tensore di Riemann e ciò vuol dire che è sufficiente una funzione per descrivere la curvatura.

Tutto ciò compatibile con quanto diceva Gauss in due dimensioni, che aveva identificato una funzione $K(x_1, x_2)$, ricostruendo la quale osserveremo che è identica allo scalare di curvatura. Con le nostre notazioni:

$$K = -\frac{R}{2} \quad (6.4.59)$$

quindi per due dimensioni, scritta così, la curvatura è un invariante, è una proprietà intrinseca della varietà della superficie e non dipende dal sistema di coordinate.

Varietà 3D. In tre dimensioni abbiamo visto che il numero di componenti indipendenti del tensore di Riemann è 6 pari al numero di componenti indipendenti del tensore di Ricci. Dato che il tensore di Ricci è la contrazione del tensore di Riemann, quindi anch'esso contiene l'informazione che ci dà il tensore di Riemann, ciò significa che possiamo riesprimere il tensore di Riemann come combinazione del solo tensore di Ricci e del tensore metrico (analogo al caso 2D). Riportiamo tale decomposizione solo per commentarla:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\nu} R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa} R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} R (g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu}) \quad (6.4.60)$$

se conosciamo il tensore di Riemann conosciamo sempre il tensore di Ricci perché facciamo opportune contrazioni, ma in tal caso basta anche solo conoscere le 6 componenti di Ricci per conoscere l'intero tensore di Riemann. L'informazione contenuta nei due è la stessa.

Varietà 4D. A partire da quattro dimensioni in su, le componenti del tensore di Riemann sono di più delle componenti del tensore di Ricci. Questo vuol dire che il tensore di Riemann contiene più informazione del tensore di Ricci; quindi la conoscenza completa delle proprietà di curvatura richiede l'intero tensore di Riemann. Quest'ultimo quindi non può più essere scritto solamente a partire da combinazioni lineari di Ricci e del tensore metrico ed eventualmente dello scalare di curvatura. É possibile solo sotto particolari condizioni, ma in generale non è possibile.

Questo si può anche vedere o dire in un altro modo. Per $N \geq 3$ abbiamo:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{N-2} \left(g_{\lambda\nu} R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa} R_{\lambda\nu} \right) - \frac{R}{(N-1)(N-2)} \left(g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu} \right) + C_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (6.4.61)$$

dove $C_{\lambda\mu\nu\kappa}$ è il cosiddetto **tensore di Weyl**. Questo ha traccia nulla, dove con traccia si intende la contrazione del primo col terzo indice:

$$C_{\lambda\mu\lambda\kappa} = 0 \quad (6.4.62)$$

e ha le stesse proprietà algebriche di $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$. Nel caso di tre dimensioni il tensore di Weyl è nullo. Infatti, in tre dimensioni ci riconduciamo all'espressione commentata precedentemente. Da quattro dimensioni in più in su questo tensore è presente ed è quello che si fa carico delle dieci componenti in più contenuti nell'intero tensore di Riemann rispetto a Ricci.

Mostriamo che la traccia del tensore di Weyl deve essere nulla. Facendo la contrazione sul primo e terzo il tensore di Riemann si riduce a $R_{\mu\kappa}$. Se la contrazione di λ con ν nel tensore di Weyl produce qualcosa diverso da 0, allora c'è qualcosa che non va, poiché esso non contribuisce al tensore di Ricci.

Ricapitolando, abbiamo visto che il tensore di Riemann ha proprietà algebriche che limitano il numero di componenti indipendenti C_N , ma anche proprietà differenziali che sono le proprietà di Bianchi. Le proprietà algebriche sono proprietà che valgono in ogni punto, quindi mi dicono relazioni tra componenti diverse del tensore di Riemann in un dato punto. Quelle differenziali sono relazioni che mettono in relazione il tensore di Riemann su punti adiacenti.

6.4.5 Scalari di curvatura

Finora abbiamo visto uno scalare di curvatura, quello che abbiamo chiamato scalare di Ricci, ottenuto dalla contrazione completa degli indici del tensore di Riemann:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\nu\sigma} \quad (6.4.63)$$

la differenza tra la curvatura descritta usando il tensore di Riemann e lo scalare di curvatura è che quest'ultimo è un invariante, è cioè uguale in tutti

i sistemi di coordinate, mentre un tensore trasforma. La **caratterizzazione invariante** della varietà si fa guardando a come sono fatti gli scalari, perché, per esempio, se uno scalare di curvatura $\rightarrow \infty$ in una data porzione della varietà, su quello sono d'accordo tutti. Quindi possiamo chiederci: quanti scalari si hanno in uno spazio di N dimensioni?

Gli scalari sono costruiti a partire dal tensore di Riemann e dal tensore metrico facendo delle contrazioni. Il numero di scalari in uno spazio di N dimensioni, risulta:

$$S_N = \frac{1}{12} N(N-1)(N-2)(N+3). \quad (6.4.64)$$

Riportiamo il numero di scalari in funzione della dimensione, vedi la tabella 6.3. La relazione che abbiamo fornito precedentemente è anomala per $N = 2$. Il caso 2D rappresenta un'eccezione perché c'è un sottogruppo di trasformazione di coordinate che lascia invarianti sia il tensore metrico che il tensore di Riemann, in questo modo si ha una condizione che fa sì che si abbia una funzione arbitraria.

N	S_N
1	-
2	1
3	3
4	14

Figura 6.3

Quindi lo scalare di curvatura lo possiamo usare considerare come unico scalare, quello di Ricci, in due dimensioni, ma da tre dimensioni in più non è l'unico. Possiamo costruire per esempio altri scalari facendo le seguenti combinazioni. In 3D abbiamo:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (6.4.65)$$

$$S = R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (6.4.66)$$

$$T = \left(\frac{\det\{R_{\mu\nu}\}}{\det\{g_{\mu\nu}\}} \right). \quad (6.4.67)$$

Non faremo la scrittura di tutti i possibili scalari di curvatura, ma è importante ricordare che ce ne sono più di uno e sono sempre di più, più grande la dimensione dello spazio.

Riassumendo: gli scalari di curvatura devono essere ovviamente costruiti a partire dal tensore di Riemann, se no non sono di curvatura. Ma, in virtù delle sue proprietà, il numero di scalari indipendenti che possiamo costruire in N dimensioni è progressivamente sempre più alto, in particolare in quattro dimensioni ne abbiamo 14. Questi sono oggetti scalari, quindi tutti gli

osservatori sono d'accordo con il valore di questi oggetti, perché sono invarianti per la trasformazione in generale di coordinate.

Puoi vedere in Appendice D alcuni esercizi.

6.4.6 Deviazione delle geodetiche

Vediamo un'altra manifestazione del tensore di Riemann che si ha quando si calcola la distanza tra due geodetiche man mano che ci muoviamo lungo una e l'altra geodetica. Ciò va sotto il nome di *deviazione delle geodetiche*. Ricordiamo che una geodetica, se abbiamo uno spazio-tempo, descrive un corpo in caduta libera. Consideriamo quindi due traiettorie geodetiche relative a due particelle P_1 e P_2 :

$$P_1 : x^\mu(\tau) \quad (6.4.68)$$

$$P_2 : x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau) = X^\mu(\tau) \quad (6.4.69)$$

vogliamo calcolare come evolve la separazione $\delta x^\mu(\tau)$ tra le due geodetiche. Si noti che tra l'altro $\delta x^\mu(\tau)$ è un vettore perché è la separazione di due punti. L'equazione della geodetica per il corpo P_1 è:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (6.4.70)$$

e per il corpo P_2 :

$$\frac{d^2}{d\tau^2}[x^\mu + \delta x^\mu] + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{d}{d\tau}[x^\mu + \delta x^\mu] \frac{d}{d\tau}[x^\mu + \delta x^\mu] = 0. \quad (6.4.71)$$

Lavoriamo sulla seconda equazione, considerando spostamenti δx^μ piccoli in modo tale da poter lavorare al primo ordine:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{d^2(\delta x^\mu)}{d\tau^2} + \left\{ \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x) + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} \delta x^\rho \right\} \times \\ \times \left[\frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{d(\delta x^\nu)}{d\tau} \right] \left[\frac{dx^\lambda}{d\tau} + \frac{d(\delta x^\lambda)}{d\tau} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.4.72)$$

lavorando al primo ordine in δx otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{d^2(\delta x^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\lambda)}{d\tau} + \\ + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} \delta x^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \end{aligned} \quad (6.4.73)$$

dove, per il termine con fattore 2, abbiamo sfruttato il fatto che l'indice ν e l'indice λ sono sommati su gli indici bassi della Γ , che è simmetrica, e quindi possiamo scrivere:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\lambda)}{d\tau} \quad (6.4.74)$$

perché possiamo scambiare $\nu \longleftrightarrow \lambda$. Ora, in virtù dell'equazione della geodetica per P_1 (6.4.70) abbiamo che una somma è pari a zero. L'equazione che descrive come evolve lo spostamento δx^μ è quindi:

$$\frac{d^2(\delta x^\mu)}{d\tau^2} + 2\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\lambda)}{d\tau} + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} \delta x^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (6.4.75)$$

essa è un'equazione differenziale del secondo ordine per $\delta x^\mu(\tau)$, la sua soluzione, una volta date le condizioni del contorno, permette di trovare come evolve la separazione delle due geodetiche. In questa forma non è manifestamente un'equazione covariante, cioè tensoriale. Infatti δx^μ è un vettore, ma la derivata ordinaria di un vettore non è un vettore; nel secondo termine abbiamo questo tre vettori e la Γ che non è un tensore (e nemmeno la sua derivata), analogamente l'ultimo. Individualmente nessuno dei termini è un tensore, tuttavia (6.4.75) può essere scritta in una forma manifestamente covariante. Però possiamo trovare un modo di riscrivere (6.4.75) usando la derivata covariante seconda perché essa contiene la derivata ordinaria seconda, presente nella nostra equazione. Dunque poniamo:

$$\frac{D(\delta x^\mu)}{D\tau} = \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda \equiv v^\mu \quad (\text{vettore}) \quad (6.4.76)$$

poiché la derivata covariante di un vettore è un vettore. Possiamo allora calcolare la derivata covariante di questo vettore:

$$\frac{D v^\mu}{D\tau} \equiv \frac{D^2(\delta x^\mu)}{D\tau^2} \quad (6.4.77)$$

$$= \frac{dv^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} v^\sigma \quad (6.4.78)$$

$$= \frac{d}{d\tau} \left[\frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda \right] + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \left[\frac{d(\delta x^\sigma)}{d\tau} + \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda \right] \quad (6.4.79)$$

in cui abbiamo sostituito l'espressione (6.4.76). Possiamo sviluppare le derivate:

$$\begin{aligned} \frac{D^2(\delta x^\mu)}{D\tau^2} &= \frac{d^2(\delta x^\mu)}{d\tau^2} + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \delta x^\lambda + \\ &+ \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\lambda)}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{d(\delta x^\sigma)}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda \end{aligned} \quad (6.4.80)$$

in cui individuiamo due termini uguali che si sommano. Inoltre, vediamo comparire $d^2(\delta x^\mu)/d\tau^2$ che è proprio ciò che abbiamo nell'equazione della derivazione delle geodetiche e che vogliamo sostituire con la derivata covariante (sottraendo tutti i termini che abbiamo appena ottenuto). Ci conviene però continuare con il calcolo che stiamo sviluppando utilizzando l'equazione

del moto per riesprimere $d^2(\delta x^\mu)/d\tau^2$:

$$\begin{aligned} \frac{D^2(\delta x^\mu)}{D\tau^2} = & \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \delta x^\lambda + 2\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\lambda)}{d\tau} + \\ & + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} \delta x^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} - 2\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\lambda)}{d\tau} \end{aligned} \quad (6.4.81)$$

possiamo semplificare due termini identici e riscrivere il penultimo, sostituendo $\rho \longleftrightarrow \lambda$, come:

$$- \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}. \quad (6.4.82)$$

Possiamo riscrivere la derivata seconda covariante raccogliendo i termini a fattor comune:

$$\frac{D^2(\delta x^\mu)}{D\tau^2} = \left[\frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \right] \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \delta x^\lambda \quad (6.4.83)$$

risciviamo il secondo termine utilizzando l'equazione delle geodetiche (6.4.70):

$$\begin{aligned} \frac{D^2(\delta x^\mu)}{D\tau^2} = & \left[\frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \right] \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda + \\ & + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \left[-\Gamma^\nu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right] \delta x^\lambda \end{aligned} \quad (6.4.84)$$

abbiamo di nuovo generato un termine che possiamo raccogliere dopo lo scambio $\nu \longleftrightarrow \sigma$:

$$-\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\rho\nu} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda \quad (6.4.85)$$

in questo modo:

$$\frac{D^2(\delta x^\mu)}{D\tau^2} = \left[\frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\rho\nu} \right] \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda \quad (6.4.86)$$

ma il termine tra parentesi è proprio il tensore di Riemann $R^\mu_{\nu\lambda\rho}$. Abbiamo trovato che **l'equazione di deviazione delle geodetiche** può essere riscritta in una *forma manifestamente tensoriale* come:

$$\frac{D^2(\delta x^\mu)}{D\tau^2} = R^\mu_{\nu\lambda\rho} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\lambda. \quad (6.4.87)$$

Capiamo che cosa ci dice (6.4.87) dal punto di vista fisico. Due particelle in caduta libera sentono un moto relativo, cioè si separano tra di loro, in un modo tale che dipende dal campo gravitazionale, ovvero dalla curvatura dello spazio-tempo che è contenuta nel tensore di Riemann. Questo non è in

violazione del principio di equivalenza: solo se ci mettiamo localmente nel punto in caduta libera non sentiamo l'effetto del campo gravitazionale, ma se noi ci spostiamo un po' dalla posizione in cui siamo, sia nello spazio che nel tempo, sentiamo i cosiddetti *effetti di marea*, che sono la manifestazione del campo gravitazionale.

Assenza di campo gravitazionale. Se noi siamo in assenza di campo gravitazionale, il tensore di Riemann è uguale a zero, la derivata covariante diventa la derivata ordinaria e (6.4.87) si riduce a:

$$\frac{d^2(\delta x^\mu)}{d\tau^2} = 0 \quad (6.4.88)$$

cioè la separazione δx^μ è una separazione del tipo:

$$\delta x^\mu = a^\mu \tau + b^\mu \quad (6.4.89)$$

che rappresenta esattamente un moto inerziale. Le due world-line in assenza di gravità hanno un moto inerziale uno rispetto all'altro. Si allontanano con velocità costante (o si avvicinano).

Presenza di gravità. In presenza della gravità, il tensore di Riemann non è identicamente nullo. Quindi abbiamo che la derivata covariante seconda è anch'essa diversa da zero. Questa è una manifestazione dei già citati moti mareali. Pensiamo alla struttura di questa equazione: dentro alla derivata covariante seconda, abbiamo la derivata seconda ordinaria di δx^μ e poi dei termini che portano delle Γ . Infatti, se sviluppiamo la derivata covariante, la struttura con le quantità relative alle proprietà del campo gravitazionale è del tipo:

$$\frac{d^2(\delta x^\mu)}{d\tau^2} = (-\Gamma \delta x) + (R \delta x). \quad (6.4.90)$$

Per separazioni sufficientemente grandi, anche se ci mettiamo in caduta libera e $\Gamma \rightarrow 0$, il secondo non va via. Questo corrisponde proprio agli effetti mareali, che non sono nient'altro che effetti di cui avevamo parlato quando avevamo fatto l'esempio degli ascensori ideali. Ricordiamo infatti che nel caso in cui prendo un ascensore molto grande e l'osservatore fa l'esperimento di caduta libera dei gravi, localmente, cioè per un tempo Δt molto piccolo, le due masse sono ferme rispetto a lui, ma dato che questi oggetti devono cadere verso il centro della Terra, per un Δt maggiore l'osservatore vedrà questi corpi mettersi in moto verso di lui, in virtù della componente della forza nella direzione orizzontale rispetto alla figura 6.4. Ma se vediamo delle masse che si mettono in moto deduciamo la presenza di un qualche forza che agisce e associamo questo alla presenza di un campo che è il campo gravitazionale. Quindi per separazioni comparabili con l'effetto di curvatura dello spazio-tempo dovuto alla presenza del campo gravitazionale, cominciamo ad

accorgerci che c'è qualcosa perché le due masse si mettono in moto. Gli effetti mareali sono sostanzialmente contenuti nel tensore di Riemann e sono la manifestazione della curvatura dello spazio-tempo.

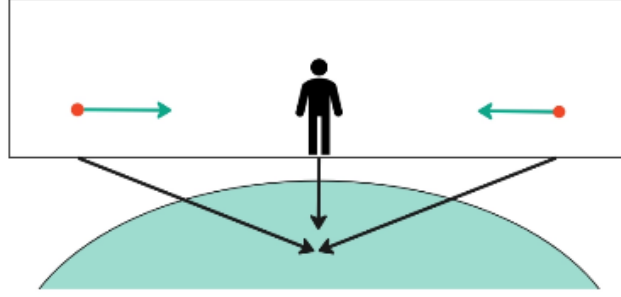


Figura 6.4

Esercizio. Possiamo mostrare che nel caso di spazio piatto, cioè di assenza di gravità, la separazione delle geodetiche corrisponde proprio a una separazione che ci aspettiamo tra osservatori inerziali. Infatti:

$$\frac{d^2(\delta x^\mu)}{d\tau^2} = 0 \quad (6.4.91)$$

ha come soluzione:

$$\delta x^\mu = a^\mu \tau + b^\mu \quad (6.4.92)$$

con a^μ e b^μ costanti. Quando prendiamo $\mu = 0$ significa che la differenza tra i due orologi sulle due worldline è:

$$\delta t = a^0 \tau + b^0 \quad (6.4.93)$$

Per $\mu = i$ la separazione sulle tre coordinate x , y e z saranno:

$$\delta x^i = a^i \tau + b^i \quad (6.4.94)$$

Invertendo la prima:

$$\tau = \frac{\delta t - b^0}{a^0} \quad (6.4.95)$$

e sostituendo nella seconda:

$$\delta x^i = a^i \frac{\delta t - b^0}{a^0} + b^i \quad (6.4.96)$$

$$= v^i \delta t + c^i \quad (6.4.97)$$

Quindi per un incremento δt del tempo la separazione delle due geodetiche aumenta in modo lineare, che è quello che fanno due geodetiche di due osservatori inerziali. Se poi in particolare abbiamo che $v_i = 0$, allora $\delta x^i = c^i$. Abbiamo due separazioni che spazialmente non cambiano, sono parallele nello spazio, altrimenti la separazione cresce (o diminuisce) nel tempo.

6.5 Equazioni di Einstein

Abbiamo ora tutti gli elementi che ci servono per poter scrivere le equazioni che descrivono il comportamento del campo gravitazionale, cioè le equazioni che, date la distribuzione delle sorgenti del campo gravitazionale, permettono di determinare com'è fatto il campo gravitazionale. Per ricavarla possiamo seguire sostanzialmente due strade, che hanno un punto di contatto, e che percorreremo entrambe.

Strada (A). Nel primo metodo costruiamo le equazioni di Einstein sfruttando il fatto che dovranno essere **equazioni differenziali tensoriali**, perché stiamo scrivendo le equazioni che regolano il comportamento del campo $g_{\mu\nu}$. Il campo è il tensore metrico perché sappiamo che, almeno nel limite newtoniano, il potenziale newtoniano sta dentro una delle componenti del tensore metrico ed è proprio questi che determina l'effetto che chiamiamo *gravità*. Del resto l'effetto che chiamiamo gravità è dovuto all'avere uno spazio-tempo curvo invece che piatto, dove la curvatura è contenuta nel tensore di Riemann, il quale, in ultima analisi è costruito a partire dal tensore metrico, dalle sue derivate prime e dalle sue derivate seconde.

Inoltre le equazioni tensoriali dovrebbero ridursi alle corrette equazioni nel limite newtoniano. Nel limite newtoniano sappiamo che l'equazione che mette in relazione la densità di materia ρ_M , sorgente del campo gravitazionale, con il potenziale gravitazionale ϕ , è l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho_M. \quad (6.5.1)$$

Dunque il primo inferisce dal limite newtoniano la forma che ci si aspetta che le equazioni debbano avere, affinché possano avere questo limite.

Strada (B). Un altro processo più generale è quello di utilizzare un principio variazionale in cui, come per tutti i principi variazionali, guardiamo quali siano i gradi di libertà dinamici, del moto, ovvero $g_{\mu\nu}(x)$. Per tali campi si definisce l'azione S sfruttando i principi che discendono dal principio di equivalenza. Imponendo la stazionarietà dell'azione per variazione delle configurazioni di campo si determina l'equazione del moto del campo stesso.

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \quad \implies \quad \text{equazione differenziale.} \quad (6.5.2)$$

La configurazione di campo che rende stazionaria l'azione sarà la soluzione dell'equazione differenziale ottenuta proprio da (6.5.2).

Le equazioni ottenute con (A) e (B) saranno chiaramente le stesse equazioni, e in particolare quelle che otterremo dal principio variazionale dovranno anch'esse soddisfare il limite newtoniano. La meccanica newtoniana funziona perfettamente, quindi la teoria della Relatività Generale dovrà avere quella come limite, ma sarà molto più generale, non fosse altro che il campo

in quattro dimensioni di spazio-tempo, è dato da dieci funzioni, mentre nel caso newtoniano se ne usa una sola. Queste equazioni essendo molto più complesse prediranno anche dei nuovi fenomeni, che dovremo studiare.

6.5.1 Costruzione per inferenza dall'equazione di Poisson

Partiamo dall'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (6.5.3)$$

il primo membro dell'equazione di Poisson è un termine differenziale del secondo ordine, se usiamo coordinate cartesiane:

$$\nabla^2 = \delta^{ij} \partial_i \partial_j = \eta^{ij} \partial_i \partial_j. \quad (6.5.4)$$

Al secondo membro di (6.5.3) abbiamo la densità di massa che genera il campo ϕ e la costante di Newton G . Ora, noi sappiamo già che la densità di massa la possiamo inserire nella componente $(0,0)$ del tensore energia impulso $T^{\mu\nu}$, mentre il potenziale gravitazionale lo possiamo inserire nella componente $(0,0)$ del tensore metrico $g_{\mu\nu}$:

$$\rho \longrightarrow T^{00}, \quad \phi \longrightarrow g_{00}. \quad (6.5.5)$$

Questo infatti è quanto abbiamo visto quando abbiamo ricavato l'equazione del moto del corpo in caduta libera nel limite newtoniano. L'equazione che stiamo cercando dovrà contenere al primo membro, in qualche forma, le derivate seconde del tensore metrico in un qualche modo che le renda proporzionali al tensore $T_{\mu\nu}$:

$$[\partial^2 g]^{\mu\nu} \sim T^{\mu\nu}. \quad (6.5.6)$$

Possiamo tentare con un'ipotesi: cerchiamo un tensore $G_{\mu\nu}$ che contenga le derivate seconde del tensore metrico e tale per cui:

$$G_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}. \quad (6.5.7)$$

Le proprietà che $G_{\mu\nu}$ deve avere sono:

- Dev'essere un tensore di rango $(0,2)$ perché $T_{\mu\nu}$ è un tensore e vogliamo un'equazione tensoriale.
- Deve contenere le derivate seconde del tensore metrico $\partial_\lambda \partial_\rho g_{\mu\nu}$.
- Dev'essere un tensore simmetrico, in quanto $T_{\mu\nu}$ è simmetrico.
- Dev'essere conservato in senso covariante:

$$G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \quad (6.5.8)$$

in quando ciò avviene per $T_{\mu\nu}$.

- È necessario che riproduca l'equazione di Poisson nel limite di campo debole nel caso di un fluido newtoniano, cioè un fluido che costituito da materia non relativistica.

L'equazione di Poisson era una sola, mentre ora ne abbiamo dieci. Ciascuna di queste, o almeno una, deve riprodurre l'equazione di Poisson. Dato che la densità di energia va a finire nella componente $(0,0)$ del tensore di energia impulso, ci aspettiamo che l'equazione che riproduca il limite Newtoniano sia:

$$G_{00} = kT_{00}. \quad (6.5.9)$$

Quindi, il tensore $G_{\mu\nu}$ deve avere solo due indici e deve contenere le derivate seconde. Noi sappiamo che un tensore che soddisfa tali richieste è il tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$, costruito a partire dal tensore di Riemann, che a sua volta contiene le derivate seconde del tensore metrico. Tra l'altro, il tensore di Riemann e quello che contiene le derivate seconde nel modo più semplice di tutti, cioè in modo lineare, pertanto questa è la scelta minimale, ossia la scelta più semplice che possiamo fare.

Il problema è che il tensore di Ricci non soddisfa la quarta proprietà di $G_{\mu\nu}$, cioè non è conservato in senso covariante:

$$R^{\mu\nu}{}_{;\mu} \neq 0 \quad (6.5.10)$$

sappiamo infatti che vale l'identità di Bianchi:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\mu} = 0 \quad (6.5.11)$$

questa è una proprietà automatica del tensore di Riemann, nella forma del tensore di Ricci, perché è un'identità differenziale. Segue quindi che:

$$R^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{;\mu} \quad (6.5.12)$$

quindi siccome in generale la derivata covariante dello scalare di curvatura non è nulla, allora la divergenza covariante del tensore di Ricci non è nulla.

L'identità di Bianchi ci dà al contempo però la soluzione. Un tensore che ha esattamente la proprietà che ci serve è:

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R. \quad (6.5.13)$$

In tal modo $G^{\mu\nu}$ soddisfa tutte le proprietà richieste. Tale tensore è chiamato **tensore di Einstein**. Scriveremo quindi:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = kT_{\mu\nu} \quad (6.5.14)$$

dove la costante k la determineremo proprio facendo il limite newtoniano. Possiamo usare anche un'altra forma dell'equazione; contraiamo entrambi i membri dell'equazione per il tensore metrico:

$$g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = k g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad (6.5.15)$$

ricordando che $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \text{Tr}\{g_{\mu\nu}\} = N$ e osservando che $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ è la traccia di T di $T_{\mu\nu}$ perché è la contrazione completa di due tensori:

$$\left(R - \frac{1}{2} N R \right) = k T \quad (6.5.16)$$

per $N = 4$, dimensionalità del nostro spazio, otteniamo:

$$-R = k T \quad (6.5.17)$$

che se sostituito in (6.5.14):

$$R_{\mu\nu} = k \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (6.5.18)$$

Si noti che l' $1/2$ vale solo se $N = 4$.

Verifica del limite newtoniano. Prendiamo innanzitutto il fluido che genera il campo gravitazionale nella forma di fluido perfetto. Quindi:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}. \quad (6.5.19)$$

Il fluido è anche newtoniano, cioè, fatto da materia non relativistica, per cui $p \ll \rho$, dunque $\rho = \rho_M$. Trascurando p , allora:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu. \quad (6.5.20)$$

Mettiamoci nel sistema di riposo del fluido, che poi è quella in cui è scritta l'equazione di Poisson, dove:

$$u^\mu = (u^0, 0, 0, 0) = (u^0, \vec{0}) \quad (6.5.21)$$

per determinare u^0 , usiamo la norma:

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1 \quad (6.5.22)$$

da cui segue che:

$$u^0 = (-g_{00})^{-1/2}. \quad (6.5.23)$$

Il campo dovrà essere *debole*. In questo limite possiamo scrivere il tensore metrico come una deformazione piccola rispetto al tensore di Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad (6.5.24)$$

con $h_{\mu\nu}$ piccoli. Sempre in questo limite:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(h^2). \quad (6.5.25)$$

Ricordiamoci anche che nel limite di campo debole:

$$g_{00} = -1 + h_{00} = -(1 + 2\phi) \quad (6.5.26)$$

$$g^{00} = -1 - h^{00} = -(1 - 2\phi). \quad (6.5.27)$$

Riscriviamo allora la componente u^0 :

$$u^0 = (-g_{00})^{-1/2} \quad (6.5.28)$$

$$= (1 - h_{00})^{-1/2} \quad (6.5.29)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} h_{00}. \quad (6.5.30)$$

Stiamo trascurando tutti i termini di ordine superiore al primo in h . Abbiamo due quantità piccole in gioco:

$$|h_{00}| \ll 1 \quad , \quad \rho_M \text{ piccola} \quad (6.5.31)$$

perché la densità di massa non relativistica non è una densità come quella di ciò che chiameremo ad esempio buco nero. Ciò ci porta quindi anche a trascurare termini del tipo $\rho \cdot \phi$. Infine, il campo non solo è debole ma è anche statico, dunque:

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0. \quad (6.5.32)$$

Riprendiamo l'equazione (6.5.14), consideriamo la componente $(0,0)$ e verifichiamo che coincida con l'equazione di Poisson:

$$R_{00} = k \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right). \quad (6.5.33)$$

Lavoriamo sul secondo membro. Abbiamo bisogno di calcolare T_{00} e T . Abbiamo:

$$T_{00} = \rho u_0 u_0 \quad (6.5.34)$$

conosciamo u^0 da (6.5.30) allora:

$$u_0 = g_{0\mu} u^\mu \quad (6.5.35)$$

$$= g_{00} u^0 \quad (6.5.36)$$

$$= (-1 + h_{00}) \left(1 + \frac{1}{2} h_{00} \right) \quad (6.5.37)$$

$$= -1 + \frac{1}{2} h_{00} \quad (6.5.38)$$

sostituiamo:

$$T_{00} = \rho \left(-1 + \frac{1}{2} h_{00} \right)^2 \quad (6.5.39)$$

$$= \rho(1 - h_{00}) \quad (6.5.40)$$

$$\sim \rho \quad (6.5.41)$$

In ogni passaggio tronciamo al primo ordine in h_{00} e ρ . Per quanto concerne T :

$$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad (6.5.42)$$

$$= g^{\mu\nu} (\rho u_\mu u_\nu) \quad (6.5.43)$$

$$= \rho g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu \quad (6.5.44)$$

$$= -\rho \quad (6.5.45)$$

qui non abbiamo fatto nemmeno un'approssimazione. Il secondo membro dell'equazione ci dà:

$$T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T = \rho - \frac{1}{2} (-1 + h_{00}) \rho \quad (6.5.46)$$

$$= \frac{1}{2} \rho \quad (6.5.47)$$

i termini in più del tipo $\rho \cdot h$ che stiamo trascurando saranno correzioni di Relatività Generale all'equazione di Poisson.

Lavoriamo ora sul primo membro. Dobbiamo calcolare la componente 00 del tensore di Ricci partendo dal tensore di Riemann:

$$R_{00} = R^\lambda{}_{0\lambda 0} = R^i{}_{0i0} \quad (6.5.48)$$

in cui abbiamo utilizzato il fatto che $R^0{}_{000}$ è nullo per antisimmetria dello scambio della seconda o della prima coppia degli indici. Calcoliamo $R^i{}_{0j0}$ per poi fare la somma per $i = j$:

$$R^i{}_{0j0} = \partial_0 \Gamma^i{}_{0j} - \partial_j \Gamma^i{}_{00} + \Gamma^\lambda{}_{0j} \Gamma^i{}_{0\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{00} \Gamma^i{}_{j\lambda} \quad (6.5.49)$$

ricordiamo che la connessione è data da (4.3.66), ma che in campo debole si ha:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (6.5.50)$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2) \quad (6.5.51)$$

allora:

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} (\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}) \quad (6.5.52)$$

ciò ci mostra che i termini $\Gamma \Gamma$ nel tensore di Riemann sono trascurabili, poiché di ordine $\mathcal{O}(\partial h^2)$. Inoltre, essendo la Γ costruita con combinazioni

lineari di funzioni di h , se deriviamo rispetto al tempo, dato che il campo è stazionario, la derivata è sempre nulla, quindi $\partial_0 \Gamma^i_{0j} = 0$. Avremo:

$$R^i_{0j0} = -\partial_j \Gamma^i_{00}. \quad (6.5.53)$$

Calcoliamo:

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_0 h_{0\lambda} + \partial_0 h_{0\lambda} - \partial_\lambda h_{00}) \quad (6.5.54)$$

$$= -\frac{1}{2} g^{i\lambda} \partial_\lambda h_{00} \quad (6.5.55)$$

$$= -\frac{1}{2} \partial^i h_{00} \quad (6.5.56)$$

in cui abbiamo utilizzato il fatto di avere un campo statico. Dunque:

$$R^i_{0j0} = \frac{1}{2} \partial_j \partial^i h_{00} \quad (6.5.57)$$

infine:

$$R_{00} = R^i_{0i0} = \frac{1}{2} \partial_i \partial^i h_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \quad (6.5.58)$$

però, ricordando che $h_{00} = -2\phi$, abbiamo:

$$R_{00} = -\nabla^2 \phi \quad (6.5.59)$$

$$T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T = \frac{1}{2} \rho \quad (6.5.60)$$

e segue che:

$$-\nabla^2 \phi = \frac{1}{2} k \rho \quad (6.5.61)$$

che, ponendo $k = -8\pi G$, riproduce esattamente l'equazione di Poisson! Quindi il limite newtoniano dell'equazione da cui siamo partiti è riprodotto nella componente 00. Quindi accettiamo che l'equazione:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (6.5.62)$$

sia la corretta equazione che descrive il comportamento del campo gravitazionale date le sorgenti del campo. Le equazioni (6.5.62) sono dieci equazioni differenziali del secondo ordine per le funzioni $g_{\mu\nu}(x)$ note come le **equazioni del campo di Einstein**. Sono state ottenute con la possibilità minimale, che è quella di usare il più semplice tensore che contiene derivate seconde che è quello di Riemann nella forma del tensore di Ricci. Da queste partiamo per determinare se sono verificate le loro predizioni con le osservazioni in natura. Queste equazioni dicono mettono in relazione il campo gravitazionale con la sua sorgente, cioè il tensore di energia impulso, che contiene la densità, l'energia e la pressione del fluido, affermando come le sorgenti determinano la curvatura dello spazio-tempo nella forma del tensore di Ricci. Quindi la

presenza di materie d'energia determina la curvatura dello spazio-tempo e quindi anche la sua struttura metrica, $g_{\mu\nu}$, che è la soluzione di queste equazioni differenziali. Le equazioni del campo di Einstein assieme all'equazione del moto della particella in caduta libera:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (6.5.63)$$

che descrive l'altra parte dell'effetto di gravità, cioè come si comporta un corpo in caduta libera nel campo gravitazionale, costituiscono il contenuto della Relatività Generale.

L'insieme delle equazioni (6.5.62) e (6.5.63) sono quelle che **Wheeler** ha tradotto in forma espressiva dicendo che la materia e le energie dicono allo spazio-tempo come curvarsi e la curvatura dello spazio-tempo dice alla materia e all'energia come muoversi nello spazio e nel tempo (vedi la citazione degli appunti). Queste equazioni sono sicuramente molto complesse, non fosse per il fatto che sono altamente non lineari. Basti guardare al tensore di Ricci:

$$R_{\mu\nu} \longleftarrow R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} + (\Gamma \Gamma) - (\Gamma \Gamma) \quad (6.5.64)$$

i termini $\Gamma \Gamma$ contengono $(\partial g)^2$ quindi c'è un'auto-interazione nel campo della gravità. La loro soluzione in casi generali è molto complessa e l'unico modo per farlo è per via numerica, soluzione anch'essa molto difficile da ottenere. Sotto ipotesi particolari sono risolvibili anche in modo analitico.

Possiamo esprimere le equazioni anche nella forma:

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (6.5.65)$$

contraendo ulteriormente otteniamo la relazione tra lo scalare di curvatura di Ricci e la distribuzione di materia e di energia nella forma della traccia del tensore T :

$$R = 8\pi G T. \quad (6.5.66)$$

Si noti poi che il segno meno a secondo membro nelle equazioni si campo dipende da come viene definito il tensore di Riemann.

Ora, le equazioni mettono in relazione la distribuzione di massa ed energia del sistema con la curvatura, però io possiamo metterci in una porzione di spazio in cui non abbiamo sorgenti. Definiamo *vuoto*, in questo contesto, quella regione in cui:

$$\text{vuoto:} \quad T_{\mu\nu} = 0 \quad (6.5.67)$$

ciò implica che anche $T = 0$. Le equazioni di Einstein nel vuoto assumono quindi una forma più semplice:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (6.5.68)$$

a volte si dice anche tecnicamente che sono **equazioni Ricci-flat**, nel senso che il tensore di Ricci è nullo. Ma ciò significa allora che non abbiamo gravità? Questo dipende dal numero di dimensioni dello spazio-tempo. Ricordando la tabella 6.2, in una dimensione non abbiamo curvatura - non abbiamo neanche uno spazio-tempo -, ma in due o tre dimensioni essere nel vuoto, cioè avere il tensore di Ricci uguale a zero, implica che si annulla l'intero tensore di Riemann! Basta infatti ricordare la decomposizione del tensore di Riemann in queste dimensioni:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \underbrace{(\dots)}_{\propto R_{\mu\nu} g_{\mu\nu}} + \underbrace{R(\dots)}_{\propto g_{\mu\nu}} \quad (6.5.69)$$

ciò significa allora che nel vuoto non abbiamo curvatura e quindi non abbiamo campo gravitazionale. Il primo numero di dimensioni per il quale abbiamo un campo gravitazionale anche in assenza di materia, cioè nel vuoto, sono le quattro dimensioni. Infatti per $N \geq 4$, il fatto che il numero delle componenti del tensore di Riemann è superiore al numero delle componenti del tensore di Ricci significa, l'annullarsi del tensore di Ricci non implica l'annullarsi dell'intero tensore di Riemann necessariamente.

Ricordando la decomposizione del tensore di Riemann da quattro dimensioni in su:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = (\dots R_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \dots) + R(g_{\mu\nu}) + C^\lambda_{\mu\nu\kappa} \quad (6.5.70)$$

non è detto che si annulli anche il tensore di Weyl.

Facciamo un'ulteriore considerazione sul concetto di vuoto. Il concetto di vuoto significa in questo contesto:

$$T_{\mu\nu} = 0 \quad (6.5.71)$$

quindi qualunque forma di densità di energia o di pressione produce campo gravitazionale. Solo per $\rho \rightarrow 0$ e $p \rightarrow 0$ abbiamo ciò che chiamiamo **vuoto**. Se invece $T_{\mu\nu} \neq 0$ la soluzione dell'equazione (6.5.62), sarà diversa.

6.5.2 Costante cosmologica

Abbiamo scritto l'equazione di Einstein sotto una serie di ipotesi. Dovendo riprodurre nel limite newtoniano l'equazione di Poisson, abbiamo cercato una forma tensoriale quale:

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$$

richiedendo che $G_{\mu\nu}$ soddisfacesse alcune proprietà. Ciò ci ha portato a identificare $G_{\mu\nu}$ con il tensore di Einstein, tensore che soddisfa tutte le proprietà compresa l'ultima. A tale scrittura potremmo però aggiungere un termine in modo che le prime quattro proprietà risultino comunque soddisfatte:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (6.5.72)$$

dove Λ è una costante, cioè non dipende né dallo spazio né dal tempo. Le prime 3 proprietà del tensore $G_{\mu\nu}$ sono soddisfatte in modo ovvio, essendo Λ costante. Così anche la quarta, infatti:

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu}\right)_{;\mu} = \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right)_{;\mu} - (\Lambda g_{\mu\nu})_{;\mu} = 0 \quad (6.5.73)$$

il primo termine è zero per l'identità di Bianchi e il secondo anche perché una costante ha sicuramente derivata ordinaria e derivata covariante nulle.

Quindi noi potremmo scrivere l'equazione in una forma altrettanto valida che è persino leggermente più generale:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (6.5.74)$$

La costante prende il nome di **costante cosmologica**, il motivo è perché ha un effetto osservabile su scala cosmologica e non su scala più piccola. Einstein inizialmente non la mise nelle sue equazioni, ma la inserì per cercare di far sì che l'universo risultasse statico. Le equazioni contenute in (6.5.74) valgono per qualunque sistema in presenza di gravità, sia per il campo gravitazionale generato dal sole o dalla terra come per quello generato da un buco nero. Vale però anche per l'intero spazio-tempo dell'intero universo; infatti, l'universo è una distribuzione di materia e di energia e la sua dinamica, tra cui l'espansione, è regolata esattamente da queste equazioni. Omettendo il termine di costante cosmologica, per un universo omogeneo ed isotropo si ottengono le cosiddette *equazioni di Friedman*, le quali predicono naturalmente che l'universo si debba espandere o contrarre. Tuttavia, nei tempi di Einstein si presumeva che l'universo fosse stazionario e quindi, dato che la conseguenza naturale di questa equazione applicata all'universo era l'espansione o la contrazione, da intendersi come il fatto che la distanza fisica tra due punti aumenta o diminuisce al passare del tempo cosmologico, cioè il tempo nel sistema di riferimento in cui il fluido dell'universo è a riposo, Einstein si aggiunse tale termine in modo da rendere l'universo stazionario. Dopodiché i lavori di Lamaitre e Hubble mostrarono che l'universo si espande, quindi la costante cosmologica perse interesse. Einstein stesso la definì il suo più grande errore. Ma nella cosmologia moderna, pare che questo oggetto svolga un ruolo, ossia di spiegare l'ignota energia oscura.

Aggiungendo il termine di costante cosmologica, dobbiamo però assicurarci che rispettiamo il limite newtoniano. Rifacciamo il limite newtoniano per (6.5.74), contraiamo con $g_{\mu\nu}$:

$$R - 2R - 4\Lambda = -8\pi G T \quad (6.5.75)$$

da cui:

$$R = 8\pi G T - 4\Lambda \quad (6.5.76)$$

che sostituita in (6.5.74):

$$-8\pi G T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (8\pi G T - 4\Lambda) - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (6.5.77)$$

$$= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} 8\pi G g_{\mu\nu} T + 2\Lambda g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (6.5.78)$$

e otteniamo una riscrittura:

$$R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (6.5.79)$$

L'equazione di Poisson deve stare nella componente 00:

$$R_{00} + \Lambda g_{00} = -8\pi G \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right). \quad (6.5.80)$$

sostituendo con i termini ottenuti in precedenza:

$$-\nabla^2 \phi - \Lambda (1 + 2\phi) = -4\pi G \rho \quad (6.5.81)$$

quindi, l'equazione che dovrebbe restituirmi Poisson, è:

$$\nabla^2 \phi + \Lambda (1 + 2\phi) = 4\pi G \rho. \quad (6.5.82)$$

Il limite newtoniano contiene un pezzo in più! L'equazione di Einstein con costante cosmologica non rispetta formalmente il limite newtoniano. Ciò ci apre due possibilità: o non si introduce tale costante, oppure il suo effetto è tale che sui sistemi in cui abbiamo testato l'equazione di Poisson, tale termine si possa ritenere sufficientemente piccolo da essere trascurabile rispetto agli altri. Si pensa che sia quest'ultimo il caso relativo al nostro universo: la costante cosmologica ha un effetto sull'intero universo, e quindi non produce un effetto misurabile nei sistemi a scala ridotta, come il sistema solare. Quando invece considero porzioni di universo enormi, allora lì ha un ruolo, anzi oggi diremmo che ricopre un ruolo dominante - dove però non è l'equazione di Poisson a regolare la dinamica, ma è l'intera equazione di Einstein sotto un altro limite.

Dunque, la costante cosmologica, dal punto di vista della discussione che stiamo facendo adesso, è perfettamente legittima perché soddisfiamo tutte le condizioni che abbiamo richiesto ed è l'unica quantità che possiamo aggiungere. Le sue implicazioni vanno verificate con le osservazioni e quelle attuali ci dicono che sembra esserci qualcosa che assomigli a una costante cosmologica, ma la si vede solo su scale grandi dell'universo e non sulle scale in cui molta della gravità è applicata "quotidianamente".

6.5.3 Principio variazionale

Vediamo come ottenere l'equazione di Einstein a partire dal principio variazionale che, come tutti i principi variazionali, si basa su delle richieste di simmetria del sistema. Vediamo innanzitutto come possiamo esprimere una teoria di campo sfruttando il principio variazionale. Supponiamo, per esempio, di avere un insieme di campi, cioè un certo numero di funzioni dello spazio e del tempo, $\phi_i = \phi_i(x)$ con $i = 1, \dots, M$. Definiamo una grandezza, che chiamiamo **azione** del sistema S :

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \quad (6.5.83)$$

con $\mathcal{L}$ densità lagrangiana. In N dimensioni sarà:

$$S = \int d^N x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i). \quad (6.5.84)$$

La densità di Lagrangiana deve soddisfare le proprietà di invarianza del sistema di cui stiamo parlando. Si noti inoltre che nell'integrale abbiamo utilizzato il volume invariante della Relatività Speciale ed essendo la Lagrangiana invariante di Lorentz - proprio perché soddisfa le proprietà di invarianza del sistema - anche l'azione che è invariante di Lorentz.

Ad esempio, per la teoria del campo elettromagnetico, la Lagrangiana deve essere invariante per trasformazione di gauge.

Lo stesso tipo di teoria, se la inseriamo nel contesto della presenza di un campo gravitazionale, vedrà l'azione che dovrà essere invariante non solo per effetto delle trasformazioni relative al sistema che stiamo studiando, ma anche invariante per trasformazioni generali di coordinate, cioè dovrà essere uno scalare per trasformazioni generali di coordinate, e la dovremo poter scrivere come:

$$S = \int d^N x \sqrt{g} \mathcal{L}(\phi_i, D_\mu \phi_i) \quad (6.5.85)$$

la lagrangiana dovrà essere uno scalare per trasformazioni generali di coordinate, così che dimensionalmente moltiplicata per il volume invariante, che è uno scalare, produca un oggetto invariante per trasformazioni generali di coordinate. Allo stesso tempo la lagrangiana può essere costruita come scalare per trasformazioni generali di coordinate combinando derivate covarianti.

Se vogliamo scrivere le equazioni del moto dei campi ϕ , il principio variazionale richiede di determinare quali siano le configurazioni di campo rispetto alle quali l'azione sia stazionaria:

$$\phi_i \longrightarrow \phi_i + \delta\phi^i \quad (6.5.86)$$

con la condizione al contorno che le variazioni dei campi all'inizio e alla fine del moto, cioè dell'evoluzione del sistema descritto:

$$\left. \delta\phi^i \right|_{\text{bound}} = 0. \quad (6.5.87)$$

Possiamo prendere delle variazioni delle configurazioni di campo a estremi fissi e richiedere che l'azione sia stazionaria:

$$\frac{\delta S}{\delta\phi^i} = 0 \quad (6.5.88)$$

cioè che la variazione dell'azione rispetto alle configurazioni del campo sia uguale a zero. Tale richiesta conduce alle equazioni di Eulero-Lagrange per i campi ϕ^i :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - D_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu \phi_i)} \right) = 0 \quad (6.5.89)$$

in questa scrittura è presente la derivata covariante invece della derivata ordinaria.

Vogliamo quindi scrivere l'equazione del moto dei campi $g_{\mu\nu}(x)$ (o variabili dinamiche) utilizzando il principio variazionale. Dobbiamo scrivere una azione che contenga il campo e le sue derivate prime e seconde⁵, e che rispetti i principi della nostra teoria. Dovremo cioè fare l'integrale sul volume invariante di qualche cosa che, oltre ad essere uno scalare, deve contenere il campo gravitazionale. Sappiamo che lo scalare più semplice e non banale che contiene il campo $g_{\mu\nu}$ e le sue derivate prime e seconde (e le derivate seconde nel modo più semplice), è dato dallo *scalare di Ricci*. Scriveremo allora:

$$S = k \int d^N x \sqrt{g} R \quad (6.5.90)$$

Questa non è l'unica scelta che possiamo fare. Avremmo potuto prendere un qualunque scalare di curvatura, ma la scelta più semplice resta lo scalare di curvatura di Ricci. Tale azione si chiama **azione di Hilbert-Einstein**, in cui il termine k è una costante necessaria per far sì che l'azione sia dimensionalmente corretta. Cerchiamo la dimensionalità di k . Il volume invariante ha dimensione:

$$dV = d^N x \sqrt{g} : \text{scalare.} \quad (6.5.91)$$

Consideriamo diversi casi.

- le coordinate hanno tutte dimensioni di lunghezza $[x] = L$. In questo caso il tensore metrico è adimensionale. Lo possiamo vedere dal fatto

⁵Dobbiamo arrivare almeno alle derivate seconde per avere uno scalare non banale perché sappiamo già che le derivate prime, punto per punto, sono sempre annullabili mettendosi nel sistema localmente in caduta libera.

che il tempo proprio è definito come:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6.5.92)$$

$$L^2 = [L^0] L^2 \quad (6.5.93)$$

Se $g_{\mu\nu}$ sono adimensionali, anche la dimensione del determinante della metrica non ha dimensioni fisiche, $[g] = L^0$. Questo implica, allora:

$$[d^N x \sqrt{g}] = L^N \quad (6.5.94)$$

Consideriamo poi lo scalare di curvatura. Se la coordinata è una lunghezza, la derivata, dimensionalmente, è l'inverso di una lunghezza, quindi:

$$[R] = [(\partial^2 g_{\mu\nu})] = L^{-2} \quad (6.5.95)$$

L'azione di Hilbert-Einstein deve risultare un'invariante, quindi:

$$[S] = [k] [dV] [R] \quad (6.5.96)$$

$$L^0 = [k] L^{N-2} \quad (6.5.97)$$

- Facendolo in massa invece, prendendo cioè $[S] = M^0$:

$$M^0 = [k] M^{2-N} \longrightarrow [k] = M^{N-2} \quad (6.5.98)$$

Per $N = 4$ quindi $[k] = M^2$. Che massa dobbiamo utilizzare per definire questa costante? Nella teoria abbiamo una costante dimensionale che entra in gioco: la costante di Newton che è dimensionalmente $[G] = M^{-2}$. Questo ci richiede quindi che la costante k possa essere scritta proporzionalmente all'inverso della costante di Newton:

$$k \propto \frac{1}{G}. \quad (6.5.99)$$

Questo ci dice allora che la scelta naturale più semplice che possiamo fare per descrivere l'azione che descrive il campo di gravità è:

$$S_{HE} = \frac{(-1)}{16\pi G} \int d^4 x \sqrt{g} R. \quad (6.5.100)$$

Questa azione la vediamo come funzionale del campo $g_{\mu\nu}$ e richiederemo stazionarietà rispetto alla variazione di tale campo. Per convenienza richiediamo di variare il tensore metrico inverso invece del tensore metrico stesso:

$$g^{\mu\nu} \longrightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} \quad (6.5.101)$$

richiedendo contemporaneamente che agli estremi del moto le variazioni siano nulle:

$$g^{\mu\nu} \Big|_B = 0 \quad (6.5.102)$$

richiediamo quindi che l'azione sia stazionaria per variazioni del campo a estremi fissi:

$$\frac{\delta S_{HE}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (6.5.103)$$

Calcoliamo brevemente come trasformare le variazioni del tensore metrico inverso nelle variazioni del tensore metrico (e viceversa). Partiamo da:

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu \quad (6.5.104)$$

variamo entrambi i membri. La variazione del secondo membro è nulla perché il tensore Kronecker è costante. Quindi:

$$\delta(g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}) = (\delta g^{\mu\lambda}) g_{\lambda\nu} + g^{\mu\lambda} (\delta g_{\lambda\nu}) = 0 \quad (6.5.105)$$

da cui:

$$(\delta g^{\mu\lambda}) g_{\lambda\nu} = -g^{\mu\lambda} (\delta g_{\lambda\nu}) \quad (6.5.106)$$

possiamo contrarre per un $g_{\mu\rho}$:

$$\delta^\lambda_\rho (\delta g_{\lambda\nu}) = -g_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} (\delta g^{\mu\lambda}) \quad (6.5.107)$$

$$\delta g_{\rho\nu} = -g_{\rho\mu} g_{\nu\lambda} (\delta g^{\mu\lambda}) \quad (6.5.108)$$

quindi riportiamo le regole che ci permettono di passare da uno all'altro (la seconda si ricava analogamente):

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \delta g^{\rho\sigma} \quad (6.5.109)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma} \quad (6.5.110)$$

richiamiamo anche un teorema che avevamo trovato precedentemente, che possiamo vedere in due modi:

$$(\partial_\lambda g) = g g^{\rho\sigma} \partial_\lambda g_{\rho\sigma} \quad (6.5.111)$$

$$(\delta g) = g g^{\rho\sigma} (\delta g_{\rho\sigma}). \quad (6.5.112)$$

Torniamo a noi e al nostro principio variazionale. Dobbiamo calcolare le variazioni in gioco. Ripartiamo dall'azione di Hilbert-Einstein:

$$S = \frac{(-1)}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (6.5.113)$$

la variazione di S_{HE} risulta:

$$\delta S_{HE} = \frac{(-1)}{16\pi G} \int d^4x \delta[\sqrt{g} R] \quad (6.5.114)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)}{16\pi G} \left[\int d^4x (\delta\sqrt{g}) R + \int d^4x \sqrt{g} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \right. \\ &\quad \left. + \int d^4x \sqrt{g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \right] \end{aligned} \quad (6.5.115)$$

$$= \frac{(-1)}{16\pi G} \left[(\delta S_1) + (\delta S_2) + (\delta S_3) \right]. \quad (6.5.116)$$

Il primo termine δS_1 si può calcolare ricordando le espressioni che avevamo trovato (6.5.111) e (6.5.112):

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2} g^{-1/2} \delta g \quad (6.5.117)$$

$$= \frac{1}{2} g^{-1/2} g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (6.5.118)$$

$$= \frac{1}{2} g^{-1/2} g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (-1) \quad (6.5.119)$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (6.5.120)$$

in cui in (6.5.119) abbiamo utilizzato le relazioni (6.5.109) e (6.5.110). Il secondo integrale δS_2 è già scritto correttamente in funzione delle variazioni di $g_{\mu\nu}$ come ho qua sotto. Più complicato è calcolare, invece, la variazione del tensore di Ricci che è contenuto nel terzo integrale δS_3 . Per scrivere la variazione del tensore di Ricci, utilizziamo l'*identità di Palatini*:

$$\delta R_{\mu\nu} = \left(\delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \right)_{;\nu} - \left(\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right)_{;\lambda} \quad (6.5.121)$$

non la dimostriamo, ma ci permette di riscrivere la variazione di $R_{\mu\nu}$ come differenza di derivate covarianti di variazioni della connessione. Avremo allora:

$$\delta S_{HE} = \frac{(-1)}{16\pi G} \left[(\delta S_1) + (\delta S_2) + (\delta S_3) \right] \quad (6.5.122)$$

l'integrale δS_3 in realtà si può integrare generando il termine di bordo, che quindi possiamo mandare a zero. Abbiamo:

$$\delta S_3 = \int d^4x \sqrt{g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \quad (6.5.123)$$

$$= \int d^4x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \left[\left(\delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \right)_{;\nu} - \left(\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right)_{;\lambda} \right] \quad (6.5.124)$$

$$= \int d^4x \sqrt{g} \left[\left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \right)_{;\nu} - \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right)_{;\lambda} \right] \quad (6.5.125)$$

$$= \int_V d^4x \sqrt{g} \left[g^{\mu\sigma} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \right]_{;\sigma} \quad (6.5.126)$$

$$= \int_{\Sigma=(\partial V)} d^3x \sqrt{\eta} n_\sigma v^\sigma \quad (6.5.127)$$

$$\longrightarrow 0 \quad (6.5.128)$$

in cui: in (6.5.125) abbiamo utilizzato il fatto che si può dimostrare che la variazione $\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}$ è un tensore, benché gamma non sia un tensore, quindi abbiamo derivate covarianti di tensori. Ricordiamo che il tensore metrico è trasparente rispetto all'operazione di derivazione covariante, e quindi lo possiamo far filtrare attraverso l'operazione di derivata covariante; in (6.5.126)

osserviamo che abbiamo due derivate covarianti, una rispetto agli indici ν e λ che sono indici muti. Rinominiamo entrambi σ così da scrivere un'unica derivata covariante rispetto a quell'indice; in (6.5.127) l'oggetto tra parentesi quadre è di fatto una divergenza, perché ha un solo indice libero, σ , rispetto al quale facciamo la divergenza covariante $v^\sigma_{;\sigma}$. Sfruttiamo il *teorema della divergenza* e facciamo un integrale di superficie. Il termine n_σ è un vettore di norma 1 diretto perpendicolarmente alla superficie; in (6.5.128) abbiamo che questo oggetto deve fare zero, perché significa sostanzialmente prendere il valore del vettore v sulla superficie su cui faccio l'integrale. Ricordando come abbiamo definito v^σ :

$$v^\sigma = g^{\mu\sigma} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \quad (6.5.129)$$

e sfruttando la relazione:

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left[(\delta g_{\rho\mu})_{;\nu} + (g_{\rho\mu})_{;\mu} + (g_{\rho\nu})_{;\mu} - (g_{\mu\nu})_{;\rho} \right] \quad (6.5.130)$$

ciò che importa ricordare è che essendo $\delta\Gamma$ una combinazione lineare di variazioni di g , a loro volta parte dell'espressione di v^σ , allora v^σ sarà anch'essa una combinazione lineare di variazioni di g . Ma dato che lo prendiamo sulla superficie, abbiamo una combinazione lineare di variazioni di g che sulla superficie sono nulle! Quindi il termine δS_3 , sfruttando l'identità di Palatini e il teorema della divergenza, non dà contributo.

La variazione dell'azione è costruita semplicemente a partire da:

$$-16\pi G \delta S_{HE} = \int d^4x \left\{ \delta\sqrt{g} R + \sqrt{g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right\} \quad (6.5.131)$$

$$= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} R + \sqrt{g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right\} \quad (6.5.132)$$

$$= \int d^4x \sqrt{g} \left\{ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} \quad (6.5.133)$$

le variazioni $\delta g^{\mu\nu}$ sono chiaramente arbitrarie, quindi affinché l'azione sia stazionaria bisogna richiedere che si annulli il termine tra parentesi:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{HE}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi G} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \quad (6.5.134)$$

e dunque otteniamo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (6.5.135)$$

che è proprio l'*equazione di Einstein nel vuoto*. Abbiamo ottenuto questa equazione perché abbiamo messo in gioco, nell'azione di Hilbert-Einstein, soltanto il campo gravitazionale. Non abbiamo messo in gioco nulla che coinvolgesse i cosiddetti campi di materia, cioè i campi sorgenti del campo gravitazionale.

Vediamo come inserire le sorgenti del campo gravitazionale. Scriviamo cioè le equazioni di Einstein che mettono assieme sia il termine di gravità che il termine di materia. Per la gravità, scrivo l'azione richiedendo che essa sia (6.5.100). Per quanto riguarda la materia, dobbiamo considerare i campi di materia che descrivono il sistema fisico e costruire l'azione:

$$S_M = \int d^4x \sqrt{g} \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \quad (6.5.136)$$

ovviamente S_M deve continuare ad essere uno scalare per trasformazioni generali di coordinate perché noi vogliamo una teoria che sia invariante per trasformazioni generali di coordinate. Se poi questi campi di materia sono sottoposti ad altri tipi di invarianza, per esempio l'invarianza di gauge del campo elettromagnetico, quell'azione sarà invariante per tutti i tipi di trasformazioni per cui il mio sistema fisico è invariante.

L'azione di un sistema è una grandezza additiva, perciò se abbiamo la gravità più i campi di materia, l'azione totale del sistema è semplicemente data da:

$$S_{tot} = S_{HE} + S_M \quad (6.5.137)$$

richiediamo la stazionarietà per variazioni del campo:

$$g^{\mu\nu} \longrightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} \quad (6.5.138)$$

a estremi fissi:

$$\left. \delta g^{\mu\nu} \right|_B = 0 \quad (6.5.139)$$

e il risultato di:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{tot}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (6.5.140)$$

fornirà le equazioni del moto per $g_{\mu\nu}$. Il principio variazionale contiene molti campi, in questo caso. Se richiediamo stazionarietà dell'azione per variazione dei campi ϕ , otterremo le equazioni di Eulero-Lagrange, mentre se richiediamo stazionarietà rispetto a $g_{\mu\nu}$, otterremo le equazioni per $g_{\mu\nu}$. Avremo:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{HE}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (6.5.141)$$

conosciamo già il primo termine e possiamo sostituire:

$$-\frac{1}{16\pi G} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (6.5.142)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 16\pi G \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \quad (6.5.143)$$

sappiamo che a secondo membro dobbiamo avere la sorgente del campo gravitazionale, ovvero deve contenere il tensore energia-impulso. Sappiamo già

che per soddisfare il limite newtoniano deve valere (6.5.62) e possiamo quindi definire:

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (6.5.144)$$

Con la definizione (6.5.144) l'equazione che otteniamo è proprio l'equazione di Einstein. A secondo membro otteniamo quindi G , che è il tensore di Einstein, deve essere una costante che contiene la costante di Newton, la quale ora entra in gioco automaticamente per far sì che la stessa azione di gravità sia dimensionalmente corretta, e un oggetto che chiamiamo *tensore energia-impulso*.

A questo punto dovremmo comunque verificare che una equazione di questo tipo rispetti il limite newtoniano, come abbiamo nella sezione passata. Se ci mettiamo in condizioni di campo debole e stazionario per un fluido non relativistico, cioè newtoniano, otteniamo l'equazione di Poisson con i coefficienti corretti.

Facciamo ancora una considerazione. Abbiamo scritto il tensore energia impulso a partire dall'azione (6.5.144), azione che abbiamo definita come:

$$S_M = \int d^4x \sqrt{g} \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \quad (6.5.145)$$

quando consideriamo la variazione dell'azione rispetto a $g^{\mu\nu}$, dato che esso è contenuto sia dentro g che dentro $\mathcal{L}$, possiamo riscrivere la variazione dell'azione di materia attraverso la variazione della lagrangiana rispetto $g^{\mu\nu}$:

$$\delta S_M = \int d^4x \delta [\sqrt{g} \mathcal{L}] \quad (6.5.146)$$

$$= \int d^4x \left[\delta \sqrt{g} + \sqrt{g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right] \quad (6.5.147)$$

usando quanto avevamo calcolato prima:

$$\delta S_M = \int d^4x \sqrt{g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right]. \quad (6.5.148)$$

A questo punto, data la definizione del tensore energia-impulso:

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{g} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (6.5.149)$$

$$= -2 \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \right] \quad (6.5.150)$$

$$= g_{\mu\nu} \mathcal{L} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \quad (6.5.151)$$

appliciamolo per capire come funzionano queste cose. Perché in generale se noi abbiamo una teoria che è data in forma lagrangiana, possiamo scrivere l'azione di materia e attraverso tale espressione individuare il tensore di energia impulso, cioè le sorgenti del campo gravitazionale di quella teoria.

6.5.4 Esempio

Consideriamo il caso in cui abbiamo un campo scalare $\phi = \phi(x)$, scalare per trasformazioni generali di coordinate. In quanto campo, ϕ possiede delle equazioni del moto che sono le sue equazioni di Eulero-Lagrange come abbiamo visto prima. Se le scriviamo in presenza di gravità, queste saranno:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - D_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (6.5.152)$$

se invece ci mettessimo nello spazio-tempo piatto $D_\mu \rightarrow \partial_\mu$. Il campo scalare, a sua volta, può essere sorgente di campo gravitazionale attraverso il suo tensore di energia impulso:

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mathcal{L} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (6.5.153)$$

In entrambi i casi abbiamo bisogno della densità Lagrangiana del campo. Scriviamola innanzitutto in Relatività Speciale, dopodiché, in presenza di gravità, utilizziamo il principio di covarianza generale, e promuoviamo le derivate a derivate covarianti. In Relatività Speciale abbiamo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \phi) (\partial_\beta \phi) - U(\phi) \quad (6.5.154)$$

il primo è il termine cinetico della Lagrangiana, il secondo il termine potenziale. Abbiamo un meno davanti al termine cinetico perché abbiamo la metrica $(-+++)$, in questo modo per esempio l'operatore d'Alambertiano lo possiamo scrivere come:

$$\square = -\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta = \partial_t^2 - \nabla^2 \quad (6.5.155)$$

l'equazione del moto del campo scalare si comporrà dei termini:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -U'(\phi) \quad (6.5.156)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (\delta_{\alpha\beta} \partial_\beta \phi + \delta_{\beta\mu} \partial_\alpha \phi) \quad (6.5.157)$$

$$= -\eta^{\mu\beta} (\partial_\beta \phi) \quad (6.5.158)$$

da cui:

$$U'(\phi) + \partial_\mu [\eta^{\mu\beta} (\partial_\beta \phi)] = 0 \quad (6.5.159)$$

ovvero:

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = U'(\phi) \quad (6.5.160)$$

$$\square \phi = -U'(\phi) \quad (6.5.161)$$

ad esempio, ponendo $U(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$, la derivata prima risulta in $U'(\phi) = m^2\phi$ e sostituendo troviamo l'equazione di Klein-Gordon per un campo scalare dotato di massa m :

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (6.5.162)$$

Per porre tale campo scalare in presenza di un campo gravitazionale, partendo dalla Lagrangiana in (6.5.154), dobbiamo fare:

$$\eta_{\alpha\beta} \longrightarrow g_{\mu\nu} \quad , \quad \partial_\mu \longrightarrow D_\mu \quad (6.5.163)$$

in modo che sia il termine cinetico che il termine potenziale risultino scalari per trasformazioni generali di coordinate e quindi anche la Lagrangiana. In Relatività Generale quindi:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(D_\mu\phi)(D_\nu\phi) - U(\phi) \quad (6.5.164)$$

riconosciamo nuovamente il termine cinetico, che è quello che va a finire nel D'Alembertiano nell'equazione di Klein-Gordon, e il termine potenziale. Questa lagrangiana è scalare, cioè invariante, per trasformazioni generali di coordinate. Da questa possiamo ricavare la corrispondente equazione di Klein-Gordon in presenza di gravità, cioè l'equazione di Eulero-Lagrange (6.5.152) di questo campo. Abbiamo:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -U'(\phi) \quad (6.5.165)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_\mu\phi)} = -g^{\mu\nu}(D_\nu\phi) \quad (6.5.166)$$

sostituiamo e otteniamo l'equivalente dell'equazione di Klein-Gordon:

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (6.5.167)$$

con la differenza, tra Relatività Speciale e Relatività Generale, che abbiamo:

$$\square_{SR} = -\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \quad , \quad \square_{GR} = -g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu. \quad (6.5.168)$$

Vogliamo ora vedere quale contributo dà questo campo scalare alla sorgente di un campo gravitazionale. Per farlo dobbiamo calcolarci il tensore energia-impulso relativo a questo campo, espresso da:

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L} - 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \quad (6.5.169)$$

calcolando la variazione di $\mathcal{L}$ rispetto $g^{\mu\nu}$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}(D_\mu\phi)(D_\nu\phi) \quad (6.5.170)$$

quindi:

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (D_\alpha \phi) (D_\beta \phi) \right] + (D_\mu \phi) (D_\nu \phi) \quad (6.5.171)$$

se il campo scalare ϕ è sorgente di gravità, allora contribuirà nell'equazione di Einstein con questo tensore energia impulso $T_{\mu\nu}$. Questo esempio ha una rilevanza importante in cosmologia.

6.5.5 Costante cosmologica

Rivediamo in questa sezione quello già visto riguardo la costante cosmologica Λ , ma sotto l'approccio del principio variazionale.

Abbiamo scritto l'equazione di Einstein partendo dall'azione di Hilbert-Einstein sommata all'azione di materia e da questo abbiamo trovato le corrette equazioni di Einstein, o meglio, l'equazione del campo gravitazionale che soddisfa i principi di simmetria detti. Possiamo aggiungere un termine scalare all'azione totale relativo alla costante cosmologica:

$$S = S_{HE} + S_M + S_\Lambda \quad (6.5.172)$$

con S_Λ dato da:

$$S_\Lambda = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} (-2\Lambda) \quad (6.5.173)$$

che scritta così, S_Λ è uno scalare per trasformazione generale di coordinate. Possiamo ottenere l'equazione del moto esattamente allo stesso modo cioè chiedendo che l'azione totale sia stazionaria (6.5.140) rispetto alle variazioni del campo:

$$(16\pi G) \delta S_\Lambda = \int d^4x (-2\Lambda) \left(-\frac{1}{2} \sqrt{g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \quad (6.5.174)$$

$$= \int d^4x \sqrt{g} \Lambda g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (6.5.175)$$

e dunque abbiamo:

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\delta S_\Lambda}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\Lambda}{16\pi G} g_{\mu\nu} \quad (6.5.176)$$

ricordando (6.5.134) e (6.5.144) e mettendo tutti i pezzi insieme otteniamo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (6.5.177)$$

che è l'equazione di Einstein in presenza della costante cosmologica. Nuovamente, Λ deve essere una costante in quanto la richiesta che abbiamo fatto è che l'azione sia uno scalare per trasformazione generale di coordinate.

Sappiamo già che se facciamo il limite Newtoniano, essa non è formalmente compatibile con l'equazione di Poisson e anche che l'unico modo per renderla ad essa compatibile è che la correzione che Λ induce sia piccola a sufficienza affinché sulle scale fisiche su cui l'equazione di Poisson è verificata non dia delle deviazioni più grandi del nostro errore di misura.

Si noti che il termine di costante cosmologica, può essere visto, o come una modifica dell'azione di gravità o come una modifica dell'azione di materia⁶. Nel primo caso:

$$S_{HE} \longrightarrow S_{HE}^{\Lambda} = \frac{(-1)}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} (R + 2\Lambda) \quad (6.5.178)$$

l'alternativa, invece, prevede:

$$S_M \longrightarrow S_M^{\Lambda} = S_M + S_{\Lambda} \quad (6.5.179)$$

ma in tal caso possiamo associare all'azione della costante cosmologica un tensore energia impulso, cioè vedere Λ anche come un termine di sorgente di campo:

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{\Lambda}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{8\pi G} g_{\mu\nu} \quad (6.5.180)$$

è il tensore energia impulso di un fluido perfetto. Infatti, per un fluido perfetto:

$$T = (p + \rho) u_{\mu} u_{\nu} + p g_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad g_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu} = -1 \quad (6.5.181)$$

se ci mettiamo in particolare nel sistema di riferimento comoviente del fluido, in cui $u^{\mu} = (u^0, \vec{0})$, con:

$$u^0 = (-g_{00})^{-1/2} \quad , \quad u_0 = g_{0\mu} u^{\mu} = g_{00} u^0 = -(-g_{00})^{1/2}. \quad (6.5.182)$$

Ora, per il tensore energia impulso di un fluido perfetto:

$$T_{00} = (p + \rho) (u_0)^2 + p g_{00} \quad (6.5.183)$$

$$= (p + \rho) (-g_{00}) + p g_{00} \quad (6.5.184)$$

$$= -\rho g_{00} \quad (6.5.185)$$

e per:

$$T_{00}^{\Lambda} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{00} \quad (6.5.186)$$

per confronto tra le due, possiamo associare una densità di energia ρ_{Λ} alla costante cosmologica:

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (6.5.187)$$

⁶Per completezza, dobbiamo aggiungere che nel caso tanti campi in gioco, ognuno dei quali ha una sua lagrangiana e quindi una sua azione, nel termine di azione di materia tutti questi termini si sommano.

Per le componenti ij , sempre nel sistema comovente, del tensore $T_{\mu\nu}$ abbiamo:

$$T_{ij} = (p + \rho) u_i u_j + p g_{ij} = p g_{ij} \quad (6.5.188)$$

e al contempo:

$$T_{ij}^{\Lambda} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{ij} \quad (6.5.189)$$

per confronto troviamo:

$$p_{\Lambda} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (6.5.190)$$

La costante cosmologica la possiamo vedere come un termine di sorgente che ha densità e pressione date da queste due espressioni. Si noti anche che queste due espressioni sono costanti, con:

$$p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}. \quad (6.5.191)$$

L'equazione di stato del fluido descritto dalla costante cosmologica è un fluido completamente diverso dal fluido non relativistico per cui $p = 0$, ma anche da un fluido fatto da particelle relativistiche per cui $p = 1/3\rho$. Questa è caratteristica che in un contesto cosmologico gli permette di determinare comportamenti peculiari all'universo, come l'espansione accelerata.

6.5.6 La scelta minimale

Il modo in cui noi abbiamo costruito l'equazione di Einstein, prendiamo dal punto di vista del principio variazionale, si basa sulla scelta minimale e più semplice possibile che possiamo fare per la scelta dell'azione relativa alla gravità. Abbiamo scelto un'azione, l'azione di Hilbert-Einstein, costruita come integrale sul volume invariante della più semplice scelta di scalare di curvatura, lo scalare di Ricci, che è lo scalare che contiene le derivate secondo il tensore metrico in modo lineare.

In altri termini, la scelta che abbiamo fatto, e che ci porta alla Relatività Generale di Einstein, è prendere una $f(R) = R$ o al più $f(R) = R + 2\Lambda$ quando includiamo la costante cosmologica. Ma avremmo potuto fare delle scelte anche molto più generali, sempre mantenendo l'azione rispettosa del principio di simmetria del sistema. Scelte alternative avrebbero potuto essere, per esempio:

- Una funzione arbitraria dello scalare di curvatura $f(R)$, quali:

$$f(R) = a R^2 \quad (6.5.192)$$

$$f(R) = b R^3 \quad (6.5.193)$$

$$f(R) = a R^2 + b R^3 + c R^4 \quad (6.5.194)$$

$$f(R) = \exp\{-R/c\} \quad (6.5.195)$$

Si noti che nell'ultimo caso la c deve avere la medesima dimensionalità di R . Tali teorie si chiamano teorie **fdR**. Sono tutte teorie estese della gravità, di cui la teoria di Einstein è il caso particolare più semplice di tutti. Avremmo però potuto fare delle scelte ancora più generali, vedi il punto successivo.

- Dentro l'integrale che ci dà l'azione abbiamo bisogno di prendere delle funzioni scalari, però nessuno vieta di prendere delle funzioni F , funzioni generiche di scalari di curvatura più complessi del semplice scalare R . Avremmo potuto fare anche teorie più complesse e costruire scalari a partire da teorie con derivate più alte della derivata seconda. Tutte queste teorie sono tutte valide da un punto di vista dell'implementazione della richiesta che la teoria si invariante per trasformazione generale di coordinate. Il problema è che sono tutte teorie più complesse e fino a che non abbiamo necessità di andare oltre la teoria minimale, la scelta minimale risulta sicuramente quella più ragionevole.

Tutte le **teorie estese di gravità** devono però riprodurre il limite newtoniano dell'equazione di Poisson, e questo mette dei limiti sui parametri aggiuntivi che vengono inseriti.

Si noti inoltre che nella nostra derivazione, con l'azione di Hilbert Einstein espressa con lo scalare di Ricci, abbiamo avuto bisogno di inserire un parametro dimensionale $1/G$ in modo tale che l'azione fosse adimensionale. Se considero però ad esempio le teorie fdR la costante davanti cambia. Per esempio:

$$f(R) = R + a R^2 + b R^3 \quad (6.5.196)$$

Ognuna delle costanti inserite è dimensionale e ha dimensione diversa, ma introdurre una costante dimensionale significa introdurre una scala. Quindi l'effetto del termine R^2 o del termine R^3 , sarà modulato dalla scala fisica che stiamo introducendo.

In conclusione possiamo benissimo scrivere un'azione di gravità più generale:

$$S_G = \frac{(-1)}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} f(R) \quad (6.5.197)$$

ma dobbiamo prestare attenzione che con ciò stiamo introducendo delle scale fisiche.

6.6 Gauge

Abbiamo visto che l'informazione sul campo gravitazionale è contenuta nel tensore metrico $g_{\mu\nu}$, dello spazio-tempo, tensore di rango 2 simmetrico, che in quattro dimensioni ha 10 componenti tra di loro indipendenti. Le equazioni di Einstein sono anch'esse espresse attraverso l'eguaglianza di due tensori

simmetrici e quindi formano un sistema di dieci equazioni differenziali del secondo ordine per le funzioni incognite $g_{\mu\nu}$. Le soluzioni dell'equazione di Einstein sono le dieci funzioni del tensore metrico. Quindi sembrerebbe che le cose siano a posto: abbiamo dieci equazioni differenziali per dieci funzioni incognite. Il punto, però, è che i tensori che formano l'equazione di Einstein, soddisfano necessariamente delle condizioni differenziali, in particolare il primo membro dell'equazione di Einstein soddisfa, in virtù dell'identità di Bianchi, la condizione differenziale:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\mu} = 0 \quad (6.6.1)$$

e inoltre per $T_{\mu\nu}$ abbiamo:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 \quad (6.6.2)$$

queste sono quattro condizioni differenziali in quanto si ha solo l'indice ν libero (che ha quattro valori se siamo in quattro dimensioni). Questo dice quindi che le equazioni funzionalmente indipendenti che permettono di determinare il tensore metrico sono sei in quattro dimensioni. Questo significa che abbiamo quattro gradi di libertà nel sistema, o detto in un altro modo, $g_{\mu\nu}$ non è determinato univocamente. Ovvero, se $g_{\mu\nu}$ è una soluzione dell'equazione di Einstein, c'è ancora la libertà di trovare delle funzioni che sono anch'esse soluzioni della stessa equazione di Einstein per la stessa distribuzione di sorgenti e la relazione che ci porta nella soluzione equivalente è una trasformazione generale di coordinate.

La teoria è invariante per trasformazione generale di coordinate, quindi se $g_{\mu\nu}$ è soluzione dell'equazione di Einstein, anche $g'_{\mu\nu}$, legato a $g_{\mu\nu}$ da una trasformazione generale di coordinate, è soluzione.

$$x^\mu \xrightarrow{TGC} x'^\mu \quad (6.6.3)$$

$$g_{\mu\nu} \longleftrightarrow g'_{\mu\nu} \quad (6.6.4)$$

essendo questa una trasformazione generale di coordinate, significa che io abbiamo quattro funzioni arbitrarie $x'^\mu = x'^\mu(x)$ attraverso le quali possiamo effettuare la trasformazione di coordinate stessa. Dunque il tensore metrico è determinato sempre a meno di una trasformazione generale di coordinate.

Questo è analogo a quello che succede in elettromagnetismo (come ben sappiamo). Prendiamo l'equazione di Maxwell per il potenziale vettore A_α . Queste sono:

$$\square A_\alpha - \partial_\alpha (\partial_\beta A^\beta) = -J_\alpha \quad (6.6.5)$$

ed esiste per queste un'identità differenziale automatica. Calcoliamo la divergenza del primo membro:

$$\partial^\alpha [\square A_\alpha - \partial_\alpha (\partial_\beta A^\beta)] = 0 \quad (6.6.6)$$

infatti, nel primo termine possiamo far filtrare la derivata attraverso il D'Alembertiano, commutiamo solo l'ordine delle derivate presente nei due operatori derivativi:

$$\square(\partial^\alpha A_\alpha) - \partial^\alpha \partial_\alpha (\partial_\beta A^\beta) = \square(\partial^\alpha A_\alpha) - \square(\partial_\beta A^\beta) = 0 \quad (6.6.7)$$

questo, del resto, è compatibile col fatto che la divergenza della corrente a secondo membro è nulla, perché la corrente è conservata:

$$\partial^\alpha J_\alpha = 0. \quad (6.6.8)$$

Quindi abbiamo le equazioni di Maxwell, che sono quattro equazioni differenziali del secondo ordine per il potenziale vettore A_α , con una identità differenziale necessaria. È l'analogo delle equazioni di Einstein (6.5.62) dove abbiamo l'identità di Bianchi (6.6.1), identità differenziale automatica.

Quindi per il campo elettromagnetico, ci si ritrova con solo tre equazioni differenziali funzionalmente indipendenti. Questo vuol dire che le quattro componenti del potenziale vettore, non sono determinate univocamente. Trovata la soluzione A_α , possiamo sempre fare una trasformazione di gauge, del potenziale in un altro potenziale, che è legato al potenziale di partenza, attraverso la derivata totale di una funzione ϕ arbitraria:

$$A_\alpha \longrightarrow A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \phi(x) \quad (6.6.9)$$

possiamo usare quindi la *libertà di gauge*, per sceglierci una delle componenti, per esempio, del potenziale vettore o una sua proprietà. Per esempio, imponendo che:

$$\partial_\alpha A'_\alpha = 0 \quad (6.6.10)$$

si utilizza quello che viene chiamato il **gauge di Lorenz** e la scelta che abbiamo fatto viene chiamata **gauge Fixing**. Questo lo possiamo sempre fare perché se la soluzione iniziale non ha già di suo una divergenza nulla, è sufficiente trovare una funzione ϕ che soddisfi:

$$\partial_\alpha A'_\alpha = \partial_\alpha A_\alpha + \square \phi = 0 \quad (6.6.11)$$

$$\implies \square \phi = -\partial_\alpha A^\alpha \quad (6.6.12)$$

questa equazione ci permette di determinare la funzione $\phi(x)$ tale che il potenziale vettore trasformato di gauge abbia divergenza uguale a zero.

Il gauge di Lorenz, per esempio, è molto utile in quanto le equazioni di Maxwell in questo gauge si semplificano:

$$\square A_\alpha = -J_\alpha \quad (6.6.13)$$

con la scelta di gauge $\partial_\beta A^\beta = 0$. In assenza di sorgenti, cioè nel vuoto, l'equazione si riduce alla:

$$\square A_\alpha = 0 \quad (6.6.14)$$

le cui soluzioni sono delle onde.

Adesso, avendo fatto la scelta di gauge, la soluzione del potenziale A_α è determinata in modo univoco. In questo caso, per esempio, la scelta del gauge di Lorenz ci permette di semplificare l'equazione del moto, ma come sappiamo ci sono altre possibili scelte di gauge. Vi è anche il cosiddetto **gauge di Coulomb**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (6.6.15)$$

si noti che è possibile fare solo una scelta. Si noti anche che la prima scelta di gauge di Lorenz è - siamo in Relatività Speciale - una scelta Lorentz invariante, come si dice, mentre la scelta del gauge di Coulomb non è Lorentz invariante.

Una situazione analoga ce l'abbiamo quindi anche con il campo gravitazionale, in quanto abbiamo detto poco fa che le nostre equazioni di Einstein, in virtù dell'identità di Bianchi, sono soltanto sei funzioni funzionalmente indipendenti e quindi possiamo utilizzare delle condizioni sulle coordinate se vogliamo specificare il tensore metrico. Possiamo adottare un particolare sistema di coordinate in cui, per esempio, il tensore metrico soddisfa delle specifiche proprietà. Queste condizioni sulle coordinate vengono anche chiamate, anche in questo caso, *gauge Fixing*. Anche qui abbiamo una libertà di gauge e la quantità di scelte che possiamo fare sono quattro condizioni che possiamo determinare in quanto possiamo scegliere arbitrariamente le quattro funzioni che ci danno la trasformazione generale di coordinate. In questo modo possiamo determinare in modo univoco $g_{\mu\nu}$. È chiaro che abbiamo scritto $g_{\mu\nu}$, però in un particolare scelta di gauge, cioè che vuol dire in un particolare sistema di coordinate in cui vale la condizione di gauge che abbiamo imposto. Ciò significa che non è detto che il tensore metrico così trovato sia a sua volta trasformabile arbitrariamente in un altro sistema di coordinate: le quattro condizioni di gauge tipicamente non sono generalmente covarianti (vedi gauge di Coulomb per il caso EM). Lo scopo del gauge Fixing è proprio quello di rimuovere l'ambiguità nel tensore metrico dovuta alla covarianza generale delle equazioni di Einstein.

Le scelte del gauge possono essere molte. Ci sono vari tipi di gauge, abbiamo ad esempio il **gauge armonico**, che è utile nello studio delle onde gravitazionali, oppure il **gauge sincrono**, utile in altri tipi di problemi.

6.6.1 Gauge armonico

Il gauge armonico è una scelta particolare del sistema di coordinate che fa sì che se $g_{\mu\nu}$ è soluzione dell'equazione di Einstein possiamo sempre realizzare una trasformazione di coordinate affinché valga questa condizione:

$$\Gamma^\lambda \equiv g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 \quad (6.6.16)$$

si noti che sono 4 condizioni. Dato il tensore metrico $g_{\mu\nu}$, soluzione dell'equazione di Einstein, possiamo calcolare la Γ e possiamo verificare se queste quattro funzioni, dovute a questa contrazione, facciano zero. Se sono diverse zero, non siamo nel gauge armonico, ma possiamo sempre trovare un altro sistema di coordinate in cui il gauge armonico sia soddisfatto:

$$x^\mu, \Gamma^\lambda \neq 0 \longrightarrow x'^\mu, \Gamma'^\lambda = 0 \quad (6.6.17)$$

se facciamo questo, il sistema di coordinate in cui ci siamo messo si chiama anch'esso *sistema di coordinate armonico*.

Questa scelta è sempre possibile, come possiamo vedere facendo questo semplice ragionamento. Scriviamo la connessione affine nel sistema di coordinate x'^μ :

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\rho_{\tau\sigma} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \quad (6.6.18)$$

Contraiamo per $g'^{\mu\nu}$. La contrazione a primo membro produce Γ'^λ secondo la definizione (6.6.16). Dopodiché riconosciamo a secondo membro la trasformazione di coordinate di un tensore di rango 2 controvariante, che ci porta a un $g^{\tau\rho}$, che contraiamo però ancora con $\Gamma^\rho_{\tau\sigma}$ quindi:

$$\Gamma'^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho - g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}. \quad (6.6.19)$$

Se siamo in un sistema di coordinate in cui $\Gamma^\rho \neq 0$ possiamo sempre fare una trasformazione imponendo che $\Gamma'^\lambda = 0$. Questo è possibile se vale la condizione:

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho = g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \quad (6.6.20)$$

condizione che possiamo vederla come equazione differenziale per le funzioni $x'^\lambda(x)$ che realizzano la trasformazione di coordinate. Esse infatti sono le funzioni di trasformazione di coordinate che fanno sì che ci andiamo a sedere in un sistema di coordinate armonico.

Si noti anche un'altra cosa: la condizione di gauge armonico espressa da (6.6.16) è chiaramente una condizione che non è invariante per una trasformazione generale di coordinate. La condizione infatti non è un'eguaglianza tra due tensori perché Γ^λ non è un tensore. Questo non è un problema perché scegliere il gauge significa proprio scegliersi un particolare sistema di coordinate, quindi la scelta di gauge non ha necessità di essere una scelta generalmente covariante.

Scriviamo la condizione di gauge armonico in termini di sviluppo della connessione:

$$\Gamma^\lambda = g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \quad (6.6.21)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} \left(\partial_\nu g_{\mu\kappa} + \partial_\mu g_{\nu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu} \right) \quad (6.6.22)$$

usiamo il fatto che:

$$g^{\lambda\kappa} \partial_\nu(g^{\kappa\mu}) = -g_{\kappa\mu} \partial_\nu(g^{\lambda\kappa}) \quad (6.6.23)$$

assieme al teorema:

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\kappa(g_{\mu\nu}) = g^{-1/2} \partial_\kappa(g^{1/2}) \quad (6.6.24)$$

e così possiamo riesprimere:

$$\Gamma^\lambda = g^{-1/2} \partial_\kappa(g^{1/2} g^{\lambda\kappa}). \quad (6.6.25)$$

Quindi la richiesta di gauge armonico $\Gamma^\lambda = 0$ è equivalente a richiedere che:

$$\partial_\kappa(\sqrt{g} g^{\lambda\kappa}) = 0 \quad (6.6.26)$$

si vede subito che nello spazio-tempo piatto, le coordinate di Minkowski sono armoniche, infatti vale:

$$\partial_\kappa(\sqrt{\eta} \eta^{\lambda\kappa}) = 0 \quad (6.6.27)$$

poiché $\eta^{\lambda\kappa}$ ha coefficienti costanti e $\sqrt{\eta} = 1$.

Capitolo 7

Test classici e applicazioni della Relatività Generale

Abbiamo visto la formulazione della teoria della Relatività Generale, così come formulata da Einstein e ne abbiamo studiati due aspetti. Da un lato come esprimere l'effetto di un campo gravitazionale arbitrario su un qualsiasi sistema fisico, cosa che implementiamo con il principio di covarianza generale. Dall'altro abbiamo visto come determinare la forma del campo gravitazionale date le sorgenti, ovvero l'equazione di Einstein.

La Relatività Generale, da un lato, predice una serie di fenomeni nuovi che, come sempre, devono essere messi sotto prova sperimentale. Se le predizioni della teoria sono confermate dall'esperimento, la teoria viene accettata, altrimenti la teoria deve essere abbandonata. Ci sono alcune predizioni che vanno sotto il nome di *test classici della Relatività Generale* che sono i seguenti:

- **Predizione del redshift gravitazionale della radiazione.** Sotto l'effetto di un campo gravitazionale la lunghezza d'onda della radiazione viene shiftata verso il rosso o verso il blu a seconda che noi usciamo o entriamo dentro il campo gravitazionale. Questo lo abbiamo sostanzialmente predetto in due modi: come conseguenza diretta della validità del principio di equivalenza e poi mediante un'applicazione più formale dei principi, che abbiamo determinato come relazione tra il tempo coordinato e il tempo proprio in punti diversi del campo gravitazionale.
- **Deflessione della luce.** Un secondo effetto predetto dalla teoria della Relatività Generale è che la radiazione possa essere deflessa dalla sua traiettoria rettilinea se si propaga in un campo gravitazionale. Dato che lo spazio-tempo in RG è curvo, le traiettorie dei fotoni seguono delle geodetiche che saranno le più dritte possibili sullo spazio-tempo curvo e, se le vediamo come propagazione nello spazio al passare del

tempo, non sono più delle rette ma delle traiettorie curve. Questo porta al concetto di deflessione della luce che è stato verificato sperimentalmente e vedremo effettivamente come questo sia conseguenza diretta della teoria.

- **Predizione della precessione delle orbite dei pianeti.** La relatività generale permette di calcolare la precessione delle orbite dei pianeti interni del sistema solare, come per esempio la precessione di Mercurio. La predizione coincide esattamente con la misura sperimentale.

Questi tre test classici furono proposti da Einstein stesso come test di verifica della sua teoria e furono verificati molto presto. Il redshift gravitazionale fu verificato dall'esperimento di Pound e Rebka con lo shift delle linee spettrali della radiazione che si propagano nel campo gravitazionale terrestre; la deflessione della luce venne messa in evidenza dall'osservazione di Eddington; la precessione delle orbite era un fenomeno in realtà già osservato, ma la cui entità, cioè l'angolo di precessione dell'orbita di Mercurio, fu calcolato in modo molto preciso dalla Relatività Generale.

Ci sono poi altri fenomeni che vengono predetti all'interno della teoria della relatività generale come:

- **Ritardo temporale negli eco radar predetto da Shapiro.**
- **Precessione di un giroscopio in orbita.**

Una cosa che possiamo osservare, in particolare per i primi tre test classici proposti da Einstein, è che hanno un denominatore comune. In particolare sono tutte e tre situazioni in cui siamo o nello spazio vuoto, oppure in campi gravitazionali con buona approssimazione statici e a simmetria sferica.

Nel campo gravitazionale terrestre possiamo con buona approssimazione assumere che la Terra che genera il campo sia a simmetria sferica, così come per la deflessione della luce da parte del Sole e anche la precessione delle orbite dei pianeti attorno al Sole. Inoltre il campo gravitazionale è in buona approssimazione isotropo e anche statico.

Dato che questi tre test hanno un denominatore comune, ci servirà a risolvere l'equazione di Einstein proprio in questa situazione, cioè per uno spazio vuoto e sotto l'assunzione che il campo gravitazionale, ovvero che il sistema, sia isotropo.

Allo stesso tempo però la teoria della Relatività Generale prevede fenomeni nuovi che verranno via via sviluppati e che portano a tutta una serie di predizioni, o anche di applicazioni, della teoria in vari contesti. Ne menzioniamo alcuni:

1. Meccanica celeste post-newtoniana, quindi le correzioni relativistiche ai moti descritti dalla meccanica newtoniana.
2. Equilibrio e il collasso stellare.

3. Buchi neri.
4. Lente gravitazionale, concetto oggi molto utilizzato in contesto cosmologico per studiare la distribuzione di materie nell'universo.
5. Predizione dell'esistenza delle onde gravitazionali.
6. Cosmologia moderna, dove lo stesso concetto di universo in espansione è una diretta conseguenza dell'equazione di Einstein nel modello di Friedman, Robertson e Walker.

7.1 Soluzioni dell'equazione di Einstein

Tutti questi fenomeni richiedono una soluzione dell'equazione di Einstein, la quale, come abbiamo visto, comprende equazioni molto complesse perché non lineari e che in generale non sono risolvibili esattamente.

Ci sono vari tipi di approcci che si possono applicare per cercare delle soluzioni all'equazione di Einstein.

A. Simmetria Una classe di approcci è quella di studiare sistemi fisici dotati di un **alto grado di simmetria**. In questa situazione, in alcuni casi, è possibile anche determinare delle soluzioni esatte dell'equazione di Einstein.

- Un esempio in questa situazione, è quello di un corpo di massa M che genera un campo isotropo e statico, cioè una distribuzione di materia in una data zona di volume, descritta da una densità $\rho(x)$, funzione soltanto di una distanza radiale, non dipendente dal tempo. Questo porta, a una soluzione che si chiama **metrica di Schwarzschild**.
- Un altro caso è quello di un sistema fisico che abbia omogeneità e isotropia dal punto di vista spaziale. Questo è il caso con il quale si descrive l'evoluzione media dell'universo, cioè la sua espansione, e porta a quella che si chiama **metrica FRWL** (Friedman, Robertson, Walker, Lemaitre).

B. Approssimazione In altre situazioni le soluzioni non possono essere ottenute in modo esatto, però possono esserci casi in cui si possono applicare metodi di approssimazione per la soluzione delle equazioni di Einstein. Non si assume necessariamente una simmetria particolare del sistema, ma si sviluppano delle tecniche sistematiche di approssimazione. Esempi tipici sono:

- L'approssimazione post-newtoniana, che si adatta alla situazione in cui abbiamo corpi con moti lenti in un campo gravitazionale che in

generale può essere arbitrario. Nel caso di un moto di pianeti attorno a un corpo che genera il campo gravitazionale, abbiamo oggetti di massa M , distanze che chiamiamo dell'ordine di r e velocità degli oggetti in moto v . In meccanica newtoniana l'energia cinetica tipica di un oggetto, essendo un moto non relativistico, è:

$$T \sim \frac{1}{2} M v^2 \quad (7.1.1)$$

e la relazione tipica tra l'energia gravitazionale e l'energia potenziale del sistema è:

$$v^2 \sim \frac{GM}{r} \quad (7.1.2)$$

Approssimazione post-newtoniana significa descrivere il moto attraverso uno sviluppo perturbativo nei parametri piccoli v^2 e GM/r . Quindi possiamo fermarci a un dato ordine perturbativo nello sviluppo in velocità e a un dato ordine perturbativo nello sviluppo GM/r .

- Situazione di campo debole, con moti non necessariamente lenti. Un esempio tipico è quello della deflessione della luce da parte del Sole. Il campo è debole, perché in qualunque punto ci mettiamo nel campo gravitazionale solare, la deflessione è piccola. Un altro caso in cui abbiamo soluzioni approssimate, in regime di campo debole, è quello delle onde gravitazionali.
- Un altro approccio, invece, che viene utilizzato per cercare di risolvere le equazioni differenziali di Einstein in modo generico è quello delle soluzioni numeriche. Le equazioni differenziali sono, come abbiamo detto, equazioni differenziali accoppiate, non lineari, nel campo $g_{\mu\nu}$. Sono difficili da risolvere anche in modo numerico e richiedono per questo delle tecniche particolari, ma in linea di principio una soluzione numerica può permettere di risolvere le equazioni di Einstein per un sistema del tutto generico.

7.2 Metrica statica e isotropa

Vediamo quindi come risolvere l'equazione di Einstein in un caso specifico con alto grado di simmetria, in cui la soluzione che otteniamo sarà una soluzione esatta. Mettiamoci nella situazione in cui noi abbiamo un sistema fisico che genera un campo gravitazionale statico ed isotropo. La soluzione che ci permette di determinare la forma del tensore metrico dovrà essere ottenuta risolvendo l'equazione di Einstein. Dato che abbiamo un alto grado di simmetria, invece che partire da una metrica generica con dieci funzioni indipendenti completamente arbitrarie, cerchiamo di semplificare il problema sfruttando le proprietà di simmetria, in modo tale da scrivere la metrica in

una forma che contenga il minimo numero di funzioni necessarie per descrivere quel tipo di sistema. Dopo aver fatto ciò avremo delle funzioni arbitrarie nel tensore metrico, che andranno risolte dicendoci quali siano le sorgenti che generano quello specifico campo statico ed isotropo, e quindi risolvendo esplicitamente l'equazione di Einstein, avendo fatto una scelta per il tensore energia impulso.

Prendiamo innanzitutto un sistema di coordinate che possiamo chiamare quasi-Minkowskiano, in cui le coordinate sono $x^\mu = (t, x^1, x^2, x^3)$. Una metrica statica ed isotropa sarà generata da una distribuzione di massa con una densità $\rho(r)$ statica e isotropa. Indichiamo con r la distanza dalla distribuzione di materie che genera il campo gravitazionale; più ci allontaniamo dalla massa che genera il campo, più il campo gravitazionale diventa piccolo, quindi asintoticamente lo spazio-tempo dovrà essere Minkowskiano.

Scelte le coordinate, possiamo scrivere un'espressione per il tempo proprio:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (7.2.1)$$

le richieste che abbiamo sono:

- *Staticità*:

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0. \quad (7.2.2)$$

- *Isotropia*: se la metrica deve essere isotropa, potremo sicuramente trovare il sistema di coordinate in modo tale che la forma della metrica possa dipendere dalle coordinate $\vec{x}$ e dai differenziali $d\vec{x}$ solo attraverso degli invarianti rotazionali.

In altri termini, la forma del tempo proprio, che è una combinazione lineare di funzioni dello spazio e di forme bilineari dei differenziali delle coordinate, non deve avere funzioni metriche dipendenti dal tempo, sennò non è statico, e il modo in cui dipende dalle coordinate e i differenziali delle coordinate può essere fatto solo attraverso gli invarianti rotazionali. Gli invarianti rotazionali che possiamo costruire sono:

$$r^2 = (\vec{x} \cdot \vec{x}) \quad (7.2.3)$$

$$(\vec{x} \cdot d\vec{x}) = x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3 \quad (7.2.4)$$

$$(d\vec{x} \cdot d\vec{x}) = (d\vec{x})^2 \quad (7.2.5)$$

la forma più generale del tempo proprio che implementa le richieste dette deve essere necessariamente di questo tipo:

$$d\tau^2 = F(r) dt^2 - 2E(r) dt (\vec{x} \cdot d\vec{x}) - D(r) (\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 - C(r) (d\vec{x})^2 \quad (7.2.6)$$

abbiamo delle funzioni incognite $F(r)$, $E(r)$, $D(r)$, $C(r)$ che dipendono solo dalla coordinata radiale. Ora, tali funzioni in realtà sono comunque troppe.

Il tensore metrico ha in generale dieci funzioni indipendenti in generale, ma in virtù delle proprietà di simmetria abbiamo individuato un opportuno sistema di coordinate in modo tale che solo quattro funzioni siano necessarie. Possiamo ridurre queste quattro funzioni ad un numero inferiore. Per fare questo è più comodo fare una trasformazione di coordinate per le coordinate spaziali in modo tale che:

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \cos \varphi \\ x^2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ x^3 = r \cos \theta \end{cases} \quad (7.2.7)$$

segue immediatamente che:

$$(\vec{x} \cdot d\vec{x}) = r dr \quad (7.2.8)$$

e che:

$$(d\vec{x})^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (7.2.9)$$

$$= dr^2 + r^2 d\Omega \quad (7.2.10)$$

e questo vuol dire allora che il tempo proprio si può scrivere come:

$$\begin{aligned} d\tau^2 = F(r) dt^2 - 2E(r) r dt dr - r^2 D(r) dr^2 - \\ - C(r) [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2] \end{aligned} \quad (7.2.11)$$

abbiamo un termine misto, dunque la metrica in questo set di coordinate non è diagonale. Possiamo diagonalizzare la metrica cambiando il sistema di coordinate. Sostanzialmente quello che stiamo facendo è scegliere un gauge opportuno in modo tale da rendere questo termine nullo. Ridefiniamo la coordinata tempo:

$$t \longrightarrow t' = t + \phi(r) \quad (7.2.12)$$

la funzione ϕ al momento è del tutto arbitraria. Deriviamo:

$$dt' = dt + \frac{d\phi}{dr} dr \quad (7.2.13)$$

$$= dt + \phi'(r) dr \quad (7.2.14)$$

da cui:

$$dt = dt' - \phi'(r) dr \quad (7.2.15)$$

che possiamo sostituire dentro l'espressione di $d\tau^2$:

$$\begin{aligned} d\tau^2 = F(r) [dt' - \phi'(r) dr]^2 - 2E(r) r [dt' - \phi'(r) dr] dr - r^2 D(r) dr^2 - \\ - C(r) [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2]. \end{aligned} \quad (7.2.16)$$

Possiamo anche sfruttare l'arbitrarietà della funzione ϕ per fare in modo che nel sistema di coordinate in cui abbiamo il tempo t' non abbiamo termini fuori diagonale. Quindi:

$$\begin{aligned} d\tau^2 = & F(r) dt' - 2F(r) \phi'(r) dt' dr + F(r) \phi'^2 dr - 2E(r) r dt' dr - \\ & - 2E(r) r \phi' dr^2 - r^2 D(r) dr^2 - C(r) [dr^2 + r^2 d\Omega]. \end{aligned} \quad (7.2.17)$$

Possiamo fare in modo che non ci sia termine fuori diagonale imponendo che:

$$-2 [F(r) \phi'(r) + r E(r)] dt' dr = 0 \quad (7.2.18)$$

$$\implies \phi'(r) = \frac{d\phi}{dr} = -r \frac{E(r)}{F(r)}. \quad (7.2.19)$$

Non ci interessa nemmeno risolvere questa equazione, ci basta sapere che ridefinendo il tempo in questo nuovo set il tensore metrico è diventato diagonale. Ribattezzando $t' \rightarrow t$ rimane:

$$d\tau^2 = F(r) dt^2 - G(r) dr^2 - C(r) [dr^2 + r^2 d\Omega] \quad (7.2.20)$$

siamo scesi di fatto a tre funzioni arbitrarie, però possiamo fare ancora una scelta. Può essere utile ridefinire la coordinata r . L'espressione precedente può essere manipolata come segue:

$$d\tau^2 = F(r) dt^2 - [G(r) + C(r)] dr^2 - C(r) r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \quad (7.2.21)$$

se ricordiamo il dr^2 di uno spazio tempo piatto in coordinate polari sferiche (3.2.20):

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \quad (7.2.22)$$

possiamo ridefinire la coordinata r in modo tale da avere:

$$r \longrightarrow r' : \quad r'^2 = C(r) r^2 \quad (7.2.23)$$

cioè facciamo diventare il termine relativo alla parte angolare come nello spazio piatto. Il risultato finale è che la forma che rimane non può che essere fatta in questo modo, ribattezzando nuovamente $r' \rightarrow r$:

$$d\tau^2 = B(r) dt^2 - A(r) dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (7.2.24)$$

Questa è quella che viene chiamata **forma standard per la metrica statica ed isotropa**. Dipende da due sole funzioni della coordinata r che quantificano le deformazioni rispetto allo spazio-tempo di Minkowski. Sono quindi sufficienti solo due funzioni metriche per descrivere completamente lo spazio-tempo statico ed isotropo. Per determinare la forma di $A(r)$ e $B(r)$

dovremo risolvere l'equazione di Einstein. Anche se non lo utilizzeremo esiste anche un'altra forma, nota come **forma isotropa** in cui abbiamo:

$$d\tau^2 = H(r) dt^2 - J(r) \left[dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (7.2.25)$$

considerando l'equazione di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (7.2.26)$$

$T_{\mu\nu}$ deve essere il tensore energia impulso di una distribuzione di materia o energia essa stessa isotropa e statica $(\rho(r), p(r))$; a primo membro invece compare il tensore metrico che posso leggere da $d\tau^2$:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad x^\mu = (t, r, \theta, \varphi). \quad (7.2.27)$$

Si noti anche che noi abbiamo *due possibili regioni di soluzione*. Da una parte si ha un centro di massa e una distribuzione di materia con una densità che dipende da r , che dipende da come è fatta sorgente di campo gravitazionale, al cui interno abbiamo un tensore di energia $T_{\mu\nu}$ che contiene la distribuzione $\rho(r)$ e la pressione $p(r)$. Dall'altra, la regione esterna al corpo, in cui il tensore energia impulso è zero, perché non abbiamo densità o pressione, perché non abbiamo materia. Dovremo allora risolvere:

$$\text{interna :} \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}^{\text{int}} \quad (7.2.28)$$

$$\text{esterna :} \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad \longleftrightarrow \quad R_{\mu\nu} = 0 \quad (7.2.29)$$

che avranno due soluzioni diverse $g_{\mu\nu}^{\text{int}}(r)$ e $g_{\mu\nu}^{\text{ext}}(r)$ e avremo bisogno di richiedere:

$$g_{\mu\nu}^{\text{int}}(r = R_S) = g_{\mu\nu}^{\text{ext}}(r = R_S) \quad (7.2.30)$$

sulla superficie del corpo. Questo non è niente di strano, anche quando facciamo la soluzione newtoniana del campo gravitazionale generato da un corpo come il sole o come un pianeta, la parte interna cresce linearmente e all'esterno si ha il solito andamento $1/r$. Tali soluzioni vanno raccordate sulla superficie dell'astro. Noi calcoleremo la soluzione proprio in questo contesto, che ci porterà alla cosiddetta **metrica di Schwarzschild**.

Prendiamo quindi la forma standard della metrica statica ed isotropa (7.2.24), che dipende da due sole funzioni arbitrarie della coordinata r . Vogliamo leggere le componenti del tensore metrico con le quali costruire le componenti della connessione affine, da cui quelle del tensore di Riemann e poi, per contrazione, del tensore di Ricci. Schematicamente:

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \longrightarrow R^\lambda_{\mu\nu\kappa} \longrightarrow R_{\mu\nu}. \quad (7.2.31)$$

Dato che la metrica statica ed isotropa è diagonale:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (7.2.32)$$

$$= -g_{00} dt^2 - g_{rr} dr^2 - g_{\theta\theta} d\theta^2 - g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 \quad (7.2.33)$$

che confrontandolo con (7.2.24):

$$g_{tt} = -B(r) \quad g_{rr} = A(r) \quad (7.2.34)$$

$$g_{\theta\theta} = r^2 \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta \quad (7.2.35)$$

da qui possiamo calcolarci immediatamente le componenti del tensore metrico inverso - ci servono per la connessione - :

$$g^{tt} = -B^{-1}(r) \quad g^{rr} = A^{-1}(r) \quad (7.2.36)$$

$$g^{\theta\theta} = r^{-2} \quad g^{\varphi\varphi} = r^{-2} \sin^{-2} \theta. \quad (7.2.37)$$

Inoltre, il valore assoluto del determinante della metrica è:

$$g = r^4 A(r) B(r) \sin^2 \theta \quad (7.2.38)$$

l'elemento di volume invariante è:

$$dV = \sqrt{g} dt dr d\theta d\varphi \quad (7.2.39)$$

$$= r^2 (AB)^{1/2} \sin \theta dt dr d\theta d\varphi. \quad (7.2.40)$$

Calcoliamo tutte le componenti della connessione affine. Esse sono in generale sono 40, in 4 dimensioni e la loro espressione si ottiene da (4.3.66). Avremo derivate non banalmente nulle del tensore metrico soltanto quando deriviamo rispetto alla coordinata r e alla coordinata θ , infatti:

$$\partial_r g_{tt} = -B'(r) \quad \partial_r g_{rr} = A'(r) \quad (7.2.41)$$

$$\partial_r g_{\theta\theta} = 2r \quad \partial_r g_{\varphi\varphi} = 2r \sin^2 \theta \quad (7.2.42)$$

$$\partial_\theta g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin \theta \cos \theta \quad (7.2.43)$$

tutte le altre derivate sono nulle. Con una certa calma potremmo calcolarci tutte le componenti della connessione usando queste espressioni (per esercizio). Il risultato è che tra le 40 componenti della connessione, quelle che non sono banalmente nulle, sono:

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2A} \frac{dA}{dr} \equiv \frac{A'}{2A} \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{r \sin^2 \theta}{A} \quad (7.2.44)$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r} \quad (7.2.45)$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r}{A} \quad \Gamma^r_{tt} = \frac{B'}{A} \quad (7.2.46)$$

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin \theta \cos \theta \quad \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cot \theta \quad (7.2.47)$$

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{B'}{2B}. \quad (7.2.48)$$

Tutte le altre componenti, che non sono ottenibili da queste semplicemente per scambio degli indici bassi (la Γ gode di simmetria per scambio degli indici bassi), sono nulle. La terza parte del conto prevede di determinare le componenti del tensore di Ricci, che possiamo scrivere anche senza passare subito dal tensore di Riemann. Infatti ricordando:

$$R_{\mu\kappa} = R^\lambda_{\mu\lambda\kappa} \quad (7.2.49)$$

$$= \partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\kappa\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} \quad (7.2.50)$$

insieme a:

$$\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} \partial_\lambda \ln g \quad (7.2.51)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\lambda \sqrt{g}. \quad (7.2.52)$$

La forma del tensore di Ricci risultante per la metrica statica ed isotropa contiene solo 4 componenti non nulle ed è per giunta diagonale! Esse sono rispettivamente:

$$R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{1}{4} \frac{B'}{A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{B'}{A} \quad (7.2.53)$$

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{1}{4} \frac{B'}{B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{A'}{A} \quad (7.2.54)$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A} \left[-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right] + \frac{1}{A} \quad (7.2.55)$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}. \quad (7.2.56)$$

La diagonalità è conseguenza dell'isotropia. Anche l'ultima relazione è di fatto un'altra proprietà dell'isotropia del sistema e quindi ci dice quindi che le componenti indipendenti del tensore di Ricci sono solo tre. Noto il tensore di Ricci, possiamo risolvere adesso l'equazione differenziale che ci porta alla soluzione esatta per la metrica statica di isotropa.

7.3 Metrica di Schwarzschild

Abbiamo scritto la forma del tempo proprio per una metrica che sia statica ed isotropa e come abbiamo visto che, questa metrica, scritta nell'opportuno sistema di coordinate, dipende da solo due funzioni metriche indipendenti $A(r)$ e $B(r)$:

$$d\tau^2 = B(r) dt^2 - A(r) dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (7.3.1)$$

Adesso vogliamo risolvere l'equazione di Einstein per dare una forma esplicita a queste due funzioni. Abbiamo detto che data una distribuzione di

materia che sia isotropa si individuano due regioni, una parte interna e una parte esterna. La differenza è che il tensore energia impulso $T_{\mu\nu}$ della parte interna è diverso dal tensore energia impulso della parte esterna, in quanto in quest'ultima è nullo. Detto R_S il raggio della distribuzione di materia, per $r \leq R_S$ dobbiamo risolvere l'equazione di Einstein in presenza di sorgenti, mentre per $r > R_S$ nel vuoto. Richiediamo una continuità sulla superficie della sorgente:

$$g_{\mu\nu}^{\text{dentro}}(R_S) = g_{\mu\nu}^{\text{fuori}}(R_S). \quad (7.3.2)$$

Risolviemo quindi l'equazione di Einstein nella parte esterna. Richiamiamo le componenti del tensore di Ricci. Avevamo osservato che essendo $R_{\varphi\varphi} \propto R_{\theta\theta}$, essa non è quindi un'equazione indipendente. Dobbiamo imporre che le componenti del tensore di Ricci siano uguali a zero. Quindi le tre equazioni di Einstein per le funzioni A e B sono:

$$R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{1}{4} \frac{B'}{A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{B'}{A} = 0 \quad (7.3.3)$$

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{1}{4} \frac{B'}{B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{A'}{A} = 0 \quad (7.3.4)$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} = 0 \quad (7.3.5)$$

Manipoliamo in modo opportuno. Osserviamo che:

- Possiamo combinare la prima e la seconda in modo che alcuni termini si elidano:

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -\frac{1}{rA} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) = 0 \quad (7.3.6)$$

da questo segue che:

$$\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} = 0 \quad (7.3.7)$$

$$\frac{d \ln A}{dr} + \frac{d \ln B}{dr} = \frac{d}{dr} [\ln A + \ln B] = \frac{d}{dr} [\ln (AB)] = 0 \quad (7.3.8)$$

e ciò implica che:

$$A(r) B(r) = \text{cost.} \quad (7.3.9)$$

- Abbiamo una costante arbitraria e per determinarla utilizziamo delle condizioni al contorno. Per distanze molto grandi ($r \rightarrow \infty$) dal corpo che genera il campo gravitazionale, il campo gravitazionale va a zero e quindi la metrica deve diventare la metrica di Minkowski.

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} B(r) = 1 \quad (7.3.10)$$

ma essendo $A(r)B(r)$ una costante, allora la funzione A e la funzione B sono esattamente uno l'inverso dell'altro:

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}. \quad (7.3.11)$$

Considerando ora la (7.3.5) in combinazione con la (7.3.4). Utilizziamo le equazioni (7.3.7) e (7.3.8) nelle due equazioni e scriviamo tutto in funzione di $B(r)$. In questo modo le equazioni da risolvere risultano:

$$R_{\theta\theta} = -1 + B'(r)r + B(r) \quad (7.3.12)$$

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} + \frac{B'}{rB(r)} = \frac{R'_{\theta\theta}}{2rB(r)}. \quad (7.3.13)$$

Per dimostrare l'ultima uguaglianza della seconda equazione basta derivare la prima e dividere opportunamente. Le due equazioni non sono per questo indipendenti, dunque basta solamente risolvere la prima:

$$R_{\theta\theta} = -1 + B'(r)r + B(r) = 0 \quad (7.3.14)$$

$$B'(r)r + B(r) = 1 \quad (7.3.15)$$

$$\frac{d}{dr} [B(r)r] = 1 \quad (7.3.16)$$

da cui:

$$rB(r) = r + k. \quad (7.3.17)$$

Per fissare la costante k facciamo un ragionamento analogo a prima, ma non andiamo per $r \rightarrow \infty$, ma ci fermiamo un po' prima. Se ci fermiamo a una distanza r_* non infinita, ma sufficientemente grande, il campo gravitazionale deve ricadere nel limite newtoniano, cioè devo ritrovare il potenziale newtoniano. In tale limite la componente:

$$g_{00} \equiv g_{tt} \equiv -B(r) = -1 - 2\phi \quad (7.3.18)$$

con ϕ potenziale newtoniano. Il potenziale newtoniano generato da una massa M , in simmetria sferica, è semplicemente:

$$-B(r) = -1 + 2 \frac{GM}{r} \quad (7.3.19)$$

espressione che vale per $r \geq r_*$. La soluzione dell'equazione di Einstein, valida ovunque, deve essere compatibile con il limite newtoniano a grandissime distanze, quindi in corrispondenza di $r = r_*$ si ha:

$$r_* \left(1 - 2 \frac{GM}{r_*} \right) = r_* + k \quad (7.3.20)$$

$$r_* - 2GM = r_* + k \quad (7.3.21)$$

per cui:

$$k = -2GM. \quad (7.3.22)$$

Dunque la soluzione dell'equazione di Einstein richiede che:

$$r B(r) = r - 2GM \quad (7.3.23)$$

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} \quad (7.3.24)$$

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad (7.3.25)$$

che sostituendo nella metrica otteniamo la cosiddetta **metrica di Schwarzschild** (1916):

$$d\tau^2 = \left[1 - \frac{2GM}{r}\right] dt^2 - \left[1 - \frac{2GM}{r}\right]^{-1} dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \quad (7.3.26)$$

inoltre la quantità:

$$r_S = 2GM \quad (7.3.27)$$

prende il nome di **raggio di Schwarzschild**. Notiamo anche che la soluzione interna al corpo che genera il campo gravitazionale non sarà questa, perché in quel caso dobbiamo risolvere l'equazione di Einstein con le sorgenti della distribuzione di materia interna.

Conosciamo quindi la forma della metrica di uno spazio-tempo statico ed isotropo. Conoscendo la forma della metrica, possiamo determinare quali siano le equazioni del moto di una test particle che si muove al suo interno e di conseguenza quali siano le geodetiche di questo spazio-tempo, ovvero le orbite di un corpo che si muove all'interno di questa metrica. Questa infatti è esattamente la metrica che si può utilizzare per descrivere il moto di un pianeta attorno al Sole, della Luna attorno alla Terra, di qualunque oggetto che si muova all'esterno di un corpo che ha una distribuzione di materia statica ed isotropa.

Questa cosa l'abbiamo ottenuta come soluzione esatta, quindi è totalmente relativistica. Vale in qualunque condizione di campo; nel limite di campo debole chiaramente riproduce il limite newtoniano.

7.4 Moto di una test particle in un campo gravitazionale statico e isotropo

Utilizzando p come parametro affine, l'equazione del moto è:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\lambda}{dp} = 0. \quad (7.4.1)$$

Se le particelle hanno massa $m = 0$, dobbiamo imporre la condizione che il $d\tau^2 = 0$, con il $d\tau^2$ dato da (7.3.26). Se invece $m \neq 0$, per moti causali $d\tau^2 > 0$ (traiettorie di tipo tempo). Calcoliamo la connessione affine. Le

sue componenti erano state date precedentemente in funzione delle funzioni A e B che adesso conosciamo. Sostituendo otteniamo tutte le componenti della connessione che ci servono per scrivere l'equazione del moto. Il risultato di questo calcolo sono le quattro equazioni del moto di una test particle in questa metrica:

$$\frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{A'}{2A} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{r}{A} \left(\frac{d\theta}{dp} \right)^2 - r \frac{\sin^2 \theta}{A(r)} \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 + \frac{B'}{2A} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 = 0 \quad (7.4.2)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dp} \frac{dr}{dp} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 = 0 \quad (7.4.3)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dp} \frac{dr}{dp} + 2 \cot \theta \frac{d\varphi}{dp} \frac{d\theta}{dp} = 0 \quad (7.4.4)$$

$$\frac{d^2 t}{dp^2} + \frac{B'}{B} \frac{dt}{dp} \frac{dr}{dp} = 0. \quad (7.4.5)$$

Il modo in cui le risolviamo è quella di utilizzare la tecnica di determinare le costanti del moto. Le costanti del moto sono a loro volta equazioni differenziali, ma del primo ordine e quindi in un certo senso più semplici da risolvere di quelle del moto.

Ci accorgiamo di una cosa importante. L'equazione per la variabile θ è risolvibile in modo banale. Per $\theta = \pi/2$, essendo θ una costante quindi la sua derivata fa zero, e abbiamo la somma di tre zeri che fa zero. Il fatto che $\theta = \pi/2$ è soluzione dell'equazione del moto ci dice che il moto avviene in un piano, nel caso della figura 7.1, il piano x, y . Questo è quello che sappiamo essere vero anche in gravità newtoniana: i moti delle orbite sono dei moti che avvengono in un piano.

Se $\theta = \pi/2$, anche le altre equazioni si semplificano leggermente. Ci rimangono solo 3 equazioni da risolvere:

$$\frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{A'}{2A} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{r}{A} \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 + \frac{B'}{2A} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 = 0 \quad (7.4.6)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dp} \frac{dr}{dp} = 0 \quad (7.4.7)$$

$$\frac{d^2 t}{dp^2} + \frac{B'}{B} \frac{dt}{dp} \frac{dr}{dp} = 0 \quad (7.4.8)$$

considerando le ultime due equazioni. Possiamo ottenere l'integrale primo del moto con questo trucchetto: moltiplichiamole rispettivamente per $dp/d\varphi$

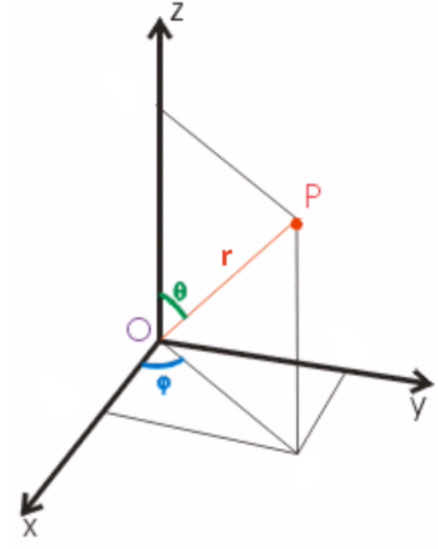


Figura 7.1

(la seconda) e dp/dt (la terza), otteniamo:

$$\frac{dp}{d\varphi} \frac{d^2\varphi}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dp} = 0 \quad (7.4.9)$$

$$\frac{dp}{dt} \frac{d^2t}{dp^2} + \frac{B'}{B} \frac{dr}{dp} = 0 \quad (7.4.10)$$

la prima però è la derivata totale di:

$$\frac{d}{dp} \left[\ln \left(\frac{d\varphi}{dp} \right) + \ln(r^2) \right] = 0 \quad (7.4.11)$$

e analogamente la seconda:

$$\frac{d}{dp} \left[\ln \left(\frac{dt}{dp} \right) + \ln B \right] = 0. \quad (7.4.12)$$

Queste due equazioni ci dicono che il moto avviene in modo tale che le espressioni dentro parentesi non varino rispetto al parametro evolutivo: sono entrambi costanti del moto. Il moto avviene in modo tale da fare sì che:

$$\ln \left(\frac{d\varphi}{dp} \right) + \ln(r^2) = \text{cost} \quad (7.4.13)$$

cioè:

$$\ln \left(r^2 \frac{d\varphi}{dp} \right) = \text{cost} \quad (7.4.14)$$

e nominando la costante J diventa:

$$J = r^2 \frac{d\varphi}{dp}. \quad (7.4.15)$$

Anticipiamo che J rappresenta il "momento angolare" per unità di massa. J è un integrale primo del moto, ma il membro a destra è ancora un'espressione differenziale per φ . Dalla seconda equazione otteniamo:

$$\ln \left(\frac{dt}{dp} \right) + \ln B = \text{cost} \quad (7.4.16)$$

cioè:

$$\ln \left(B \frac{dt}{dp} \right) = \text{cost} \quad (7.4.17)$$

a cui non diamo un nome specifico. Un modo in cui questa espressione qui si può utilizzare è il seguente: poniamo tale costante pari a 1, in questo modo si definisce una relazione ben precisa tra t e p :

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{B(r)} \quad (7.4.18)$$

quando $r \rightarrow \infty$ la funzione $B \rightarrow 1$, quindi il parametro p coincide con il tempo a distanze $\rightarrow \infty$ dal corpo che genera il campo gravitazionale.

Ci rimane ancora un'unica equazione del moto che dobbiamo risolvere. Notiamo anche che in tale equazione ci sono $d\varphi/dp$ e dt/dp che abbiamo appena determinato. Sostituendo, dovremo risolvere:

$$\frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{A'}{2A} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{J^2}{r^3 A(r)} + \frac{B'}{2AB^2} = 0. \quad (7.4.19)$$

Vogliamo cercare di fare in modo che diventi una derivata totale di qualche cosa. Questo si può fare moltiplicando per $2A dr/dp$. Si ottiene:

$$\frac{d}{dp} \left[A \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B} \right] = 0 \quad (7.4.20)$$

e abbiamo trovato così anche la terza costante del moto:

$$A \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E \quad (7.4.21)$$

che quando daremo una interpretazione fisica di questa costante, vedremo che, almeno per moti non relativistici, coincide proprio con l'energia totale del sistema in moto sull'orbita.

Abbiamo dunque due costanti del moto fisiche J ed E e una costante del moto che ci permette di dare una relazione tra il parametro affine e il tempo

coordinato, ognuna delle quali è un'equazione differenziale del primo ordine.

Facciamo un'altra considerazione. Notiamo che per la forma standard per la metrica statica ed isotropa (7.2.24), che per $\theta = \pi/2$ diventa:

$$d\tau^2 = B(r) dt^2 - A(r) dr^2 - r^2 d\varphi^2 \quad (7.4.22)$$

possiamo riesprimere tutto guardando le coordinate t, r, φ come funzioni del parametro p :

$$d\tau^2 = dp^2 \left[B(r) \frac{d^2 t}{dp^2} - A(r) \frac{d^2 r}{dp^2} - r^2 \frac{d^2 \varphi}{dp^2} \right] \quad (7.4.23)$$

se sostituiamo le espressioni precedenti per le derivate, rimane semplicemente:

$$d\tau^2 = E dp^2. \quad (7.4.24)$$

Se le particelle sono particelle a massa nulla, allora:

$$m = 0 \quad , \quad d\tau^2 = 0 \quad \implies \quad E = 0 \quad (7.4.25)$$

mentre invece:

$$m \neq 0 \quad , \quad d\tau^2 > 0 \quad \implies \quad E > 0 \quad (7.4.26)$$

quindi un caso in cui la costante del moto E non è fissata ma è positiva.

Riportiamo ordinatamente gli integrali primi del moto che abbiamo trovato:

$$J = \frac{d\varphi}{dp} r^2 \quad (7.4.27)$$

$$1 = B(r) \frac{dt}{dp} \quad (7.4.28)$$

$$-E = A(r) \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} \quad (7.4.29)$$

possiamo combinarli tra di loro. Per esempio possiamo far sparire il parametro p dal gioco. Si ottengono in questo modo le cosiddette **equazioni orarie o temporali del moto**:

$$J B(r) = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \quad (7.4.30)$$

$$-E = \frac{A(r)}{B^2(r)} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} \quad (7.4.31)$$

la loro soluzione presuppone di trovare r e φ in funzione del tempo. La loro soluzione dà l'evoluzione della traiettoria nel tempo. Queste si portano dietro $d\tau^2$, infatti come conseguenza abbiamo che:

$$d\tau^2 = E B^2(r) dt^2 \quad (7.4.32)$$

dunque, la relazione tra tempo proprio e tempo non è costante, ma dipende dalla posizione in cui mi trovo.

Possiamo usare di nuovo gli integrali primi del moto da cui siamo partiti per fare un'altra operazione, esprimendo tutto in funzione di φ . Otteniamo:

$$\frac{A(r)}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2 B(r)} = -\frac{E}{J} \quad (7.4.33)$$

soluzione di questa equazione è $r = r(\varphi)$ che è la forma dell'orbita sul piano $\theta = \pi/2$. Per questo è detta **equazione della forma dell'orbita**. L'equazione dell'orbita possiamo anche formalmente integrarla. A tal riguardo è conveniente riscriverla come:

$$\left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 = F(r) \implies \frac{d\varphi}{dr} = \pm [F(r)]^{1/2} \quad (7.4.34)$$

quindi:

$$\varphi = \pm \int dr [F(r)]^{1/2} \quad (7.4.35)$$

$$= \pm \int dr \frac{A^{1/2}}{r^2 \left[\frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}} \quad (7.4.36)$$

che è proprio l'orbita della test particle nella metrica di Schwarzschild.

7.4.1 Interpretazione fisica delle costanti del moto J ed E

Abbiamo determinato poco fa le equazioni orarie del moto. L'interpretazione fisica la diamo nel limite newtoniano. Nel limite newtoniano:

$$B(r) = 1 + 2\phi = 1 - \frac{2GM}{r} \quad (7.4.37)$$

nelle equazioni orarie compaiono:

$$A(r) = B^{-1}(r) = (1 + 2\phi)^{-1} = 1 - 2\phi \quad (7.4.38)$$

$$B^{-2}(r) = (1 + 2\phi)^{-2} = 1 - 4\phi \quad (7.4.39)$$

$$A(r) B^{-2}(r) = (1 - 2\phi) (1 - 4\phi) = 1 - 6\phi \quad (7.4.40)$$

dopodiché riscriviamo:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = J B(r) \implies J = r^2 \omega (1 - 2\phi) \quad (7.4.41)$$

$$= r^2 \omega - 2r^2 \omega \phi \quad (7.4.42)$$

con ω la velocità angolare. Il termine dominante 2ω è proprio il momento angolare per unità di massa. Il secondo termine è una correzione relativistica. Quindi in un limite newtoniano stretto:

$$J = r^2 \omega. \quad (7.4.43)$$

Riprendiamo per la seconda equazione del moto:

$$(1 - 6\phi) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - 1 + 2\phi = -E \quad (7.4.44)$$

in cui riconosciamo la velocità radiale dr/dt . Esso risulta un parametro piccolo perché i moti sono non relativistici. Nel limite newtoniano avremo:

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} + 2\phi = 1 - E \quad (7.4.45)$$

e dunque:

$$\varepsilon = \frac{1 - E}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{2r^2} + \phi. \quad (7.4.46)$$

L'espressione che abbiamo ottenuto è sostanzialmente l'energia per unità di massa della test particle. Se moltiplichiamo per la massa, il primo termine rappresenta l'energia cinetica e il secondo è il termine di momento angolare.

7.5 Moti orbitali

Quanto abbiamo costruito fino ad adesso ci permette di descrivere come si muovono un pianeta su un'orbita o una sonda interplanetaria sull'orbita in cui viene posizionata nel campo gravitazionale generato dal Sole, per esempio. Tutte le volte che abbiamo una distribuzione di massa statica e isotropa questo genera nel vuoto un campo gravitazionale statico e isotropo che è descritto dalla metrica di Schwarzschild. Richiamiamo le equazioni del moto di una test particle in quella metrica, in particolare vorremmo utilizzare quelle nella forma di equazione dell'orbita. Partiamo dalle equazioni temporali:

$$J B(r) = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \quad (7.5.1)$$

$$-E = \frac{A(r)}{B^2(r)} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} \quad (7.5.2)$$

$$d\tau^2 = E B^2(r) dt^2 \quad (7.5.3)$$

queste equazioni descrivono tutti i tipi di moti, in particolare possiamo avere situazioni di:

- **Orbita aperta**, orbita non legata gravitazionalmente al corpo che genera il campo, con condizioni di energia per le quali un corpo può arrivare da distanza infinita, girare attorno al corpo di massa M e poi allontanarsi nuovamente a distanza infinita.
- **Orbita chiusa**, che è quella tipica dei moti planetari.

Entrambi queste situazioni nella meccanica newtoniana sono descritte dalle leggi della meccanica newtoniana, in particolare i moti orbitali chiusi sono descrivibili sono descritti con le leggi di Keplero. Come abbiamo detto non soltanto gli oggetti dotati di massa, ma anche le test particle senza massa seguono quel tipo di traiettoria. La differenza è per questi ultimi avranno $d\tau^2 = 0$ e quindi avranno una condizione di moto per cui la quantità $E = 0$, mentre quelle con $m \neq 0$ hanno $d\tau^2 > 0$ e quindi una condizione $E > 0$.

Dalle equazioni temporali, riportate sopra, derivano tutta una serie di predizioni e conseguenze che sono:

- Nel caso delle *orbite aperte*, il concetto di deflessione della luce, cioè la traiettoria nello spazio di un fotone non è rettilinea se c'è un campo gravitazionale ma segue una traiettoria curva. La predizione è relativa all'angolo di deflessione.
- Nel caso delle *orbite chiuse*, il concetto di precessione del perielio delle orbite. La predizione è relativa all'entità della precessione.

Svolgeremo entrambi i calcoli nella situazione in cui il campo è debole.

Nota. Se il campo però non è debole, le equazioni temporali continuano ad essere perfettamente valide e produrranno risultati che commentiamo più avanti.

7.5.1 Orbite aperte

Facciamo una costruzione geometrica del problema (utilizzeremo la stessa notazione del Weinberger). Il corpo che genera il campo gravitazionale, per esempio il sole, è un oggetto di raggio R_0 ; definiamo per convenzione una direzione orizzontale di riferimento per misurare gli angoli. Rappresentiamo una traiettoria rettilinea di una test particle che parte da una grande distanza, si avvicina e si muove sulla traiettoria. La traiettoria sarebbe rettilinea se non ci fosse il campo gravitazionale, ma dato che c'è essa viene deflessa e quindi l'oggetto si muove, ma avvicinandosi devia la sua traiettoria e solo quando si allontanerà sufficientemente la sua traiettoria tornerà ad essere rettilinea.

Nel punto in esame, la particella forma un angolo $\varphi(r)$. Quando si troverà molto distante ($r \rightarrow \infty$) dal corpo essa formerà invece un angolo φ_∞ . Si noti che il moto avviene in modo tale che l'angolo evolva dall'alto verso il basso. Chiamiamo il **punto di massimo avvicinamento** r_0 . Questo è anche il

punto di inversione del moto. Individuiamo anche il *parametro di impatto* dell'orbita b , dato dalla perpendicolare dal centro del corpo e la traiettoria rettilinea. Infine individuiamo la deflessione espressa mediante l'angolo $\Delta\varphi$. Facciamo riferimento alla figura 7.2.

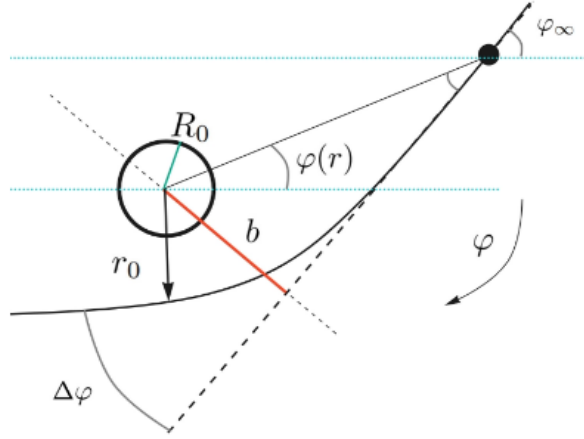


Figura 7.2

Possiamo fare alcune considerazioni:

- Ricordiamo:

$$A(\infty) = B(\infty) = 1. \quad (7.5.4)$$

- Il moto all'infinito è su una traiettoria rettilinea con velocità costante. Questo ci permette di scrivere:

$$b = r \sin(\varphi - \varphi_\infty) \simeq r (\varphi - \varphi_\infty) \quad (7.5.5)$$

$$v = -\frac{d}{dt} \left[r \cos(\varphi - \varphi_\infty) \right] \simeq -\frac{dr}{dt} \quad (7.5.6)$$

la velocità è negativa, nel senso che è in avvicinamento rispetto a noi.

Ora, verifichiamo che le equazioni (7.5.1) e (7.5.2), siano soddisfatte all'infinito, determiniamo in tal modo le costanti del moto:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = J B(r) \quad \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = J \quad (7.5.7)$$

$$\frac{A(r)}{B^2(r)} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E \quad \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \quad \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - 1 = -E \quad (7.5.8)$$

deriviamo rispetto al tempo l'equazione del parametro d'impatto:

$$0 = \frac{dr}{dt} (\varphi - \varphi_\infty) + r \frac{d\varphi}{dt} \quad (7.5.9)$$

$$= \frac{dr}{dt} \frac{b}{r} + r \frac{d\varphi}{dt} \quad (7.5.10)$$

e sfruttando l'equazione per v :

$$r \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{dr}{dt} \frac{b}{r} = +\frac{v b}{r} \quad (7.5.11)$$

sostituiamo nelle equazioni (7.5.7) e (7.5.8):

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = v b = J \quad (7.5.12)$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - 1 = v^2 - 1 = -E. \quad (7.5.13)$$

Riassumendo, in questo moto orbitale che parte dall'infinito:

$$J = b v \quad , \quad E = 1 - v^2 \quad (7.5.14)$$

per esempio, nel caso in cui $b = 0$, cioè il corpo ha una traiettoria che è in caduta sul sole esso non ha momento angolare, e infatti $J = 0$. Se il corpo si muove alla velocità della luce, allora $v = 1$ - siamo in unità naturali - come deve essere.

Determiniamo, ora il punto di minimo avvicinamento o minimo approccio, r_0 . Il punto di minimo avvicinamento è il punto in cui la variazione di r lungo l'orbita si annulla. Lo possiamo definire dalla seguente condizione:

$$r = r_0 : \quad \left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{r_0} = 0 \quad (7.5.15)$$

dobbiamo utilizzare l'equazione dell'orbita:

$$\frac{A(r)}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2 B(r)} = -\frac{E}{J} \quad (7.5.16)$$

che se ci mettiamo in r_0 :

$$\frac{A(r)}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \bigg|_{r_0} + \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{J^2 B(r_0)} = -\frac{E}{J} \quad (7.5.17)$$

rimane:

$$\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{J^2 B(r_0)} = -\frac{E}{J} = -\frac{1 - v^2}{J^2} = \frac{v^2 - 1}{J^2} \quad (7.5.18)$$

possiamo ricavare J :

$$J = r_0 \left[\frac{1}{B(r_0)} - 1 + v^2 \right]^{1/2}. \quad (7.5.19)$$

Questa è un'altra espressione del momento angolare per unità di massa, lo possiamo esprimere non utilizzando il parametro d'impatto, ma il punto di minimo avvicinamento. J è sempre la stessa quantità, ma scritta in due modi differenti.

Usiamo quest'ultima forma e la inseriamo direttamente nell'equazione dell'orbita formalmente integrata, che richiamiamo:

$$\varphi(r) = \pm \int dr \frac{A^{1/2}}{r^2 \left[\frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}} \quad (7.5.20)$$

e otteniamo:

$$\varphi(r) = \varphi_\infty + \int_r^\infty dr \frac{A^{1/2}}{r^2 \left[\frac{1}{r_0^2} \left(\frac{1}{B(r)} - 1 + v^2 \right) \left(\frac{1}{B(r_0)} - 1 + v^2 \right) - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}} \quad (7.5.21)$$

questa è l'espressione dell'orbita per un oggetto che parte all'infinito con velocità v e raggiunge la distanza di minimo avvicinamento r_0 . $\varphi(r)$ è un parametro dell'orbita, mentre v è un parametro dell'oggetto in modo.

Ora, la variazione totale dell'angolo φ sull'orbita è uguale alla variazione dell'angolo sull'orbita compiuto partendo dalla distanza infinita fino ad arrivare alla distanza di minimo avvicinamento, presa due volte perché il problema è simmetrico, dunque:

$$2 |\varphi(r_0) - \varphi_\infty| \quad (7.5.22)$$

sarebbe pari a π se il moto fosse su una traiettoria rettilinea. Definiamo quindi deflessione o **angolo di deflessione** dell'orbita rispetto alla traiettoria rettilinea la quantità:

$$\Delta\varphi = 2 |\varphi(r_0) - \varphi_\infty| - \pi. \quad (7.5.23)$$

Possiamo avere:

- $\Delta\varphi = 0$ la traiettoria è una *retta*.
- $\Delta\varphi > 0$ la traiettoria è *curva verso il sole*.
- $\Delta\varphi < 0$ la traiettoria è *curva via dal sole*.

Chiaramente abbiamo $\Delta\varphi > 0$. Questa espressione vale indipendentemente dalla massa della particella, vale quindi anche per la luce.

7.5.2 Il caso del fotone

Per il fotone, avendo equazioni valide in generale, dobbiamo semplicemente richiedere che la sua velocità sia uguale a 1 (unità naturali), cioè c , su

tutta l'orbita. Cioè vuol dire che la quantità $E = 0$. Quindi specifichiamo l'espressione dell'orbita:

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \int_r^\infty \frac{dr}{r} A^{1/2}(r) \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{B(r_0)}{B(r)} - 1 \right]^{-1/2} \quad (7.5.24)$$

in cui ricordiamo:

$$B(r) = A^{-1}(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \quad (7.5.25)$$

questa è la formula della deflessione della luce in un campo gravitazionale generato da un corpo di massa M . Vale per un campo gravitazionale arbitrario ed è esatta. Facciamo il caso del Sole. In questo caso il campo è debole su tutta l'orbita, la quantità:

$$\frac{GM}{r}, \quad \frac{GM}{r_0} \ll 1 \quad (7.5.26)$$

possiamo fare uno sviluppo in campo debole su tutta la traiettoria dell'orbita e ottenere un'espressione che matematicamente si può integrare: un integrale ellittico. Non useremo gli integrali ellittici, ma facciamo comunque lo sviluppo:

$$A^{-1/2}(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{1/2} \quad (7.5.27)$$

$$= 1 + \frac{GM}{r} + \dots \quad (7.5.28)$$

$$\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{B(r_0)}{B(r)} - 1 = \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{r_0} \right) \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} - 1 \quad (7.5.29)$$

$$= \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{r_0} \right) \left(1 - \frac{2GM}{r} + \dots \right) - 1 \quad (7.5.30)$$

$$= \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left[1 + 2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} + \dots \right) \right] - 1 \quad (7.5.31)$$

$$\stackrel{\text{dimostrare}}{=} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right] \left[1 - \frac{2GM r}{r_0 (r + r_0)} + \dots \right] \quad (7.5.32)$$

per vederlo basta fare il prodotto di questa seconda espressione qua, fermando nell'ordine GM/r e mostrare che a quell'ordine lì è uguale all'espressione

sopra. Quello che dobbiamo mettere dentro l'integrale, è la quantità:

$$A^{1/2}(r) \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{B(r_0)}{B(r)} - 1 \right]^{-1/2} = \quad (7.5.33)$$

$$= \left(1 + \frac{GM}{r} + \dots \right) \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \left[1 - \frac{2GMr}{r_0(r+r_0)} + \dots \right]^{-1/2} \quad (7.5.34)$$

$$= \left(1 + \frac{GM}{r} + \dots \right) \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \left(1 + \frac{GMr}{r_0(r+r_0)} + \dots \right) \quad (7.5.35)$$

$$= \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \left[1 + \frac{GM}{r} + \frac{GMr}{r_0(r+r_0)} + \dots \right] \quad (7.5.36)$$

dunque sostituendo:

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \int_r^\infty \frac{dr}{r \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}} \left[1 + \frac{GM}{r} + \frac{GMr}{r_0(r+r_0)} + \dots \right]. \quad (7.5.37)$$

Abbiamo quindi tre integrali da fare. Il primo, relativo al termine 1, dà:

$$\int_r^\infty \frac{dr}{r \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}} = \arcsin \left(\frac{r_0}{r} \right) \quad (7.5.38)$$

il secondo, relativo al termine GM/r , dà:

$$\int_r^\infty dr \frac{GM}{r^2 \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}} = \frac{GM}{r_0} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2} \right] \quad (7.5.39)$$

e il terzo:

$$\int_r^\infty \frac{dr}{r \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}} \frac{GMr}{r_0(r+r_0)} = GM \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}} \right]. \quad (7.5.40)$$

Quindi abbiamo tutti i pezzi per scriverci la variazione dell'angolo:

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \arcsin \left(\frac{r_0}{r} \right) + \frac{GM}{r_0} \left[2 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2} - \sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}} + \dots \right] \quad (7.5.41)$$

questa è la variazione dell'angolo sull'orbita, per ogni punto r dell'orbita. La deflessione l'abbiamo definita come (7.5.23), dunque possiamo valutare $\varphi(r_0)$ e ottenere:

$$\Delta\varphi = 2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{GM}{r_0} 2 \right] - \pi \quad (7.5.42)$$

da cui:

$$\Delta\varphi = \frac{4GM}{r_0} \simeq \frac{4GM}{b} \quad (7.5.43)$$

poiché in campo debole r_0 e b sono molto vicini. Quindi la deflessione dell'orbita, è proporzionale alla massa del corpo che genera il campo gravitazionale ed è inversamente proporzionale alla distanza di minimo avvicinamento, ovvero al parametro d'impatto. Nel caso del sole, per cui vale:

- $M = M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ g.
- $GM_\odot = 1.5$ km.
- Prendiamo la situazione più estrema, di fotoni che passano proprio al bordo del Sole (deflessione massima), quelli che in inglese vengono chiamati **grazing trajectories**:

$$r_0 = R_0 = 7 \cdot 10^5 \text{ km.} \quad (7.5.44)$$

La deflessione massima che possiamo avere dal Sole, per traiettorie grazing, è:

$$\Delta\varphi_{max} = 1.75''. \quad (7.5.45)$$

Questa previsione fu fatta ad Einstein stesso, praticamente subito. Le equazioni di Einstein sono del 1916, la soluzione di Schwarzschild è dello stesso anno e questo è un calcolo che fu fatto sostanzialmente molto presto. Poco dopo, nel 1919, Eddington verificò sperimentalmente questo effetto.¹ Il modo per farlo lo descriviamo facilmente come segue e facendo riferimento alla figura 7.3.

Supponiamo di avere nel campo di vista una stella (o più) che a un certo giorno dell'anno stanno in una posizione vicina a quella del Sole. In generale la posizione apparente della stella quando in presenza del sole è diversa dalla posizione che la stella avrebbe se il Sole non ci fosse (spaziotempo piatto, traiettoria rettilinea). Ora, ci sono alcuni fotoni che seguirebbero una traiettoria che non potremmo vedere (perché ad esempio ci sono oggetti nella loro propagazione fino ai nostri occhi), ma in virtù della deflessione della luce, arrivano. Da Terra, allora, è come se vedessi la stella in una posizione apparente. È chiaro che in presenza del Sole, noi non possiamo osservare stelle la cui posizione apparente è esattamente dove si trova il sole. Eddington insieme ad altri colleghi sfruttò quindi un'eclissi totale di Sole del 1919

¹Fu la prima prova sperimentale della Relatività Generale.

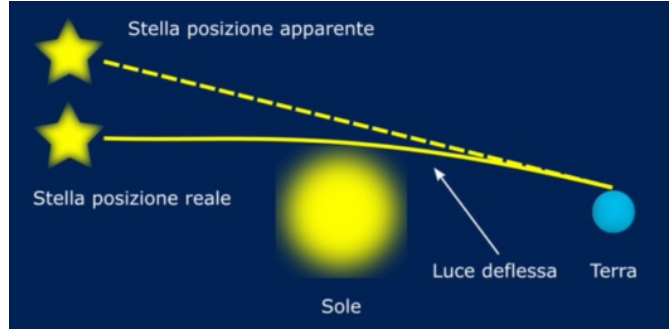


Figura 7.3

e fece una misura dall'isola di Sobral, in Brasile, e una misura dall'isola di Principe, in Guinea, e trovò due valori sperimentali osservativi per l'angolo di deflessione:

$$\Delta\varphi_{exp} = (1.98 \pm 0.16)'' \quad (7.5.46)$$

$$\Delta\varphi_{exp} = (1.61 \pm 0.40)'' \quad (7.5.47)$$

$$(7.5.48)$$

tali valori risultarono perfettamente compatibili con la predizione della relatività generale: dunque, non solo l'effetto si dimostrava reale, ma il suo valore, entro gli errori, era perfettamente compatibile con la teoria! Questo fu un successo enorme di Einstein, tutti i giornali del mondo riportarono la notizia della verifica della predizione della Relatività Generale.

Questo fenomeno porta al concetto di **lente gravitazionale**, di cui possiamo vedere una rappresentazione in figura 7.4a. Se siamo gli osservatori e tra noi e oggetti distanti, stelle o galassie, c'è una distribuzione di materia, l'effetto di lente gravitazionale determina il fatto che la radiazione che parte dall'oggetto distante venga deflessa dalla massa in modo proporzionale al parametro d'impatto ma anche proporzionale alla massa che genera il campo. E quindi la traiettoria che passa da un lato può deviare fino ad arrivare a noi.

Nel caso di **lente gravitazionale forte**, possiamo vedere sul piano perpendicolare all'angolo di vista immagini multiple dell'oggetto.

Ci sono anche situazioni in cui si creano i cosiddetti **anelli di Einstein**: l'immagine della singola galassia viene spalmata su un anello o su degli archi. Puoi vedere la figura 7.4b.

Questo si ha in generale anche se la simmetria non è sferica. Dato che l'effetto dipende dalla massa dell'oggetto che sta tra noi e le sorgenti distanti di cui vediamo l'immagine. Possiamo anche avere modo per identificare che c'è della massa tra noi e gli oggetti distanti, e darne una misura. Questo è un

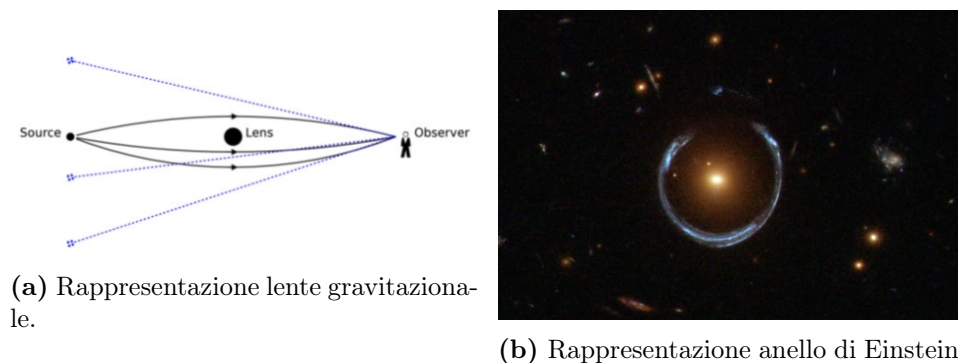


Figura 7.4

modo che oggi si usa per studiare la presenza di grandi quantità di materia oscura nell'universo.

C'è anche il cosiddetto effetto di **lente gravitazionale debole** che generalmente produce delle deformazioni delle galassie di fondo. Per una singola galassia, ad esempio ellittica, è difficile distinguere se sia ellittica perché tale di suo, oppure se lo sia perché ha avuto un effetto di lente gravitazionale. Però, se abbiamo tante galassie sullo sfondo, esse avranno tutte delle deformazioni con un certo pattern di deformazioni, il quale permette di capire che è attivo un effetto di lente gravitazionale. Quindi, la lente debole permette comunque di ricavare delle informazioni sulla distribuzione di materia tra noi e l'oggetto distante.

7.5.3 Lente gravitazionale

Descriviamo meglio l'effetto di lente gravitazionale nella **approssimazione di lente sottile**, che si ha quando la lente, come dimensione, è molto più piccola delle dimensioni tra la sorgente, la lente e l'osservatore. La geometria del problema è riportata in figura 7.5.

Abbiamo un osservatore, una lente gravitazionale generata da una distribuzione di massa, e una sorgente, per esempio una galassia distante. La sorgente distante emette della luce che segue una traiettoria che non è rettilinea, ma viene incurvata per effetto della presenza della lente. Se le dimensioni trasversali della lente sono piccole rispetto alla distanza tra l'osservatore e la lente stessa, tra la lente e la sorgente, e quindi anche tra la sorgente e l'osservatore, allora questa lente si chiama *lente sottile*. In questo modo potremmo fare delle approssimazioni che ci permettono di scrivere l'equazione della lente in modo semplice. In figura definiamo gli angoli e le distanze:

- D_S : distanza sorgente.
- $D_d \equiv D_L$: distanza lente.

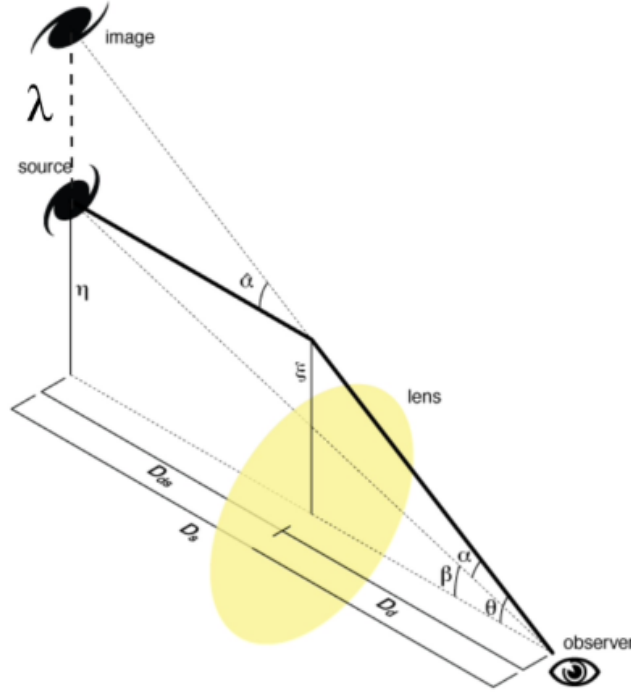


Figura 7.5: Lente gravitazionale in approssimazione di lente sottile.

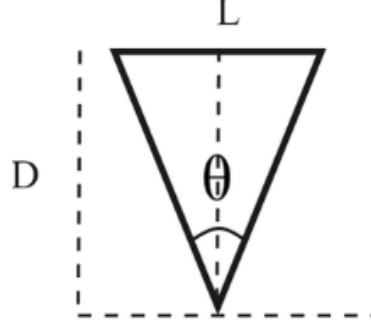
- $D_{ds} \equiv D_{LS}$: distanza lente-sorgente.
- $\hat{\alpha}$: angolo di deflessione.
- β : posizione reale angolare della sorgente.
- θ : angolo tra l'asse ottico e l'immagine.
- η : elevazione della sorgente rispetto l'asse ottico.

Se estrapoliamo dall'osservatore, all'indietro, la direzione, a noi la sorgente appare come se nel piano trasverso fosse posizionata a una distanza $\eta + \lambda$ rispetto all'asse di riferimento. Facendo riferimento alla figura 7.6 ci ricordiamo che se abbiamo una dimensione di lunghezza L posizionata ad una distanza D , vediamo L sotto un angolo:

$$\theta = \frac{L}{D}. \quad (7.5.49)$$

L'angolo θ è la lunghezza nel piano trasverso diviso la distanza tra noi e il piano trasversale alla direzione di vista.

Con questi elementi proviamo a scrivere l'equazione della lente. Possiamo fare alcune considerazioni geometriche. In base alla figura 7.5, per la

**Figura 7.6**

quantità λ , cioè l'offset rispetto alla posizione reale trasversa della posizione dell'immagine, vale:

$$\lambda = \hat{\alpha} D_{LS} = \alpha D_S \quad (7.5.50)$$

tenendo a mente che l'angolo $\hat{\alpha}$ e α sono differenti. Inoltre abbiamo:

$$\lambda + \eta = \theta D_S \quad (7.5.51)$$

$$\eta = \xi = \beta D_S = \theta D_L \quad (7.5.52)$$

usando queste relazioni possiamo dire che:

$$\lambda + \eta = \hat{\alpha} D_{LS} + \beta D_S = \theta D_S \quad (7.5.53)$$

da cui ricaviamo:

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_S} \hat{\alpha}. \quad (7.5.54)$$

Abbiamo messo in relazione l'angolo β , cioè la posizione angolare reale della sorgente, con l'angolo θ la posizione apparente della sorgente e con l'angolo di deflessione $\hat{\alpha}$ che è l'effetto gravitazionale. Questa equazione prende il nome di **equazione della lente** nell'ipotesi di lente sottile.

Se prendiamo una lente puntiforme di massa M possiamo esprimere in modo semplice l'angolo di deflessione:

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{b} \quad (7.5.55)$$

nel nostro caso abbiamo:

$$b = \eta = \xi = \theta D_L \quad (7.5.56)$$

quindi l'equazione della lente si scrive:

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \frac{4GM}{\theta} \quad (7.5.57)$$

e possiamo risolverla in due regimi. Se abbiamo la situazione in cui la posizione della sorgente è *collineare* con la posizione della lente, allora l'angolo $\beta = 0$ e quindi:

$$\theta - \frac{k}{\theta} = 0 \quad (7.5.58)$$

con k costante che è data da:

$$k = 4GM \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \quad (7.5.59)$$

questa è un'equazione di secondo grado che ammette soluzione:

$$\theta_E = \sqrt{4GM \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}. \quad (7.5.60)$$

La (7.5.60) ci dice che l'immagine della sorgente è distribuita su un anello che viene chiamato **anello di Einstein**. Analogamente potremmo dire che c'è un raggio di Einstein di questa distribuzione di luce circolare dato da:

$$R_E = \theta_E D_L. \quad (7.5.61)$$

Diamo un'idea di quanto siano le dimensioni di questi angoli. Se misuriamo le masse in unità di $M_\odot$ e prendiamo oggetti che hanno delle distanze D_L , D_S , $D_{LS} \sim D$, allora l'angolo di Einstein è:

$$\theta_E = \sqrt{4G \frac{M}{M_\odot} \frac{l}{D}} (M_\odot)^{1/2} (l)^{-1/2}. \quad (7.5.62)$$

All'interno della nostra galassia dove le lenti possono essere per esempio delle stelle, di massa dell'ordine $M \sim M_\odot$ e le distanze in gioco sono $D \sim 10$ kpc, l'angolo di Einstein risulta:

$$\theta_E = 0.9 \sqrt{\left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{10 \text{ kpc}}{D}\right)} \text{ milli-arcsec} \quad (7.5.63)$$

si tratta di un effetto estremamente piccolo questo e per questo viene chiamato effetto di **microlensing**. È stato per esempio utilizzato per cercare di mettere in evidenza i MACHOS (Massive Compact Halo Objects), cioè oggetti massivi compatti che possono essere presenti nell'alone della nostra galassia.

Se invece consideriamo l'effetto di lente gravitazionale su oggetti delle dimensioni di un ammasso di galassie, le masse in gioco delle lenti sono $M \sim 10^{11} M_\odot$ e le dimensioni $l \sim \text{Gpc}$, l'angolo di Einstein:

$$\theta_E = 0.9 \sqrt{\left(\frac{M}{10^{11} M_\odot}\right) \left(\frac{\text{Gpc}}{D}\right)} \text{ arcsec} \quad (7.5.64)$$

la dimensione angolare di questo Einstein ring è molto più grande. Questo è l'effetto di lente gravitazionale tipico per gli oggetti nell'universo. La soluzione che abbiamo ottenuto è stata trovata sotto l'ipotesi di collinearità. Se la posizione *non* è *collineare*, come quella in figura 7.5, possiamo risolvere l'equazione della lente con $\beta \neq 0$. In questo caso otteniamo un'equazione di secondo grado le cui soluzioni sono:

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E} \right] \quad (7.5.65)$$

con θ_E dato dalla relazione del caso collineare. Mentre nel caso collineare avevamo l'immagine distribuita su un unico Einstein ring θ_E , in questo caso abbiamo l'immagine posizionata o a un angolo $\theta_+ > \theta_E$ o a un angolo $\theta_- < \theta_E$.

Se poi le lenti non sono puntiformi le soluzioni dell'equazione della lente si complicano e possiamo avere situazioni quali immagini multiple della stessa sorgente, anelli di Einstein o archi (Einstein rings non completi).

Quelli appena elencati sono effetti di *strong lensing*, ma possono esservi anche effetti di weak lensing, che sono semplicemente delle distorsioni delle immagini. Tali distorsioni possono essere di due tipi: *effetto di convergenza*, cioè vedere un aumento o una diminuzione dell'immagine della stella reale; l'altra possibilità è un *effetto di shear*, rispetto a cui un oggetto che è intrinsecamente sferico può essere deformato a formare un'ellisse.

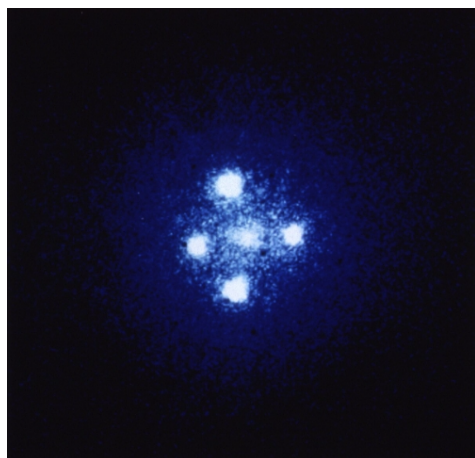
Questi effetti di lente gravitazionale sono una predizione diretta della teoria della Relatività Generale e sono una conseguenza dell'effetto di deflessione della luce. La luce, pur non avendo massa, sente il campo gravitazionale in quanto deve muoversi sulle geodetiche dello spaziotempo che in presenza di gravità sono naturalmente delle traiettorie curve. Puoi vedere le 4 figure 7.7 per esempi.

In figura 7.7b è rappresentato un utilizzo dell'effetto di lente gravitazionale. In questo caso l'effetto di lente gravitazionale debole, in cui un telescopio guarda oggetti distanti.

È possibile ricostruire una mappatura della distribuzione di materia oscura nell'universo attraverso lo studio della distorsione della luce indotta dalla presenza di grandi quantità di materia tra le sorgenti e noi. Puoi vedere la figura 7.7d. Questo è possibile, in quanto abbiamo visto che l'equazione della lente mette in relazione le posizioni apparenti dei vari punti che formano un'immagine con la distribuzione di materia della lente gravitazionale.

7.5.4 Orbite chiuse

Trattiamo ora il caso delle orbite chiuse, nel contesto del campo gravitazionale statico e isotropo generato dal Sole. Consideriamo come test particelle un pianeta, che può muoversi su un'orbita chiusa attorno al Sole. Il punto



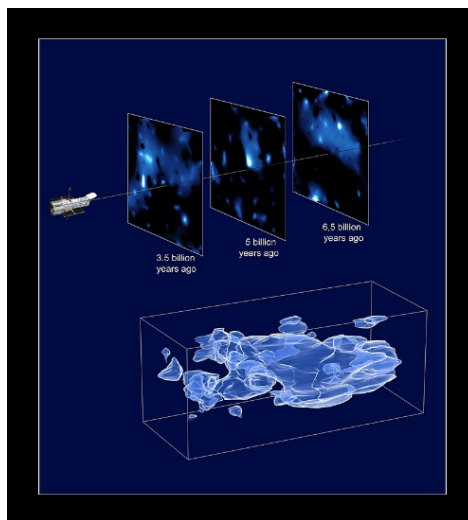
(a) **Einstein's cross.** Quattro immagini dello stesso quasar distante attorno all'immagine di una galassia più vicina.



(b) Ammasso di galassie Abell 2218. Esempio molto evidente dell'effetto di strong lensing. Sono ben visibili numerosi arclets.



(c) **Hubble Smiley Face.** Abbiamo un'evidente distorsione di oggetti distanti, che sembrano formare un volto, un sorriso, e casualmente i due occhi sono in realtà delle galassie molto brillanti che sono presenti su questa linea di vista. Lo smile è anch'esso dovuto all'effetto di lente gravitazionale.

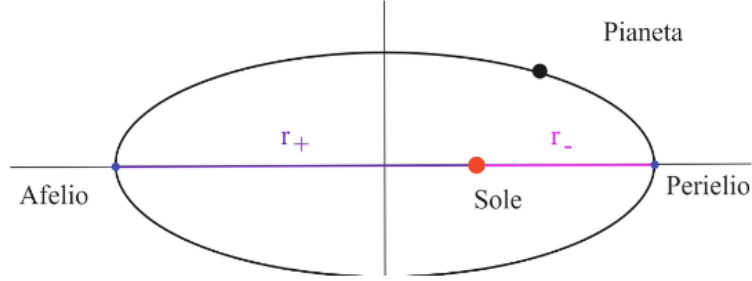


(d) Utilizzo dell'effetto di lente gravitazionale debole per la mappatura della materia oscura.

Figura 7.7

di minima distanza r_- dal Sole, si chiama **perielio**, mentre il punto di massima distanza si chiama **afelio**. Il Sole occupa uno dei due fuochi. Si faccia riferimento alla figura 7.8.

Noi già conosciamo la forma dell'orbita per il caso più generale, in quan-

**Figura 7.8**

to l'abbiamo scritta precedentemente. Ricordiamo (verificare se a secondo membro ci vada E/J o su J^2):

$$\frac{A(r)}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2 B(r)} = -\frac{E}{J^2} \quad (7.5.66)$$

in cui:

$$B(r) = A^{-1}(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \quad (7.5.67)$$

che possiamo formalmente integrare per ottenere l'orbita:

$$\varphi(r) = \pm \int dr \frac{A^{1/2}}{r^2 \left[\frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}} \quad (7.5.68)$$

anche in questo caso, cerchiamo di esprimere le costanti del moto per il problema in gioco.

Perieli e Afelio Sia il perielio che l'afelio sono punti dell'orbita di inversione del moto: se noi partiamo dal perielio, il raggio aumenta, quindi ha derivata positiva in funzione di φ , fintanto che arriviamo all'afelio. All'afelio raggiungiamo la distanza massima r_+ , dopodiché il raggio comincia a diminuire fino ad arrivare al valore minimo, r_- . Quindi i punti di perielio e di afelio, o punti di inversione del moto, li possiamo definire attraverso:

$$\left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{r_{\pm}} = 0 \quad (7.5.69)$$

valutando l'equazione (7.5.66) per la posizione del perielio e dell'afelio, questa condizione fa sì che il primo termine sia pari a zero e rimane:

$$\frac{1}{r_{\pm}^2} - \frac{1}{J^2 B(r_{\pm})} = -\frac{E}{J^2}. \quad (7.5.70)$$

Abbiamo due equazioni che definiscono la posizione del perielio e dell'afelio. Contengono le costanti del moto J ed E . Possiamo invertirle e scrivere:

$$E = \frac{1}{r_+^2 - r_-^2} \left[\frac{r_+^2}{B(r_+)} - \frac{r_-^2}{B(r_-)} \right] \quad (7.5.71)$$

$$J^2 = \frac{1}{\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}} \left[\frac{r_+^2}{B(r_+)} - \frac{r_-^2}{B(r_-)} \right] \quad (7.5.72)$$

Equazione dell'orbita Stiamo imponendo che l'orbita sia chiusa e quindi si abbia una distanza minima e una distanza massima, che vincolano il valore dell'energia ed il valore del momento angolare in questo modo. Scriviamo allora la forma dell'orbita in modo esplicito:

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) = \int_{r_-}^r \frac{dr}{r^2} A^{1/2}(r) \left[\frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right] \quad (7.5.73)$$

rielaborando leggermente e mettendo a posto l'espressione che si ottiene sostituendo i valori di E e di J :

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) = \int_{r_-}^r \frac{dr}{r^2} A^{1/2}(r) \left[\frac{r_-^2 (B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-)) - r_+^2 (B^{-1}(r) - B^{-1}(r_+))}{r_+^2 r_-^2 (B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-))} \right]^{-1/2} \quad (7.5.74)$$

questa grossa espressione esprime la posizione dell'angolo al variare di r . La variazione totale dell'angolo nel passare dal perielio alla afelio $r_- \rightarrow r_+$ è:

$$|\varphi(r_+) - \varphi(r_-)| \quad (7.5.75)$$

la variazione totale per compiere un'orbita intera, sarà allora:

$$2 |\varphi(r_+) - \varphi(r_-)| \quad (7.5.76)$$

definiamo **precessione dell'orbita** per una rivoluzione del pianeta attorno al Sole la quantità $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = 2 |\varphi(r_+) - \varphi(r_-)| - 2\pi \quad (7.5.77)$$

dove 2π è di quanto varia l'angolo se la nostra orbita non precede, in tal caso avremmo proprio $\Delta\varphi = 0$. Questo si può vedere come una precessione del piano dell'orbita, mentre il pianeta ruota attorno all'orbita, il piano ruota a sua volta. Quindi la precessione esprime di quanto, in più o in meno, dobbiamo far variare l'angolo per partire da un punto e ritornare allo stesso punto.

Calcoliamo a quanto ammonta la precessione, nel limite di campo debole. In tal modo rappresentiamo proprio la situazione che abbiamo per i pianeti del sistema solare. Le quantità:

$$\frac{GM}{r} \quad , \quad \frac{GM}{r_-} \quad , \quad \frac{GM}{r_+} \quad (7.5.78)$$

sono tutte quantità piccole su cui possiamo fare uno sviluppo. Ricordiamo:

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} = 1 + \frac{2GM}{r} + \dots \quad (7.5.79)$$

$$B(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \quad (7.5.80)$$

sviluppiamo i termini che compaiono nell'integrale dell'orbita. Vedremo adesso in modo semplice che per il termine tra quadre (dell'orbita), sarà necessario prendere B sviluppato fino al secondo ordine in GM/r affinché, il termine tra quadre, sia di ordine GM/r . Quindi:

$$A^{1/2}(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{GM}{r} + \dots \quad (7.5.81)$$

$$B^{-1}(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} = 1 + \frac{2GM}{r} + 1 + \frac{(2GM)^2}{r^2} + \dots \quad (7.5.82)$$

Prendiamo il termine tra quadre e dimostriamo perché sia necessario arrivare al secondo ordine. Supponiamo di troncare al primo, otterremo:

$$r_-^2 \left(B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-) \right) = r_-^2 (2GM) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_-} \right) \quad (7.5.83)$$

gli altri termini sono analoghi. Fermandoci al primo ordine:

$$[\dots] = \frac{r_-^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_-} \right) - r_+^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right)}{r_+^2 r_-^2 \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)} \frac{2GM}{2GM} \quad (7.5.84)$$

il termine $2GM$ si semplifica e il termine che otterremo è di ordine zero. Al secondo ordine questo non accade, infatti avremo:

$$r_-^2 \left(B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-) \right) = r_-^2 (2GM) \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_-} \right) + 2GM \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_-^2} \right) \right] \quad (7.5.85)$$

che semplificato con il termine a denominatore produce l'ordine corretto. In tal caso:

$$[\dots] = \frac{r_-^2 \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_-} \right) + 2GM \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_-^2} \right) \right] - r_+^2 \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) + 2GM \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_+^2} \right) \right]}{r_+^2 r_-^2 \left[\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) + 2GM \left(\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2} \right) \right]} \quad (7.5.86)$$

$$= (\text{ordine } 0) + GM (\text{ordine } 1). \quad (7.5.87)$$

Ora guardando a:

$$\left[\frac{r_-^2 \left(B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-) \right) - r_+^2 \left(B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-) \right)}{r_+^2 r_-^2 \left(B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-) \right)} - \frac{1}{r^2} \right] = [\#_1] \quad (7.5.88)$$

notiamo che, chiamando $x = 1/r$, abbiamo:

$$[\#_1] = f(x^2) \quad (7.5.89)$$

con la proprietà che per $x = x_{\pm}$ (cioè $r = r_{\pm}$):

$$f(x) = 0. \quad (7.5.90)$$

Però una funzione quadratica di x , di cui conosciamo gli zeri, possiamo scriverla come:

$$[\#_1] = c(x_- - x)(x - x_+) \quad (7.5.91)$$

$$= x \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \quad (7.5.92)$$

il problema ora è semplicemente trovare c . Abbiamo due rappresentazioni della stessa funzione, quella da cui siamo partiti e la sua decomposizione in termini degli zeri. Questo vuol dire che possiamo tranquillamente determinare la costante c mettendoci in un punto particolare r a nostra scelta. Ciò che conviene è calcolare il limite per $r \rightarrow \infty$ delle due forme. Quando usiamo rispettivamente l'espressione originale e l'altra forma funzionale:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\#_1] = \frac{r_-^2 (1 - B^{-1}(r_-)) - r_+^2 (1 - B^{-1}(r_+))}{r_+^2 r_-^2 (B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-))} \quad (7.5.93)$$

sviluppiamo B^{-1} in modo tale da esprimere la nostra costante c all'ordine GM :

$$c = 1 - 2GM \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \quad (7.5.94)$$

utilizzandola dentro l'integrale arriviamo a:

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) = \int_{r_-}^r \frac{dr}{r^2} \left(1 + \frac{GM}{r} \right) c^{-1/2} \left[\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \right]^{-1/2} \quad (7.5.95)$$

svolgendo i prodotti e trascurando i termini di ordine superiore:

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) = \left[1 + GM \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \right] \int_{r_-}^r \frac{dr}{r^2} \left(1 + \frac{GM}{r} \right) \left[\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \right]^{-1/2} \quad (7.5.96)$$

l'integrale è risolvibile con la sostituzione di variabili:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \sin \psi \quad (7.5.97)$$

in cui vediamo che per:

$$\psi = -\frac{\pi}{2} \longrightarrow r = r_- \quad (7.5.98)$$

$$\psi = +\frac{\pi}{2} \longrightarrow r = r_+. \quad (7.5.99)$$

Il risultato finale che otteniamo è:

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) = \left[1 + \frac{3}{2}GM \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \right] \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2}GM \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \cos \psi \quad (7.5.100)$$

questa espressione ci dice di quanto varia l'angolo lungo l'orbita. A noi interessa però calcolare la *precessione*. Basta sostituire i corrispondenti valori di ψ nell'espressione precedente:

$$\Delta\varphi = 2 |\varphi(r_+) - \varphi(r_-)| - 2\pi \quad (7.5.101)$$

$$= 2\pi \left(1 + \frac{3GM}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \right) - 2\pi \quad (7.5.102)$$

$$= 2\pi \frac{3GM}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right). \quad (7.5.103)$$

È consuetudine ridefinire $\Delta\varphi$ in termini del semi-lato retto dell'orbita:

$$\frac{1}{L} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \quad (7.5.104)$$

da cui:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{L} \quad (7.5.105)$$

essa rappresenta la precessione per ogni rivoluzione; è positiva, per cui l'orbita precede nella stessa direzione di moto del pianeta, ovvero il pianeta raggiungerà di nuovo il perielio compiendo un po' più di 360 gradi. Notiamo anche la proporzionalità di nuovo con GM . La precessione è poi una quantità cumulativa, infatti, la precessione su n orbite è:

$$\Delta\varphi_n = n \frac{6\pi GM}{L}. \quad (7.5.106)$$

Esempio - precessione di Mercurio Mercurio ha un'orbita il cui semi-lato retto è:

$$L = 55.3 \cdot 10^6 \text{ km} \quad (7.5.107)$$

inoltre:

$$GM_\odot = 1.5 \text{ km}. \quad (7.5.108)$$

Troviamo che la precessione dell'orbita di Mercurio è:

$$\Delta\varphi = 0.1038'' \quad (7.5.109)$$

è molto difficile misurare una precessione così piccola, ma essendo cumulativa, è possibile farlo su un lungo intervallo di tempo. Mercurio compie 415 rivoluzioni per secolo (100 anni terrestri) e ciò corrisponde a dover misurare:

$$\Delta\varphi = 43.03''. \quad (7.5.110)$$

Clemens, nel 1943, mise sotto test questo calcolo e utilizzò osservazioni di Mercurio risalenti fino al 1765. Trovò, per un secolo di osservazioni, che:

$$\Delta\varphi_{oss} = (43.11 \pm 0.45)'' \quad (7.5.111)$$

numero perfettamente compatibile con la predizione della Relatività Generale. Anche questa è una verifica sperimentale del fatto che le predizioni della Relatività Generale sono corrette almeno nell'ambito dei sistemi che abbiamo a disposizione per fare le osservazioni.

Si noti che il calcolo che abbiamo fatto adesso è stato fatto nel limite di campo debole. La formula dell'equazione dell'orbita, da cui poi abbiamo fatto il suddetto limite, vale per qualsiasi sistema statico e isotropo. Se il campo non è debole possiamo usare la stessa espressione e svolgere direttamente l'integrale. I parametri da cui dipende sono le funzioni A e B e le due costanti del moto che possono essere riscritte in termini dei parametri dell'orbita. Il risultato che si ottiene è l'angolo, da cui poi la precessione.

Vedremo dopo un esempio osservativo di precessione di un'orbita di un buco nero che gira attorno a un altro buco nero, dove quello più piccolo è la test particle e quello più grande la sorgente del campo. Dobbiamo però ancora discutere che cosa siano i buchi neri, ma lo faremo nel prossimo capitolo.

Capitolo 8

Orbits, stars and Black holes

In questo capitolo, il cui titolo è stato rubato da Carroll [2], vedremo cosa sono buchi neri, buchi bianchi (cenni) e tratteremo brevemente le onde gravitazionali.

8.1 Singolarità e Buchi Neri

Discutiamo adesso il problema delle singolarità di una metrica. In particolare, facciamo utilizzando la metrica di Schwarzschild:

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (8.1.1)$$

in cui abbiamo:

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad (8.1.2)$$

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} \quad (8.1.3)$$

possiamo chiederci, se ci siano dei punti, cioè delle porzioni dello spaziotempo in cui questa metrica è singolare. La risposta è sì, infatti ci accorgiamo che per $r = 0$ (un punto), e per $r = r_S = 2GM$ (una superficie) ci sono dei termini che vanno a infinito.

I coefficienti della metrica però dipendono dalla scelta del sistema di coordinate. È quindi possibile che se prendiamo un certo sistema di coordinate x^μ in cui abbiamo qualche componente del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ singolare in quel sistema, non è detto che dopo un'opportuna trasformazione di coordinate tutte le funzioni metriche possano risultare singolari. Questo lo possiamo vedere con un esempio molto semplice, nel caso del piano euclideo $\mathbb{R}^2$. Scriviamo la metrica in coordinate polari:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (8.1.4)$$

in questo caso le componenti della metrica sono:

$$g_{rr} = 1 \quad , \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad (8.1.5)$$

le componenti della metrica inversa sono:

$$g^{rr} = 1 \quad , \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \quad (8.1.6)$$

la componente $g^{\theta\theta}$ qui è singolare per $r \rightarrow 0$. Ma sappiamo benissimo che il piano euclideo in $r = 0$ non ha niente di strano. Quel punto è perfettamente regolare per la varietà anche se il tensore metrico, in questo caso il tensore metrico inverso, ha apparentemente una singolarità. Questa situazione è chiamata **coordinate singularity** e avviene quando troviamo un punto singolare nella metrica che non rappresenta una vera singolarità della varietà, ma è semplicemente un accidente della scelta del sistema di coordinate.

Del resto, il tensore metrico è un tensore e quindi le componenti del tensore metrico si trasformano quando cambia il sistema di coordinate secondo la legge di trasformazione tensoriale. Infatti, per il piano cartesiano, possiamo fare una trasformazione di coordinate dal sistema di coordinate polari al sistema di coordinate cartesiane x, y e con ciò la metrica (anche l'inversa) diventa manifestamente non singolare:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (8.1.7)$$

$$g_{xx} = g_{yy} = 1 \quad , \quad g_{yx} = 0. \quad (8.1.8)$$

Per capire se quella che appare come singolarità in un dato sistema di coordinate lo è invece realmente per la varietà, non dobbiamo guardare le componenti del tensore metrico, ma qualcosa che sia un invariante. In particolare dobbiamo guardare che cosa fanno gli scalari di curvatura, i quali, essendo delle quantità invarianti per trasformazioni generali di coordinate, se sono singolari in un punto lo saranno per qualunque sistema di coordinate ed esprimeranno una singolarità essenziale della metrica. Sappiamo che c'è uno scalare di curvatura ovvio, che è lo scalare di Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (8.1.9)$$

ma anche che in $N = 4$ dimensioni il numero di scalari indipendenti di curvatura è 14 e dobbiamo verificare che tutti non siano singolari in un dato punto affinché quel punto non sia un punto singolare della varietà. In altri termini è sufficiente che 1 di questi 14 scalari sia singolare in un punto per far sì che quel punto sia una singolarità essenziale della varietà.

Esempi di scalari diversi dallo scalare di Ricci sono:

$$R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad , \quad R^{\lambda\mu\nu\rho} R_{\lambda\mu\nu\rho} \quad , \quad R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\rho\sigma\lambda\tau} R^{\lambda\tau} R_{\mu\nu}. \quad (8.1.10)$$

Andiamo a vedere che cosa succede per la metrica di Schwarzschild. Possiamo dimostrare la seguente cosa:

$$r = 0 \quad : \quad \text{singolarità essenziale} \quad (8.1.11)$$

quindi che lo spazio-tempo descritto dalla metrica statica e isotropa ha un punto singolare in $r = 0$, ovviamente per ogni tempo. È ovvio che lo scalare di Ricci non può essere lo scalare, perché abbiamo trovato la metrica di Schwarzschild risolvendo l'equazione di Einstein nel vuoto. In quello che si chiama uno **spazio-tempo Ricci-flat**, cioè tale che $R_{\mu\nu} = 0 \rightarrow R = 0$. Lo scalare di curvatura che non è nullo è il seguente:

$$S_* \equiv R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2M^2}{r^6} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty. \quad (8.1.12)$$

Invece, per r pari al raggio di Schwarzschild, cioè:

$$r = r_S = 2GM \quad (8.1.13)$$

non c'è una *singolarità essenziale*, essa è soltanto una coordinate singularity. Appare come tale se usiamo la metrica di Schwarzschild, perché:

$$B(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \quad , \quad A^{-1}(r) \xrightarrow{r \rightarrow r_s} \infty \quad (8.1.14)$$

infatti, vedremo più avanti che possiamo fare una trasformazione di coordinate dal sistema di coordinate di Schwarzschild ad un nuovo sistema di coordinate in cui la superficie $r = 2GM$ non è singolare. Se ci mettiamo a calcolare tutti i 14 scalari di curvatura che abbiamo per la metrica di Schwarzschild, troviamo che tutti questi sono regolari su questa superficie.

Ora, $r = 0$ e $r = 2GM$, hanno una importanza fisica o ci stiamo solo preoccupando di proprietà matematiche?

La domanda non è malposta. Ricordiamo infatti: che abbiamo risolto l'equazione di Einstein $R_{\mu\nu} = 0$ per $r > R_{stella}$ (vedi figura 8.1), mentre internamente dobbiamo risolvere l'equazione di Einstein completa, cioè $E_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}$. Quindi, se è così, la soluzione per $r < R_{stella}$ non è quella di Schwarzschild e non dovremmo preoccuparci di quanto abbiamo detto fino ad ora! Nella regione esterna dobbiamo chiederci invece dove si collochi $r_S = 2GM$ rispetto a R_{stella} .

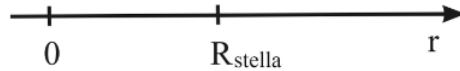


Figura 8.1

Valutiamo alcuni valori che ci attendiamo per r_S per corpi a noi conosciuti:

- Sole: $r_S = 2GM_\odot = 3 \text{ km} = 10^{-6} R_\odot$. In tal caso raggio di Schwarzschild è totalmente molto interno alla posizione del raggio della stella, quindi non ha nessun effetto.
- Terra: $r_S = 2GM_T = 1 \text{ cm} = 10^{-9} R_T$.

Quindi per i corpi celesti al quali siamo abituati, ad esempio Sole e Terra, rappresentativi poi delle stelle, il raggio di Schwarzschild è sempre interno al raggio dell'astro. La soluzione di Schwarzschild vale all'esterno e quindi non ha nessuna rilevanza fisica.

È però possibile il realizzarsi di situazioni in cui il raggio della stella viene a compattarsi a sufficienza, in modo tale da risultare più interno di quanto non sia il valore del raggio di Schwarzschild r_S . In tali situazioni la massa risulta allora tutta concentrata all'interno del raggio di Schwarzschild (densità elevatissime) e il raggio di Schwarzschild risulta presente nello spazio fisico in cui vale la soluzione di Schwarzschild: è il caso in cui si forma quello che viene chiamato **buco nero** (BH). In tal caso r_S prende il nome di **orizzonte degli eventi** (ODE), ma non è una singolarità, bensì una peculiarità della metrica.

8.1.1 Buco nero statico e isotropo

Per studiare il comportamento dello spazio-tempo della metrica statica ed isotropa e per capire quali siano le sue caratteristiche, studiamo la struttura causale dello spazio-tempo. Questa individua le regioni:

- Cono luce, $d\tau^2 = 0$.
- Eventi di tipo tempo, $d\tau^2 > 0$, eventi connessi casualmente.
- Eventi di tipo spazio, $d\tau^2 < 0$, eventi non connessi casualmente.

Per semplificare la discussione, scegliamo una situazione a $\theta = \varphi = \text{cost}$, quindi in cui le coordinate che possono variare sono (r, t) . Ciò significa:

$$d\theta = d\varphi = 0 \quad (8.1.15)$$

e che il tempo proprio:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (8.1.16)$$

facciamo lo stesso tipo di trattazione che avevamo fatto per lo spazio-tempo di Minkowski.

Spaziotempo di Minkowski - struttura causale. Ricordiamo com'è fatto causalmente lo spazio-tempo di Minkowski. Consideriamo le coordinate (t, x, y, z) , e poniamo $y = z = \text{cost.}$ La metrica risulta:

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 \quad (8.1.17)$$

rispetto al piano $x - t$ traiettorie a 45° rappresentano il cono luce. I punti interni al cono luce sono quelli di tipo tempo, cioè sono i punti separati dall'origine con $d\tau^2 > 0$ causalmente connessi con l'origine, mentre i punti esterni sono quelli di tipo spazio. Se con una trasformazione di coordinate e passiamo al sistema (t, r, θ, φ) - che è la versione piatta dello spazio-tempo della metrica statica e isotropa nelle coordinate standard - possiamo nuovamente scegliere di prendere superfici $\theta = \varphi = \text{cost.}$ La metrica di Minkowski in questo set di coordinate è:

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2. \quad (8.1.18)$$

Lo spazio-tempo di Minkowski visto con le coordinate t ed r è molto simile a quello che abbiamo per lo spazio-tempo con le coordinate t ed x , si veda la figura 8.2; il cono luce sono traiettorie a 45° , le zone causalmente connesse sono quelle interne e quelle non causalmente connesse sono esterne. Dalla forma di $d\tau^2$, vediamo che, in qualunque punto dello spazio-tempo di Minkowski io mi posizioni, il cono luce è sempre a 45° .

Dopodiché ovviamente un oggetto a velocità costante subluminali si muoverà su una traiettoria rettilinea inclinata, mentre un oggetto che ha una traiettoria non rettilinea è un oggetto che subisce accelerazione nello spazio-tempo di Minkowski.

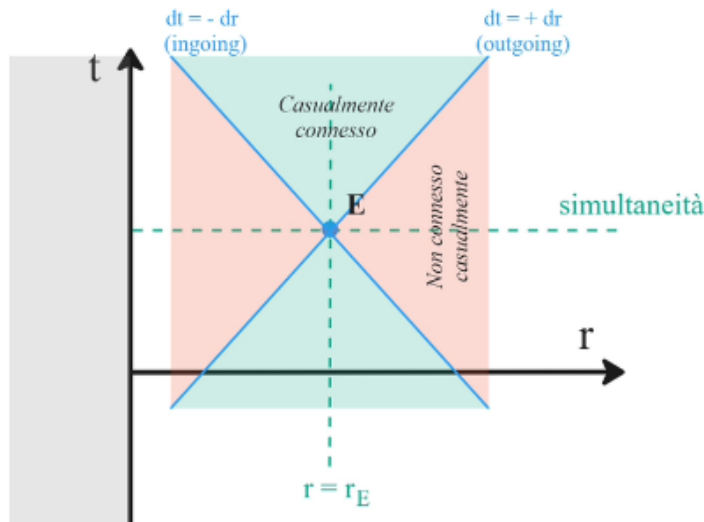


Figura 8.2

Spazio tempo di Schwarzschild - struttura causale. Studiamo ora la struttura causale dello spazio-tempo della metrica statica e isotropa usando la metrica in (8.1.16).

- **Cono luce.** Poniamo $d\tau^2 = 0$:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (8.1.19)$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \quad (8.1.20)$$

osserviamo che:

1. $r \rightarrow \infty$: abbiamo $\frac{dr}{dt} = \pm 1$, chiaramente più ci allontaniamo dal corpo più il campo diventa debole e di conseguenza tendiamo allo spazio-tempo piatto minkowskiano.
2. $r \rightarrow r_s$: abbiamo $\frac{dr}{dt} \rightarrow 0$, il cono luce collassa. Vedi figura 8.3.

- **Eventi time-like.** Poniamo $d\tau^2 > 0$:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 > 0 \quad (8.1.21)$$

possiamo nuovamente moltiplicare per $\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$, ma dobbiamo fare attenzione al segno. Si ha:

1. $r > r_s$: $\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) > 0$ e così:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2 dt^2 > dr^2 \quad (8.1.22)$$

il futuro causale è quello all'interno del cono luce.

2. $r < r_s$: $\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) < 0$ e così:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2 dt^2 < dr^2 \quad (8.1.23)$$

quando ci muoviamo a $r < r_s$ il cono luce ritorna ad aprirsi. Ora gli eventi time-like risultano quelli a destra e a sinistra del cono luce; è come se il cono luce si ribaltasse quando entriamo all'interno dell'orizzonte degli eventi. Dimostreremo a breve che tale futuro causale adesso punta verso la singolarità. In qualche modo è come se spazio e tempo scambiassero i propri ruoli.¹

Quindi se consideriamo un oggetto che sta cadendo verso l'orizzonte degli eventi, cioè partendo da $r = +\infty$ si muove verso r via via minori, il suo futuro

¹Per osservarlo basta studiare il segno della metrica per $r > r_s$ e $r < r_s$. Chiamiamo la parte di tipo spazio quella con il segno "-" davanti. Nel primo caso essa coincide con la parte relativa a dr , ma nel secondo il segno meno compare davanti a dt .

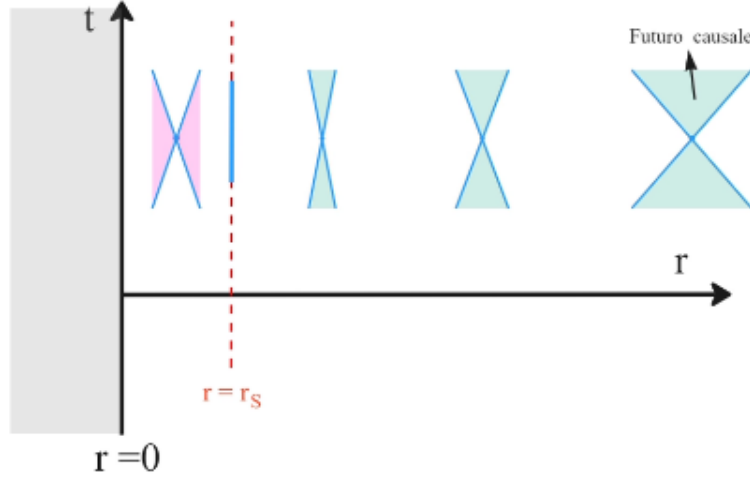


Figura 8.3

punta verso t che cresce (verso l'alto), quando arriva a $r = r_S$ non succede nulla di strano, ma appena attraversata, per $r \leq r_S$ il suo futuro punta nella direzione di cadere sulla singolarità vera e propria a $r = 0$ (quindi verso sinistra). Dunque la superficie $r = r_S$ che abbiamo chiamato **orizzonte degli eventi** (ODE) assume un ruolo peculiare: non è una singolarità ma è una zona dello spazio-tempo attraversata la quale non possiamo più tornare indietro. Questa situazione è quella che chiamiamo **buco nero**.

Worldline di un fotone. Rivediamo la stessa descrizione in modo un pochino più completo, andando a descrivere come sono fatte le wordlines dei fotoni nello spazio-tempo statico e isotropo. Le wordlines dei fotoni sono le traiettorie nulle, per le quali $d\tau^2 = 0$ lungo tutta la traiettoria. Quindi:

$$\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0 \quad (8.1.24)$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \quad (8.1.25)$$

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \quad (8.1.26)$$

$$= \pm \frac{r}{r - r_S} \quad (8.1.27)$$

$$= \pm \frac{r - r_S + r_S}{r - r_S} \quad (8.1.28)$$

$$= \pm \left[1 + \frac{r_S}{r - r_S}\right] \quad (8.1.29)$$

separiamo le variabili e integriamo:

$$\int dt = \pm \int dr \left[1 + \frac{r_S}{r - r_S} \right] \quad (8.1.30)$$

$$t = \pm \left[r + r_S \int \frac{dr}{r - r_S} \right] + \text{cost} \quad (8.1.31)$$

$$= \pm \left[r + r_S \int \frac{d(r - r_S)}{r - r_S} \right] + \text{cost} \quad (8.1.32)$$

$$= \pm \left[r + r_S \int \frac{d(r_S - r)}{r_S - r} \right] + \text{cost} \quad (8.1.33)$$

in cui abbiamo usato il fatto che l'integrale (8.1.32) ha senso per $r > r_S$ e nell'ultima riga un'uguaglianza che si trova a partire dalla prima riga, ed è comoda da usare per $r < r_S$.

Per mettere assieme entrambe le due possibilità, otteniamo:

$$t = \pm \left[r + r_S \ln |r - r_S| \right] + \text{cost} \quad (8.1.34)$$

che riscriviamo come:

$$t = \pm \left[r + r_S \ln \left| \frac{r - r_S}{r} \right| \right] + \text{cost}' \quad (8.1.35)$$

e abbiamo dunque trovato due soluzioni:

$$r > r_S : \quad t = \pm \left[r + r_S \ln \left(\frac{r - r_S}{r_S} \right) \right] + k_{\pm} \quad (8.1.36)$$

$$r < r_S : \quad t = \pm \left[r + r_S \ln \left(\frac{r - r_S}{r_S} \right) \right] + k'_{\pm}. \quad (8.1.37)$$

Per $r > r_S$, cioè fuori dall'orizzonte degli eventi, le soluzioni "+" sono out-going e "-" sono le soluzioni ingoing. Non abbiamo più delle rette inclinate di 45° , ma delle espressioni che contengono un pezzo in più. Solo a distanze r molto grandi, dove il termine di logaritmo diventa meno importante del termine lineare in r , ritroviamo quello che abbiamo per lo spazio di Minkowski. Viceversa per $r \rightarrow r_S^+$ domina il termine logaritmico. Avremo:

$$r \rightarrow \infty \quad t = \pm r \quad (8.1.38)$$

$$r \rightarrow r_S^+ \quad t = \pm \lim_{r \rightarrow r_S^+} \left[r + r_S \ln \left(\frac{r_S - r}{r_S} \right) \right] + k \sim \pm \ln \left(\frac{r_S - r}{r_S} \right) \quad (8.1.39)$$

si può vedere la figura 8.4.

La nostra situazione è la seguente. Consideriamo un oggetto di massa M circondato da una regione che corrisponda all'ODE, cioè un BH che genera il campo. Le traiettorie che stiamo considerando sono solo traiettorie radiali

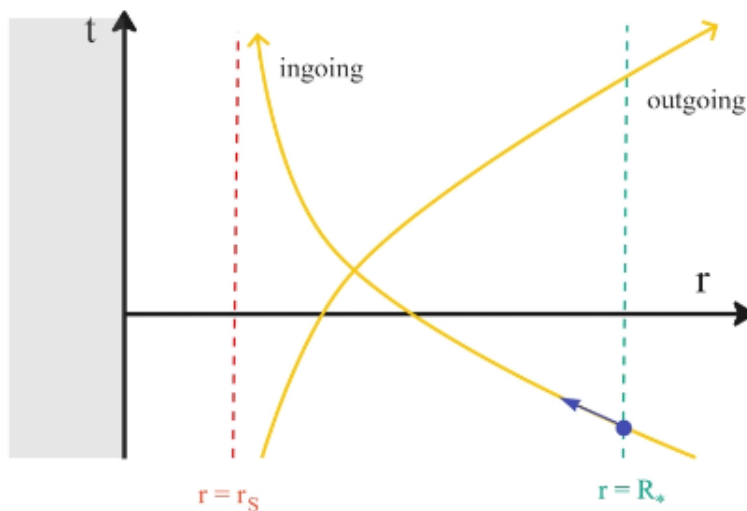


Figura 8.4

perché abbiamo fissato $\theta = \varphi = \text{cost}$. Un fotone può quindi andare verso il buco nero (ingoing, verso r decrescente) o può andar via dal buco nero (outgoing, verso r crescente). Le coordinate (r, t) sono le coordinate di un osservatore a riposo rispetto al buco nero; infatti il corpo di massa M che sta nella posizione $r = 0$ vi resta sempre al passare del tempo.

Vediamo che un osservatore posizionato a $r = R_*$, stazionario rispetto al buco nero, ha la stessa worldline dell'oggetto in $r = 0$.

Tale osservatore vede i fotoni seguire le worldline che abbiamo descritto. In particolare, se a un certo istante di tempo lui lancia un fotone verso l'orizzonte degli eventi, finché siamo molto lontani dal buco nero, la traiettoria (nello spazio tempo, poiché la traiettoria nello spazio fisico è radiale) è una traiettoria a 45° , e poi mano prende un andamento logaritmico. Si noti che l'orizzonte degli eventi è un asintoto di questa traiettoria, quindi la traiettoria ingoing non incontra mai $r = r_S$ se non ha tempo $+\infty$. Questo significa che il fotone inviato dall'osservatore, posto in R_* , come visto dallo stesso osservatore, impiega un tempo infinito a raggiungere l'orizzonte degli eventi: l'osservatore non vedrà mai il fotone entrare nell'orizzonte degli eventi.

Però attenzione! Questo non vuol dire che il fotone non entri nell'orizzonte degli eventi, ma semplicemente che l'osservatore in R_* non lo vede. Infatti, una volta che vi è entrato, esso non può più uscirne: il suo destino è quello di arrivare alla singolarità perché il suo futuro causale punta necessariamente verso la singolarità.

Questo è anche il destino di una traiettoria di un oggetto che non è un fotone. Se io ho un'astronave che parte dal punto R_* e viaggia verso l'orizzonte degli eventi, l'osservatore inerziale distante non vedrà mai l'astronave entrare nell'orizzonte degli eventi perché per lui l'astronave ci arriverà in

un tempo infinito. Ma l'astronauta sull'astronave arriva all'orizzonte degli eventi in un tempo per lui finito e lo attraversa senza problemi, perché essa non è una superficie singolare, dopodiché il suo destino sarà quello di cadere sulla singolarità $r = 0$.

Vedremo dopo come calcolare la worldline dell'astronave, e dimostreremo che il tempo Δt_{astro} per arrivare all'orizzonte degli eventi, come misurato dall'astronave, è un tempo finito.

Ricordiamo che l'unica cosa su cui due osservatori differenti possono essere d'accordo è il tempo proprio, ma sicuramente non sul tempo coordinato, quindi non è un problema che uno misuri un tempo finito e uno infinito. Questo è un effetto molto evidente della relatività.

ODE: due osservatori a confronto. Prendiamo due osservatori e vediamo cosa cambia per essi riguardo l'orizzonte degli eventi. Prendiamo un'astronauta ed un osservatore esterno. Analogamente a quanto abbiamo detto in precedenza, l'osservatore distante non vede mai l'astronave raggiungere l'orizzonte degli eventi e non può nemmeno ricevere un segnale dall'astronave quando vi sarà arrivata. Vediamo meglio il perché facendo riferimento alla figura 8.5.

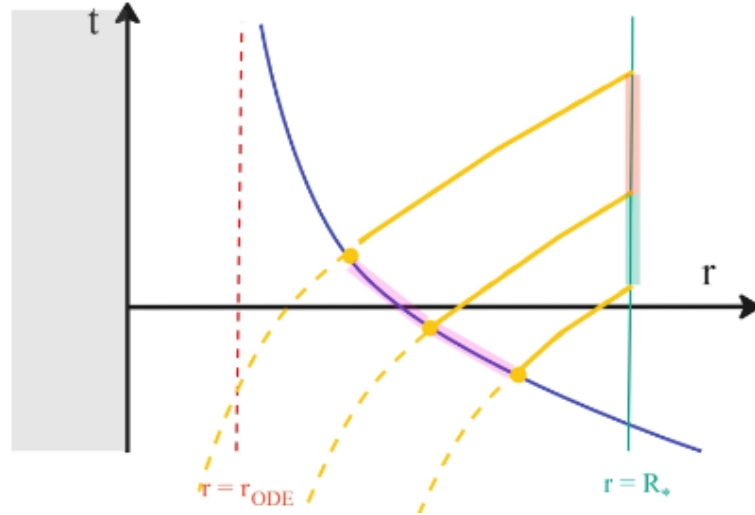


Figura 8.5

Consideriamo la traiettoria dell'astronave che sta andando verso l'orizzonte degli eventi e la worldline dell'osservatore stazionario in $r = R_*$. Ricordiamo anche che se calcoliamo il tempo proprio sulla worldline (blu) dell'astronave, questo coincide col tempo misurato dall'osservatore sull'astronave:

$$\Delta \tau_{\text{worldline astronave}} = \Delta t_{\text{astronave}} \quad (8.1.40)$$

così come se calcoliamo il tempo proprio sulla worldline (verde) dell'osservatore distante, questo coincide col tempo dell'osservatore misurato sul suo orologio:

$$\Delta\tau_{\text{worldline osservatore}} = \Delta t_{\text{osservatore}}. \quad (8.1.41)$$

Quindi se il tempo proprio misurato lungo la worldline dell'astronave coincide con il tempo dell'astronave, noi possiamo dire questo. L'astronave quando si trova a un certo punto invia un segnale luminoso verso l'osservatore. Tale segnale luminoso dovrà stare su una traiettoria come l'abbiamo disegnata (gialla), quindi a grandi r sarà abbastanza rettilinea. Dopo che è passato un $\Delta\tau = 1$ s per l'osservatore, che coincide con $\Delta\tau = 1$ s per l'astronave, questa invia di nuovo un segnale e così per ogni secondo. La lunghezza dei tragitti evidenziati lungo la worldline dell'astronave è uguale se misurata come tempo proprio da entrambi gli osservatori, solo che coincide col tempo coordinato per l'astronauta, ma non coincide con il tempo coordinato per l'osservatore. La lunghezza dei corrispondenti segmenti evidenziati (rosso e verde) sulla worldline dell'osservatore non è la stessa!

Risulta evidente che più andiamo verso la parte interna della traiettoria dell'astronave, più le traiettorie luce dei segnali luminosi risentono della parte curva. Il ricevimento dei segnali da parte dell'osservatore distante è sempre più dilazionato. Quindi: mentre l'osservatore nell'astronave invia segnali a intervalli di tempo $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \Delta\tau_3$ sempre di un secondo, la ricezione dell'osservatore distante avviene per tempi $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2 > \Delta\tau_1, \dots$ etc. All'orizzonte degli eventi viene inviato l'ultimo segnale, che però non arriverà mai perché siamo arrivati all'asintoto.

Allo stesso tempo la radiazione inviata sarà caratterizzata da una propria frequenza di oscillazione che arriverà sempre più dilazionata: cioè vuol dire che la lunghezza d'onda della radiazione che arriva verso l'osservatore distantesarà sempre più spostata verso il rosso.

Vogliamo calcolare quanto tempo ci mette l'astronave per arrivare all'orizzonte degli eventi, così come misurato dell'astronave.

Nota. Osserviamo che il tempo impiegato dal fotone per entrare nell'orizzonte degli eventi è nullo, perché questi segue una traiettoria nulla. Il tempo coordinato del fotone è uguale al tempo proprio, che è zero lungo tutta la traiettoria.

Consideriamo le equazioni del moto nella metrica di Schwarzschild:

$$\frac{1}{B} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B} = -E \quad (8.1.42)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dp} = J \quad (8.1.43)$$

$$d\tau^2 = E dp^2. \quad (8.1.44)$$

Stiamo studiando un moto con $\varphi = \text{cost}$ in un piano $\theta = \pi/2$, dunque per cui $d\varphi = 0$ ed il momento angolare $J = 0$. Così la prima equazione si semplifica in:

$$\frac{1}{B} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{1}{B} = -E \quad (8.1.45)$$

da cui:

$$\left(\frac{dr}{dp} \right)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \frac{d\tau^2}{dp^2} = 1 - B(r) E = 0 \quad (8.1.46)$$

in cui abbiamo riscritto $\frac{dr}{dp}$ in termini del tempo proprio. Utilizzando la terza equazione scriveremo:

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 E = 1 - B(r) E \quad (8.1.47)$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{E} - B(r) \quad (8.1.48)$$

$$= \frac{1}{E} - 1 + \frac{r_S}{r} \quad (8.1.49)$$

$$\frac{d\tau}{dr} = \pm \left[\frac{r_S}{r} - \left(1 - \frac{1}{E} \right) \right]^{-1/2} \quad (8.1.50)$$

delle due soluzioni dobbiamo prendere quella con il segno meno perché man mano che $d\tau$ cresce, se stiamo andando verso il buco nero r diminuisce quindi dr è negativo. Inoltre tale radice quadrata ha senso se:

$$\frac{r_S}{r} > 1 - \frac{1}{E} \quad (8.1.51)$$

possiamo per cui calcolare:

$$\Delta\tau = \int_0^{\tau_{ODE}} d\tau = - \int_{r_0}^{r_S} dr \left(\frac{r_S}{r} - D \right)^{-1/2} \quad (8.1.52)$$

con $D = 1 - \frac{1}{E}$. Ora, abbiamo $\Delta\tau = \Delta t_{astronauta}$ perché il tempo proprio è calcolato sulla sua worldline. Questo integrale si può fare con un cambio di variabili. Ciò che è importante è che il risultato dà:

$$\Delta\tau : \text{ finito.} \quad (8.1.53)$$

Si noti ancora che all'esterno dell'orizzonte degli eventi il campo gravitazionale o la metrica non è diversa dalla metrica che abbiamo al di fuori del Sole o al di fuori della Terra, ha esattamente la stessa espressione. È chiaro che più siamo distanti dall'orizzonte degli eventi, quindi per $r \gg r_S$, più il termine $2GM/r$ in $B(r)$ diventa piccolo, e quindi andiamo nel limite newtoniano, ritrovando esattamente i moti che conosciamo. Se ci avviciniamo a sufficienza all'orizzonte degli eventi tale termine non è più necessariamente piccolo e di conseguenza il campo gravitazionale può anche diventare importante. La teoria però lo descrive perfettamente, in quanto teoria completa. Quando $2GM/r$ è grande, la curvatura dello spazio-tempo è grande e vi saranno delle forze di marea più intense nella direzione verso il buco nero, ovvero dei forti gradienti di variazione dello spazio-tempo. Cadendo verso il buco nero veniamo quindi stiracchiati nella direzione radiale, perché risentiamo di un'attrazione gravitazionale sui piedi molto più grande di quella che abbiamo sulla testa. Questa è quella che viene chiamata **spaghettification**.

Vediamo cosa accade per $r < r_S$. Quando $r < r_S$ abbiamo detto che il cono luce è come si ribaltasse. Per le traiettorie luce abbiamo visto che:

$$t = \pm \left[r + r_S \ln \left(\frac{r_S - r}{r_S} \right) \right] + k'_\pm \quad (8.1.54)$$

per cui:

$$r \longrightarrow r_S^- : \quad t \sim \pm r_S \ln \left(\frac{r_S - r}{r_S} \right). \quad (8.1.55)$$

Possiamo rappresentare le wordline come in figura 8.6. Ricordando quelle che abbiamo ottenuto nel caso precedente, possiamo già intuire quale delle due sia l'ingoing e quale l'outgoing. Possiamo mostrarlo anche in modo più formale.

Consideriamo una traiettoria ingoing; parliamo di fuori intendendo $r > r_S$ e dentro $r < r_S$. Abbiamo visto che:

$$\text{fuori : } \frac{dr}{dt} = -B(r) \quad (8.1.56)$$

$$\text{dentro : } \frac{dr}{dt} = -B(r) \quad (8.1.57)$$

nel primo caso è relativamente semplice: dt è positivo (andiamo verso il futuro), $B(r)$ è positivo, dr è negativo (ingoing), quindi abbiamo una quantità negativa a destra e una a sinistra.

Dentro invece $B(r)$ è negativo e dr negativo (ingoing), è necessario che allora dt sia anch'esso negativo; questo significa che la continuazione analitica della traiettoria ingoing sia quella riportata in figura 8.6.

Esternamente non vediamo cosa succede dentro, di conseguenza non abbiamo nessuna informazione. Abbiamo anche detto però che è come se spazio

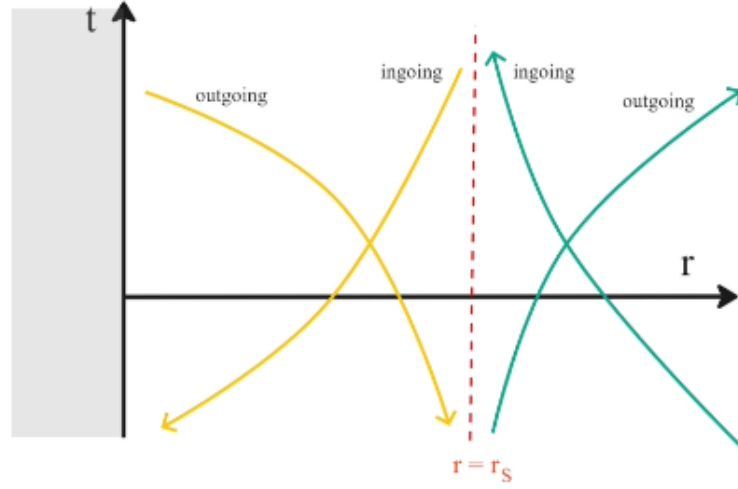


Figura 8.6

e tempo si scambiassero i ruoli, di conseguenza possiamo interpretare $dt < 0$, come futuro. La struttura causale però ci impedisce di avere un modo per uscirne fuori.

Abbiamo poi anche la soluzione outgoing:

$$\text{fuori : } \frac{dr}{dt} = +B(r) \quad (8.1.58)$$

$$\text{dentro : } \frac{dr}{dt} = +B(r). \quad (8.1.59)$$

Fuori: dt è positivo (vado verso il futuro), $B(r)$ è positivo, dr è positivo (outgoing), ho quindi una quantità positiva a destra e una a sinistra.

Dentro: $B(r)$ è negativo, dr è positivo (outgoing). Per far sì di avere i segni giusti dobbiamo richiedere dt negativo. Per un punto su questa traiettoria, il cono luce è ribaltato, ma il futuro causale è posto a destra, l'oggetto cioè è destinato a uscire. Questa situazione in cui un oggetto da dentro il buco nero è obbligato a uscire è quello che si chiama il **buco bianco**.

Possiamo notare la simmetria, ma anche la differenza tra le due situazioni guardando la figura 8.7.

Un oggetto diretto verso il buco nero è obbligato ad entrare e il suo destino finale è quello di cadere sulla singolarità. Noi, osservatore distante, non vedremo mai niente attraversare l'orizzonte, perché ciò per noi avverrà a un tempo $t = +\infty$.

La situazione di buco bianco, che matematicamente è la soluzione complementare a quella di buco nero, è una situazione in cui l'oggetto è destinato ad uscire fuori dal buco nero. Per l'osservatore distante, stazionario rispetto al buco nero, tale fotone arriva da un tempo $t = -\infty$.

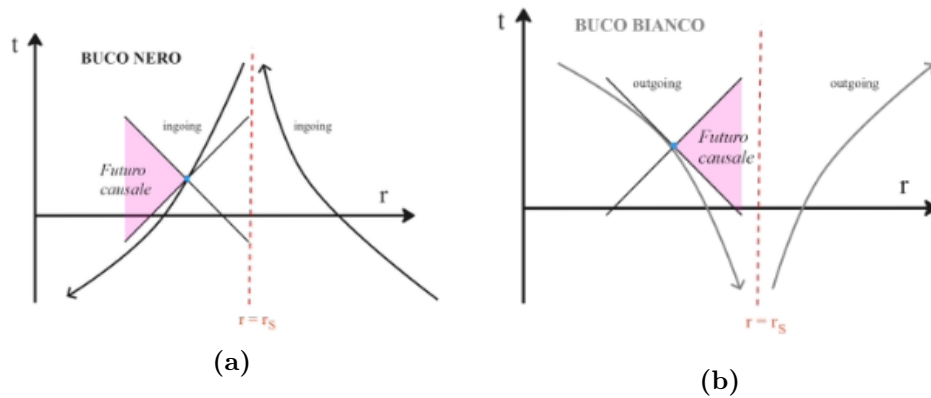


Figura 8.7

Mentre la situazione di buco nero ha una sua possibile plausibilità di essere una soluzione fisica di un sistema, possiamo chiederci se fisicamente anche una situazione di buco bianco si possa veramente realizzare in natura. Il punto è che ammettendone la plausibilità fisica il buco nero dovrebbe essere lì da sempre, qualunque cosa voglia dire, cosicché io abbia un tempo $t = -\infty$ dal quale la radiazione possa arrivare. Ciò però non è molto compatibile con il processo di formazione di un buco nero in un universo in espansione. Infatti, in tal caso ci aspetteremmo che esso sia generato dal collasso gravitazionale di una stella, ci aspetteremmo cioè di avere una distribuzione di massa iniziale il cui raggio di Schwarzschild sia interno - e che quindi non abbia nessun effetto - che, per collasso gravitazionale, collassa concentrandosi all'interno di r_S . La materia che è caduta entro il raggio di Schwarzschild ha il destino segnato: non può che cadere sulla singolarità. Cosa poi avvenga alla singolarità non lo possiamo dire, perché la singolarità è una situazione in cui c'è una curvatura infinita. Tra l'altro non sappiamo nemmeno se la gravità valga ancora su scale di distanze così piccole.

Quindi, il concetto di buco bianco è una soluzione matematica delle equazioni di Einstein, ma non possiamo affermare con certezza che si realizzi in natura. Anche il buco nero è stato per molti anni una soluzione matematica di cui non si sapeva se ci fosse una realizzazione in natura. Oggi però sappiamo che i buchi neri esistono ed in particolare sono molto probabilmente presenti al centro di quasi tutte le galassie.

Ricapitolando Per la metrica statica e isotropa, la superficie $r = r_S = 2GM$ è regolare, non è una singolarità, ma rappresenta però un punto di non ritorno chiamato orizzonte degli eventi. È impossibile per un osservatore esterno vedere dentro l'orizzonte degli eventi. Chiamiamo quindi buco nero una regione dello spazio-tempo separata dal punto all'infinito da un orizzonte

degli eventi. La geometria dello spaziotempo esterna $r > r_S$ al buco nero è esattamente la stessa che si ha esternamente a una stella o un pianeta. La peculiarità dell'ODE è legata alla struttura causale dello spazio tempo e implica che non sia possibile inviare segnali causali al di fuori dell'orizzonte degli eventi.

Potremmo domandarci cosa succeda a un buco nero di Schwarzschild se viene perturbato. È stato dimostrato che la soluzione di Schwarzschild è *stabile* per effetto di piccole perturbazioni. La dimostrazione è stata fatta da *Regge e Wheeler*.

8.1.2 Formazione di un buco nero

Un modo per formare un buco nero è per *collasso gravitazionale*. Una stella è tenuta in equilibrio da due forze contrastanti: la gravità della materia della stella stessa, che cerca di farla collassare gravitazionalmente, e dalla pressione della radiazione dovuta ai fotoni che vengono prodotti nelle reazioni termonucleari all'interno della stella. Tale equilibrio perdura fin tanto che il bruciamento prima dell'idrogeno poi dell'elio e degli elementi successivi procede. Al termine del bruciamento, se c'è sufficiente massa, questa collassa, formando o una *stella di neutroni*, materia estremamente densa² tenuta in equilibrio della pressione degeneri dei neutroni dentro la stella, oppure collassa in un buco nero.

Vi sono poi buchi neri molto più massicci, come quelli al centro delle galassie, che possono essere dovuti invece per esempio da fenomeni di accrescimento successivo e che possono arrivare ad essere anche $10^{10} M_\odot$, si parla in questi casi di **buchi neri supermassivi**.

8.2 Orbite e loro stabilità

Abbiamo visto le proprietà della metrica statica ed isotropa, discutendo soltanto la situazione di moti puramente radiali. Questa metrica ha un orizzonte degli eventi posizionato al raggio di Schwarzschild. Adesso, però, vorremmo reintrodurre anche la coordinata angolare, per studiare nella stessa metrica traiettorie più generali. Riprendiamo le equazioni delle geodetiche per la metrica di Schwarzschild che avevamo riscritto utilizzando l'integrale primo del moto. Le due equazioni che descrivono l'orbita sono:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dp} = J \quad (\text{cost}) \quad (8.2.1)$$

$$B(r) \frac{dt}{dp} = k \quad (\text{cost}) \quad (8.2.2)$$

²Un cucchiaino di una stella di neutroni pesa come l'intera popolazione umana, ma è concentrata in una dimensione estremamente più piccola.

scritte utilizzando p come parametro affine. La scelta che avevamo fatto per descrivere le orbite, la deflessione della luce e la precessione del perielio, era quella di porre $k = 1$. Così facendo si ottiene l'ultima equazione e una condizione su $d\tau^2$:

$$A(r) \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = E \quad (\text{cost}) \quad (8.2.3)$$

$$d\tau^2 = E dp^2. \quad (8.2.4)$$

La condizione su $d\tau^2$ dice anche che $E = 0$ corrisponde al moto di una test particle di massa nulla. Le particelle massive si muovono con condizione che $E > 0$.

Facciamo ora una scelta diversa. Poniamo:

$$d\tau^2 = \varepsilon dp^2 \quad (8.2.5)$$

dove poniamo $\varepsilon = 0$ per particelle di massa nulla, e $\varepsilon = 1$ nel caso in cui le particelle siano massive. Questo ci dice anche che, nel caso di particelle di massa nulla, tempo proprio e parametro affine sono la stessa cosa (a meno di una costante, che però è del tutto irrilevante in quanto la definizione del $d\tau^2$ è differenziale).

Otteniamo la terza equazione del moto (radiale) in un altro modo. Scriviamo il $d\tau^2$ per la metrica statica e isotropa:

$$d\tau^2 = B(r) dt^2 - A(r) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (8.2.6)$$

siccome il moto avviene nel piano $\theta = \pi/2$:

$$d\tau^2 = \left[B(r) \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 - A(r) \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 \right] dp^2 \quad (8.2.7)$$

$$\frac{d\tau^2}{dp^2} = B(r) \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 - A(r) \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 = \varepsilon \quad (8.2.8)$$

l'ultima uguaglianza segue dalla richiesta (8.2.5). Sfruttiamo le altre due equazioni del moto e sostituiamo:

$$\varepsilon = B(r) \left(\frac{k}{B(r)} \right)^2 - A(r) \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - r^2 \left(\frac{J}{r^2} \right)^2 \quad (8.2.9)$$

semplificando:

$$A(r) \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{k^2}{B(r)} = -\varepsilon \quad (8.2.10)$$

essa è sempre la stessa equazione del moto che ci permette di ottenere $r = r(p)$, solo con costanti del moto diverse. Confrontando rispetto a prima abbiamo:

Prima	Adesso
$[\text{Eq}] = -E$	$[\text{Eq}] = -\varepsilon$
$d\tau^2 = E dp^2$	$d\tau^2 = \varepsilon dp^2$
$E = 0, m = 0$	$\varepsilon = 0, m = 0$
$E > 0, m \neq 0$	$\varepsilon = 1, m \neq 0$

Moltiplichiamo ora per $B(r)$, ricordandoci che $A(r)B(r) = 1$, e avremo:

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + B(r) \frac{J^2}{r^2} - k^2 = -\varepsilon B(r) \quad (8.2.11)$$

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + B(r) \left[\frac{J^2}{r^2} + \varepsilon \right] = k^2 \quad (8.2.12)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + B(r) \left[\frac{J^2}{2r^2} + \frac{\varepsilon}{2} \right] = \frac{1}{2} k^2 = E_T \quad (8.2.13)$$

l'equazione che abbiamo ottenuto ha un primo termine a sinistra che ha l'aspetto di un'energia cinetica per l'unità di massa. Il secondo allora, sarà un termine potenziale $V(r)$. Il tutto è uguale a una costante, che è una costante del moto e che in questa equazione può rappresentare di fatto l'energia della particella. Riscriviamo:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + V(r) = E_T \quad (8.2.14)$$

in cui:

$$V(r) = B(r) \left[\frac{J^2}{2r^2} - \frac{\varepsilon}{2} \right] \quad (8.2.15)$$

$$= \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left[\frac{J^2}{2r^2} + \frac{\varepsilon}{2} \right] \quad (8.2.16)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon - \varepsilon \frac{GM}{r} + \frac{J^2}{2r^2} - \frac{GMJ^2}{r^3} \quad (8.2.17)$$

che possiamo leggere come **potenziale effettivo** (per unità di massa). Il moto della test particle è come se avvenisse in un potenziale effettivo e l'equazione del moto è data dalla condizione:

$$T + V = E_T \quad (8.2.18)$$

vediamo quindi che possiamo descrivere il moto come un moto conservativo, cioè che avviene in modo da mantenere costante la quantità E_T . Il potenziale effettivo è fatto da quattro termini, che vogliamo ora interpretare:

- (0) Il termine $\frac{1}{2} \varepsilon$ è semplicemente una costante, rappresenta solo una normalizzazione del potenziale.

- (1) Il termine $\frac{GM}{r} \varepsilon \propto \frac{1}{r}$ è il *termine newtoniano*.
- (2) Il termine $\frac{J^2}{2r^2} \propto \frac{1}{r^2}$ è il *termine centrifugo*, dovuto al momento angolare.
- (3) Il termine $\frac{GMJ^2}{r^3} \propto \frac{1}{r^3}$ è un termine di pura Relatività Generale, che non avremmo ottenuto nella teoria newtoniana, a differenza dei termini (1) e (2). Questo è il termine che produce gli effetti aggiuntivi rispetto alla predizione dei moti dal punto di vista kepleriano.

Si noti anche che questa espressione non è uno sviluppo, ma un'espressione esatta.

Nota. Nel caso in cui abbiamo un moto puramente radiale, rispetto al corpo di massa M che genera il campo gravitazionale, possiamo solamente cadere o allontanarci dal corpo. In entrambi i casi il momento angolare è esattamente pari a 0, $J = 0$. Il termine (2) non c'è, né in teoria relativistica né in teoria newtoniana. Se prendiamo invece un'orbita non radiale, ad esempio un'orbita aperta, caratterizzata da una distanza di minimo avvicinamento r_* e da un parametro di impatto b . In tal caso $J = bv \neq 0$. Il termine (2) ci sarà sia in teoria newtoniana che in teoria relativistica.

Il potenziale $V(r)$ lo possiamo allora specificare per oggetti con massa nulla e con oggetti con massa diversa da 0. Abbiamo:

$$m = 0 : \quad V(r) = \frac{J^2}{2r^2} - \frac{GMJ^2}{r^3} \quad (8.2.19)$$

$$m \neq 0 : \quad V(r) = \frac{1}{2} - \frac{GM}{r^2} + \frac{J^2}{2r^2} - \frac{GMJ^2}{r^3}. \quad (8.2.20)$$

Possiamo adesso studiare le proprietà del moto della test particle dotata di energia per l'unità di massa E_T , e possiamo fare i grafici del potenziale per capire come sono le orbite. Si noti che stiamo facendo tutta la discussione usando il potenziale, ma è implicito che stiamo studiando sia moti radiali che moti non radiali. Avremo:

$E_T > V :$		moto classicamente permesso
$E_T = V :$	$r = r_*$	punti di inversione del moto
$\left. \frac{dV}{dr} \right _{r_C} = 0 :$	$r = r_C$	non abbiamo forza in direzione radiale, orbita circolare

se $r = r_C$ corrisponde a un massimo del potenziale, l'orbita è instabile, se $r = r_C$ corrisponde a un minimo del potenziale, l'orbita è stabile. Facciamo un esempio grafico in figura 8.8.

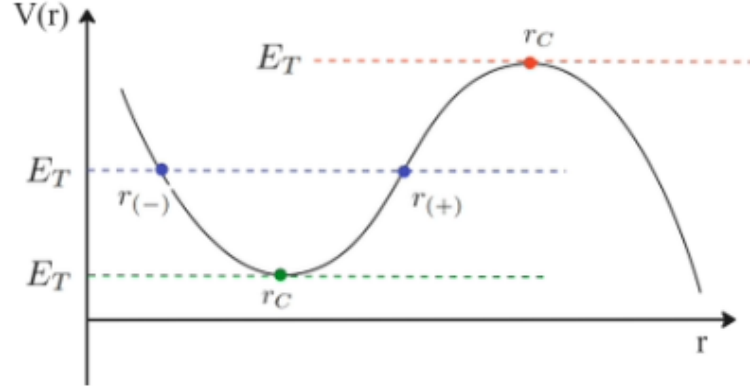


Figura 8.8

- (Blu) In questo caso, il moto avviene tra distanze r , comprese tra $r(-)$ ed $r(+)$, che rappresentano che punti di inversione del moto: questo è il caso di un'orbita ellittica.
- (Rosso) In questa situazione, abbiamo un'orbita circolare, perché l'energia è uguale al potenziale. Tale orbita risulta però instabile: basta una piccola perturbazione al sistema che lui tende o a cadere al di qua o al di là lungo il potenziale, allontanandosi di conseguenza da quest'orbita.
- (Verde) Orbita circolare stabile. Sotto piccole perturbazioni che tendono ad allontanarci da un lato o dall'altro, il potenziale ci riporta sull'orbita originale.

Discutiamo allora tutti i casi possibili. Per vedere la differenza portata alle orbite dalla presenza dei termini aggiuntivi di Relatività Generale, possiamo studiare il caso solo newtoniano e il caso in cui compare il termine aggiuntivo. Dopodiché possiamo farlo sia per test particle di massa nulla che per test particle di massa diversa da zero.

Caso 1: termini newtoniani, test particle $m = 0$ ($\varepsilon = 0$) In questo caso:

$$V(r) = \frac{J^2}{2r^2} \quad (8.2.21)$$

Possiamo fare riferimento alle figure 8.9a e 8.9b. Possiamo avere varie curve a seconda del valore della costante del moto J . Per $J = 0$, il potenziale $V(r) = 0$. Scelta una curva e data E_T , abbiamo un punto in cui $E_T = V(r)$: tale punto corrisponde al punto di massimo avvicinamento. Infatti partendo da grandi r , r può diminuire ma non può scendere sotto il valore r_* , che porterebbe a una condizione non fisica ($V(r) > E_T$). Il moto può solo avvenire tra r_* e $r = +\infty$, quindi è un'orbita aperta.

Se $J = 0$ possiamo avvicinarci anche fino ad $r = 0$, questo porta il fotone a cadere sul corpo di massa M seguendo un'orbita radiale. In questo caso non ci interessa neanche sapere se l'orizzonte degli eventi è esterno o interno al corpo.

Se $J \neq 0$, il fotone procede dritto si avvicina al corpo, raggiungendo una distanza di minimo avvicinamento, dato dalla condizione $E_T = V(r)$ per poi allontanarsi. Tale caso è presente anche in meccanica newtoniana: per Newton quando $m = 0$ non c'è l'effetto della gravità.

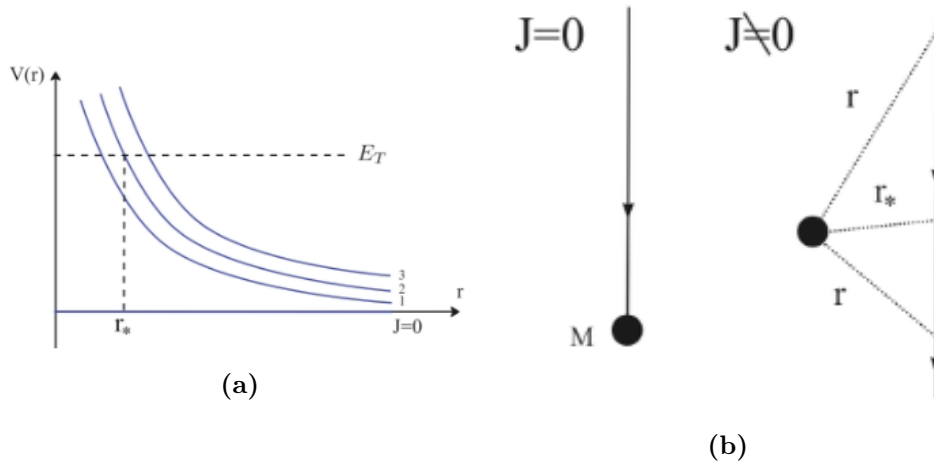


Figura 8.9

Caso 2: termini newtoniani, test particle $m \neq 0$ ($\varepsilon = 0$) Abbiamo:

$$V(r) = \frac{1}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{J^2}{2r^2} \quad (8.2.22)$$

notiamo, dalla figura 8.10, che il potenziale newtoniano ha segno opposto da quello centrifugo.

Se $J = 0$ abbiamo solo il termine newtoniano, negativo, che va come $1/r$ (rosso). Se invece $J \neq 0$ abbiamo due termini e l'andamento è come quello riportato in blu. Possiamo calcolarci i punti in cui:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \quad (8.2.23)$$

che sono i punti in cui la forza effettiva nella direzione radiale $F_r = 0$ e che danno un'orbita circolare. Infatti:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{GM}{r^2} - \frac{J^2}{r^3} = 0 \quad (8.2.24)$$

$$GM - \frac{J^2}{r} = 0 \quad \longrightarrow \quad r_C = \frac{J^2}{GM} \quad (8.2.25)$$

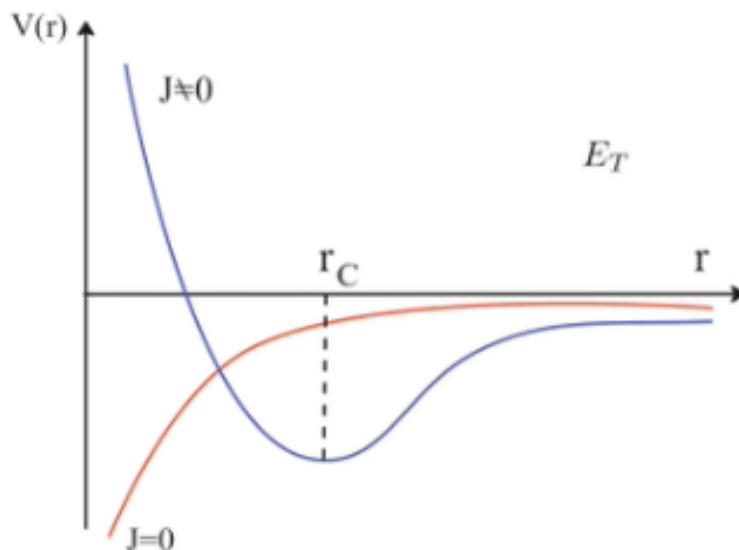


Figura 8.10

in cui $r = r_C$ è un punto di minimo del potenziale, dunque un'orbita circolare con $r = r_C$ è un'orbita stabile. Studiamoci i diversi casi.

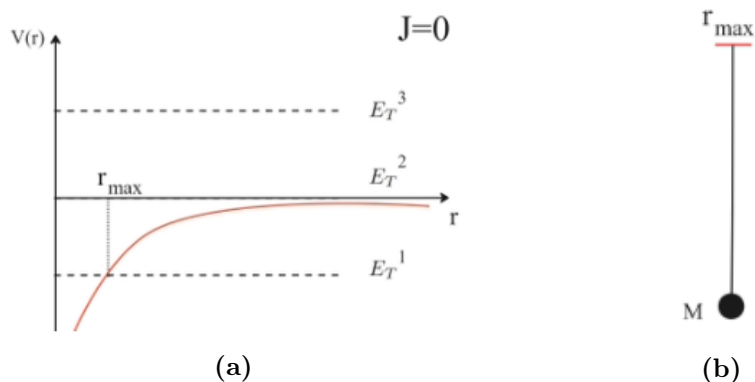


Figura 8.11

In riferimento alla figura 8.11a, consideriamo il caso $J = 0$, consideriamo cioè un moto radiale. Per E_T^1 l'energia è minore del potenziale, questo ci porta ad individuare un r_{max} : il corpo può salire radialmente fino a r_{max} e poi ricadere, oppure partire da fermo da r_{max} e cadere. In questa situazione un corpo massivo non può più allontanarsi, fino a distanza infinita!

Per E_T^2 il corpo può allontanarsi radialmente all'infinito, oppure può arrivare da infinito con energia cinetica $T = 0$.

Per E_T^3 , a maggior ragione, il corpo può allontanarsi all'infinito e ci arriva con $T \neq 0$ perché ha molta più energia del potenziale in qualunque condizione.

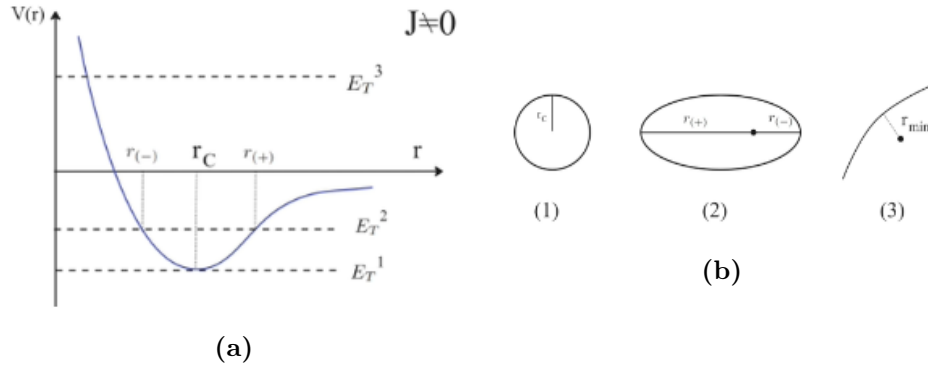


Figura 8.12

In riferimento alla figura 8.12a, considerando il caso $J \neq 0$, abbiamo dei veri e propri moti orbitali. Possiamo avere condizioni di energia di vario tipo. Il E_T^1 corrisponde alla situazione in cui l'energia del sistema permette di avere un'orbita circolare stabile, con raggio $r = r_C$.

Nel caso E_T^2 il moto è permesso tra r_- e r_+ . Questo è il caso di un'orbita ellittica (vedi figura 8.12b).

Nel caso E_T^3 , si ha un'orbita aperta. Indichiamo con r_{min} la distanza di minimo avvicinamento. Dalla forma del potenziale, notiamo che potenziali con momento angolare diverso, quindi con un diverso parametro d'impatto, determinano un diverso raggio dell'orbita circolare. Nel caso newtoniano, quindi, le orbite sono sezioni di cono. Ciò vuol dire che le orbite chiuse sono cerchi oppure delle ellissi. Nel caso di orbite aperte, queste orbite sono o parabole o iperbole. In Relatività Generale non sarà esattamente così, perché abbiamo un termine in più, ossia:

$$-\frac{GMJ^2}{r^3}.$$

Caso 3: Relatività Generale, test particle $m = 0$ Consideriamo il caso della propagazione dei fotoni. Il potenziale è:

$$V(r) = \frac{J^2}{2r^2} - \frac{GMJ^2}{r^3} \quad (8.2.26)$$

i due termini hanno segno opposto. Quando $r \rightarrow \infty$, domina il termine di meccanica newtoniana, mentre per $r \rightarrow 0$ vince il termine di RG. Inoltre quando $r \rightarrow 0$, $V(r) \rightarrow \infty$. Dalla forma del potenziale, possiamo calcolarci alcuni limiti in modo tale da poi disegnare il grafico. Lo zero del potenziale

si ha per:

$$\frac{J^2}{2r^2} - \frac{GMJ^2}{r^3} = 0 \quad \longrightarrow \quad r = r_S = 2GM. \quad (8.2.27)$$

Il potenziale va a zero al raggio di Schwarzschild. Quindi se il raggio di Schwarzschild, che è anche l'orizzonte degli eventi della metrica in questione, è interno al corpo questa condizione non si ha mai e abbiamo semplicemente le situazioni dei moti orbitali normali. Se invece abbiamo un buco nero allora abbiamo un valore $r = r_S$ in cui il potenziale si annulla e per valori minori, risulta negativo e tende a meno infinito.

I punti stazionari del potenziale sono dati da:

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{J^2}{r^3} + \frac{3GMJ^2}{r^4} = 0 \quad \longrightarrow \quad r_C = 3GM \quad (8.2.28)$$

abbiamo un raggio in cui $\frac{dV}{dr} = 0$: possiamo avere un'orbita circolare per i fotoni. Completando lo studio di funzioni, possiamo vedere che la forma del potenziale è fatta come riportato in figura 8.13.

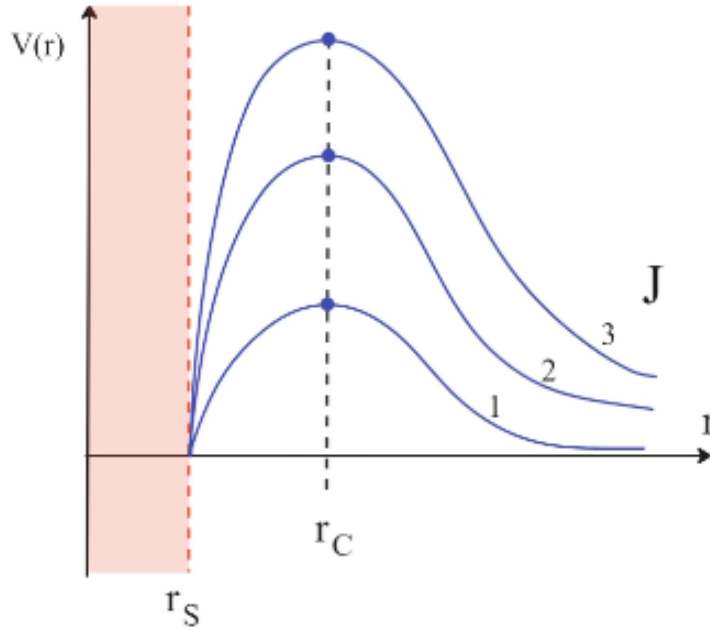


Figura 8.13

Si noti che la soluzione che dà l'orbita circolare non dipende dal valore di J , quindi è sempre la stessa. L'orbita circolare è instabile, in quanto una piccola perturbazione ci costringe o ad allontanarci all'infinito o a cadere dentro il buco nero. Possiamo dunque avere un'orbita circolare esterna all'orizzonte degli eventi, che però risulta instabile. Discutiamo i diversi casi e facciamo riferimento alla figura 8.14a.

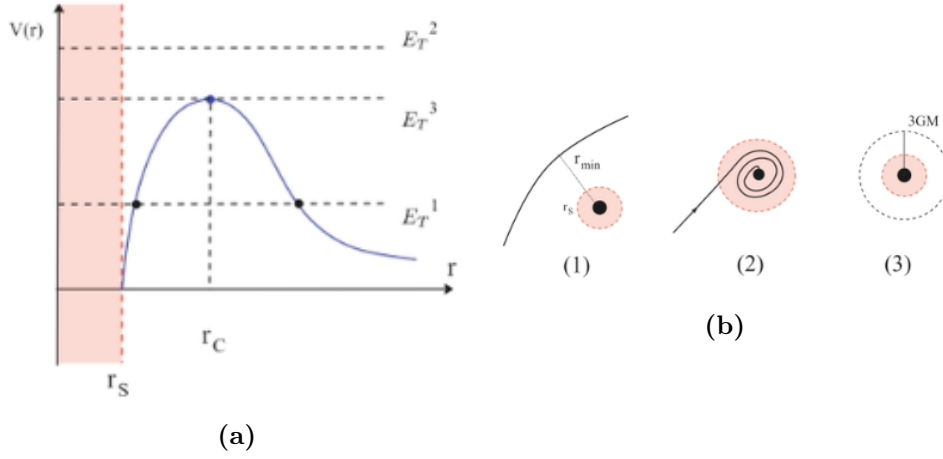


Figura 8.14

Per la condizione d'energia E_T^1 , possiamo avere un fotone che arriva da $r = +\infty$, arriva ad una distanza di minimo avvicinamento maggiore del raggio di Schwarzschild e quindi dell'orizzonte degli eventi. Questo caso rappresenta ad esempio la classica orbita di deflessione della luce.

Quando siamo invece nella E_T^2 , il fotone che arriva da grandi distanze ha una condizione energetica tale per cui può tranquillamente continuare, arrivare a valori uguali al raggio di Schwarzschild e anche inferiori. In questo caso la barriera di potenziale centrifuga, che è il motivo della forma di $V(r)$, non è sufficiente a far riallontanare il fotone all'infinito, il quale cadrà quindi dentro il buco nero.

Se invece siamo nella condizione E_T^3 , abbiamo la possibilità di avere delle orbite circolari instabili attorno al buco nero ad un raggio che è uguale a $r_C = 3GM$.

Caso 4: Relatività Generale, test particle $m \neq 0$ Abbiamo:

$$V(r) = \frac{1}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{J^2}{2r^2} - \frac{GMJ^2}{r^3} \quad (8.2.29)$$

calcoliamo dove il potenziale va a zero:

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{J^2}{2r^2} - \frac{GMJ^2}{r^3} \quad (8.2.30)$$

$$= 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{J^2}{r^2} - \frac{2GMJ^2}{r^3} \quad (8.2.31)$$

possiamo riconoscere che $r_S = 2GM$:

$$0 = 1 - \frac{r_S}{r} + \left(\frac{r_S}{r}\right)^2 \frac{J^2}{r_S^2} - \frac{r_S^3}{r^3} \frac{J^2}{r_S^2} \quad (8.2.32)$$

definiamo $x = r_S/r$ e scriviamo:

$$0 = 1 - x + ax^2 - ax^3 \quad (8.2.33)$$

$$= 1 - x + ax^2(1 - x) \quad (8.2.34)$$

$$= (1 - x)(1 + ax^2) \quad (8.2.35)$$

abbiamo soluzioni:

$$1 + ax^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \pm \frac{i}{\sqrt{a}} \quad \text{non fisiche} \quad (8.2.36)$$

$$1 - x = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 1 \quad \text{cioè } r = r_S \quad (8.2.37)$$

possiamo rappresentare la forma del potenziale come quello in figura 8.15.

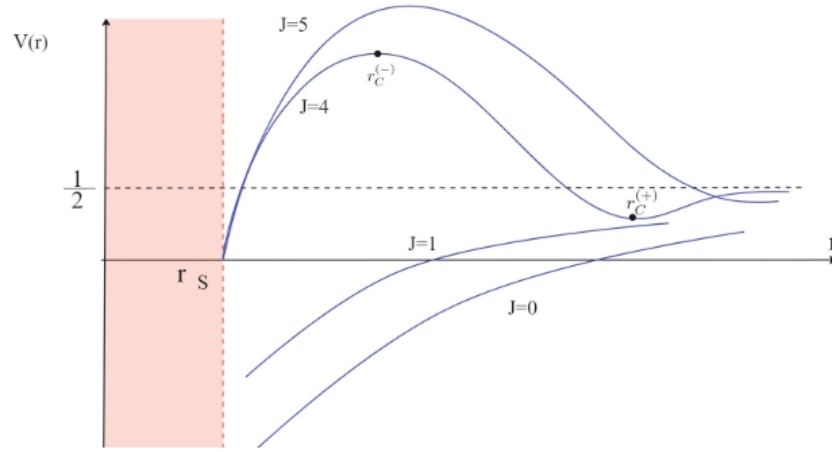


Figura 8.15

Calcoliamo quali siano le condizioni di orbite circolari:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{GM}{r^2} - \frac{J^2}{r^3} + \frac{3GMJ^2}{r^4} = 0 \quad (8.2.38)$$

$$(GM) r^2 - J^2 r + 3GMJ^2 = 0 \quad (8.2.39)$$

così troviamo:

$$r_C = \frac{J^2 \pm \sqrt{J^4 - 12G^2M^2J^2}}{2GM} \quad (8.2.40)$$

con il limite:

$$\lim_{J \rightarrow \infty} r_C = \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{J^2 \pm J^2 \left(1 - 6 \frac{G^2M^2}{J^2}\right)}{2GM} \quad (8.2.41)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} r_C^{(+)} = \frac{J^2 + J^2 - 6G^2M^2}{2GM} \sim \frac{J^2}{GM} \\ r_C^{(-)} = \frac{6G^2M^2}{2GM} \sim 3GM. \end{cases} \quad (8.2.42)$$

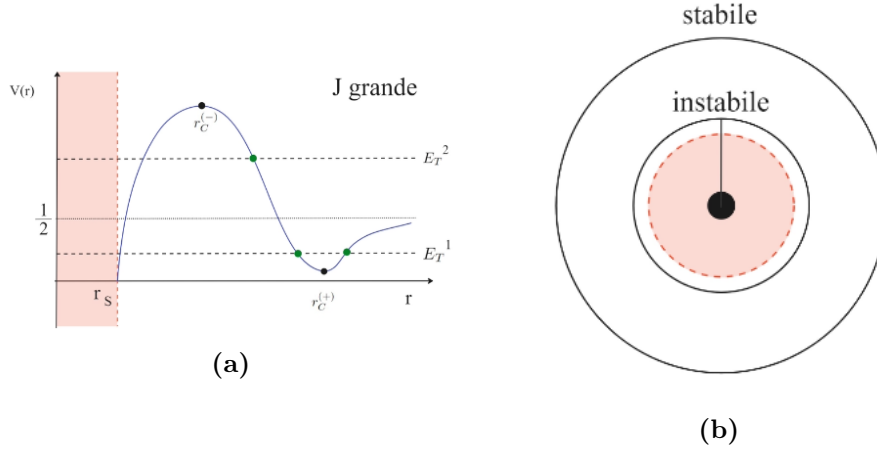


Figura 8.16

Dalla figura 8.16a vediamo che $r_C^{(-)}$ è un'orbita circolare instabile, mentre $r_C^{(+)}$ è un'orbita circolare stabile, perché è un punto di minimo.

Si noti che l'orbita stabile tanto più è grande J , tanto è più simile alle orbite newtoniane. Inoltre, osserviamo che esiste un valore di J per cui l'argomento della radice quadrata si annulla e le due orbite coincidono in una sola orbita. Questo avviene per:

$$J^2 - 12 G^2 M^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad J = \sqrt{12} GM \quad (8.2.43)$$

a cui corrisponde:

$$r_C = 6 GM \quad (8.2.44)$$

tale orbita viene chiamata **inner most stable circular orbit** (ISCO).

Se J diminuisce ancora non ci sono più orbite circolari, ma ci saranno soltanto delle orbite che possono cadere sul buco nero.

Per concludere il ragionamento, si noti ancora che si possono avere condizioni di energia E_T^1 e E_T^2 per cui si hanno rispettivamente delle orbite ellittiche e un'orbita aperta.

8.3 Buchi neri

Abbiamo visto quindi come tra le soluzioni dell'equazione di Einstein esistono delle soluzioni che hanno delle caratteristiche particolari, come quella per esempio di avere un orizzonte degli eventi. Questo ci ha portato al concetto di buco nero, che abbiamo discusso ampiamente. Completiamo la discussione. Finora abbiamo trattato un caso particolare, quello più semplice, ovvero il buco nero statico ed isotropo. Data una metrica statica e isotropa, se tutta la massa è contenuta all'interno del suo orizzonte degli eventi, il quale

ha raggio uguale a $r_S = 2GM$ (raggio di Schwarzschild), allora abbiamo le soluzioni nella forma della soluzione di Schwarzschild.

Un buco nero potrebbe avere però altre proprietà, ad esempio potremmo avere un BH isotropo e rotante. Una distribuzione di massa in rotazione genera una metrica nota come **metrica di Kerr**, che continua ad avere una singolarità, ma è caratterizzata da due orizzonti.

Un'altra possibilità che possiamo associare ai buchi neri è quella di avere anche una carica elettrica. Si noti che nel primo caso staticità ed isotropia, l'unico parametro che descrive il buco nero è la massa M , nel secondo caso sono la massa M e il suo momento angolare J ; nel terzo caso M e Q . In quest'ultimo caso la metrica è ancora diversa e si chiama **metrica di Reissner-Nordström**.

Dopodiché il buco nero potrebbe essere isotropo, dotato di carica elettrica e anche rotante. In questo caso abbiamo M , Q , J e ha una metrica ancora diversa che è la **metrica di Kerr-Newman**.

Dal punto di vista astrofisico questi oggetti esistono? Sì, sappiamo che esistono e hanno vari meccanismi di formazione.

Sicuramente come abbiamo detto un modo per formare i buchi neri è quello per collasso gravitazionale. Questo è tipicamente quello che avviene per i cosiddetti *stellar mass black holes* (few - $10 M_\odot$). Un altro tipo di buchi neri che sappiamo esistere, sono quelli che vengono chiamati *supermassive black holes*, che sono i buchi neri presenti ai centri delle galassie, che possono avere masse dell'ordine $(10^5 - 10^9) M_\odot$. All'interno della nostra galassia, i moti stellari di stelle molto interne hanno condizioni di orbita tali per cui si muovono così velocemente che il campo gravitazionale che le trattiene richiede una massa che, per poter essere concentrata in così poco spazio, non può che essersi concentrata a formare un buco nero. Questo è un dato osservativo. Per i SMBH, l'ipotesi è che si formino per accrescimento.

Ci sono poi altri tipi di buchi neri che sono stati ipotizzati e su cui c'è però più incertezza. Tra questi figurano i cosiddetti *intermediate mass black hole*, con masse dell'ordine $(10^2 - 10^5) M_\odot$. Si pensa che si possano formare o per accrescimento, attraverso la fusione di buchi neri di massa stellare, oppure per accrescimento e fusione di oggetti compatti come stelle di neutroni, oppure ancora per collisione di stelle massive in ambienti molto densi di stelle. Un'altra ipotesi è quella relativa ai buchi neri primordiali, che si sarebbero formati proprio all'inizio della vita dell'universo. Questo è un meccanismo possibile, ipotizzato da Hawking e Carr, per i quali fluttuazioni nella densità della materia dell'universo possono aver creato le condizioni per la formazione di buchi neri. Per questi non c'è un vero range di massa previsto, anzi la possibilità è molto varia. Sui buchi neri primordiali però non ci sono chiaramente evidenze dirette, anche se però gli eventi di onde gra-

vitazionali che sono stati visti hanno riportato un po' in auge questa opzione.

Le evidenze sperimentali che abbiamo oggi giorno dell'esistenza degli buchi neri sono quindi date o dalla dinamica stellare al centro delle galassie, oppure dai nuclei galattici attivi. Infatti si ritiene che la materia del disco di accrescimento attorno al buco nero, cadendo in modo molto violento, dia luogo a processi radiativi che producono getti molto estesi che si vedono nell'universo e che identifichiamo come nuclei galattici attivi.

Da qualche anno c'è un altro modo di vedere l'esistenza di buchi neri, cioè attraverso la produzione di onde gravitazionali prodotte da coalescenza di buchi neri. Due buchi neri che spiraleggiano uno attorno all'altro, coalescono formando un unico buco nero emettendo onde gravitazionali. Sia il buco nero che le onde gravitazionali prodotte dalla loro fusione sono entrambi fenomeni predetti dalla teoria della Relatività Generale.

Per avere anche un po' un'intuizione fisica di ciò che stiamo dicendo e di quanto siano grandi questi buchi neri, possiamo fare qualche studio di ordine di grandezza. Il buco nero è caratterizzato da un parametro fisico che è il raggio di Schwarzschild $r_S = 2GM$. Noi abbiamo già un parametro di riferimento, infatti possiamo considerare il Sole:

$$R_{S,\odot} = 2GM_{\odot} = 3 \text{ km} \quad (8.3.1)$$

se tutta la massa del Sole fosse concentrata dentro un raggio di 3 km avremmo un buco nero di una massa solare. Il raggio della Terra è invece:

$$R_T = 2GM_T = 2 \text{ cm}. \quad (8.3.2)$$

Il buco nero che invece sta al centro della nostra galassia, Sagittarius A^* , ha una massa:

$$M_{Sag,A^*} = 2.6 \cdot 10^6 M_{\odot} \quad , \quad R_S = 2.6 \cdot 10^6 R_{S,\odot} = 6 \cdot 10^6 \text{ km} \quad (8.3.3)$$

quindi i buchi neri non sono necessariamente piccoli. Un buco nero supermassiccio ha una massa molto grande. Ne è stato osservato uno che chiamiamo *Big BH* con una massa di:

$$M_{SMBH} = 2 \cdot 10^{10} M_{\odot} \quad , \quad R_S = 2 \cdot 10^{10} R_{S,\odot} = 6 \cdot 10^{10} \text{ km} = 400 \text{ AU}. \quad (8.3.4)$$

Si noti che l'intera Via Lattea ha una massa di $10^{11} - 10^{12} M_{\odot}$, quindi il Big Black Hole ha circa la massa della nostra galassia! Inoltre, il suo raggio di Schwarzschild è 400 volte la distanza della Terra dal Sole. Per fare un confronto, Plutone, il pianeta più esterno, è circa 40 unità astronomiche dal Sole; l'eliosfera, che è l'estremo punto in cui l'effetto del campo magnetico solare e del vento solare si sente, è circa 100 unità astronomiche; Voyager 1, che è la sonda costruita dall'uomo che è arrivata più distante dalla Terra e quindi

anche dal Sole, a febbraio del 2019, era arrivata a 145 unità astronomiche, circa pari a 19.3 ore luce.

Questo oggetto ha, tra l'altro, una situazione interessante in quanto ha attorno a sé un buco nero più piccolo di $10^8 M_\odot$, ed è quindi binario.

In tale sistema binario è quasi come se il buco nero più piccolo fosse una test particle nel campo gravitazionale del buco nero più grande. Risulta evidente che l'orbita del buco nero più piccolo intorno a quello più grande deve avere un moto di precessione. Ebbene, il buco nero più piccolo in questo sistema binario ha una precessione dell'orbita:

$$\Delta\varphi = 39^\circ \quad \text{per orbita.} \quad (8.3.5)$$

Ogni volta che il buco nero più piccolo ritorna alla posizione iniziale, l'orbita è ruotata di 39 gradi, non di una frazione di arcosecondo come accade per Mercurio attorno al Sole. Questo è uno degli effetti più eclatanti di precessione che siano stati osservati.

8.3.1 Coordinate di Kruscal

Per la metrica statica e isotropa abbiamo derivato la forma della metrica utilizzando le coordinate di Schwarzschild. In questo set di coordinate la metrica è:

$$d\tau^2 = B(r) dt^2 - A(r) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (8.3.6)$$

$$= B(r) dt^2 - A(r) dr^2 \quad (8.3.7)$$

poiché $d\theta = d\varphi = 0$. Inoltre abbiamo:

$$B(r) = A^{-1}(r) = 1 - \frac{2GM}{r}. \quad (8.3.8)$$

Facciamo riferimento alla figura 8.17. Abbiamo visto che in questa descrizione della metrica $r = 0$ è una singolarità essenziale, mentre $r = r_S = 2GM$, è apparentemente una singolarità della metrica nelle coordinate di Schwarzschild, ma che in realtà non è una singolarità vera e propria, bensì una coordinate singularities. È una peculiarità che dà struttura causale allo spazio-tempo. Essa infatti è un orizzonte degli eventi che separa lo spazio-tempo in due regioni, interna ed esterna. Abbiamo anche visto che, usando le coordinate di Schwarzschild, la descrizione dello spazio-tempo nella parte esterna all'orizzonte degli eventi ha un'interpretazione semplice e chiara. Quando invece siamo entrati dentro l'orizzonte degli eventi, l'utilizzo delle coordinate di Schwarzschild non sembra del tutto appropriato, la descrizione comincia a diventare ambigua, infatti abbiamo detto che è come se lo spazio e il tempo si scambiassero ruolo. Noi sappiamo che possiamo fare trasformazioni generali di coordinate. C'è un set di coordinate chiamato **coordinate**

di Kruskal, tale da far sì che l'orizzonte degli eventi non risulti più una singolarità fittizia della metrica. In particolare in questo altro set di coordinate risulta più interpretabile che cosa succeda all'interno dell'orizzonte degli eventi dal punto di vista della descrizione fisica. Il set di coordinate di Schwarzschild coincide con il set di coordinate che possiamo associare a un osservatore stazionario rispetto al campo gravitazionale (posizionato ad r_0), il quale non potrà mai vedere che cosa succede all'interno dell'orizzonte degli eventi.

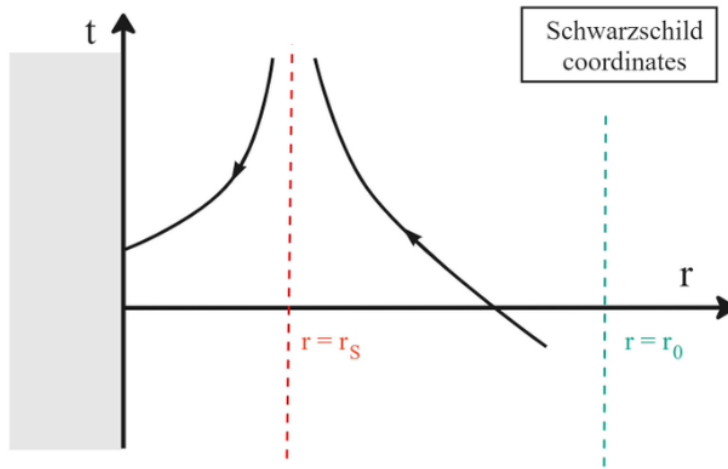


Figura 8.17

Definiamo allora un altro set di coordinate basandoci proprio sulle traiettorie luce. Noi conosciamo nelle coordinate di Schwarzschild (t, r) la worldline dei fotoni:

$$r > r_S : \quad t = \pm \left[r + r_S \ln \left(\frac{r - r_S}{r_S} \right) \right] + k_{\pm} \quad (8.3.9)$$

$$r < r_S : \quad t = \pm \left[r + r_S \ln \left(\frac{r_S - r}{r_S} \right) \right] + k'_{\pm} \quad (8.3.10)$$

in cui "+" sta per la traiettoria outgoing e "-" per le traiettorie ingoing. Cerchiamo di definire una trasformazione di coordinate tale che nelle nuove coordinate le traiettorie luce siano delle rette a 45° .

Questo non vuol dire che stiamo cercando di far diventare piatto lo spaziotempo, ma stiamo semplicemente dicendo che cerchiamo una trasformazione di coordinate che ci faccia passare $(t, r) \rightarrow (T, R)$ tale che le traiettorie luce nelle nuove coordinate (T, R) si abbia una relazione:

$$T = \pm R \quad (8.3.11)$$

poi ci sarà eventualmente una costante additiva, che decide soltanto quale traiettoria luce stiamo prendendo. Per fare questo indichiamo con $\mathbb{A}$ le traiettorie luce al di fuori dell'orizzonte e $\mathbb{B}$ le traiettorie luce all'interno dell'orizzonte e manipoliamo le espressioni ottenute nelle coordinate di Schwarzschild:

A Abbiamo:

$$\text{outgoing :} \quad t = r + r_S \ln \left(\frac{r - r_S}{r_S} \right) + k_+ \quad (8.3.12)$$

$$\text{ingoing :} \quad t = -r - r_S \ln \left(\frac{r - r_S}{r_S} \right) + k_- \quad (8.3.13)$$

da cui:

$$t - r = r_S \ln \left(\frac{r - r_S}{r_S} \right) + k_+ \quad (8.3.14)$$

$$t + r = -r_S \ln \left(\frac{r - r_S}{r_S} \right) + k_- \quad (8.3.15)$$

possiamo dividere per r_S :

$$\frac{t - r}{r_S} = \ln \left(\frac{r - r_S}{r_S} \right) + \bar{k}_+ \implies \ln \left(\frac{r - r_S}{r_S} \right) = -\frac{t - r}{r_S} + \bar{k}_+ \quad (8.3.16)$$

$$\frac{t + r}{r_S} = \ln \left(\frac{r - r_S}{r_S} \right) + \bar{k}_- \implies \ln \left(\frac{r - r_S}{r_S} \right) = \frac{t + r}{r_S} + \bar{k}_- \quad (8.3.17)$$

da cui:

$$\ln \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right) = -\frac{r \pm t}{r_S} + C_{\pm} \quad (8.3.18)$$

$$\left(\frac{r}{r_S} - 1 \right) = \exp \left\{ -\frac{r \pm t}{r_S} \right\} A_{\pm} \quad (8.3.19)$$

abbiamo cioè trovato che per le traiettorie luce al di fuori dell'orizzonte degli eventi:

$$A_{\pm} = \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right) \exp \left\{ \frac{r \pm t}{r_S} \right\}. \quad (8.3.20)$$

B Ripetendo nella regione interna all'ODE, otteniamo:

$$B_{\pm} = \left(1 - \frac{r}{r_S} \right) \exp \left\{ \frac{r \pm t}{r_S} \right\}. \quad (8.3.21)$$

Se usiamo le coordinate di Schwarzschild, le traiettorie luce nello spazio-tempo evolvono in modo tale che esista questa relazione funzionale tra (t, r) tale da essere costante. Una cosa analoga avviene anche nello spazio-tempo di Minkowski, dove le traiettorie luce sono $t = \pm r + \text{cost}$ e quindi:

$$t \mp r = \text{cost.} \quad (8.3.22)$$

Questo ci guida nel modo in cui scrivere la trasformazione di coordinate. Una scelta comoda per far sì che nelle nuove coordinate (T, R) le traiettorie luce siano sempre a 45° è fare la richiesta:

$$r > r_S : \quad R \pm T = (A_\pm)^{1/2} \quad (8.3.23)$$

$$= \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{r \pm t}{2r_S} \right\} \quad (8.3.24)$$

che equivale alle due equazioni:

$$R + T = \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{r + t}{2r_S} \right\} \quad (8.3.25)$$

$$R - T = \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{r - t}{2r_S} \right\} \quad (8.3.26)$$

sommando e sottraendo le due otteniamo T ed R in forma esplicita:

$$R = \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{r}{2r_S} \right\} \cosh \left(\frac{t}{2r_S} \right) \quad (8.3.27)$$

$$T = \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{r}{2r_S} \right\} \sinh \left(\frac{t}{2r_S} \right) \quad (8.3.28)$$

queste espressioni rappresentano la trasformazione di coordinate tra le coordinate di Schwarzschild e le coordinate di Kruskal nella regione fuori dall'orizzonte degli eventi, cioè a $r > r_S$. Analogamente dentro all'ODE, per $r < r_S$:

$$r < r_S : \quad T \pm R = (B_\pm)^{1/2} \quad (8.3.29)$$

e si ottiene:

$$T = \left(1 - \frac{r}{r_S} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{r}{2r_S} \right\} \cosh \left(\frac{t}{2r_S} \right) \quad (8.3.30)$$

$$R = \left(1 - \frac{r}{r_S} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{r}{2r_S} \right\} \sinh \left(\frac{t}{2r_S} \right). \quad (8.3.31)$$

Possiamo ancora fare alcune considerazioni su queste coordinate. La combinazione:

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{r_S} \right) \exp \left\{ \frac{r}{r_S} \right\} \quad (8.3.32)$$

è la stessa sia all'interno che all'esterno dell'orizzonte. Un'altra combinazione indipendente è:

$$r < r_S : \quad \frac{R}{T} = \tanh\left(\frac{t}{2r_S}\right) \quad (8.3.33)$$

$$r > r_S : \quad \frac{T}{R} = \tanh\left(\frac{t}{2r_S}\right). \quad (8.3.34)$$

La differenza che queste combinazioni hanno con la trasformazione esplicita di coordinate $R = R(t, r)$, $T = T(t, r)$ è che la differenza $T^2 - R^2$ dipende solo dalla coordinata r , mentre il rapporto R/T dipende solo dalla coordinata t .

Nel set di coordinate di Kruskal l'espressione del $d\tau^2$ risulta:

$$d\tau^2 = F(T, R) (dt^2 - d^2r) \quad (8.3.35)$$

con:

$$F(T, R) = \frac{32 G^3 M^3}{r} \exp\left\{-\frac{r}{r_S}\right\} \quad (8.3.36)$$

e le traiettorie luce, cioè a $d\tau^2 = 0$, sono del tipo:

$$dT^2 - dR^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad dT = \pm dR \quad (8.3.37)$$

come avevamo richiesto fin dall'inizio. Allo stesso tempo però vediamo che la funzione metrica $F(T, R)$ non è pari a 1, come avremmo nello spazio-tempo piatto, perché appunto non siamo nello spazio-tempo di Minkowski. In particolare la stessa $F(T, R)$ è singolare in $r \rightarrow 0$, ma non è sufficiente affinché sia una singolarità, anche se questa caratteristica permane. Se noi andassimo a calcolare l'opportuno scalare di curvatura $R^{\lambda\mu\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ in $r = 0$, singolarità essenziale nelle coordinate di Schwarzschild, adesso il punto $r = 0$ si trasformerebbe in qualche cosa dato da $F(T, R)$, ma sarà sempre la stessa porzione di spazio-tempo singolare che avevamo prima.

Allo stesso tempo, vediamo esplicitamente come $R = R_S$ non è più nemmeno singolare per le funzioni metriche. Il motivo è che essa non è una singolarità della varietà, ma solo una coordinate singularity per le coordinate di Schwarzschild.

Usiamo la trasformazione di coordinate per vedere dove le varie parti dello spazio-tempo descritte dalle coordinate di Schwarzschild vadano a posizionarsi nel set di coordinate di Kruskal. Facciamo riferimento alla figura 8.18.

- Worldline nulle (*cono luce*):

$$T = \pm R + \text{cost} \quad (8.3.38)$$

in qualunque punto ci mettiamo il cono luce è una retta inclinata di 45° .

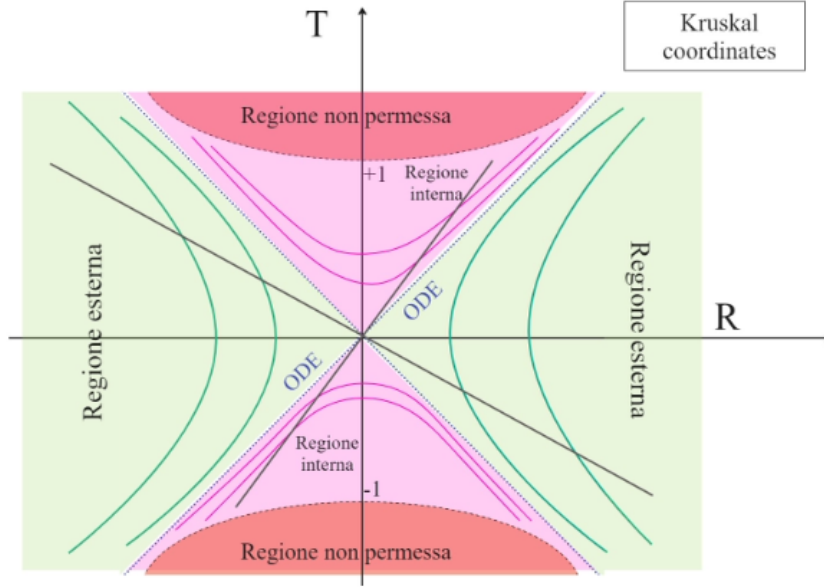


Figura 8.18: Spaziotempo nelle coordinate di Kruskal.

- *Orizzonte degli eventi.* Utilizzando (8.3.32) per $r = r_S = 2GM$ abbiamo:

$$T^2 - R^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad T = \pm R. \quad (8.3.39)$$

L'orizzonte degli eventi nel nuovo set di coordinate è rappresentato da due traiettorie inclinate di 45° . Si noti anche che il cono luce nello spazio-tempo descritto dalle coordinate di Schwarzschild era inclinato di 45° quando eravamo molto distanti dal buco nero dopodiché, avvicinandosi esso si chiude per poi collassare nell'ODE: questo vuol dire che l'orizzonte degli eventi è una traiettoria luce. Ritroviamo questo aspetto anche ora perché rette inclinate di 45° sono traiettorie luce nelle coordinate di Kruskal.

- *Singularità $r = 0$.* La singolarità nella metrica di Schwarzschild è l'intero asse-tempo. Nelle nuove coordinate, se usiamo ancora (8.3.32), abbiamo:

$$T^2 - R^2 = 1 \quad (8.3.40)$$

la singolarità va cioè a finire su due rami di un'iperbole.

- *Regioni permesse.* Richiediamo che in (8.3.32) le due quantità siano reali:

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{r_S}\right) \exp\left\{\frac{r}{r_S}\right\} \quad (8.3.41)$$

valutando i due termini per $r = 0$, $r = r_S$ e per $r \rightarrow \infty$, ci accorgiamo che la quantità $T^2 - R^2 \in (-\infty, +1)$. Questo è possibile se:

$$-\infty < R < +\infty \quad \& \quad T^2 < R^2 - 1 \quad (8.3.42)$$

tutto ciò che nella descrizione alla Schwarzschild era tutto $r > 0$, mentre qui corrisponde alla regione tra le due iperboli.

- Le traiettorie $r = \text{cost}$, che per Schwarzschild rappresentano la posizione stazionaria di un osservatore rispetto al buco nero, vanno in:

$$T^2 - R^2 = \text{cost} \quad (8.3.43)$$

che sono di nuovo delle iperboli. Si collocheranno a destra o a sinistra dell'ODE se $r > r_S$ (esterno all'orizzonte) oppure sopra e sotto se $r < r_S$ (interno all'orizzonte). Abbiamo quindi mappato qual è l'esterno e qual è l'interno dell'orizzonte. Un osservatore che va a $r \rightarrow \infty$ corrisponde a un $R \rightarrow \pm\infty$. Quindi ritroviamo che le zone asintoticamente distanti dal buco nero, che in Schwarzschild erano rappresentate dal posizionarsi lungo r molto lontano, ora sono a $R \rightarrow \pm\infty$.

- Le traiettorie $t = \text{cost}$ corrispondono alle linee di simultaneità per l'osservatore stazionario rispetto al buco nero. La traiettoria in cui si mappa nella nuova descrizione si individua usando (8.3.33) e (8.3.34): saranno delle rette (grigio) con un'inclinazione pari a:

$$r < r_S : \quad T = \tanh\left(\frac{t}{2r_S}\right)^{-1} R = a^{-1} R \quad (8.3.44)$$

$$r > r_S : \quad T = \tanh\left(\frac{t}{2r_S}\right) R = a R \quad (8.3.45)$$

si noti che si vede subito la perdita del concetto di simultaneità anche in questo contesto di spazio-tempo curvo: le traiettorie di simultaneità per Schwarzschild non coincidono con eventi simultanei nel nuovo sistema di coordinate (basta guardare dove vengono mappate le rette $t = \text{cost}$).

Studiando il limite $t = 0$, vediamo:

$$r > r_S : \quad T = 0 \quad (8.3.46)$$

$$r < r_S : \quad R = 0 \quad (8.3.47)$$

il tratto in Schwarzschild $r < r_S$ coincide con l'asse T limitato tra $+1$ e -1 in Kruskal. Contemporaneamente il limite:

$$t \rightarrow +\infty : \quad T = +R \quad (8.3.48)$$

$$t \rightarrow -\infty : \quad T = -R \quad (8.3.49)$$

gli estremi a più e meno infinito dell'asse tempo nelle coordinate di Schwarzschild coincidono nelle coordinate di Kruskal con le bisettrici. Dunque i due rami dell'orizzonte degli eventi disegnato nelle coordinate della metrica di Kruskal coincidono con $t = \pm\infty$ in Schwarzschild. Questo è consistente: se, nelle coordinate di Schwarzschild, consideriamo un fotone che va a finire verso il buco nero, noi, osservatori con coordinate (t, r) lo vedremo entrare a $t = +\infty$; nelle coordinate di Kruskal, un fotone che sta andando verso il buco nero si muove su traiettoria a 45° , arriva all'orizzonte degli eventi e continua dritto. L'osservatore che usa (T, R) vede il fotone che entra nell'orizzonte degli eventi a un certo tempo $T < \infty$, ma se rimappo questo in Schwarzschild il tempo è $t = +\infty$.

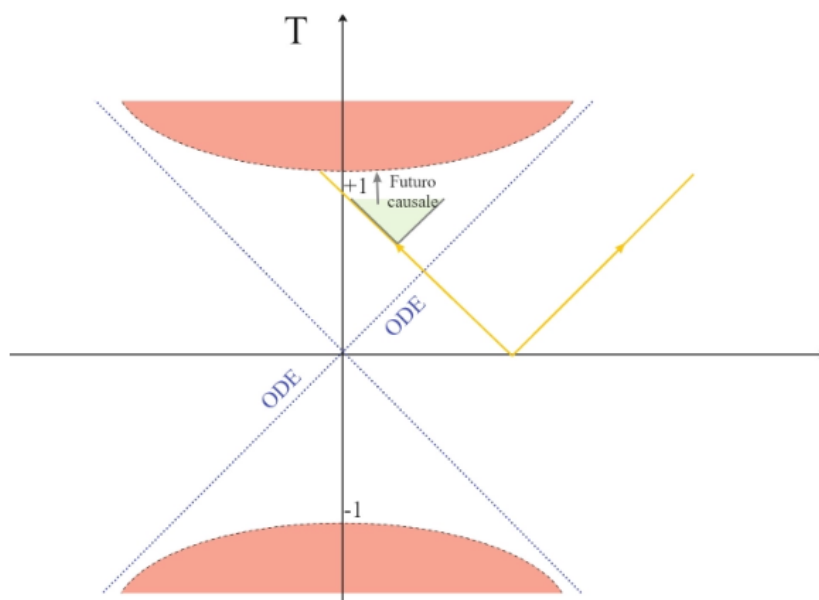


Figura 8.19

Una volta che il fotone varca l'ODE non può fare altro che finire sulla singolarità, infatti il cono luce in ogni punto della traiettoria che sta cadendo è posizionato a 45° e ha proprio un ramo parallelo all'orizzonte. Il suo futuro causale vede la singolarità, non ha più modo di scappare. Le coordinate di Schwarzschild erano un po' ambigue nella descrizione completa dello spazio-tempo sia dentro che fuori dall'orizzonte degli eventi. Le coordinate di Kruskal invece hanno un modo di ricoprire in modo un pochino più preciso l'intera varietà spazio-temporale. Si ricordi che noi qui abbiamo preso solo le coordinate tempo e la coordinata radiale e che ognuno di questi punti in Schwarzschild in realtà ha ancora una coordinata θ e φ .

Abbiamo anche visto però che la mappatura dello spazio, delle coordinate di Schwarzschild nelle coordinate di Kruskal ci porta a un'interpretazione

semplice, ma allo stesso tempo sembra quasi definire una quantità di zone più ampia di quella di partenza. Infatti, possiamo suddividere il diagramma in quattro regioni in base alla struttura causale.

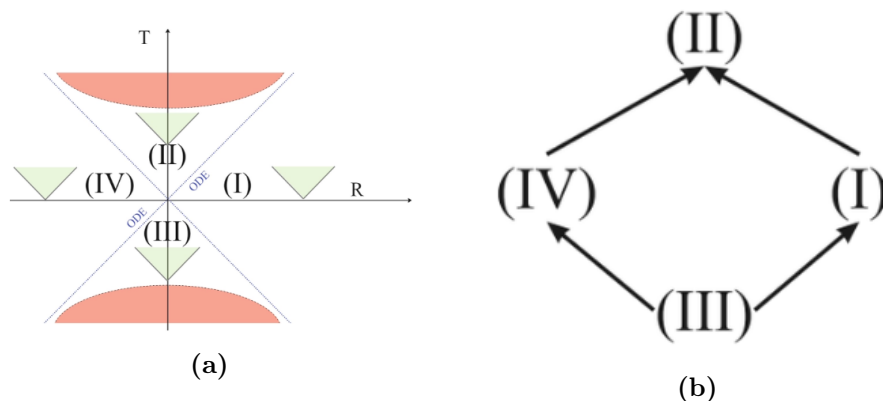


Figura 8.20

Facciamo riferimento alla figura 8.20.

- Regione I.** Una test particle può cadere verso l'orizzonte degli eventi, ma anche non farlo. Nel suo futuro ha la possibilità di cadere dentro l'orizzonte oppure di allontanarsene. Qualunque traiettoria questa particella segua arriverà all'orizzonte degli eventi in un tempo finito nelle coordinate T . Infatti le coordinate di Kruskal non sono le coordinate dell'osservatore stazionario distante asintoticamente dal buco nero, ma sono coordinate di un osservatore diverso. Una volta attraversato l'orizzonte il suo destino sarà necessariamente di cadere sulla singolarità, perché il suo cono luce non gli permetterà più di uscire. Arriverà sulla singolarità in un tempo T finito.
- Regione II.** La regione (II) è la regione interna cioè, la regione del **buco nero** perché siamo dentro l'orizzonte degli eventi. Come abbiamo appena detto non c'è più modo di uscirne proprio per il motivo che il cono luce è tutto a 45° esattamente come sono le traiettorie dell'orizzonte degli eventi.
- Regione III.** Siamo di nuovo dentro l'orizzonte degli eventi, ma data la regione possiamo soltanto uscire o nella regione (I) o nella regione (IV). Se usciamo verso la parte (I), un osservatore stazionario rispetto al buco nero, posizionato su delle iperboli, vede che dall'orizzonte degli eventi proviene qualcosa. La retta dell'orizzonte da cui proviene, nelle vecchie coordinate, corrisponde a $t = -\infty$: questa è la situazione che avevamo descritto come *buco bianco*. Esso corrispondeva nel diagramma di Schwarzschild a una traiettoria outgoing nello spazio esterno. Qua avviene la stessa cosa, ma a un tempo T perfettamente finito.

Regione IV. Tale regione un po' ci stupisce. Essa è speculare alla (I) e abbiamo detto che qualcosa che abbiamo dentro la soluzione (III) può uscire nella regione (IV): se lo interpretiamo come mapping su Schwarzschild abbiamo qualcosa che esce a tempo $t = +\infty$ ed entra nell'orizzonte a $t = -\infty$, quasi come se avessimo un time reversal in tale regione. Dal punto di vista delle coordinate (t, r) tutto avviene come se avessimo un'inversione temporale. Questo non porta a violazioni di causalità. Se consideriamo le relazioni causali delle 4 zone, c'è un pattern ben definito che impedisce che ciò che avviene in (I) o in (IV) possa parlarsi. Non è possibile connettere direttamente le due regioni e quindi non viene violata la causalità!

8.3.2 Evoluzione temporale

Descriviamo l'evoluzione temporale dello spazio-tempo per l'osservatore di Kruskal. Ricordiamoci che per come sono definite le coordinate (T, R) l'asse tempo intercetta le iperboli delle singolarità in $T = \pm 1$. Facciamo riferimento alla figura 8.21 e alle raffigurazioni in figura 8.22.

Poniamoci a $T < -1$ quello che l'osservatore di Kruskal vede è la presenza di: una regione di spaziotempo asintoticamente piatta che può allontanarsi a $R \rightarrow +\infty$, un orizzonte degli eventi, una parte interna all'orizzonte degli eventi e la singolarità posizionata ad un certo R . Tutto ciò riferito alla regione (I), ma è analogo anche per la regione esterna (IV). Al crescere di T vede l'orizzonte degli eventi stringersi.

Quando $T = -1$, l'orizzonte si è stretto ancora un po' di più e la parte interna arriva fino alla singolarità, che è in tal caso unica. Per tutti i tempi tra $-1 < T < +1$, l'orizzonte degli eventi è sempre più ristretto e le parti interne sono tra di loro unite, e non più separate dalla singolarità. La parte interna è unita da quello che si chiama appunto **wormhole** o **ponte di Einstein-Rosen**.

Quando $T > 1$ siamo di nuovo nella situazione in cui abbiamo le due parti esterne connesse con l'infinito, l'orizzonte degli eventi, le parti interne e le singolarità. Per l'osservatore è come se l'orizzonte degli eventi si restringesse fino a diventare un punto per poi ritornare ad allargarsi. C'è un intervallo di tempo in cui non ci sono singolarità nella parte interna: potrebbe sembrare che se venisse lanciato qualcosa dentro la parte interna del buco nero, questo possa attraversarlo. In realtà ciò non può accadere. Ciò è esterno alla posizione dell'orizzonte degli eventi può essere messo al più su una traiettoria luce se è radiazione. Anche potendo spostare il cono luce ovunque nella parte esterna, non c'è modo di fargli attraversare il ponte (blu): dovrebbe viaggiare a una velocità maggiore della luce per poter saltare da (I) a (IV). Dunque, nel caso del buco nero statico ed isotropo il wormhole non è attraversabile.

Nel set di coordinate di Schwarzschild osserveremmo per le regioni (I) e (IV) due piani. La metrica di Kruskal ci dice che la descrizione di Sch-

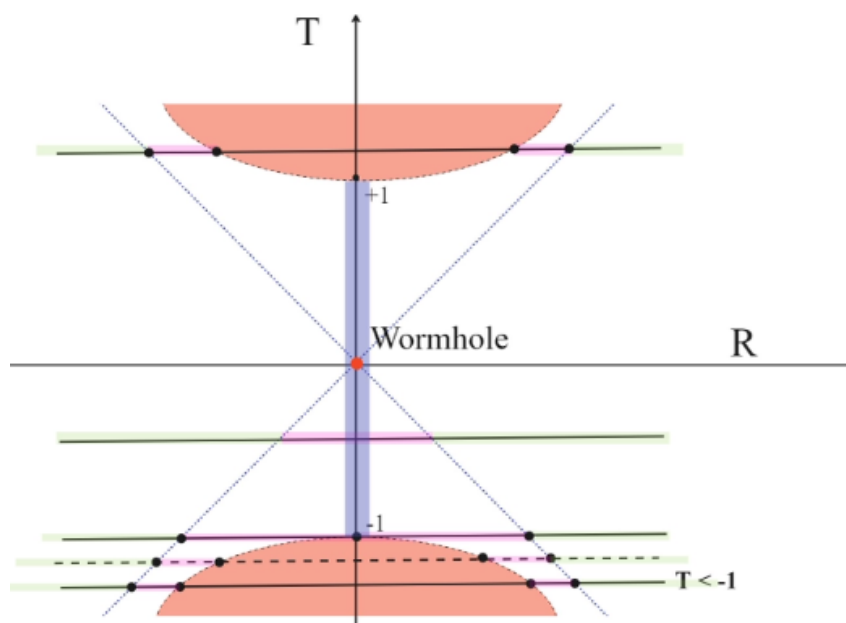


Figura 8.21

warzschild non vedeva il fatto che in realtà vi sono due fogliazioni dello spazio-tempo. Quando siamo esattamente sull'asse R ($T = 0$) è come se noi avessimo un ponte che collega i due. Tuttavia non possiamo cadere dentro e uscire dall'altra parte perché nella descrizione che abbiamo visto non è possibile passare dalla zona (I) alla zona (V).

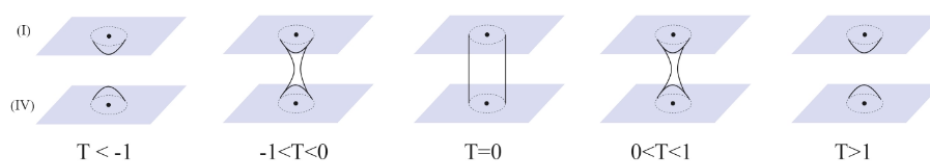


Figura 8.22

Per $T < -1$ abbiamo due fogli dello spazio-tempo ognuno con la singolarità e l'orizzonte degli eventi. Le regioni intorno alle singolarità sono deformate, ma le due non sono collegate. Per $-1 < T < 0$ la deformazione fa sì che si inizi ad avere un ponte non ancora aperto dopodiché questo ponte si aprirà ($T = 0$). Quando passa ancora un po' di tempo dopo aver raggiunto la dimensione massima, il ponte comincia a chiudersi e a un certo si chiuderà. Quindi, per quanto riguarda la metrica statica e isotropa, la descrizione di Kruskal ci permette di identificare la presenza di due fogliazioni di coordinate spazio-tempo. I due fogli però non permettono di passare attraverso la

singularità o attraverso il passaggio all'interno dell'ODE, di uscire dall'altra parte.

8.4 Onde gravitazionali

Vediamo in questa sezione la trattazione delle onde gravitazionali. Abbiamo visto le equazioni di Einstein nelle due forme:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (8.4.1)$$

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (8.4.2)$$

che descrivono il comportamento del campo gravitazionale in qualsiasi situazione, sia essa di campo debole o campo intenso, e per qualsiasi distribuzione di sorgenti. Sono equazioni complesse, altamente non lineari. Una soluzione speciale che abbiamo trattato è la soluzione nel caso in cui il sistema sia statico e isotropo per la condizione di vuoto, che ci ha portato alla forma della metrica di Schwarzschild o la sua versione nella forma di Kruskal. Questo ci dà anche la definizione di un concetto nuovo, ovvero il concetto di buco nero.

Il sistema può avere altri gradi di simmetria differenti, per esempio nel caso in cui la metrica sia omogenea e isotropa (alto grado di simmetria) la soluzione dell'equazione di Einstein si può trovare in modo esatto anche con la presenza della distribuzione di sorgenti; e questo è quello che si fa in cosmologia con la soluzione che porta al modello di Friedman, Robertson, Walker e Lemaitre che contiene il concetto di espansione o contrazione dell'universo. Noi non vediamo questa soluzione in questo corso.

Le equazioni di Einstein però possono essere anche risolte nel caso in cui abbiamo situazioni molto più generali. Tra le possibili soluzioni ammesse dall'equazione di Einstein esiste anche una soluzione in forma di onda, che verrà chiamata per questo **onda gravitazionale**. Essendo altamente non lineari, le onde gravitazionali saranno generate da una distribuzione di materia ed energia, ma a loro volta le onde stesse saranno una distribuzione di materia ed energia che autointeragisce, contribuendo esse stesse al campo gravitazionale. Sono quindi possibili due tipi di soluzioni di tipo onda:

1. Soluzione radiativa dell'onda gravitazionale, in condizione di campo debole (grandi distanze dalla sorgente).
2. In condizione campo forte questo, per esempio, avviene nelle vicinanze della sorgente.

Non tutte le sorgenti di onde gravitazionali implicano la presenza di un campo intenso vicino alla sorgente. Qualunque sistema può generare onde

gravitazionali, per esempio una danzatrice sul ghiaccio mentre ruota produce onde gravitazionali, chiaramente l'onda è debole sia in prossimità della sorgente che lontano da essa.

Le tipiche onde gravitazionali che possiamo ottenere, per esempio dalla coalescenza di due buchi neri che stanno ruotando uno attorno all'altro, vengono osservate da noi a grandi distanze, quindi quando arrivano e per buona parte della loro propagazione sono onde gravitazionali nel regime di campo debole. Se la coalescenza avviene tra buchi neri a formare un buco nero residuo, ma anche tra stelle di neutroni o buchi neri-stelle di neutroni a formare per esempio un buco nero finale, nelle vicinanze della sorgente dell'onda gravitazionale il campo può essere intenso. Ciò che faremo sarà studiare l'equazione di Einstein e mostrare che tra le possibili soluzioni esiste anche la predizione di una soluzione in termini di onda gravitazionale, e lo faremo nel limite di campo debole, lavorando nel vuoto, in quanto la propagazione dell'onda che arriva fino a noi avviene nello spazio vuoto. Per le motivazioni dette l'equazione di Einstein rilevante sarà:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (8.4.3)$$

Si noti l'analogia con le equazioni di Maxwell: l'equazione di Einstein prevedono l'esistenza di una soluzione in termini di onda così come anche l'equazione di Maxwell lo fa per quanto riguarda il campo elettromagnetico. Riprenderemo molte volte l'analogia tra le due.

Cominciamo. Mettiamoci in una *condizione di campo debole*, che come sempre significa che il tensore metrico lo possiamo prendere come una perturbazione attorno al tensore metrico dello spazio-tempo piatto:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad \text{con} \quad |h_{\mu\nu}(x)| \ll 1 \quad (8.4.4)$$

il campo è contenuto nelle funzioni $h_{\mu\nu}$. Ricordiamo anche che il tensore metrico inverso lo possiamo scrivere come:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (8.4.5)$$

al primo ordine nelle quantità piccole h . Infatti, se ci limitiamo al primo ordine perturbativo e calcoliamo:

$$g^{\mu\sigma} g_{\nu\sigma} = (\eta^{\mu\sigma} - h^{\mu\sigma})(\eta_{\nu\sigma} - h_{\nu\sigma}) \quad (8.4.6)$$

$$= \eta^{\mu\sigma} \eta_{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} h_{\nu\sigma} - h^{\mu\sigma} h_{\nu\sigma} + \mathcal{O}(h^2) \quad (8.4.7)$$

e quindi:

$$g^{\mu\sigma} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\nu + \mathcal{O}(h^2). \quad (8.4.8)$$

Ci serve anche la connessione affine al primo ordine perturbativo:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (8.4.9)$$

in cui quando calcoliamo la derivata per ognuno di questi tre termini g , rimane solo la parte di derivata di h perché η sono delle costanti. Quindi prendiamo anche le derivate di $\mathcal{O}(h)$:

$$|\partial_\lambda h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad \text{piccole} \quad (8.4.10)$$

nel prodotto con $g^{\lambda\sigma}$ va quindi soltanto preso quello con il termine η :

$${}^{(1)}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} (\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}) \quad (8.4.11)$$

questa espressione rappresenta la *connessione affine linearizzata*, cioè al primo ordine in h . Si noti anche che in questi termini di connessione possiamo alzare gli indici solo col tensore della metrica piatta, perché tutto il resto è già di ordine h . Quindi possiamo anche vedere questa espressione come un innalzamento dell'indice λ fatto con il tensore metrico di Minkowski.

Vedremo che le equazioni di Einstein per $g_{\mu\nu}$ saranno equazioni del moto per i campi $h_{\mu\nu}(x)$: stiamo considerando $h_{\mu\nu}$ come delle perturbazioni su Minkowski che, vedremo, si propagano alla velocità della luce e sono proprio quelle che chiamiamo onde gravitazionali. Finché ci limitiamo al primo ordine perturbativo possiamo vedere $h_{\mu\nu}$ come dei campi che si propagano nella metrica piatta.

Adesso ci serve il tensore di Riemann linearizzato. Scriviamo:

$$R_{\rho\mu\nu\kappa} = g_{\rho\lambda} R^\lambda_{\mu\nu\kappa} \quad (8.4.12)$$

$$= g_{\rho\lambda} [\partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} + \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\rho}] \quad (8.4.13)$$

trascuriamo il prodotto delle due Γ perché è di ordine $\sim h^2$. Il termine tra quadre invece è di ordine $\sim h$ e quindi possiamo fare l'operazione di abbassamento degli indici con la metrica di Minkowski:

$$R_{\rho\mu\nu\kappa} = g_{\rho\lambda} [\partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}] \quad (8.4.14)$$

Sostituiamo le espressioni per la connessione. Quando deriviamo la connessione data da (8.4.11), la derivata agisce soltanto su quello che abbiamo dentro le parentesi:

$$R_{\rho\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \eta_{\rho\lambda} \eta^{\lambda\sigma} \partial_\kappa [\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}] - \frac{1}{2} \eta_{\rho\lambda} \eta^{\lambda\sigma} \partial_\nu [\partial_\mu h_{\kappa\sigma} + \partial_\kappa h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\kappa}] \quad (8.4.15)$$

$$= \frac{1}{2} \delta_\rho^\sigma \partial_\kappa [\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}] - \frac{1}{2} \delta_\rho^\sigma \partial_\nu [\partial_\mu h_{\kappa\sigma} + \partial_\kappa h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\kappa}] \quad (8.4.16)$$

$$= \frac{1}{2} [\partial_\kappa \partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial_\kappa \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\kappa \partial_\rho h_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu h_{\kappa\rho} - \partial_\nu \partial_\kappa h_{\mu\rho} + \partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\kappa}] \quad (8.4.17)$$

da cui l'espressione del *tensore di Riemann linearizzato* al primo ordine perturbativo in h :

$${}^{(1)}R_{\rho\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left[\partial_\kappa \partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\kappa} - \partial_\kappa \partial_\rho h_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu h_{\kappa\rho} \right] \quad (8.4.18)$$

si tratta di un'espressione lineare nelle derivate seconde, come deve essere fatto. Calcoliamo quindi il *tensore di Ricci linearizzato*:

$${}^{(1)}R_{\mu\kappa} = \eta^{\rho\nu} {}^{(1)}R_{\rho\mu\nu\kappa} \quad (8.4.19)$$

Basta contrarre con η di Minkowski anziché con g proprio perché ${}^{(1)}R_{\rho\mu\nu\kappa}$ è già di ordine h . Quindi:

$${}^{(1)}R_{\mu\kappa} = \frac{1}{2} \left[\partial_\kappa \partial_\mu h^\rho{}_\rho + \partial^\rho \partial_\rho h_{\mu\kappa} - \partial_\kappa \partial_\rho h_\mu{}^\rho - \partial_\rho \partial_\mu h_\kappa{}^\rho \right] \quad (8.4.20)$$

notiamo che:

$$h^\rho{}_\rho = \text{Tr}\{h\} = h \quad , \quad \square \equiv \partial^\rho \partial_\rho = \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma = -\partial_t^2 + \nabla^2 \quad (8.4.21)$$

così l'espressione del tensore di Ricci risulta:

$${}^{(1)}R_{\mu\kappa} = \frac{1}{2} \left[\square h_{\mu\kappa} + \partial_\kappa \partial_\mu h - \partial_\kappa \partial_\rho h_\mu{}^\rho - \partial_\rho \partial_\mu h_\kappa{}^\rho \right]. \quad (8.4.22)$$

Investigando le proprietà per scambio degli indici all'interno della prima coppia o della seconda coppia, oppure per lo scambio della prima coppia con la seconda coppia, ritroviamo le proprietà di simmetria e antisimmetria che abbiamo già verificato.

A questo punto possiamo scrivere direttamente le equazioni di Einstein linearizzate al primo ordine perturbativo. Partiamo dalla seconda forma delle equazioni di Einstein complete. A secondo membro abbiamo $g_{\mu\nu}$, campo contenuto in $R_{\mu\nu}$ e T , traccia di $T_{\mu\nu}$ con lo stesso tensore metrico, ovvero:

$$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu \quad (8.4.23)$$

ma come facciamo la traccia? Dobbiamo utilizzare g oppure η ? Ebbene, per capirlo ripartiamo dall'equazione completa:

$${}^{(1)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^{(1)}R = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (8.4.24)$$

ci basta utilizzare η , poiché $R \sim h$, e quindi:

$${}^{(1)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} {}^{(1)}R = -8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (8.4.25)$$

Per poter arrivare alla seconda forma dell'equazione di Einstein bisogna contrarre con il tensore metrico. In questa approssimazione al primo ordine:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (8.4.26)$$

ci basta usare soltanto η . Dunque:

$${}^{(1)}R - \frac{1}{2}({}^{(4)}R) = -8\pi G \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad (8.4.27)$$

chiamando:

$$\eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T \quad (8.4.28)$$

allora otteniamo:

$${}^{(1)}R = 8\pi GT \quad (8.4.29)$$

sostituendo si arriva alla forma dell'equazione di Einstein linearizzata al primo ordine perturbativo:

$${}^{(1)}R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T \right) \quad (8.4.30)$$

con T come lo abbiamo appena definito. Questa è un'equazione differenziale del secondo ordine delle derivate parziali per il campo $h_{\mu\nu}$, ora linearizzata. Il risultato ottenuto è molto interessante perché *le sorgenti non contengono il campo $g_{\mu\nu}$ né la traccia in esso o in η* : questo vuol dire che l'equazione del moto per il campo non contiene un feedback, dal punto di vista delle sorgenti, dovuto a sé stesso. Se al secondo membro comparisse $g_{\mu\nu}$ in qualche termine, avremmo che non soltanto la distribuzione di materia, ma anche il campo gravitazionale stesso è sorgente del campo gravitazionale, cosa che avviene nell'equazione di Einstein completa.

Possiamo quindi vedere l'equazione di Einstein come l'equazione per un campo che si propaga in un background piatto, perché la linearizzazione ci ha permesso di separare l'equazione in questo modo; però in realtà il campo di cui stiamo parlando è lo stesso campo metrico. Notiamo ancora una cosa. Sappiamo che il tensore energia impulso $T_{\mu\nu}$ è un tensore conservato. In tal caso è sufficiente conservarlo con la sola derivata ordinaria cioè:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (8.4.31)$$

infatti l'identità di Bianchi linearizzata richiede di calcolare:

$$\left({}^{(1)}R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}({}^{(1)}R) \right)_{;\mu} \longrightarrow \left({}^{(1)}R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}({}^{(1)}R) \right)_{;\mu} \sim \mathcal{O}(h) \quad (8.4.32)$$

quindi la derivata covariante la possiamo scrivere semplicemente come la derivata ordinaria perché i termini aggiuntivi della derivata covariante contengono a loro volta di ordine h :

$$D_\mu \longrightarrow \partial_\mu + \mathcal{O}(h) \quad (8.4.33)$$

l'identità di Bianchi linearizzata risulta allora:

$$\partial_\mu \left({}^{(1)}R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}({}^{(1)}R) \right) = 0 \quad (8.4.34)$$

da cui deriviamo che:

$$0 = \partial_\mu \left({}^{(1)}R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} {}^{(1)}R \right) = -8\pi G \partial_\mu T^{\mu\nu}. \quad (8.4.35)$$

Dunque, utilizzando (8.4.22), scriviamo l'equazione di Einstein nella seconda forma linearizzata al primo ordine:

$$\square h_{\mu\nu} + \partial_\kappa \partial_\mu h_\nu{}^\kappa - \partial_\kappa \partial_\lambda h_\mu{}^\lambda - \partial_\lambda \partial_\mu h_\kappa{}^\lambda = -16\pi G S_{\mu\nu} \quad (8.4.36)$$

in cui:

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} T. \quad (8.4.37)$$

L'equazione (8.4.36), per il semplice fatto che rappresenta una evoluzione attraverso l'operatore d'Alambertiano, è un'equazione di campo che descrive la propagazione della perturbazione della metrica $h_{\mu\nu}$. Avendo una forma di equazione d'onda la soluzione sarà quindi in termini di un'onda che chiamiamo appunto *onda gravitazionale*. Le funzioni $h_{\mu\nu}(x)$ sono al massimo dieci e permettono di riscrivere la metrica dello spazio tempo semplicemente facendo la somma:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x). \quad (8.4.38)$$

Come sappiamo, la soluzione dell'equazione di Einstein non è però univoca. Data soluzione $h_{\mu\nu}$ possiamo ancora trovare un altro set di funzioni $h'_{\mu\nu}$ legati ad una trasformazione generale di coordinate (libertà di gauge). Presa una trasformazione di gauge del tutto generale $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ possiamo trovare $h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu}$ (dove con $\rightarrow$ si indica una TGC, trasformazione generale di coordinate) anch'essa soluzione.

Effettuiamo una trasformazione di coordinate data da:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x) \quad (8.4.39)$$

la trasformazione generale di coordinate ci permette di scegliere quattro funzioni arbitrarie: in questo caso le nostre quattro funzioni arbitrarie $\varepsilon(x)$ sono quelle che realizzano la trasformazione di coordinate. Se noi richiediamo in aggiunta che:

$$\frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\nu \varepsilon^\mu \sim \mathcal{O}(h) \quad (8.4.40)$$

allora (8.4.39) permette di passare da un campo debole $h_{\mu\nu}$ a un campo debole $h'_{\mu\nu}$. La richiesta è motivata dal fatto che vogliamo che la trasformazione preservi il fatto che le perturbazioni siano piccole anche nel nuovo set di coordinate perché stiamo studiando l'equazione linearizzata.

Vediamo come si trasforma il campo e dimostriamo che vale la proprietà appena descritta:

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}. \quad (8.4.41)$$

Affinché si abbia campo debole $\rightarrow$ campo debole:

$$g^{\rho\sigma} = \eta^{\rho\sigma} - h^{\rho\sigma} \quad , \quad g'^{\mu\nu} = \eta'^{\mu\nu} - h'^{\mu\nu} \quad (8.4.42)$$

poi è ovvio che $\eta'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$. Avremo:

$$\left(\eta'^{\mu\nu} - h'^{\mu\nu} \right) = \left[\delta^\mu_\rho + \partial_\rho \varepsilon^\mu \right] \left[\delta^\nu_\sigma + \partial_\sigma \varepsilon^\nu \right] \left(\eta^{\rho\sigma} - h^{\rho\sigma} \right) \quad (8.4.43)$$

si noti che abbiamo chiesto che:

$$\partial_\rho \varepsilon^\mu, \partial_\sigma \varepsilon^\nu \sim \mathcal{O}(h). \quad (8.4.44)$$

Tenendo tutto all'ordine h :

$$\eta'^{\mu\nu} - h'^{\mu\nu} = \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma \eta^{\rho\sigma} - \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma h^{\rho\sigma} + \delta^\mu_\rho \partial_\sigma \varepsilon^\nu \eta^{\rho\sigma} + \delta^\nu_\sigma \partial_\rho \varepsilon^\mu \eta^{\rho\sigma} + \mathcal{O}(h^2) \quad (8.4.45)$$

facendo agire le δ abbiamo:

$$\eta'^{\mu\nu} - h'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \eta^{\mu\sigma} \partial_\sigma \varepsilon^\nu + \eta^{\mu\sigma} \partial_\sigma \varepsilon^\nu \quad (8.4.46)$$

adesso abbassiamo tutti gli indici, contraendo due volte il tensore metrico:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu \quad (8.4.47)$$

questo è il modo in cui trasforma il campo $h_{\mu\nu}$ al primo ordine perturbativo sotto la trasformazione di coordinate $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ con $\partial_\rho \varepsilon^\mu \sim \mathcal{O}(h)$. Risulta ora evidente che la condizione sulla derivata è necessaria perché il nuovo campo non sia più grande come ordine di grandezza di quanto era h . Se non facessimo questa richiesta, gli oggetti h' potrebbero essere arbitrari. Possiamo quindi usare l'invarianza di gauge per semplificare l'equazione del moto, andando ad utilizzare il *gauge armonico*. Esso richiede che siano soddisfatte le 4 condizioni:

$$g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 \quad (8.4.48)$$

dobbiamo però lavorare al primo ordine perturbativo perché così abbiamo scritto l'equazione di Einstein. Dunque abbiamo:

$$g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} {}^{(1)}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \quad (8.4.49)$$

$$= \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma} \left(\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu} \right) \quad (8.4.50)$$

Facendo agire le due η :

$$g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu h^{\mu\lambda} + \partial_\mu h^{\mu\lambda} - \partial^\lambda h \right) \quad (8.4.51)$$

$$= \partial_\mu h^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} \partial^\lambda h \quad (8.4.52)$$

$$= 0 \quad (8.4.53)$$

dove h significa che è contratto con sè stesso. Il gauge armonico significa quindi che il tensore metrico deve soddisfare la condizione, riscrivibile come:

$$\partial_\mu h^\mu{}_\lambda = \frac{1}{2} \partial_\lambda h. \quad (8.4.54)$$

Si noti che possiamo tranquillamente alzare e abbassare gli indici anche sotto operatore derivativo per il semplice fatto che stiamo usando il tensore di Minkowski, che sono delle costanti. Quindi, se $h_{\mu\nu}$ è soluzione dell'equazione di Einstein linearizzata possono capitare due cose:

- $h_{\mu\nu}$ soddisfa la condizione (8.4.54) e quindi abbiamo trovato $h_{\mu\nu}$ nel gauge armonico.
- $h_{\mu\nu}$ non soddisfa (8.4.54), ma possiamo sempre effettuare una trasformazione di coordinate opportuna che mandi $h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu}$ tale che la soddisfi.

Mostriamolo. Supponiamo di aver trovato una soluzione dell'equazione di Einstein $h_{\mu\nu}$ che non soddisfa il gauge armonico. Posso fare una trasformazione di coordinate:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu + \varepsilon^\mu(x) \quad (8.4.55)$$

con la condizione $\partial_\rho \varepsilon^\mu \sim \mathcal{O}(h)$, quindi:

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu \quad (8.4.56)$$

e richiediamo che il gauge armonico sia soddisfatto, ossia:

$$\partial'_\mu h'^\mu{}_\lambda = \frac{1}{2} \partial'_\lambda h'. \quad (8.4.57)$$

Osserviamo cos'è la derivata del campo h' nel set di coordinate primo. Dato che abbiamo un set di trasformazioni particolare, possiamo far vedere che:

$$\partial'_\mu h' = \partial_\mu h' \quad (8.4.58)$$

infatti:

$$\partial'_\mu h' = \frac{\partial h'}{\partial x'^\mu} \quad (8.4.59)$$

$$= \frac{\partial h'}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \quad (8.4.60)$$

$$= \frac{\partial h'}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} [x'^\rho - \varepsilon^\rho] \quad (8.4.61)$$

$$= \frac{\partial h'}{\partial x^\rho} [\delta^\rho{}_\mu - \partial'_\mu \varepsilon^\rho] \quad (8.4.62)$$

$$= \partial_\mu h' + \mathcal{O}(h) \quad (8.4.63)$$

quindi, richiedendo che sotto l'effetto della trasformazione di coordinate il campo h' sia nel gauge armonico:

$$\partial_\mu [h^\mu{}_\lambda - \partial^\mu \varepsilon_\lambda - \partial_\lambda \varepsilon^\mu] = \frac{1}{2} \partial_\lambda [h - \partial_\mu \varepsilon^\mu - \partial_\mu \varepsilon^\mu] \quad (8.4.64)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\lambda h - \partial_\lambda (\partial_\mu \varepsilon^\mu) \quad (8.4.65)$$

da cui, semplificando $\partial_\lambda (\partial_\mu \varepsilon^\mu)$:

$$\square \varepsilon_\lambda = \partial_\mu h^\mu{}_\lambda - \frac{1}{2} \partial_\lambda (h) \quad (8.4.66)$$

dunque se abbiamo $h_{\mu\nu}$ soluzione dell'equazione di Einstein linearizzata, possiamo sempre trovare un'altra soluzione attraverso una trasformazione generale di coordinate tale che questa soddisfi il gauge armonico. Affinché h' soddisfi il gauge armonico è sufficiente che le nostre funzioni soddisfino (8.4.66). Soluzione di (8.4.66) sono le funzioni $\varepsilon_\lambda(x)$ e una volta che le abbiamo trovate conosciamo la trasformazione di coordinate che ci manda da un campo che non è nel gauge armonico, in un campo che vi sta per costruzione.

Siccome quindi è sempre possibile farlo, mettiamoci in un sistema di coordinate in cui valgano le condizioni di gauge armonico. Richiamiamo l'equazione di Einstein linearizzata al primo ordine (8.4.36):

$$\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h - \partial_\mu \partial_\lambda h_\nu{}^\lambda - \partial_\nu \partial_\lambda h_\mu{}^\lambda = -16\pi G S_{\mu\nu} \quad (8.4.67)$$

vogliamo che il campo soddisfi la condizione di gauge armonico, ovvero:

$$\partial_\mu h^\mu{}_\lambda = \frac{1}{2} \partial_\lambda h \quad (8.4.68)$$

allora riscriviamo (8.4.36), in questo gauge, come:

$$-16\pi G S_{\mu\nu} = \square h_{\mu\nu} + \partial_\kappa \partial_\mu h - \partial_\kappa \partial_\lambda h_\mu{}^\lambda - \partial_\lambda \partial_\mu h_\kappa{}^\lambda \quad (8.4.69)$$

$$= \square h_{\mu\nu} \quad (8.4.70)$$

dunque da cui:

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu} \quad (8.4.71)$$

$$\partial_\mu h^\mu{}_\lambda = \frac{1}{2} \partial_\lambda h \quad (8.4.72)$$

essa è un'equazione delle onde in presenza di sorgenti. Nel vuoto avremo:

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (8.4.73)$$

$$\partial_\mu h^\mu{}_\lambda = \frac{1}{2} \partial_\lambda h \quad (8.4.74)$$

quest'ultima è proprio l'equazione di d'Alembert, in cui compare $\square = -\partial_t^2 + \nabla^2$. Questo rappresenta un'onda che si propaga alla velocità della luce, avendo coefficienti 1. Questo dimostra come l'equazione di Einstein ammetta soluzioni di tipo onda.

Si noti che seppur la predizione che il campo gravitazionale possa propagarsi sotto forma di onda l'abbiamo dimostrata nel limite di campo debole, ciò non vuol dire che se il campo non è debole non ci possa essere una soluzione di tipo onda che si propaga alla velocità della luce. In tale caso l'equazione da tenere in considerazione è l'intera equazione di Einstein e dimostrare che anche in quel caso si ha ancora una opportuna onda che si propaga è solamente molto più complesso. Il fatto che esiste una soluzione di onda anche in regime di campo forte è stato dimostrato da **Yvonne Choquet-Bruhat**, mentre la soluzione di onde gravitazionali fu trovata già ai tempi di Einstein.

8.4.1 Analogia con l'Elettromagnetismo

Discutiamo l'analogia formale con l'EM in modo da riassumere gli step che abbiamo seguito. Le equazioni di Maxwell sono lineari, non devono essere linearizzate, mentre le equazioni di Einstein sono non lineari, quindi noi ci siamo messi nel regime di campo debole e abbiamo linearizzato l'equazione, fino ad ottenere:

$$\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h - \partial_\mu \partial_\lambda h_\nu{}^\lambda - \partial_\nu \partial_\lambda h_\mu{}^\lambda = -16\pi G S_{\mu\nu} \quad (8.4.75)$$

l'analogo nel caso generale nell'Elettromagnetismo è:

$$\square A_\alpha \partial_\alpha (\partial_\beta A^\beta) = -J_\alpha. \quad (8.4.76)$$

In entrambi i casi si vede che l'equazione del campo è un'equazione che contiene una termine di propagazione delle onde. L'operatore d'Alambertiano nel caso delle onde gravitazionali è proprio lo stesso che abbiamo nel caso elettromagnetico, perché abbiamo visto che linearizzando il campo per avere l'equazione al primo ordine ci basta l'operatore d'Alambertiano con metrica piatta:

$$\square = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta. \quad (8.4.77)$$

Abbiamo poi utilizzato la libertà di gauge per realizzare una trasformazione di gauge:

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu \quad (8.4.78)$$

con ε^μ sono quattro funzioni arbitrarie che ci permettono di ridefinire il campo. Dopodiché abbiamo scelto di sederci sul gauge armonico:

$$g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \partial_\mu h^\mu{}_\lambda = \frac{1}{2} \partial_\lambda h \quad (8.4.79)$$

questo è sempre possibile perché, se non vale questa condizione, è sufficiente scegliere le funzioni ε come soluzione di (8.4.66), in modo che lo sia. In questo gauge, l'equazione di Einstein diventa molto più semplice:

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu} \quad (8.4.80)$$

$$\partial_\mu h^\mu{}_\lambda = \frac{1}{2} \partial_\lambda h. \quad (8.4.81)$$

Nel caso elettromagnetico analogamente abbiamo una libertà di gauge:

$$A_\alpha \longrightarrow A'_\alpha + \partial_\alpha \phi(x) \quad (8.4.82)$$

con $\phi(x)$ funzione arbitraria (una sola!) come sono arbitrarie le funzioni ε^μ in Relatività Generale. Dopodiché scegliamo il gauge di Lorentz:

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \quad (8.4.83)$$

e le equazioni di Maxwell diventano:

$$\square A_\alpha = -J_\alpha \quad (8.4.84)$$

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0. \quad (8.4.85)$$

Si noti che anche per il campo elettromagnetico sfruttare l'arbitrarietà di ϕ per traslare il campo opportunamente in modo tale da ottenere un campo che soddisfi la condizione di gauge, è un'operazione sempre possibile. Analogamente al caso della RG, infatti, se:

$$A_\alpha : \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0 \quad (8.4.86)$$

allora è possibile prendere una trasformazione come (8.4.82) e richiedere (8.4.83). Questo porta a:

$$\square \phi = -\partial_\alpha A^\alpha. \quad (8.4.87)$$

8.4.2 Soluzione formale dell'equazione non omogenea

Avendo ottenuto l'equazione del campo gravitazionale nel gauge armonico possiamo darle una soluzione formale analogamente a quello che si fa in Elettromagnetismo. Richiamiamo l'equazione del moto in presenza di sorgenti:

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu} \quad (8.4.88)$$

di cui possiamo dare una soluzione utilizzando le funzioni di Green $G(x - y)$ dell'operatore differenziale $\square$. Una funzione è detta *funzione di Green* dell'operatore differenziale $\square$ se soddisfa formalmente:

$$\square_x G(x - y) = \delta^{(4)}(x - y). \quad (8.4.89)$$

La funzione di Green è sempre una funzione di una separazione e $\square_x = -\partial_t^2 + \nabla^2$. Conoscendo la funzione di Green dell'operatore differenziale, la soluzione formale dell'equazione nel punto x dello spazio-tempo è semplicemente:

$$h_{\mu\nu}(x) = -16\pi G \int d^4y G(x-y) S_{\mu\nu}(y) \quad (8.4.90)$$

il punto y è un punto diverso da quello in cui vogliamo la soluzione. Usiamo il volume invariante in Relatività Speciale perché di fatto vediamo il campo $h_{\mu\nu}$ come un campo che si propaga nello spazio-tempo piatto e quindi è sufficiente prendere d^4y . La funzione di Green è:³

$$G(x-y) = -\frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \delta(|\vec{x} - \vec{y}| - (x^0 - y^0)) \theta(x^0 - y^0) \quad (8.4.91)$$

in cui $\theta(x^0 - y^0)$ è la funzione theta di Heaviside, e $G(x-y)$ è detta **funzione di Green ritardata**, legata al fatto che se prendiamo la sorgente del campo in un dato punto dello spazio a noi arriverà l'effetto di quella sorgente a un tempo successivo. Sostituendo la funzione di Green nell'integrale, possiamo sfruttare la δ di Dirac per svolgere l'integrale sul tempo, sfruttando il concetto di tempo ritardato, così che rimanga solo un integrale sul volume spaziale della sorgente. La perturbazione gravitazionale $h_{\mu\nu}(t, \vec{x})$ sarà allora espressa da:

$$h_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 4G \int d^3y \frac{S_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (8.4.92)$$

che è la soluzione formale dell'equazione delle onde. Il tempo a cui a noi arriva la perturbazione gravitazionale è $t = x^0$, mentre il tempo ritardato è $t_r = t - |\vec{x} - \vec{y}| = t - r$ dove r è la distanza spaziale tra dove siamo posizionati ($\vec{x}$) e un punto nello spazio dove c'è la sorgente ($\vec{y}$).

Dato che il coefficiente che sta tra t ed r è proprio 1, cioè la velocità della luce, l'effetto delle sorgenti che sentiamo in $(t, \vec{x})$ è dovuto all'integrare tutte le posizioni spaziali della sorgente e dipende da quello che la sorgente faceva un tempo ritardato t_r , tempo che sta sul cono luce passato rispetto a noi. Si osservi la figura 8.23.

Noi, osservatori, riceviamo il segnale gravitazionale al tempo t quando siamo in una certa posizione x^i . Il piano in cui y^i , posizione della sorgente, sta sul nostro cono luce è il piano che corrisponde a un tempo $t = t_r$. Supponiamo che la sorgente sia distribuita su una certa porzione spaziale. La perturbazione gravitazionale, cioè il campo soluzione dell'equazione delle onde che noi abbiamo qui e ora, dipende dall'integrale su tutto il volume della sorgente, ma le posizioni da integrare le dobbiamo prendere sul cono luce passato! Le onde gravitazionali, così come quelle elettromagnetiche, si propagano alla velocità della luce, quindi se la sorgente comincia a muoversi noi sentiremo l'effetto dopo un certo tempo, pari a quello impiegato dalla luce ad arrivare a noi.

³In altri corsi abbiamo trovato la funzione di Green esplicitamente.

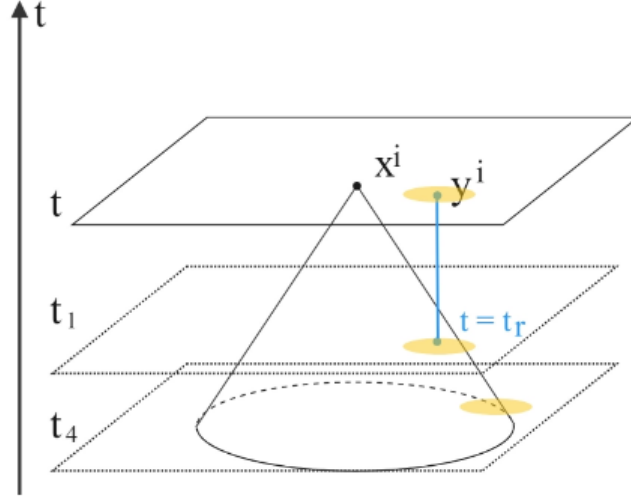


Figura 8.23

8.5 Onde piane

Abbiamo visto come l'equazione di Einstein linearizzata conduca all'equazione delle onde per il campo gravitazionale nel limite di campo debole. Se siamo nel vuoto e ci mettiamo nel gauge armonico, questa è proprio l'equazione di D'Alembert:

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (8.5.1)$$

$$\partial_\mu h^\mu{}_\lambda = \frac{1}{2} \partial_\lambda h. \quad (8.5.2)$$

Risolviemo l'equazione delle onde omogenea. Questa è una soluzione che, per esempio, funziona bene per studiare la propagazione delle onde nel vuoto ed è un caso tipico di quello che può avvenire quando un'onda gravitazionale ci arriva essendo stata prodotta in qualche posto distante nell'universo. Chiamamente sappiamo già che un'equazione di questo tipo ammette tra un suo set di possibili soluzioni le onde piane. Sfrutteremo la condizione di gauge per cercare di semplificare la soluzione, interpretando i gradi di libertà dell'onda che hanno significato fisico.

8.5.1 Analogia con l'Elettromagnetismo

Discutiamo prima il caso elettromagnetico in modo tale da vedere come, analogamente, funzionano la libertà di gauge e il suo utilizzo per poter scrivere la soluzione nel gauge nel quale sono manifestamente presenti soltanto le informazioni fisiche dell'onda. Consideriamo l'equazione di Maxwell nel

gauge di Lorentz:

$$\square A_\alpha = 0 \quad (8.5.3)$$

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \quad (8.5.4)$$

i campi A^α sono quattro campi, ma abbiamo una condizione e quindi solo tre di essi sono indipendenti. La soluzione la possiamo formalmente scrivere come onda piana:

$$A_\alpha = a_\alpha \exp\{ik \cdot x\} + a_\alpha^* \exp\{-ik \cdot x\} \quad (8.5.5)$$

con $k \cdot x = k_\rho x^\rho$. Le quantità a_α sono delle costanti che prendono il nome di **vettori di polarizzazione** dell'onda e danno l'orientazione di A_α . Affinché (8.5.5) sia soluzione:

1. Dobbiamo soddisfare l'equazione del moto cioè:

$$\square A_\alpha = 0 \quad (8.5.6)$$

calcoliamoci:

$$\partial_\rho A_\alpha = ik_\rho \left(a_\alpha \exp\{ik \cdot x\} - a_\alpha^* \exp\{-ik \cdot x\} \right) \quad (8.5.7)$$

da cui:

$$\square A_\alpha = \partial^\rho \partial_\rho A_\alpha \quad (8.5.8)$$

$$= (ik^\rho) (ik_\rho) \left(a_\alpha \exp\{ik \cdot x\} + a_\alpha^* \exp\{-ik \cdot x\} \right) \quad (8.5.9)$$

$$= -k^2 A_\alpha \quad (8.5.10)$$

$$= 0 \quad (8.5.11)$$

e questo richiede che:

$$k^2 = k_\rho k^\rho = 0 \quad (m = 0) \quad (8.5.12)$$

cioè che sia un vettore di tipo luce.

2. Dobbiamo verificare il gauge di Lorenz:

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \quad (8.5.13)$$

dunque che:

$$\partial_\alpha A^\alpha = i(k_\alpha a^\alpha) \exp\{-ik \cdot x\} - i(k_\alpha a^{*\alpha}) \exp\{ik \cdot x\} \quad (8.5.14)$$

$$\implies k_\alpha a^\alpha = 0 \quad (8.5.15)$$

in senso quadridimensionale è necessario che il vettore di polarizzazione e il vettore d'onda siano quadrivettori ortogonali.

Abbiamo ricavato la soluzione (8.5.5) richiedendo (8.5.12) e (8.5.15) e lavorando nel Gauge di Lorenz. Potremmo pensare di esserci già giocati la libertà di Gauge, ma questo non è del tutto vero. Aver scelto il gauge non significa aver fissato completamente la forma della soluzione. Talvolta è possibile fare un'ulteriore trasformazione di gauge purché si rimanga ancora nel gauge di Lorenz. In tal caso siamo partiti da:

$$\square A_\alpha = -\partial_\alpha (\partial_\beta A^\beta) = 0 \quad (8.5.16)$$

abbiamo eseguito un trasformazione di gauge:

$$A_\alpha \longrightarrow A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \phi(x) \quad (8.5.17)$$

e richiesto:

$$\partial_\alpha A'^\alpha = 0 \quad , \quad \partial_\alpha A^\alpha + \square \phi = 0 \quad (8.5.18)$$

$$\Updownarrow \quad (8.5.19)$$

$$\square \phi = -\partial_\alpha A^\alpha. \quad (8.5.20)$$

Nel gauge di Lorenz $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, quindi:

$$\square A'_\alpha = 0 \quad (8.5.21)$$

a questo punto possiamo fare ancora una seconda trasformazione richiedendo di rimanere nel gauge di Lorenz:

$$A'_\alpha \longrightarrow A''_\alpha = A'_\alpha + \partial_\alpha \varepsilon(x) \quad (8.5.22)$$

con la richiesta:

$$\partial_\alpha A''_\alpha = \partial_\alpha A'_\alpha + \square \varepsilon(x) \quad (8.5.23)$$

ma $\partial_\alpha A'_\alpha = \partial_\alpha A''_\alpha$, quindi:

$$\square \varepsilon(x) = 0. \quad (8.5.24)$$

Possiamo fare questa seconda trasformazione di Gauge purché prendiamo una funzione ε armonica. Questo significa sostanzialmente che le quattro componenti da cui siamo partiti per A^α , ora contenute nel vettore di polarizzazione, non sono tutte indipendenti. Se ci mettiamo nel gauge di Lorenz solo tre di quattro sono indipendenti. Possiamo però ulteriormente ridurre di uno la libertà del problema, utilizzando una seconda trasformazione. Dopodiché non sono più possibili ulteriori trasformazioni. I *gradi di libertà fisici* del campo elettromagnetico sono quindi due che corrispondono ai due **gradi di libertà di polarizzazione** di un'onda elettromagnetica.⁴

⁴Ricorda che abbiamo già imparato che la polarizzazione della luce si trova in un piano ortogonale alla direzione di propagazione.

Per comprendere quali siano questi due gradi di libertà dell'onda elettromagnetica mettiamoci in un caso comodo, che però non toglie generalità. Consideriamo l'onda piana che si propaga nella direzione $x^3 = z$. Ciò significa che dobbiamo prendere:

$$k^\alpha = (k^0, 0, 0, \omega) \quad (8.5.25)$$

dopodiché, dato che $k_\alpha k^\alpha = 0$:

$$k_0 k^0 + k_3 k^3 = 0 \quad (8.5.26)$$

quindi:

$$k^\alpha = (\omega, 0, 0, \omega) \quad , \quad k_\alpha = (-\omega, 0, 0, \omega) . \quad (8.5.27)$$

Imponiamo ora la seconda condizione che sappiamo valere per l'onda piana, cioè:

$$k^\alpha a_\alpha = k^0 a_0 + k^3 a_3 = 0. \quad (8.5.28)$$

Notiamo che:

1. La condizione corrisponde a:

$$\omega (a_0 + a_3) = 0 \quad \implies \quad a_0 = -a_3. \quad (8.5.29)$$

2. Possiamo fare una seconda trasformazione di gauge residua:

$$A_\alpha \longrightarrow A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \phi \quad (8.5.30)$$

dato che A è una funzione armonica, diamo una rappresentazione analoga anche a ϕ :

$$\phi = ib \exp\{ik \cdot x\} - ib^* \exp\{-i \cdot x\}. \quad (8.5.31)$$

Vediamo che A'_α soddisfa il gauge armonico, quindi $\partial_\alpha A'_\alpha = 0$, infatti:

$$\partial_\alpha A'_\alpha = \partial_\alpha A^\alpha + \square \phi \quad (8.5.32)$$

$$= \square \phi \quad (8.5.33)$$

poiché siamo già nel gauge di Lorenz. Ma:

$$\square \phi = -k^2 \phi = 0 \quad (8.5.34)$$

poiché $\partial_\alpha A'_\alpha = 0$. Ciò vuol dire allora che:

$$\begin{aligned} A'^\alpha &= \left(a_\alpha \exp\{ik \cdot x\} + a_\alpha^* \exp\{-ik \cdot x\} \right) + ik_\alpha \left(ib \exp\{ik \cdot x\} - \right. \\ &\quad \left. - ib^* \exp\{-ik \cdot x\} \right) \end{aligned} \quad (8.5.35)$$

$$= \left(a_\alpha - b k_\alpha \right) \exp\{ik \cdot x\} + \left(a_\alpha^* - b^* k_\alpha \right) \exp\{-ik \cdot x\} \quad (8.5.36)$$

$$= a'_\alpha \exp\{ik \cdot x\} + a'^*_\alpha \exp\{-ik \cdot x\} \quad (8.5.37)$$

abbiamo quindi trovato come trasforma il vettore di polarizzazione per effetto della trasformazione di gauge residua, ossia:

$$a'_\alpha = a_\alpha - b k_\alpha. \quad (8.5.38)$$

Se, dato il vettore di polarizzazione di un campo elettromagnetico nel gauge di Lorentz, effettuiamo tale trasformazione con b parametro arbitrario, troviamo un nuovo set di vettori di polarizzazione che sono sempre nel gauge di Lorentz. Possiamo quindi sfruttare la libertà di b e fissarne uno in particolare.

Ricapitolando: siamo partiti dall'equazione nel gauge armonico e quindi abbiamo le condizioni (8.5.12) e (8.5.15) e imponendo (8.5.15) troviamo (8.5.29) e (8.5.38). Sfruttando anche la libertà di b rimarranno solo 2 componenti tra loro indipendenti. Esplicitando (8.5.30) in componenti abbiamo:

$$a'_0 = a_0 - b k_0 \quad (8.5.39)$$

$$a'_1 = a_1 - b k_1 \quad (8.5.40)$$

$$a'_2 = a_2 - b k_2 \quad (8.5.41)$$

$$a'_3 = a_3 - b k_3 \quad (8.5.42)$$

siccome la propagazione avviene lungo z , allora k_1 e k_2 sono nulli; inoltre $k_0 = -k_3 = -\omega$ e $a_0 = -a_3$:

$$a'_0 = a_0 + b\omega = -a_3 + b\omega \quad (8.5.43)$$

$$a'_1 = a_1 \quad (8.5.44)$$

$$a'_2 = a_2 \quad (8.5.45)$$

$$a'_3 = a_3 - b\omega \quad (8.5.46)$$

questo è il set che ci permette di passare dai vecchi $a_{0,1,2,3}$ ai nuovi $a'_{0,1,2,3}$.

Dato che b è arbitrario, possiamo sceglierlo in modo tale da annullare a'_0 . Se scegliamo ad esempio $b = a_3/\omega$, vediamo anche che possiamo azzerare a'_3 . Allo stesso tempo a'_1 e a'_2 sono diventati invarianti di gauge. Essi corrispondono alle componenti fisiche che non possiamo arbitrariamente annullare e coincidono con le componenti trasverse alla direzione del moto dell'onda. In altri termini sono le componenti che vivono nel piano trasverso alla direzione di propagazione.

8.5.2 Onde gravitazionali

Cerchiamo una soluzione in termini di onda piana a:

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (8.5.47)$$

$$\partial_\mu h^\mu{}_\lambda = \frac{1}{2} \partial_\lambda h. \quad (8.5.48)$$

la soluzione sarà:

$$h_{\mu\nu}(x) = a_{\mu\nu} \exp\{ik \cdot x\} + a_{\mu\nu}^* \exp\{-ik \cdot x\} \quad (8.5.49)$$

dove $a_{\mu\nu}$ si chiama **tensore di polarizzazione** dell'onda gravitazionale. Già qui vediamo una differenza con l'onda elettromagnetica: l'onda gravitazionale è un tensore e quindi avrà un tensore di polarizzazione, a differenza del caso Elettromagnetismo dove abbiamo un vettore. Si noti che:

- Siccome $h_{\mu\nu}$ è un tensore simmetrico, allora anche $a_{\mu\nu}$ deve essere un tensore simmetrico:

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \quad (8.5.50)$$

e ha quindi in generale al più dieci componenti indipendenti.

- La seconda condizione che imponiamo è che:

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad \implies \quad k^2 = 0 \quad (8.5.51)$$

che è conseguenza del fatto che l'onda si propaga alla velocità della luce. Se noi avessimo possibilità di quantizzare il campo gravitazionale, questo ci porterebbe a una particella detta **gravitone**, di massa uguale a zero.

- Dobbiamo imporre di essere nel gauge armonico, quindi:

$$\partial_\mu h^\mu{}_\lambda = \frac{1}{2} \partial_\lambda h \quad (8.5.52)$$

abbiamo:

$$\partial_\mu h^\mu{}_\lambda = ik_\mu \left(a^\mu{}_\lambda \exp\{ik \cdot x\} - a_\lambda^{*\mu} \exp\{-ik \cdot x\} \right) \quad (8.5.53)$$

e:

$$\partial_\lambda h = ik_\lambda \left(a \exp\{ik \cdot x\} - a^* \exp\{-ik \cdot x\} \right). \quad (8.5.54)$$

Questo ci porta a richiedere che:

$$k_\mu a^\mu{}_\lambda = \frac{1}{2} k_\lambda a \quad (8.5.55)$$

queste sono quattro condizioni che il tensore di polarizzazione deve soddisfare.

Facciamo quindi il conto delle componenti indipendenti in gioco. Il tensore di polarizzazione, essendo un tensore simmetrico, è formato da dieci componenti indipendenti. Possiamo imporre però le quattro condizioni di gauge del gauge armonico: dunque restano soltanto sei componenti indipendenti.

Anche in tal caso possiamo fare una seconda trasformazione di coordinate, rimanendo nel gauge armonico in cui ci siamo posti adesso. Avremo:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x) \quad (8.5.56)$$

con $\varepsilon^\mu(x)$ quattro funzioni arbitrarie esprimibili come una decomposizione, del tipo:

$$\varepsilon_\mu(x) = ib_\mu \exp\{ik \cdot x\} - ib_\mu^* \exp\{-ik \cdot x\}. \quad (8.5.57)$$

Se ora sfruttiamo la libertà delle quattro funzioni ε , ovvero dei quattro parametri b , possiamo fissare altre quattro componenti del tensore di polarizzazione. Ricordando come si trasforma il campo sotto la seconda trasformazione di coordinate:

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu \quad (8.5.58)$$

la derivata di ε risulta:

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu = ik_\mu \left(ib_\nu \exp\{ik \cdot x\} + ib_\nu^* \exp\{-ik \cdot x\} \right) \quad (8.5.59)$$

$$= -k_\mu \left(b_\nu \exp\{ik \cdot x\} + b_\nu^* \exp\{-ik \cdot x\} \right) \quad (8.5.60)$$

sostituendo abbiamo:

$$\begin{aligned} h'_{\mu\nu} &= a_{\mu\nu} \exp\{+\} + a_{\mu\nu}^* \exp\{-\} + k_\mu b_\nu \exp\{+\} + \\ &\quad + k_\mu b_\nu^* \exp\{-\} + k_\nu b_\mu \exp\{+\} + k_\nu b_\mu^* \exp\{-\} \end{aligned} \quad (8.5.61)$$

$$= a'_{\mu\nu} \exp\{ik \cdot x\} + a_{\mu\nu}'^* \exp\{-ik \cdot x\} \quad (8.5.62)$$

possiamo quindi leggere come trasformano per la trasformazione di gauge residua i tensori di polarizzazione:

$$a'_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + k_\mu b_\nu + k_\nu b_\mu. \quad (8.5.63)$$

I tensori di polarizzazione $a_{\mu\nu}$ e $a'_{\mu\nu}$ rappresentano la stessa situazione fisica e i quattro parametri b sono arbitrari. Possiamo sceglierli in modo tale da far sì che al più 4 componenti $a'_{\mu\nu}$ si annullino. Il numero totale finale di gradi libertà, cioè di componenti veramente indipendenti è di nuovo 2.

Per capire quali esse siano, ripetiamo la trattazione precedente. Consideriamo un'onda piana che si muove nella direzione $x^3 = z$ e cerchiamo quali sono le componenti del tensore di polarizzazione che non sono banalmente azzerabili per trasformazione di gauge. Quindi abbiamo:

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega) \quad , \quad k_\mu = (-\omega, 0, 0, \omega) \quad (8.5.64)$$

con $k^2 = 0$. Imponiamo innanzitutto la condizione di essere nel gauge armonico:

$$k_\mu a^\mu{}_\lambda = \frac{1}{2} k_\lambda a \quad (8.5.65)$$

per $\lambda = 0$ abbiamo:

$$k_\mu a^\mu_0 = k_0 a^0_0 + k_3 a^3_0 \quad (8.5.66)$$

$$= k^0 a_{00} + k^3 a_{30} \quad (8.5.67)$$

$$= \omega (a_{00} + a_{30}) \quad (8.5.68)$$

$$\frac{1}{2} k_0 a^\mu_\mu = \frac{1}{2} (-\omega) (a^0_0 + a^1_1 + a^2_2 + a^3_3) \quad (8.5.69)$$

$$= -\frac{1}{2} \omega (-a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33}) \quad (8.5.70)$$

in cui in (8.5.67) abbiamo alzato l'indice 0 di k^0 e abbassato quello di a^0_0 , per cui cambia due volte il segno, ovvero, non cambia nulla (analogo per 3, ma senza cambio segno: usiamo la metrica piatta). Da cui:

$$a_{00} + a_{30} = -\frac{1}{2} (-a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33}) \quad (8.5.71)$$

prendiamo ora $\lambda = 1$:

$$k_\mu a^\mu_1 = k_0 a^0_1 + k_3 a^3_1 \quad (8.5.72)$$

$$= k^0 a_{01} + k^3 a_{31} \quad (8.5.73)$$

$$= \omega (a_{01} + a_{31}) \quad (8.5.74)$$

$$\frac{1}{2} k_1 a^\mu_\mu = 0 \quad (8.5.75)$$

da cui:

$$a_{01} + a_{31} = 0. \quad (8.5.76)$$

Prendiamo ora $\lambda = 2$:

$$k_\mu a^\mu_2 = k_0 a^0_2 + k_3 a^3_2 \quad (8.5.77)$$

$$= k^0 a_{02} + k^3 a_{32} \quad (8.5.78)$$

$$= \omega (a_{02} + a_{32}) \quad (8.5.79)$$

$$\frac{1}{2} k_2 a^\mu_\mu = 0 \quad (8.5.80)$$

da cui:

$$a_{02} + a_{32} = 0. \quad (8.5.81)$$

Prendiamo ora $\lambda = 3$:

$$k_\mu a^\mu_3 = k_0 a^0_3 + k_3 a^3_3 \quad (8.5.82)$$

$$= k^0 a_{03} + k^3 a_{33} \quad (8.5.83)$$

$$= \omega (a_{03} + a_{33}) \quad (8.5.84)$$

$$\frac{1}{2} k_3 a^\mu_\mu = \frac{1}{2} \omega (-a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33}) \quad (8.5.85)$$

da cui:

$$a_{03} + a_{33} = \frac{1}{2} \omega (-a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33}). \quad (8.5.86)$$

Le quattro condizioni devono essere tutte contemporaneamente valide. Scrivendo in forma matriciale $a_{\mu\nu}$ evidenziamo le componenti che entrano in gioco nelle condizioni (8.5.71), (8.5.76), (8.5.81) e (8.5.86) e che consideriamo come indipendenti abbiamo:

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (8.5.87)$$

utilizzando (8.5.76) e (8.5.81), infatti, abbiamo rispettivamente:

$$a_{01} = -a_{31} = -a_{13} \quad (8.5.88)$$

$$a_{02} = -a_{32} = -a_{23} \quad (8.5.89)$$

e da (8.5.71) + (8.5.86):

$$a_{03} = -\frac{1}{2} (a_{00} + a_{33}) \quad (8.5.90)$$

e da (8.5.71) - (8.5.86):

$$a_{22} = -a_{11}. \quad (8.5.91)$$

Quindi le sei componenti indipendenti, dopo aver utilizzato la condizione di gauge armonico, sono a_{00} , a_{11} , a_{13} , a_{23} e a_{33} , derivanti dalle condizioni (8.5.71), (8.5.76), (8.5.81) e (8.5.86) più la componente a_{12} , non compresa da tali condizioni, quindi libera.

Operiamo ora la seconda trasformazione di gauge, dopo la quale abbiamo detto resteranno due componenti fisiche non azzerabili. Le componenti indipendenti su cui lavoriamo sono quelle evidenziate precedentemente. Usando

(8.5.63) arriviamo a:

$$a'_{00} = a_{00} + k_0 b_0 + k_0 b_0 \quad (8.5.92)$$

$$= a_{00} - 2\omega b_0 \quad (8.5.93)$$

$$a'_{11} = a_{11} + k_1 b_1 + k_1 b_1 \quad (8.5.94)$$

$$= a_{11} \quad (8.5.95)$$

$$a'_{12} = a_{12} + k_1 b_2 + k_2 b_1 \quad (8.5.96)$$

$$= a_{12} \quad (8.5.97)$$

$$a'_{13} = a_{13} + k_1 b_3 + k_3 b_1 \quad (8.5.98)$$

$$= a_{13} + \omega b_1 \quad (8.5.99)$$

$$a'_{23} = a_{23} + k_2 b_3 + k_3 b_2 \quad (8.5.100)$$

$$= a_{23} + \omega b_2 \quad (8.5.101)$$

$$a'_{33} = a_{33} + k_3 b_3 + k_3 b_3 \quad (8.5.102)$$

$$= a_{33} + 2\omega b_3 \quad (8.5.103)$$

notiamo subito che a_{11} e a_{12} sono gauge invarianti: non le possiamo azzerare arbitrariamente quindi contengono il significato fisico. Essendo $b_{0,1,2,3}$ arbitrari possiamo sceglierli in modo che le rispettive componenti in cui compaiono si annullino.

Ribattezziamo le due componenti fisiche dell'onda gravitazionale:

$$a_{11} \equiv h_+ = -a_{22} \quad (8.5.104)$$

$$a_{12} \equiv h_x = a_{21} \quad (8.5.105)$$

la quantità h_x è da leggersi h cross. In forma matriciale avremo allora:

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_x & 0 \\ 0 & h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.5.106)$$

le componenti dell'onda gravitazionale, che sono fisiche, sono relative al piano trasverso (piano 1-2) anche in tal caso.

Il gauge armonico viene anche chiamato **gauge TT**, perché è traceless e trasverse - trasverso alla direzione del moto e a traccia 0. In conclusione, anche l'onda gravitazionale si propaga alla velocità della luce ed è un'onda trasversa, ma, a differenza del caso Elettromagnetismo, è strutturalmente un tensore.

8.5.3 Elicità

Onde EM e onde gravitazionali sono entrambe onde trasverse che viaggiano alla velocità c , però hanno delle diverse proprietà per per rotazioni spaziali:

questo si può esprimere attraverso la grandezza chiamata **elicità**.

Ricordiamo che stiamo vedendo l'onda come propagarsi in uno spazio-tempo piatto. Una rotazione spaziale attorno all'asse $x^3 = z$ si può esprimere attraverso una matrice R :

$$R = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (8.5.107)$$

R fa parte delle trasformazioni del gruppo di Lorentz, solo che non coinvolgendo trasformazioni che coinvolgono spazio e tempo, cioè dei boost, corrispondono semplicemente a una rotazione spaziale.⁵ Un tensore $e_{\mu\nu}$ per trasformazione di Lorentz si trasforma come:

$$e_{\mu\nu} \longrightarrow e'_{\mu\nu} = R_\mu{}^\rho R_\nu{}^\sigma e_{\rho\sigma} \quad (8.5.108)$$

e ponendo $e_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}$ otteniamo come si trasforma il tensore di polarizzazione per rotazioni spaziali. Se consideriamo invece un vettore, la sua trasformazione sarà:

$$e_\mu \longrightarrow e'_\mu = R_\mu{}^\rho e_\rho \quad (8.5.109)$$

che possiamo applicare al vettore di polarizzazione del campo elettromagnetico.

Consideriamo il caso tensoriale. Si può dimostrare che per le combinazioni:

$$e_\pm = e_{11} \mp ie_{12} = -e_{22} \mp ie_{12} \quad (8.5.110)$$

$$f_\pm = e_{31} \mp ie_{32} = -e_{01} \pm ie_{02} \quad (8.5.111)$$

valgono le seguenti proprietà: per trasformazione di rotazione attorno all'asse z si ha:

$$e'_\pm = e_\pm e^{\pm(2i\theta)} \quad , \quad f'_\pm = f_\pm e^{\pm(i\theta)} \quad (8.5.112)$$

$$e'_{00} = e_{00} \quad , \quad e'_{33} = e_{33}. \quad (8.5.113)$$

Per effetto di rotazioni le componenti $e_\pm$ (che sono poi le componenti del tensore dell'onda gravitazionale) hanno una trasformazione di fase, mentre e_{00} ed e_{33} non trasformano. In generale, se per effetto di una rotazione delle coordinate spaziali si ha:

$$\psi \xrightarrow{\text{rot}} \psi' = e^{ih\theta} \psi \quad (8.5.114)$$

⁵Puoi vedere le note [Gemme di Teoria dei Gruppi](#) per dettagli.

si dice che ψ ha un'elicità h . Troviamo allora:

$$e_{\pm} : h = \pm 2 \quad (8.5.115)$$

$$f_{\pm} : h = \pm 1 \quad (8.5.116)$$

$$e_{00}, e_{33} : h = 0. \quad (8.5.117)$$

Le componenti fisiche dell'onda gravitazionale, cioè e_{11} e e_{12} , sono contenute in $e_{\pm}$, mentre le altre non ne contengono, dunque si trasformano con elicità pari a 2. Nota che l'elicità dell'onda classica è quella che poi diventa lo spin quando si quantizza il campo. Anche se con la seguente affermazione stiamo facendo un salto un po' ardito, immaginando di conoscere il gravitone, particella associata all'onda gravitazionale, potremmo dire quello scritto in tabella 8.24.

Onda gravitazionale	Gravitone
$v = c$	$m = 0$
trasversa 2 polarizzazioni	2 d.o.f.
$h = 2$	$s = 2$

Figura 8.24

Per completezza, lo stesso discorso sull'elicità si può ripetere anche per il campo elettromagnetico nel caso di un vettore. Sotto l'effetto di una rotazione spaziale di un angolo θ attorno all'asse z :

$$a_{\alpha} \longrightarrow a'_{\alpha} = R_{\alpha}^{\beta} a_{\beta} \quad (8.5.118)$$

avremo:

$$a_{\pm} = a_1 \mp ia_2 \quad \& \quad a_3 \quad (8.5.119)$$

che trasformano come:

$$a'_{\pm} = a_{\pm} e^{i\theta} \quad (h = 1) \quad (8.5.120)$$

$$a'_3 = a_3 \quad (h = 0) \quad (8.5.121)$$

e notiamo subito che $a_{\pm}$ sono costruiti con le componenti fisiche dell'onda elettromagnetica. Perciò abbiamo quello riportato in tabella 8.25.

Onda elettromagnetica	Fotone
$v = c$	$m = 0$
trasversa 2 polarizzazioni	2 d.o.f.
$h = 1$	$s = 1$

Figura 8.25

Rispetto al caso dell'onda gravitazionale vi è quindi anche una differenza sull'elicità.

8.5.4 Effetto del passaggio di un'onda piana gravitazionale

L'onda gravitazionale è una perturbazione della metrica dello spazio-tempo che si propaga come onda, quindi come perturbazione che viaggia alla velocità della luce. Il fatto che la perturbazione ondosa cambi la metrica, significa che cambiano le distanze tra due punti dello spazio-tempo. Possiamo quindi intendere l'onda gravitazionale come una deformazione della distanza tra due punti nello spazio-tempo. Per studiare l'effetto del passaggio di un'onda piana, consideriamo la separazione s_μ tra due geodetiche vicine $x^\mu(\tau)$, con τ parametro affine, e $x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + s^\mu$. L'equazione con cui evolve la separazione è:

$$\frac{D^2 s^\rho}{D\tau^2} = R^\rho{}_{\nu\lambda\mu} s^\lambda u^\nu u^\mu \quad (8.5.122)$$

per convenienza riscriviamola abbassando gli indici:

$$\frac{D^2 s_\rho}{D\tau^2} = R_{\rho\nu\lambda\mu} s^\lambda u^\nu u^\mu. \quad (8.5.123)$$

Studiamo l'evoluzione della separazione delle geodetiche quando $g_{\mu\nu}$ è quello dell'onda piana gravitazionale. s^μ è la separazione e u^μ è la quadri-velocità delle due test particles. Consideriamo il caso di test particles dotate di moti lenti in modo tale che le velocità in gioco siano piccole. Se il moto è lento allora u^i , parte spaziale di u^μ , è piccola. Nell'equazione di evoluzione della separazione delle geodetiche, abbiamo il prodotto di due quadri-velocità moltiplicate ancora per il tensore di Riemann, già di ordine h . Sarà quindi sufficiente prendere u^μ all'ordine 0, cioè come:

$$u^\mu = (u^0, \vec{0}) \quad (8.5.124)$$

$$= ((-g_{00})^{1/2}, \vec{0}) \quad (8.5.125)$$

$$= ([-(-1 + h_{00})]^{1/2}, \vec{0}) \quad (8.5.126)$$

$$\simeq (1, \vec{0}) \quad (8.5.127)$$

poiché già il tensore di Riemann è all'ordine $\sim h$. Si noti che:

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = 1 \quad \longrightarrow \quad d\tau = dt \quad (8.5.128)$$

cioè dt è di fatto una misura del tempo coordinato. Avremo allora:

$$R_{\rho\nu\lambda\mu} s^\lambda u^\nu u^\mu \simeq R_{\rho 0 \lambda 0} s^\lambda \quad (8.5.129)$$

a primo membro di (8.5.123) facciamo un'altra approssimazione forte. Approssimiamo la derivata covariante con quella ordinaria e poniamo $t = \tau$:

$$\frac{D^2 s_\rho}{D\tau^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 s_\rho}{dt^2} \quad (8.5.130)$$

allora l'equazione di evoluzione della separazione delle geodetiche risulta:

$$\frac{d^2 s_\rho}{dt^2} = R_{\rho 0 \lambda 0} s^\lambda. \quad (8.5.131)$$

Vediamo che la variazione è proprio dovuta all'effetto mareale, contenuto in $R_{\rho 0 \lambda 0}$, dovuto al passaggio dell'onda. Calcoliamo quindi tale componente del tensore di Riemann. Sappiamo che nel caso linearizzato è (8.4.20), mentre nel nostro caso è:

$${}^{(1)}R_{\rho 0 \lambda 0} = \frac{1}{2} \left(\partial_0 \partial_0 h_{\lambda \rho} + \partial_\lambda \partial_\rho h_{00} - \partial_0 \partial_\rho h_{0\lambda} - \partial_\lambda \partial_0 h_{0\rho} \right). \quad (8.5.132)$$

Stiamo parlando di un'onda gravitazionale, quindi il tensore metrico $h_{\mu\nu}$ è quello dell'onda gravitazionale. Poniamoci nel **gauge TT**. Le componenti non nulle sono:

$$h_{11} = a_{11} \exp\{+\} + a_{11}^* \exp\{-\} \quad (8.5.133)$$

e le componenti non nulle di h_{11} sono:

$$a_{11} = -a_{22} = h_+ \quad (8.5.134)$$

$$a_{12} = -a_{21} = h_x \quad (8.5.135)$$

il che semplifica enormemente la forma del tensore di Riemann, che si riduce a:

$${}^{(1)}R_{\rho 0 \lambda 0} = \frac{1}{2} \partial_0^2 h_{\lambda \rho} \quad (8.5.136)$$

sostituendo nell'equazione di evoluzione:

$$\frac{d^2 s_\rho}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 h_{\lambda \rho}}{dt^2} s^\lambda \quad (8.5.137)$$

in cui:

$$h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp\{ik \cdot x\} + a_{\mu\nu}^* \exp\{-ik \cdot x\} \quad (8.5.138)$$

$$= 2 \operatorname{Re}\{a_{\mu\nu} \exp\{ik \cdot x\}\} \quad (8.5.139)$$

$$= 2a_{\mu\nu} \cos k_\rho x^\rho \quad (8.5.140)$$

in cui in (8.5.140) abbiamo fatto la scelta di prendere $a_{\mu\nu}$ reali. Consideriamo che la propagazione avvenga nella direzione $x^3 = z$, allora:

$$k_\rho x^\rho = (\omega z - \omega t) \quad (8.5.141)$$

dunque:

$$h_{\mu\nu} = 2a_{\mu\nu} \cos(\omega z - \omega t) \quad (8.5.142)$$

$$\frac{d^2 s_\rho}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 h_{\lambda \rho}}{dt^2} s^\lambda \quad (8.5.143)$$

queste sono quattro equazioni differenziali, che ora esplicitiamo una per una. Abbiamo:

$$\frac{d^2 s_0}{dt^2} = \frac{1}{2} s^\lambda \frac{d^2 h_{\lambda 0}}{dt^2} = 0 \quad (8.5.144)$$

poiché $h_{\lambda 0} = 0$. Ciò significa che la separazione temporale, cioè tra gli orologi delle due test particle è:

$$s_0 = A + Bt \quad (8.5.145)$$

una soluzione possibile è per esempio che:

$$t = 0 : \quad s_0(0) = A. \quad (8.5.146)$$

Inoltre, se i due orologi sono inizialmente fermi uno rispetto all'altro, cioè $s'_0(0) = B = 0$ allora la separazione è sempre la stessa, cioè $A = \text{cost}$. Il passaggio di un'onda gravitazionale trasversalmente al piano in cui ho i due oggetti non produce alcun effetto sugli orologi, che restano gli stessi.

Per $\rho = 3$ abbiamo invece:

$$\frac{d^2 s_3}{dt^2} = \frac{1}{2} s^\lambda \frac{d^2 h_{\lambda 3}}{dt^2} = 0 \quad (8.5.147)$$

nuovamente poiché $h_{\lambda 3} = 0$. Perciò:

$$s_3 = A + Bt. \quad (8.5.148)$$

La quantità s_3 è la separazione nella direzione del moto dell'onda tra le due test particle. Se a $t = 0$ le due test particle sono sul medesimo piano ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda, allora non hanno separazione nella direzione del moto, cioè $s_3 = 0$. Se invece sono una un po' più avanti e una un po' più indietro avranno una separazione $s_3 = a$, ma se non si stanno muovendo relativamente una rispetto all'altra nella direzione 3, allora $s'_3 = 0$ e $a = \text{cost}$. Il passaggio dell'onda non produce alcun effetto. Se invece si muovono con velocità costante la separazione cresce linearmente nel tempo e se passa l'onda gravitazionale continuerà a crescere linearmente nel tempo.

Di fatto è quello che ci aspettiamo perché un'onda gravitazionale è un'onda trasversa, quindi le perturbazioni gravitazionali non nulle o non annullabili, cioè fisiche, sono solo nella direzione trasversa al moto. Scriviamo quindi l'equazione del moto nella direzione 1 e 2:

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} = \frac{1}{2} s^\lambda \frac{d^2 h_{\lambda 1}}{dt^2} \quad (8.5.149)$$

$$= \frac{1}{2} s^1 \frac{d^2 h_{11}}{dt^2} + \frac{1}{2} s^2 \frac{d^2 h_{12}}{dt^2} \quad (8.5.150)$$

$$\frac{d^2 s_2}{dt^2} = \frac{1}{2} s^\lambda \frac{d^2 h_{\lambda 2}}{dt^2} \quad (8.5.151)$$

$$= \frac{1}{2} s^1 \frac{d^2 h_{21}}{dt^2} + \frac{1}{2} s^2 \frac{d^2 h_{22}}{dt^2} \quad (8.5.152)$$

scriviamo esplicitamente le componenti di $h_{\mu\nu}$ e deriviamo:

$$h_{11} = 2a_{11} \cos(k \cdot x) \quad (8.5.153)$$

$$= 2h_+ \cos(k \cdot x) \quad (8.5.154)$$

$$= -h_{22} \quad (8.5.155)$$

$$h_{12} = 2a_{12} \cos(k \cdot x) \quad (8.5.156)$$

$$= 2h_x \cos(k \cdot x) \quad (8.5.157)$$

$$= h_{21} \quad (8.5.158)$$

da cui:

$$\frac{d^2 s^1}{dt^2} = s^1(t) \frac{d^2}{dt^2} [h_+ \cos(k \cdot x)] + s^2(t) \frac{d^2}{dt^2} [h_x \cos(k \cdot x)] \quad (8.5.159)$$

$$\frac{d^2 s^2}{dt^2} = s^1(t) \frac{d^2}{dt^2} [h_x \cos(k \cdot x)] - s^2(t) \frac{d^2}{dt^2} [h_+ \cos(k \cdot x)] \quad (8.5.160)$$

queste sono le due componenti della separazione nel piano trasverso che sentono l'effetto del passaggio dell'onda gravitazionale. Discutiamo separatamente i casi.

A. Onda gravitazionale polarizzata nel modo h_+ ($h_x = 0$). Avremo:

$$\frac{d^2 s^1}{dt^2} = s^1(t) \frac{d^2}{dt^2} [h_+ \cos(k \cdot x)] \quad (8.5.161)$$

$$\frac{d^2 s^2}{dt^2} = -s^2(t) \frac{d^2}{dt^2} [h_+ \cos(k \cdot x)] \quad (8.5.162)$$

le due equazioni sono disaccoppiate: le due separazioni evolvono indipendentemente al passaggio di un'onda polarizzata h_+ . Per risolvere cerchiamo una soluzione che sia giusta all'ordine h . Scriviamo:

$$s^1(t) = s^1(0) + s^1(0) h_+ \cos(k \cdot x) \quad (8.5.163)$$

per verificare che questa soluzione sia accettabile, sostituiamola nella equazione di partenza:

$$\frac{d^2 s^1}{dt^2} = s^1(0) \frac{d^2}{dt^2} [h_+ \cos(k \cdot x)] \quad (8.5.164)$$

$$= s^1(t) \frac{d^2}{dt^2} [h_+ \cos(k \cdot x)] \quad (8.5.165)$$

possiamo sostituire $s^1(t)$ a $s^1(0)$ poiché all'ordine h le due scritture della derivata seconda coincidono! Essa risulta quindi la corretta soluzione. Analogamente anche per s^2 possiamo richiedere:

$$s^1(t) = s^2(0) - s^2(0) h_+ \cos(k \cdot x). \quad (8.5.166)$$

Le due particelle, inizialmente ($t = 0$) separate di una quantità $s^1(0)$ nella direzione orizzontale, quando arriva l'onda cominciano a oscillare armonicamente in quella direzione: la loro separazione varia armonicamente ed è proporzionale proprio all'ampiezza dell'onda gravitazionale h_+ . Questo lo possiamo anche esprimere come:

$$s^1(t) - s^1(0) = s^1(0) h_+ \cos(k \cdot x) \quad \text{oscillazione armonica.} \quad (8.5.167)$$

Lo stesso avviene nella direzione 2 perpendicolare alla 1: l'oscillazione è armonica con l'ampiezza uguale all'ampiezza dell'onda. Si noti però la presenza del segno - in questo caso: l'oscillazione è in *controfase* tra la direzione 1 e la direzione 2 quando nella direzione 1. La tipica rappresentazione è quella fatta su un *anello di test particles* in figura 8.26. Quando nella direzione 1 le test particles si avvicinano, si allontanano nella direzione 2 e viceversa.

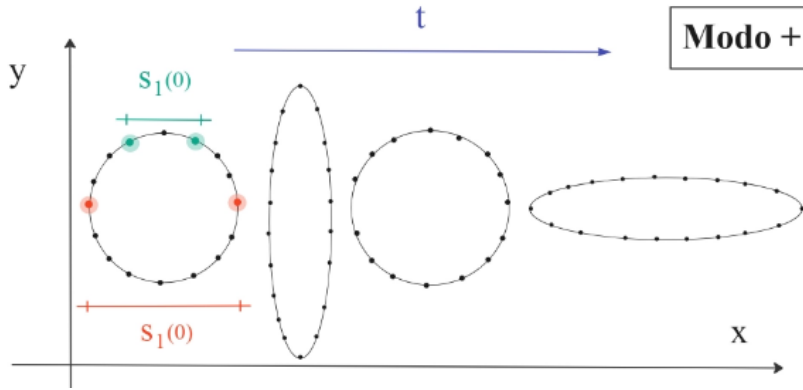


Figura 8.26

Onda gravitazionale polarizzata nel modo h_x ($h_+ = 0$). Avremo:

$$\frac{d^2 s^1}{dt^2} = s^2(t) \frac{d^2}{dt^2} [h_x \cos(k \cdot x)] \quad (8.5.168)$$

$$\frac{d^2 s^2}{dt^2} = s^1(t) \frac{d^2}{dt^2} [h_x \cos(k \cdot x)] \quad (8.5.169)$$

in tal caso i modi sono accoppiati. Con lo stesso ragionamento, le soluzioni di prova sono:

$$s^1(t) = s^1(0) + s^2(0) h_x \cos(k \cdot x) \quad (8.5.170)$$

$$s^2(t) = s^2(0) + s^1(0) h_x \cos(k \cdot x). \quad (8.5.171)$$

Sostituendo, si può verificare che queste sono le soluzioni all'ordine h . Rappresentiamo cosa succede prendendo un anello di test particles come in figura 8.27.

Punti che hanno una separazione iniziale $s^1(0)$ ($s^2(0)$), ma hanno $s^2(0) = 0$ ($s^1(0) = 0$) non oscillano una relativamente all'altra. Solo punti con $s^1(0)$ e $s^2(0)$ diversi da zero oscillano relativamente l'uno rispetto all'altro e in ciascuna direzione oscillano proporzionalmente a quanto sono separati nell'altra e proporzionalmente al campo gravitazionale.

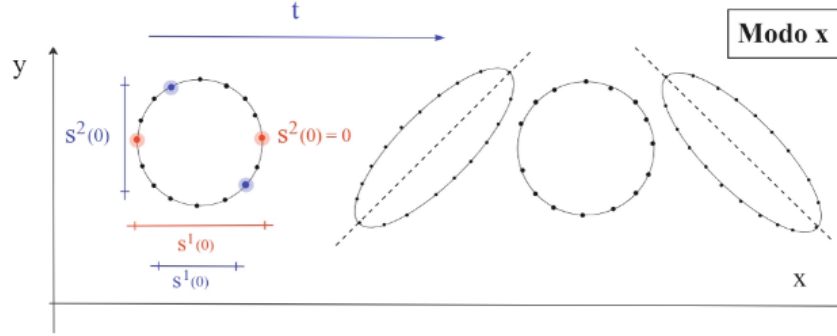


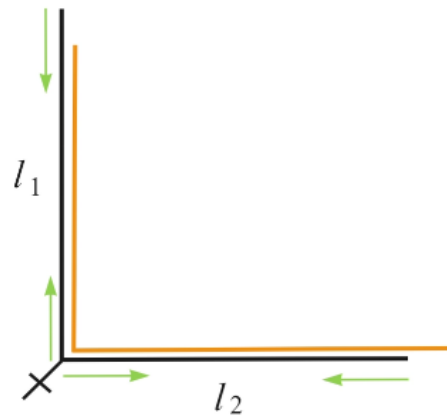
Figura 8.27

Avendo due stati di polarizzazione si possono anche definire polarizzazioni circolari *left* e *right*:

$$h_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (h_+ - ih_x) \quad (8.5.172)$$

$$h_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (h_+ + ih_x). \quad (8.5.173)$$

Ad ogni modo, l'onda gravitazionale produce della variazione delle distanze, quindi delle deformazioni degli oggetti, nel piano tangente alla direzione di propagazione dell'onda e l'entità della variazione è proporzionale alla ampiezza dell'onda stessa. Questo fa capire per quale motivo per studiare il passaggio di un'onda gravitazionale si può usare un interferometro. Vedi la figura 8.28. Avendo due bracci di un interferometro disposti a 90° uno rispetto all'altro, se passa l'onda gravitazionale perpendicolare al piano del foglio, un braccio si accorcerà e l'altro braccio si allungherà. Se utilizziamo un dispositivo laser che strutturiamo in modo tale da non avere immagini di interferenza quando l'interferometro è fermo, risulta evidente che al passaggio dell'onda, cominciamo a vedere un pattern di interferenza. Da questo pattern possiamo misurare l'entità della deformazione che è proporzionale all'ampiezza dell'onda gravitazionale che è passata. Dobbiamo essere in grado di misurare delle deformazioni estremamente piccole, cosa che possiamo fare solo utilizzando il fenomeno dell'interferenza. Le ampiezze che si riescono a misurare quest'oggi in tal modo sono dell'ordine per esempio di $h_{00} \sim 10^{-21}$. Per questa misura è quindi conveniente prendere un braccio grande (LIGO = 4 km, VIRGO = 3 km). La lunghezza dei bracci dell'interferometro decide

**Figura 8.28**

anche il range di frequenze dell'onda gravitazionale che possiamo misurare. Per misurare onde gravitazionali molto lunghe un'idea è quella di andare nello spazio, vedi l'esperimento LISA, in cui i bracci dell'interferometro sono semplicemente nel vuoto e la sua idea è di farlo con dei bracci dell'ordine di un milione di chilometri.

Appendici

Appendice A

Convenzioni varietà

Vediamo in questa brevissima Appendice alcune convenzioni, ma soprattutto definizioni, che si utilizzano tipicamente in Geometria Differenziale, o in Relatività Generale, quando si parla di varietà e tensori metrici.

Quando il tensore metrico, in uno spazio N dimensionale è della forma:

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, -1, \dots, -1, +1, +1, \dots, +1, 0, \dots, 0)$$

allora si dice che la metrica è nella **forma canonica**, ovvero, in una forma in cui è diagonale. Se lo spazio è piatto è sempre possibile avere un sistema di riferimento in cui i coefficienti sono tutti costanti, in particolare sono tutti $+1, 0, -1$.

Chiamiamo **segnatura** della metrica il numero di autovalori rispettivamente positivi, negativi o nulli. Per esempio, lo spazio Euclideo in tre dimensioni ha segnatura $(+, +, +)$, mentre lo spazio di Minkowski ha una segnatura $(-, +, +, +)$.

Diciamo che la metrica è **degenere** se ci sono degli autovalori nulli.

Riguardo gli indici del tensore metrico. Si utilizzano indici latini $i, j, k, l, \dots$ per indicare gli indici di *coordinate di tipo spazio*; nel canonico spazio-tempo quadridimensionale $\mathbb{M}^4$ saranno gli indici $1, 2, 3$.

Si usano indici greci, con le prime lettere dell'alfabeto, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ per indicare gli indici che corrono su tutte e quattro le *coordinate dello spaziotempo di Minkowski* (della Relatività Speciale). In particolare $\alpha = 0$ è relativo alla coordinata tempo e $\alpha = 1, 2, 3$ è per le coordinate di tipo spazio.

Gli indici greci, ma con lettere un po' più alte nell'ordinamento dell'alfabeto, per indicare sempre coordinate spaziotemporali, ma per uno spazio-tempo *curvo*. Quindi per esempio diremo:

η_{ij}	:	tensore metrico dello spazio euclideo
$\eta_{\alpha\beta}$	:	tensore metrico dello spazio di Minkowski
$g_{\mu\nu}$	:	tensore metrico dello spaziotempo curvo.

A.1 Segni

È importante anche tenere a mente che ci sono varie definizioni del tensore metrico di Minkowski, che differiscono solo per un segno. Infatti, possiamo scrivere, in modo equivalente:

$$\begin{aligned} A : \quad & \text{diag}(\eta) = (-1, +1, +1, +1) \\ B : \quad & \text{diag}(\eta) = (+1, -1, -1, -1) \end{aligned}$$

che portano a:

$$\begin{aligned} A : \quad & ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ B : \quad & ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \end{aligned}$$

In particolare, la scelta A è quella che solitamente si fa in Relatività Generale, mentre la scelta B è quella che si utilizza in Teoria Quantistica dei Campi.

Notiamo anche che pure il tensore di Riemann e le equazioni di Einstein possono essere definiti in due modi differenti, che differiscono per un segno.

A.2 Varietà

Segnatura	Piatto	Curvo
Tutti + (o -)	Euclideo	Riemanniano
Un - (o +) e gli altri + (o -)	Minkowski	Pseudo-Riemanniano
$(n -, m +)$	Pseudo-Euclideo	Generico

Appendice B

Dimostrazioni proprietà derivata covariante

Dimostriamo in questa breve appendice due proprietà molto utili che nella sezione §5.3.1 abbiamo un po' ignorato e preso per buone.

B.1 Proprietà 1

Noi nella sezione §5.3.1 abbiamo preso per buona la relazione:

$$\partial_\lambda g = g g^{\rho\sigma} \partial_\lambda g_{\rho\sigma} \quad (\text{B.1.1})$$

con:

$$g = |\det g_{\mu\nu}|. \quad (\text{B.1.2})$$

L'espressione (B.1.1) è equivalente al seguente teorema per matrici:

$$\text{Tr}\{G^{-1} \partial_\lambda G\} = \partial_\lambda \left[\ln(\det G) \right]. \quad (\text{B.1.3})$$

Tale teorema vale in generale per una qualunque matrice G , ma se consideriamo una matrice G che contiene nel suo elemento $(G)_{\mu\nu}$ la componente $g_{\mu\nu}$ del tensore metrico e la matrice G^{-1} che contiene gli elementi del tensore metrico inverso $g^{\mu\nu}$, l'espressione matriciale (B.1.3) è uguale alla proprietà (B.1.1) che abbiamo utilizzato (è immediato dimostrarlo). Dimostriamo il teorema tra matrici. Consideriamo l'elemento $\mu\nu$ del prodotto di matrici G^{-1} e $\partial_\lambda G$:

$$[G^{-1} \partial_\lambda G]_{\mu\nu} = \sum_\rho (G^{-1})_{\mu\rho} \partial_\lambda G_{\rho\nu} = g^{\mu\rho} \partial_\lambda g_{\rho\nu} \quad (\text{B.1.4})$$

gli indici che identificano la posizione della matrice si scrivono in basso per convenzione e non vanno confusi con le componenti di tensori. Vediamo infatti che l'elemento del prodotto tra matrici si esprime usando il tensore

metrico e il suo inverso. Prendere la traccia della matrice significa sommare gli elementi $\mu\mu$, dunque:

$$\sum_{\mu} [G^{-1} \partial_{\lambda} G]_{\mu\mu} = \text{Tr}\{G^{-1} \partial_{\lambda} G\} = g^{\mu\rho} \partial_{\lambda} g_{\mu\rho} \quad (\text{B.1.5})$$

dove abbiamo usato la simmetria del tensore metrico per cui $g_{\mu\rho} = g_{\rho\mu}$ in quanto è simmetrico. In tal modo riscriviamo il primo membro del teorema. Concentriamoci ora sul secondo membro:

$$\partial_{\lambda} \ln |\det G| = \partial_{\lambda} \ln g \quad (\text{B.1.6})$$

in cui ci siamo ricordati che G contiene il tensore metrico. Però possiamo anche scrivere:

$$g^{\mu\rho} \partial_{\lambda} g_{\mu\rho} = \partial_{\lambda} \ln g = \frac{1}{g} \partial_{\lambda} g \quad (\text{B.1.7})$$

che ci porta a dire:

$$\partial_{\lambda} g = g g^{\mu\rho} \partial_{\lambda} g_{\mu\rho} \quad (\text{B.1.8})$$

cioè l'espressione che volevamo dimostrare. Chiaramente la matrice G^{-1} è la matrice inversa di G in quanto una matrice è inversa di un'altra se il suo elemento:

$$(G G^{-1})_{\alpha\beta} = (\mathbb{1})_{\alpha\beta} \quad (\text{B.1.9})$$

se svolgiamo il prodotto matriciale a primo membro:

$$\sum_{\rho} (G^{-1})_{\alpha\rho} (G)_{\rho\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{B.1.10})$$

sostituendo gli elementi di matrice abbiamo la conferma che G^{-1} è la matrice inversa di G :

$$g^{\alpha\rho} g_{\rho\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \quad (\text{B.1.11})$$

essendo la relazione corretta che c'è tra il tensore metrico e il tensore metrico inverso.

Ci resta da dimostrare che questo tipo di teorema vale per una qualunque matrice G . Consideriamo una matrice $G = G(x)$, funzione della posizione, e prendiamo nel limite di piccole variazioni:

$$G(x + \delta x) = G(x) + \partial_{\lambda} G(x) \delta x^{\lambda} + \dots \quad (\text{B.1.12})$$

$$= G(x) + \delta G(x) \quad (\text{B.1.13})$$

trascurando i termini di ordine superiore. Richiamando il teorema (B.1.3), valutiamo la variazione del logaritmo del determinante per piccoli spostamenti. Se la variazione è piccola, abbiamo:

$$\delta [\ln |\det G|] = \ln |\det(G + \delta G)| - \ln |\det(G)| \quad (\text{B.1.14})$$

$$= \ln \frac{\det(G + \delta G)}{\det(G)} \quad (\text{B.1.15})$$

$$= \ln [\det(G^{-1}) \det(G + \delta G)] \quad (\text{B.1.16})$$

infatti siccome:

$$G^{-1} G = \mathbb{1} \implies \det(G^{-1} G) = \det(\mathbb{1}) \quad (\text{B.1.17})$$

$$\implies \det(G^{-1}) \det(G) = 1 \quad (\text{B.1.18})$$

$$\implies \det(G^{-1}) = \frac{1}{\det(G)}. \quad (\text{B.1.19})$$

Riprendendo (B.1.16) e mettendo dentro (B.1.19):

$$\delta \left[\ln |\det G| \right] = \ln \left[\det(G^{-1}) \det(G + \delta G) \right] \quad (\text{B.1.20})$$

$$= \ln \left[\det(G^{-1} G + G^{-1} \delta G) \right] \quad (\text{B.1.21})$$

$$= \ln \left[\det(\mathbb{1} + G^{-1} \delta G) \right]. \quad (\text{B.1.22})$$

Ora, a noi interessa rimanere all'ordine più basso in δG . Noi abbiamo il determinante di una matrice $X = \mathbb{1} + G^{-1} \delta G$, cioè dell'identità più qualcosa che deforma dall'identità. L'elemento $\alpha\beta$ è:

$$X_{\alpha\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} + (G^{-1})_{\alpha\gamma} (\delta G)_{\gamma\beta} = \begin{pmatrix} 1 + \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & 1 + \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & 1 + \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta & 1 + \Delta \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.23})$$

quando facciamo il determinante dobbiamo prendere la combinazione lineare totalmente antisimmetrica in cui ogni termine dello sviluppo del determinante contiene un solo elemento su ogni riga e colonna. Però se ci pensiamo un attimo, gli unici termini che sono al più di ordine δ , li otteniamo solo quando facciamo il prodotto sulla diagonale, vale a dire:

$$\det[X] = \prod_{\alpha} (1 + \Delta_{\alpha}) \quad (\text{B.1.24})$$

in cui stiamo indicando con $\Delta_{\alpha} = (G^{-1} \delta G)_{\alpha\alpha}$. Esplicitando la produttoria:

$$\prod_{\alpha} (1 + \Delta_{\alpha}) = (1 + \Delta_1) (1 + \Delta_2) (1 + \Delta_3) (1 + \Delta_4) \quad (\text{B.1.25})$$

$$= 1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \mathcal{O}(\Delta^2) \quad (\text{B.1.26})$$

e otteniamo quindi:

$$\det[X] = \prod_{\alpha} (1 + \Delta_{\alpha}) \quad (\text{B.1.27})$$

$$= 1 + \sum_{\alpha} (G^{-1} \delta G)_{\alpha\alpha} \quad (\text{B.1.28})$$

$$= 1 + \sum_{\alpha} (G^{-1})_{\alpha\gamma} (\delta G)_{\gamma\alpha} \quad (\text{B.1.29})$$

$$= 1 + \text{Tr}\{G^{-1} \delta G\} \quad (\text{B.1.30})$$

o possiamo scrivere come 1 più la sommatoria su α di termini g , perché stiamo facendo la somma sulla diagonale che è proprio la traccia. Otteniamo allora che:

$$\delta \ln |\det G| = \ln \left[\det(\mathbb{1} + G^{-1} \delta G) \right] \quad (\text{B.1.31})$$

$$= \ln \left[1 + \text{Tr}\{G^{-1} \delta G\} \right] \quad (\text{B.1.32})$$

$$\sim \text{Tr}\{G^{-1} \delta G\} \quad (\text{B.1.33})$$

in cui abbiamo utilizzato lo sviluppo $\ln(1 + \varepsilon) \sim \varepsilon$. Comunque abbiamo trovato che all'ordine più basso nelle quantità piccole:

$$\delta \ln |\det G| = \text{Tr}\{G^{-1} \delta G\}. \quad (\text{B.1.34})$$

Dunque abbiamo imparato da (B.1.13) che:

$$\delta G = \partial_\lambda G \delta x^\lambda + \mathcal{O}(\delta x^2)$$

conseguentemente che:

$$\text{Tr}\{G^{-1} \delta G\} = \text{Tr}\{G^{-1} \partial_\lambda G\} \delta x^\lambda + \mathcal{O}(\delta x^2)$$

$$\delta \ln |\det G| = \partial_\lambda \ln |\det G| \delta x^\lambda + \mathcal{O}(\delta x^2).$$

Se eseguiamo il limite per $\delta x^\lambda \rightarrow 0$ otteniamo:

$$\lim_{\delta x^\lambda \rightarrow 0} \frac{\delta \ln |\det G|}{\delta x^\lambda} = \partial_\lambda \ln |\det G| \quad (\text{B.1.35})$$

$$= \lim_{\delta x^\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{Tr}\{G^{-1} \delta G\}}{\delta x^\lambda} \quad (\text{B.1.36})$$

$$= \text{Tr}\{G^{-1} \partial_\lambda G\} \quad (\text{B.1.37})$$

e troviamo quindi il teorema che volevamo dimostrare.

B.2 Proprietà 2

Ora mostriamo esplicitamente che ciò che abbiamo definito come derivata covariante di un vettore si trasforma effettivamente come un vettore anche quando la derivata covariante è calcolata lungo un cammino. La derivata covariante lungo un cammino parametrizzata dal parametro τ l'avevamo definita come:

$$\frac{D A^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{dx'^\lambda}{d\tau} A'^\nu \quad (\text{B.2.1})$$

scriviamo esplicitamente tutte le trasformazioni di ogni elemento che compare in (B.2.1):

- Il primo termine della somma trasforma come:

$$\frac{dA'^\mu}{d\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dA^\nu}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu \quad (\text{B.2.2})$$

dal momento che A^ν trasforma come (B.2.5).

- La connessione nel secondo termine trasforma come:

$$\Gamma'^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \Gamma^\rho{}_{\tau\sigma} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}. \quad (\text{B.2.3})$$

- Il secondo termine moltiplicativo del secondo addendo è:

$$\frac{dx'^\lambda}{d\tau} = \frac{dx'^\lambda}{dx^\kappa} \frac{dx^\kappa}{d\tau}. \quad (\text{B.2.4})$$

- L'ultimo termine moltiplicato è:

$$A'^\nu = \frac{dx'^\nu}{dx^\eta} A^\eta. \quad (\text{B.2.5})$$

Sostituendo i vari termini (B.2.2), (B.2.3), (B.2.4) e (B.2.5) otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{D A^\mu}{D\tau} &\equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dA^\nu}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu + \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \Gamma^\rho{}_{\tau\sigma} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \right) \cdot \left(\frac{dx'^\lambda}{dx^\kappa} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \right) \cdot \left(\frac{dx'^\nu}{dx^\eta} A^\eta \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2.6})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dA^\nu}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu + \\ &\quad + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\eta} \Gamma^\rho{}_{\tau\sigma} \frac{dx^\kappa}{d\tau} A^\eta - \\ &\quad - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\eta} \frac{dx^\kappa}{d\tau} A^\eta \end{aligned} \quad (\text{B.2.7})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dA^\nu}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho{}_{\tau\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau} A^\tau - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} A^\sigma \\ &\quad - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{dx^\kappa}{d\tau} A^\eta \delta^\rho{}_\kappa \delta^\sigma{}_\eta \end{aligned} \quad (\text{B.2.8})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dA^\nu}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho{}_{\tau\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau} A^\tau - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} A^\sigma \end{aligned} \quad (\text{B.2.9})$$

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \left[\frac{dx^\rho}{d\tau} + \Gamma^\rho{}_{\tau\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau} A^\tau \right] \quad (\text{B.2.10})$$

$$\frac{D A^\mu}{D\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{D A^\rho}{\tau} \quad (\text{B.2.11})$$

in cui: in (B.2.7) abbiamo visto comparire delle δ di Kronecker; in (B.2.9) abbiamo semplificato i termini uguali, rinominato gli indici contratti e raccolto la derivata parziale; in (B.2.10) abbiamo riconosciuto la definizione di derivata covariante di un vettore covariante (5.3.7).

Vediamo facile che (B.2.11) è la legge di trasformazione di un vettore controvariante. Quindi la derivata covariante lungo un cammino è un vettore. Si può dimostrare allo stesso modo anche che la derivata covariante di un vettore covariante, affinché sia un vettore, deve essere definita così:

$$\frac{D B_\mu}{D\tau} \equiv \frac{dB_\mu}{d\tau} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} B_\lambda. \quad (\text{B.2.12})$$

Appendice C

Approfondimento tensori

Consiglio (e ricordo) di vedere questa appendice dopo aver visto il capitolo §5.

Riprendiamo in mano la definizione dei tensori per mostrare come non ci sia niente di misterioso in tali oggetti. Essi sono semplicemente una generalizzazione dei vettori che già si studiano in algebra lineare, concetti che si possono portare in modo diretto ad essere validi non solo sugli spazi piatti, ma anche sugli spazi curvi. Il modo di trattare i tensori può essere molto vario, ma il concetto alla fine è abbastanza semplice. In particolare, vogliamo mostrare di come essi siano un'evoluzione diretta di ciò che facciamo sul piano cartesiano in due dimensioni, generalizzato al caso di n dimensioni arbitrarie. Tali spazi possono poi diventare spazitempi e poi in generale spazi curvi.

C.1 Il piano cartesiano

Facciamo riferimento alle figure C.1a e C.1b ripartiamo dal solito piano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Questo è uno spazio Euclideo due dimensionale, piatto.

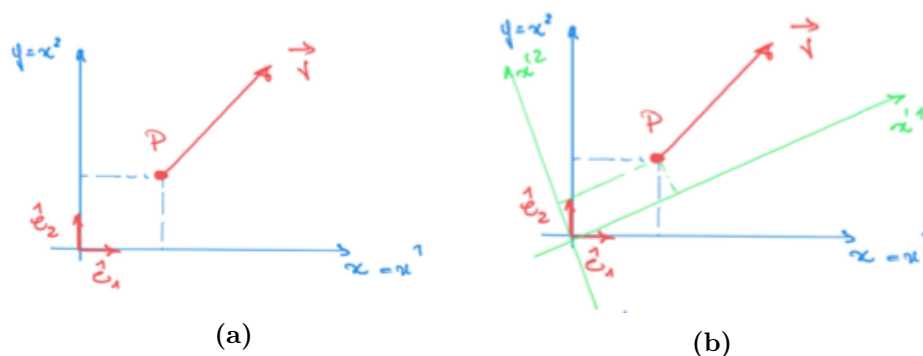


Figura C.1

Su questo spazio noi possiamo posizionare un punto P definendo un sistema di coordinate $x = x_1$ e $y = x_2$. Quindi:

- La varietà è e uno spazio bidimensionale piatto.
- Sulla varietà possiamo definire un sistema di coordinate che nel nostro caso prendiamo cartesiano.
- Un punto della varietà non dipende dal sistema di coordinate e lo possiamo identificare con una coppia di numeri reali ordinata $x^\mu = (x^1, x^2)$ dopo aver definito un sistema di coordinate.
- Il sistema di coordinate può cambiare, non è univocamente definito, ma il punto rimane sempre lo stesso.
- Consideriamo un vettore applicato nel punto P . Il vettore, nuovamente, non dipende dal sistema di coordinate.
- Un modo per descrivere il vettore $\vec{v}$ è quello di definire una base ortonormale, cioè prendiamo una coppia di versori nelle direzioni degli assi coordinati $(\hat{e}_i, \hat{e}_j)$ tali che $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$. Quando facciamo il prodotto scalare sul piano cartesiano con se stesso otteniamo 1, quindi ha norma 1 e quando facciamo il prodotto scalare con l'altro ottengo 0, quindi sono ortogonali.
- Attraverso la base, possiamo dare una rappresentazione del vettore scomponendolo lungo l'asse x e lungo l'asse y :

$$\vec{v} = v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y \quad (\text{C.1.1})$$

$$= v^1 \hat{e}_1 + v^2 \hat{e}_2 \quad (\text{C.1.2})$$

$$= v^i \hat{e}_i. \quad (\text{C.1.3})$$

- Cioè, possiamo vedere il vettore $\vec{v}$ come una mappa $M \rightarrow \mathbb{R}^2$. La coppia di numeri reali $x^\mu = (v^1, v^2)$ sono le due componenti del vettore rispetto alla base che abbiamo definito.
- Possiamo prendere però un altro sistema di coordinate che risulti ruotato rispetto al precedente. Per esempio prendendo un sistema di coordinate ruotato di un angolo θ , avremo nuove coordinate $x'^\mu = (x'^1, x'^2)$.
- Il punto P avrà coordinate $P = (x^1, x^2) = (x'^1, x'^2)$. In questo caso abbiamo una trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} x'^1 = x^1 \cos \theta + x^2 \sin \theta \\ x'^2 = x^1 \sin \theta + x^2 \cos \theta \end{cases} \quad (\text{C.1.4})$$

che possiamo vedere come:

$$x^a \longrightarrow x'^a = x'^a(x) \quad (\text{C.1.5})$$

la relazione funzionale è scritta sopra a un parametro, che è l'angolo di rotazione. Analogamente possiamo fare la trasformazione inversa:

$$x^b = x^b(x') \quad (\text{C.1.6})$$

e la trasformazione possiamo scriverla:

$$x'^a = R^a_b x^b \quad (\text{C.1.7})$$

attraverso una matrice R che ha 4 elementi (costanti) che rappresentano la trasformazione di coordinate.

- I differenziali delle coordinate trasformano come:

$$dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b = R^a_b dx^b. \quad (\text{C.1.8})$$

Analogamente possiamo scrivere la trasformazione inversa:

$$dx^b = \frac{\partial x^b}{\partial x'^c} dx'^c = (R^{-1})^b_c dx'^c \quad (\text{C.1.9})$$

in cui abbiamo posto rispettivamente:

$$R^a_b = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b}, \quad (R^{-1})^b_c = \frac{\partial x^b}{\partial x'^c}. \quad (\text{C.1.10})$$

La matrice R^{-1} è proprio la matrice inversa della matrice R . Lo possiamo far vedere molto facilmente. Consideriamo la matrice R^{-1} e consideriamo:

$$(R^{-1})^b_c R^a_b = \frac{\partial x^b}{\partial x'^c} \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} = \delta^a_c. \quad (\text{C.1.11})$$

Guardando da dove siamo partiti e dove siamo arrivati in senso matriciale:

$$(R R^{-1})^a_c = (\mathbb{1})^a_c \implies R R^{-1} = \mathbb{1} \quad (\text{C.1.12})$$

cioè la matrice associata alla trasformazione di coordinate inverse è proprio l'inverso della matrice trasformazione di coordinate diretta.

- Ora, consideriamo il vettore $\vec{v}$ da cui siamo partiti, le cui componenti abbiamo chiamato v^1 e v^2 rispetto al sistema di coordinate x^1, x^2 , se ruotiamo gli assi, ruotiamo anche la nostra base allo stesso modo. Nel nuovo set di coordinate avremo $\hat{e}'_1$ e $\hat{e}'_2$. Le componenti del vettore

andranno decomposte lungo i nuovi assi e quindi possiamo semplicemente applicare la trasformazione di rotazione anche sul vettore. Le componenti risulteranno ruotate allo stesso modo:

$$\begin{cases} v'_x = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta \\ v'_y = -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta \end{cases} \quad (\text{C.1.13})$$

ovvero:

$$v'^a = R^a_b v^b = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} v^b \quad (\text{C.1.14})$$

quindi possiamo scrivere anche per i vettori questo tipo di trasformazione. Questo è quello che poi noi definiremo come vettore controvariante, perché trasforma come differenziale delle coordinate. Si noti che il differenziale delle coordinate è di fatto un vettore perché sono dx_1 e dx_2 sono, per un vettore infinitesimo, le componenti del vettore stesso. Le coordinate invece non trasformano così, ma solo il differenziale delle coordinate!

- Possiamo anche far vedere cosa succede ai versori della base. Possiamo ragionare così: se usiamo il sistema di coordinate cartesiane x e la base $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$, il vettore si scrive:

$$\vec{v} = v^a \hat{e}_a \quad (\text{C.1.15})$$

$$= v'^a \hat{e}'_a \quad (\text{C.1.16})$$

$$= \left(R^a_b v^b \right) \hat{e}'_a. \quad (\text{C.1.17})$$

Affinché entrambi i membri abbiano lo stesso risultato, bisogna che i coefficienti di ogni v^b siano gli stessi a primo e a secondo membro; la matrice che mi permette di passare da $\hat{e}' \rightarrow \hat{e}$ è la matrice R mentre per andare da $\hat{e} \rightarrow \hat{e}'$ useremo la matrice inversa. Infatti avremo:

$$\hat{e}_b = R^a_b \hat{e}'_a \quad (\text{C.1.18})$$

$$(R^{-1})^b_c \hat{e}_b = (R^{-1})^b_c R^a_b \hat{e}'_a \quad (\text{C.1.19})$$

$$(R^{-1})^b_c \hat{e}_b = \delta^a_c \hat{e}'_a = \hat{e}'_c \quad (\text{C.1.20})$$

dunque:

$$\hat{e}'_c = (R^{-1})^b_c \hat{e}_b. \quad (\text{C.1.21})$$

Quindi se:

$$x^a \longrightarrow (x'^a) = R^a_b x^b \quad (\text{C.1.22})$$

$$\hat{e}_a \longrightarrow (\hat{e}'_a) = (R^{-1})^b_a \hat{e}_b. \quad (\text{C.1.23})$$

Quindi, in un certo senso se le coordinate variano con R , la base controvaria rispetto al modo in cui faccio ruotare le coordinate.

- Si noti che è possibile fare trasformazioni di coordinate anche complesse della semplice rotazione, ad esempio potremmo passare da un sistema di coordinate cartesiane a uno di coordinate polari. Potremmo fare esattamente lo stesso tipo di considerazioni, identificando un punto attraverso il set di coordinate:

$$\text{cartesiane:} \quad x^\mu = (x^1, x^2) = (x, y) \quad (\text{C.1.24})$$

$$\text{polari:} \quad x'^\mu = (x'^1, x'^2) = (r, \theta) \quad (\text{C.1.25})$$

rispetto alle basi:

$$\hat{e}_\mu = (\hat{e}_1, \hat{e}_2) = (\hat{e}_x, \hat{e}_y) \quad (\text{C.1.26})$$

$$\hat{e}'_\mu = (\hat{e}'_1, \hat{e}'_2) = (\hat{e}_r, \hat{e}_\theta). \quad (\text{C.1.27})$$

Il vettore è sempre lo stesso e lo possiamo decomporre rispetto alle due basi:

$$v^\mu = v^\mu \hat{e}_\mu = v'^\mu \hat{e}'_\mu \quad (\text{C.1.28})$$

cambiano i valori delle componenti, ma il vettore non cambia. La trasformazione possiamo scriverla in termini generali attraverso:

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} v^\lambda. \quad (\text{C.1.29})$$

C.2 Generalizzazione a spazi euclidei di N dimensioni

Consideriamo la varietà (o spazio) $\mathbb{R}^N$. Un punto si può identificare da un set di coordinate $(x^1, \dots, x^N)$, oppure $(x'^1, \dots, x'^N)$. Definiamo le basi $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_N)$ e $(\hat{e}'_1, \dots, \hat{e}'_N)$. Il vettore v lo possiamo esprimere attraverso:

$$v = v^\mu \hat{e}_\mu = v'^\mu \hat{e}'_\mu \quad (\text{C.2.1})$$

con la legge di trasformazione che abbiamo definito prima, cioè quella di un vettore controvariante:

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} v^\lambda. \quad (\text{C.2.2})$$

Possiamo definire un'altra base, che si chiama **base duale**, rispetto alla quale decomporre gli stessi vettori. Essa ha la proprietà di trasformare, al contrario della base di partenza (si noti l'indice in alto nei versori!), ovvero:

$$\hat{e}^a \longrightarrow \hat{e}'^a = R^a_b \hat{e}^b \quad (\text{C.2.3})$$

decomponendo il vettore v rispetto alla base duale:

$$v = v_a \hat{e}^a = v'_a \hat{e}'^a \quad (\text{C.2.4})$$

Si noti che le componenti rispetto alla base duale sono indicate con l'indice in basso.

Con lo stesso ragionamento con cui prima abbiamo trovato come trasforma la base, a partire da come trasforma il vettore, è chiaro che se definiamo la base duale che trasforma con la matrice diretta, le componenti v' dovranno trasformare con la matrice inversa:

$$v'_a = (R^{-1})^b{}_a v_b \quad (\text{C.2.5})$$

che sul piano euclideo, si esprime come:

$$v'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} v_b. \quad (\text{C.2.6})$$

Dunque uno stesso vettore v lo possiamo decomporre rispetto alla base $\hat{e}_i$ rispetto alla quale avrà componenti v^i controvarianti, oppure rispetto alla base duale $\hat{e}^i$ rispetto alla quale avrà delle componenti v_i covarianti. È chiaro che entrambe le componenti rappresentano sempre lo stesso vettore, sono soltanto due modi di definire lo stesso vettore, ma trasformano in modo diverso.

Ricordiamo poi che lo spazio Euclideo in N dimensioni è uno spazio metrico. Posso cioè definire una distanza tra due punti che è invariante sotto l'effetto della trasformazione di coordinate. La distanza non deve cambiare perché è una proprietà relativa ai due punti che non dipendono dal sistema di coordinate. In forma infinitesima la distanza è definita positiva:

$$ds^2 > 0 \quad (\text{C.2.7})$$

che in coordinate cartesiane e polari si scrive come:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (\text{C.2.8})$$

In generale è una forma bilineare dei quadrati dei differenziali delle coordinate:

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b \quad (\text{C.2.9})$$

quindi lo scriviamo in questo modo qua, e l'oggetto attraverso il quale definiamo la distanza lo chiamiamo **funzione metrica**. Nell'altro set di coordinate avremo:

$$ds^2 = \eta'_{ab} dx'^a dx'^b. \quad (\text{C.2.10})$$

Dove la relazione tra η'_{ab} ed η_{ab} è semplicemente:

$$\eta'_{ab} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^b} \eta_{\alpha\beta} \quad (\text{C.2.11})$$

che lo caratterizza automaticamente come tensore di rango due, come adesso vedremo.

Noi abbiamo definito dei vettori, ma nessuno ci vieta di definire delle quantità più grandi, che contengono più cose, che chiamiamo **tensori**. Vedi:

$$\text{vettori } v^\mu : v = v^\mu \hat{e}_\mu = v_\mu \hat{e}^\mu \quad (\text{C.2.12})$$

$$= v'^\mu \hat{e}'_\mu = v'_\mu \hat{e}'^\mu \quad (\text{C.2.13})$$

$$\text{tensori } T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} : T = T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} \hat{e}_{\mu_1} \dots \hat{e}_{\mu_n} \hat{e}^{\nu_1} \dots \hat{e}^{\nu_m}. \quad (\text{C.2.14})$$

Il tensore T è un oggetto che non dipende dal sistema di coordinate, ha semplicemente tanti indici. Se cambiamo il sistema di coordinate, date la base e la base duale nel sistema nuovo, T rimarrà sempre lo stesso, mentre la sua decomposizione rispetto agli elementi della base cambierà perché abbiamo modificato il sistema, trasformando secondo la trasformazione del vettore della base e del vettore della base duale. Quindi:

- Un vettore in uno spazio Euclideo in N dimensioni contiene l'informazione di N quantità perché ha N componenti.
- Un tensore in uno spazio di N dimensioni Euclideo contiene $(N \times N \times \dots \times N)$ (r -volte) quantità, dove r il rango del tensore, che corrisponde al numero degli indici, siano essi alti o bassi.

Richiamando un esempio che avevamo visto, nel tensore $F_{\alpha\beta}$ antisimmetrico dell'elettromagnetismo, essendo antisimmetrico e avendo indici che vivono in quattro dimensioni, sono presenti sei componenti indipendenti, all'interno delle quali abbiamo infilato le tre componenti del campo elettrico e le tre del campo magnetico. I campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ globalmente trasformano in un certo modo per trasformazione di Lorentz, trasformazione che tra l'altro le mescola tra di loro a seconda del sistema inerziale in cui ci mettiamo, e quindi questi due oggetti risultano in un certo senso manifestazioni dello stesso oggetto, cioè un tensore di rango 2.

Si noti che tensori e vettori tutti possono essere definiti su tutto lo spazio, in questo caso si parla di campi vettoriali o **campi tensoriali**, oppure possono essere definiti solamente lungo un cammino, parametrizzato dal parametro τ , come per esempio la velocità di una particella, che è definita solo lungo la traiettoria della stessa.

Nessuno ci vieta di generalizzare quanto abbiamo visto a uno spazio curvo. In ogni punto dello spazio curvo possiamo posizionare il piano tangente sul quale possiamo definire una base e una base duale, rispetto alle quali, in quel punto, possiamo definire le componenti di un vettore o quelle di un tensore. Possiamo poi ripetere in ogni punto della varietà e quindi definire i vettori e i tensori come oggetti che contengono quantità fisiche, le cui componenti sono relative al sistema di coordinate. Ora, se lo spazio curvo è uno spazio a segnatura della metrica positiva è uno spazio di tipo euclideo, se

invece è uno spazio tempo, cioè gli autovalori del tensore metrico sono uno negativo e tutti gli altri positivi, allora quello spazio-tempo ci permetterà di descrivere il comportamento dei sistemi fisici perché contiene informazioni dello spazio del tempo e dei principi della Relatività Speciale o generale se lo spazio-tempo diventa curvo. I sistemi di coordinate sono quelli che rappresentano i nostri osservatori, inerziali in Relatività Speciale, mentre in Relatività Generale del tutto generici.

In conclusione il sistema di coordinate rappresenta l'osservatore e i vettori e i tensori sono grandezze fisiche descritte nel linguaggio opportuno per poter scrivere le equazioni che rispettano i principi di relatività.

Appendice D

Esercizi sulla curvatura

Facciamo un paio di semplici esercizi in cui calcoliamo il tensore di Riemann per due varietà diverse (non spazi-tempi). Supponiamo che siano date due metriche. Definiamo un primo sistema di coordinate (A) $x^\mu = (x^1, x^2) = (r, \theta)$ con metrica data da:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (\text{D.0.1})$$

$$= (dx^1)^2 + (x^1)^2 (dx^2)^2 \quad (\text{D.0.2})$$

e un secondo set di coordinate (B) $x^\mu = (x^1, x^2) = (\theta, \varphi)$ con metrica:

$$ds^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{D.0.3})$$

$$= a^2 \left[(dx^1)^2 + \sin^2 x^1 (dx^2)^2 \right] \quad (\text{D.0.4})$$

con a parametro. La prima domanda che ci poniamo è: questi spazi sono piatti o sono curvi? Sappiamo che un modo per verificarlo è il seguente. Se esiste un sistema di coordinate $\hat{x}^\mu$, tale che quando facciamo la trasformazione di coordinate dal mio set a tale set di coordinate $x^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu$ troviamo che la metrica:

$$ds^2 \longrightarrow ds^2 = (d\hat{x}^1)^2 + (d\hat{x}^2)^2 = \eta_{ab} d\hat{x}^a d\hat{x}^b \quad \text{con} \quad \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.0.5})$$

allora sappiamo che quello spazio è piatto. Dobbiamo però individuare la trasformazione di coordinate. Esiste però un altro metodo, più efficiente e generale: calcolare il tensore di Riemann. Se il tensore di Riemann è nullo, allora quello spazio è piatto. Se il tensore di Riemann non è identicamente nullo, allora quello spazio non è piatto e possiamo calcolare anche lo scalare di curvatura (siccome siamo in due dimensioni esso è l'unica funzione che mi serve per descrivere la curvatura).

Per calcolare il tensore di Riemann, dobbiamo calcolare la connessione:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (\text{D.0.6})$$

possiamo calcolare il tensore di Riemann:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \quad (\text{D.0.7})$$

dobbiamo dunque partire da scrivere il tensore metrico e il tensore metrico inverso e fare le derivate. Cominciamo con la metrica (A):

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (\text{D.0.8})$$

$$= g_{ab} dx^a dx^b \quad (\text{D.0.9})$$

$$= g_{rr} dr^2 + 2g_{r\theta} dr d\theta + g_{\theta\theta} d\theta^2 \quad (\text{D.0.10})$$

guardiamo per confronto quali siano i vari coefficienti di dr^2 e $d\theta^2$:

$$g_{rr} = 1 \quad , \quad g_{r\theta} = 0 \quad , \quad g_{\theta\theta} = r^2. \quad (\text{D.0.11})$$

Ci serve anche il tensore metrico inverso. Dato che la matrice che definisce il tensore metrico è diagonale, la matrice inversa ha come elementi sulla diagonale gli inversi degli elementi della matrice di partenza. Cioè:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad g^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \quad (\text{D.0.12})$$

dunque:

$$g^{rr} = 1 \quad , \quad g^{r\theta} = 0 \quad , \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}. \quad (\text{D.0.13})$$

Adesso calcoliamo la connessione. Dobbiamo calcolare le derivate del tensore metrico: l'unica funzione metrica che dipende dalle coordinate è la la compoenente $\theta\theta$, dunque l'unica derivata non nulla è:

$$\partial_r g_{\theta\theta} = 2r \quad (\text{D.0.14})$$

e possiamo allora calcolare le componenti della connessione:

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2} g^{ra} (\partial_r g_{ra} + \partial_r g_{ra} - \partial_a g_{rr}) \quad (\text{D.0.15})$$

$$= 0 \quad (\text{D.0.16})$$

$$\Gamma^r_{r\theta} = \frac{1}{2} g^{ra} (\partial_r g_{\theta a} + \partial_\theta g_{ra} - \partial_a g_{r\theta}) \quad (\text{D.0.17})$$

$$= \frac{1}{2} g^{ra} (\partial_r g_{\theta a}) \quad (\text{D.0.18})$$

$$= 0 \quad (\text{D.0.19})$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2} g^{ra} (\partial_\theta g_{\theta a} + \partial_\theta g_{\theta a} - \partial_a g_{\theta\theta}) \quad (\text{D.0.20})$$

$$= \frac{1}{2} g^{rr} (-\partial_r g_{\theta\theta}) \quad (\text{D.0.21})$$

$$= -r \quad (\text{D.0.22})$$

in cui: in (D.0.15) abbiamo tenuto conto del fatto che l'unica derivata non nulla, è quando derivo $g_{\theta\theta}$ rispetto ad r ; in (D.0.17) abbiamo fatto un ragionamento analogo; in (D.0.19) abbiamo usato che $g^{r\theta} = 0$.

Adesso abbiamo esaurito tutte le possibilità con r in alto, ma dobbiamo ancora lavorare con θ nell'indice alto. Possiamo fare il conto anche come segue. Dato che il tensore metrico inverso è diagonale, e dato che nella somma sopravvive soltanto il termine in cui $a = \theta$, possiamo direttamente solo considerare $g^{\theta\theta}$ e non dobbiamo più fare la somma. Quindi:

$$\Gamma^\theta_{rr} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_r g_{r\theta} + \partial_r g_{r\theta} - \partial_\theta g_{rr}) \quad (\text{D.0.23})$$

$$= 0 \quad (\text{D.0.24})$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_r g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{r\theta} - \partial_\theta g_{r\theta}) \quad (\text{D.0.25})$$

$$= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_r g_{\theta\theta}) \quad (\text{D.0.26})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} 2r \quad (\text{D.0.27})$$

$$= \frac{1}{r} \quad (\text{D.0.28})$$

$$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta}) \quad (\text{D.0.29})$$

$$= 0 \quad (\text{D.0.30})$$

quindi le uniche componenti non nulle sono la $\Gamma^r_{\theta\theta}$ e la $\Gamma^\theta_{r\theta}$.

Calcoliamo quindi il tensore di Riemann $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$. Siamo però in due dimensioni e abbiamo già visto che si ha solo una componente che non è banalmente nulla. Quindi:

$$R^1_{212} \equiv R^r_{\theta r\theta} = \partial_\theta \Gamma^r_{\theta r} - \partial_r \Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^b_{\theta r} \Gamma^r_{\theta b} - \Gamma^b_{\theta\theta} \Gamma^r_{rb} \quad (\text{D.0.31})$$

ora, b può valere 1 o 2, quindi abbiamo:

$$R^1_{212} = \partial_\theta \Gamma^r_{\theta r} - \partial_r \Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^r_{\theta r} \Gamma^r_{\theta r} + \Gamma^\theta_{\theta r} \Gamma^r_{\theta\theta} - \Gamma^r_{\theta\theta} \Gamma^r_{r\theta} - \Gamma^\theta_{\theta\theta} \Gamma^r_{r\theta} \quad (\text{D.0.32})$$

ricordando le uniche componenti non nulle della connessione:

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r \quad , \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \quad (\text{D.0.33})$$

possiamo esplicitare e ottenere:

$$R^1_{212} = -\partial_r \Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^\theta_{\theta r} \Gamma^r_{\theta\theta} \quad (\text{D.0.34})$$

$$= -\partial_r (-r) + \frac{1}{r} (-r) \quad (\text{D.0.35})$$

$$= 1 - 1 \quad (\text{D.0.36})$$

$$= 0. \quad (\text{D.0.37})$$

Troviamo dunque che l'unica componente non banale del tensore di Riemann è nulla, allora per questa varietà:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = 0 \quad (\text{D.0.38})$$

quest'ultima è un'affermazione tensoriale, quindi assicura che lo spaziotempo descritto dalla metrica (A) sia uno spazio piatto. Tale spazio infatti è uno spazio Euclideo. Avremmo infatti potuto trovare il sistema di coordinate particolare con una trasformazione di coordinate tale per cui:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \\ y = r \cos \theta \end{cases}, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (\text{D.0.39})$$

Ripetiamo la stesso ragionamento per lo spazio (B), magari si tratta di nuovo dello spazio Euclideo, ma scritto in un altro modo. La metrica risulta:

$$ds^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{D.0.40})$$

$$= g_{\theta\theta} d\theta^2 + 2g_{\theta\varphi} d\theta d\varphi + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 \quad (\text{D.0.41})$$

identifichiamo:

$$g_{\theta\theta} = a^2, \quad g_{\theta\varphi} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 \sin^2 \varphi \quad (\text{D.0.42})$$

e abbiamo nuovamente che la metrica è diagonale e soltanto $g_{\varphi\varphi}$ dipende da un'altra coordinata. Essendo diagonale, anche qui il tensore metrico inverso avrà forma diagonale, con le entrate pari all'inverso di quelle del tensore metrico diretto:

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{a^2}, \quad g^{\theta\varphi} = 0, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2 \sin^2 \varphi}. \quad (\text{D.0.43})$$

Calcoliamoci le uniche derivate non banali in gioco. Nuovamente l'unica è la derivata della coordinata $g_{\varphi\varphi}$:

$$\partial_1 g_{22} = \partial_\theta g_{\varphi\varphi} = 2a^2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{D.0.44})$$

le uniche componenti non nulle della connessione risultano:

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} g^{1b} (\partial_2 g_{2b} + \partial_2 g_{2b} - \partial_b g_{22}) \quad (\text{D.0.45})$$

$$= \frac{1}{2} g^{11} (-\partial_1 g_{22}) \quad (\text{D.0.46})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{a^2} (-2a^2 \sin \theta \cos \theta) \quad (\text{D.0.47})$$

$$= -\sin \theta \cos \theta \quad (\text{D.0.48})$$

un'altra componente non nulla è:

$$\Gamma^2_{22} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{1b} - \partial_2 g_{12}) \quad (\text{D.0.49})$$

$$= \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{22}) \quad (\text{D.0.50})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} (2a^2 \sin \theta \cos \theta) \quad (\text{D.0.51})$$

$$= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (\text{D.0.52})$$

Si noti che anche prima avevamo tali componenti le uniche non nulle. Calcoliamo l'unica componente del tensore di Riemann che ci può servire. Per $b = 1, 2$:

$$R^1_{212} = \partial_2 \Gamma^1_{21} - \partial_1 \Gamma^1_{22} + \Gamma^b_{21} \Gamma^1_{2b} - \Gamma^b_{22} \Gamma^1_{1b} \quad (\text{D.0.53})$$

$$= -\partial_\theta \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} + \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} \quad (\text{D.0.54})$$

$$= -\partial_\theta (-\sin \theta \cos \theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (-\sin \theta \cos \theta) \quad (\text{D.0.55})$$

$$= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \quad (\text{D.0.56})$$

$$= -\sin^2 \theta. \quad (\text{D.0.57})$$

Dunque, la componente:

$$R^1_{212} = -\sin^2 \theta \neq 0 \quad (\text{D.0.58})$$

quindi questa varietà è curva. Possiamo anche ottenere:

$$R_{1212} = g_{11} R^1_{212} = a^2 (-\sin^2 \theta) = -a^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{D.0.59})$$

Calcoliamoci anche le componenti del tensore di Ricci:

$$R_{ij} = g^{ab} R_{aibj} \quad (\text{D.0.60})$$

per cui abbiamo:

$$R_{11} = g^{ab} R_{a1b1} \quad (\text{D.0.61})$$

$$= g^{22} R_{2121} \quad (\text{D.0.62})$$

$$= \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} (-)(-)(-a^2 \sin^2 \theta) \quad (\text{D.0.63})$$

$$= -1 \quad (\text{D.0.64})$$

$$R_{12} = g^{ab} R_{a1b2} = 0 \quad (\text{D.0.65})$$

$$R_{22} = g^{ab} R_{a2b2} \quad (\text{D.0.66})$$

$$= g^{11} R_{1212} \quad (\text{D.0.67})$$

$$= \frac{1}{a^2} (-a^2 \sin^2 \theta) \quad (\text{D.0.68})$$

$$= -\sin^2 \theta \quad (\text{D.0.69})$$

in cui in (D.0.62) abbiamo che sia l'indice a , che l'indice b devono essere 2 altrimenti abbiamo il tensore di Riemann nullo. In questi conti abbiamo utilizzato le proprietà di simmetria e antisimmetria oltre alla considerazione sulle componenti nulle. Calcoliamo anche lo scalare di curvatura:

$$Rg^{ij}R_{ij} \quad (\text{D.0.70})$$

$$= g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} \quad (\text{D.0.71})$$

$$= \frac{1}{a^2}(-1) + \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta}(-\sin^2 \theta) \quad (\text{D.0.72})$$

$$= -\frac{2}{a^2} \quad (\text{D.0.73})$$

essendo Ricci diagonale in tal caso. Dunque questo è uno spazio curvo con con scalare di curvatura costante. Il fatto che sia costante significa che la sua curvatura è la stessa in ogni punto e cioè lo spazio è uno *spazio omogeneo*. In generale poi, per uno spazio a curvatura costante (non nulla) vi sono due possibilità: curvatura costante con un dato segno, oppure, curvatura costante con segno opposto.

Quella che alla Gauss chiameremo curvatura costante positiva è la superficie sferica $\mathbb{S}^2$, mentre quella che ha curvatura costante negativa, sempre alla Gauss, è lo spazio iperbolico in due dimensioni $\mathbb{H}^2$. Stiamo parlando delle cose viste nei capitoli iniziali.

Noi abbiamo trovato un valore negativo, ma il segno dello scalare di curvatura dipende da come abbiamo definito il tensore di Riemann. Se l'avessimo definito esattamente con tutti i segni scambiati non sarebbe cambiato niente, ma avremmo cambiato il risultato in segno, avremmo avuto un valore positivo. Con la nostra scelta del tensore di Riemann, otteniamo uno scalare negativo. Ora, ricordando la relazione con la formula che ha definito Gauss:

$$K = -\frac{R}{2} = \frac{1}{a^2} \quad (\text{D.0.74})$$

con a raggio di curvatura della superficie sferica. Ciò che è importante è che $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{S}^2$ hanno curvatura opposta, una volta fissata la definizione di R o di K è opposta e sono omogenei perché è costante.

La metrica (B) quindi non è nient'altro che la metrica della superficie sferica in due dimensioni. Infatti, se noi prendiamo la superficie sferica in due dimensioni $\mathbb{S}^2$, nello spazio di immersione che è $\mathbb{R}^3$ dove prendiamo coordinate cartesiane (x, y, z) , la possiamo definire in questo modo:

La superficie sferica è il luogo geometrico dei punti a distanza costante pari ad a , dall'origine degli assi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (\text{D.0.75})$$

conosciamo già la metrica di $\mathbb{R}^3$ euclidea:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (\text{D.0.76})$$

Se imponiamo la condizione di stare sulla superficie sferica alla distanza in $\mathbb{R}^3$, otteniamo la distanza in $\mathbb{R}^3$ lungo la superficie sferica. Risulta conveniente usare coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = a \sin \theta \cos \varphi \\ y = a \sin \theta \sin \varphi \\ z = a \cos \theta \end{cases} \quad (\text{D.0.77})$$

e possiamo usare due sole coordinate per definire una superficie bidimensionale:

$$(x^1, x^2) = (\theta, \varphi) \quad (\text{D.0.78})$$

e differenziando trovo semplicemente:

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\text{D.0.79})$$

che è la metrica (B) che abbiamo appena studiato. La differenza tra guardare come sono fatte le componenti del tensore di Riemann $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$, che in questo caso ha una sola componente R^1_{212} , il tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$ o lo scalare di curvatura R , è che se usiamo le coordinate (θ, φ) o scegliamo di usare coordinate completamente diverse, R dà sempre lo stesso valore per tutti i sistemi di coordinate, mentre gli altri trasformerebbero secondo la legge di trasformazione tensoriale. Ricordiamo infatti che in un altro sistema di coordinate:

$$R'^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\kappa} R^\rho_{\sigma\tau\eta} \quad (\text{D.0.80})$$

di cui dovremmo calcolarci tutte le derivate e fare la combinazione generale nel mio sistema di partenza. Quindi per calcolarci ad esempio:

$$R'^1_{212} = \frac{\partial x'^1}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^2} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^1} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^2} R^\rho_{\sigma\tau\eta}. \quad (\text{D.0.81})$$

Resta il fatto che l'affermazione completa sulla piattezza di una varietà si esprime usando l'intero tensore di Riemann:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = 0 \quad (\text{D.0.82})$$

Sappiamo che in tre dimensioni o superiori esso contiene più informazione che del solo scalare di curvatura, perché gli scalari sono di meno delle componenti del tensore di Riemann.

Bibliografia

- [1] V. Barone. *Relatività*. Bollati Boringhieri, 2004. ISBN: 9788833957579.
- [2] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.
- [3] Tom Lancaster e Stephen J. Blundell. *General Relativity for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 2025.
- [4] Bernard F. Schutz. *A First Course In General Relativity*. Cambridge Univ. Pr., 1985.
- [5] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley e Sons, 1972.