

Gemme Relatività Speciale

Gabriele Cembalo

A.A. -



Università degli Studi di Torino
Dipartimento di Fisica
Via Giuria, 1, Torino (TO)

Informazioni legali

Questo materiale è una rielaborazione personale del corso di **Relatività Generale**, tenuto dal **Prof N. Fornengo** presso l'**Università degli Studi di Torino**.

Il contenuto riportato non rappresenta materiale ufficiale del docente né dell'università, e può contenere interpretazioni soggettive o errori. Tutti i diritti su slide, dispense o altri materiali forniti dal docente restano riservati ai rispettivi autori e non sono inclusi in questi appunti. Questi appunti sono condivisi a solo scopo didattico e divulgativo, senza fini di lucro, e sono destinati a supportare lo studio personale degli studenti.

È distribuito con licenza **Creative Commons Attribution - Non Commercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0)**.

Puoi copiarlo, distribuirlo e modificarlo, **a patto di attribuirne la paternità e non usarlo a fini commerciali**.

Per maggiori informazioni sulla licenza:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.it>

Time is an illusion.

Albert Einstein

Prefazione

In questo documento voglio raccogliere le mie note rispetto la "**Relatività Speciale**", e lo faccio rifacendomi ai miei stessi appunti del corso di "*Relatività Speciale*" svolto dal professore N. Fornengo e seguito all'*Università degli studi di Torino* nell'a.a. 2024-2025 aggiungendo eventualmente i riferimenti a vari libri (più o meno utili a seconda della volontà di approfondire). Se volete sono concettualmente simili alle note [Gemme di Teoria dei Gruppi](#) che già ho scritto. Questi appunti sono una riscrittura degli appunti presi in aula, quindi la fonte principale sono le note del professore reperibili sulla sua pagina personale, ma i libri sono fondamentali per una completa comprensione degli argomenti. Ci tengo anche a segnalare il fatto che, pur essendo ampiamente ispirati alle già citate note del professore, sono stati fondamentali gli appunti di M. Robino reperiti sul canale Telegram. Durante il corso sono stati consigliati diversi libri (indicati in Bibliografia), cercherò di indicare i vari riferimenti bibliografici all'inizio di ogni capitolo.

Per i motivi elencati le note qui raccolte risultano uguali a quelle già presenti nel file di *Relatività Generale*, quindi la fonte principale sono le note originali. Queste note hanno un approccio molto fisico e poco orientato verso la Teoria dei Gruppi, per quel tipo di approccio rimando alle relative note. I testi consigliati sono:

- S. Carroll, *Spacetime and Geometry*. Principalmente per gli aspetti geometrici.
- V. Barone, *Relatività*.
- A. Einstein, *The basis of the General theory of Relativity* e *The field equations of Gravitations*". Sono più che altro una lettura interessante.

Vorrei anche segnalare il testo di Lancaster e Blundell, *General Relativity for the Gifted Amateur*, che non è un testo molto tecnico, come il suo corrispettivo per la QFT, ma può essere utile per aspetti più discorsivi e di circostanza. Tra l'altro, quando possibile, prenderò le immagini proprio da questo testo.

Chiaramente sono da intendere come degli appunti personali scritti in bella, eventuali sviste, errori o inesattezze sono dovute alla mia ignoranza, ma soprattutto ho scritto questi appunti in modo da "*spiegare*" a me stesso l'argomento, quindi alcune parti potrebbero sembrare troppo prolisse o troppo superficiali per alcuni. In ogni caso fa piacere se possono aiutare qualcun'altro. Spero in ogni caso di esser riuscito a scrivere un documento chiaro e ben strutturato.

Alcune volte posso non far riferimento ad un particolare testo o corso passato, in questi casi mi sto riferendo ai MIEI appunti riguardanti quell'argomento. Una mia collezione di appunti è presente nella mia pagina personale di GitHub: [gCembalo.github.io](https://github.com/gCembalo).

Qualsiasi errore/refuso può essere inviato alla mia mail personale: gabriele.cembalo02@gmail.com.

Indice

1	Richiami di Relatività Speciale e spazio-tempo piatto	1
1.1	Principi fondativi	1
1.1.1	La Meccanica Classica	1
1.1.2	La Relatività Speciale e le trasformazioni di Lorentz	3
1.1.3	Prime conseguenze	7
1.2	Lo spaziotempo	8
1.2.1	Spaziotempo di Minkowski	8
1.2.2	Proprietà metriche	14
1.2.3	Il tempo, gli osservatori inerziali e le world-line	17
1.2.4	Il cono luce	23
1.2.5	Diagrammi di Minkowski	24
1.3	Calcolo tensoriale	33
1.3.1	Definizioni, quadrivettori e derivate	34
1.3.2	Proprietà metrica	39
1.3.3	Trasformazioni di Lorentz	40
1.3.4	Dinamica	42
1.3.5	Tensori	47
1.4	Elettromagnetismo	50
1.4.1	Invarianza di gauge	54
1.5	Meccanica analitica	56
1.5.1	Correnti	59
1.5.2	Esempi	72
	Appendici	76
A	Convenzioni varietà	79
A.1	Segni	80
A.2	Varietà	80
	Bibliografia	81

Capitolo 1

Richiami di Relatività Speciale e spazio-tempo piatto

In questo capitolo facciamo un richiamo di Relatività Speciale, essendo interessati a contestualizzarla sia come sviluppo di idee che come sviluppo formale. In particolare ci concentreremo sui principi costituenti, sulle caratteristiche dello spaziotempo, sul calcolo tensoriale, sulle varie applicazioni e sulle correnti (conservate) che possiamo avere. Per questa parte di appunti qualsiasi testo contiene dei riferimenti sufficienti, ma si può fare riferimento al libro di Barone [1].

Si può vedere l'Appendice A per alcune convenzioni sulle varietà e le funzioni metriche.

1.1 Principi fondativi

1.1.1 La Meccanica Classica

Partiamo dall'inizio, ovvero da un elemento importante, che è il **principio di relatività** (o di relatività dei moti), che risale a Galileo e Newton nella loro prima formulazione, nell'ambito della meccanica pre-relativistica. Il principio di relatività si basa su una speciale classe di sistemi di riferimento che sono i **sistemi di riferimento inerziali**. La meccanica newtoniana li definisce come un insieme di sistemi di riferimento in cui le leggi della natura assumono la forma descritta nei Principia Mathematica di Newton. In particolare, le leggi del moto le possiamo riassumere attraverso la famosa equazione:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1.1.1)$$

Facciamo un esempio rimanendo in meccanica pre-relativistica. Prendiamo un insieme di n punti materiali, ognuno dotato di massa, in interazione gravitazionale tra di loro. L'equazione che descrive questo sistema è della

forma:

$$m_n \frac{d^2 \vec{x}_n}{dt^2} = G \sum_i \frac{m_n m_i (\vec{x}_i - \vec{x}_n)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_n|^3} \quad (1.1.2)$$

che è l'equazione del moto dell' n -esimo corpo. Facendo variare n su tutti i corpi presenti, otteniamo un insieme di equazioni differenziali. Tali equazioni sono invarianti sotto l'effetto di una classe di trasformazioni, del tipo:

$$O : (\vec{x}, t) \longrightarrow O' : (\vec{x}', t') \quad (1.1.3)$$

$$\begin{cases} \vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{d} \\ t' = t + \tau. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Trasformazioni del tipo (1.1.4) si chiamano anche *trasformazioni di Galileo* e rappresentano rotazioni (R), traslazioni nello spazio o nel tempo (\vec{d} , τ), e anche moto relativo tra i due osservatori con una velocità \vec{v} .

L'equazioni (1.1.2) sono invarianti in forma se le rotazioni e la velocità relative sono indipendenti dal tempo. La classe di trasformazioni che lascia invariate le equazioni del moto non può essere del tutto arbitraria, infatti, possiamo accettare una traslazione tra i due sistemi di riferimento, una rotazione rigida dei due sistemi e, al più, una velocità relativa costante (dunque moti non accelerati e sistemi non rotanti).

Indicando $\vec{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$, possiamo riscrivere (1.1.4) in componenti:

$$\begin{cases} x'_i = R_{ij}x^j + v_i t + d_i \\ t' = t + \tau \end{cases} \quad (1.1.5)$$

in cui dobbiamo chiedere che R sia una matrice ortogonale, quindi tale che:

$$RR^T = R^T R = \mathbb{1} \quad (1.1.6)$$

ed è una matrice di rotazione che dipende da tre angoli, ovvero, i tre angoli di Eulero. Come già detto, \vec{v} è un vettore di velocità relativa tra i due osservatori, \vec{d} è un vettore costante, che rappresenta la possibilità che i due sistemi di coordinate siano tra loro traslati, e τ è una costante che ci dice che l'orologio di un osservatore può non essere sincronizzato con quello dell'altro osservatore. Queste trasformazioni formano un gruppo, a dieci parametri, che è il **gruppo di Galileo**.

Abbiamo detto che le equazioni del moto classiche sono invarianti per trasformazioni del gruppo di Galileo. Possiamo verificarlo facilmente. Consideriamo una situazione semplificata, cioè orientiamo gli assi in modo che il moto sia solo nella direzione \hat{x} , in questo modo (1.1.4) diventa:

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t \\ t' = t. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

La velocità, per i diversi osservatori, di un corpo materiale che si sta muovendo nello spazio, al passare del tempo, sarà:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (1.1.8)$$

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'} = \frac{d\vec{x}'}{dt} = \frac{d\vec{x} + \vec{v}t}{dt} = \vec{u} + \vec{v} \quad (1.1.9)$$

in cui (1.1.9) ci da la legge di trasformazione delle velocità. Possiamo a questo punto calcolarci l'accelerazione che l'osservatore O' vede:

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{u}'}{dt'} = \frac{d(\vec{u} + \vec{v})}{dt} = \vec{a} \quad (1.1.10)$$

il che ci permette di vedere che l'accelerazione è invariante per trasformazioni di Galileo e ciò rende le equazioni della Meccanica Classica invarianti per osservatori inerziali. Infatti, se l'accelerazione è invariante quando cambiamo osservatore, se gli osservatori sono inerziali, allora anche la forza lo è, poiché la forza è tipicamente una relazione tra i due corpi e dipende dalla differenza relativa delle posizioni, differenza che è invariante per trasformazioni di Galileo.

Teniamo a mente che non tutti i sistemi di riferimento sono inerziali; in questi casi le equazioni del moto che utilizziamo per descrivere un fenomeno fisico hanno delle modifiche e non sono invarianti in forma. Il tipico esempio è la nascita delle cosiddette forze fittizie.

1.1.2 La Relatività Speciale e le trasformazioni di Lorentz

Dal punto di vista della meccanica newtoniana, lo spazio e il tempo sono assoluti; in particolare, il tempo è un parametro rispetto a cui il sistema evolve. I sistemi di riferimento inerziali sono quei sistemi, a riposo o in moto rettilineo uniforme, rispetto a tale spazio assoluto.

Tutto questo viene superato con Einstein nel 1905. Ci si rende conto che tutta la Meccanica Classica, che deriva dalla formulazione galileiana e newtoniana, invariante sotto l'effetto delle trasformazioni di Galileo (1.1.4), in realtà non è una teoria completa. Il problema sorge quando si arriva alla formulazione completa dell'elettromagnetismo tramite le equazioni di Maxwell, cioè le equazioni del moto del campo elettromagnetico. Esse non sono invarianti per trasformazione di Galileo, e ciò è legato al fatto che le onde elettromagnetiche si propagano alla stessa velocità indipendentemente dal fatto che la sorgente sia a riposo o in moto rispetto all'osservatore che descrive l'onda.

Nasce allora l'idea che le equazioni di Maxwell siano sì le equazioni del campo elettromagnetico, ma scritte in un sistema di riferimento a riposo, rispetto uno strano "corpo", chiamato *etere*. Se così fosse allora dovremmo

essere in grado di mettere in evidenza il nostro moto rispetto l'etere; come noto questo si è dimostrato non possibile.

L'etere è di fatto un'idea, qualcosa che non ha realtà fisica. Il famoso esperimento di Michelson e Morley diede infatti risultato negativo. Nel 1905 nasce la **Relatività Speciale** di Einstein.

Nella sua teoria, Einstein, generalizza il principio di relatività basandolo su due postulati, che non sono altro che le basi concettuali dalle quali discende tutto il resto:

- **Principio di relatività**, esteso a tutte le leggi fisiche. Il principio di relatività nella formulazione Einsteiniana dice che tutte le leggi di natura (meccanica ed elettromagnetismo) hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.¹
- **Costanza della velocità della luce nel vuoto.**

Quindi, rimane centrale il concetto di *sistema di riferimento inerziale*, essendo ancora fondamentale il principio di relatività, che esprime sostanzialmente un'invarianza delle leggi di natura dall'osservatore. Tutti gli osservatori inerziali danno la stessa descrizione degli stessi fenomeni meccanici ed elettromagnetici.

Questi postulati hanno delle conseguenze molto importanti. La prima cosa di cui ci rendiamo conto è che se noi abbiamo due sistemi di riferimento inerziali, O con (\vec{x}, t) e O' con (\vec{x}', t) , allora le trasformazioni tra quello che descrivono i due osservatori non sono più le trasformazioni di Galileo (1.1.4), perché non permettono che la velocità della luce sia la stessa per entrambi.

Imponendo la costanza di c , le trasformazioni tra i due osservatori cambiano, rispetto la MC, e diventano le **trasformazioni di Lorentz**.

Facciamo riferimento alla figura 1.1. Supponiamo di essere l'osservatore O e vediamo arrivare l'osservatore O' da sinistra con velocità \vec{v} . Ad un certo istante ci troviamo nella stessa posizione, successivamente ci separiamo per il resto dei nostri giorni, ma per O' il discorso è esattamente simmetrico.

Se organizziamo le cose, per semplicità, in modo tale che quando ci incontriamo entrambi misuriamo $t = t' = 0$, (se non misuriamo la stessa cosa ci sarebbe un offset tra i due orologi e non sarebbe comunque un problema) e, allo stesso tempo, lanciamo un segnale luminoso, questo si propaga nello spazio, arrivando in P . Entrambi abbiamo due eventi (eventi in RS vuol dire punti dello spaziotempo), a cui associamo certe coordinate. Se la luce ha la

¹Si dice che vogliamo scrivere le leggi della natura in una forma covariante, il che vuol dire che esse conservano la loro forma sotto certe trasformazioni. Si potrebbe anche dire che si richiede che tutti i membri di una legge fisica trasformino allo stesso modo. Ad esempio, la legge $\vec{F} = m\vec{a}$ è una legge vettoriale e sotto rotazioni il membro di sinistra e quello di destra si trasformano allo stesso modo, per cui la legge rimane nella stessa forma anche in un SR ruotato rispetto quello di partenza. In RS richiediamo che le leggi fisiche siano invarianti per trasformazioni di Lorentz e per riuscirci dovremo introdurre dei nuovi oggetti, che sono i *tensori*.

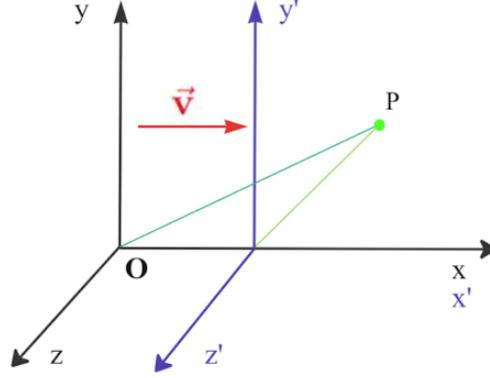


Figura 1.1: Trasformazione di Lorentz tra sistemi di riferimento inerziali.

stessa velocità per entrambi, allora è necessario che la distanza spaziale (al quadrato) compiuta per i due osservatori sia:

$$O : x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (1.1.11)$$

$$O' : x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (1.1.12)$$

in cui c è la stessa per entrambi gli osservatori, come imposto dal secondo postulato. Utilizzando le trasformazioni di Galileo (1.1.4) non riusciremmo a soddisfare le relazioni.

Da qui nascono le *trasformazioni di Lorentz* (nella direzione \hat{x})²:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \beta x) \end{cases} \quad (1.1.14)$$

in cui valgono:

$$\beta = \frac{v}{c \text{ u.n.}} = v \quad (1.1.15)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.1.16)$$

che se $v < c$ allora $\beta < 1$ e $\gamma > 1$. Le trasformazioni di Lorentz ci dicono che la relazione tra i due osservatori non è più quella di Galileo, in particolare

²Per una direzione generica (vedi p. 8 delle note del prof. Fornengo) vale:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{r} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta}}{\beta^2} - \gamma \vec{\beta} t \\ t' = \gamma(t - \vec{\beta} \cdot \vec{r}). \end{cases} \quad (1.1.13)$$

il tempo non è più un tempo assoluto come in meccanica newtoniana, ma trasforma come le coordinate spaziali, per cui il tempo è relativo e dipende dall'osservatore.

Dunque, dalle trasformazioni (1.1.14) vediamo che spazio e tempo sono entrambe delle coordinate di ciò che avviene nel mondo fisico ed entrambe sono relative all'osservatore. Oltre alle trasformazioni di (\vec{x}, t) possiamo calcolare anche la composizione della velocità, che sono della forma:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \quad (1.1.17)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left[1 - \frac{vu_x}{c^2}\right]} \quad (1.1.18)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma \left[1 - \frac{vu_x}{c^2}\right]} \quad (1.1.19)$$

in cui notiamo anche la trasformazione anche delle componenti y e z poiché quando scriviamo:

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad , \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'} \quad (1.1.20)$$

è vero che y' e z' non cambiano, ma cambia il tempo e dunque le velocità nelle direzioni ortogonali al moto relativo cambiano comunque.

Ovviamente, facendo la derivata delle velocità possiamo calcolare la trasformazione delle accelerazioni. Non lo facciamo esplicitamente, ma ci accorgiamo subito che l'accelerazione non è più invariante per trasformazioni di Lorentz, infatti, troviamo:

$$a'_x \neq a_x \quad , \quad a'_y \neq a_y \quad , \quad a'_z \neq a_z. \quad (1.1.21)$$

L'accelerazione era invariante per trasformazione di Galileo e questo permetteva sostanzialmente di far sì che le leggi della natura, nella formulazione newtoniana, fossero invarianti per gli osservatori inerziali, ora non è più così. Però attenzione, perché ciò non vuol dire che la forza non sia più legata con l'accelerazione del corpo, ma vuol dire se le equazioni del sistema fisico devono soddisfare il primo principio, quello di relatività, cioè devono essere le stesse per tutti gli osservatori, allora dobbiamo trovare un linguaggio che ci permetta di far sì che le equazioni che scriviamo siano invarianti in forma quando passiamo da un sistema ad un altro, cioè invarianti per trasformazioni di Lorentz.

Quindi dovremmo dare una descrizione un pochino più elaborata della Fisica e lo faremo con il calcolo tensoriale nel proseguo del capitolo.

Non lo abbiamo ricordato fin'ora, ma se facciamo un opportuno limite delle trasformazioni di Lorentz ritroviamo le trasformazioni galileane. Il limite che ci permette di passare dalla RS alla MC è il limite di basse velocità $v \ll c$, o equivalentemente $\beta \ll 1$. Questo dice che le trasformazioni di Lorentz sono una generalizzazione delle trasformazioni di Galileo.

1.1.3 Prime conseguenze

Ora che abbiamo visto quali siano le trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali in Relatività Speciale, ossia, le trasformazioni di Lorentz (1.1.14), possiamo vedere quali siano le principali conseguenze di tutto ciò.

La prima è la cosiddetta **contrazione delle lunghezze**, che si manifesta quando osserviamo una lunghezza nella direzione del moto relativo tra i due osservatori.

Prendiamo una sbarretta di metallo a riposo nel sistema di riferimento O' , che la vede lunga $L_0 = x'_2 - x'_1$. L'osservatore O vede l'asta in moto, lungo la direzione x , con velocità v e dunque i suoi estremi sono nelle posizioni:

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - vt) \\ x'_2 = \gamma(x_2 - vt) \end{cases} \quad (1.1.22)$$

dunque, la lunghezza misurata da O , in moto rispetto l'oggetto, è:

$$x'_2 - x'_1 = L_0 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L \quad \implies \quad L(v) = \frac{L_0}{\gamma} < L_0. \quad (1.1.23)$$

La seconda conseguenza importante di (1.1.14) è la **dilatazione temporale**. Infatti, se l'osservatore O' ha un orologio campione e in $x'_1 = x'_2$ misura un intervallo temporale $T_0 = t'_2 - t'_1$, allora un'osservatore O , in moto relativo rispetto O' , vede:

$$\begin{cases} t_1 = \gamma(t'_1 + \beta x'_1) \\ t_2 = \gamma(t'_2 + \beta x'_2) \end{cases} \quad (1.1.24)$$

e dunque un intervallo temporale:

$$T = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma T_0 \quad \implies \quad T(v) = \gamma T_0 > T_0. \quad (1.1.25)$$

La terza conseguenza importante è la **simultaneità**. Se guardiamo eventi che avvengono nella direzione lungo cui c'è moto relativo, se per uno dei due osservatori due eventi sono simultanei, quindi nella stessa posizione longitudinale, allora non lo sono per l'altro. Però, se invece gli eventi avvengono nella stessa posizione trasversalmente, allora non abbiamo differenze e sono simultanei.

Questo chiaramente porta con sé il potenziale problema dell'ordinamento temporale degli eventi. L'ordinamento non è di fatto un problema se i due eventi sono tra di loro causalmente scorrelati, ma lo diventa se uno è causa e l'altro è effetto. Infatti, l'ordinamento temporale potrebbe portare a una violazione della relazione causa-effetto, dunque della causalità.

Se un certo evento è stato causato da un altro è chiaro che temporalmente dovrà avvenire dopo, ma se la simultaneità è violata potrebbe capitare che un

osservatore vede la causa avvenire prima dell'effetto (quindi come dovrebbe essere) e un altro osservatore avviene l'effetto prima della causa (causalità violata).

Per mantenere la causalità, che è una richiesta fondamentale della fisica, bisogna imporre che ci sia una velocità limite con cui i fenomeni possono tra di loro avere interazione, tale velocità limite è c .

Notiamo che le trasformazioni di Lorentz di per sé non impediscono che ci siano sistemi che si muovono a velocità superiori alla velocità della luce. Però se due osservatori si muovono l'uno rispetto all'altro con velocità maggiori di c , al netto che questa cosa sia possibile, allora potremmo trovare un osservatore che ha la relazione di causa-effetto scambiati rispetto ad un altro. Per cui visto che vogliamo mantenere la causalità, richiediamo noi a mano che la velocità c sia una velocità limite.

Verifichiamo velocemente questo limite di velocità. Faccio riferimento al capitolo 2.8 del Barone [1]. Prendiamo due eventi A e B connessi causalmente in un certo sistema di riferimento O , supponendo ad esempio che un segnale viaggi da $A(x_a, 0, 0, t_a)$ fino $B(x_b, 0, 0, t_b)$. Se la velocità del segnale è $\vec{u} = u\hat{x}$ costante, allora vale:

$$x_b - x_a = u(t_b - t_a). \quad (1.1.26)$$

Ovviamente, stiamo sottintendendo che l'evento B si verifichi dopo l'evento A . Se a questo punto noi ci mettiamo in un sistema di riferimento O' , in moto rispetto O , con velocità $\vec{v} = v\hat{x}$ costante, allora lui vedrà l'intervallo temporale:

$$\Delta t' = t'_b - t'_a = \gamma \left[(t_b - t_a) - \frac{v}{c^2} (x_b - x_a) \right] \quad (1.1.27)$$

sostituendoci dentro (1.1.26) diventa:

$$\Delta t' = \gamma \left(1 - \frac{vu}{c^2} \right) \Delta t. \quad (1.1.28)$$

Vediamo da (1.1.28) che se u e v sono più piccole di c , allora il termine tra parentesi è positivo e il segno di $\Delta t'$ è lo stesso di Δt , altrimenti, se u e v fossero maggiori di c , allora avremmo la successione temporale degli eventi invertita e una rottura della causalità.

1.2 Lo spaziotempo

Vediamo in questa sezione tutte le nozioni fondamentali riguardanti lo spaziotempo della Relatività Speciale.

1.2.1 Spaziotempo di Minkowski

Per veder sorgere in modo naturale una descrizione unificata dello spazio e del tempo facciamo un passo indietro e in Meccanica Classica prendiamo due

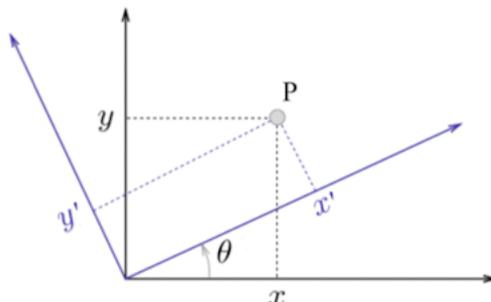


Figura 1.2: Sistemi di riferimento ruotati di un angolo θ .

sistemi di riferimento diversi, nel piano euclideo, ruotati tra di loro. Si veda la figura 1.2.

La relazione che abbiamo tra essi è:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (1.2.1)$$

di cui possiamo vedere la somma al quadrato dei coefficienti fare 1. Questo ha come conseguenza (è una proprietà dello spazio-euclideo):

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \quad (1.2.2)$$

ossia che la distanza tra due punti P e Q sia invariante e dunque non dipenda dal sistema di coordinate. Proprietà che avevamo già imparato parlando di *Geometria Differenziale*.

Ritorniamo in RS e ripartiamo dalle trasformazioni (1.1.14) e scriviamole in un modo più simile a come le scrivevamo in Meccanica Classica. Questo nostro tentativo di riscrivere le trasformazioni di Lorentz ci permetterà di vedere in modo automatico una descrizione unificata dello spazio e del tempo, permettendo la nascita dello **spaziotempo**.

Consideriamo l'impostazione usuale dei sistemi di riferimento:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) = \gamma x - \gamma vt = \gamma x - \gamma \beta ct \\ ct' = c\gamma \left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \gamma ct - \gamma \beta x \end{cases} \quad (1.2.3)$$

in cui notiamo che ct ha le dimensioni di una lunghezza. Notiamo anche che una trasformazione del tipo (1.2.3) riguarda solo la velocità e non abbiamo traslazioni o rotazioni spaziali o temporali, e viene chiamata trasformazione di **boost**. È conveniente definire le trasformazioni di Lorentz anziché come (1.1.14), invece come trasformazioni che ci portino da (x, ct) a (x', ct') poiché così lavoriamo sempre con lunghezze, e che comunque quando passiamo in

unità naturali tornano ad essere (x, t) e (x', t') . Scrivendo le (1.2.3) in unità naturali abbiamo:

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \gamma\beta t \\ t' = \gamma t - \gamma\beta x. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

In un certo senso possiamo dire che le trasformazioni (1.2.1) e (1.2.4) non sono così tanto diverse nel profondo. Infatti se proviamo a fare la differenza dei quadrati dei coefficienti di (1.2.4) troviamo:

$$\gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1 \quad (1.2.5)$$

dunque, potremmo trovare un modo per riparametrizzare i coefficienti di (1.2.4) tramite dei parametri che permettano di verificare comunque (1.2.5). Noi conosciamo delle funzioni la cui differenza dei quadrati fa 1 e sono le funzioni iperboliche. Infatti, se definiamo:

$$\begin{cases} \gamma = \cosh \phi \\ \gamma\beta = \sinh \phi \end{cases} \quad (1.2.6)$$

in cui il parametro ϕ è legato alla velocità relativa tra i due sistemi di riferimento, allora abbiamo una cosa del tutto equivalente a (1.2.4) e tale per cui valga (1.2.5). Possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x' = x \cosh \phi - t \sinh \phi \\ y' = -x \sinh \phi + t \cosh \phi \end{cases} \quad (1.2.7)$$

che sono trasformazioni formalmente somiglianti alle rotazioni spaziali nel piano euclideo, ma di fatto molto diverse poiché coinvolgono spazio e tempo. Trasformazioni del tipo (1.2.7) è verificabile lascino invariata la quantità:

$$x'^2 - (ct')^2 = x^2 - (ct)^2 \quad (1.2.8)$$

che possiamo identificare come una *distanza*. Posso definire l'insieme di spazio e tempo in modo da formare una varietà spazio-tempo, che chiameremo **spazio-tempo di Minkowski** \mathbb{M}^4 , dotarlo di metrica e definire una distanza come (1.2.8).

Quindi, lo spazio più il tempo lo vediamo come una varietà metrica, su cui possiamo definire una geometria (in analogia con quanto fatto nello spazio euclideo).

Notiamo che tutto questo deriva solo da una riscrittura delle trasformazioni di Lorentz, che a loro volta sono una conseguenza diretta e necessaria dei due postulati della Relatività Speciale, in particolare sono una forte conseguenza del secondo. Vedremo meglio le proprietà metriche di \mathbb{M}^4 nella sezione §1.2.2.

Se vogliamo utilizzare un linguaggio moderno, lo spaziotempo della meccanica classica pre-relativistica cosa vedeva? Vedeva lo spazio tridimensionale, in cui avvengono i fenomeni fisici, e le relazioni spaziali che cambiano nel

tempo, visto come parametro esterno assoluto. Ora, in Relatività Speciale sia spazio che tempo sono sullo stesso piano e lo vediamo come uno luogo geometrico quadridimensionale a cui associamo posizione e tempo a qualcosa che succede nel mondo fisico, cioè ad un **evento**. Dal punto di vista geometrico l'*evento* non è nient'altro che un punto, P , in uno spaziotempo quadridimensionale che coinvolge posizione e tempo.

Le trasformazioni di Lorentz hanno un'analogia formale con le rotazioni nello spazio euclideo, ma sono rotazioni rispetto alle trasformazioni di boost. Inoltre abbiamo anche visto che la distanza cambia rispetto alla distanza del caso Euclideo.

Per riassumere al meglio il tutto consideriamo un esempio, guardandolo dal punto di vista geometrico.

Mettiamoci nello spazio euclideo a due dimensioni e sediamoci in un sistema S , definito da:

$$\begin{aligned} S : \text{asse } x_1 : & \quad x_2 = 0 \\ & \text{asse } x_2 : \quad x_1 = 0 \end{aligned}$$

prendiamo anche un'altro sistema di riferimento S' :

$$\begin{aligned} S' : \text{asse } x'_1 : & \quad x'_2 = 0 \\ & \text{asse } x'_2 : \quad x'_1 = 0. \end{aligned}$$

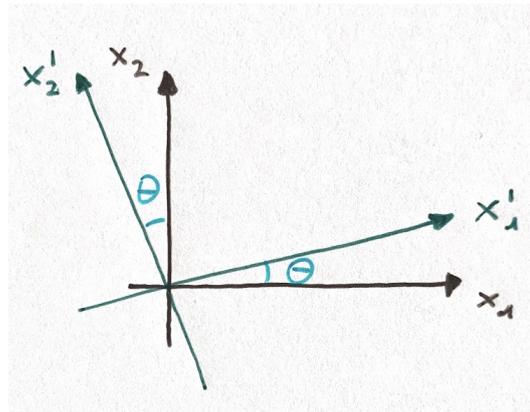


Figura 1.3: Diagramma spaziale.

Facendo riferimento alla figura 1.3 vogliamo mettere in relazione i due sistemi di riferimento guardando, ad esempio, gli assi di S' da S :

$$\begin{aligned} S : x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ x'_2 &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{aligned}$$

gli assi di S' saranno quindi:

$$\begin{aligned} S : \text{asse } x'_1 : \quad x'_2 &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta = 0 \\ \text{asse } x'_2 : \quad x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = 0. \end{aligned}$$

il che vuol dire che i due assi di S' sono le due rette:

$$\begin{aligned} S : \text{asse } x'_1 : \quad x_2 &= x_1 \tan \theta \\ \text{asse } x'_2 : \quad x_2 &= -x_1 \frac{1}{\tan \theta} \end{aligned}$$

Ma tutto ciò è ancora in uno spazio euclideo, cosa succede nello spazio di Minkowski?

La costruzione si fa allo stesso modo, ma chiaramente ci sarà qualche differenza, perché ϕ , il parametro attraverso il quale esprimiamo la, chiamiamola "rotazione", non è un angolo di Eulero. Poniamo $x = (t, \vec{x}) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ e prendiamo due osservatori:

$$\begin{aligned} O : \text{asse } x_0 : \quad x_1 &= 0 \\ \text{asse } x_1 : \quad x_0 &= 0 \\ O' : \text{asse } x'_0 : \quad x'_1 &= 0 \\ \text{asse } x'_1 : \quad x'_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ora facciamo riferimento alla figura 1.4, in cui posizioniamo l'asse x_1 come luogo geometrico dei punti che hanno tutti lo stesso tempo x_0 , e analogamente per l'asse x_0 , come il luogo geometrico dei punti che hanno tutte le stesse x_1 in comune.

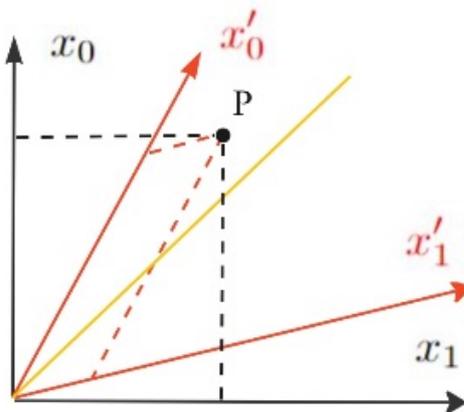


Figura 1.4: Diagramma spaziotemporale.

Come fatto prima, vogliamo vedere gli assi di O' dal punto di vista di O , quindi scriviamo:

$$\begin{aligned} O : \text{asse } x'_0 : \quad x'_1 &= x_1 \cosh \phi - x_0 \sinh \phi = 0 \\ \text{asse } x'_1 : \quad x'_0 &= -x_1 \sinh \phi + x_0 \cosh \phi = 0. \end{aligned}$$

dunque gli assi di O' appariranno come due rette.³

$$\begin{aligned} O : \text{asse } x'_0 : \quad x_0 &= x_1 \frac{1}{\tanh \phi} \\ \text{asse } x'_1 : \quad x_0 &= x_1 \tanh \phi. \end{aligned}$$

Notando che:

$$\tanh \phi = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} = \frac{\gamma \beta}{\gamma} = \beta \quad (1.2.9)$$

riusciamo ad intuire come posizionare reciprocamente gli assi di O e O' , ovvero, come in figura 1.5.

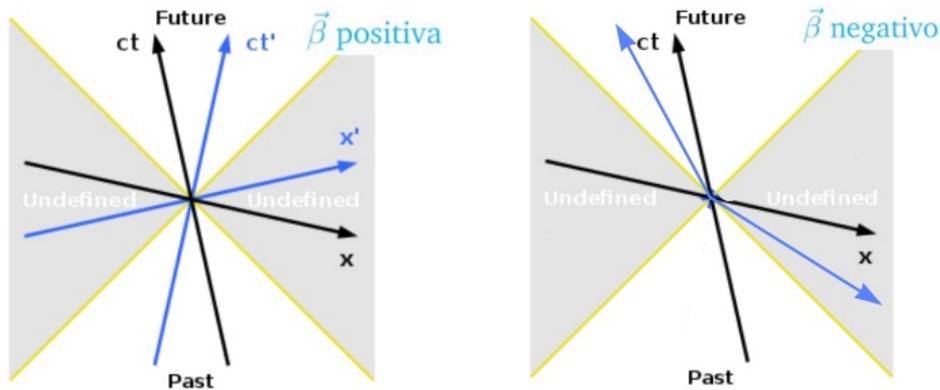


Figura 1.5: A sinistra la raffigurazione della posizione degli assi nel caso $\beta > 0$, cioè in caso di moto lungo la direzione delle \hat{x} positive. A destra la raffigurazione della posizione degli assi nel caso $\beta < 0$, cioè in caso di moto lungo la direzione delle \hat{x} negative.

Notiamo che la retta a 45° , è il luogo geometrico dei punti occupati da un segnale luminoso che parte al tempo $t = 0$ nella posizione $x = 0$, è la

³Notiamo che anche partendo dalle trasformazioni di Lorentz (1.1.14) saremmo giunti allo stesso risultato. Infatti:

$$\begin{aligned} O : \text{asse } x'_0 : \quad x'_1 &= \gamma(x_1 - \beta x_0) = 0 \quad \implies \quad x_0 = \frac{1}{\beta} x_1 \\ \text{asse } x'_1 : \quad x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x_1) = 0 \quad \implies \quad x_0 = \beta x_1. \end{aligned}$$

bisettrice dei due assi e rimane bisettrice degli assi anche dell'altro sistema di riferimento; ciò esprime il postulato della costanza della velocità della luce per i due osservatori.

Quindi, visto esplicitamente che anche lo spazio di Minkowski può essere scritto con uno spazio metrico, con una metrica diversa da quella euclidea (vedi la relazione (1.2.8)), che ha caratteristiche differenti e differenti relazioni tra gli osservatori.

1.2.2 Proprietà metriche

Vedi l'Appendice A per alcune convenzioni tipicamente utilizzate in geometria differenziale per quanto riguarda le varietà e le funzioni (tensori) metriche.

Rifacciamoci alla solita situazione fisica in cui l'osservatore O' passa esattamente in coincidenza di O al tempo $t = t' = 0$. Quando i due sono coincidenti, vengono azionati gli orologi e viene lanciato un segnale luminoso, che raggiunge un punto P posizionato nello spazio che, non dipende del sistema di riferimento. Vedi la figura 1.6. Per O quando il raggio giunge P ha percorso una distanza Δs nello spazio ed è passato un certo tempo Δt , allo stesso modo l'osservatore O' vede una distanza $\Delta s'$ ed è passato per lui un tempo $\Delta t'$.

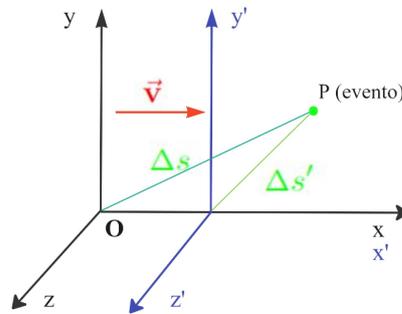


Figura 1.6: Distanze per due sistemi di riferimento.

Il secondo postulato, che dice che la velocità della luce nel vuoto c è la stessa per tutti gli osservatori inerziali, implica che per O e O' , per traiettorie di tipo luce, valgono (in unità naturali):

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2 = 0 \tag{1.2.10}$$

$$(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - (\Delta t')^2 = 0. \tag{1.2.11}$$

e da queste condizioni si ritrovano le trasformazioni di Lorentz.

Però, le trasformazioni (1.1.14), non solo permettono di cambiare sistema di riferimento $(t, x) \leftrightarrow (t', x')$ e tengono in conto del fatto che la velocità della

luce nel vuoto è la stessa per entrambi gli osservatori, ma è facile far vedere che definita la quantità:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2 \quad (1.2.12)$$

vale:

$$\Delta s^2 = (\Delta s')^2 \quad (1.2.13)$$

ovvero, la quantità Δs^2 , definita da (1.2.12), è **invariante per trasformazioni di Lorentz**.⁴ La relazione (1.2.13) è una proprietà di relazione tra due punti nello spazio tempo, cioè presi due punti A e B , ognuno dei quali ha coordinate (t_A, x_A) e (t_B, x_B) , questi sono tali per cui se definiamo una distanza come (1.2.12), cioè con il teorema di Pitagora per quanto riguarda la parte spaziale (usando coordinate cartesiane), e sottraendo il t^2 , allora tale distanza è un invariante di Lorentz.

Quello che abbiamo detto ha tutte le caratteristiche di quello visto nella discussione iniziale per definire una distanza in uno spazio e tale da renderlo uno spazio metrico. La differenza è che lo spazio che abbiamo trovato ora deve essere descritto da quattro parametri, cioè da quattro coordinate, quindi dobbiamo aggiungere il tempo alle tre coordinate spaziali. Creiamo formalmente così lo *spaziotempo di Minkowski* \mathbb{M}^4 .

Cerchiamo ora un'espressione per le funzioni metriche di \mathbb{M}^4 , ma prima rivediamo cosa succedeva nello spazio euclideo. Le tre coordinate spaziali le possiamo scrivere come $x^i = (x^1, x^2, x^3)$ e la distanza, infinitesima, nel sottospazio spaziale diventa in forma compatta:⁵

$$dl^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.2.14)$$

in forma matriciale la metrica del sottospazio spaziale è:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2.15)$$

che è quello che chiameremo *tensore metrico della varietà euclidea*. Ovviamente (1.2.15) è scritto nelle coordinate cartesiane, in cui assume una forma

⁴Lo si può verificare facilmente inserendo le trasformazioni (1.1.14) in $(\Delta s')^2$:

$$\begin{aligned} (\Delta s')^2 &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - (\Delta t')^2 \\ &= \gamma^2(\Delta x - \beta \Delta t)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \gamma^2(\Delta t - \beta \Delta x)^2 \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2)\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \gamma^2(1 - \beta^2)\Delta t^2 + 2\beta\gamma^2(\Delta x \Delta t - \Delta t \Delta x) \\ &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2. \end{aligned}$$

⁵Usando la notazione di Einstein, in cui gli indici ripetuti sono sommati.

diagonale e a coefficienti costanti, ma potremmo utilizzare tranquillamente le coordinate sferiche $x^i = (r, \theta, \varphi)$, in cui:

$$dl^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j \quad (1.2.16)$$

$$= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (1.2.17)$$

$$= \eta_{rr} dr^2 + \eta_{\theta\theta} d\theta^2 + \eta_{\varphi\varphi} d\varphi^2 \quad (1.2.18)$$

$$= \eta_{11} dr^2 + \eta_{22} d\theta^2 + \eta_{33} d\varphi^2 \quad (1.2.19)$$

e dunque:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.2.20)$$

che è ancora una tensore metrico diagonale, ma non più a coefficienti costanti.

Tutta la descrizione che dovremmo fare dovrà tenere conto, del fatto che non è il set di coordinate a determinare le proprietà della varietà, ma è solo un set di parametri che ci permette di descriverlo. Come dopotutto avevamo già visto parlando di *Geometria Differenziale*.

Si può dimostrare che per quanto riguarda uno spazio euclideo, quindi uno spazio piatto, che esiste sempre, un sistema di coordinate in cui il tensore metrico è diagonale con coefficienti costanti. Però, questo a noi ora interessa relativamente poiché siamo interessati allo spazio di Minkowski, di quattro dimensioni e in cui la distanza infinitesima tra due punti è definita dall'equazione (1.2.12).

Cominciamo a usare una notazione leggermente differente da quella a cui siamo abituati in Meccanica Classica, in cui indichiamo:

$$x^\alpha = (t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad , \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \quad (1.2.21)$$

Fatto questo la distanza (1.2.12) la possiamo scrivere in forma infinitesima, se i due punti sono infinitesimamente vicini, come:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.2.22)$$

$$= -dt^2 + dl^2 \quad (1.2.23)$$

$$= \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.2.24)$$

$$= \eta_{00} dx^{0^2} + \eta_{11} dx^{1^2} + \eta_{22} dx^{2^2} + \eta_{33} dx^{3^2}. \quad (1.2.25)$$

Guardando la forma (1.2.25) vediamo subito che il tensore metrico è diagonale nel set di coordinate scelto:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2.26)$$

e di cui possiamo scrivere gli elementi di matrice:

$$\eta_{00} = -1 \quad , \quad \eta_{ij} = \delta_{ij}. \quad (1.2.27)$$

Rispetto alle varietà Euclidee in (1.2.26) c'è uno degli autovalori della metrica che ha segno opposto rispetto agli altri, il che è proprio la caratteristica dello spaziotempo.⁶ Avremo modo di verificare in seguito che si tratta di uno spazio piatto, ma un'anticipazione di ciò sta nel fatto che esiste un set di coordinate in cui la metrica è diagonale e costante.

Potremmo essere leggermente più precisi (usando il segno che balla nella definizione di η) e scrivere (1.2.25) come:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -\hat{\eta}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.2.29)$$

dove abbiamo le due forme matriciali:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.2.30)$$

Generalmente chiamiamo **distanza propria** la quantità ds^2 definita come spazio - tempo, mentre chiamiamo **tempo proprio** quella quantità definita come tempo - spazio:

$$d\tau^2 = -ds^2 = dt^2 - dl^2.$$

1.2.3 Il tempo, gli osservatori inerziali e le world-line

Facciamo una pausa e, consci di tutto quello che abbiamo visto, pensiamo a che cos'è per noi (osservatore O) l'asse temporale $x_0 = t$?

Potremmo dire che è il luogo geometrico dei punti in cui $x = 0$, e allo stesso modo anche per l'osservatore O' è la stessa cosa, infatti per esso l'asse tempo t' , è il luogo geometrico dei punti in cui $x' = 0$.

Però potrebbe sembrare strana questa rappresentazione ad alcuni. Perché noi stiamo cercando di rappresentare sul piano della lavagna, che è un piano euclideo, uno spazio non è euclideo. L'asse t' visto da O non è altro che

⁶Infatti, si osservi che lo spaziotempo non è euclideo! Lo spazio euclideo in quattro dimensioni avrebbe:

$$\eta_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2.28)$$

Nello spaziotempo è possibile definire una classe di sistemi di coordinate, rispetto i quali le trasformazioni di coordinate sono quelle di Lorentz, del tipo (1.1.14), e per effetto delle quali la distanza (1.2.12) è invariante.

l'osservatore in moto, perché essendo esso il luogo geometrico dei punti in cui lui sta sempre nella sua origine, visto da O è lui che si sta muovendo con velocità positiva lungo l'asse x . Infatti, al passare del nostro tempo t , il tempo t' occupa posizioni x crescenti. Si faccia riferimento alla figura 1.7.

La bisettrice, come detto in precedenza, è il luogo geometrico dei punti, di tutti gli oggetti che si muovono esattamente alla velocità della luce. Notiamo che se ci volessimo porre nel sistema di riferimento del segnale luminoso, quindi sulla bisettrice, avremmo una situazione degenera, in cui il cono si chiude.

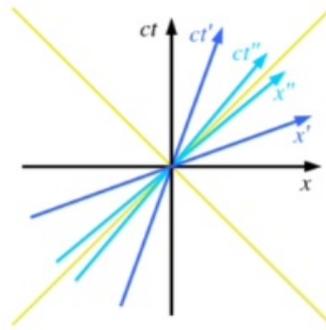


Figura 1.7: Rappresentazione che all'aumentare di β gli assi si chiudono fino a diventare degeneri nel caso di $\beta = v = c$.

Quindi non abbiamo capito molto. Vediamo come è naturale arrivare a una descrizione geometrica anche dello spaziotempo, ma diamo prima una *definizione geometrica* di che cos'è un *osservatore inerziale*.

Un'osservatore non va visto, come a volte può sembrare da certi esercizi di relatività, come una persona con in mano un binocolo, che si siede in un punto O e guarda cosa succede attorno a sé; in generale, pensando a tutto quello che abbiamo detto fino adesso, possiamo vedere un'osservatore come un sistema di coordinate che realizza un'osservazione misurando posizione, quindi (x, y, z) , e tempo (t) di un evento.

Già nella definizione generale di un osservatore stiamo già dando una definizione anche geometrica, perché lo vediamo come un sistema di coordinate e definiamo degli **eventi** come dei punti nello spazio-tempo.

Quindi tutto ciò che avviene, un evento, è un punto in uno spazio-tempo, cioè un punto su una varietà metrica. Un osservatore inerziale deve avere qualche caratteristica che lo renda inerziale.

Ritorniamo a ragionare sul tempo. Dal punto di vista dello spazio, la distanza $d(P_1, P_2)$ tra due punti non dipende dal tempo. Infatti, se ci pensiamo questa è la stessa cosa che abbiamo in uno spazio euclideo tridimensionale, in cui possiamo mettere, per esempio, una sbarretta lungo l'asse x , la cui lunghezza non dipende dalla coordinata y o z . Dal punto di vista puramen-

te geometrico, un modo per rappresentare il tempo come quarta coordinata può essere quello mostrato in figura 1.8, ovvero prendiamo lo spazio ordinario tridimensionale e costruiamo una griglia, in ogni nodo della griglia ci posizioniamo un orologio che misura la quarta coordinata che è il tempo.

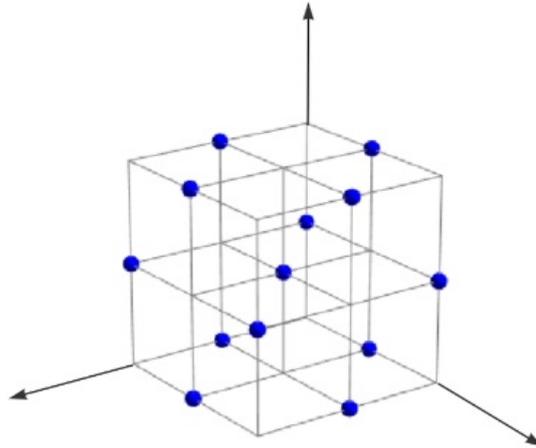


Figura 1.8: I punti in blu rappresentano gli orologi. A ogni nodo della griglia si associa un orologio (in figura ne sono rappresentati solo alcuni per semplicità).

L'**osservatore inerziale** lo definiamo nel seguente modo:

- Tutti gli orologi sono sincronizzati.
- Hanno lo stesso tasso di avanzamento.
- La geometria della parte spaziale, cioè le sottosezioni a t uguale costante, è euclidea.

Notiamo che solo se non c'è accelerazione riusciamo a fare in modo che gli orologi rimangano tutti sincronizzati, ciò vuol dire che lo stato dell'osservatore inerziale è uno stato di velocità costante.

Quindi, se noi accendiamo la gravità tutto quello detto non si può più fare, perché se c'è un campo gravitazionale ovunque andiamo a posizionarci subiamo un'accelerazione. In più notando che il range dell'interazione gravitazionale è formalmente infinito, ci rendiamo conto che se vogliamo definire una teoria della gravità dobbiamo modificare la nozione di osservatore inerziale. Ci sarà modo di capire come.

Facciamo una piccola considerazione generale solo per chiarire. **Osservare** significa registrare un evento, cioè misurare la posizione e il tempo in cui esso avviene. Attenzione però che non è il tempo in cui noi, seduti in O , lo vediamo, ma, ad esempio, se scoppia la supernova e nel nostro laboratorio

vediamo per la prima volta la luce, allora avremo l'evento: "ho visto per la prima volta la supernova", ma l'evento: "scoppio della supernova" è differente.

Aiutati dalla figura 1.9 facciamo un rapidissimo riassunto di quello che abbiamo visto fin'ora, in modo da prepararci ai concetti di cono luce, passato, presente e futuro.

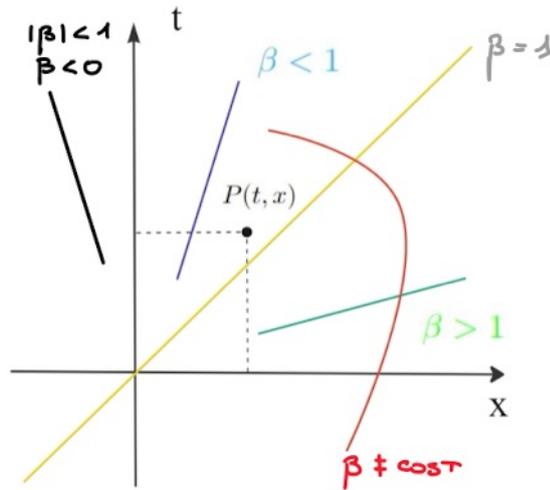


Figura 1.9: Rappresentazione diverse wordline.

- Un *evento* è un punto P dello spaziotempo e ha coordinate (t, x) .
- Una linea nel diagramma spazio-temporale si chiama **linea d'universo** o linea di mondo, in inglese *worldline*. Se la velocità è costante, allora la worldline è una retta.
- Una retta nello diagramma spaziotempo, a 45° , è il luogo geometrico dei punti in cui troviamo un segnale che si muove alla velocità della luce.
- Un punto materiale che si muove con velocità inferiore a c , avrà una worldline inclinata più verso l'asse tempo che verso l'asse spaziale. Ad esempio la retta azzurra.
- Un oggetto che si muove a velocità costante maggiore della velocità della luce è posizionato come raffigurato dalla retta verde. Oggetti di questo tipo possono essere i tachioni. La Relatività Speciale non impedisce l'esistenza di tachioni, ma quello che impedisce è che un tachione ed un oggetto che viaggi a velocità inferiore di c , possano parlarsi.

- Una linea retta posizionata con inclinazione come quella in nero rappresenta un oggetto che ha una velocità inferiore alla velocità della luce, ma che si muove nella direzione negativa dell'asse x .
- Una traiettoria curva è una worldline di un oggetto che non ha velocità costante.

Ora, parliamo del fatto che abbiamo cercato di analizzare il concetto di tempo, ma non abbiamo parlato di passato, presente e futuro di un evento. Il fatto che la velocità della luce sia un limite invalicabile, per non violare la causalità, ha un'implicazione nei diagrammi spazio-temporali. Infatti, produce quella che viene chiamata una **struttura causale** dello spaziotempo. Prendiamo il diagramma dello spazio-tempo in figura 1.10.

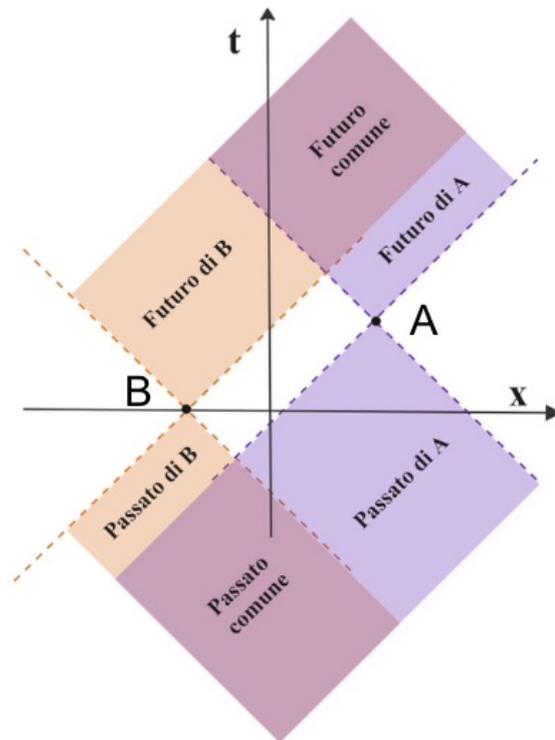


Figura 1.10: Rappresentazione passato e futuro di un evento.

Preso un evento A esso possiede un futuro e un passato, caratterizzati da tutti gli eventi che possono essere messi in relazione causale. In particolare si ha che:

- Tutti i punti che stanno all'interno delle worldline della luce rappresentano il **futuro causale** di A , ed il **passato causale** di A . Ognuno dei punti in queste porzioni di piano, può essere collegato ad A con una

worldline di un oggetto che si muove con velocità inferiore alla velocità della luce e che può trasportare quindi informazioni.

- I punti all'esterno delle worldline della luce non sono in connessione causale con il punto A , in quanto per poter mettere in relazione A con uno al di fuori del cono, dovremmo collegarli con una traiettoria che si riferisce a qualcosa che si muove più veloce della luce.
- Dalla figura 1.10 è evidente che due eventi possono avere una futuro (o un passato) causale in comune.
- Se aggiungiamo una terza e addirittura una quarta dimensione, le dimensioni spaziali, formano quello che si chiama il **cono-luce**, ossia, quel cono formato da tutti i punti collegabili con un segnale luminoso a partire dal punto detto. Tutti i punti all'interno di questo cono possono avere una connessione causale nel futuro dell'evento, mentre quelli che stanno al di sotto, possono avere una connessione causale per tempi precedenti relativi all'evento. Una raffigurazione del cono luce è in figura 1.11.

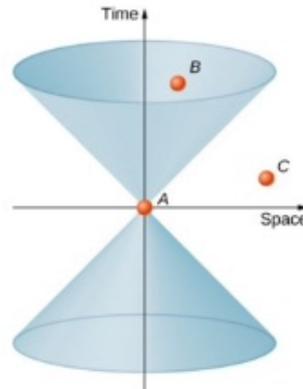


Figura 1.11: Rappresentazione cono luce di un evento A .

Quindi c'è una struttura nello spazio-tempo, ogni evento ha un suo cono-luce (come visibile nella figura 1.12) e ha una zona causalmente connessa o connettibile con sé.

Quindi, un certo evento lo possiamo raggiungere arrivando dal suo passato, e lasciarlo andando nel suo futuro; come mostrato in figura 1.13. Il **presente** di un evento coincide con l'evento stesso, mentre l'**altrove** di un evento rappresenta tutti i punti collegabili all'evento stesso con segnali superluminali, dunque, non accessibili, ma per cui (come vedremo nelle sezioni successive quando parleremo di intervalli di tipo spazio) è possibile trovare

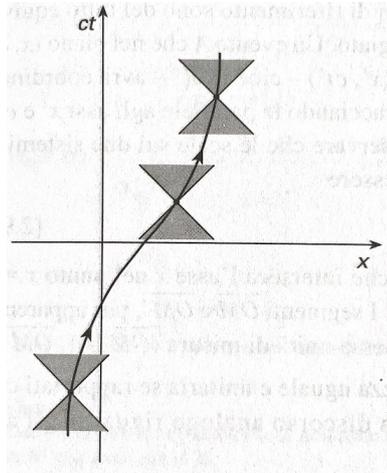


Figura 1.12: Rappresentazione cono luce di diversi eventi.

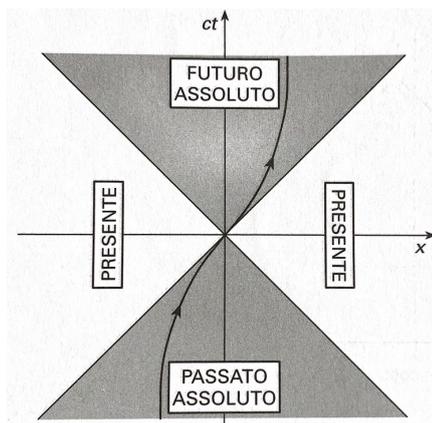


Figura 1.13: Rappresentazione passato e futuro di un evento.

un sistema di riferimento in cui l'evento è simultaneo con i punti che stanno nell'*altrove*. Dunque l'*altrove* di un evento rappresenta il suo presente.

Questa è una struttura particolare dello spaziotempo che dal punto di vista matematico è una caratteristica che ha lo spaziotempo di Minkowski, dal punto di vista fisico questo è collegato con il concetto di causalità.

1.2.4 Il cono luce

Abbiamo già intravisto il concetto di cono luce, ma in questa sezione lo analizzeremo meglio e vedremo alcune definizioni fondamentali.

Per prima cosa notiamo che la distanza ds^2 non è definita positiva e possiamo definire gli intervalli, rappresentati anche in figura 1.15:

- $ds^2 > 0$: **intervalli di tipo spazio**, in cui la separazione spaziale è maggiore della separazione rispetto al tempo.
- $ds^2 = 0$: **intervalli di tipo luce**. Poiché $dl^2 = c^2 dt^2$.
- $ds^2 < 0$: **intervalli di tipo tempo**, in cui la separazione nella direzione temporale è maggiore della separazione rispetto lo spazio.

Notiamo che essendo ds^2 invariante di Lorentz, una volta preso un certo intervallo esso non cambia e rimane lo stesso in tutti i sistemi di riferimento. Facendo riferimento alla figura 1.14, vediamo che:

- Se prendiamo un punto P , possiamo costruirci la superficie dei punti a separazione nulla da P , che saranno tutti quei punti sulla superficie detta **cono luce** e sono punti tutti collegabili tramite segnali luminosi. Si ha $ds_{PQ}^2 = 0$.
- I punti con separazione di tipo tempo, relativamente a P , ad esempio R , sono quelli per i quali ci spostiamo di più nella direzione temporale rispetto a quanto facciamo nella direzione spaziale. Punti separati da intervalli di tipo tempo sono quindi quelli per cui restiamo all'interno del cono luce. Sono dei punti che possono essere messi in relazione causale con il punto P , poiché possono essere raggiunti da segnali a velocità subluminali, visto che $dx^2 < c^2 dt^2$, ovvero, la distanza spaziale tra due punti è minore di quella che percorrerebbe la luce in un certo intervallo temporale.
- Per mettere in relazione due punti di tipo spazio (fuori dal cono luce) dovremmo viaggiare a velocità superiore alla velocità della luce, poiché $dx^2 > c^2 dt^2$, e questo quindi ci potrebbe a violare la causalità, quindi sono punti non causalmente connessi all'evento P .

Per i motivi elencati possiamo pensare alla Relatività Speciale come a una teoria della struttura dello spaziotempo in assenza di gravità. Puoi vedere il capitolo 2.9 di Barone [1], in cui ti fa vedere che se due eventi sono separati da un intervallo di tipo spazio, allora esiste un sistema di riferimento in cui essi sono simultanei, analogamente mostra che se due punti sono separati da un intervallo di tipo tempo esiste un sistema di riferimento in cui essi sono spazialmente coincidenti.

1.2.5 Diagrammi di Minkowski

Abbiamo visto nella sezione precedente che abbiamo per lo spazio tempo una struttura metrica piatto e che lo spaziotempo è il background in cui le particelle, i campi, le mele, i gatti si muovono, evolvono e fanno tutte le loro cose. Con il termine *muoversi* intendiamo dire cambiare posizione

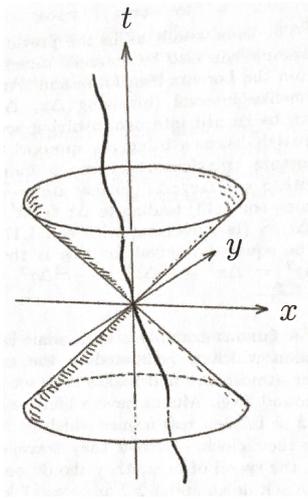


Figura 1.14: Rappresentazione cono luce.

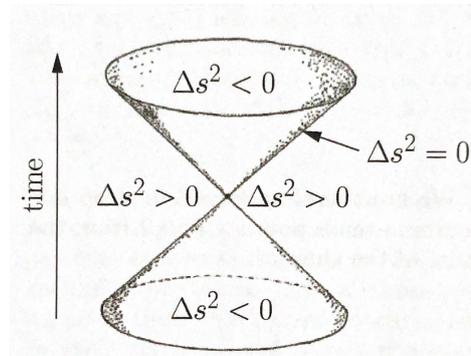


Figura 1.15: Rappresentazione intervalli sul cono luce.

nel tempo, cioè seguire una worldline, che è semplicemente una traiettoria all'interno dello spazio-tempo.

Vediamo in questo capitolo alcuni "effetti" particolari (rispetto a quello a cui siamo abituati nello spazio Euclideo) che emergono dallo spaziotempo di Minkowski e che in realtà non sono stranezze o incongruenze con la realtà, bensì sono semplicemente conseguenze naturali dello spazio in cui viviamo. Se vuoi una trattazione più rigorosa, per quanto possibile, e più quantitativa poi vedere il Barone [1].

Da tenere in tasca: un foglietto con su scritto di ricordare sempre che cercheremo di disegnare degli assi di uno spaziotempo quadridimensionale in uno spazio euclideo, il piano del foglio, quindi è chiaro che avremo delle cose che ci sembreranno strane.

Simultaneità Facciamo la costruzione illustrata in figura 1.16. Scegliamo un osservatore O e costruiamo le coordinate di un altro osservatore \bar{O} . Questa cosa la abbiamo fatta passo passo nella sezione §1.2.1. Noi, osservatore O misuriamo tempo e spazio, ma quando c'è un altro osservatore in moto, inerziale rispetto a noi, sappiamo descrivere, nel nostro spaziotempo, le coordinate dell'altro osservatore.

Noi, O , associamo ad un evento coordinate (t, x) , mentre \bar{O} , che si muove con velocità v lungo l'asse \hat{x} associa (\bar{t}, \bar{x}) . Inoltre, per definizione, sappiamo

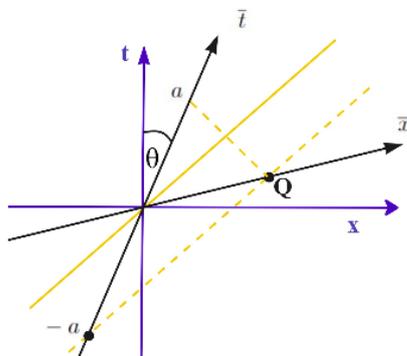


Figura 1.16: Un evento Q in due diversi sistemi di riferimento.

che:

$$\text{asse } t : \quad x = 0$$

$$\text{asse } \bar{t} : \quad \bar{x} = 0$$

e sappiamo anche, dalla sezione §1.2.1, che:

$$\text{asse } \bar{t} : \quad t = x \frac{1}{\tanh \theta}$$

in cui θ è l'angolo relativo alla trasformazione di boost.

Notiamo però che ora, l'asse tempo t è anche la worldline dell'osservatore O , poiché rimane sempre fermo, e analogamente l'asse \bar{t} lo è per \bar{O} .

Ora per noi, l'asse x è il luogo degli eventi che hanno tutti lo stesso tempo $t = 0$ ed in particolare, esso corrisponde ad una **linea di simultaneità**. Attenzione però che il fatto che degli eventi siano simultanei vuol dire solo che avvengono insieme, ma non che noi ne abbiamo accesso. È chiaro che la stessa cosa vale per la costruzione reciproca all'asse \bar{x} .

Ora, se non lo sapessimo già fare, dovremmo cercare di costruire l'asse \bar{x} nel riferimento di O . Un modo per costruirlo potrebbe essere quello illustrato in figura 1.17.

Supponiamo di spostarci e metterci in \bar{O} . Prendiamo un evento P , lanciamo un segnale luminoso al tempo $-a$, il segnale si muove a 45° , raggiunge uno specchietto posizionato in un punto che dista da me a , questo lo riflette (avremo un'altra retta, ma con inclinazione opposta) cosicché lo si incontri nuovamente ad un tempo a (nuovo evento R). Dunque, abbiamo tre eventi (P, Q, R) collegati da segnali luminosi. L'asse \bar{x} è il luogo degli eventi che hanno la seguente caratteristica: se lanciamo un segnale al tempo $t = -a$ e lo ricevo al tempo $t = +a$, allora ha beccato uno specchietto a distanza a da me.

Ricostruiamo quanto appena visto anche nel sistema di riferimento O , come vediamo nella figura 1.16.

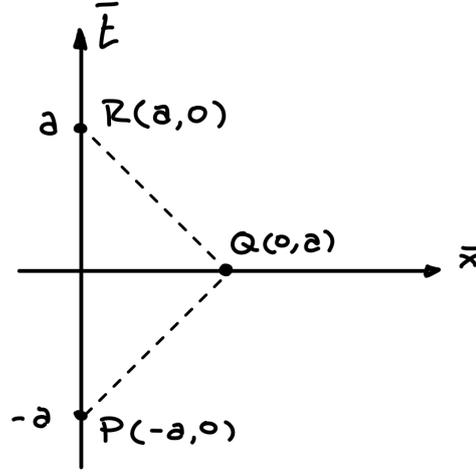


Figura 1.17: Costruzione asse \bar{x} .

Ora, osservando le worldline e linee di simultaneità dei due osservatori, emerge immediatamente che non c'è nessun problema nel fatto che la simultaneità non valga tra osservatori inerziali.⁷

Calibrazione Abbiamo disegnato gli assi reciproci dei due osservatori però dobbiamo anche **calibrarli**, ossia, dobbiamo scegliere un'unità di misura. Per calibrare gli assi in geometria euclidea sfruttiamo la distanza invariante:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = A^2 \quad (1.2.31)$$

in questo modo abbiamo calibrato gli assi, cioè sappiamo dare i valori relativi delle distanze, e in più entrambi gli assi concordano su distanze. Come puoi vedere in figura 1.18.

Per *calibrare* gli assi nello spaziotempo uso la stessa proprietà, ma tenendo conto del tensore metrico e quindi del fatto che la distanza ha un segno diverso. Dobbiamo usare quelle che chiamiamo **iperboli invarianti**. So che vale:

$$\Delta s^2 = x^2 - t^2 = a^2 \quad (1.2.32)$$

$$\Delta \bar{s}^2 = \bar{x}^2 - \bar{t}^2 = a^2 \quad (1.2.33)$$

che sono equazioni che rappresentano tutti i punti, per O e O' , per cui $\Delta s^2 = a^2$. Però potremmo avere anche delle iperboli di tipo B , poiché Δs^2

⁷Poiché semplicemente stiamo prendendo punti diversi e la simultaneità la perdiamo quando t diventa coordinata.

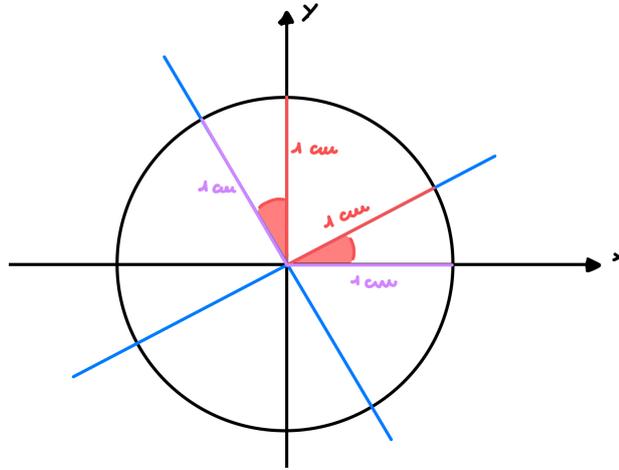


Figura 1.18: Calibrazione nel piano euclideo.

non è definita positiva:

$$x^2 - t^2 = -b^2 \tag{1.2.34}$$

$$\bar{x}^2 - \bar{t}^2 = -b^2. \tag{1.2.35}$$

Entrambi i tipi di iperboli invarianti sono rappresentate in figura 1.19. Così facendo, abbiamo calibrato gli assi esattamente come avremmo fatto con il piano euclideo.

Nella figura 1.20 sono rappresentati i due osservatori O e O' insieme alle iperboli invarianti. È interessante notare alcune cose di questa figura. Per prima cosa possiamo notare le iperboli di tipo tempo e di tipo spazio (quelle che nella figura 1.19 avevamo chiamato rispettivamente b e a). Ovviamente, c'è il solito cono luce rappresentato in giallo. La parte interessante però la possiamo vedere nei tratti fucsia e azzurrino. Vediamo ad esempio i tratti fucsia, essi partono dall'origine e finiscono in punti diversi, ma della stessa iperbole, per cui, dalle relazioni (1.2.32) e (1.2.33), sappiamo che i due segmentini sono della stessa lunghezza. Stesso discorso per i tratti azzurri.

Dilatazione temporale Grazie a ciò che abbiamo imparato nel paragrafo dedicato alla calibrazione e alle iperboli invarianti, possiamo vedere che il fenomeno della dilatazione temporale, che avevamo visto nella sezione §1.1.3, non sia paradossale, ma perfettamente normale.

Prendiamo i soliti osservatori O e O' e mettiamoli entrambi in un unico diagramma di Minkowski. Immaginiamo di sincronizzare gli orologi cosicché $t = \bar{t} = 0$. L'orologio di \bar{O} sta seduto nel sistema di riferimento \bar{O} , quindi nel diagramma spazio-temporale sta sulla worldline \bar{t} . Facciamo riferimento alla figura 1.21. L'evento B , che notiamo avere $\bar{x} = 0$, è quello per cui

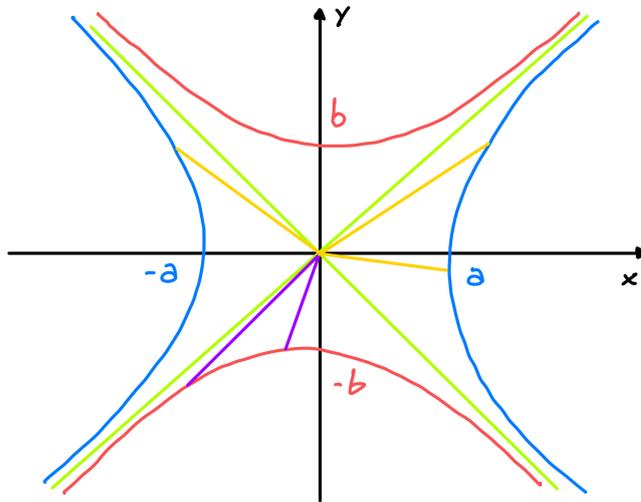


Figura 1.19: Calibrazione con le iperboli invarianti. In verde sono rappresentati i coni luce, mentre in blu e rosso sono le iperboli invarianti, rispettivamente di tipo *A* e *B*. Per le iperboli a destra (a): i segmenti in giallo (che sono eventi di tipo spazio) sono tutti equivalenti in lunghezza (valgono tutti *a*), valgono ad esempio tutti un metro; analogamente per le iperboli (b) e i segmenti in violetto (che sono eventi di tipo tempo).

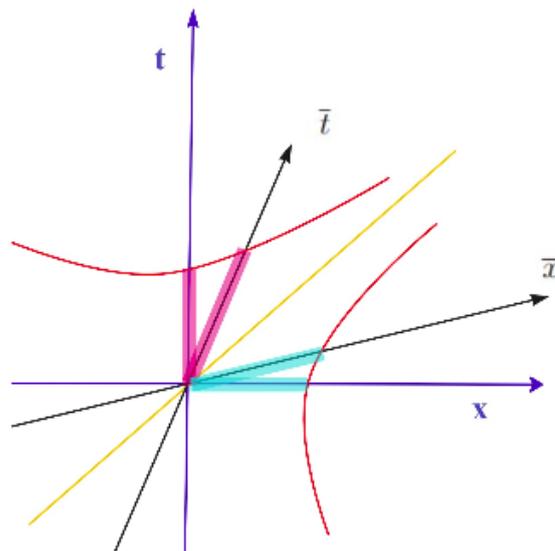


Figura 1.20: Sistemi di riferimento *O* e *O'* insieme alle iperboli invarianti.

l'osservatore *O* dice: "è passato un secondo", quindi per cui:

$$\Delta \bar{t} = 1 \text{ s} \equiv \Delta \tau \quad (1.2.36)$$

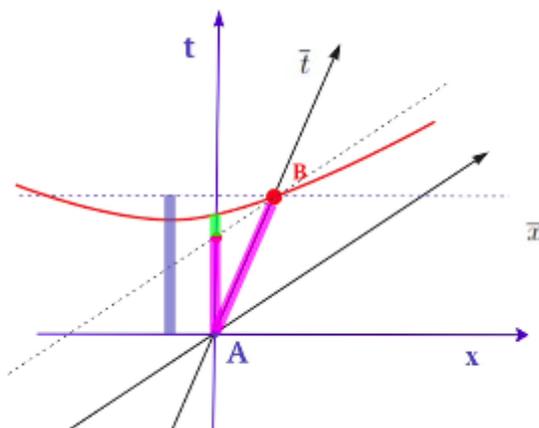


Figura 1.21: Diagramma per la dilatazione temporale.

dato che sul suo asse tempo questo coincide con il tempo proprio (perché non si è spostato nel suo riferimento) e che quest'ultimo è invariante (per definizione), allora:

$$\Delta\tau^2 = dt^2 - dx^2 = d\bar{t}^2 - d\bar{x}^2 \quad \xrightarrow[\bar{x}=0 \text{ in } B]{} \quad \Delta\tau^2 = d\bar{t}^2. \quad (1.2.37)$$

Cosa vede O ? Per noi che ci troviamo in O , l'evento B è posizionato alla coordinata (t, x) . Per misurare il tempo di B dobbiamo tracciare la linea di simultaneità, che per O è una retta orizzontale (come si vede in figura). Anche solo guardando la figura 1.21 ci rendiamo conto che in O misureremo un Δt diverso da quello che misura O' . Infatti, possiamo tracciare l'iperbole invariante e, confrontando i segmentini colorati, vediamo subito che per O il tempo che è trascorso tra l'evento "ci incontriamo" e l'evento "lui guarda l'orologio" (ovvero B) è:

$$\Delta t > \Delta\bar{t}. \quad (1.2.38)$$

Spieghiamo meglio. Se prendiamo il punto B e disegniamo la linea di simultaneità rispetto al sistema di riferimento O , allora disegniamo una retta orizzontale, e possiamo misurare il tempo che per O è trascorso da quando i due osservatori si sono incontrati e quando l'osservatore O' è arrivato in x e ha misurato il tempo del suo cronometro. Il tempo trascorso per O è Δt , che è rappresentato dal segmento in blu verticale. Possiamo vedere che $\Delta t > \Delta\bar{t}$ poiché, senza preoccuparci di O' , vediamo che il tratto di Δt è più lungo del tratto che va dall'origine a B , che a sua volta è equivalente al trattino fucsia+verde verticale visto che entrambi vivono sull'iperbole di calibrazione.

Però, ragioniamo anche dal punto di vista di O' . Sappiamo che l'intervallo spazio-temporale è invariante, ma non lo sono i tempi singolarmente, infatti il tempo che misura O è maggiore del tempo che misura O' . Questo però

è reciproco e non c'è nessun paradosso. Infatti, sedendoci in O' , guardando l'evento B e tracciando le linee di simultaneità, che sarà una retta parallela all'asse \bar{x} , possiamo vedere che intercetta un punto sull'asse t in un punto più in basso di quello che prima avevamo identificato con Δt . Per cui O' vede:

$$\Delta \bar{t} > \Delta t. \quad (1.2.39)$$

Questa differenza ci dà le relazioni di dilatazione temporale e non c'è paradosso perché sono sistemi di riferimento diversi che, come abbiamo visto, non sono d'accordo sulla simultaneità per via del fatto di avere gli assi inclinati in un certo modo. Quindi, una dilatazione temporale è reciproca tra i due osservatori, ognuno sostiene che il suo orologio vada più piano dell'altro e viceversa.

Un'altra figura che si può vedere per capire i discorsi è la figura 1.22.

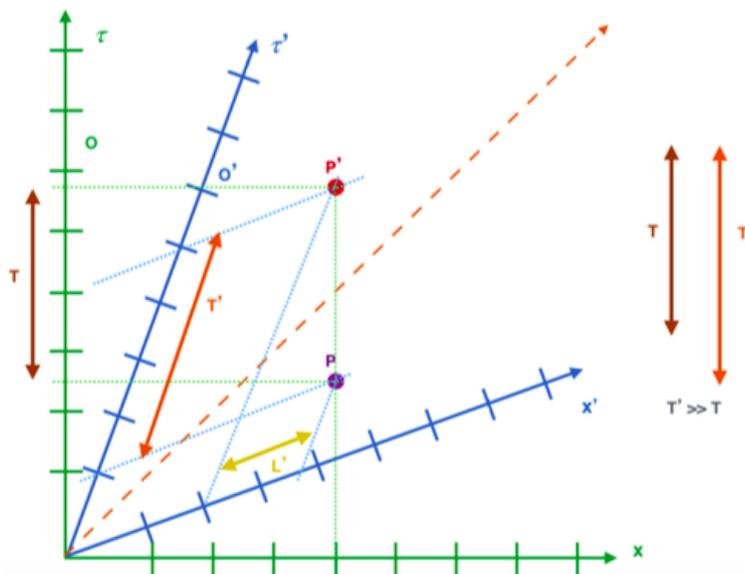


Figura 1.22: Diagramma per la dilatazione temporale.

Paradosso dei gemelli Trattiamo adesso il famoso paradosso dei gemelli facendo riferimento alla figura 1.23. La situazione è nota: abbiamo due gemelli, prendiamo per esempio Diana ed Artemide, che vengono separate a un certo istante e una resta sulla terra, mentre l'altra parte per un viaggio verso Alfa Centauri. Entrambe viaggiano sulla propria worldline (sul proprio asse temporale). Supponiamo che Diana sia quella che si allontana da Artemide.

Diana si muove con velocità v costante (ovviamente $v < c$) nella direzione positiva dell'asse scelto (in un sistema O) e si allontana dalla sorella, ma

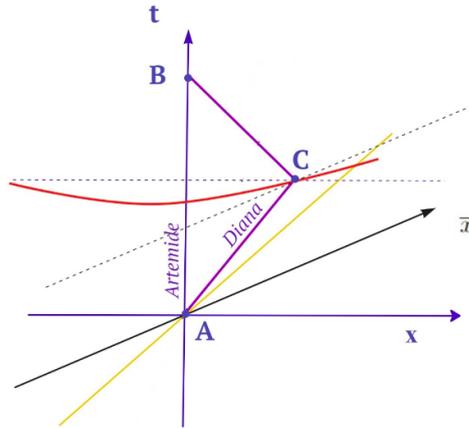


Figura 1.23: Paradosso dei gemelli.

allo stesso tempo la sorella si allontana nella direzione negativa (di un altro sistema O'). Succede qualche cosa, Diana torna indietro, a un certo punto si incontrano nel futuro e ci si chiede: quando si incontrano nel futuro hanno la stessa età?

La risposta è no, non hanno la stessa età, ma una delle due è più giovane dell'altra. Questo chiaramente sembra un paradosso, ma in realtà non lo è per nulla. Quello che succede è che una delle due, per potersi incontrare, deve aver subito un'accelerazione, cioè deve essere stata per un certo tempo non inerziale. È proprio quest'ultima che risulta più giovane nel futuro.

Usiamo il sistema di coordinate O di Artemide per fare il ragionamento. L'origine coincide con l'evento A , in cui le sorelle si salutano; dopodiché Artemide procede lungo la propria worldline (asse t), mentre Diana si muove su una traiettoria inclinata di un angolo che dipende dalla sua velocità. Successivamente c'è un evento C , che è il momento in cui Diana inverte la propria direzione. Come detto, inversione significa che c'è una variazione di velocità, quindi Diana ha un momento in cui non è inerziale. A un certo punto, tornando indietro, necessariamente dovrà incontrare la sorella e questo evento lo indichiamo con B .

Però, come facciamo a capire qual è la più giovane? Guardiamo all'unica cosa su cui sono d'accordo: la lunghezza nello spaziotempo di segmenti di traiettoria. Separiamo il tempo totale percorso per Artemide per muoversi da A a B in due contributi:

$$T_A = \Delta t_A^{AC} + \Delta t_A^{CB} = \Delta \tau_A^{AC} + \Delta \tau_A^{CB} = \Delta \tau_A^{AB} \quad (1.2.40)$$

in cui abbiamo usato il fatto che Δt coincida con il tempo proprio poiché $x = 0$. Invece, per Diana la situazione è:

$$T_D = \Delta t_D^{AC} + \Delta t_D^{CB} = \Delta \tau_D^{AC} + \Delta \tau_D^{CB} = \Delta \tau_D^{AB}. \quad (1.2.41)$$

Entrambe sono d'accordo su quanto sia lungo $\Delta\tau$, ma se guardiamo il grafico ci accorgiamo subito che la lunghezza dei due segmenti non è uguale, fosse anche solo per il fatto che il punto C starà su una iperbole invariante, da cui osserviamo che:⁸

$$\Delta\tau_D < \Delta\tau_A \quad (1.2.42)$$

il che corrisponde a dire:

$$T_D < T_A \quad (1.2.43)$$

dunque Diana è più giovane.

Possiamo analizzare un po' meglio i vari step intermedi dell'esperimento servendoci delle figure 1.24 e 1.25. Il paradosso nasce dal fatto che nel passare dall'evento A all'evento C , per via dei discorsi sulla dilatazione temporale, Artemide dice che Diana, quando arriva in C , è più giovane di lei, ma in C allo stesso modo Diana dice che Artemide è più giovane di lei. Infatti, in C per Artemide è passato un tempo che equivale al segmento che congiunge A con la proiezione (linea di simultaneità orizzontale) di C sull'asse t , mentre per Diana è passato un tempo che equivale alla worldline che congiunge A e C , ma in senso di lunghezza di segmenti quest'ultimo è il più corto. Dopodiché nel tragitto inverso si cambia solo il segno alla velocità, quindi di nuovo, dal suo punto di vista, Artemide concluderebbe che Diana è più giovane di lei e lo stesso direbbe Diana di sua sorella.

Quello a cui bisogna prestare attenzione è che quello detto è vero durante il viaggio di andata a velocità costante e durante il viaggio di ritorno, ma c'è un intervallo di tempi in cui Diana è non inerziale, ovvero quando comincia a decelerare e cambia la sua traiettoria. In questa fase non inerziale di decelerazione succede che, chiamando I ed F (inizio e fine di accensione dei motori), allora la situazione degli intervalli temporali può essere analizzata con i segmenti colorati. Visto da Diana, nella fase di allontanamento e di riavvicinamento il tempo che passa per se e per sua sorella è il tempo verde, che per via delle iperboli invarianti, Artemide risulta essere più giovane (segmenti più corti). Però Diana può dire che sua sorella risulta più giovane solo nei due semi-tragitti, però, negli istanti in cui è non inerziale (tratti arancioni), vede il tempo di sua sorella andare molto più velocemente, quindi, quando comincia a tornare indietro, per lei sua sorella è invecchiata molto più di lei.

1.3 Calcolo tensoriale

Vediamo in questa sezione un rapida, ma essenziale, carrellata sul calcolo tensoriale. I riferimenti che si possono guardare sono diversi.

⁸In un piano euclideo la linea spezzata di Diana sarebbe senza ombra di dubbio più lunga, ma per via della definizione di ds^2 , si ha che le traiettorie "meno dirette" tra A e B siano quelle più corte.

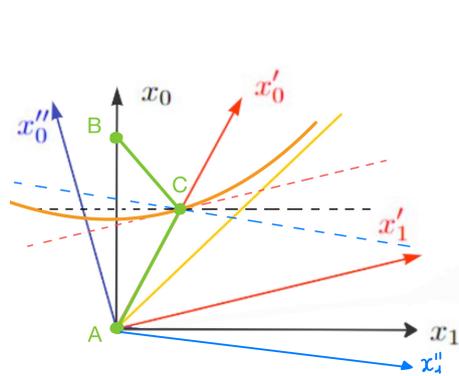


Figura 1.24

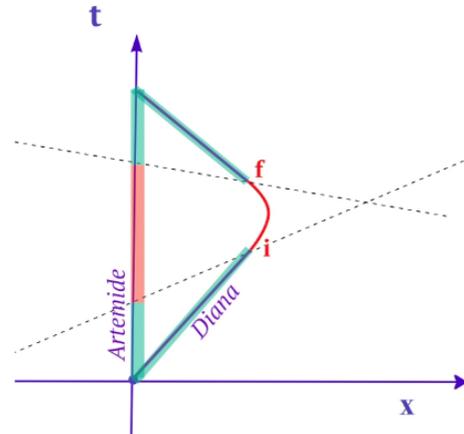


Figura 1.25

Figura 1.26: Nella figura 1.24 sono indicate con dei tratteggi colorati le varie linee di simultaneità, sia per il sistema di riferimento di Artemide (nero), sia per quello di Diana all'andata, in cui la velocità è > 0 (rosso) e anche quello di Diana nel viaggio di ritorno, con velocità < 0 (blu).

Noi parliamo in modo generico di vettori e tensori per riferirci ad oggetti che si comportano come tali rispetto una generica trasformazione (non singolare e differenziabile) delle coordinate. Quando trattiamo proprio le trasformazioni di Lorentz, allora parliamo di quadrivettori e quadritensori.

Abbiamo visto come il secondo principio della relatività speciale, quello della costanza della velocità della luce, porta alle trasformazioni di Lorentz e alla possibilità di definire lo spaziotempo come una varietà metrica. Vogliamo però adesso implementare nella scrittura delle nostre equazioni anche il primo principio, cioè il principio di relatività, che ci dice che tutte le leggi della natura sono invarianti sotto l'effetto di un gruppo di trasformazioni spazio-temporali, ovvero le trasformazioni di Lorentz.

1.3.1 Definizioni, quadrivettori e derivate

Diamo una definizione un pochino più formale. Riprendiamo la notazione compatta che abbiamo già introdotto:

$$x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) \tag{1.3.1}$$

di sistema di coordinate sulla varietà spaziotempo e che rappresenta fisicamente un osservatore. Se due sistemi di coordinate sono legati dalle trasformazioni di Lorentz, allora questi osservatori diciamo che sono **inerziali**. La trasformazione da un sistema ad un altro la possiamo scrivere in modo generale come:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + d^\alpha \tag{1.3.2}$$

in cui possiamo vedere Λ come una matrice 4x4, i cui elementi contengono le trasformazioni di Lorentz (i cui coefficienti abbiamo visto dover essere costanti), mentre d^α lo possiamo vedere come un quadrivettore (costante), che ci rappresenta una traslazione.

Ricordiamo la definizione del **tensore metrico** che abbiamo:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} -1 & \alpha = \beta = 0 \\ +1 & \alpha = \beta = 1, 2, 3 \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}, \quad \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (1.3.3)$$

Con il tensore metrico η abbiamo anche già visto che possiamo definire la distanza:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.3.4)$$

e il tempo proprio:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.3.5)$$

che sono per definizione due invarianti.

Si può anche far vedere (vedi p.48-50 delle note del prof. Fornengo), che le trasformazioni di Lorentz, con questi coefficienti costanti (Λ^α_β ed equivalentemente i termini d^α), sono le uniche trasformazioni di coordinate dai set x al set x' non singolari che lasciano invariato il $d\tau^2$.

Definiamo degli oggetti, che generalizzano quelli che negli spazi euclidei chiamavamo vettori, chiamiamo **tensori** , attraverso le loro proprietà di trasformazione quando cambiamo il sistema di coordinate. Definiamo **quadrivettore controvariante** , un oggetto a cui associo un indice in alto che trasforma come il differenziale delle coordinate (1.3.72):

$$v^\alpha \xrightarrow{\text{T.L.}} v'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta v^\beta. \quad (1.3.6)$$

Definiamo **quadrivettore covariante** un oggetto a cui associamo un indice basso e che trasforma come:

$$u_\alpha \xrightarrow{\text{T.L.}} u'^\alpha = \Lambda_\alpha^\beta u_\beta \quad (1.3.7)$$

in cui indichiamo:

$$\Lambda_\alpha^\beta = \eta_{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} \Lambda^\gamma_\delta \quad (1.3.8)$$

Teniamo a mente che in T^α_β intendiamo α l'indice delle righe e β delle colonne; quando li scambiamo, in oggetti T_β^α intendiamo solo dire che scambiamo righe e colonne.

Però, utilizzando la relazione (1.3.51) che è facile da anticipare, è dimostrabile che $\Lambda^\alpha{}_\beta$ è l'inversa di $\Lambda_\alpha{}^\beta$. Infatti, si ha:

$$\Lambda_\alpha{}^\gamma \Lambda^\alpha{}_\beta = \eta_{\alpha\delta} \eta^{\gamma\mu} \Lambda^\delta{}_\mu \Lambda^\alpha{}_\beta \quad (1.3.9)$$

$$= \eta_{\mu\beta} \eta^{\gamma\mu} \quad (1.3.10)$$

$$= \delta^\gamma{}_\beta. \quad (1.3.11)$$

Essendo la matrice inversa ci aspettiamo che agisca come una trasformazione inversa. Infatti, prendendo la legge di trasformazione delle coordinate:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta \quad (1.3.12)$$

moltiplicandola per la matrice di trasformazione inversa:

$$\Lambda_\alpha{}^\gamma x'^\alpha = \Lambda_\alpha{}^\gamma \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta \quad (1.3.13)$$

$$= \delta^\gamma{}_\beta x^\beta \quad (1.3.14)$$

$$= x^\gamma \quad (1.3.15)$$

quindi, la matrice che ha indice basso-alto realizza la trasformazione di Lorentz inversa:

$$x^\gamma = \Lambda_\alpha{}^\gamma x'^\alpha. \quad (1.3.16)$$

Possiamo quindi dire che i quadrivettori controvarianti trasformano con la matrice delle trasformazioni di Lorentz e i quadrivettori trasformano con la matrice di trasformazione inversa.

Dalle definizioni dei quadrivettori possiamo verificare che le **contrazioni**⁹ sono invarianti. Ad esempio, prendiamo:

$$u'_\alpha u'^\alpha = \Lambda_\alpha{}^\gamma \Lambda^\alpha{}_\beta u_\gamma u^\beta \quad (1.3.17)$$

$$= \delta^\gamma{}_\beta u_\gamma u^\beta \quad (1.3.18)$$

$$= u_\beta u^\beta \quad (1.3.19)$$

dunque, la contrazione di un quadrivettore covariante con uno controvariante è la stessa in qualsiasi sistema di riferimento e definiamo quello che chiameremo **scalare**. Uno *scalare* è un tensore senza indici e invariante, cioè un oggetto che non cambia sotto trasformazione di coordinate.

Ad ogni vettore controvariante corrisponde sempre un quadrivettore covariante che possiamo costruire utilizzando il tensore metrico nel modo:

$$u_\alpha = \eta_{\alpha\beta} u^\beta \quad (1.3.20)$$

⁹Chiamiamo contrazione quando mettiamo un indice in alto e uno in basso e sommiamo sulle componenti.

quest'operazione prende anche il nome di **abbassamento dell'indice**. Notiamo che non è successo niente di particolare, abbiamo solo riscritto le componenti. Infatti, se partiamo da:

$$v^\beta = (v^0, v^1, v^2, v^3) \quad (1.3.21)$$

la componente v_0 sarà:

$$v_0 = \eta_{0\beta} v^\beta \quad (1.3.22)$$

$$= \eta_{00} v^0 + \eta_{0i} v^i \quad (1.3.23)$$

$$= -v^0 \quad (1.3.24)$$

dunque, nello spazio-tempo di Minkowski, con la metrica che abbiamo definito, la componente temporale di un quadrivettore, quando abbassiamo l'indice, cambia di segno. Notiamo che per quelle spaziali questo non succede:

$$v^i = v_i. \quad (1.3.25)$$

Allo stesso modo possiamo definire l'**innalzamento degli indici** come:

$$u^\alpha = \eta^{\alpha\beta} u_\beta. \quad (1.3.26)$$

Notiamo che una doppia operazione di innalzamento e abbassamento non produce effetti (come ci si aspetterebbe):

$$v^\alpha = \eta^{\alpha\beta} v_\beta \quad (1.3.27)$$

$$= \eta^{\alpha\beta} \eta_{\beta\gamma} v^\gamma \quad (1.3.28)$$

$$= \delta^\alpha_\gamma v^\gamma \quad (1.3.29)$$

$$= v^\alpha. \quad (1.3.30)$$

Possiamo anche definire delle operazioni come il **prodotto scalare** tra due vettori:

$$\eta_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta = v^\alpha w_\alpha = v_\beta w^\beta \quad (1.3.31)$$

che è una quantità invariante.¹⁰ Con il prodotto scalare possiamo definire anche l'**ortogonalità** e la nozione di **norma**. L'ortogonalità tra due quadrivettori la definiamo come:

$$\eta_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta = 0 \quad (1.3.33)$$

¹⁰È verificabile che ciò che abbiamo definito fa esattamente quello a cui siamo abituati nel piano euclideo. Se scendiamo di una dimensione e prendiamo $x^i = (x, y, z)$ e la metrica $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, allora:

$$\eta_{ij} v^i w^j = v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3 = \vec{v} \cdot \vec{w} \quad (1.3.32)$$

che sappiamo essere invariante.

e visto che il prodotto scalare tra due quadrivettori è uno scalare, sappiamo che se in un sistema di riferimento v e w sono ortogonali, allora lo saranno in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

La norma di un quadrivettore la definiamo attraverso il prodotto scalare di un quadrivettore con se stesso:

$$\eta_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = \begin{cases} > 0 & \text{spacelike} \\ = 0 & \text{lightlike} \\ < 0 & \text{timelike.} \end{cases} \quad (1.3.34)$$

Un esempio di prodotto scalare, che conosciamo già bene, è il tempo proprio $d\tau^2$, che possiamo vedere, a meno di un segno, come la norma del differenziale delle coordinate.

Ovviamente, anche in Relatività Speciale si lavora con le derivate, quindi definiamo l'**operatore gradiente** come:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (1.3.35)$$

che trasforma come:

$$\partial'_\alpha = \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \partial_\beta \quad (1.3.36)$$

dobbiamo quindi capire che cos'è $\partial x^\beta / \partial x'^\alpha$. Se differenziamo (1.3.16) vediamo che:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \Lambda^\alpha{}_\beta \quad \implies \quad \partial'_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta \partial_\beta \quad (1.3.37)$$

che ci rendiamo presto conto essere la legge di trasformazione di un'oggetto covariante (1.3.7). È chiaro che se vogliamo farlo diventare un operatore controvariante, lo possiamo fare semplicemente realizzando la combinazione lineare (innalzamento degli indici) che utilizza il tensore metrico:

$$\partial_\alpha \xrightarrow{\text{T.L.}} \partial^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta. \quad (1.3.38)$$

Se prendiamo la definizione:

$$\partial_\alpha = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z) \quad (1.3.39)$$

e ci alziamo gli indici, allora:

$$\partial^\alpha = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = (-\partial^t, \partial^x, \partial^y, \partial^z) \quad (1.3.40)$$

come facilmente verificabile. Possiamo anche definire l'operatore D'Alembertiano come:

$$\square = \partial_\alpha \partial^\alpha \quad (1.3.41)$$

$$= \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \quad (1.3.42)$$

$$= \eta^{00} \partial_0 \partial_0 + \eta^{ij} \partial_i \partial_j \quad (1.3.43)$$

$$= -\partial_t^2 + \nabla^2 \quad (1.3.44)$$

ed essendo costruito tramite una contrazione, è un oggetto invariante, per cui un altro osservatore O' avrà la stessa espressione per l'operatore, ma solamente con gli apici $'$.

1.3.2 Proprietà metrica

Possiamo notare che il tensore metrico è simmetrico nello scambio degli indici:

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}. \quad (1.3.45)$$

La proprietà importante però viene dal prendere la generica trasformazione (1.3.2) e differenziarla:

$$dx'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} dx^{\beta} \quad (1.3.46)$$

il tempo proprio nel secondo sistema di coordinate sarà:

$$d\tau'^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \quad (1.3.47)$$

$$= -\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\delta} dx^{\gamma} dx^{\delta} \quad (1.3.48)$$

però ricordando che il tempo proprio è invariante possiamo scrivere per confronto che deve valere:¹¹

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\delta} = \eta_{\gamma\delta} \quad (1.3.49)$$

che è una proprietà fondamentale della metrica e che ci ricapiterà di utilizzare.

Un'altra cosa che possiamo vedere e come sono legati i tensori metrici con indici alti e bassi. Valgono:

$$\begin{cases} \eta_{00} = -1 \\ \eta_{0i} = 0 \\ \eta_{ij} = \delta_{ij} \end{cases}, \quad \begin{cases} \eta^{00} = -1 \\ \eta^{0i} = 0 \\ \eta^{ij} = \delta_{ij} \end{cases} \quad (1.3.50)$$

e possiamo dimostrare (anche esplicitamente con le forme matriciali) che:

$$\eta^{\beta\delta} \eta_{\alpha\delta} = \delta^{\beta}_{\alpha}. \quad (1.3.51)$$

La relazione (1.3.51) è una proprietà che segue dall'aver definito la η con l'indice in alto con gli stessi valori numerici della η con l'indice in basso.

¹¹Nota che possiamo riordinare i vari oggetti perché una volta che contraiamo tutti gli indici essi rappresentano una somma e quindi possiamo girarla come ci pare.

1.3.3 Trasformazioni di Lorentz

Possiamo vedere quale sia il significato, e la forma, delle matrici $\Lambda^\alpha{}_\beta$. Vedremo che la scrittura (1.3.2) ingloba in sé le rappresentazioni delle traslazioni spazio-temporali, delle rotazioni nello spazio e infine delle trasformazioni di boost, cioè le trasformazioni di velocità.

Per prima cosa possiamo notare che le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo (come abbiamo imparato ad IQFT), in particolare se in (1.3.2) abbiamo $d^\alpha \neq 0$, allora parliamo di gruppo di Lorentz inomogeneo e abbiamo il *gruppo di Poincaré*; nel caso in cui $d^\alpha = 0$, allora abbiamo il *gruppo di Lorentz omogeneo*.

Dalla proprietà (1.3.49) possiamo notare che, ponendo $\gamma = \delta = 0$, abbiamo:

$$\eta_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_0\Lambda^\beta{}_0 = \eta_{00} \quad (1.3.52)$$

$$\eta_{00}\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_0 + \eta_{ij}\Lambda^i{}_0\Lambda^j{}_0 = \eta_{00} \quad (1.3.53)$$

$$-(\Lambda^0{}_0)^2 + \delta_{ij}\Lambda^i{}_0\Lambda^j{}_0 = -1 \quad (1.3.54)$$

e dunque che:

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1. \quad (1.3.55)$$

Un'altra proprietà che possiamo osservare è che prendendo (1.3.49) in forma matriciale:

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \quad (1.3.56)$$

e calcolandone il determinante, allora:

$$\det\{\eta\} = \det\{\Lambda^T \eta \Lambda\} \quad (1.3.57)$$

$$= \det\{\Lambda^T\} \det\{\eta\} \det\{\Lambda\} \quad (1.3.58)$$

$$= (\det\{\Lambda\})^2 \det\{\eta\} \quad (1.3.59)$$

dunque:

$$(\det\{\Lambda\})^2 = 1. \quad (1.3.60)$$

In base ai valori di (1.3.55) e (1.3.60) possiamo distinguere:

- Se $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ e $\det\{\Lambda\} = 1$ parliamo di *trasformazioni proprie*.
- Se $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ o $\Lambda^0{}_0 \leq -1$, ma $\det\{\Lambda\} = -1$ parliamo di *trasformazioni improprie*.

Vediamo però alcuni casi specifici.

Traslazioni spaziali e temporali Prendiamo gli elementi:

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta = \mathbb{1} \quad , \quad d^\alpha \neq 0 \quad (1.3.61)$$

e l'equazione (1.3.2) diventa semplicemente:

$$x'^\alpha = x^\alpha + d^\alpha \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} t' = t + p \\ x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c. \end{cases} \quad (1.3.62)$$

Rotazioni spaziali Prendiamo la matrice:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (1.3.63)$$

e poniamo $d^\alpha = 0$. La matrice Λ la possiamo anche scrivere con i suoi elementi:

$$\Lambda^0{}_0 = 1 \quad , \quad \Lambda^i{}_0 = \Lambda^0{}_i = 0 \quad , \quad \Lambda^i{}_j = R^i{}_j \quad (1.3.64)$$

in cui assumiamo che R sia una matrice ortogonale, quindi per cui:

$$RR^T = R^T R = \mathbb{1} \quad (1.3.65)$$

$$\det\{R\} = 1. \quad (1.3.66)$$

Scrivere una matrice tipo (1.3.63) equivale a disaccoppiare la trasformazione temporale da quella spaziale, infatti abbiamo che (1.3.2) è:

$$\begin{cases} t' = t \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.3.67)$$

in cui R rappresenta proprio una matrice 3x3 delle rotazioni spaziali con parametri i 3 angoli di eulero.

Trasformazioni di boost Prendiamo una matrice che trasformi solo il tempo e una delle 3 coordinate spaziali:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3.68)$$

infatti, con questa matrice trasformiamo t' e x' in una combinazione lineare di t e x , che sono tipiche trasformazioni che ci capitano in Relatività Speciale, che trasformano spazio e tempo. Ovviamente è dimostrabile (vedi p. 53-56 delle note del prof. Fornengo) che quando abbiamo osservatori in moto relativo, con velocità \vec{v} , una trasformazione Λ si può scrivere come:

$$\begin{cases} \Lambda^0_0 = \gamma \\ \Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = \gamma v^i \\ \Lambda^i_j = \delta^i_j + v^i v^j \frac{\gamma-1}{u^2} \end{cases} \implies \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3.69)$$

e si chiamano *trasformazioni di boost*. Notiamo che il parametro β rappresenta la velocità relativa tra due sistemi di riferimento, definita come:

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dx^0}. \quad (1.3.70)$$

1.3.4 Dinamica

Abbiamo visto che due sistemi di coordinate x e x' , rappresentanti due osservatori inerziali, possono essere collegati tramite le trasformazioni di Lorentz. Però, per quanto nel sappiamo ora ognuno dei due osservatori scrive le proprie leggi di natura (meccanica, dinamica, elettromagnetismo, etc.) e il che non è molto bello, poiché noi vorremmo rendere valido il primo principio della Relatività Speciale, ossia il principio che ci dice che tutte le leggi di natura (all'epoca di Einstein c'erano solo Meccanica ed EM) siano invarianti (scritti in forma covariante) sotto l'effetto di un gruppo di trasformazioni spazio-temporali, ovvero le trasformazioni di Lorentz. Dobbiamo inventarci un formalismo che ci permetta di scrivere le equazioni del moto, per qualsiasi osservatore (inerziale), sempre allo stesso modo, ossia in forma covariante. Questo nuovo formalismo sarà il **calcolo tensoriale**.

Vediamo che, ad esempio l'equazione di Newton, non è scritta in forma covariante:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \quad (1.3.71)$$

noi, sapendo già che l'accelerazione non è invariante per trasformazioni di Lorentz (lo è per trasformazioni di Galileo), possiamo dire che l'equazione (1.3.71) non è invariante, e quindi uguale in forma per tutti gli osservatori.

Facciamo un po' di dinamica. Prendiamo la trasformazione (1.3.2) e differenziamola:

$$dx'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta dx^\beta \implies \begin{cases} dt' = dx'^0 = \Lambda^0_\beta dx^\beta \\ d\vec{x}' = dx'^i = \Lambda^i_\beta dx^\beta \end{cases} \quad (1.3.72)$$

sfruttiamo il fatto che il tempo proprio $d\tau^2$ è invariante e definiamo una grandezza fisica, che contenga l'informazione della velocità, ma scritta in un modo da avere una particolare proprietà (che vediamo tra pochissimo). Definiamo la **quadrivelocità**, che esprime la variazione delle quattro coordinate rispetto al tempo proprio:

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (1.3.73)$$

La proprietà di (1.3.73) è che se ne scriviamo l'espressione nel sistema di riferimento O' essa si trasforma come:

$$U'^\alpha = \frac{dx'^\alpha}{d\tau'} = \frac{dx'^\alpha}{d\tau} = \Lambda^\alpha{}_\beta \frac{dx^\beta}{d\tau} = \Lambda^\alpha{}_\beta U^\beta \quad (1.3.74)$$

ovvero, la quadrivelocità si trasforma come il differenziale delle coordinate (1.3.72).

Potremmo definire anche il **quadri-impulso**:

$$P^\alpha = mU^\alpha = m \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (1.3.75)$$

e segue che:

$$P'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta P^\beta. \quad (1.3.76)$$

Visto che ci siamo definiamo anche la **quadriforza**:

$$F^\alpha = \frac{dP^\alpha}{d\tau} = m \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} \quad (1.3.77)$$

che anch'essa si trasforma come:

$$F'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta F^\beta. \quad (1.3.78)$$

La cosa interessante delle quantità che abbiamo definito è che oggetti di questo tipo permettono di scrivere equazioni covarianti. Infatti, con questi oggetti le equazioni del moto e le leggi fisiche espresse in un sistema di coordinate rimangono uguali in forma se cambia il sistema di coordinate. Per esempio, se prendiamo il sistema di coordinate O , per cui una certa legge fisica si scrive come:

$$F^\alpha = G^\alpha \quad (1.3.79)$$

Se sia F che G sono scritte come oggetti che trasformano come differenziale delle coordinate, allora questa equazione la sappiamo scrivere facilmente nel sistema O' :

$$F'^\alpha = G'^\alpha \implies \Lambda^\alpha{}_\beta F^\beta = \Lambda^\alpha{}_\beta G^\beta \quad (1.3.80)$$

e visto che sappiamo che in O vale $F^\beta = G^\beta$, allora anche O' scriverà:

$$F'^\alpha = G'^\alpha \quad (1.3.81)$$

abbiamo un'equazione invariante in forma.

Prima di formalizzare la teoria nel nuovo formalismo del calcolo tensoriale, facciamo ancora un'osservazione. Noi siamo partiti dal ridefinire le grandezze fisiche in un modo che trasformino con le trasformazioni di Lorentz. Ad esempio, abbiamo preso la trivelocità, definita come variazione dello spazio nel tempo (3 componenti) e l'abbiamo ridefinita come quadri-velocità U^α , espressa come variazione delle coordinate (4 componenti) rispetto al tempo proprio (che sappiamo coincidere col tempo coordinato solo se siamo nel sistema di riposo dell'osservatore). Però, sembra che U^α sia una quantità più grande (con più informazioni) di \vec{v} perché ora abbiamo quattro componenti:

$$U^\alpha = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) \quad (1.3.82)$$

e quindi sembra che costruendo la nuova teoria stiamo aggiungendo pezzi in più rispetto quelli che avevamo in Meccanica Classica, il tutto per avere una teoria covariante. In realtà non è vero, infatti la quadri-velocità, il quadri-impulso e la quadri-forza contengono dentro di sé le stesse informazioni dei vettori tridimensionali classici.

Possiamo verificarlo facilmente, ad esempio con la quadri-velocità:

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) = (\gamma, \gamma \vec{v}) \quad (1.3.83)$$

ricordando (1.3.5) possiamo vedere:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.3.84)$$

$$= -\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} dt^2 \quad (1.3.85)$$

$$= \left[-\eta_{00} \left(\frac{dt}{dt} \right)^2 - \eta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right] dt^2 \quad (1.3.86)$$

$$= [+1 - \delta_{ij} v^i v^j] dt^2 \quad (1.3.87)$$

$$= (1 - v^2) dt^2 \quad (1.3.88)$$

$$= \gamma^{-2} dt^2 \quad (1.3.89)$$

e dunque:

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma. \quad (1.3.90)$$

In modo analogo vediamo che $\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \gamma \vec{v}$ e possiamo scrivere una forma più compatta per la quadrivelocità:

$$U^\alpha = (\gamma, \gamma \vec{v}). \quad (1.3.91)$$

Da (1.3.90) ci rendiamo conto che in realtà le componenti indipendenti di U^α sono solamente 3 (poiché γ la fissiamo dalla velocità relativa tra i sistemi di riferimento). In particolare, se ci mettiamo nel sistema di riferimento di riposo \tilde{O} , allora abbiamo $\vec{v} = \vec{0}$, $\gamma = 1$ e la quadrivelocità $U^\alpha = (1, \vec{0})$ che di fatto non ha informazioni al di fuori del fatto che la velocità sia nulla.

Possiamo notare che anche il quadri-impulso non ha più informazione di quanto abbia l'impulso ordinario:

$$P^\alpha = m U^\alpha = m (\gamma, \gamma \vec{v}) = (\gamma m, \gamma m \vec{v}) = (E, \vec{p}) \quad (1.3.92)$$

in cui abbiamo:

$$E = \gamma m \quad (1.3.93)$$

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (1.3.94)$$

il che è lecito poiché nel limite non relativistico, in cui $\gamma \rightarrow 1$, ritroviamo le definizioni classiche di energia ed impulso.

Un'altra relazione cruciale della quadrivelocità, e del quadri-impulso, che dobbiamo vedere la possiamo trovare con la *contrazione*:

$$U_\alpha U^\alpha = \eta_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta \quad (1.3.95)$$

$$= -(U^0)^2 + \sum_i (U^i)^2 \quad (1.3.96)$$

$$= -\gamma^2 + \gamma^2 \sum_i v^{i2} \quad (1.3.97)$$

$$= -\gamma^2 + \gamma^2 v^2 \quad (1.3.98)$$

$$= -\gamma^2(1 - v^2) \quad (1.3.99)$$

$$= -1. \quad (1.3.100)$$

Possiamo trovare la corrispondente relazione per il quadri-impulso:

$$\eta_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta = m^2 \eta_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = -m^2 \quad (1.3.101)$$

che viene anche chiamata **condizione di mass-shell**. Possiamo esplicitare la somma di (1.3.101):

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (1.3.102)$$

che è la relazione relativistica tra energia ed impulso. La relazione (1.3.102) non solo ci mostra che la quantità $P_\alpha P^\alpha$ è un'invariante, ma anche che pure per il quadri-impulso le componenti indipendenti sono solo 3 (visto che E e p sono legati).

Facciamo ancora un'ultima osservazione. L'invarianza di un'equazione fisica scritta in termini dei "quadri-oggetti" che abbiamo definito possiamo vederla nella legge di conservazione dell'energia e dell'impulso. Abbiamo un processo d'urto (raffigurato in figura 1.27) e scriviamo le leggi di

conservazione:

$$\begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \\ E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \end{cases} \quad (1.3.103)$$

ma sappiamo bene che nessuna delle grandezze che abbiamo scritto è invariante in forma per trasformazioni di Lorentz.



Figura 1.27: Processo d'urto.

Possiamo riscriverle in un'altra forma, ovvero come l'equazione di **conservazione del quadrimpulso**:

$$P_1^\alpha + P_2^\alpha = P_3^\alpha + P_4^\alpha \quad (1.3.104)$$

che possiamo anche riscrivere:

$$P^\alpha = P_1^\alpha + P_2^\alpha - P_3^\alpha - P_4^\alpha \quad (1.3.105)$$

allora:

$$P^\alpha = 0 \quad (1.3.106)$$

e un altro osservatore scriverebbe:

$$P'^\alpha = 0 \quad (1.3.107)$$

perché P trasforma come (1.3.76). Questo è fondamentale per tutti i processi d'urto relativistici.

Vediamo anche che tipo di informazioni contiene la quadriforza:

$$F^\alpha = m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{dP^\alpha}{d\tau} = \left(\frac{dP^0}{d\tau}, \frac{d\vec{P}}{d\tau} \right) \quad (1.3.108)$$

immaginiamo di porci, in un dato istante, nel sistema di riposo dell'oggetto che viene soggetto a forza. Tale oggetto non è inerziale perché cambia la sua velocità da un istante all'altro, però metterci istantaneamente in un sistema inerziale che ha la stessa velocità che ha il corpo accelerato in quell'esatto momento e vedere che la quadriforza ha forma:

$$F^\alpha = \left(0, \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right) = \left(0, \vec{F} \right) \quad (1.3.109)$$

ovviamente, quest'operazione la possiamo ripetere punto per punto (e ad ogni istante), dunque, la quadri-forza contiene dentro di sé la forza newtoniana che agisce sul corpo accelerato in quell'istante.

1.3.5 Tensori

Nella sezione §1.3.1 abbiamo definito cos'è un vettore e ora possiamo generalizzare il concetto. Definiamo che cos'è un **tensore** . Un *tensore* di rango kl è un oggetto matematico dotato di k indici controvarianti e l indici covarianti, e di conseguenza per ognuno dei quali presenta le proprietà di trasformazione covarianti e controvarianti. Ad esempio, un oggetto del tipo:

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} \quad (1.3.110)$$

Un po' più pratico è prendere un tensore di rango $(1, 2)$, quindi con 3 indici e che contiene in linea di principio $4 \times 4 \times 4$ elementi, che è un tensore se e solo se espresso in un altro sistema di coordinate si ottiene dalle sue componenti nel sistema originale attraverso una trasformazione:

$$T^{\gamma}_{\alpha\beta} \implies T'^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Lambda^{\gamma}_{\delta} \Lambda_{\alpha}^{\epsilon} \Lambda_{\beta}^{\eta} T^{\delta}_{\epsilon\eta}. \quad (1.3.111)$$

I tensori soddisfano determinate proprietà:

- *Combinazione lineare* : una combinazione lineare di tensori di un certo rango è ancora un tensore dello stesso rango:

$$T^{\alpha}_{\beta} = aR^{\alpha}_{\beta} + bS^{\alpha}_{\beta}. \quad (1.3.112)$$

Però attenzione che dobbiamo utilizzare tensori dello stesso rango.

Dimostrazione:

$$T'^{\alpha}_{\beta} = aR'^{\alpha}_{\beta} + bS'^{\alpha}_{\beta} \quad (1.3.113)$$

$$= a\Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\beta}^{\delta} R^{\gamma}_{\delta} + b\Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\beta}^{\delta} S^{\gamma}_{\delta} \quad (1.3.114)$$

$$= \Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\beta}^{\delta} (aR^{\alpha}_{\beta} + bS^{\alpha}_{\beta}) \quad (1.3.115)$$

$$= \Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\beta}^{\delta} T^{\alpha}_{\beta}. \quad (1.3.116)$$

- *Prodotto diretto* : possiamo fare il prodotto diretto tra tensori di rango diverso. Se facciamo il prodotto tra due tensori di rango (k, l) e (k', l') allora otteniamo un tensore di rango $(k + k', l + l')$. Ad esempio:

$$T^{\alpha}_{\beta}{}^{\gamma} = A^{\alpha}_{\beta} \otimes B^{\gamma} \quad (1.3.117)$$

$$(2, 1) = (1, 1) \otimes (1, 0). \quad (1.3.118)$$

Dimostrazione:

$$T'^{\alpha}_{\beta}{}^{\gamma} = A'^{\alpha}_{\beta} \otimes B'^{\gamma} \quad (1.3.119)$$

$$= \Lambda^{\alpha}_{\delta} \Lambda_{\beta}^{\epsilon} A^{\delta}_{\epsilon} \Lambda^{\gamma}_{\eta} B^{\eta} \quad (1.3.120)$$

$$= \Lambda^{\alpha}_{\delta} \Lambda_{\beta}^{\epsilon} \Lambda^{\gamma}_{\eta} (A^{\delta}_{\epsilon} B^{\eta}) \quad (1.3.121)$$

$$= \Lambda^{\alpha}_{\delta} \Lambda_{\beta}^{\epsilon} \Lambda^{\gamma}_{\eta} T^{\alpha}_{\beta}{}^{\gamma}. \quad (1.3.122)$$

- *Contrazione degli indici*: se contraiamo gli indici di un tensore di rango (k, l) otteniamo un tensore $(k - 1, l - 1)$. Ad esempio:

$$T^\alpha{}_\beta{}^{\gamma\delta} \longrightarrow T^\alpha{}_\beta{}^{\gamma\beta} = T^{\alpha\gamma} \quad (1.3.123)$$

$$(3, 1) \longrightarrow (2, 0). \quad (1.3.124)$$

- *Alzare o abbassare gli indici*: se alziamo (o abbassiamo) gli indici di un tensore di rango (k, l) , allora otteniamo un tensore di rango $(k + 1, l - 1)$ (o $(k - 1, l + 1)$):

$$\text{Innalzamento } (k, l) \longrightarrow (k + 1, l - 1) \quad (1.3.125)$$

$$\text{Abbassamento } (k, l) \longrightarrow (k - 1, l + 1). \quad (1.3.126)$$

Nota che dobbiamo usare un tensore metrico η per ogni indice che vogliamo modificare, ad esempio:

$$T_\alpha{}^\delta{}_\gamma = \eta^{\delta\beta} T_{\alpha\beta\gamma} \quad (1.3.127)$$

$$T_\alpha{}^\delta{}_\gamma = \eta^{\delta\beta} \eta_{\gamma\rho} T_{\alpha\beta}{}^\rho. \quad (1.3.128)$$

- *Differenziazione o derivata*: se deriviamo un tensore (k, l) otteniamo un tensore $(k, l + 1)$. Ad esempio:

$$T^{\beta\gamma} \longrightarrow \partial_\alpha T^{\beta\gamma} = T_\alpha{}^{\beta\gamma} \quad (1.3.129)$$

$$(2, 0) \longrightarrow (2, 1). \quad (1.3.130)$$

Facciamo attenzione che ciò è vero solo se siamo nello spazio-tempo di Minkowski e le trasformazioni sono quelle di Lorentz, non sarà più così per i tensori che definiremo in relatività generale. **Dimostrazione**:

$$T'^{\beta\gamma} = \partial'_\alpha T'^{\beta\gamma} \quad (1.3.131)$$

$$= \Lambda_\alpha{}^\delta \partial_\delta \left(\Lambda^\beta{}_\epsilon \Lambda^\gamma{}_\xi T^{\epsilon\xi} \right) \quad (1.3.132)$$

$$T'^{\beta\gamma} = \Lambda_\alpha{}^\delta \Lambda^\beta{}_\epsilon \Lambda^\gamma{}_\xi \left(\partial_\delta T^{\epsilon\xi} \right) \quad (1.3.133)$$

l'ultima riga è proprio la relazione di trasformazione di un tensore due volte controvariante e una volta covariante.

- *La posizione degli indici conta*: ad esempio vale:

$$T_\alpha{}^{\beta\gamma} \neq T^\alpha{}_\beta{}^\gamma. \quad (1.3.134)$$

Ci sono un paio di tensori speciali che vale la pena di menzionare:

- *Tensore metrico*, che conosciamo già bene e per cui ci è nota la relazione:

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\gamma}^{\delta} \Lambda_{\delta}^{\epsilon} \eta_{\delta\epsilon} \quad (1.3.135)$$

che discende direttamente dalle trasformazioni di Lorentz e dall'invarianza del tempo proprio. L'analogo controvariante è $\eta^{\alpha\beta}$, che è tale per cui:

$$\eta_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \quad (1.3.136)$$

e possiamo dire che il tensore metrico controvariante è l'inverso di quello covariante, poiché se prendiamo delle matrici N e \bar{N} e gli mettiamo gli elementi di matrice:

$$(N)_{\gamma\beta} = \eta_{\gamma\beta} \quad (1.3.137)$$

$$(\bar{N})_{\alpha\gamma} = \eta^{\alpha\gamma} \quad (1.3.138)$$

allora il loro prodotto (stiamo sommando su γ) ci da:

$$(N)_{\gamma\beta} (\bar{N})_{\alpha\gamma} = \mathbb{1}_{\alpha\beta} \quad (1.3.139)$$

per cui, sì, possiamo dire che $\eta^{\alpha\beta}$ è il **tensore metrico inverso**.

- *Tensore nullo*, è un tensore di rango (k, l) i cui elementi sono tutti nulli:

$$O^{\mu_1 \dots \mu_k} \nu_1 \dots \nu_l = 0 \quad (1.3.140)$$

e si trasforma come:

$$O_{\alpha\beta} \longrightarrow O'_{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda_{\beta}^{\delta} O_{\gamma\delta} = 0 \quad (1.3.141)$$

ovvero, il tensore nullo rimane il tensore nullo attraverso una trasformazione covariante due volte.

Vediamo, per concludere la sezione, un teorema importantissimo.

Teorema 1 (Teorema fondamentale dell'algebra tensoriale) *Se due tensori dello stesso rango sono uguali in un certo sistema di coordinate, essi rimangono tra di loro uguali in ogni altro sistema di coordinate legato alla trasformazione di Lorentz.*

Verifichiamolo brevemente. Mettiamoci nel sistema di coordinate O e prendiamo:

$$T^{\alpha}_{\beta} = S^{\alpha}_{\beta} \quad (1.3.142)$$

il teorema ci dice che se ci spostiamo in un altro sistema di riferimento O' , l'equazione (1.3.142) rimane della stessa forma. Infatti:

$$O' : T'^{\alpha}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda_{\beta}^{\delta} T^{\gamma}_{\delta} \quad (1.3.143)$$

$$= \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda_{\beta}^{\delta} S^{\gamma}_{\delta} \quad (1.3.144)$$

$$= S'^{\alpha}_{\beta} \quad (1.3.145)$$

come volevasi dimostrare. L'equazione (1.3.142) la possiamo chiamare **equazione tensoriale**. Le equazioni tra tensori assumono la stessa forma in tutti i sistemi di coordinate legati alla trasformazione di Lorentz. In particolare, l'affermazione che un tensore è uguale ad un tensore nullo è vera in tutti i sistemi di coordinate.

Il teorema fondamentale dell'algebra tensoriale ci permette di implementare in modo completo i due principi della Relatività Speciale allo stesso tempo, esprimendo le leggi della natura sotto forma di equazioni tensoriali. Quello che faremo sarà:

- Pendiamo osservatori inerziali, che sono alla base dei concetti della Relatività Speciale, e li vediamo come sistemi di coordinate su una varietà che chiamiamo spaziotempo.
- Il principio di costanza della velocità della luce ci dà delle proprietà:
 - fornisce delle specifiche trasformazioni tra sistemi di coordinate, ovvero le trasformazioni di Lorentz;
 - ci fornisce l'informazione che lo spazio-tempo è uno spazio-tempo metrico e ci definisce la metrica con la segnatura opportuna;
 - forniamo una struttura causale allo spazio-tempo, perché è attraverso essa che definiamo i coni luce e le separazioni di tipo tempo, spazio o luce.
- Il principio di relatività che dice che tutte le leggi della natura devono essere le stesse per tutti gli osservatori inerziali, e noi possiamo soddisfarlo utilizzando il teorema fondamentale dell'algebra tensoriale che ci dice che le equazioni tensoriali non cambiano forma per trasformazioni di Lorentz.

1.4 Elettromagnetismo

Vediamo alcune applicazioni del calcolo tensoriale per scrivere le equazioni di un sistema fisico, meccanico o elettromagnetico che sia, utilizzando il calcolo tensoriale. In particolare, studiamo il caso dell'elettromagnetismo e in particolare cerchiamo di scrivere nel formalismo tensoriale le equazioni di Maxwell che mettono in relazione i campi, responsabili dei fenomeni elettrici e magnetici, con le loro sorgenti che sono la densità di carica elettrica ϵ e la

corrente \vec{j} . In Elettromagnetismo classico abbiamo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon \quad (1.4.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.4.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.4.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \quad (1.4.4)$$

di cui ricordiamo alcune proprietà: notiamo che in totale sono $(1+1+3+3) = 8$ equazioni; date le sorgenti permettono di determinare i campi; il campo elettrico \vec{E} è un vettore, mentre il campo magnetico \vec{B} è uno pseudo-vettore; gli effetti dei campi sulle cariche sono dati dalla forza di Lorentz, che permette di trovare le equazioni del moto.

Vogliamo scrivere le grandezze che compaiono nelle equazioni di Maxwell all'interno di oggetti tensoriali, che ci permettano di ottenere una teoria covariante. Ci rendiamo subito conto che se vogliamo mettere \vec{E} e \vec{B} insieme, allora dovremo costruire un oggetto che ha $3 + 3$ elementi. In generale un tensore di rango $(1, 1)$, globalmente 2, ha:

$$T^{\alpha\beta} : 4 \times 4 = 16 \text{ componenti}$$

però, se noi lo simmetrizziamo o antisimmetrizziamo riusciamo a ridurle:

$$\text{simmetrico} : \quad T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \quad \text{comp. indep.} = \frac{1}{2}N(N+1) \underset{N=4}{=} 10$$

$$\text{anti-simmetrico} : \quad T^{\alpha\beta} = -T^{\beta\alpha} \quad \text{comp. indep.} = \frac{1}{2}N(N-1) \underset{N=4}{=} 6.$$

Dunque, se noi prendiamo un oggetto con due indici, che possiamo chiamare $F_{\alpha\beta}$, e imponiamo che sia antisimmetrico:

$$F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha} \quad (1.4.5)$$

allora, siamo sicuri che esso abbiamo 6 componenti indipendenti e possiamo sistemarci dentro il campo elettrico e magnetico. Sappiamo che un tensore antisimmetrico ha elementi sulla diagonale tutti nulli ed elementi off-diagonale uguali, a meno di un segno, a due a due:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ -F^{01} & 0 & F^{12} & F^{13} \\ -F^{02} & -F^{12} & 0 & F^{23} \\ -F^{03} & -F^{13} & -F^{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.6)$$

in particolare, possiamo posizionare prendere gli elementi:

$$F^{0i} = E^i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.4.7)$$

$$F^{ij} = \varepsilon^{ijk} B_k \quad (1.4.8)$$

in cui $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ è il tensore di Levi-Civita tridimensionale e per definizione completamente antisimmetrico. Si può brevemente verificare che la scelta degli elementi di $F^{\alpha\beta}$ che abbiamo fatto permette di rispettare l'antisimmetria, ma anche che cosa comporta un innalzamento o abbassamento degli indici:

$$\begin{aligned} F_{0i} &= \eta_{0\alpha} \eta_{i\beta} F^{\alpha\beta} = \eta_{00} \eta_{ii} F^{0i} = -F^{0i} \\ F_{ij} &= \eta_{i\alpha} \eta_{j\beta} F^{\alpha\beta} = \eta_{ii} \eta_{jj} F^{ij} = F^{ij}. \end{aligned}$$

Ora, se prendiamo le equazioni di Maxwell scritte in componenti, e la forma del tensore di rango 2 che abbiamo costruito:

$$\begin{cases} \partial_i E^i = \epsilon \\ \partial_i B^i = 0 \\ \epsilon^{ijk} \partial_j E_k + \partial_0 B^i = 0 \\ \epsilon^{ijk} \partial_j B_k - \partial_0 E^i = j^i \end{cases}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.9)$$

possiamo provare a scrivere in forma tensoriale le equazioni di Maxwell. Vediamo facilmente la prima equazione:

$$\partial_i E^i = \partial_i F^{0i} = \epsilon \quad (1.4.10)$$

ma in realtà anche la quarta è semplice da scrivere con $F^{\alpha\beta}$:

$$\partial_j F^{ij} - \partial_0 F^{0i} = j^i. \quad (1.4.11)$$

Se definiamo l'oggetto:

$$J^\alpha = (J^0, \vec{J}) = (\epsilon, \vec{j}) \quad (1.4.12)$$

allora le equazioni (1.4.10) e (1.4.11) le possiamo scrivere in un'unica equazione:

$$\boxed{\partial_\alpha F^{\beta\alpha} = J^\beta} \quad (1.4.13)$$

e rappresenta le equazioni di Maxwell¹² che legano le sorgenti ai campi, ovvero le equazioni non omogenee. Notiamo che nell'equazione (1.4.13) abbiamo a sinistra un tensore (0,1) contratto con uno (2,0) e che sappiamo, grazie a (1.3.124), fare un tensore (1,0), come confermato dal membro di destra.

Se definiamo:

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \quad (1.4.14)$$

¹²Si verifica in modo quasi immediato che con $\beta = 0$ torniamo a (1.4.10) e con $\beta = i$ a (1.4.11):

$$\begin{aligned} \beta = 0 & : \partial_\alpha F^{0\alpha} = \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = \partial_i F^{i0} = J^0 = \epsilon \\ \beta = i & : \partial_\alpha F^{i\alpha} = \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = \partial_j F^{ji} - \partial_0 F^{0i} = J^i. \end{aligned}$$

allora le equazioni di Maxwell omogenee risultano:¹³

$$\boxed{\partial_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0}. \quad (1.4.16)$$

Dalle proprietà di trasformazione del campo elettrico e del campo magnetico, si può dimostrare che $F^{\alpha\beta}$, se cambiamo sistema di riferimento e facciamo una trasformazione di Lorentz, allora le componenti di $F'^{\alpha\beta}$ si ottengono dalle componenti di $F^{\alpha\beta}$ attraverso la trasformazione tensoriale di un tensore di rango 2:

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta F^{\gamma\delta} \quad (1.4.17)$$

e si può far vedere che anche J^α trasforma correttamente:

$$J'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta J^\beta. \quad (1.4.18)$$

Dunque, nota la densità di carica, o la corrente, in un sistema di coordinate allora lo conosciamo in tutti. Il tensore $F^{\alpha\beta}$ si chiama **tensore elettromagnetico**.

Quelle che abbiamo ottenuto sono tutte equazioni tensoriali, quindi sappiamo dal teorema fondamentale del calcolo tensoriale che in un altro sistema di riferimento la forma delle equazioni rimane invariata. Facciamo attenzione che ciò non vuol dire che i valori delle componenti dei vettori e dei tensori siano uguali nei due sistemi di riferimento, ma soltanto che essi trasformano con trasformazione di Lorentz. Quando un'equazione presenta tale invarianza in forma si dice anche equazione in forma **covariante**.

La stessa teoria, come già abbiamo fatto in Elettromagnetismo classico, la possiamo riscrivere utilizzando al posto del campo elettrico e del campo magnetico i potenziali elettromagnetici ϕ , \vec{A} . Possiamo scrivere le definizioni dei campi in termini di potenziale vettore e scalare:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (1.4.19)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.4.20)$$

¹³Per esercizio si potrebbe scrivere anche utilizzando $F^{\alpha\beta}$ e uscirebbe:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.4.15)$$

che utilizzando il tensore elettromagnetico diventano:

$$\begin{aligned} E^i &= -\partial^i \phi - \partial_0 A^i \\ &= -\partial^i \phi + \partial^0 A^i \quad \Longrightarrow \quad F^{0i} = -\partial^i \phi + \partial^0 A^i \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

$$\begin{aligned} F^{lm} &= \varepsilon^{lmi} B_i \\ &= \varepsilon^{lmi} \varepsilon_{ijk} \partial^j A^k \\ &= \left(\delta^l_j \delta^m_k - \delta^l_k \delta^m_j \right) \partial^j A^k \\ &= \partial^l A^m - \partial^m A^l \quad \Longrightarrow \quad F^{lm} = \partial^l A^m - \partial^m A^l. \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

Definendo un **quadripotenziale**:

$$A^\alpha = (A^0, \vec{A}) = (\phi, \vec{A}) \quad (1.4.23)$$

possiamo riscrivere, in senso del tutto generale:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad (1.4.24)$$

ovvero $F^{\alpha\beta}$, che contiene i campi elettromagnetici, lo scriviamo in termini delle derivate del quadripotenziale. Notiamo che (1.4.24) porta due condizioni in più su $F^{\alpha\beta}$, che quindi è scrivibile con 4 condizioni e non 6. Infatti, se prendiamo (1.4.24) e la mettiamo in (1.4.15) otteniamo (ricordando che le derivate commutano):

$$\partial_\alpha (\partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta) + \partial_\beta (\partial_\gamma A_\alpha - \partial_\alpha A_\gamma) + \partial_\gamma (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 0 \quad (1.4.25)$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = 0 \quad (1.4.26)$$

dunque, le equazioni omogenee non danno una vera informazione, ma rappresentano di fatto una condizione che devono soddisfare il campo \vec{E} e il campo \vec{B} . Le vere equazioni dinamiche sono quelle non omogenee (1.4.13) che mettono in relazione le sorgenti del campo elettromagnetico al campo elettromagnetico.

1.4.1 Invarianza di gauge

Vediamo brevemente che cosa intendiamo con teoria di gauge e come si vede in Elettromagnetismo.

Riprendiamo l'equazione:

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = J^\alpha \quad (1.4.27)$$

e anziché contrarre il secondo indice, contraiamo il primo:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\partial_\alpha F^{\beta\alpha} = -J^\beta \quad (1.4.28)$$

usando (1.4.24) abbiamo:

$$-J^\beta = \partial_\alpha \left(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \right) \quad (1.4.29)$$

$$= \partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta (\partial_\alpha A^\alpha) \quad (1.4.30)$$

$$= \square A^\beta - \partial^\beta (\partial_\alpha A^\alpha) \quad (1.4.31)$$

che possono essere viste come le quattro equazioni dinamiche del campo EM, scritte in forma tensoriale. Però, come sappiamo, A^α ha un grado di libertà e abbiamo un'invarianza poiché la soluzione che troviamo per il potenziale vettore non è univoca; l'invarianza che si manifesta è detta **invarianza di gauge**, che possiamo sfruttare per riscrivere in modo più compatto le equazioni (1.4.31). Possiamo vedere che se trasliamo il quadripotenziale di un gradiente di una funzione arbitraria:

$$A_\alpha \longrightarrow \hat{A}_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \chi(x) \quad (1.4.32)$$

allora il tensore elettromagnetico non cambia e quindi abbiamo le stesse informazioni sul campo elettromagnetico. Verifichiamo che facendo (1.4.32) abbiamo:

$$F_{\alpha\beta} \longrightarrow F'_{\alpha\beta} = \partial_\alpha (A_\beta + \partial_\beta \chi) - \partial_\beta (A_\alpha + \partial_\alpha \chi) \quad (1.4.33)$$

$$= \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha \partial_\beta \chi - \partial_\beta \partial_\alpha \chi \quad (1.4.34)$$

$$= \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad (1.4.35)$$

$$= F_{\alpha\beta}. \quad (1.4.36)$$

In generale non abbiamo bisogno di risolvere l'equazione del moto in un dato gauge, ma scegliere uno potrebbe risultare più comodo poiché potrebbe semplificare la forma delle equazioni. Scegliere uno specifico gauge, quindi una specifica forma di $\chi(x)$ si chiama **gauge fixing**. Uno dei tipici gauge fixing è quello di *Lorenz*:

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \quad (1.4.37)$$

che è un'equazione tensoriale, quindi una condizione invariante dal punto di vista delle trasformazioni di Lorentz. È una scelta comoda perché se prendiamo l'equazione di Maxwell per il potenziale (1.4.31) e imponiamo il gauge di Lorenz, allora l'equazione del moto diventa semplicemente:

$$\square A^\beta = -J^\beta \quad (1.4.38)$$

che è un'equazione di d'Alembert con termini di sorgente, sicuramente più semplice da risolvere rispetto (1.4.31). Nel vuoto abbiamo:

$$\square A^\beta = 0 \quad (1.4.39)$$

che non solo ci piace perché è un'invariante, ma perché troviamo, in modo immediato, l'equazione delle onde, che ci dice che il campo potenziale vettore ammette una soluzione di tipo ondulatorio.

Un altro gauge comodo per altri scopi è il cosiddetto *gauge di Coulomb* in cui scegliamo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_i A^i = 0 \quad (1.4.40)$$

ma che a differenza del gauge di Lorenz non è una scelta Lorentz invariante.

1.5 Meccanica analitica

Sospendiamo un attimo l'EM e prendiamo una teoria di campo classica, il che significa che abbiamo un certo numero i di gradi di libertà, che possiamo chiamare campi ϕ^i , che descrivono i nostri sistemi. I campi sono funzioni dello spazio-tempo, sono cioè le variabili dinamiche del sistema, e la loro evoluzione descrive il sistema fisico.

Possiamo dare una descrizione del sistema utilizzando il formalismo lagrangiano, definiamo una **densità di lagrangiana**, funzione dei campi, delle loro derivate prime e dei loro gradienti:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i) \quad , \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.5.1)$$

La lagrangiana del sistema, L , è data dall'integrale sul volume della densità di lagrangiana:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i). \quad (1.5.2)$$

Introduciamo l'**azione** del sistema definita come:

$$S = \int dt L \quad (1.5.3)$$

$$= \int d^4x \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i) \quad (1.5.4)$$

con $d^4x = dt dx dy dz$ elemento di volume dello spaziotempo di Minkowski. L'azione dimensionalmente, è un'energia per un tempo, ma ricordando che usiamo le unità naturali essa è adimensionale. L'elemento di volume ha dimensioni:

$$[d^4x] = L^4 = M^{-4}. \quad (1.5.5)$$

Notiamo che nessuno ci vieta di usare coordinate adimensionali, per esempio tutte riferite in unità di una certa scala che abbiamo scelto. Per il momento lasciamo le cose così. Comunque, la dimensionalità di d^4x ci dice che la densità lagrangiana deve avere una dimensione:

$$[\mathcal{L}] = M^4 = L^{-4}. \quad (1.5.6)$$

Rendiamoci conto che l'elemento di volume dello spazio di Minkowski si trasforma per trasformazioni di Lorentz come:

$$d^4 \quad \longrightarrow \quad d^4x' = |\det\{J\}| d^4x \stackrel{=}{=} d^4x \quad (1.5.7)$$

ovvero non cambia, e questo ci dice che l'azione deve rispettare tutte le simmetrie del sistema. Dal punto di vista delle trasformazioni di Lorentz, dato che l'elemento di volume è invariante, allora è necessario che la densità di lagrangiana sia anch'essa un invariante per trasformazioni di Lorentz, cioè che essa sia quello che abbiamo chiamato uno scalare. Questo si traduce nel dire che se usiamo quadrivettori e tensori per descrivere i campi dinamici, allora la lagrangiana deve essere una combinazione di questi e deve rimanere invariante. Per esempio, (non lo dimostriamo, ma puoi vedere le note del corso di IQFT o FQFT) per quanto riguarda l'elettromagnetismo la densità lagrangiana che descrive un sistema di cariche correnti che generano un campo elettromagnetico è scritta come:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_{\mu}J^{\mu} \quad (1.5.8)$$

in cui il primo termine contiene solo l'informazione sul campo elettromagnetico, mentre nel secondo c'è il campo elettromagnetico (nella forma di A) moltiplicato per le sorgenti, quindi questo mette in interazione diretta campo e sorgenti. Sappiamo anche che la teoria del campo elettromagnetico non è solo invariante di Lorentz, ma è anche invariante per effetto di trasformazioni di gauge, per cui abbiamo che anche la densità lagrangiana deve esserlo. Dobbiamo scrivere una combinazione delle quantità dinamiche A_{μ} e J_{μ} , in modo tale che sia anche invariante di gauge (ovviamente, non è scopo di questo corso per cui non lo facciamo).

L'importanza dell'azione risiede nel fatto che ci permette di scrivere l'equazione del moto delle variabili dinamiche da cui essa dipende, cioè ci porta alle equazioni di Eulero-Lagrange. Descriviamo il **principio variazionale**. Presa una densità lagrangiana \mathcal{L} possiamo richiedere che l'azione sia stazionaria per variazioni dei campi del tipo:

$$\phi^i \longrightarrow \phi^i + \delta\phi^i \quad (1.5.9)$$

cioè trasformazioni che prendono i campi e li fanno variare lungo una certa traiettoria, cioè uno spazio di configurazione dei campi tale che segua l'equazione del moto. Però, imponiamo anche la condizione al contorno:

$$\delta\phi^i \Big|_{\text{estremi}} = 0 \quad (1.5.10)$$

ossia, che le variazioni dei campi negli estremi del cammino siano nulle. Vogliamo trovare quali siano le configurazioni di campo, a estremi fissati, che rendono estrema l'azione. Quindi quello che richiediamo è:

$$\delta S = 0. \quad (1.5.11)$$

La configurazione di campi che rende estrema, cioè massimale o minimale, l'azione è quella che in teoria di campi classica rappresenta l'equazione del

moto. La variazione dell'azione è:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta (\partial_\mu \phi^i) \right] \quad (1.5.12)$$

se scriviamo la variazione della derivata dei campi come:

$$\partial_\mu \phi^i \longrightarrow \partial_\mu \phi^i + \delta (\partial_\mu \phi^i) \quad (1.5.13)$$

e assumiamo che valga $\delta (\partial_\mu \phi^i) = \partial_\mu (\delta \phi^i)$, allora segue che:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\mu (\delta \phi^i) \right]. \quad (1.5.14)$$

Possiamo notare che:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i \right] = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\mu (\delta \phi^i) \quad (1.5.15)$$

che se inserito nell'espressione di δS porta a:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta \phi^i - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i \right) \right] \quad (1.5.16)$$

in cui l'ultimo termine è il solito (dipende se si è abituati a queste cose) termine di bordo che, sfruttando il teorema della divergenza, integrato da:

$$\int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i \Big|_{\text{bordo}} = 0 \quad (1.5.17)$$

poiché noi abbiamo richiesto (1.5.10), ovvero che le deformazioni dei bordi siano nulle. Rimaniamo quindi con:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta \phi^i - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta \phi^i \right] \quad (1.5.18)$$

che se lo imponiamo uguale a 0, ci da la relazione:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} = 0 \quad (1.5.19)$$

poiché le variazioni $\delta \phi^i$ sono arbitrarie e la condizione $\delta S = 0$ si traduce nel chiedere che la parentesi quadra sia nulla per ogni valore di i (che notiamo essere un'indice sommato). Le equazioni (1.5.19) vengono chiamate **equazioni di Eulero-Lagrange** e ci forniscono l'equazione del moto del sistema fisico descritto dalla Lagrangiana \mathcal{L} . Se prendessimo la Lagrangiana per il campo elettromagnetico (1.5.8) e ne facessimo la variazione rispetto ai campi A^μ , allora troveremmo l'equazione di Maxwell (1.4.31).

Il principio variazionale è un metodo generale per scrivere teorie che siano Lorentz invarianti.¹⁴ Questo varrà anche in Relatività Generale, ma ci saranno delle modifiche a cui dovremmo fare attenzione.

Per dettagli e discorsi più ampi (caso di invarianze non solo interne al campo e quindi definizioni di correnti e cariche più generiche) vedi la sezione §4.2 degli appunti di *Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi*, ma possiamo interpretare il termine (1.5.17):

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \quad (1.5.20)$$

come una **corrente** che, per via delle condizioni imposte, soddisfa (1.5.17) e dunque un'**equazione di continuità**:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (1.5.21)$$

Possiamo inoltre definire una **carica** conservata¹⁵, che è data dall'integrale spaziale della componente temporale di (1.5.20):

$$Q_\alpha \equiv \int d^3x J^0. \quad (1.5.22)$$

Ovviamente, conosciamo bene l'esistenza del *teorema di Noether*, che ci dice esattamente quello appena visto, ovvero: una simmetria di S , induce ad una corrente conservata e ad una legge di continuità (1.5.21), che a sua volta porta ad una legge di conservazione di una carica Q_α .

1.5.1 Correnti

Vediamo adesso come, in Relatività Speciale, organizzare e definire in modo covariante le sorgenti del campo elettromagnetico, in modo da riuscire anche a definire le corrispondenti quantità che, più avanti nel corso, diventeranno le sorgenti del campo gravitazionale.

Cominciamo con il dare una definizione di corrente elettrica e densità di carica elettrica. Prendiamo un sistema composto da un certo numero di cariche elettriche, e_n , con n numero grande, ognuna delle quali assume una posizione $\vec{x}_n(t)$. La densità di carica ϵ sarà funzione della posizione e del tempo, ovvero avremo $\epsilon(\vec{x}, t)$ visto che le cariche si possono muovere. Ne possiamo dare una rappresentazione:

$$\epsilon(\vec{x}, t) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.23)$$

¹⁴Tant'è che abbiamo costruito la QFT basandoci su di esso.

¹⁵La carica si conserva per via dell'equazione di continuità (1.5.21) soddisfatta da J^μ .

in cui la δ^3 ci dice che al tempo t la carica e_n si trova nel punto $\vec{x} = \vec{x}_n(t)$. In più conosciamo la seguente proprietà:

$$\int d^3x f(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{y}) \quad (1.5.24)$$

la quale ci permette di vedere quali siano le dimensioni di δ^3 , infatti, comparando ad entrambi i membri f la sua dimensione non conta e abbiamo $[\delta^3] = L^{-3}$.

Se ci ricordiamo che la corrente di carica è la carica stessa moltiplicata per la velocità, allora abbiamo che la corrente elettrica è della forma:

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \sum_n e_n \frac{d\vec{x}_n}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)). \quad (1.5.25)$$

L'insieme delle due equazioni (1.5.23) e (1.5.25) sono quelle che abbiamo messo nelle equazioni di Maxwell come sorgenti del campo elettromagnetico e le possiamo unificare in un'unica espressione. Possiamo notare che la corrente è una corrente vettoriale, mentre la densità è una quantità¹⁶ che può essere messa nella componente temporale di un quadri vettore, perché trasforma come un tempo. Definiamo una funzione vettoriale dello spazio-tempo:

$$J^\alpha(x) = \sum_n e_n \frac{dx_n^\alpha}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.26)$$

dove con x si intende il quadrivettore con tempo e spazio. Adesso facciamo vedere, per altra via, che questo è un vettore di Lorentz e che quindi tutto quello che abbiamo detto è consistente. Si noti che:

$$J^0(x) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \equiv \epsilon(x) \quad (1.5.27)$$

poiché quando $\alpha = 0$ è come avere $dt/dt = 1$, mentre:

$$J^i(x) = \sum_n e_n \frac{dx_n^i}{dt} = j^i(x) \quad (1.5.28)$$

con, adesso, x_n la coordinata spaziale o temporale occupata dall'ennesima particella, ossia, dal punto di vista spaziale le x_n sono il luogo dei punti della sua traiettoria, ma quando $\alpha = 0$ è il tempo.

Ora, ci possiamo chiedere se J^α è un quadrivettore? La risposta è sì, ma dimostriamolo. Scritto come in (1.5.26) non appare manifestamente un

¹⁶Il che non implica che sia uno scalare, poiché infatti si può dimostrare che non è invariante per trasformazioni di Lorentz.

vettore per trasformazione di Lorentz (c'è una delta solo spaziale). Per vederla meglio dobbiamo riscriverla in un altro modo, usando un po' di algebra.¹⁷ Sarebbe bello poterla scrivere facendo comparire una δ^4 sull'ulteriore coordinata che ci manca, ossia quella temporale. Usiamo la (1.5.24) per scrivere:

$$J^\alpha(x) = \int dt' \sum_n e_n \frac{dx_n^\alpha(t')}{dt'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t')) \delta(t' - x_n^0(t)) \quad (1.5.29)$$

riparametrizziamo lo spazio fisico come lo spaziotempo di Minkowski e riscriviamo la quadricorrente usando il tempo proprio:

$$J^\alpha(x) = \int d\tau \sum_n e_n \frac{dx_n^\alpha(\tau)}{d\tau} \delta^4(x - x_n(\tau)) \quad (1.5.30)$$

in cui, ora, $x_n(\tau)$ è la worldline nello spaziotempo della n -esima particella, che notiamo non è detto che sia una traiettoria rettilinea, poiché le cariche elettriche possono interagire elettromagneticamente e quindi possono essere accelerate.

Ora, scritta (1.5.30) possiamo far vedere che la combinazione a secondo membro è un vettore di Lorentz. Infatti:

- $d\tau$ è uno scalare.
- e_n è uno scalare.
- $\frac{dx_n^\alpha(\tau)}{d\tau}$ è un quadrivettore (prima la derivata rispetto a dt non lo era perché oltre a x^α si trasformava anche la variabile derivata, ossia t).

Però, dobbiamo mostrare che $\delta^4(x - x_n(\tau))$ è uno scalare. Se riprendiamo definizione matematica di delta di Dirac:

$$\int d^4x \delta^4(x - y) \phi(x) = \phi(y) \quad (1.5.31)$$

in cui la funzione ϕ può essere quello che vogliamo, ma tra tutte le possibilità che possiamo scegliere, prendiamo uno scalare di Lorentz, cioè un invariante. Notiamo, inoltre, che il volume d^4x è un invariante, quindi uno scalare. Perciò se la combinazione a primo membro deve dare uno scalare, allora la $\delta^4(x)$ deve anch'essa essere uno scalare.¹⁸

¹⁷Nota che noi vogliamo trovare un modo automatico per dire che J^α è un vettore di Lorentz, ma si potrebbe vedere che la derivata $d_t x_n^\alpha$ trasforma come un dt^{-1} e la δ^3 come d^3x^{-1} e si dimostrerebbe ugualmente.

¹⁸Poiché possiamo scrivere $d^4x = dt dx dy dz$ e se facciamo $x^\alpha \rightarrow \Lambda^\alpha_\beta x^\beta$, allora otteniamo $d^4x' = dt' dx' dy' dz' = |\det\{J\}| d^4x$, ma in cui $|\det\{J\}| = 1$ (per le trasformazioni proprie). Ovviamente, quello che abbiamo visto dimostra che δ^4 è uno scalare di Lorentz, ma resta vero che δ^3 non lo è. Infatti, la mancanza di $x^0 = t$ è cruciale; δ^3 ha le dimensioni di un volume, ma d^3x durante una trasformazione di Lorentz, tra due sistemi di riferimento in moto relativo risulta deformato, ossia schiacciato, per via delle contrazioni delle lunghezze ($\propto 1/\gamma$). Quando aggiungiamo anche il dt tutto torna invariante poiché aggiungiamo anche la dilatazione del tempo ($\propto \gamma$).

Quello visto implica che la J^α sia un vettore di Lorentz (ricorda quello che abbiamo detto del prodotto di tensori; ora abbiamo (scalare)·(scalare)·(4-vettore)·(scalare)=(4-vettore)). Quindi, abbiamo trovato il modo in cui noi possiamo scrivere, in modo covariante (per trasformazione di Lorentz), la corrente elettrica. Tale corrente, la (1.5.30) se non ci sono sorgenti di carica elettrica o di pozzi, è conservata in senso covariante. Ciò significa, in senso più stretto, che se calcoliamo la divergenza della corrente (in coordinate cartesiane), allora:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(t, \vec{x}) = \partial_i J^i(x) = \partial_i \left(\sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \right) \quad (1.5.32)$$

per svolgere la derivata rispetto alle coordinate x_i , notiamo che la dipendenza da x si ha attraverso la delta di Dirac, che in effetti individua la posizione della n -esima particella. Abbiamo quindi:

$$\partial_i J^i(x) = \sum_n e_n \frac{\partial \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))}{\partial x^i} \frac{dx_n^i(t)}{dt} \quad (1.5.33)$$

vediamo separatamente:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = \frac{\partial}{\partial(x^i - x_n^i(t))} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.34)$$

visto che le $x_n(t)$ sono indipendenti da x . Abbiamo anche:

$$\frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = -\frac{\partial}{\partial(x^i - x_n^i(t))} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.35)$$

vediamo quindi che le derivate della δ rispetto x^i e x_n^i sono uguali a meno di un segno; possiamo usare queste due relazioni nel calcolo di $\partial_i J^i$. Abbiamo:

$$\partial_i J^i(x) = \sum_n e_n \frac{dx_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.36)$$

$$= -\sum_n e_n \frac{dx_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.37)$$

$$= -\sum_n e_n \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.38)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.39)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \epsilon(t, \vec{x}) \quad (1.5.40)$$

$$= -\partial_t J^0 \quad (1.5.41)$$

$$= -\partial_0 J^0 \quad (1.5.42)$$

dunque, portando al lato sinistro la derivata temporale otteniamo:

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \quad (1.5.43)$$

che, come abbiamo già visto, si chiama **equazione di continuità** e notiamo che è un'equazione invariante per trasformazioni di Lorentz. Se la corrente J^α soddisfa l'equazione di continuità si dice che la *corrente è conservata*. Con questo si intende cioè che la carica totale del sistema di cariche è indipendente dal tempo. Infatti, definita:

$$Q = \int d^3x J^0(x) \quad (1.5.44)$$

$$= \int d^3x \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.45)$$

$$= \sum_n e_n \quad (1.5.46)$$

possiamo verificare che è indipendente dal tempo (usando l'equazione di continuità):

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \partial_0 J^0 \quad (1.5.47)$$

$$= \int d^3x \left[-\partial_i J^i \right] \quad (1.5.48)$$

$$= \int d^3x \left[-\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right] \quad (1.5.49)$$

$$= - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (1.5.50)$$

$$= - \int_{\Sigma=\partial V} d\Sigma \vec{J} \cdot \vec{n} \longrightarrow 0 \quad (1.5.51)$$

in cui nell'ultimo passaggio abbiamo detto che se prendiamo la superficie che contiene tutte le cariche e la mandiamo a infinito, allora l'integrale va a 0. Quindi, se vale l'equazione di continuità (1.5.43), allora la carica elettrica (1.5.44) non cambia nel tempo, è costante. Se invece avessimo avuto:

$$\partial_\alpha J^\alpha = S \quad (1.5.52)$$

con S qualche sorgente elettromagnetica, allora rifacendo i conti per la derivata di Q nel tempo, otterremmo che il termine di bordo andrebbe a 0, ma il contributo di S rimarrebbe. Avremmo dunque:

$$\frac{dQ}{dt} = T \quad (1.5.53)$$

in cui, se $T > 0$ (decadimenti) la carica aumenta, quindi si ha una sorgente di carica da qualche parte, mentre se $T < 0$ (annichilazione), allora la carica diminuisce e si ha un pozzo.

Si noti che Q è l'integrale sul volume della componente temporale del quadrivettore che descrive la carica: questa è una proprietà più generale che non vale solo per la carica elettrica, come abbiamo visto. Infatti, potremmo rifare lo stesso ragionamento, ma sta volta considerando una collezione di particelle a cui associamo una quantità q_n , caratteristica di ogni particella; anche in questo caso arriviamo ad una definizione di quadrivettore di corrente $J^\alpha = (\epsilon_q, \vec{j}_q)$ e ad una carica Q_q conservata, con l'unica differenza che ci mettiamo un pedice q per differenziarle dalle stesse quantità elettriche. I nomi quadrivettore di corrente e carica si usa per generiche quantità, anche se non sono sempre corrente e carica elettrica; vedremo un caso tra poco.

Ora, consideriamo una collezione di particelle, ad ognuna di esse possiamo associare come proprietà il suo quadrimpulso $p_n^\alpha(t) = (E_n, \vec{p}_n)$, che è una quantità dinamica e che può in generale dipendere dal tempo, visto che le particelle possono essere in interazione con un campo esterno o interagire tra di loro tramite urti. Possiamo definire la densità di quadrimpulso:

$$T^{\alpha 0} = \sum_n p_n^\alpha(x) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.54)$$

e la corrente di p_n^α :

$$T^{\alpha i} = \sum_n p_n^\alpha \frac{dx_n^i(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)). \quad (1.5.55)$$

Quando mettiamo $\alpha = 0$, allora T^{00} rappresenta la densità di energia, ma quando $\alpha = i$, allora T^{i0} è la densità di quantità di moto. Notiamo che in (1.5.55) abbiamo 3 quantità (date dall'indice i), per ognuna delle 4 componenti (indice α) di p_n^α .

Ora, abbiamo quattro densità, per l'energia e per ogni componente dell'impulso, e abbiamo un numero rilevante di correnti - tre direzioni delle velocità che si moltiplicano alle quattro grandezze di cui costruisco la corrente. Quindi, analogamente a quanto fatto fatto per la carica elettrica - componente temporale di un quadrivettore - e per la corrente di carica elettrica - componente spaziale -, possiamo riorganizzare queste quantità all'interno di un tensore $T^{\alpha\beta}$. Definiamo questa nuova quantità, che chiamiamo **tensore energia-impulso** o *stress energy tensor*:

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^\beta(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)). \quad (1.5.56)$$

Notiamo che (1.5.56) è valido per un sistema discreto, ma lo si può generalizzare anche per un sistema continuo (ad esempio un gas), facendone il limite al continuo. Notiamo anche che (1.5.56) è un tensore per trasformazioni di Lorentz. È dimostrabile ripercorrendo lo stesso ragionamento che abbiamo fatto per la corrente elettrica, ovvero: completiamo la δ^3 facendola

diventare una δ^4 moltiplicando per una delta sul tempo e integrandoci sopra; dopodiché nell'integrale sul tempo facciamo il cambio $dt \rightarrow d\tau$ e otteniamo:

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n \int d\tau p_n^\alpha \frac{dx_n^\beta(\tau)}{d\tau} \delta^4(x - x_n(\tau)) \quad (1.5.57)$$

a questo punto vedendo che $d\tau$ e δ^4 sono scalari e che ∂_n^α e $d_\tau x_n(\tau)$ sono quadrittori, possiamo concludere che $T^{\alpha\beta}$ è un tensore di rango 2. Inoltre, possiamo vederne anche una proprietà:

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \quad (1.5.58)$$

ovvero, è simmetrico per scambio di indici. Infatti, considerando la relazione che mette collega l'energia e l'impulso:¹⁹

$$p_n^\beta = E_n \frac{dx_n^\beta}{dt} \quad (1.5.59)$$

riscriviamo (1.5.56) come:

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n \frac{p_n^\alpha(t) p_n^\beta(t)}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.60)$$

che è un'espressione identica a quelle altre già viste, ma più carina solo per il fatto che è evidente la simmetria per scambio di indici.

Ci chiediamo ora se (1.5.56) ha la proprietà di essere conservato in senso covariante, e quindi soddisfa un'equazione di continuità.

Per la corrente avevamo $\partial_\alpha J^\alpha = 0$ e ora ci chiediamo se vale:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.5.61)$$

in cui facciamo la divergenza su uno dei due indici, che in generale è rilevante su quale la faccio, ma fintanto che il tensore è simmetrico, ciò non conta.

Notiamo anche che in (1.5.61) si hanno quattro equazioni di continuità scritte attraverso un'espressione covariante (che è quindi è la stessa in tutti i sistemi di riferimento). Calcoliamo la divergenza spaziale:

$$\partial_i T^{\alpha i} = \sum_n p_n^i \frac{dx_n^i}{dt} \partial_i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.62)$$

$$= \sum_n p_n^i \frac{dx_n^i}{dt} \left(-\frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \right) \quad (1.5.63)$$

$$= -\sum_n p_n^i \frac{\partial \delta^3(\dots)}{\partial t} \quad (1.5.64)$$

¹⁹Facilmente dimostrabile prendendo $\beta = 0$, per cui si ha $p_n^0 = E_n$ e $E_n \frac{dx_n^0}{dt} = E_n \frac{dt}{dt} = E_n$, e $\beta = i$, per cui p_n^i è relazionato con $E_n \frac{dx_n^i}{dt} = E_n v_n^i$.

guardando la parte temporale (1.5.54) invece abbiamo:

$$\partial_0 T^{\alpha 0} = \sum_n \frac{dp_n^\alpha}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) + \sum_n p_n^\alpha \partial_t \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)). \quad (1.5.65)$$

Notando la somiglianza tra (1.5.64) e (1.5.65) possiamo scrivere:

$$\partial_i T^{\alpha i} = -\partial_0 T^{\alpha 0} + \sum_n \frac{dp_n^\alpha}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.66)$$

e dunque:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = \sum_n \frac{dp_n^\alpha}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)). \quad (1.5.67)$$

Se ribattezziamo il secondo membro di (1.5.67) come:

$$G^\alpha = \sum_n \frac{dp_n^\alpha}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.68)$$

esso corrisponde alla somma, su tutte le particelle prese spazialmente sulla loro traiettoria, della variazione di p rispetto al tempo. Però sappiamo bene che p varia rispetto al tempo t solo se è presente una forza. Possiamo allora scrivere:

$$G^\alpha = \sum_n \frac{dp_n^\alpha}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.69)$$

$$= \sum_n F^\alpha \frac{d\tau}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.70)$$

così da mettere in evidenza la quadriforza. Notiamo che G^α , che a volte viene chiamata **force density**, è un vettore di Lorentz (primo e secondo membro di (1.5.67) lo sono).

Possiamo riscrivere l'equazione di continuità (1.5.67) per il tensore di energia-impulso come:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = G^\alpha \quad (1.5.71)$$

che, se abbiamo *particelle libere*, cioè non ci sono campi di forze e $G^\alpha = 0$, allora diventa:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.5.72)$$

se invece abbiamo *particelle in interazione*, allora il campo di forze è presente, $G^\alpha \neq 0$ e abbiamo la forma generica (1.5.71).

Notiamo solamente una cosa, quando troviamo (1.5.72) per un sistema isolato (quindi quando non creiamo e distruggiamo nulla), l'equazione per $\alpha = 0$ corrisponde alla conservazione dell'energia, mentre $\alpha = i$ alle conservazioni dell'impulso totale e viene chiamata anche **equazione di Eulero** (è una legge di conservazione relativistica).

Ovviamente, in base a tutte le cose che abbiamo imparato, quando c'è assenza di forze e abbiamo l'equazione (1.5.72), allora abbiamo anche una quantità, la carica totale di cui $T^{\alpha\beta}$ è corrente, che è conservata. Scriviamo la carica:

$$P^\alpha = \int d^3x T^{\alpha 0} \quad (1.5.73)$$

che in realtà sono 4 quantità, che chiamiamo *cariche*, tutte conservate quando vale (1.5.72) e per cui:

$$\frac{dP^\alpha}{dt} = 0. \quad (1.5.74)$$

L'espressione delle cariche la possiamo vedere come:

$$P^\alpha = \int d^3x \sum_n p_n^\alpha(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.75)$$

$$= \sum_n p_n^\alpha(t) \quad (1.5.76)$$

$$= P_{tot}^\alpha \quad (1.5.77)$$

che unita al fatto che P^α è una quantità conservata ci dice che l'impulso totale del sistema è conservato se il sistema è isolato.

Però, non sarebbe male capire che cosa rappresenti effettivamente il tensore (1.5.56). Vediamone le componenti:

$$T^{00} = \sum_n E_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.78)$$

$$T^{i0} = \sum_n p_n^i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.79)$$

$$T^{0i} = \sum_n E_n v_n^i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.80)$$

$$T^{ij} = \sum_n p_n^i v_n^j \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.81)$$

vediamo che (1.5.78) è la densità di energia (una sola componente), mentre (1.5.79) e (1.5.80) le densità di impulso (3 componenti, una per ogni direzione spaziale), o analogamente le correnti di energia, per ultime (1.5.81) sono 3x3 quantità che misurano la corrente di impulso (indice i) in una data direzione (indice j). In particolare, le componenti (1.5.81) vengono chiamate *pressione del fluido*, poiché hanno dimensioni di una pressione:

$$[T^{ij}] = (\text{impulso}) \cdot (\text{velocità}) \cdot (\text{volume}^{-1}) \quad (1.5.82)$$

$$= (MLT^{-1}) \cdot (LT^{-1}) \cdot (L^{-3}) \quad (1.5.83)$$

$$= ML^{-1}T^{-2} \quad (1.5.84)$$

$$= MLLT^{-2} \cdot L^{-2} \quad (1.5.85)$$

$$= F \cdot L^{-2} \quad (1.5.86)$$

$$= \text{pressione.} \quad (1.5.87)$$

Ovviamente, la pressione di cui stiamo parlando è più complicata rispetto quella studiata in Fisica Classica; i termini pressori, avendo 2 indici, sono rappresentati da una matrice 3x3 e sono legati a come le componenti di p_n^i agiscono in una certa direzione.

Possiamo scrivere in forma matriciale (1.5.56):

$$T = \left(\begin{array}{c|c} \text{densità di energia} & \text{flussi di energia} \\ \hline \text{flussi di energia} & \text{pressione} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} T^{00} & T^{0i} \\ \hline T^{i0} & T^{ij} \end{array} \right). \quad (1.5.88)$$

Un altro modo per chiedere che T^{ij} sono termini pressori è il seguente. Consideriamo una superficie attraversata da un fluido di particelle che idealmente sono tutte ortogonali alla superficie e con il medesimo impulso p . Si faccia riferimento alla figura 1.28. Nel tempo Δt le particelle percorrono un certo tratto $d = v\Delta t$. Passando attraverso la superficie generano una pressione su di essa. Tale pressione sarà data da:

$$\text{pressione} = \frac{F_A}{A} = \frac{p/\Delta t}{A} = \frac{p}{A \Delta t} \cdot \frac{v}{v} = \frac{p \cdot v}{\text{volume}} \quad (1.5.89)$$

dove il volume corrisponde alla regione disegnata in rosso. Si noti che questa definizione di pressione è esattamente quello che abbiamo scritto in (1.5.81).

Il tensore energia impulso quindi, data una distribuzione di materia o di energia nello spazio e nel tempo, è quell'oggetto che contiene la densità di energia, i flussi di energia nelle varie direzioni e i termini pressori di quel fluido. Tale oggetto assumerà un ruolo fondamentale nella scrittura dell'equazione di Einstein perché sarà l'oggetto con il quale noi definiremo le sorgenti del campo gravitazionale. In Meccanica Classica la sorgente del campo gravitazionale è la densità di massa, infatti l'equazione di Poisson, che è quella che collega il potenziale gravitazionale ψ alla sorgente, è:

$$\nabla^2 \psi = 4\pi G\rho. \quad (1.5.90)$$

In Relatività Generale le cose saranno più complesse, ma in ogni caso una distribuzione di massa, in una descrizione tensoriale, verrà inserita nel tensore energia impulso.

Visto che abbiamo discusso il tensore energia-impulso per un sistema di n corpi, possiamo fare ancora un passo. Consideriamo un certo sistema - come quello descritto prima - e vediamo in termini microscopici lo stesso tensore (1.5.56). È chiaro che questo poi non è quello che nella pratica faremo, poiché non è comodo sommare su un numero infinito di oggetti o avere a disposizione tutte le worldline nello spazio tempo.

Invece di considerare una descrizione corpuscolare prendiamo quindi una descrizione continua in termini di fluido. Esiste una particolare classe di fluidi nota come **fluidi perfetti**, che in quanto tali hanno delle proprietà semplici

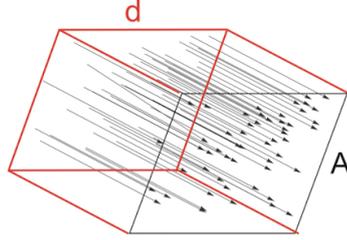


Figura 1.28

e che si portano dietro delle proprietà di simmetria. Un modo per definire il fluido perfetto è il seguente: un fluido perfetto è un fluido dotato di velocità v tale che un osservatore a riposo col fluido, cioè che *comuove* con il fluido, vede attorno a sé il fluido con proprietà semplici, ossia omogeneo o in certi casi isotropo. Se pensiamo, per esempio, ad un fiume che fluisce regolarmente, come un fluido laminare, e noi ci sediamo sulla riva, allora possiamo dire che ogni punto del tubo di flusso del fluido ha una certa velocità. Però, se comuoviamo con il fluido, cioè ci muoviamo alla stessa velocità, il fluido diventa a riposo rispetto a noi.²⁰ Ovviamente, la Fisica non cambia e le singole particelle si muoveranno in tutte le direzioni, ma globalmente, nel sistema comovente - uno di tutti i possibili sistemi di riferimento inerziali -, l'osservatore assocerà una densità di energia ($\tilde{T}^{00} \neq 0$) ed una pressione del fluido ($\tilde{T}^{ij} \neq 0$), ma non avrà flussi netti di energia in alcuna direzione (quindi $T^{0i} = T^{i0} = 0$).

Per quest'ultimo motivo per un fluido perfetto, nel sistema comovente con il fluido, è molto facile scrivere il tensore di energia-impulso. Risulta:

$$\begin{cases} \tilde{T}^{00} = \rho \\ \tilde{T}^{0i} = \tilde{T}^{i0} = 0 \\ \tilde{T}^{ij} = p \delta_{0j} \end{cases}, \quad T = \left(\begin{array}{c|ccc} \rho & & & \\ \hline & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{array} \right). \quad (1.5.91)$$

Dunque, nel sistema di riferimento comovente, $\tilde{T}^{\alpha\beta}$ ha forma diagonale ed isotropo dal punto di vista spaziale. In più: $\tilde{T}^{00} = \rho$ ci dice che il fluido è omogeneo; $\tilde{T}^{0i} = \tilde{T}^{i0} = 0$ ci dice che non vediamo flussi di energia o impulso in nessuna direzione; $\tilde{T}^{ij} = p \delta_{0j}$ ci mostra che non sono presenti termini rotazionali e le pressioni sono uguali. In qualunque altro sistema ci mettiamo la forma del tensore è sempre la stessa. Possiamo scrivere, sempre nel sistema co-muovente, la forma del tensore di energia impulso in un modo più compatto:

$$\tilde{T}^{\alpha\beta} = p \eta^{\alpha\beta} + (p + \rho) \tilde{u}^\alpha \tilde{u}^\beta \quad (1.5.92)$$

²⁰Il che non vuol dire che le particelle siano ferme, infatti, in $T^{\alpha\beta}$ le $d_t x_n^\alpha$ non sono nulle.

dove intendiamo con \tilde{u}^α la velocità (relativa tra i due sistemi di riferimento) nel senso di quadrivelocità:

$$\tilde{u}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (1.5.93)$$

Genericamente abbiamo:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = (\gamma, \gamma \vec{v}) \quad (1.5.94)$$

ma nel sistema comovente abbiamo $\vec{v} = 0$, per cui otteniamo:

$$\tilde{u}^\alpha = (1, 0). \quad (1.5.95)$$

Possiamo notare che (1.5.92) è chiaramente un tensore, poiché è una combinazione di tensori. Ovviamente è dimostrabile che (1.5.91) coincide con (1.5.92), infatti, basta vedere le varie componenti di (1.5.92) ricordando la definizione della metrica (1.3.3) e (1.5.95). Quello che ci interessa maggiormente è che essendo (1.5.92) una forma tensoriale essa rimane della stessa forma anche se ci mettiamo in un altro sistema di coordinate:

$$T^{\alpha\beta} = p \eta^{\alpha\beta} + (p + \rho) u^\alpha u^\beta. \quad (1.5.96)$$

Notiamo che il tensore metrico, scritto come (1.5.96), se cambiamo la convenzione dei segni che mettiamo nel tensore metrico, allora anch'esso ha un segno che cambia.

Noi abbiamo dato una definizione discreta del tensore energia-impulso (1.5.60):

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n \frac{p_n^\alpha(t) p_n^\beta(t)}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$$

ma anche continua (1.5.96):

$$T^{\alpha\beta} = p \eta^{\alpha\beta} + (p + \rho) u^\alpha u^\beta$$

e ovviamente dev'esserci un match tra i due quando il numero di particelle coincide, ovvero quando $n \rightarrow \infty$. Prendiamo un fluido perfetto con un numero n alto di particelle e vediamo sia il caso relativistico che non.

Fluido non relativistico. Abbiamo:

$$E_n = m + \frac{|\vec{p}_n|^2}{m}, \quad |\vec{p}_n| \ll E_n \sim m \quad (1.5.97)$$

e conosciamo:

$$T^{00} = \rho = \sum_n E_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.98)$$

$$T^{0i} = T^{i0} = 0 \quad (1.5.99)$$

$$T^{ij} = p \eta^{ij} \quad (1.5.100)$$

vediamo che:

$$\eta_{ij} T^{ij} = p \eta_{ij} \eta^{ij} = p \delta_{ij} \delta^{ij} = p \delta_i^i = p \eta_i^i = 3p \quad (1.5.101)$$

e quindi:

$$p = \frac{1}{3} \eta_{ij} T^{ij} \quad (1.5.102)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_n \frac{\eta_{ij} p_n^\alpha(t) p_n^\beta(t)}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.103)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_n \frac{|\vec{p}_n|^2}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.104)$$

ma guardando l'espressione della densità del fluido (1.5.98) e ricordando del limite $|\vec{p}| \ll E_n$ in cui ci troviamo, allora possiamo dire che:

$$p \ll \rho \quad (1.5.105)$$

o equivalentemente che, visto $|\vec{p}| \ll E_n \sim m$, $p \rightarrow 0$. Prendendo $E_n \sim m$ possiamo scrivere (1.5.98) come:

$$\rho = m \underbrace{\sum_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))}_n = m n \quad (1.5.106)$$

numero·volume

dove n è la densità in numero. Quindi, un fluido newtoniano, detto anche fluido in polvere, è definito da:

$$\begin{cases} \rho = m n \\ p = 0 \end{cases}, \quad p \ll \rho. \quad (1.5.107)$$

Fluido relativistico. Ad esempio possiamo prendere un gas di fotoni. Abbiamo:

$$p_n^\alpha = (E_n, \vec{p}_n) \quad , \quad E_n = |\vec{p}_n| \quad m \rightarrow 0. \quad (1.5.108)$$

e ancora:

$$\rho = \sum_n E_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.109)$$

$$p = \frac{1}{3} \eta_{ij} T^{ij} \quad (1.5.110)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_n \frac{|\vec{p}_n|^2}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.111)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_n E_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.112)$$

$$= \frac{1}{3} \rho. \quad (1.5.113)$$

Dunque, un fluido relativistico è definito da:

$$p = \frac{1}{3} \rho \quad (1.5.114)$$

che è anche un'equazione di stato, del tipo (1.5.135), che in genere è della forma $p = w \rho$ e noi, infatti, abbiamo visto che nel caso newtoniano $w = 0$ e nel caso relativistico $w = 1/3$.

1.5.2 Esempi

Vediamo in questa breve sottosezione due esempi di ciò che abbiamo imparato riguardo il tensore energia impulso e le varie correnti e quantità conservate.

Esempio 1. In un sistema di riferimento in moto rispetto al fluido abbiamo la quadri-velocità espressa da (1.5.94). La componente T^{00} sarà:

$$T^{00} = p \eta^{00} + (p + \rho) u^0 u^0 \quad (1.5.115)$$

$$= -p + (p + \rho) \gamma^2 \quad (1.5.116)$$

$$= \gamma^2 (\rho + p \beta^2) \quad (1.5.117)$$

T^{00} è la densità d'energia del fluido. Dunque, abbiamo visto esplicitamente che un'osservatore in moto, noi, non misura ρ , come nel sistema comovente, ma una densità d'energia diversa. Immaginiamo di essere in una piscina. Se stiamo fermi rispetto alla piscina, prendiamo un dato volume e possiamo misurare la densità di massa dividendo la massa contenuta nel volume per il volume stesso. Però, se ci muoviamo, dato che nella direzione del moto le lunghezze sono contratte, la densità che assoceremo sarà diversa. Analogamente, come visto, la densità di energia che associate una data porzione di volume è diversa da quella stessa porzione di volume misurata dall'osservatore che comovente.

Abbiamo le altre componenti:

$$T^{i0} = p \eta^{i0} + (p + \rho) u^i u^0 \quad (1.5.118)$$

$$= \gamma^2 \beta^i (p + \rho) \quad (1.5.119)$$

in cui, il primo addendo è nullo perché η è diagonale. Questa è l'espressione dei flussi di energia nella direzione $i = 1, 2, 3$. Se ci muoviamo nella direzione 1, sia essa x per esempio, le componenti T^{i0} ci dice che il fluido ha un flusso di massa rispetto a noi. Essendo un osservatore inerziale "abbiamo l'aria in faccia".

Infine abbiamo i termini:

$$T^{ij} = p \delta_{ij} + \gamma^2 (p + \rho) v^i v^j \quad (1.5.120)$$

che ci mostra che non abbiamo più una pressione isotropa come nel caso in cui siamo a riposo con la piscina, ma generiamo dei termini che dipendono dal fatto che ci muoviamo rispetto alla piscina.

Esempio 2. Consideriamo il tensore energia impulso scritto in (1.5.96). Se ci mettiamo in moto avremo un tensore $T'^{\alpha\beta}$ che possiamo scrivere con la trasformazione di Lorentz:

$$T^{\alpha\beta} \xrightarrow{\text{T.L.}} T'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta T^{\gamma\delta} \quad (1.5.121)$$

se le trasformazioni di Lorentz le facciamo in una direzione arbitraria, allora:

$$\Lambda^0_0 = \gamma \quad (1.5.122)$$

$$\Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = \gamma \beta^i \quad (1.5.123)$$

$$\Lambda^i_j = \delta^i_j + v^i v^j \frac{\gamma - 1}{v^2}. \quad (1.5.124)$$

Se prendiamo tale trasformazione di Lorentz e $T^{\alpha\beta} = \tilde{T}^{\alpha\beta}$ quello del sistema comovente, si può dimostrare che la $T'^{\alpha\beta}$ ha la forma del tensore energia-impulso che abbiamo descritto in precedenza.

Esempio 3 Possiamo definire un'ulteriore quantità: la densità in numero di queste particelle. In questo contesto lo posso scrivere come:

$$N^\alpha = n u^\alpha \quad (1.5.125)$$

dove $n = N/V$ è la densità in numero misurata nel sistema di riposo e indichiamo N^α come la versione covariante della densità in numero. Nel sistema comovente avremo:

$$\tilde{N}^\alpha = n \tilde{u}^\alpha \quad (1.5.126)$$

$$= (n, \vec{0}) \quad (1.5.127)$$

che ci dice che nel sistema comovente la densità in numero va a finire nella componente temporale di un quadri vettore e non ho flussi della energia. Invece, in un sistema in moto:

$$N^\alpha = n u^\alpha \quad (1.5.128)$$

$$= (\gamma, \gamma \vec{v}) \quad (1.5.129)$$

$$= (n \gamma, n \gamma \vec{v}) \quad (1.5.130)$$

dunque, la densità in numero aumenta di un fattore γ , poiché nella direzione del moto le lunghezze sono contratte, quindi il volume si contrae (come puoi vedere nella figura 1.29), e associando ad esso le stesse particelle ottengo una densità in numero più grande.

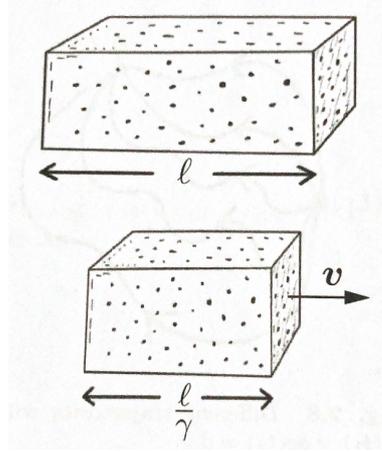


Figura 1.29: Contrazione dei volumi.

Si noti che in forma microscopica si ha:

$$N^\alpha = \sum_n \frac{dx_n^\alpha}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (1.5.131)$$

quando $\alpha = 0$ otteniamo proprio la densità in numero. Quando invece prendiamo le componenti spaziali $\alpha = i$ abbiamo solo la loro velocità.

Ora, in un sistema isolato anche la densità in numero di particelle soddisfa l'equazione di continuità:

$$\partial_\alpha N^\alpha = 0 \quad (1.5.132)$$

che esprime la conservazione del numero di particelle. Infatti se prendiamo l'integrale:

$$\int d^3x N^0 = \sum_n (1) = N_{tot} \quad (1.5.133)$$

e se facciamo lo stesso ragionamento che abbiamo fatto inizialmente per la carica totale otteniamo:

$$\frac{dN_{tot}}{dt} = 0. \quad (1.5.134)$$

Esempio 4. Il tensore energia-impulso contiene la densità e la pressione del fluido, che è univocamente definito se definiamo una equazione di stato:

$$p = p(\rho). \quad (1.5.135)$$

Definito un fluido attraverso la sua equazione di stato (1.5.135), se questo fluido è isolato, allora l'insieme delle equazioni (1.5.72) e (1.5.135) definisce il comportamento del fluido stesso e si pone alla base di quella che chiamiamo **fluidodinamica relativistica**. Vedremo un esempio di questo con la

presenza di un campo gravitazionale, in quel caso parleremo di fluidodinamica relativistica in cui c'è anche il campo gravitazionale, ma ovviamente per poterlo fare dobbiamo costruire la teoria.

Appendici

Appendice A

Convenzioni varietà

Vediamo in questa brevissima Appendice alcune convenzioni, ma soprattutto definizioni, che si utilizzano tipicamente in Geometria Differenziale, o in Relatività Generale, quando si parla di varietà e tensori metrici.

Quando il tensore metrico, in uno spazio N dimensionale è della forma:

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, -1, \dots, -1, +1, +1, \dots, +1, 0, \dots, 0)$$

allora si dice che la metrica è nella **forma canonica**, ovvero, in una forma in cui è diagonale. Se lo spazio è piatto è sempre possibile avere un sistema di riferimento in cui i coefficienti sono tutti costanti, in particolare sono tutti $+1, 0, -1$.

Chiamiamo **segnatura** della metrica il numero di autovalori rispettivamente positivi, negativi o nulli. Per esempio, lo spazio Euclideo in tre dimensioni ha segnatura $(+, +, +)$, mentre lo spazio di Minkowski ha una segnatura $(-, +, +, +)$.

Diciamo che la metrica è **degenere** se ci sono degli autovalori nulli.

Riguardo gli indici del tensore metrico. Si utilizzano indici latini i, j, k, l, \dots per indicare gli indici di *coordinate di tipo spazio*; nel canonico spazio-tempo quadridimensionale \mathbb{M}^4 saranno gli indici $1, 2, 3$.

Si usano indici greci, con le prime lettere dell'alfabeto, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ per indicare gli indici che corrono su tutte e quattro le *coordinate dello spaziotempo di Minkowski* (della Relatività Speciale). In particolare $\alpha = 0$ è relativo alla coordinata tempo e $\alpha = 1, 2, 3$ è per le coordinate di tipo spazio.

Gli indici greci, ma con lettere un po' più alte nell'ordinamento dell'alfabeto, per indicare sempre coordinate spaziotemporali, ma per uno spazio-tempo *curvo*. Quindi per esempio diremo:

η_{ij}	:	tensore metrico dello spazio euclideo
$\eta_{\alpha\beta}$:	tensore metrico dello spazio di Minkowski
$g_{\mu\nu}$:	tensore metrico dello spaziotempo curvo.

A.1 Segni

È importante anche tenere a mente che ci sono varie definizioni del tensore metrico di Minkowski, che differiscono solo per un segno. Infatti, possiamo scrivere, in modo equivalente:

$$\begin{aligned} A : \quad & \text{diag}(\eta) = (-1, +1, +1, +1) \\ B : \quad & \text{diag}(\eta) = (+1, -1, -1, -1) \end{aligned}$$

che portano a:

$$\begin{aligned} A : \quad & ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ B : \quad & ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \end{aligned}$$

In particolare, la scelta A è quella che solitamente si fa in Relatività Generale, mentre la scelta B è quella che si utilizza in Teoria Quantistica dei Campi.

Notiamo anche che pure il tensore di Riemann e le equazioni di Einstein possono essere definiti in due modi differenti, che differiscono per un segno.

A.2 Varietà

Segnatura	Piatto	Curvo
Tutti + (o -)	Euclideo	Riemanniano
Un - (o +) e gli altri + (o -)	Minkowski	Pseudo-Riemanniano
$(n -, m +)$	Pseudo-Euclideo	Generico

Bibliografia

- [1] V. Barone. *Relatività*. Bollati Boringhieri, 2004. ISBN: 9788833957579.
- [2] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.
- [3] Tom Lancaster e Stephen J. Blundell. *General Relativity for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 2025.
- [4] Bernard F. Schutz. *A First Course In General Relativity*. Cambridge Univ. Pr., 1985.
- [5] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley e Sons, 1972.