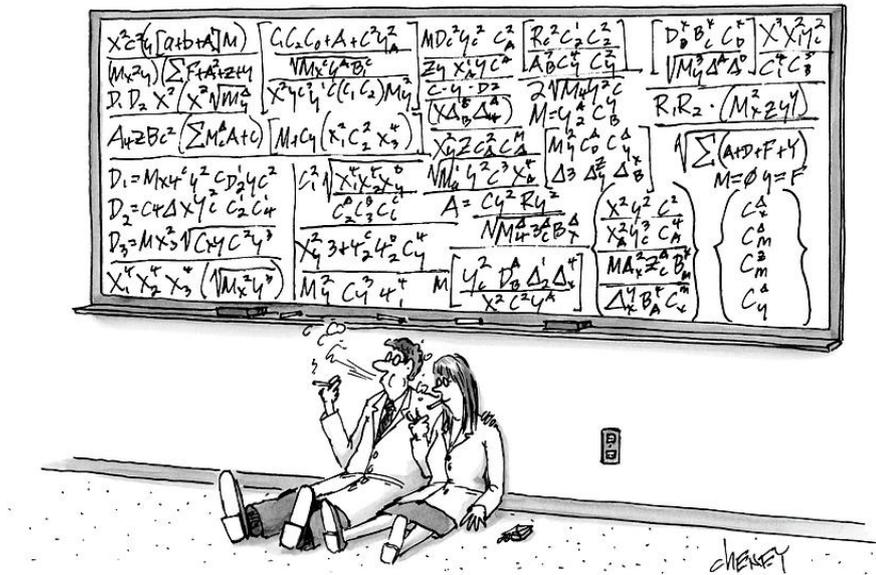


# Gemme di Teoria dei Gruppi

Gabriele Cembalo

A.A. -



Università degli Studi di Torino  
Dipartimento di Fisica  
Via Giuria, 1, Torino (TO)

## Informazioni legali

---

Questo materiale è una rielaborazione personale del corso di **Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi e Meccanica Quantistica 1** tenuto dalla **Prof.ssa M. Boglione** e i **prof. L. Magnea** e **S. D. Badger** presso l'**Università degli Studi di Torino**.

Il contenuto riportato non rappresenta materiale ufficiale del docente né dell'università, e può contenere interpretazioni soggettive o errori. Tutti i diritti su slide, dispense o altri materiali forniti dal docente restano riservati ai rispettivi autori e non sono inclusi in questi appunti. Questi appunti sono condivisi a solo scopo didattico e divulgativo, senza fini di lucro, e sono destinati a supportare lo studio personale degli studenti.

È distribuito con licenza **Creative Commons Attribution - Non Commercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0)**.

Puoi copiarlo, distribuirlo e modificarlo, **a patto di attribuirne la paternità e non usarlo a fini commerciali**.

Per maggiori informazioni sulla licenza:  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.it>

We may as well cut out group theory. That is a theory that will never be of any use in physics.

James Jeans



# Prefazione

In questo documento voglio raccorgiere le mie note riguardo i concetti di "**Teoria dei Gruppi**" utili a tutti (o quasi) i corsi di Fisica che si frequentano al corso di Laurea in *Fisica Teorica*. Ho raccolto, in questo documento che ho deciso di chiamare **gemme** forse in modo un po' arrogante, tutte le nozioni che durante i corsi di Teoria Quantistica dei Campi si sono rivelate essenziali per una comprensione della teoria. Per i motivi elencati le note qui raccolte risultano uguali a quelle già presenti nel file di *Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi* e *Meccanica Quantistica 1*, seguiti all'*Università degli studi di Torino* e svolti rispettivamente dalla professoressa M. Boglione e dai professori L. Magnea e S. Badger.

Questi appunti sono un bricolage degli appunti presi in aula di due diversi corsi, quindi la fonte principale sono le note originali. Durante i corsi sono stati consigliati diversi libri (indicati in Bibliografia), cercherò di indicare i vari riferimenti bibliografici all'inizio di ogni capitolo (più o meno utili a seconda della volontà di approfondire).

Il documento è così strutturato: nel capitolo §1 si vedono le convenzioni usuali nella teoria dei gruppi; nel capitolo §2 si parla di leggi di trasformazioni, di simmetrie e, in modo forse nascosto, di gruppi nell'ambito della Meccanica Quantistica. Questo capitolo è il più "pratico" sotto un certo punto di vista e ho deciso di metterlo come primo capitolo vero e proprio perché penso possa dare un senso a tutto quello che andremo a fare nel corso degli appunti, però tenete a mente può essere letto anche in un secondo momento, concentrandosi prima sulle definizioni e nozioni base. Nel capitolo §3 sono raccolte tutte le definizioni e nozioni fondamentali della teoria dei gruppi, oltre allo studio dettagliato del gruppo di Lorentz e di Poincaré (essenziali nella QFT).

Chiaramente sono da intendere come degli appunti personali scritti in bella, eventuali sviste, errori o inesattezze sono dovute alla mia ignoranza, ma soprattutto ho scritto questi appunti in modo da "*spiegare*" a me stesso l'argomento, quindi alcune parti potrebbero sembrare troppo prolisse o troppo superficiali per alcuni. In ogni caso fa piacere se possono aiutare

qualcun'altro. Spero in ogni caso di esser riuscito a scrivere un documento chiaro e ben strutturato.

Alcune volte posso non far riferimento ad un particolare testo o corso passato, in questi casi mi sto riferendo ai MIEI appunti riguardanti quell'argomento. Una mia collezione di appunti è presente nella mia pagina personale di GitHub: [gCembalo.github.io](https://github.com/gCembalo).

Qualsiasi errore/refuso può essere inviato alla mia mail personale: [gabriele.cembalo02@gmail.com](mailto:gabriele.cembalo02@gmail.com).

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione e convenzioni</b>	<b>1</b>
1.1	Notazioni	1
1.2	Gruppo $\mathbb{Z}_2$	2
<b>2</b>	<b>Trasformazioni, simmetrie e leggi di conservazione</b>	<b>3</b>
2.1	Proprietà di trasformazione dei campi classici	3
2.1.1	Traslazioni in $d=1$	4
2.1.2	Rotazioni in 3 dimensioni	5
2.1.3	Rotazione di un campo vettoriale	7
2.2	Il caso quantistico: trasformazione delle funzioni d'onda	9
2.3	Trasformazione degli operatori	11
2.4	Simmetrie e leggi di conservazione in Meccanica Quantistica	14
2.4.1	Esempi ed applicazioni	16
2.5	Traslazioni nel tempo	22
2.6	Descrizioni di Schrodinger, Heisenberg e di interazione	23
<b>3</b>	<b>Gemme di teoria dei gruppi</b>	<b>27</b>
3.1	Richiami di Relatività Speciale e algebra tensoriale	27
3.1.1	Quadrivettori e calcolo tensoriale	30
3.1.2	Considerazioni su oggetti simmetrici, antisimmetrici	31
3.2	Basic facts about Lie algebras	32
3.3	Alcuni esempi di gruppi di Lie rilevanti in Fisica	42
3.3.1	Il gruppo $SO(n)$	42
3.3.2	Il gruppo $SU(n)$	45
3.3.3	Altri esempi rilevanti	49
3.4	Il gruppo di Lorentz	51
3.4.1	Trasformazioni di Lorentz	51
3.4.2	Generatori e algebra del gruppo di Lorentz	56
3.4.3	Operatori di Casimir del gruppo di Lorentz	59
3.4.4	L'algebra del gruppo di Lorentz fattorizza nel prodotto tensoriale di due sottoalgebre indipendenti	60
3.4.5	Gruppo unimodulare $SL(2, \mathbb{C})$	61
3.4.6	Rappresentazione scalare, spinoriale e vettoriale	63

---

3.4.7	Teorema di Wigner e regola di superselezione . . . . .	65
3.5	Il gruppo di Poincaré . . . . .	67
3.5.1	Algebra del gruppo di Poincaré . . . . .	68
3.5.2	Casimir del gruppo di Poincaré . . . . .	70
3.5.3	Interpretazione fisica del vettore di Pauli-Lubanski . . . . .	71
3.5.4	Piccolo gruppo . . . . .	74
3.6	Schema riassuntivo gruppi . . . . .	76
	<b>Appendici</b>	<b>78</b>
<b>A</b>	<b>Unità naturali</b>	<b>81</b>
<b>B</b>	<b>Complementi di Relatività Speciale</b>	<b>83</b>
B.1	Legame tra rapidità, massa di riposo ed energia . . . . .	83
B.2	Generatori del gruppo di Lorentz . . . . .	84
	<b>Bibliografia</b>	<b>86</b>



# Capitolo 1

## Introduzione e convenzioni

Potremmo chiederci perché è importante la teoria dei gruppi?

Come sappiamo, a delle leggi di invarianza corrispondono delle quantità conservate. Le leggi di invarianza appartengono a dei gruppi (formano un gruppo) e per ciò hanno una serie di proprietà che ci tornano utili e che ci semplificano le cose. Si utilizza la teoria dei gruppi per trattare le invarianze di una specifica teoria.

Sarà fondamentale ricordare, o studiare da capo, come sono fatti gli operatori (le matrici) legati a specifiche trasformazioni (ad esempio trasformazioni di Lorentz o Poincaré). In Meccanica Quantistica avevamo visto, ad esempio, che il generatore delle traslazioni nello spazio era l'impulso, nel tempo era l'hamiltoniana, invece, il generatore delle rotazioni erano rappresentate dagli operatori di momento angolare  $J_i$ . Vedremo che in Relatività Speciale le trasformazioni di Lorentz sono rotazioni (spaziali) e boost rappresentate rispettivamente da  $\Lambda^\mu_\nu$  e dalle matrici  $K$  (con algebra simile a quella dei momenti angolari).

Vediamo prima di tutto le notazioni usualmente utilizzate e un primo esempio, semplice, di gruppo.

### 1.1 Notazioni

- **G** : generale.
- **S** : speciale, ovvero, un gruppo in cui il determinante della rappresentazione matriciale di un generico elemento è uguale a 1.
- **L** : lineare, ovvero, il generico elemento agisce su uno spazio lineare.
- **O** : ortogonale, ovvero,  $G^T G = \mathbb{1}$ , e sono gruppi che garantiscono la conservazione del prodotto scalare.

- **R** : nella rappresentazione matriciale di un generico elemento ci sono solo numeri reali.
- **C** : nella rappresentazione matriciale di un generico elemento vi sono soltanto numeri complessi.
- **U** : il generico elemento è unitario, ovvero,  $G^\dagger G = \mathbb{1}$ .
- **(n)** : indica la dimensione dello spazio  $\mathbb{R}^n$ , su cui agisce la rappresentazione fondamentale. Per spazi a metrica non definita si ha la notazione **(m,n)**, dove nella metrica avremo  $m$  segni negativi ed  $n$  positivi (o viceversa a seconda della convenzione).

## 1.2 Gruppo $\mathbb{Z}_2$

Viene chiamato **gruppo degli interi modulo 2** i cui elementi sono:

$$\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\} \quad (1.2.1)$$

ed è un gruppo abeliano.

L'utilità del gruppo  $\mathbb{Z}_2$  risiede anche nella trattazione dei gruppi di Lie. L'omeomorfismo:

$$SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow SO(3, 1) \quad (1.2.2)$$

è due ad 1, ovvero, ogni elemento di  $SO(3, 1)$  ha due preimmagini in  $SL(2, \mathbb{C})$ . Il nucleo dell'omeomorfismo è isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ , ed è generato dall'elemento  $-1 \in SL(2, \mathbb{C})$ , poichè:

$$(-1) \cdot (-1) = \mathbb{1} \quad \text{e} \quad (-1) \rightarrow \text{identità in } SO(3, 1). \quad (1.2.3)$$

Quindi diciamo:

$$SO(3, 1) \cong \frac{SL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}. \quad (1.2.4)$$

Similmente, sappiamo che  $SU(2)$  è un doppio ricoprimento di  $SO(3)$ :

$$SO(3) \cong \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2}. \quad (1.2.5)$$

in cui anche qua il nucleo è  $\mathbb{Z}_2$  generato da  $(-1)$ .

Nella teoria delle rappresentazioni,  $\mathbb{Z}_2$  spesso indica una simmetria discreta, come parità o cambio di segno, o anche lo spin half (dove ruotare di  $2\pi$  cambia il segno dello spinore, vedi la sezione §3.3).

## Capitolo 2

# Trasformazioni, simmetrie e leggi di conservazione

In questo capitolo cerchiamo di capire come si modificano le leggi di simmetria e le leggi di trasformazione degli operatori passando dalla Meccanica Classica alla Meccanica Quantistica. Il capitolo sarà organizzato con una parte iniziale in cui vediamo le leggi di trasformazione degli operatori, poi passeremo a parlare di simmetrie e leggi di conservazione così da arrivare alla parte finale riguardante le diverse rappresentazioni che diamo di un sistema fisico.

### 2.1 Proprietà di trasformazione dei campi classici

Prendiamo un generico campo scalare in  $\mathbb{R}^3$ ,  $\phi = \phi(x, y, z)$  e effettuiamo una generica trasformazione di coordinate  $\vec{x}' = \vec{x}'(\vec{x})$ , ovvero facciamo:

$$x' = x'(x, y, z) \quad , \quad y' = y'(x, y, z) \quad , \quad z' = z'(x, y, z)$$

la domanda più spontanea che ci possiamo fare è: come si trasforma il campo  $\phi$  per effetto di questa trasformazione? La risposta è: si trasforma in modo che

$$\phi'(x', y', z') = \phi(x, y, z) \tag{2.1.1}$$

che vuol dire: la nuova funzione valutata nello stesso punto fisico, ma con diverse coordinate ha stesso valore della funzione valutata con le vecchie coordinate.

Ora però per capire come scrivere questa trasformazione e quindi come caratterizzare  $\phi'$  in termini di  $\phi$ , devo valutarle con gli stessi argomenti (mi chiedo come differisce  $\phi'(x)$  da  $\phi(x)$ ). In una dimensione:

$$x' = f(x) \quad , \quad \phi'(x') = \phi(x) \implies \phi'(f(x)) = \phi(x)$$

però l'argomento delle funzioni lo scelgo io. Scelgo di applicarci l'operatore inverso (in senso funzionale, ossia  $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ ), per cui ho

$$\phi'(x) = \phi(f^{-1}(x)) \implies \boxed{\phi' = \phi \circ f^{-1}} \quad (2.1.2)$$

e abbiamo dunque raggiunto il nostro scopo e in più nota che quello che abbiamo ottenuto è valido per qualsiasi trasformazione: lineare o no, continua o discreta, e anche in dimensione generica.

### 2.1.1 Traslazioni in $d=1$

Prendiamo

$$f_a(x) = x + a \quad (x' = x + a \implies x = x' - a) \quad (2.1.3)$$

per cui se applichiamo il risultato trovato appena sopra abbiamo:

$$\phi'(x + a) = \phi(x) \implies \phi'(x) = \phi(x - a)$$

Vediamo i vari casi. Se **a infinitesimo**:

$$\phi(x - a) = \phi(x) - a \frac{d\phi}{dx} + O(a^2) \implies \phi'(x) - \phi(x) = -a \frac{d\phi}{dx}$$

Se **a finito** e  $\phi$  differenziabile:

$$\phi'(x) = \phi(x - a) = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-a)^n \frac{d^n}{dx^n} \right] \phi(x) \equiv e^{-a \frac{d}{dx}} \phi(x)$$

Se i campi appartengono ad uno spazio funzionale normato, per esempio  $L^2(\mathbb{R})$ , si può definire un **operatore di traslazione**  $T(a)$ :

$$\phi'(x) = T(a)\phi(x) = e^{-a \frac{d}{dx}} \phi(x) \quad (2.1.4)$$

se abbiamo l'ordinario prodotto scalare in  $L^2(\mathbb{R})$ , allora  $\frac{d}{dx}$  è anti-hermitiano, per cui si vede subito che  $T(a)$  è un operatore unitario<sup>1</sup> (preserva le norme):

$$(T(a))^{-1} = T(-a) = (T(a))^\dagger \quad (2.1.5)$$

poiché possiamo scrivere<sup>2</sup>

$$(T(a))^\dagger = \left( e^{-a \frac{d}{dx}} \right)^\dagger = e^{-a \left( \frac{d}{dx} \right)^\dagger} = e^{a \frac{d}{dx}}$$

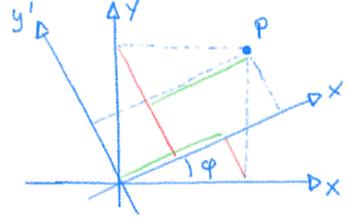
<sup>1</sup>Vuole sostanzialmente dire che l'inverso di una traslazione in avanti è una traslazione indietro.

<sup>2</sup>Qua vediamo il primo caso di operatore definito tramite esponenziale, che attenzione è una definizione per serie di potenze. Per ora prendilo per buono, nel caso quantistico vedremo come applicare una definizione per serie ad una funzione e fare effettivamente i calcoli.

### 2.1.2 Rotazioni in 3 dimensioni

Consideriamo ad esempio una rotazione attorno l'asse  $z$ : per un  $\phi$  finito

$$\begin{cases} x' = x \cos \phi + y \sin \phi \\ y' = -x \sin \phi + y \cos \phi \\ z' = z \end{cases}$$



possiamo scrivere

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv R_z(\phi) \vec{x} \quad (2.1.6)$$

da cui possiamo vedere che

$$R_z^{-1}(\phi) = R_z(-\phi) = R_z^T(\phi)$$

$R_z$  è ortogonale. Per un  $\phi$  **infinitesimo** scriviamo:

$$R_z(\phi) \sim \begin{pmatrix} 1 & \phi & 0 \\ -\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & \phi & 0 \\ -\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{1} + \phi r$$

dove abbiamo scritto un generico generatore della rotazione

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.7)$$

che è una matrice antisimmetrica (anti-hermitiana).

Ora, proviamo effettivamente a ruotare una funzione di  $\vec{x}$ . In coordinate polari sferiche una rotazione intorno all'asse  $z$  è una traslazione della coordinata  $\phi$  di un certo angolo  $\delta\phi$  (che posso fare se applico l'operatore  $R$ , che come scoprirò, è un operatore differenziale):

$$R_z(\delta\phi)\Phi(r, \theta, \phi) \equiv \Phi'(r, \theta, \phi) = \Phi(r, \theta, \phi + \delta\phi) \quad (2.1.8)$$

ci aspettiamo di trovare un'espressione dell'operatore  $R_z$  simile a quella trovata per  $T$ , 2.1.4, ma con una derivata in  $\phi$  piuttostoché in  $x$ . Verifichiamo il un caso particolare: Sia

$$\Phi(x, y, z) = x y z e^{-r^2}$$

per cui

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, z) &= xyz e^{-r^2} = (x' \cos \delta\phi - y \sin \delta\phi)(x' \sin \delta\phi + y' \cos \delta\phi) z' r^{-r'^2} \\
&= [(x'^2 - y'^2) \sin \delta\phi \cos \delta\phi + x' y' (\cos^2 \delta\phi - \sin^2 \delta\phi)] z' e^{-r'^2} \\
&= \left( \frac{x'^2 - y'^2}{2} \sin 2\delta\phi + x' y' \cos 2\delta\phi \right) z' e^{-r'^2} \\
&\equiv \Phi'(x', y', z')
\end{aligned}$$

a questo punto per vedere come si trasforma devo calcolare  $\Phi'$  in  $(x, y, z)$  e poi sottrarre  $\Phi$ . Dunque

$$\begin{aligned}
\Phi'(x, y, z) &= \left( \frac{x^2 - y^2}{2} \sin 2\delta\phi + xy \cos 2\delta\phi \right) z e^{-r^2} \\
&\xrightarrow{\delta\phi \rightarrow 0} [(x^2 - y^2)\delta\phi + xy] z e^{-r^2} \\
&= \Phi(x, y, z) + \delta\phi \frac{x^2 - y^2}{xy} \Phi(x, y, z) \\
&\equiv (\mathbb{1} + \delta\phi \tilde{r}) \Phi
\end{aligned}$$

ma dalle cose imparate sul momento angolare possiamo ricordarci che<sup>3</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial\phi} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

per cui possiamo osservare che

$$\delta\Phi(x, y, z) \equiv \Phi'(x, y, z) - \Phi(x, y, z) = \delta\phi \frac{x^2 + y^2}{xy} \Phi(x, y, z) \quad (2.1.9)$$

mentre

$$\begin{aligned}
\left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi(x, y, z) &= \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) xyz e^{-r^2} \\
&= x(xze^{-r^2} - 2yxyze^{-r^2}) - y(yze^{-r^2} - 2xxyze^{-r^2}) \\
&= (x^2 - y^2)ze^{-r^2} \\
&= \frac{x^2 + y^2}{xy} \Phi(x, y, z)
\end{aligned}$$

dunque possiamo vedere

$$\tilde{r} = \frac{\partial}{\partial\phi} \quad (2.1.10)$$

per cui l'operatore è<sup>4</sup>

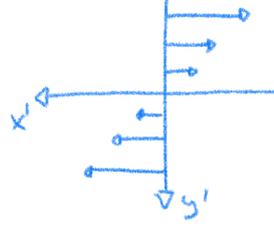
$$R_z(\delta\phi) = \mathbb{1} - \delta\phi \frac{\partial}{\partial\phi} + o(\delta\phi^2) \quad (2.1.11)$$

<sup>3</sup>Non è altro che la definizione differenziale di  $L_z$  senza il pezzo  $(-i\hbar)$

<sup>4</sup>Nota che c'è il segno meno in analogia con  $\frac{\partial}{\partial x}$



$$\phi = \pi \implies \vec{A}' = \begin{pmatrix} y' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



quindi verifichiamo che sono lo stesso campo con cui siamo partiti. Per cui capiamo anche che ruotare le componenti, oltre che le coordinate, è indispensabile per preservare la richiesta Fisica:

$$\vec{A}'(\vec{x}') = \vec{A}(\vec{x}) \quad (2.1.12)$$

analoga a quella del campo scalare.

Vediamo che nel caso infinitesimo (tenendo i termini lineari in  $\phi$ ):

$$\vec{A}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \sin \phi \cos \phi + y \cos^2 \phi \\ -x \sin^2 \phi - y \sin \phi \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \phi x + y \\ -\phi y \\ 0 \end{pmatrix}$$

dunque vedo

$$\delta \vec{A}(\vec{x}) \equiv \vec{A}'(\vec{x}) - \vec{A}(\vec{x}) = \phi \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

e questa variazione ha due parti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \vec{A} = \phi(x\partial_y - y\partial_x)\vec{A} = \phi(x\partial_y - y\partial_x) \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \delta_2 \vec{A} = \phi r \vec{A} = \phi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\phi y \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (2.1.13)$$

dove  $r$  è la matrice 2.1.7 che abbiamo definito sopra.

Riassumiamo un attimo cosa abbiamo trovato fin'ora. Sotto l'azione di una rotazione, un campo vettoriale subisce due trasformazioni: la dipendenza dalle coordinate viene ruotata, e le componenti vengono rimescolate

$$\delta \vec{A}(\vec{x}) = \phi \left( \frac{\partial}{\partial \phi} + r \right) \vec{A}(\vec{x}) \quad (2.1.14)$$

Visto che  $\frac{\partial}{\partial \phi}$  genera le rotazioni e non è altro che la componente  $z$  del momento angolare, allora, qualunque cosa che genera una rotazione la chiamo momento angolare, ma facendo qualche differenza sui diversi termini. Nell'espressione 2.1.14 il pezzo  $\frac{\partial}{\partial \phi}$  lo chiamiamo appunto **momento angolare orbitale**, e coinvolge solo la dipendenza funzionale dalle coordinate, invece, il termine  $r$  lo chiamiamo **momento angolare di spin**, e coinvolge solo una rotazione delle componenti.

**Osservazione** Abbiamo trattato solo il caso di rotazioni intorno all'asse  $z$ , ma la covarianza sotto rotazioni implica l'equivalenza di tutti gli assi di rotazione. Negli altri casi si devono trovare operatori (e matrici) che chiudono l'algebra  $[J_i, J_z] = i\varepsilon_{ijk}J_k$ .

## 2.2 Il caso quantistico: trasformazione delle funzioni d'onda

Sotto l'azione di trasformazioni di coordinate le funzioni d'onda  $\Psi(x, y, z)$  della Meccanica Quantistica si trasformano come campi scalari (o come vedremo, come campi a più componenti). È naturale tuttavia esprimere queste leggi di conservazione in termini di operatori quantistici, leggermente aggiustati a partire dal caso classico.

**Traslazioni** : in una dimensione

$$\Psi'(x) = T(a)\Psi(x) = e^{-a\frac{d}{dx}}\Psi(x) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}a\hat{p}_x\right\}\Psi(x)$$

in 3 dimensioni:

$$\Psi'(\vec{r}) = T(\vec{a})\Psi(\vec{r}) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\vec{a} \cdot \vec{p}\right\}\Psi(\vec{r}) \quad (2.2.1)$$

**Rotazioni** (per funzioni d'onda scalari) per rotazioni intorno all'asse  $z$ :

$$\Psi'(r, \theta, \phi) = R_z(\delta\phi)\Psi(r, \theta, \phi) = e^{-\delta\phi\frac{\partial}{\partial \phi}}\Psi(r, \theta, \phi) \quad (2.2.2)$$

$$= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\delta\phi L_z\right\}\Psi(r, \theta, \phi) \quad (2.2.3)$$

Per una generica rotazione di un angolo  $\delta\phi$  intorno ad un asse arbitrario  $\hat{n}$ , si noti che  $L_z = \hat{n}_z \cdot \vec{L}$ , per cui per covarianza allora

$$\Psi'(r, \theta, \phi) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\delta\phi \hat{n} \cdot \vec{L}\right\}\Psi(r, \theta, \phi) \quad (2.2.4)$$

diciamo che: l'impulso  $\vec{p}$  è il generatore delle traslazioni e il momento angolare  $\vec{L}$  è il generatore delle rotazioni.

### Osservazioni

- Se ad esempio in una rotazione generica avessimo  $\hat{n} = (1, 1, 0)$ , allora otterremmo  $\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\delta\phi(L_x + L_y)\right\}$ , che però non potremmo spezzare in due esponenziali distinti poiché le osservabili  $L_x$  ed  $L_y$  non commutano.
- Queste affermazioni fatte fin'ora sono vere anche per campi scalari classici, e, in forma leggermente diversa anche per campi quantistici e relativistici. La forma esplicita delle relative equazioni richiede una conoscenza della dinamica (Teorema di Emmy Noether).

**Rotazioni per funzioni d'onda multi-componenti** La questione se esistano sistemi (di particelle) quantistici con funzioni d'onda a più componenti è una questione empirica. L'esistenza di sistemi (particelle) con spin  $1/2$  ad esempio è confermato dall'esperimento di Stern-Gerlach. L'esistenza in natura di campi vettoriali ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) suggerisce che questo sia effettivamente possibile: se a questi campi associamo particelle (fotoni), ci si può attendere che le corrispondenti funzioni d'onda siano *vettori*. La situazione reale è però più complicata, ma non dissimile: siccome i campi E.M. sono intrinsecamente relativistici, si dovrà parlare di quadrivettori (ai quali imporre vincoli dovuti all'invarianza di gauge). In generale per particelle descritte da  $\Psi$  (campo scalare in  $\mathbb{R}^3$ ) a più componenti, ci aspettiamo che:

$$\Psi'_\alpha(r, \theta, \phi) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\delta\phi\hat{n}\cdot\vec{L}\right\} \left(\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\delta\phi\hat{n}\cdot\vec{S}\right\}\right)_{\alpha\beta} \Psi_\beta(r, \theta, \phi) \quad (2.2.5)$$

in cui  $\alpha, \beta = 1, \dots, 2j+1$ . Sappiamo infatti dal calcolo generale che esistono operatori  $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$  che rappresentano le rotazioni (hanno la stessa algebra di  $\vec{L}$ ) e sono matrici  $(2j+1) \times (2j+1)$ ,  $\forall j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

### Osservazioni

- Scritto così sto assunto che gli operatori  $\vec{L}$  ed  $\vec{S}$  commutino tra loro.
- Il termine  $(\dots)_{\alpha\beta}$  è una matrice ottenuta facendo l'esponenziale di una matrice.

**Il caso di spin semi-intero** Si noti che, mentre il caso di spin=1 (3 componenti) presenta un'evidente analogia classica (particelle vettoriali), il caso di spin  $1/2$  (2 componenti) non ha alcun equivalente classico, ed è un fenomeno del tutto nuovo e puramente quantistico. Più in generale, lo spin intero ammette un'analogia classica, ma non è così per spin semi-intero. Per discorsi di questo tipo vedi le note di MQ1 riguardanti il momento angolare

di spin. Consideriamo appunto il caso di spin 1/2: abbiamo

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

$$S_i \equiv \frac{\hbar}{2} \sigma_i \quad / \quad [S_i, S_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} S_k \implies S^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \mathbb{1}_{2 \times 2} \quad (2.2.7)$$

notiamo ancora, che:

- Si tratta di matrici complesse ( $S_i$  hermitiani), dunque, anche partendo da una  $\Psi$  reale, la rotazione genera una  $\Psi$  complessa. Questo non ha senso per campi classici, ma non è un problema per funzioni d'onda.
- Una rotazione di  $2\pi$  produce un cambiamento di segno, infatti

$$R_z^{1/2}(2\pi) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} 2\pi S_z\right\} = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} 2\pi \frac{\hbar}{2} \sigma_z\right\} = \exp\{-i\pi \sigma_z\}$$

che porta a<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} \Psi'_1 \\ \Psi'_2 \end{pmatrix} = R_z^{1/2}(2\pi) \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \\ &= e^{-i\pi \sigma_z} \left[ \Psi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Psi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{-i\pi} \Psi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i\pi} \Psi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che di nuovo è inammissibile classicamente, ma quantisticamente possibile, dato che  $\Psi(\vec{r})$  e  $e^{i\alpha} \Psi(\vec{r})$  rappresentano lo stesso stato fisico. Si noti però che non stiamo introducendo funzioni d'onda a più valori, stiamo proprio osservando gli effetti di una trasformazione di coordinate su uno stato fisico.

## 2.3 Trasformazione degli operatori

Le leggi di trasformazione fin'ora enunciate per le funzioni d'onda (dunque per gli stati fisici) possono essere tradotte anche in leggi di trasformazione

<sup>5</sup>Attenzione che nella seconda riga abbiamo esplicitato la definizione di operatore definito come serie di potenze. Intendo dire (in tutti i casi in cui si ha una definizione di questo tipo) che l'operatore si, è definito nel modo scritto sopra, ma come si fa ad applicarlo ad una generica funzione? Si esplicita lo sviluppo in serie di potenze dell'esponenziale ( $\sum \dots$ ), così che quando lo si applica ad una generica funzione ogni termine della serie becca la funzione e produce un termine che farà parte di un successivo sviluppo in serie di potenze, che potrà essere di nuovo scritto in modo compatto come un altro esponenziale.

per gli operatori. Diamo una definizione di operatore trasformato.

Sia  $T$  un operatore di trasformazione ( $T(a), R_n(\phi), \dots$ ) che agisce sugli stati come:

$$T : |\alpha\rangle \mapsto |\alpha'\rangle \equiv T|\alpha\rangle \implies \langle\alpha'| = \langle\alpha|T^\dagger = \langle\alpha|T^{-1} \quad (2.3.1)$$

$T$  unitario. Allora dato un operatore  $Q$  definiamo l'operatore trasformato (per effetto dell'azione di  $T$ ),  $Q'$ , con la relazione<sup>6</sup>

$$\langle\alpha|Q'|\alpha\rangle \equiv \langle\alpha'|Q|\alpha'\rangle = \langle\alpha|T^\dagger Q T|\alpha\rangle \quad \forall |\alpha\rangle \quad (2.3.2)$$

$$\implies \boxed{Q' = T^\dagger Q T} \quad (2.3.3)$$

### Osservazioni

- Non è difficile passare al linguaggio delle funzioni d'onda. Prendiamo ad esempio le traslazioni  $T(a)$ . Allora

$$|\alpha\rangle \mapsto |\alpha'\rangle = T(a)|\alpha\rangle$$

quello che vorrei ottenere con le definizioni date è che se  $T(a)$  agisce su  $\Psi(x)$  mi dia  $\Psi(x - a)$ . Vediamo appunto

$$\begin{aligned} \langle x|\alpha'\rangle &= \Psi_{\alpha'}(x) \equiv \Psi'_\alpha(x) = \langle x|T(a)|\alpha\rangle \\ &= \int dy \langle x|T(a)|y\rangle \langle y|\alpha\rangle \\ &= \int dy \langle x|T(a)|y\rangle \Psi_\alpha(y) \\ &= \int dy \underbrace{\langle x|y+a\rangle}_{\delta(x-y-a)} \Psi_\alpha(y) \\ &= \Psi_\alpha(x - a) \end{aligned}$$

- Possiamo notare che

$$\langle\alpha'|Q|\alpha'\rangle \neq \langle\alpha|Q|\alpha\rangle \quad (2.3.4)$$

consideriamo per esempio,  $Q \rightarrow \hat{x}$ ,  $\Psi_\alpha(x) = N \exp\{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2\}$  e di nuovo le traslazioni  $T(a)$ , allora vediamo

$$\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = 0$$

---

<sup>6</sup>Nota che nell'ultimo passaggio di 2.3.2 puoi interpretare  $T$  e  $T^\dagger$  che agiscono a sinistra o destra (rispettivamente) sugli stati, oppure entrambi che agiscono sull'operatore. Questa doppia interpretazione mi dice soltanto che il valor medio nello stato originario dell'operatore traslato è uguale al valor medio dello stato trasformato dell'operatore originario. Questa duplice interpretazione tornerà nel seguito del capitolo quando parleremo dell'interpretazione di Heisenberg e di Schrodinger (vedi sezione §2.6).

poiché non è altro che il valor medio della gaussiana nello stato fondamentale, invece

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(x) &\equiv T(a)\Psi_\alpha(x) = \Psi_\alpha(x-a) = N \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2(x-a)^2\right\} \\ \implies \langle \alpha' | \hat{x} | \alpha' \rangle &= a\end{aligned}$$

- Nel caso delle traslazioni è facile ricavare il risultato in generale. Dalla definizione scriviamo:

$$\hat{x}' \equiv T^\dagger(a)\hat{x}T(a) = T^{-1}\hat{x}T(a) = T(-a)\hat{x}T(a)$$

che mi dice

$$\begin{aligned}\implies \hat{x}'\Psi(x) &= T(-a)\hat{x}T(a)\Psi(x) = T(-a)\hat{x}\Psi(x-a) \\ &= T(-a)\left(x\Psi(x-a)\right) = (x+a)\Psi(x)\end{aligned}$$

però

$$\hat{x}'\Psi(x) = (x+a)\Psi(x) \quad \forall \Psi \implies \hat{x}' = \hat{x} + a$$

come prevedibile.

- Sempre dalla definizione è facile ricavare che l'operatore  $\hat{p}$  è invariante per traslazioni<sup>7</sup>, ossia  $\hat{p}' = \hat{p}$ . Infatti

$$\begin{aligned}\langle \alpha | \hat{p}' | \alpha \rangle &= \langle \alpha' | \hat{p} | \alpha' \rangle = \int dx \Psi_\alpha'^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \Psi_\alpha'(x) \\ &= \int dx \Psi_\alpha^*(x-a) \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \Psi_\alpha(x-a) \\ &\text{cambio variabile: } y = x-a \\ &= \int dy \Psi_\alpha^*(y) \left(-i\hbar \frac{d}{dy}\right) \Psi_\alpha(y) \\ &= \langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle \\ \implies \hat{p}' &= \hat{p}\end{aligned}$$

La definizione di operatore trasformato è utile per definire in modo conciso ed efficiente che cos'è una simmetria.

<sup>7</sup>Nota che avrei anche potuto vederlo da:

$$\hat{p}' = T^\dagger(a)\hat{p}T(a) = e^{-\frac{i}{\hbar}a\hat{p}}\hat{p}e^{\frac{i}{\hbar}a\hat{p}}$$

ma sapendo che  $\hat{p}$  commuta con se stesso e che  $T^\dagger(a)T(a) = 1$ , allora ho  $\hat{p}' = \hat{p}$

## 2.4 Simmetrie e leggi di conservazione in Meccanica Quantistica

Il profondo legame tra simmetrie e leggi di conservazione è presente in tutta la Fisica, meccanica classica, QFT, ma in Meccanica Quantistica questo legame è particolarmente chiaro. Vediamo le definizioni.

**Simmetria** Sia  $S$  un operatore che implementa sugli stati fisici (sulle funzioni d'onda) una trasformazione di coordinate, e sia  $\mathcal{S}$  un sistema fisico descritto da un hamiltoniana  $H$ . Diciamo che  $S$  è una simmetria di  $\mathcal{S}$  se l'hamiltoniana  $H$  (che ricordiamo è l'operatore che mi dice come evolve il sistema) resta invariata sotto l'azione di  $S$ . Per cui se<sup>8</sup>

$$H' = S^\dagger H S = H \quad \xRightarrow{S^\dagger = S^{-1}} \quad H S = S H \quad \implies \quad [H, S] = 0 \quad (2.4.1)$$

**Legge di conservazione** Sia  $Q$  un osservabile di  $\mathcal{S}$ , rappresentata da un operatore hermitiano  $Q^\dagger = Q$ . Diciamo che l'osservabile  $Q$  è conservata se le probabilità di ottenere per  $Q$  uno dei suoi valori possibili,  $q_n$ , sono costanti nel tempo:

$$\frac{dP(q_n)}{dt} = 0 \quad (2.4.2)$$

Questo implica in particolare che i valori medi di  $Q$ ,  $\langle Q \rangle_\alpha$ , sono costanti. Questo però avviene se e solo se:

- $Q$  non dipende esplicitamente dal tempo
- $Q$  commuta con l'hamiltoniana  $H$ ,  $[H, Q] = 0$

Infatti, per i valori medi vale:

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle_\alpha = \left\langle \frac{\partial Q}{\partial t} \right\rangle_\alpha + \frac{i}{\hbar} \langle [H, Q] \rangle_\alpha$$

per le probabilità  $P(q_n)$  vale (considerando per semplicità uno spettro discreto):

$$P_\alpha(q_n; t) = |\langle n | \alpha(t) \rangle|^2 \quad \text{dove} \quad Q |n\rangle = q_n |n\rangle$$

per cui se ora abbiamo  $[H, Q] = 0$ ,  $H$  e  $Q$  ammettono una base ON comune di autostati. Possiamo dunque scegliere  $|n\rangle$  in modo che

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle$$

possiamo sviluppare  $|\alpha(0)\rangle$  nella base  $|n\rangle$ :

$$|\alpha(0)\rangle = \sum_m c_m |m\rangle \quad \implies \quad |\alpha(t)\rangle = \sum_m e^{-\frac{i}{\hbar} E_m t} c_m |m\rangle$$

---

<sup>8</sup>Nota che vale quello che c'è scritto sotto se  $S$  è unitario.

ma allora

$$P_\alpha(q_n; t) = \left| \sum_m e^{-\frac{i}{\hbar} E_m t} c_m \langle n|m \rangle \right|^2 = \left| e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} c_n \right|^2 = |c_n|^2 \quad (2.4.3)$$

indipendente dal tempo.

Vediamo, ora, che legame c'è tra le simmetrie e le leggi di conservazione. Consideriamo una trasformazione di coordinate che dipende in modo continuo (simmetrie discrete sono un po' più complicate) da uno o più parametri (traslazioni, rotazioni,...) e che sia rappresentata da un'operatore unitario. Allora

$$S = S(\{\alpha_i\}) \equiv S(\alpha) \quad ; \quad S^{-1} = S^\dagger \quad (2.4.4)$$

Scegliendo i parametri in modo che  $S(0) = \mathbb{1}$  (che è una scelta naturale, che vuol dire che se non faccio nulla la trasformazione è l'identità), possiamo sempre scrivere  $S(\alpha)$  come<sup>9</sup>

$$S(\alpha) \equiv e^{i\alpha Q} \quad , \quad \text{dove } Q^\dagger = Q \quad (\text{e } \{\alpha_i\} \in \mathbb{R}) \quad (2.4.5)$$

Infatti

$$S^\dagger(\alpha) = e^{-i\alpha Q^\dagger} = e^{-i\alpha Q} = S^{-1}(\alpha) \quad (2.4.6)$$

Dato che  $Q$  è un operatore hermitiano, può essere associato ad una osservabile fisica  $Q$ . Se  $S$  è una simmetria, allora  $Q$  è una quantità conservata, perché

$$0 = [H, S(\alpha)] = [H, e^{i\alpha Q}] \implies [H, Q] = 0 \quad (2.4.7)$$

come visto prima, e questa cosa implica che  $Q$  è conservato nel senso della Meccanica Quantistica.

**Nota bene** che la scelta di prendere  $S$  unitario non è né casuale né particolarmente restrittiva. Infatti, gli operatori unitari preservano i prodotti scalari (in uno spazio complesso), dunque le probabilità, e si vede da

$$|\alpha'\rangle \equiv S|\alpha\rangle \quad ; \quad |\beta'\rangle \equiv S|\beta\rangle \implies \langle\beta'|\alpha'\rangle = \langle\beta|S^\dagger S|\alpha\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle$$

una seconda motivazione è che questa cosa è un teorema generale dovuto a Eugene Wigner, che mi dice che tutte le trasformazioni che preservano le probabilità (e quindi in generale i moduli  $|\langle\beta|\alpha\rangle|$ ) sono rappresentate nello spazio di Hilbert da operatori unitari, oppure anti-unitari, definiti da

$$\begin{aligned} |\alpha'\rangle &\equiv \bar{S}|\alpha\rangle \quad ; \quad |\beta'\rangle \equiv \bar{S}|\beta\rangle \\ \implies \langle\beta'|\alpha'\rangle &= \langle\beta|\bar{S}^\dagger \bar{S}|\alpha\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^* = \langle\alpha|\beta\rangle \end{aligned}$$

<sup>9</sup>**Nota** In presenza di più parametri  $\alpha_i$  dovremmo scrivere  $S(\alpha_i) = \exp\{i \sum_i \alpha_i Q_i\}$  sempre con  $Q_i^\dagger = Q_i$ .

Gli operatori anti-unitari coinvolgono una complessa coniugazione, e includono (di solito) l'inversione temporale<sup>10</sup>. Si noti infatti che, sotto  $t \rightarrow -t$ , si ha  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  ( $\vec{p}$  è una velocità, quindi con una derivata rispetto  $t$ ),  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}$ , e, per una hamiltoniana che non dipenda esplicitamente da  $t$ , parto da

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi \quad (2.4.8)$$

se inverte il tempo ottengo

$$-i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi \quad (2.4.9)$$

se invece prendo il complesso coniugato ottengo

$$-i\hbar \frac{d\Psi^*}{dt} = H\Psi^* \quad (2.4.10)$$

dunque vedo che se  $\Psi$  soddisfa l'equazione di Schrodinger, allora anche  $\Psi^*$  soddisfa l'equazione di Schrodinger con  $t \longleftrightarrow -t$ . Nota che in meccanica classica fare  $t \rightarrow -t$  non mi faceva cambiare il moto, ma in realtà questo è così anche in Meccanica Quantistica, poiché se faccio  $t \rightarrow -t$  e quindi  $\Psi \rightarrow \Psi^*$  i moduli quadri in realtà rimangono gli stessi e la fase che ho cambiato non la vedo.

### 2.4.1 Esempi ed applicazioni

**Invarianza per traslazioni** Si  $T(\vec{a})$  l'operatore di traslazione (con  $\vec{a}$  un vettore nello spazio delle configurazioni del sistema,  $\mathbb{R}^{3n}$  per  $n$  particelle). Se  $H' = T(\vec{a})^\dagger H T(\vec{a}) = H$ , allora il sistema è invariante, e  $[T(\vec{a}), H] = 0$ . Ma abbiamo

$$T(\vec{a}) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{p}\right\} \implies [H, \vec{p}] = 0 \quad (2.4.11)$$

dunque anche l'impulso (totale) è conservato. Per una particella singola questo è un caso *banale*:

$$H = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + V(\vec{r}) \implies T(\vec{a})^\dagger H T(\vec{a}) = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + V(\vec{r} + \vec{a}) \quad (2.4.12)$$

poiché  $\vec{p}$  è invariante per traslazioni. Dunque  $H = H'$  solo se  $V(\vec{r}) = V(\vec{r} + \vec{a})$ . Questo accade solo per potenziali periodici ( $\vec{a}$  discreto<sup>11</sup>) oppure costanti ( $\sim$  particella libera). Vedremo tra poche pagine il caso di potenziali periodici.

<sup>10</sup>Fare un'inversione temporale di  $\Psi(\vec{x}, t)$  vuol dire prendere  $\Psi^*(\vec{x}, t)$ .

<sup>11</sup>Il gruppo delle traslazioni è sempre lo stesso individuato nella sezione precedente, ma il gruppo delle simmetrie è più piccolo poiché contiene solo  $\vec{a}$  multiplo intero del passo reticolare (ad esempio).

Per sistemi di molte particelle mutuamente interagenti, ma non soggette a forze esterne, comunque questo è il caso generico<sup>12</sup>

$$H = \sum_i \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m_i} + V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\implies H' = T(\vec{a})^\dagger H T(\vec{a}) = \sum_i \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m_i} + V[(\vec{r}_i + \vec{a}) - (\vec{r}_j + \vec{a})] = H$$

dove abbiamo  $H' = H$  perché le traslazioni avvengono sia per  $\vec{r}_i$  che per  $\vec{r}_j$  per cui si semplificano nella parentesi. In tutti questi casi l'impulso totale  $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$  è sempre conservato. Per cui possiamo dire:

Invarianza per traslazioni $\iff$ conservazione dell'impulso
--

**Invarianza per rotazioni** Possiamo fare considerazioni analoghe anche quando abbiamo a che fare con delle rotazioni (intorno ad un generico asse  $\hat{n}$ , di un angolo  $\alpha$ ), implementate dall'operatore (unitario)

$$R_{\hat{n}}(\alpha) \equiv \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{n} \cdot \vec{L}\right\} \quad (2.4.13)$$

anche qui possiamo vedere che se le rotazioni sono una simmetria del sistema allora

$$H' = R_{\hat{n}}^\dagger(\alpha) H R_{\hat{n}}(\alpha) = H \implies [H, \vec{L}] = 0 \quad (2.4.14)$$

per cui il momento angolare<sup>13</sup> è conservato, come in meccanica classica. In questo caso scriviamo:

Invarianza per rotazioni $\iff$ conservazione del momento angolare
--

In questo caso però possiamo entrare in maggior dettaglio e osservare come l'invarianza viene concretamente realizzata. Notiamo che

$$[L_i, |\vec{p}|^2] = \sum_{j=1}^3 \left( p_j [L_i, p_j] + [L_i, p_j] p_j \right)$$

mentre ad esempio

$$[L_z, p_x] = [x p_y - y p_x, p_x] = [x, p_x] p_y = i\hbar p_y \implies [L_i, p_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} p_k$$

dunque

$$[L_i, |\vec{p}|^2] = \sum_{j,k=1}^3 \left( 2i\hbar \underbrace{\varepsilon_{ijk} p_j p_k}_{\vec{p} \times \vec{p} = 0} \right) = 0 \quad (2.4.15)$$

<sup>12</sup>Mi aspetto che sistemi isolati siano sempre invarianti per traslazioni.

<sup>13</sup>Le componenti non commutano tra loro, ma tutte commutano con  $H$ .

come previsto. In modo analogo si verifica che

$$[L_i, x_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}x_k \implies [L_i, r^2] = 0 \quad (2.4.16)$$

Possiamo ora dare una definizione rilevante:

- **Operatori scalari:** quelli che commutano con  $L_i$  (e quindi con  $|\vec{L}|^2$ )

$$[L_i, F] = 0$$

- **Operatori vettoriali:**<sup>14</sup> quelli che si trasformano come le coordinate

$$[L_i, V_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k$$

**Potenziali periodici** Per un gran numero di importanti sistemi fisica (cristalli, metalli,...) ha rilevanza la simmetria per traslazioni discrete, effettuate cioè tramite  $T(a)$ , ma non con  $a$  generico, bensì multiplo di una lunghezza fondamentale  $a_0$  (passo reticolare),  $a = a_n = na_0$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . I sistemi che hanno potenziali periodici (in 1 dimensione:  $V(x + na_0) = V(x)$ ) sono invarianti sotto queste traslazioni discrete.

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad , \quad V(x + na_0) = V(x) \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2.4.17)$$

$$\longrightarrow T^\dagger(a_n)HT(a_n) = \frac{p^2}{2m} + V(x + na_0) = H \quad (2.4.18)$$

Nota che costruire potenziali periodici è molto facile, per esempio

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + na_0) \quad (2.4.19)$$

è evidentemente periodico  $\forall f$ . Un caso interessante è quando  $f(x) = \delta(x)$ . In questo caso  $T(a)$  commuta con  $H$  per  $a = a_n, \forall n \in \mathbb{Z}$ .

Tutto ciò ha importanti conseguenze, infatti:

- Se  $T(a_n)$  commuta con  $H$ , i due operatori ammettono una base comune di autostati<sup>15</sup>. Possiamo dunque scegliere gli autostati di  $H$  in modo che siano anche autostati di  $T(a_n)$ .

$$H\Psi(x) = E\Psi(x) \quad ; \quad T(a_0)\Psi(x) = \lambda_0\Psi(x) \quad (2.4.20)$$

<sup>14</sup>**Nota.** Questa è probabilmente la definizione più significativa del concetto di vettore in  $\mathbb{R}^3$ . Analoghe definizioni si possono costruire per tensori di  $SO(3)$  di rango superiore ad 1, e più in generale per spazi vettoriali su cui agiscono linearmente gruppi di Lie diversi da  $SO(3)$ .

<sup>15</sup>Questa cosa è valida in generale per operatori unitari e non solo hermitiani.

- Gli autovalori di un operatore unitario hanno  $|\lambda| = 1$ , infatti

$$\begin{aligned} T|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle &\implies \langle\Psi|T^\dagger = \langle\Psi|\lambda^* \\ \implies \langle\Psi|T^\dagger T|\Psi\rangle = \langle\Psi|\Psi\rangle = 1 &= |\lambda|^2 \end{aligned}$$

dunque

$$\lambda_0 = \exp\{i\varphi(a_0)\} \equiv \exp\{-iq a_0\} \quad , \quad \varphi(a_0) \in \mathbb{R} \quad (2.4.21)$$

e nota che il segno della fase è convenzionale: che la fase  $\varphi$  sia lineare in  $a_0$  segue dalla necessità di poter comporre traslazioni:

$$T(a_0)T(a_0) = T(2a_0) \quad , \quad \dots$$

$q$  dunque è un numero d'onda,  $[q] = L^{-1}$ , e  $\hbar q$  un impulso.

- Ne segue:

$$T(a_0)\Psi(x) = \Psi(x - a_0) = e^{-iq a_0}\Psi(x) \quad (2.4.22)$$

dove secondo e terzo termine equagliati rappresentano l'equazione funzionale per  $\Psi(x)$ , la cui soluzione si può scrivere<sup>16</sup>

$$\Psi(x) = e^{iqx}u(x) \quad (2.4.23)$$

con  $u(x)$  periodica,  $u(x + a_0) = u(x)$ . Infatti allora

$$\Psi(x - a) = e^{iq(x-a_0)}u(x - a_0) = e^{-iq a_0}e^{iqx}u(x) = e^{-iq a_0}\Psi(x)$$

Concludiamo dunque che gli stati stazionari nel caso di potenziali periodici sono onde piane, modulate (l'ampiezza) da funzioni periodiche. I cristalli e molti metalli, forniscono esempi di potenziali periodici per gli elettroni che vi si muovono. Queste soluzioni suggeriscono che gli elettroni possano muoversi di moto libero (onde piane) con una modulazione periodica di ampiezza. Si tratta di un moto realistico (e non di un modello troppo restrittivo) alla base della teoria della conduzione nei metalli. La resistenza elettrica viene attribuita alle imperfezioni (difetti) del reticolo ionico. (Rivedrai queste cose nella parte finale di *Struttura della Materia*).

Concludiamo questa sezione con un'altra *applicazione*, il teorema di Wigner-Eckart, che racchiude un interessante regola di selezione per gli elementi di matrice degli operatori scalari. Infatti, tra le conseguenze più importanti dell'invarianza per rotazioni in Meccanica Quantistica sono, appunto delle regole di selezione per gli elementi di matrice di operatori che si trasformano in modo definito sotto l'azione delle rotazioni spaziali (ad esempio: scalari,

<sup>16</sup>Nota che questo è già il teorema di Bloch.

vettori, tensori,...). Queste regole di selezione sono centrali quando si studiano sistemi complessi con tecniche perturbative. La formulazione più generale delle regole di selezione è data dal teorema che segue, che però richiede tecniche più avanzate di teoria dei gruppi. Ne vedremo solo l'esempio più semplice.

**Teorema 1** *Sia  $F$  un operatore scalare, prendiamo un ICOC che include il momento angolare  $\{L^2, L_z\}$ , dunque abbiamo stati del tipo  $|\{n_i\}, l, m\rangle$ , dove  $\{n_i\}$  sono altri numeri quantici (tra cui tipicamente l'energia). Allora gli elementi di matrice di  $F$  soddisfano la regola di selezione:*

$$\langle n'l'm' | F | nlm \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \langle n'l' | |F| | nl \rangle \quad (2.4.24)$$

dove l'elemento di matrice ridotto  $\langle n'l' | |F| | nl \rangle$  non dipende da  $m$ .

Presi dunque un ICOC  $\{L^2, L_z\}$ , degli stati  $|n, l, m\rangle$  (mettiamo per brevità  $n_i \rightarrow n$ ), richiediamo che valgano le solite

$$\begin{aligned} L^2 |n, l, m\rangle &= \hbar^2 l(l+1) |n, l, m\rangle \\ L_z |n, l, m\rangle &= \hbar m |n, l, m\rangle \end{aligned}$$

e sia  $F$  operatore scalare (ad esempio  $r$ ,  $|\vec{p}|^2$ ,  $H$ , ...), tale quindi che

$$[L_i, F] = 0 \quad \Longrightarrow \quad [L^2, F] = 0$$

cerchiamo dunque di dimostrare il teorema e vedere che in realtà la maggior parte degli elementi di matrice di  $F$  nella base  $|n, l, m\rangle$  sono nulli, e quelli non nulli soddisfano la regola 2.4.24. Sfruttiamo l'annullarsi degli elementi di matrice dei commutatori.

$$\begin{aligned} [L_z, F] = 0 &\quad \Longrightarrow \quad \langle n'l'm' | [L_z, F] | n, l, m \rangle = 0 \\ \Longrightarrow \quad \langle n'l'm' | (L_z F - F L_z) | n, l, m \rangle &= 0 \\ \Longrightarrow \quad \hbar(m' - m) \langle n'l'm' | F | n, l, m \rangle &= 0 \end{aligned}$$

dunque gli elementi di matrice  $\langle n'l'm' | F | n, l, m \rangle$  sono non nulli solo se  $m = m'$ . Scriviamo dunque

$$\langle n'l'm' | F | n, l, m \rangle \propto \delta_{mm'} \quad (2.4.25)$$

continuiamo con l'altro commutatore.

$$\begin{aligned} [L^2, F] = 0 &\quad \Longrightarrow \quad \langle n'l'm' | [L^2, F] | n, l, m \rangle = 0 \\ \Longrightarrow \quad \langle n'l'm' | (L^2 F - F L^2) | n, l, m \rangle &= 0 \\ \Longrightarrow \quad \hbar^2[l'(l'+1) - l(l+1)] \langle n'l'm' | F | n, l, m \rangle &= 0 \end{aligned}$$

dunque gli elementi di matrice  $\langle n'l'm' | F | n, l, m \rangle$  sono non nulli solo se

$$l'(l' + 1) = l(l + 1) \implies l' = l$$

(ci sarebbe anche  $l' = -l - 1$ , ma non è consentito poiché  $l, l' \geq 0$ ) Scriviamo dunque

$$\langle n'l'm' | F | n, l, m \rangle \propto \delta_{mm'} \delta_{ll'} \quad (2.4.26)$$

Possiamo usare ancora un'utile commutatore

$$\begin{aligned} [L_+, F] = 0 &\implies \langle n'l'm' | [L_+, F] | n, l, m \rangle = 0 \\ \implies \langle n'l'm' | (L_+ F - F L_+) | n, l, m \rangle = 0 \end{aligned}$$

qua sorge il problema di sapere che un generico operatore agisce a destra nel suo modo usuale, mentre agisce a sinistra come il suo hermitiano coniugato (se  $Q = Q^\dagger$  tanto meglio, come  $L^2$  ed  $L_z$ ), ma in questo caso risulta facile vederlo, poiché sappiamo

$$\begin{aligned} \langle l, m + 1 | L_+ | l, m \rangle &= \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \\ \implies \langle l, m | L_+ | l, m - 1 \rangle &= \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} \end{aligned}$$

ovvero,  $L_+$  agisce a sinistra come  $(L_+)^\dagger = L_-$ , come previsto. Per cui potremmo anche scrivere

$$\langle n'l'm' | L_+ F | n, l, m \rangle^* = \langle nlm | F L_- | n', l', m' \rangle$$

tornando a noi, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 = \hbar \sqrt{l'(l'+1) - m'(m'-1)} \langle n'l'm' - 1 | F | n, l, m \rangle - \\ - \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \langle n'l'm' | F | n, l, m + 1 \rangle \end{aligned}$$

ma da quello che abbiamo imparato prima gli elementi di matrice sono proporzionali a  $\delta_{m', m+1}$  e  $\delta_{l, l'}$ . Dunque

$$0 = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \left( \langle n'lm | F | n, l, m \rangle - \langle n'lm + 1 | F | n, l, m + 1 \rangle \right)$$

e dato che questo deve valere  $\forall m$ , gli elementi di matrice di  $F$  non possono dipendere da  $m$ , e questo si scrive:

$$\langle n'l'm' | F | nlm \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \langle n'l | F | nl \rangle \quad (2.4.27)$$

che è l'enunciato del teorema e dove per definizione l'elemento di matrice ridotto  $\langle n'l | F | nl \rangle$  non dipende da  $m$ .

Riassumendo. Abbiamo ridotto il calcolo di un gran numero di elementi di matrice di  $F$  a solo pochi casi. Anche se non lo vediamo il teorema

si estende anche ad operatori vettoriali  $\vec{V}$  definiti da  $[L_i, V_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k$ , come  $\vec{r}, \vec{p}$ . Questi hanno *spin 1*, per cui le regole di selezione richiederanno  $\Delta m \equiv m' - m = 0, \pm 1$  e  $\Delta l \equiv l' - l = 0, \pm 1$ . Gli elementi di matrice non nulli saranno connessi dai coefficienti di Clebsh-Gordan. Vedi §6.7.2 di [2]. Non abbiamo neanche trattato il caso della parità (simmetria discreta sotto  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ ), che consente di distinguere scalari da pseudo-scalari e vettori da pseudo-vettori. Vedi §6.4 di [2].

## 2.5 Traslazioni nel tempo

Ora vediamo una delle trasformazioni di coordinate (nel caso non relativistico) più interessante, utile ed importante. Una traslazione temporale è una trasformazione del tipo:

$$t \longrightarrow t' = t + t_0 \quad (2.5.1)$$

come visto per le traslazioni spaziali e angolari anche ora ci aspettiamo che le traslazioni temporali siano generate dall'operatore differenziale  $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ . Fatta questa ipotesi, allora conosciamo già l'operatore (osservabile) che le genera. L'equazione di Schrodinger infatti ci dice:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \quad (2.5.2)$$

dunque possiamo dire che le traslazioni nel tempo sono generate dall'hamiltoniana (energia). Possiamo esprimere questo fatto introducendo un nuovo modo di risolvere l'equazione. Definiamo l'**operatore di evoluzione temporale** come

$$U(t_2, t_1) / \Psi(\vec{r}, t_2) = U(t_2, t_1)\Psi(\vec{r}, t_1) \quad (2.5.3)$$

Nel caso in cui  $H$  non dipenda esplicitamente da  $t$  è anche facile trovare un'espressione esplicita per  $U(t_2, t_1)$ :

$$\begin{aligned} \Psi(t_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \Psi(t) \Big|_{t=t_1} (t_2 - t_1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ -\frac{i}{\hbar} H(t_2 - t_1) \right]^n \Psi(t_1) \\ &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} H(t_2 - t_1) \right\} \Psi(t_1) \end{aligned}$$

dove nel primo passaggio abbiamo scritto lo sviluppo in serie di Taylor della funzione d'onda, successivamente abbiamo fatto la sostituzione  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\frac{i}{\hbar}H$ <sup>17</sup> e nella terza riga abbiamo ricompattato tutto. Quindi abbiamo trovato

$$U(t_2, t_1) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_2-t_1)} \quad (2.5.4)$$

<sup>17</sup>Nota che se  $H = H(t)$  allora questa cosa non la potrei scrivere, riuscirei comunque a scrivere il tutto in modo compatto, ma ci sarebbero delle complicazioni, vedi [8].

Ora l'evoluzione temporale delle funzioni d'onda nel caso stazionari è trasparente. Data una base di autofunzioni di  $H$ ,

$$H\Psi_n = E_n\Psi_n$$

per  $t = 0$ , qualsiasi condizione iniziale  $\Psi(\vec{r}, 0)$  può essere espressa nella base  $\Psi_n$ :

$$\Psi(\vec{r}, 0) = \sum_n c_n \Psi_n(\vec{r})$$

ma allora

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &= U(t, 0)\Psi(\vec{r}, 0) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \sum_n c_n \Psi_n(\vec{r}) \\ &= \sum_n c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \Psi_n(\vec{r}) = \sum_n c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \Psi_n(\vec{r}) \end{aligned}$$

come ben sappiamo.

Così come  $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$  è il generatore delle trasformazioni spaziali ed è la quantità conservata per sistemi invarianti sotto  $T(a) = e^{-\frac{i}{\hbar}ap}$ , così  $H \longleftrightarrow i\hbar\frac{d}{dt}$  è il generatore delle traslazioni temporali, e l'osservabile corrispondente, l'energia, è conservata per sistemi invarianti sotto traslazioni temporali, ossia, invarianza sotto l'azione di  $U$ . Nota che questa invarianza è definita da

$$U(t_2, t_1) = U(t_2 + \Delta t, t_1 + \Delta t)$$

ed è manifestata se  $H$  non dipende esplicitamente da  $t$ . In tal caso

$$U(t_2 + \Delta t, t_1 + \Delta t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}H(t_2 + \Delta t - t_1 - \Delta t)\right\} = U(t_2, t_1)$$

L'energia è conservata (nel senso già discusso) perché

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad , \quad [H, H] = 0 \\ \implies \frac{d}{dt}\langle H \rangle_\alpha = \frac{i}{\hbar}\langle [H, H] \rangle_\alpha + \left\langle \frac{\partial H}{\partial t} \right\rangle_\alpha = 0 \end{aligned}$$

per cui abbiamo

Invarianza per traslazioni nel tempo $\iff$ conservazione dell'energia
--

## 2.6 Descrizioni di Schrodinger, Heisenberg e di interazione

In questa sezione analizzeremo i diversi modi che abbiamo di interpretare l'azione di un operatore su uno stato fisico. Come abbiamo fatto per le

traslazioni spaziali e per le rotazioni, possiamo scrivere come si trasforma un operatore per traslazioni temporali. Per un generico operatore  $Q$  scriviamo (ipotizzando  $H$  indipendente da  $t$ )<sup>18</sup>

$$\begin{aligned} Q(t) &= U^\dagger(t, 0)Q(0)U(t, 0) \\ &= U(0, t)Q(0)U(t, 0) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}Ht}Q(0)e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \end{aligned}$$

Nel calcolare l'evoluzione temporale degli elementi di matrice e dei valori medi, abbiamo quindi una famiglia di scelte.

**a.** Gli stati fisici evolvono nel tempo secondo l'equazione di Schrodinger, mentre gli operatori sono indipendenti dal tempo. Questo è quello che abbiamo fatto fin'ora, e va sotto il nome di **descrizione di Schrodinger**,

$$|\alpha(t)\rangle = U(t, 0)|\alpha(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\alpha(0)\rangle \quad (2.6.1)$$

$$\langle Q \rangle_{\alpha, t} \equiv \langle \alpha(t) | Q(0) | \alpha(t) \rangle = \langle \alpha(0) | e^{\frac{i}{\hbar}Ht} Q(0) e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} | \alpha(0) \rangle \quad (2.6.2)$$

o più in generale

$$\langle \beta | Q | \alpha \rangle_t = \langle \beta(t) | Q(0) | \alpha(t) \rangle = \langle \beta(0) | e^{\frac{i}{\hbar}Ht} Q(0) e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} | \alpha(0) \rangle \quad (2.6.3)$$

**b.** In modo del tutto equivalente, si possono immaginare gli stati come fissati nel tempo, e attribuire l'evoluzione temporale agli operatori. Questa viene detta **descrizione di Heisemberg**, e si scrive

$$|\alpha\rangle_H \equiv |\alpha(0)\rangle \quad , \quad Q_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} Q_H(0) e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \quad (2.6.4)$$

notando che nelle due rappresentazioni  $Q(0) = Q_S(0) = Q_H(0)$ . Allora evidentemente

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle_{\alpha, t} \equiv_H \langle \alpha | Q_H(t) | \alpha \rangle_H &= \langle \alpha(0) | e^{\frac{i}{\hbar}Ht} Q_H(0) e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} | \alpha(0) \rangle \\ &=_S \langle \alpha(t) | Q_S | \alpha(t) \rangle_S \end{aligned}$$

e analogamente per gli elementi di matrice. È chiaro dunque che si tratta di descrizioni equivalenti. La descrizione di Heisemberg presenta però strette analogie con la meccanica hamiltoniana: per esempio, si possono scrivere le equazioni del moto per gli operatori

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} Q_H(t) &= i\hbar \left( \frac{i}{\hbar} H e^{\frac{i}{\hbar}Ht} \right) Q_H(0) e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} + i\hbar e^{\frac{i}{\hbar}Ht} Q_H(0) \left( -\frac{i}{\hbar} H \right) e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \\ &= -H Q_H(t) + Q_H(t) H \\ &= [Q_H(t), H] \end{aligned}$$

<sup>18</sup>Nota che  $U$  è unitario essendo  $H$  hermitiano.

che presentano la solita analogia con il caso classico dato in termini delle parentesi di Poisson.

c. Vediamo anche il caso della rappresentazione che suddivide l'evoluzione temporale tra stati ed operatori. Se per esempio abbiamo

$$H = H_0 + H_1 \quad (2.6.5)$$

con (ad esempio)  $H_0$  facilmente risolvibile, possibilmente libera ( $H_0 = H_{cin}$ ), mentre  $H_1$  rappresenta un'interazione, allora si ha<sup>19</sup>

$$U(t, 0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}Ht\right\} = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(H_0 + H_1)t\right\} \quad (2.6.6)$$

$$= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}H_0t\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}H_1t\right\} \quad (2.6.7)$$

e si può attribuire l'evoluzione libera agli operatori e quella dovuta all'interazione agli stati. Dunque, in questa rappresentazione mischiamo la rappresentazione di Heisenberg con quella di Schrodinger.

$$\langle Q \rangle_{\alpha,t} = \langle \alpha(0) | e^{\frac{i}{\hbar}H_1t} e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} Q(0) e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} e^{-\frac{i}{\hbar}H_1t} | \alpha(0) \rangle \quad (2.6.8)$$

$$\equiv \langle \alpha(t) | Q_I(t) | \alpha(t) \rangle_I \quad (2.6.9)$$

in cui abbiamo scritto:

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_1t} |\alpha(0)\rangle \quad (2.6.10)$$

$$Q_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0t} Q(0) e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} \quad (2.6.11)$$

Questa classe di descrizioni viene denominata **descrizione di interazione**, e viene spesso utilizzata (vedi [4] o qualsiasi libro di QFT) per sviluppi perturbativi, soprattutto se  $H_1 = H_1(t)$ . Questa sommaria descrizione si generalizza infatti al caso in cui  $H$  dipenda da  $t$ , sia al caso in cui  $[H_0, H_1] \neq 0$ , per cui gli esponenziali della riga 2.6.6 non fattorizzano esattamente e compaiono una serie di commutatori (potenzialmente  $\infty$ ).

<sup>19</sup>Attenzione! Solo se  $[H_0, H_1] = 0$ .



## Capitolo 3

# Gemme di teoria dei gruppi

In questo capitolo ho riportato tutte le note prese durante le lezioni del corso di *Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi*. I riferimenti per questo capitolo sono [1, 3, 5, 6, 7, 9].

Altre fonti riguardo le parti della teoria dei gruppi utile alla Fisica teorica sono:

- S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. 1, cap. II, Cambridge University Press (1995), per una ampia illustrazione del gruppo di Poincaré in Meccanica Quantistica Relativistica.
- M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (2007).
- B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, Springer (2015).
- W. Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific Pub Co Inc. (1985).
- L. Fonda, *Symmetry Principles in Quantum Physics*, M.Dekker (1970).
- D. Tong, *Quantum Field Theory, Lecture notes*.

### 3.1 Richiami di Relatività Speciale e algebra tensoriale

Ricordiamo in questa sezione alcuni pezzi della relatività speciale. Potremmo inglobare in questo ripasso anche l'Appendice [B.1](#).

I postulati della Relatività Speciale sono:

1. La velocità della luce  $c$  è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

2. Le leggi della Fisica sono invarianti in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Alcuni preferiscono inglobare i due postulati in uno unico:

1. Le leggi della fisica sono invarianti per trasformazioni di Poincaré in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Nota che i postulati qui descritti hanno come diretta conseguenza<sup>1</sup> che la distanza spazio-temporale tra due eventi (punti nello spazio di Minkowski), indicata con  $s^2$ , è un invariante di Lorentz, ovvero, non cambia tra sistemi di riferimento inerziali collegabili da trasformazioni di Poincaré. Ricordiamo che una generica trasformazione di Poincaré è una trasformazione di Lorentz (rappresentata dalla matrice  $\Lambda^\mu_\nu$ ) e una traslazione spazio-temporale:

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (3.1.1)$$

sono il set di trasformazioni lineari che legano  $(x_i, t)$  a  $(x'_i, t')$  e formano un gruppo, chiamato gruppo di Poincaré. Anche le trasformazioni rappresentate da  $\Lambda^\mu_\nu$  formano un gruppo, quello di Lorentz.

D'ora in avanti utilizzeremo il sistema di unità naturali, ovvero, porremo  $\hbar = c = 1$ . Vedi l'Appendice A per dettagli.

Come abbiamo già detto, definiamo  $x^\mu$  come un quadrivettore che contiene il tempo  $t$  nella componente 0 e le tre componenti spaziali sono associate ad  $i = 1, 2, 3$ :

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}). \quad (3.1.2)$$

Come metrica dello spazio di Minkowski prendiamo per convenienza:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

e conseguente metrica inversa:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.4)$$

Verificabile controllando che  $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$ . Ricorda che il tensore metrico (o metrica) descrive la geometria di una varietà e da esso è possibile definire

---

<sup>1</sup>Questa in realtà sarebbe una quantità invariante per via del fatto che la distanza tra due punti di una qualsiasi varietà è un invariante sempre.

il concetto di distanza. In questa notazione definiamo la distanza spazio-temporale come:

$$s^2 = x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_0 x^0 - x_i x^i \quad (3.1.5)$$

e avremo l'invarianza della Relatività Speciale scritta come:

$$s^2 = x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu \quad (3.1.6)$$

in cui abbiamo assunto che: in un sistema di riferimento un segnale di luce è percepito in  $x_i$  al tempo  $t$  e in un altro sistema di riferimento, lo stesso segnale di luce, è percepito in  $x'_i$  al tempo  $t'$ .

Possiamo dire che il gruppo di Lorentz (o quello di Poincaré, visto che quando calcoliamo intervalli essi sono trasparenti a traslazioni spazio-temporali), è quello che ci permette di dire che la nostra teoria è relativistica, poiché è un gruppo formato da tutte le matrici  $\Lambda^\mu_\nu$  tali da trasformare i quadrivettori  $x^\mu$  in modo tale da preservare le distanze, vedremo nella sezione §3.4.1 come classificarle. Più precisamente, le trasformazioni di Lorentz (TL) sono isometrie, cioè trasformazioni che lasciano invariata  $s^2$  (come richiesto dalla Relatività Speciale).

**Gli indici** Un piccolo appunto sugli indici. Ricordiamo che un indice alto è un indice di controvarianza, mentre un indice basso è uno di covarianza. Possiamo abbassare o alzare indici facendo agire la metrica su un tensore covariante o controvariante. Infatti vale:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad , \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad \implies \quad x^0 = x_0 = ct \quad , \quad x^i = -x_i. \quad (3.1.7)$$

Inoltre, gli indici sommati saranno sempre uno alto ed uno basso; una volta contratti gli indici sono solo più dei numeri e possono essere spostati a piacimento. Per le matrici, ad esempio  $\Lambda^\mu_\nu$ , un indice a sinistra è un'indice di riga e un indice a destra è un'indice di colonna. Scambiando gli indici a destra e sinistra scambiamo righe e colonne:

$$\Lambda^\mu_\nu = (\Lambda^T)_\nu^\mu \quad (3.1.8)$$

Spesso nella scrittura con gli indici espliciti si omette la  $T$ , dal momento che l'informazione è già contenuta nell'ordine e nella posizione degli indici.

**Operatori di derivata** Definiamo:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad , \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (3.1.9)$$

e tali per cui:

$$\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\nu}. \quad (3.1.10)$$

È anche possibile vedere che la derivata varia come le coordinate  $x^\mu$  sotto trasformazioni di Lorentz, ovvero:

$$\bar{\partial}^\mu = \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu \quad (3.1.11)$$

infatti si vede che:

$$\bar{\partial}^\rho \bar{x}^\sigma = (\Lambda^\rho_\mu \partial^\mu) (\Lambda^\sigma_\nu x^\nu + a^\sigma) = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu \underbrace{\partial^\mu x^\nu}_{g^{\mu\nu}} = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu g^{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} \quad (3.1.12)$$

e analogamente per le derivate seconde:

$$\partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \quad (3.1.13)$$

$$\bar{\partial}^2 = \bar{\partial}^\mu \bar{\partial}_\mu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \partial^\rho \Lambda^\nu_\sigma \partial^\sigma = \underbrace{g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma}_{g_{\rho\sigma}} \partial^\rho \partial^\sigma = \partial^\rho g_{\rho\sigma} \partial^\sigma = \partial^2 \quad (3.1.14)$$

### 3.1.1 Quadrivettori e calcolo tensoriale

Definiamo in questa sezione i quadrivettori covarianti e controvarianti e richiamiamo un paio di cose utili riguardanti il calcolo tensoriale.

Formalmente definiamo quadrivettore controvariante (indice alto) gli oggetti che trasformano come il differenziale delle coordinate<sup>2</sup>, ovvero:

$$a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu \quad (3.1.16)$$

da cui possiamo vedere come trasforma un quadrivettore con indici bassi, che chiameremo quadrivettore covariante:

$$a'_\mu = g_{\mu\nu} a'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho a^\rho = \underbrace{g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho}_{M_\mu^\sigma} a^\rho = M_\mu^\sigma a_\sigma. \quad (3.1.17)$$

Si può vedere che la matrice  $M = g\Lambda g$  è l'inversa di  $\Lambda$ . Infatti, moltiplicando la relazione (3.4.11) per la metrica si ottiene:

$$\Lambda^T g \Lambda g = gg \quad \implies \quad \Lambda^T M = \mathbb{1} \quad \implies \quad M = \underbrace{(\Lambda^T)^{-1}}_{\Lambda_\mu^\sigma} = (\Lambda^{-1})^T. \quad (3.1.18)$$

Dunque è possibile scrivere:

$$a'_\mu = \Lambda_\mu^\sigma a_\sigma. \quad (3.1.19)$$

<sup>2</sup>Il differenziale delle coordinate, presa (3.1.1), si trasforma come:

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu. \quad (3.1.15)$$

Definiamo un tensore di rango  $n = p + q$ :

$$T_{\nu_1, \dots, \nu_q}^{\mu_1, \dots, \mu_p} \quad (3.1.20)$$

come quell'oggetto le cui  $4^n$  componenti si trasformano per trasformazioni di Lorentz secondo:

$$T_{\nu_1, \dots, \nu_q}^{\mu_1, \dots, \mu_p} = \Lambda_{\alpha_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\alpha_p}^{\mu_p} \Lambda_{\nu_1}^{\beta_1} \dots \Lambda_{\nu_q}^{\beta_q} T_{\beta_1, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}. \quad (3.1.21)$$

Ad esempio, un tensore di rango 0 è uno scalare, un tensore di rango 1 è un quadrivettore (controvariante o covariante a seconda della posizione dell'indice) e un esempio di un tensore di rango 2 è il tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  (che tra l'altro è invariante sotto TL).

Attenzione però che  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$  non è un tensore.

Definiamo gli pseudo-tensori come quegli oggetti che cambiano segno per parità. Un esempio di pseudo-tensore completamente antisimmetrico è il simbolo di Levi-Civita (in 4 dimensioni)  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , definito con  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = +1$ , con il cambio di segno per ogni permutazione degli indici e con  $\varepsilon = 0$  se due indici sono uguali. Nota che il simbolo  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  ha segni opposti. Il simbolo di Levi-Civita si utilizza per definire il determinante di una matrice. Presa  $M$  matrice  $4 \times 4$ , allora vale per definizione:

$$\det\{M\} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\mu}^0 M_{\nu}^1 M_{\rho}^2 M_{\sigma}^3. \quad (3.1.22)$$

Esiste anche il tensore completamente antisimmetrico tridimensionale  $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$  definito allo stesso modo di quello 4-dimensionale.

### 3.1.2 Considerazioni su oggetti simmetrici, antisimmetrici e sui loro prodotti

Facciamo in questa sottosezione alcune considerazioni sugli oggetti simmetrici e antisimmetrici.

Preso un oggetto generico con 2 indici  $T^{\mu\nu}$ , un'identità che vale sempre è:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) + \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \quad (3.1.23)$$

in cui vediamo che la prima parentesi è un pezzo simmetrico per lo scambio  $\mu \longleftrightarrow \nu$ , mentre la seconda parentesi è antisimmetrica per scambio. Se  $T^{\mu\nu}$  è un oggetto antisimmetrico, dunque tale per cui  $T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$ , allora si scrive:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \quad (3.1.24)$$

ma se  $T^{\mu\nu}$  è un oggetto simmetrico, dunque  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ , allora si scrive:

$$\frac{1}{2} (T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}). \quad (3.1.25)$$

Possiamo vedere che il prodotto di una quantità simmetrica con una anti-simmetrica (e viceversa) è sempre nullo. Infatti, vale:

$$A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = -A^{\nu\mu} S_{\nu\mu} \quad (3.1.26)$$

d'altra parte gli indici sommati sono muti e posso rinominarli a piacere, dunque scrivere:

$$-A^{\nu\mu} S_{\nu\mu} = -A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} \quad (3.1.27)$$

che richiede però che:

$$A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = -A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} \quad (3.1.28)$$

che è una condizione verificata solo se:

$$A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = 0. \quad (3.1.29)$$

## 3.2 Basic facts about Lie algebras

Il titolo si rifà al capitolo §15.4 di Peskin, Schroeder [5]. In Fisica sono di particolare interesse le proprietà dei gruppi continui. Definiamo subito che cos'è un gruppo.

**Definizione 1** Un **gruppo** è un insieme di elementi  $G = \{g\}$  che soddisfano certe regole algebriche:

1.  $\exists$  una legge di composizione  $\circ$  tale che se  $g_1, g_2 \in G$  allora

$$g_1 g_2 = g_3 \in G. \quad (3.2.1)$$

2.  $\exists I$  elemento identità:

$$\forall g \in G \quad : \quad Ig = gI = g. \quad (3.2.2)$$

3.  $\exists g^{-1}$  elemento inverso

$$\forall g \in G \quad : \quad gg^{-1} = g^{-1}g = I. \quad (3.2.3)$$

4. Associatività:

$$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3). \quad (3.2.4)$$

Un gruppo si indica come  $(G, \circ)$ .

C'è un particolare tipo di gruppi che potrebbe essere utile.

**Definizione 2** Un gruppo  $(G, \circ)$  si dice **abeliano** se:

$$\forall a, b \in G \quad : \quad a \circ b = b \circ a. \quad (3.2.5)$$

Possiamo dare ancora una definizione prima di continuare il nostro discorso.

**Definizione 3** *L'ordine di un gruppo è il numero di elementi che compongono il gruppo.*

L'ordine può essere finito o infinito. Ad esempio, il gruppo delle permutazioni di 3 oggetti  $S_3$  è finito e ha  $3! = 6$  elementi. Il gruppo delle matrici  $3 \times 3$  che rappresentano le rotazioni proprie in  $\mathbb{R}^3$ , ovvero  $SO(3)$ , è infinito.

Ovviamente, se a noi fisici interessano i gruppi continui, forse conviene effettivamente definirli.

**Definizione 4** *Un gruppo  $(G, \circ)$  si dice **continuo** se il numero di elementi è infinito non numerabile.*

In realtà, però, per noi è fondamentale che un gruppo sia connesso.

**Definizione 5** *Un gruppo si dice **connesso** se i suoi elementi si possono connettere con continuità all'identità.*

Un gruppo continuo connesso è molto importante per noi, poiché è un gruppo i cui elementi sono infinitesimalmente vicini all'identità, che è fondamentale perché vuol dire che un generico elemento del gruppo si può scrivere come l'azione ripetuta (infinite volte) di questi elementi infinitesimi. Un elemento  $g$  del gruppo, infinitesimalmente vicino l'identità può essere scritto come:

$$g(\alpha) = 1 + i\alpha_a T^a + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (3.2.6)$$

in cui  $\alpha^a$  sono i parametri infinitesimi del gruppo e sono parametri continui (reali o complessi), invece, i  $T^a$  sono operatori hermitiani<sup>3</sup> e vengono chiamati i **generatori** del gruppo di simmetria.

Diamo un'ulteriore definizione.

**Definizione 6** *Un **gruppo di Lie** è un gruppo di trasformazioni, continuo e i cui elementi sono funzioni analitiche (continue ed infinitamente derivabili) di un certo numero finito di parametri  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .*

Sono proprio tali gruppi quelli per cui è possibile definire e studiare le trasformazioni infinitesime, ossia, le trasformazioni arbitrariamente vicine all'identità. Ogni elemento  $g$  del gruppo di Lie si può scrivere, in modo economico utilizzando i generatori del gruppo e l'esponeziatura, come:

$$g(\alpha) = e^{i\alpha_a T^a} \quad (3.2.8)$$

<sup>3</sup>Sono hermitiani solo se il gruppo di Lie è unitario e a parametri reali, infatti:

$$U^\dagger = (\exp\{i\alpha_a T^a\})^\dagger = \exp\{-i\alpha_a T^{a\dagger}\} \equiv U^{-1} = \exp\{-i\alpha_a T\}. \quad (3.2.7)$$

in cui  $\alpha_a$  e  $T^a$  li abbiamo già visti, ma sappiamo bene che quando compare un esponenziale, in una qualche definizione, quello che abbiamo è una definizione data dal suo sviluppo in serie. L'indice  $a$  assume valori che vanno da  $1, \dots, \dim G$ . Definiamo che cos'è la dimensione di un gruppo.

**Definizione 7** *La **dimensione** di un gruppo è il numero di parametri (generatori) necessari a descrivere completamente un gruppo.*

Nota che in (3.2.8) il coefficiente  $\alpha_a = 0$  definisce l'identità.

Il problema è che sappiamo che alle invarianze del sistema possiamo associare dei gruppi e che ogni gruppo possiede degli elementi che possono essere scritti come l'esponenziale di certi coefficienti e dei generatori del gruppo stesso. Però per classificare o comunque studiare e capire come agisce un gruppo è fondamentale come sono fatti i suoi elementi e dunque i suoi generatori. Diamo una definizione.

**Definizione 8** *Dare una **rappresentazione** di un gruppo  $G$  vuol dire: realizzare delle relazioni moltiplicative del gruppo  $G$  tramite un corrispondente gruppo di matrici quadrate. Queste matrici sono pensate come operatori che agiscono su uno spazio vettoriale  $V$  la cui dimensione è detta **dimensione della rappresentazione**.*

Una rappresentazione è una mappa che manda l'elemento  $g$  del gruppo in una matrice  $n \times n$ :

$$g \rightarrow M(g).$$

tale che:

$$M(g_1)M(g_2) = M(g_1 \circ g_2) \quad (3.2.9)$$

$$M(I) = \mathbb{1} \quad (3.2.10)$$

da cui segue che:

$$M(g^{-1})M(g) = M(I) = \mathbb{1} \implies M(g^{-1}) = [M(g)]^{-1}. \quad (3.2.11)$$

L'associatività è automatica poiché il prodotto tra matrici è associativo. Per questo, tutte le proprietà del gruppo sono realizzate esplicitamente dalle matrici di una rappresentazione. La rappresentazione più semplice e naturale usata per definire un gruppo è detta **rappresentazione definente** o **fondamentale**. Ovviamente di un gruppo possiamo dare molte definizioni diverse, che possono avere dimensioni diverse (finite o infinite), vedi ad esempio p.20-23 in cui Salmé [7] oltre alla rappresentazione matriciale  $3 \times 3$  di  $SO(3)$  da una rappresentazione infinito dimensionale che descrive una rotazione in uno spazio funzionale. La rappresentazione fondamentale è la rappresentazione fedele con dimensione più bassa e fornisce la dimensione del gruppo. Ad esempio,  $SU(2)$ , il gruppo di spin, ha dimensione 2 poiché ha rappresentazione fondamentale data da matrici  $2 \times 2$ .

Esiste però una rappresentazioni più importante.

**Definizione 9** *La rappresentazione irriducibile è una rappresentazione per cui non c'è modo di ridurre la sua dimensione.*

Se la rappresentazione è riducibile tutte le matrici possono essere ridotte in forma diagonale a blocchi (attraverso trasformazioni di similitudine<sup>4</sup>). Una rappresentazione riducibile ( $D$ ) si può descrivere completamente attraverso le rappresentazioni irriducibili ( $A, B, C$ ) che ne formano i blocchi. In particolare, si dice che è la somma diretta di tali rappresentazioni irriducibili:

$$D = A \oplus B \oplus C \quad (3.2.13)$$

Dunque, determinati i generatori di un gruppo in modo astratto, come già detto, ci interessa capire come gli elementi di un gruppo agiscono sugli stati fisici. Trovati i generatori li possiamo rappresentare con una rappresentazione matriciale, la cui dimensione è la dimensione del gruppo, e ne si può vedere facilmente l'azione sugli stati. I generatori, come già visto quando li abbiamo introdotti, sono (in MQ) operatori hermitiani sullo spazio di Hilbert.

Però, come troviamo i generatori nella pratica? Abbiamo detto che ogni elemento di un gruppo di Lie può essere scritto come (3.2.8). Abbiamo anche già detto che  $T^a$  sono i generatori del gruppo e sono rappresentabili da matrici  $n \times n$ . La struttura di  $G$ , gruppo di Lie, sarà determinata da piccole perturbazioni nell'intorno dell'identità, ovvero, da perturbazioni infinitesime. La rappresentazione di ogni generatore di  $G$  la si trova facendo la derivata rispetto al suo corrispondente parametro. Spiego meglio. Quando  $\alpha_a \ll 1$  si ha una trasformazione infinitesima:

$$g = 1 + i\alpha_a T^a. \quad (3.2.14)$$

Notiamo che dall'espressione (3.2.14) se si esplicita la somma sull'indice  $a$  e si aggiungono tutti i termini  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ , allora si ricostruisce la definizione (3.2.8). Vediamo, inoltre, che l'espressione (3.2.14) è lineare nei parametri  $\alpha_a$ , con  $a = 0, \dots, n$ , per cui possiamo determinare i generatori come:

$$T^a = -i \left. \frac{\partial g}{\partial \alpha_a} \right|_{\alpha=0}. \quad (3.2.15)$$

Nota che l'unità immaginaria introdotta in (3.2.15) è pura convenzione, ma permette di presentare il generatore come matrice hermitiana (i cui autovallori sono reali). Vedi la sottosezione §3.3 per un esempio di calcolo. È inoltre

<sup>4</sup>In generale, si definiscono *equivalenti* rappresentazioni collegate da trasformazioni di similitudine:  $M(g)$  e  $\overline{M}(g)$  sono rappresentazioni equivalenti se:

$$\overline{M}(g) = AM(g)A^{-1}, \quad \forall g \in G \quad (3.2.12)$$

con  $A$  matrice indipendente da  $g$ . Questa relazione di equivalenza permette di considerare rappresentazioni equivalenti come essenzialmente la stessa rappresentazione. Infatti la trasformazione di similitudine rappresenta semplicemente un cambio di base nello spazio vettoriale  $V$ .

possibile raggiungere qualsiasi elemento di  $G$  connesso con l'identità tramite l'applicazione successiva di trasformazioni infinitesime:

$$g = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \mathbb{1} + i \frac{\alpha_a T^a}{k} \right)^k = e^{i\alpha_a T^a}. \quad (3.2.16)$$

È fondamentale per noi in Fisica, avere un gruppo connesso e la relazione (3.2.16). Considerato un certo numero di trasformazioni infinitesime siamo in grado di ricostruire una trasformazione finita utilizzando (3.2.16) e possiamo spostarci tra due punti qualsiasi dello spazio con continuità. Però per noi è importante connetterci con l'identità, poiché così possiamo rappresentare il nostro gruppo tramite trasformazioni infinitesime. Dunque, possiamo partire dall'identità e la possiamo modificare per infinitesimi, e infinitesimo per infinitesimo ricostruiamo una trasformazione continua. Infinitesimo per infinitesimo vuol dire esponenziale. Gli operatori che rappresentano la nostra trasformazione possono essere espressi tramite una trasformazione infinitesima in successione in successione ad altre. L'operatore finito che riusciamo ad ottenere lo possiamo sempre scrivere come l'esponenziale dei parametri e generatori del gruppo, ovvero utilizzando la relazione (3.2.8).

Vedi il capitolo §9 degli appunti di Meccanica Quantistica 1, in cui abbiamo visto che il generatore delle traslazioni è l'operatore impulso, ma che queste trasformazioni agiscono sugli stati del sistema tramite l'operatore  $\exp\{-i\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}\}$ .

Grazie all'esponenziale, per ottenere le rappresentazioni dei gruppi di Lie connessi basta concentrarsi sulle rappresentazioni dei generatori.

È opportuno dare ancora qualche definizione generale sui gruppi e sui gruppi di Lie.

**Definizione 10** *Un gruppo si dice **compatto** se i parametri variano in un intervallo chiuso e limitato.*

Ad esempio, le rotazioni formano un gruppo compatto, poiché gli angoli variano nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ .

**Definizione 11** *Se un'insieme è **compatto** esiste sempre una successione di elementi che converge ad un qualsiasi elemento dell'insieme:*

$$\forall a \in G, \exists a_n \in G \quad / \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

**Definizione 12** *Se  $H \subset G$ ,  $H$  si dice **sottogruppo** di  $G$  se l'insieme dei suoi elementi è gruppo con la stessa operazione di  $G$ .*

*Il sottogruppo si dice **invariante** (o normale) se:*

$$\forall g \in G, \forall h \in H, g \circ h \circ g^{-1} \in H \quad (3.2.17)$$

Un esempio di ciò è il gruppo delle rotazioni attorno l'asse  $z$ , che è sottogruppo di  $SO(3)$ .

**Definizione 13** Una *sottoalgebra* di un'algebra  $A$ , è un sottoinsieme  $B \subseteq A$  che è chiuso rispetto alle operazioni dell'algebra e che contiene gli elementi necessari per essere anch'essa un'algebra. Questo vuol dire:

- $B$  è un sottospazio vettoriale di  $A$  (quindi chiuso per somma e moltiplicazione scalare).
- $B$  è chiuso rispetto alla moltiplicazione definita in  $A$  (cioè se  $x, y \in B$  allora anche  $x \circ y \in B$ ).

Un esempio semplice è: preso  $M_2(\mathbb{R})$ , cioè l'insieme delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti reali, una sua sottoalgebra è l'insieme delle matrici diagonali, poiché è un sottospazio vettoriale (possiamo sommare matrici diagonali e avere ancora matrici diagonali) ed il prodotto di due matrici diagonali è ancora una matrice diagonale.

**Definizione 14** Un gruppo  $G$  si dice *semplice* se non ha sottogruppi invarianti. Invece, un gruppo è detto *semi-semplice* se non ha sottogruppi invarianti abeliani.

Un esempio è  $SO(3)$ , che ha come sottogruppo le rotazioni tridimensionali attorno ad un'asse, ma che non è un sottogruppo invariante, dunque,  $SO(3)$  è semplice.

In Fisica i gruppi semi-semplici sono particolarmente importanti. Per i gruppi di Lie semi-semplici, gli operatori di Casimir permettono di catalogare le rappresentazioni irriducibili del gruppo. Il *teorema di Racah* nella teoria dei gruppi afferma che, per un gruppo di Lie semisemplice, il numero di operatori di Casimir indipendenti è uguale al rango del gruppo stesso. Questi operatori svolgono un ruolo cruciale nella classificazione delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi di Lie, poiché i loro autovalori possono essere utilizzati per etichettare tali rappresentazioni.

Riprendiamo alcune definizioni sulle rappresentazioni.

**Definizione 15** Se esiste una relazione univoca tra gli elementi del gruppo e le matrici che li rappresentano (cosa che non sempre succede visto che si possono avere rappresentazioni matriciali che rappresentano gli stessi elementi), allora la rappresentazione si dice **fedele**.

La rappresentazione fondamentale di un gruppo è la rappresentazione fedele con le dimensioni più piccole possibili.

Se il gruppo è abeliano la rappresentazione fondamentale è quella delle matrici  $1 \times 1$ , ossia, i numeri. Per i gruppi non abeliani (quelli non commutativi, ad esempio  $SU(2)$ ) la dimensionalità della rappresentazione fondamentale

dev'essere maggiore di 1, ovvero, bisogna avere delle matrici per soddisfare l'algebra e avere una rappresentazione fedele.

**Definizione 16** Una **rappresentazione unitaria** è una rappresentazione in cui le sue matrici sono unitarie, e dunque tali che  $UU^\dagger = \mathbb{1}$ .

Sono rappresentazioni particolarmente importanti poiché, se esistono, conservano il prodotto scalare tra i vettori di uno spazio vettoriale complesso (lo spazio di Hilbert).

**Definizione 17** Se  $D(g)$  è una rappresentazione dell'elemento  $g \in G$ , allora  $D^*(g)$  è la **rappresentazione complessa coniugata** del gruppo. Se chiamiamo  $T_i$  i generatori di  $G$ , allora:

$$D(g) = \exp\{i\alpha_i T^i\} \quad (3.2.18)$$

$$D^*(g) = \exp\{-i\alpha_i T^{*i}\} \quad (3.2.19)$$

per cui  $(-iT^{*i})$  sono i generatori della rappresentazione complessa coniugata.

Si può notare, ad esempio in  $SU(3)$ , che le due rappresentazioni dei generatori  $T^i$  e  $T^{*i}$  non sono equivalenti<sup>5</sup>, motivo per cui si hanno vettori di base, ovvero autovettori, diversi nelle due rappresentazioni. Invece, per  $SU(2)$  le rappresentazioni dei generatori coincidono.

**Definizione 18** Date due rappresentazioni  $D(g)$  e  $D'(g)$  del gruppo  $G$ , il prodotto diretto delle due rappresentazioni è la rappresentazione di  $g$  che agisce sullo spazio vettoriale ottenuto dal prodotto tensoriale tra i vettori base di  $D(g)$  e  $D'(g)$ :

$$[D(g) v_i] \otimes [D'(g) v'_k] = [D(g) \otimes D'(g)] (v_i \otimes v'_k) \quad (3.2.20)$$

Esempi rilevanti in Fisica sono: l'unificazione delle interazioni deboli (governate da  $SU(2)$ ) ed elettromagnetiche ( $U(1)$ )

$$SU(2) \otimes U(1)$$

e l'unificazione della forza nucleare forte ( $SU(3)$ ), nucleare debole ed elettromagnetica

$$SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1).$$

Ritorniamo un attimo sui gruppi di Lie. I generatori  $T^a$  generano lo spazio di un gruppo infinitesimo di trasformazioni, per cui, il commutatore di due generatori dev'essere una combinazione lineare di generatori. Le regole di commutazione le possiamo quindi scrivere come:

$$[T^a, T^b] = i f_c^{ab} T^c \quad (3.2.21)$$

in cui  $f_c^{ab}$  la chiamiamo **costanti di struttura** di  $G$ , poiché codifica la struttura non abeliana del gruppo.

<sup>5</sup>Questo vuol dire che  $ST_i S^{-1} \neq -T_i^*$ .

**Definizione 19** *L'algebra di Lie di un gruppo è l'insieme delle relazioni di commutazione dei suoi generatori, che ne definisce le costanti di struttura e quindi caratterizza le trasformazioni del gruppo (caratterizzando la sua legge di composizione).*

Per un gruppo di Lie vale anche<sup>6</sup> l'identità:

$$\left[ [T^a, T^b], T^c \right] + \left[ [T^b, T^c], T^a \right] + \left[ [T^c, T^a], T^b \right] = 0 \quad (3.2.24)$$

che si traduce in:

$$f_{d\ e}^{ab} f_e^{dc} + f_{d\ e}^{bc} f_e^{da} + f_{d\ e}^{ca} f_e^{db} = 0 \quad (3.2.25)$$

chiamata **identità di Jacobi**.

In generale si indica l'algebra di Lie con i caratteri in stile fraktur. Ad esempio, per il gruppo  $SO(3, 1)$  l'algebra la indichiamo con  $\mathfrak{so}(3, 1)$ .

Ancora riguardo le algebre. In generale, un'algebra è uno spazio vettoriale lineare dotato di una legge di composizione, l'algebra di Lie è lo spazio vettoriale astratto i cui elementi sono i generatori, la legge di composizione sono le regole di commutazione (anticommutazione o miste) e si deve verificare l'identità di Jacobi.

Una subalgebra dell'algebra di Lie,  $A$ , è chiamata **ideale**,  $I$ , se  $\forall i \in I, \forall a \in A$  si ha  $[i, a] \in I$ . Diciamo che un'algebra di Lie è **semplice** se ha solo ideali triviali (ad esempio, l'algebra stessa). Un'algebra è **semi-semplice** se non ha ideali abeliani. Un'algebra semplice è anche semi-semplice, ma non vale il viceversa.

Lo studio delle algebre di Lie semi-semplici è molto rilevante in Fisica, poiché le algebre di Lie semi-semplici sono esprimibili come somma diretta di algebre semplici. A livello di gruppi, un gruppo semi-semplice si potrà esprimere come prodotto diretto di gruppi semplici (vedi la sezione §3.4.4).

Diamo altre due definizioni importanti.

**Definizione 20** *Il rango dell'algebra di Lie è definito come il numero massimo di generatori commutanti tra loro. Dunque, da il numero di generatori che possono essere rappresentati da matrici diagonalizzabili simultaneamente.*

<sup>6</sup>In realtà ci sono anche altre due proprietà che non utilizzeremo molto:

1. Nella rappresentazione fondamentale vale:

$$\text{Tr}\{T^a T^b\} = \frac{1}{2} \gamma^{ab} \quad (3.2.22)$$

in cui  $\gamma^{ab}$  è la metrica di Killing.

2. Vale inoltre:

$$f^{abc} = f_{d\ e}^{ab} \gamma^{dc} \equiv \text{tensore completamente antisimmetrico.} \quad (3.2.23)$$

**Definizione 21** La *rappresentazione aggiunta* è quella in cui i generatori sono le costanti di struttura.

Il vantaggio è che il numero di generatori è uguale alla dimensionalità della rappresentazione aggiunta. Ad esempio, per  $SU(2)$  la dimensionalità della rappresentazione aggiunta è 3, i generatori sono  $\sigma_i$  con  $i = 1, 2, 3$ .

Aggiungiamo un'altra proprietà che potrebbe risultare utile, la **formula di Baker-Campbell-Hausdorff**, per il prodotto degli esponenziali di due operatori lineari  $A$  e  $B$ :

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] - \frac{1}{12}[B,[A,B]] + \dots} \quad (3.2.26)$$

in cui i puntini indicano i termini successivi, che comunque sono sempre esprimibili tramite commutatori. Questa formula mostra che la conoscenza dell'algebra di Lie è sufficiente per ricostruire il prodotto, in genere non commutativo, del corrispondente gruppo di Lie.

Vediamo le ultime nozioni necessarie per proseguire:

- È sempre vero che le rappresentazioni di un gruppo  $G$  sono rappresentazioni della sua algebra, ma non è sempre vero il contrario, ossia che tutte le rappresentazioni dell'algebra di  $G$  sono rappresentazioni del gruppo  $G$ . Vedi nella prossima sottosezione §3.3 l'esempio del gruppo  $SU(2)$ .
- Trovata l'algebra di un gruppo è possibile trovare un'operatore che commuti con tutti i generatori  $T_i$  del gruppo:

$$\exists C / [C, T_i] = 0 \quad \forall i \quad (3.2.27)$$

e l'operatore  $C$  è chiamato **operatore di Casimir**. In generale,  $C$  non è un'operatore lineare nei generatori. In ogni rappresentazione irriducibile  $C$  è un multiplo dell'operatore identità  $C = k\mathbb{1}$ . Le rappresentazioni irriducibili di un gruppo di Lie possono pertanto essere classificate in base agli autovalori degli operatori di Casimir, dove il numero minimo di operatori di Casimir necessari a specificare completamente tutte le rappresentazioni irriducibili è pari al rango dell'algebra.

Un'esempio è l'operatore  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$  di  $SO(3)$ , che in Meccanica Quantistica abbiamo utilizzato per completare lo SCOC e rimuovere la degenerazione.

- Possiamo enunciare, senza dimostrare, un teorema:

**Teorema 2** *Le rappresentazioni unitarie dei gruppi compatti sono finito dimensionali.*

Questo teorema si applica a gruppi compatti, quali sono  $SO(n)$  ed  $SU(n)$ . Vedi la sezione §3.3. Il gruppo di Lorentz  $SO(3,1)$  e quello di Poincaré  $ISO(3,1)$  non sono compatti, per cui il teorema non vale e le loro rappresentazioni unitarie sono infinito-dimensionali. Per la Teoria Quantistica dei Campi sono d'interesse: le rappresentazioni finito-dimensionali non unitarie del gruppo di Lorentz, utilizzate per descrivere i campi quantistici e in generale le osservabili, e le rappresentazioni infinito-dimensionali unitarie del gruppo di Poincaré, che sono realizzate tramite operatori unitari che garantiscono la conservazione della probabilità (dunque realizzate tramite operatori unitari). Ci interessano le trasformazioni unitarie poiché gli stati di un sistema fisico si trasformano secondo esse.

- Vediamo un concetto molto importante in Teoria Quantistica dei Campi, che ci viene in soccorso soprattutto quando siamo in presenza di gruppi non semplicemente connessi. Un **ricoprimento** (o rivestimento) di un gruppo è un altro gruppo topologico (cioè dotato di una struttura continua) che "copre" il primo in modo localmente identico, ma globalmente diverso. In parole povere il ricoprimento di un gruppo è a sua volta un gruppo, ma globalmente più ricco. Formalmente diciamo:

**Definizione 22** Un *gruppo di ricoprimento*  $\tilde{G}$  di un gruppo  $G$  è un gruppo topologico insieme ad una mappa continua suriettiva (cioè che copre tutto  $G$ ):

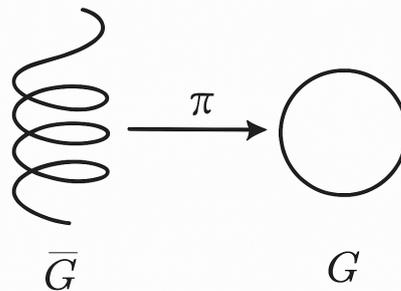
$$\pi : \tilde{G} \longrightarrow G \quad (3.2.28)$$

con la proprietà che localmente  $\pi$  è un'isomorfismo tra gruppi (cioè, localmente possiamo confondere  $\tilde{G}$  con  $G$ ).

Un **ricoprimento universale** di un gruppo  $G$  è il gruppo semplicemente connesso  $\tilde{G}$  che copre  $G$  in modo continuo. Utilizzeremo questa cosa per costruire rappresentazioni che non si possono definire su  $G$ , ad esempio quando vorremo utilizzare gli spinori, non definiti su  $SO(3)$ . Due esempi fondamentali, che analizzeremo meglio, sono:

- Il gruppo  $SU(2)$  è ricoprimento delle rotazioni ordinarie  $SO(3)$ . Si dice che l'omeomorfismo tra  $SU(2)$  ed  $SO(3)$  è di tipo  $2 \rightarrow 1$ , o che  $SU(2)$  è un ricoprimento doppio di  $SO(3)$ , poiché ad ogni rotazione di  $SO(3)$  corrispondono due rotazioni di  $SU(2)$ . Lo vedremo meglio nelle sezioni dedicate ai due gruppi.
- Il gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$  delle matrici  $2 \times 2$  complesse con  $\det = 1$  è un ricoprimento universale del gruppo delle trasformazioni di Lorentz proprie ortocrone  $SO(3,1)$ . Ogni trasformazione di Lorentz viene da due matrici di  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Un esempio grafico del concetto è raffigurato in figura 3.1.



**Figura 3.1:** Illustrazione grafica di  $\tilde{G}$  ricoprimento di  $G$ .

### 3.3 Alcuni esempi di gruppi di Lie rilevanti in Fisica

Vediamo in questa sezione alcuni esempi rilevanti in Fisica di gruppi di Lie.

In particolare, ci renderemo conto che è molto più comodo per noi utilizzare i generatori per studiare un gruppo, anziché gli elementi dello stesso. Ad esempio, il gruppo delle rotazioni è un gruppo continuo, poiché  $SO(3)$  è un gruppo con un numero infinito non numerabile di elementi. Per la Meccanica Quantistica, è subito chiaro, che  $SO(3)$  non è un gruppo molto bello, perché so che lo spazio di Hilbert è uno spazio separabile, che ha  $\infty$  elementi, ma numerabile. Però, se al posto di utilizzare gli  $\infty$  elementi di  $SO(3)$ , utilizzo i suoi generatori la situazione migliora. I generatori del gruppo delle rotazioni sono solamente 3:  $L_x$ ,  $L_y$  ed  $L_z$ .

#### 3.3.1 Il gruppo $SO(n)$

È il gruppo definito come:

$$SO(n) = \{\text{matrici ortogonali } nxn \text{ ad elementi reali e con } \det = 1\}.$$

Possiamo analizzare, ad esempio, il gruppo  $SO(3)$ , ossia, il gruppo delle matrici  $R$  reali ortogonali  $3 \times 3$  con determinante uguale ad 1. È il gruppo che rappresenta le rotazioni nello spazio tridimensionale<sup>7</sup>.  $SO(3)$  è un

<sup>7</sup>Nota che ci sono due modi di vedere una rotazione. Quando teniamo fisso il sistema di riferimento, ma ruotiamo il vettore posizione si parla di **trasformazione attiva**, quando teniamo fisso il vettore, ma ruotiamo il sistema di riferimento parliamo di **trasformazione passiva**.

gruppo di Lie compatto, connesso e non abeliano. La matrice  $R$  genera le trasformazioni di un vettore tridimensionale:

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = R\mathbf{x} \quad (3.3.1)$$

o in notazione tridimensionale<sup>8</sup>:

$$x^i \rightarrow x'^i = R^i_j x^j \quad , \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.3.2)$$

Conosciamo bene, ad esempio, una rotazione attorno l'asse  $z$  (è analogo per rotazioni attorno  $x$  o  $y$ ):

$$R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

se consideriamo  $\theta_z \ll 1$ , la matrice  $R_z$  diventa:

$$R_z(\theta_z \ll 1) \sim \mathbb{1} + \theta_z \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \quad (3.3.4)$$

in cui possiamo individuare per definizione il generatore. la matrice che compare dietro  $\theta_z$  è appunto  $iT^3$ , e di conseguenza:

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.5)$$

Possiamo fare lo stesso procedimento anche per rotazioni attorno l'asse  $x$  ed  $y$  (le matrici di rotazione attorno ad un'asse si costruiscono ponendo 1 nella riga-colonna dell'asse di rotazione e la matrice 2x2 di sin e cos, così com'è in  $R_z$ , nell'altro blocco) e determinare  $T^1$  e  $T^2$  (vedi p.15 di Salmé [7] o p. 13 di Bastianelli [1]), in questo modo, avendo espressioni esplicite dei generatori si può determinare facilmente l'algebra di Lie del gruppo, che risulta essere:

$$[T^i, T^j] = i\varepsilon^{ijk} T^k. \quad (3.3.6)$$

Da (3.3.6) si vede che  $SO(3)$  non è abeliano<sup>9</sup>. L'algebra trovata è stata ricavata considerando la rappresentazione definente, ma è anche possibile considerare tale algebra come l'algebra astratta di  $SO(3)$  per poter studiare le diverse rappresentazioni irriducibili.

Abbiamo anche già detto che le rappresentazioni irriducibili dell'algebra di Lie corrispondono alle rappresentazioni infinitesime del gruppo e che

<sup>8</sup>Nota che in questo caso mettere indici alti o bassi è irrilevante, poiché la metrica in  $\mathbb{R}^3$  è  $\delta_{ij}$ .

<sup>9</sup>Nota però che  $SO(2)$  è un gruppo abeliano, vedi p. 12 di Bastianelli [1].

esponenziandole possiamo ottenere le trasformazioni finite, che forniscono una rappresentazione del gruppo.

Il gruppo  $SO(3)$  è rilevante in Fisica perché se rinominiamo  $T^i = J^i$  (e ci mettiamo in unità naturali,  $\hbar = 1$ ) allora riconosciamo:

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk} J^k. \quad (3.3.7)$$

che è l'algebra quantistica del momento angolare, il cui studio delle rappresentazioni unitarie irriducibili può essere risolto esplicitamente con i metodi visti in Meccanica Quantistica. La rappresentazione fondamentale di  $SO(3)$  è infatti data dalle matrici che operano sugli stati  $|l, m\rangle$ , autostati del momento angolare, e li mesolano tra loro. Le rappresentazioni irriducibili di  $SO(3)$  sono date dalle armoniche sferiche  $Y_l^m$ . Ad  $|l, m\rangle$  corrispondono le armoniche sferiche  $Y_l^m$ , che formano una base della rappresentazione di spin  $l$ , che è  $2l + 1$  dimensionale (infatti i valori possibili di  $m$  sono  $2l + 1$ ), quindi, la rappresentazione fondamentale (e irriducibile) di  $SO(3)$  è data da matrici  $(2l + 1)(2l + 1)$ -dimensionali.

Come visto, le rotazioni in  $\mathbb{R}^3$  dipendono in modo continuo da 3 parametri, che sono i tre angoli di Eulero, motivo per cui sono un gruppo continuo, ma anche compatto dal momento che essi variano nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ . Notiamo che abbiamo un gruppo connesso, poiché possiamo passare con continuità dalla matrice identità ( $\delta_{ij}$ ) ad una qualsiasi rotazione, visto che la dipendenza dagli angoli è data dalle funzioni analitiche seno e coseno. Chiamiamo gruppo delle rotazioni **proprie** il gruppo delle matrici  $3 \times 3$  (rotazioni in  $\mathbb{R}^3$ ) poiché sono connesse con continuità all'identità. Le rotazioni in  $\mathbb{R}^3$  sono rappresentate da matrici  $3 \times 3$ , ma appena cominciano ad agire su spazi funzionali la loro rappresentazione può dimensionalità o assumere una forma differenziale (in questo caso si parla di dimensionalità infinita della rappresentazione).

Il gruppo delle rotazioni proprie si indica con  $SO(3)$ , come ben sappiamo. L'aggettivo ortogonale ci indica un'importante proprietà delle rotazioni, ossia che il prodotto scalare tra due vettori non cambia se applichiamo la stessa rotazione ai due vettori (vedi p.13 di Salmé [7]). Come ultima osservazione, che tornerà utile nella sezione §3.4.1, è utile sottolineare la differenza di  $SO(3)$  con il gruppo  $O(3)$ , di cui  $SO(3)$  è sottogruppo: il gruppo  $O(3)$  contiene anche l'inversione spaziale  $I_s$  (per cui si ha  $\det\{I_s\} = -1$ ), che non può essere connessa con continuità con l'identità, diversamente dalle rotazioni proprie<sup>10</sup>.

Si noti un'ultima cosa. L'algebra 3.3.6 non è valida per  $SO(n)$ , ma solo per  $n = 3$ . Per generalizzare si può indicare  $T^1 = T^{23}$  (poiché  $T^1$  genera

<sup>10</sup>Sarà proprio questo il motivo per cui ci interesserà solo  $SO(3)$  quando studieremo il gruppo di Lorentz.

una rotazione nel piano 2-3) e così via  $T^2 = T^{31}$ ,  $T^3 = T^{12}$ . Gli elementi di matrice, è dimostrabile, possono essere scritti come:

$$(T^1)^i_j = (T^{23})^i_j = -i(\delta^{2i}\delta^3_j - \delta^{3i}\delta^2_j) \quad (3.3.8)$$

e analoghe per  $T^{31}$  e  $T^{12}$ . Si ottiene quindi:

$$(T^{kl})^i_j = -i(\delta^{ki}\delta^l_j - \delta^{li}\delta^k_j) \quad (3.3.9)$$

che può essere utilizzata per calcolare l'algebra di Lie di  $SO(3)$ . Si trova:

$$[T^{kl}, T^{ij}] = -i\delta^{li}T^{kj} + i\delta^{ki}T^{lj} + i\delta^{lj}T^{ki} - i\delta^{kj}T^{li}. \quad (3.3.10)$$

Nella forma (3.3.10) è valida per il generico gruppo  $SO(n)$  e non solo nel caso  $n = 3$ . Naturalmente, gli indici assumono valori da 1 ad  $n$ . Inoltre, sostituendo la metrica euclidea  $\delta_{ij}$  con la metrica di Minkowski  $g_{ij}$ , appropriata per uno spazio-tempo con  $n$  spaziali ed  $m$ , la relazione (3.3.10) è l'algebra di Lie di  $SO(n, m)$ .

### 3.3.2 Il gruppo $SU(n)$

È il gruppo definito come:

$$SU(n) = \{\text{matrici complesse unitarie } nxn \text{ con } \det = 1\}.$$

Uno dei gruppi più importanti in Fisica è  $SU(2)$ , vediamo nel dettaglio.

Possiamo scrivere matrici che differiscono infinitesimalmente dalla matrice unità come segue:

$$g \in SU(2) \quad , \quad g = \mathbb{1} + iT \quad T^i_j \ll 1. \quad (3.3.11)$$

Possiamo vedere che la richiesta che  $g^\dagger = 1 - iT^\dagger$  coincida con  $g^{-1} = 1 - iT$  (ossia che  $g$  siano matrici unitarie), implica che le matrici  $T$  siano hermitiane:

$$T = T^\dagger. \quad (3.3.12)$$

Inoltre, la richiesta di  $\det\{g\} = 1$  ci fa vedere che:

$$\det\{g\} = 1 + i \text{Tr}\{T\} \implies \text{Tr}\{T\} = 0. \quad (3.3.13)$$

Una base di matrici 2x2 hermitiane a traccia nulla sono date dalle matrici di Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.3.14)$$

La rappresentazione fondamentale di  $SU(2)$  si indica con  $D^{1/2}$ . L'algebra ha dimensione 3 e rango 1 (cioè i generatori commutano solo con se stessi, vedi

la regola di commutazione (3.3.17), quindi, avremo al massimo un solo generatore che ha una rappresentazione diagonale). Possiamo quindi esprimere un'arbitraria matrice  $T$  come una combinazione lineare delle  $\sigma^a$ :

$$T = \theta_a \frac{\sigma^a}{2} \quad , \quad a = 1, 2, 3 \quad (3.3.15)$$

in cui la normalizzazione (1/2) è stato scelto per pura comodità. La forma generica di un elemento del gruppo  $SU(2)$  è:

$$g = \exp\left\{i\theta_a \frac{\sigma^a}{2}\right\} = \exp\{iT\}. \quad (3.3.16)$$

Definiti i generatori infinitesimi è possibile trovare l'algebra di Lie di  $SU(2)$ :

$$[T^a, T^b] = i\varepsilon^{abc}T^c \quad (3.3.17)$$

che possiamo notare coincidere con l'algebra di Lie (3.3.6) di  $SO(3)$  (hanno le stesse costanti di struttura). Questo non è casuale, anzi ci dimostra che localmente sono lo stesso gruppo, anche se globalmente ci sono, ovviamente, differenze. In termini di geometria differenziale si dice che  $SU(2)$  è un ricoprimento del gruppo  $SO(3)$ . La differenza tra  $SO(3)$  ed  $SU(2)$  la si può vedere banalmente nelle rappresentazioni fondamentali. Un'ulteriore differenza, vista anche nel corso di Meccanica Quantistica 1 (vedi il capitolo §9), può essere vista facendo una rotazione di  $2\pi$  con rappresentazioni di  $SO(3)$  o  $SU(2)$ . Sappiamo che una trasformazione finita è ottenuta esponenziando trasformazioni infinitesime, in modo da renderle finite. Una rotazione finita  $g_3$ , in  $SU(2)$ , attorno l'asse  $z$  è ottenuta scegliendo  $\theta_3 = \theta$  e  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  in (3.3.15) ed esponenziando:

$$g_3(\theta) = e^{i\theta \frac{\sigma^3}{2}} \quad (3.3.18)$$

$$= 1 + i\theta \frac{\sigma^3}{2} + \frac{1}{2!} \left(i\theta \frac{\sigma^3}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(i\theta \frac{\sigma^3}{2}\right)^3 + \dots \quad (3.3.19)$$

$$= 1 + i \left(\frac{\theta}{2}\right) \sigma^3 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - i \frac{1}{3!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^3 \sigma^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^4 + \dots \quad (3.3.20)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^4 + \dots\right) + i\sigma^3 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \dots\right) \quad (3.3.21)$$

$$= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sigma^3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.3.22)$$

se prendiamo  $\theta = 2\pi$ , allora:

$$g_3(2\pi) = -1 \quad (3.3.23)$$

che non coincide con l'identità di  $SU(2)$ . Facendo la stessa cosa in  $SO(3)$  invece si ottiene  $g_3(2\pi) = 1$ . La trasformazione identità in  $SU(2)$  la si ottiene solo per  $\theta = 4\pi$ . Questa appena vista è la nota proprietà di rotazione di uno spinore. Possiamo vedere l'esistenza di un'isomorfismo tra  $SU(2)$  ed  $SO(3)$ . Definiamo la matrice  $X = \vec{\sigma} \cdot \vec{x}$ , che sarà una matrice in  $GL(2, \mathbb{C})$ , con  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  e  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  vettore con componenti le matrici di Pauli. Possiamo calcolare facilmente com'è fatta  $X$ :

$$X = x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.3.24)$$

$$= \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \quad (3.3.25)$$

possiamo verificare che il modulo quadro del tri-vettore posizione sia dato dal determinante di  $X$ :

$$\det X = \det \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = -x_3^2 - (x_1^2 + x_2^2) = -|\vec{x}|^2 \quad (3.3.26)$$

ma anche che  $X$  è una matrice hermitiana, ovvero tale per cui  $X = X^\dagger$ , e a traccia nulla  $\text{Tr}X = 0$ . A questo punto, se prendessimo una generica matrice unitaria  $A \in SU(2)$ , quindi per cui  $AA^\dagger = \mathbb{1}$ , e che realizzi la trasformazione:

$$X \longrightarrow X' = AXA^{-1} \quad (3.3.27)$$

allora, troviamo che  $X'$  è ancora una matrice hermitiana, a traccia nulla e tale per cui  $\det X' = \det X$ . Quindi la trasformazione in questione preserva la norma del vettore  $\vec{x}$  e realizza una rotazione nello spazio tridimensionale e si tratta di una rappresentazione di  $SO(3)$ . Però, siccome  $A$  è una matrice bidimensionale complessa di  $SU(2)$ , la rappresentazione che abbiamo trovato è bidimensionale. Abbiamo in sostanza visto come un elemento di  $SU(2)$  generi una rotazione tridimensionale. È facile rendersi conto che se al posto di  $A$ , avessimo utilizzato  $-A$ , il risultato non sarebbe cambiato e per questo possiamo dire che la corrispondenza è  $2 : 1$  e si realizza l'isomorfismo:

$$SO(3) = \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2}. \quad (3.3.28)$$

L'algebra di  $SU(2)$  è la stessa di  $SO(3)$ , come abbiamo già notato, e i generatori sono dati dalle matrici di Pauli diviso 2 (3.3.16), poiché  $A \in SU(2)$  può essere scritta come  $e^{iH}$  con  $H$  hermitiana a traccia nulla ( $\det A = \det e^{iH} = e^{i\text{Tr}H}$ ), dunque  $H$  è una combinazione lineare delle matrici di Pauli. Infatti, in piena generalità possiamo scrivere (3.3.16).

Quello visto durante i conti può essere riscritto tramite una proprietà delle matrici  $\sigma$ . Una rotazione attorno un'asse generico  $\hat{n}$  può essere scritta

come:

$$A(\hat{n}\theta = \theta) = e^{i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (3.3.29)$$

In generale, dato un gruppo di Lie si individua una sola algebra, ma non è vero il viceversa. Data un'algebra possiamo individuare gruppi diversi, in relazione tra loro. Ad esempio, il gruppo  $SU(2)$  è omeomorfo<sup>11</sup> al gruppo  $SO(3)$ .  $SU(2)$  descrive le rotazioni degli stati corrispondenti a momenti angolari semi-interi ed interi, mentre  $SO(3)$  solo interi. L'omeomorfismo  $SU(2) \rightarrow SO(3)$  è del tipo  $2 \rightarrow 1$ , ma le loro algebre sono isomorfe<sup>12</sup>.

Oltre al commutatore dei generatori di  $SU(2)$ , si può calcolare l'anticommutatore tra due operatori. Possiamo vedere che:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (3.3.30)$$

che evidenzia l'asimmetria dei fermioni. Combinando le regole di commutazione (3.3.17) e di anticommutazione (3.3.30) si può scrivere l'utile relazione, valida per  $i \neq j$ :

$$\sigma_i \sigma_j = i\sigma_k. \quad (3.3.31)$$

Possiamo vedere che l'operatore di Casimir di  $SU(2)$  è:

$$T^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 \quad , \quad T_i = \frac{\sigma_i}{2}. \quad (3.3.32)$$

Delle volte però, occorre lavorare con matrici di dimensione più elevata. Quando abbiamo 1 particella di spin 1/2 mi basta una matrice 2x2, ma quando abbiamo 2 particelle di spin 1/2, allora andiamo in uno spazio a 4 dimensioni, e stiamo facendo:

$$D^{1/2} \otimes D^{1/2}. \quad (3.3.33)$$

Siamo in uno spazio a 4 dimensioni perché abbiamo 4 vettori di base:

$$\left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle_2 = \begin{cases} \Psi^{11} = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \Psi^{12} = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \Psi^{21} = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \Psi^{22} = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{cases} \quad (3.3.34)$$

ovvero un tensore a due indici:

$$\Psi^{ij} = \chi^i \chi^j \quad , \quad i, j = 1, 2. \quad (3.3.35)$$

<sup>11</sup>Ovvero, esiste una funzione che associa ad un elemento di un gruppo uno o più elementi di un altro gruppo, preservando la legge di composizione del gruppo.

<sup>12</sup>Quando l'omeomorfismo è biunivoco, quindi esiste una relazione uno a uno tra gli elementi dei gruppi, allora si chiama isomorfismo. Due gruppi isomorfi sono matematicamente indistinguibili.

Sullo spazi quadridimensionale operano gli elementi del gruppo prodotto diretto:

$$\exp\{iT_1\} \otimes \exp\{iT_2\} = \exp\{iT\} \quad (3.3.36)$$

grazie alla forma esponenziale e al fatto che  $T_1$  e  $T_2$  commutino.  $T$  è dato da  $T = T_1 + T_2$ . Componendo due spazi di dimensione 2 otteniamo uno spazio quadridimensionale, ma insieme ad una rappresentazione che non è irriducibile (infatti è 4x4). Però, sappiamo che vale (vedi p.32 di Salmé in cui fa le considerazioni sugli stati  $\Psi^{ij}$ ):

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3 \quad (3.3.37)$$

che vuol dire che la rappresentazione riducibile 4x4 si decompone in due rappresentazioni irriducibili 1x1 e 3x3, i cui vettori di base sono i ben noti vettori di singoletto e tripletto.

Ci sono (p.32-36) in Salmé [7] ulteriori discorsi riguardo il modo per ottenere una rappresentazione irriducibile tramite un metodo grafico e la trattazione (rapida) di un sistema di due o tre fermioni. Salmé tratta anche il caso dei coefficienti di Clebsch-Gordan, che non sono altro che un'applicazione della teoria dei gruppi, infatti, quando si costruiscono i vari coefficienti il procedimento che si fa è studiare la decomposizione del prodotto diretto di due rappresentazioni irriducibili di due gruppi in somma diretta di rappresentazioni irriducibili. Anche nelle pagine 6-10 di Bastianelli [1] vengono fatti un po' di discorsi sulle rappresentazioni irriducibili di  $SO(n)$  ed  $SU(n)$  e sulle decomposizioni in termini di somme dirette.

In Salmé [7] è anche presente (p. 37-47) l'esempio del gruppo  $SU(3)$ <sup>13</sup>, che gode di alcune proprietà in più rispetto  $SU(2)$  (rango 2, 2 operatori di Casimir e 2 generatori diagonalizzabili contemporaneamente) ed è fondamentale per l'applicazione alla fisica adronica. Nel modello standard  $SU(3)$  darà la simmetria di colore alla teoria.

### 3.3.3 Altri esempi rilevanti

**Gruppo delle fasi  $U(1)$**  È un gruppo definito da:

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} = \{e^{i\alpha} / \alpha \in \mathbb{R}\}$$

si vede quindi, che tale gruppo è definito tramite la sua rappresentazione fondamentale. Per trasformazioni infinitesime si ha:

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha + \dots \quad (3.3.38)$$

<sup>13</sup>Che nella rappresentazione fondamentale i generatori assumono la forma delle 8 matrici 3x3 di Gell-Mann  $\lambda^a$ , che generalizzano le matrici di Pauli per  $SU(2)$ .

ed il generatore infinitesimo è dato da  $T = 1$ , pensabile come una matrice  $1 \times 1$ , il quale produce l'algebra di Lie abeliana del gruppo  $U(1)$  data dal commutatore:

$$[T, T] = 0. \quad (3.3.39)$$

In base alle considerazioni fatte nella sezione §3.2 possiamo pensare all'algebra di Lie (3.3.39) come all'algebra di Lie astratta corrispondente al gruppo  $U(1)$ , che viene poi rappresentata da matrici diverse nelle diverse rappresentazioni. Siccome le rappresentazioni irriducibili del gruppo  $U(1)$  sono tutte unidimensionali (complesse), allora tutte queste matrici sono  $1 \times 1$  e dunque numeri, positivi o negativi, detti *carica*.

Nella rappresentazione di carica  $q$ , dove l'elemento  $e^{i\alpha}$  è rappresentato da  $e^{iq\alpha}$ , si vede che il generatore infinitesimo è rappresentato da  $T = q$  e soddisfa la stessa algebra (3.3.39).

La rappresentazione definita rappresenta un elemento di  $U(1)$  con  $e^{i\alpha}$  che "ruota" naturalmente un vettore complesso unidimensionale. Infatti, definendo il numero complesso  $z = x + iy$  e considerando una generica trasformazione su  $SO(2)$ , ovvero,  $e^{i\theta T} = \cos \theta + iT \sin \theta$  si ottiene:

$$z' = x' + iy' = (x \cos \theta + y \sin \theta) + i(-x \sin \theta + y \cos \theta) = e^{-i\theta} z \quad (3.3.40)$$

e si può dire che i gruppi  $SO(2)$  ed  $U(1)$  sono equivalenti e descrivono lo stesso gruppo abeliano.

Il gruppo  $U(1)$  è rilevante in Fisica poiché le equazioni di Maxwell sono invarianti per trasformazioni di fase, rappresentate appunto da  $U(1)$ . In più, il gruppo di simmetria  $U(1)$  è usato in Fisica quando ci sono numeri quantici additivi quantizzati. Quanto analizzato sinora permette anche di interpretare le possibili cariche (generalizzate, ad esempio elettrica, di colore, etc.) delle particelle come associate ad una rappresentazione del gruppo di simmetria. Ad esempio, nel modello standard compare nel gruppo di simmetria della teoria  $U(1)$ , che è proprio il gruppo di iper-carica.

**Gruppo  $U(n)$**  È il gruppo:

$$U(n) = \{\text{matrici unitarie } nxn\}.$$

Ricorda che unitarie vuol dire tali per cui  $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$  e sono necessariamente matrici  $\mathbb{C}$ .

**Gruppo  $O(n)$**  È il gruppo:

$$O(n) = \{\text{matrici ortogonali } nxn \text{ ad elementi reali}\}.$$

Ricorda che ortogonali vuol dire tali per cui  $U^T = U^{-1}$  e che  $U^T U = U U^T = \mathbb{1}$ .

**Gruppo  $SO(n, m)$**  È il gruppo:

$$SO(n, m) = \{\text{sottogruppo del gruppo di Lorentz con} \\ \det\{g\} = 1 \text{ e geometria Minkowskiana } n, m\}.$$

**Gruppo  $SL(n, \mathbb{R})$**  , ma anche  $SL(n, \mathbb{C})$ . È il gruppo:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{\text{gruppo unimodulare (lascia invariato } x^2 = x^\mu x_\mu) \\ \text{in } n \text{ dimensioni ad elementi reali}\}.$$

Nota che  $SL(n, \mathbb{R})$  da una rappresentazione 2-dimensionale di  $L_+^\uparrow$ .

### 3.4 Il gruppo di Lorentz

Passiamo ora a trattare uno dei gruppi fondamentali per la Fisica, il gruppo di Lorentz. Analizzeremo prima di tutto le trasformazioni di Lorentz ripassando quello visto nella Relatività Speciale, successivamente cercheremo i generatori e l'algebra del gruppo, guarderemo chi sono gli operatori di Casimir, studieremo le rappresentazioni scalare, spinoriale e vettoriale del gruppo e vedremo l'importante fatto che il gruppo di Lorentz fattorizzi nel prodotto di 2 sottoalgebre indipendenti.

#### 3.4.1 Trasformazioni di Lorentz

Cerchiamo di analizzare meglio in questa sezione le trasformazioni di Lorentz, ovvero, i costituenti del gruppo di Lorentz, analizzato meglio in seguito.

Abbiamo già detto che una generica trasformazione di Poincaré è del tipo (3.1.1) e accennato al fatto che le trasformazioni di Lorentz siano rappresentate dalle matrici  $\Lambda^\mu_\nu$ , ossia, che operano come:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu = \Lambda^\mu_0 x^0 + \Lambda^\mu_i x^i. \quad (3.4.1)$$

L'insieme delle matrici  $\Lambda$  che lasciano invariata la distanza spazio-temporale formano il gruppo di Lorentz omogeneo. Dall'invarianza spazio temporale tra due eventi dello spazio  $\mathbb{M}^4$  si ricava un'importante proprietà del tensore metrico  $g_{\mu\nu}$ . Deve valere<sup>14</sup>:

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho x^\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\sigma \quad (3.4.7)$$

$$= g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma \quad (3.4.8)$$

<sup>14</sup>Nota che questa cosa potrebbe essere calcolata anche con un procedimento leggermente più esplicito. Chiedendo che l'intervallo tra due punti dello spazio-tempo  $x^\mu$  e  $x'^\mu$  in un SR e  $\bar{x}^\mu$  ed  $\bar{x}'^\mu$  in un altro SR sia sempre la stessa (quindi invariante) porta a:

$$(x - x')^2 = (x - x')^\mu (x - x')_\mu = (x^0 - x'^0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 \quad (3.4.2)$$

le relazioni (3.4.7) e (3.4.8) dovendo essere vere  $\forall x^\rho, x^\sigma$  allora portano a:

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \quad (3.4.9)$$

che può essere anche scritta con indici alti:

$$g^{\rho\sigma} = g^{\mu\nu} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu. \quad (3.4.10)$$

In forma matriciale la relazione (3.4.9) è:

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (3.4.11)$$

Le relazioni (3.4.9) e (3.4.10) sono rappresentative dell'invarianza, della Relatività Speciale, rispetto ad una trasformazione di Lorentz. Nota anche che queste relazioni ci dicono che per le trasformazioni di Lorentz la metrica  $g$  descrive la trasformazione di similitudine che collega sue rappresentazioni.

A questo punto non sarebbe male capire come siano effettivamente fatte le matrici  $\Lambda$ . Sono sicuramente matrici 4x4 vivendo nello spazio di Minkowski, dunque hanno 16 componenti, ma non tutte indipendenti. La relazione della Relatività Speciale (3.4.9) permette di imporre 10 vincoli, essendo simmetrica nello scambio di  $\rho$  e  $\sigma$ , per cui i 3 + 2 + 1 elementi sotto la diagonale devono essere uguali ai 3 + 2 + 1 elementi sopra. Quindi le matrici  $\Lambda$  sono determinate da 16 - 10 = 6 parametri reali indipendenti. Gli elementi indipendenti sono 3 angoli di Eulero (per le rotazioni) e 3 componenti di velocità (per i boosts).

La relazione (3.4.9) ci è venuta in soccorso e ha rimosso alcune componenti tra tutte le possibili di  $\Lambda$ , ma ha ancora qualcosa da farci vedere. Infatti segue che:

$$\det\{\Lambda^T g \Lambda\} = \det\{g\} \implies \det\{\Lambda^T\} \det\{g\} \det\{\Lambda\} = \det\{g\} \quad (3.4.12)$$

$$(\det\{\Lambda\})^2 = 1 \implies \det\{\Lambda\} = \pm 1. \quad (3.4.13)$$

Chiamiamo:

- Trasformazione di Lorentz **propria** se  $\det\{\Lambda\} = +1$ .

$$(\bar{x} - \bar{x}')^2 = (\bar{x} - \bar{x}')^\mu (\bar{x} - \bar{x}')_\mu = \Lambda^\mu_\nu (x - x')^\nu g_{\mu\sigma} (\bar{x} - \bar{x}')^\sigma \quad (3.4.3)$$

$$= g_{\mu\sigma} \Lambda^\mu_\nu (x - x')^\nu \Lambda^\sigma_\rho (x - x')^\rho = \underbrace{g_{\mu\sigma} \Lambda^\mu_\nu \Lambda^\sigma_\rho}_{g_{\nu\rho}} (x - x')^\nu (x - x')^\rho \quad (3.4.4)$$

$$= g_{\nu\rho} (x - x')^\nu (x - x')^\rho = (x - x')^\nu (x - x')_\nu. \quad (3.4.5)$$

Nota che il pezzo di  $a^\mu$  si cancella perché stiamo valutando intervalli, cioè distanze nello spazio-tempo tra due punti, insensibili a traslazioni. Per cui, affinché l'intervallo spazio-temporale (la distanza  $ds^2$ ) sia un invariante di Lorentz devono valere (scritture equivalenti):

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma} \quad , \quad g^{\mu\nu} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu = g^{\rho\sigma}. \quad (3.4.6)$$

- Trasformazione di Lorentz **impropria** se  $\det\{\Lambda\} = -1$ .

La relazione (3.4.9) è piena di informazioni, infatti, se prendiamo l'elemento  $\rho = \sigma = 0$  possiamo vedere:

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_0\Lambda^\nu_0 = g_{00} \implies (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^i_0)^2 = 1 \quad (3.4.14)$$

$$\implies (\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \implies |\Lambda^0_0| \geq 1. \quad (3.4.15)$$

Chiamiamo:

- Trasformazione di Lorentz **ortocrona** (sono trasformazioni che non invertono l'asse temporale e formano il sottogruppo  $O(1,3)$ ) se  $\Lambda^0_0 \geq +1$ .
- Trasformazione di Lorentz **anticrona** se  $\Lambda^0_0 \leq -1$ .

Possiamo fare uno schema delle 4 classi di trasformazioni di Lorentz che abbiamo visto:

- $L_+^\uparrow$  :  $\det\{\Lambda\} = +1$  ,  $\Lambda^0_0 \geq +1$  : TL proprie ortocrone (rotazioni).
- $L_-^\uparrow$  :  $\det\{\Lambda\} = -1$  ,  $\Lambda^0_0 \geq +1$  : TL improprie ortocrone (inversione spaziale  $x^i \rightarrow -x^i$ ).
- $L_+^\downarrow$  :  $\det\{\Lambda\} = +1$  ,  $\Lambda^0_0 \leq -1$  : TL proprie anticrone (inversione completa  $x^\mu \rightarrow -x^\mu$ ).
- $L_-^\downarrow$  :  $\det\{\Lambda\} = -1$  ,  $\Lambda^0_0 \leq -1$  : TL improprie anticrone (inversione temporale  $x^0 \rightarrow -x^0$ ).

Le trasformazioni che ci interesseranno sono quelle  $L_+^\uparrow$  (con  $\det = +1$  e  $\Lambda^0_0 \geq 1$ ), ovvero quelle proprie ed ortocrone. Queste trasformazioni sono connesse con continuità all'identità e formano il sottogruppo  $SO(3,1)$  detto **gruppo proprio ortocrono di Lorentz** o **gruppo di Lorentz ristretto**. La parentesi  $(3,1)$  indica che la metrica è diagonale con 3 segni  $-$  ed 1  $+$ . A volte  $SO(3,1)$  si chiama anche gruppo di Lorentz proprio. Notiamo anche che il gruppo  $SO(3,1)$  non è compatto, poiché 3 dei 6 suoi parametri possono variare nell'intervallo  $(-\infty, +\infty)$ . Si noti che  $L_-$  non forma un gruppo, poiché il prodotto di due trasformazioni improprie è un TL propria. Anche le trasformazioni anticrone non formano un sottogruppo, mentre quelle ortocrone formano il sottogruppo  $L_+^\uparrow$ . L'unico sottogruppo connesso è  $L_+^\uparrow$ .

Una nota importante da fare è che ogni trasformazione di Lorentz si può scrivere come prodotto di una trasformazione ristretta e di una trasformazione del tipo  $L_+^\downarrow$ ,  $L_-^\uparrow$ ,  $L_-^\downarrow$ . In particolare, ogni trasformazione di Lorentz propria e ortocrona si può scomporre in un prodotto di un boost ed una rotazione. Noi per la nostra teoria ci concentreremo su queste.  $L_+^\uparrow$  è un gruppo

semisemplice (ha solo sottogruppi invarianti non-abeliani) e non compatto (comprendendo i boost). Il gruppo delle rotazioni è sottogruppi di  $L_+^\uparrow$ , mentre i boost sappiamo bene non formare sottogruppo.

Vediamo ora, come effettivamente potrebbero essere fatte le matrici  $\Lambda_\nu^\mu$ , analizzando le varie trasformazioni che fanno parte del gruppo di Lorentz.

**Rotazioni** Sono le trasformazioni ortocrone, non coinvolgono la componente temporale, e possono essere proprie o improprie. Le possiamo scrivere come:

$$x'^0 = x^0 \quad (3.4.16)$$

$$x'^i = R^{ij} x_j \quad (3.4.17)$$

in cui  $R^{ij}$  è una matrice ortogonale. Possiamo dare una rappresentazione a blocchi della matrice  $\Lambda$ :

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}. \quad (3.4.18)$$

In cui vediamo che  $\det\{\Lambda\} = \det\{R\}$ , dunque, se  $\det\{R\} = +1$ , allora abbiamo una trasformazione  $L_+^\uparrow$ , e se  $\det\{R\} = -1$  abbiamo  $L_-^\uparrow$ .

Le matrici  $R$  appartengono al gruppo delle rotazioni  $O(3)$ , dove la  $O$  sta per ortogonali  $R^T R = \mathbb{1}$ . Matrici ortogonali possono avere determinante solo uguale a  $\pm 1$ , se  $\det\{R\} = 1$ , allora le matrici  $R$  formano un sottogruppo di  $O(3)$ , chiamato gruppo speciale ortogonale  $SO(3)$ . Quando  $R \in SO(3)$ , le matrici  $\Lambda_R$  appartiene al gruppo che indichiamo con  $SO(3,1)$ .

Analizzeremo meglio nel corso del capitolo le caratteristiche di tale gruppo.

**Boosts** Sono le trasformazioni di velocità lungo una certa direzione (asse). I boost sono trasformazioni di Lorentz proprie e ortocrone, dunque in  $L_+^\uparrow$ . Un boost lungo l'asse  $x$  è rappresentato dalla matrice:

$$\Lambda_{B_x} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.19)$$

in cui si hanno i soliti parametri:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.4.20)$$

ma come sappiamo, i boost possono anche essere espressi in termini della rapidità  $\eta$ :

$$\eta = \tanh^{-1} \beta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (3.4.21)$$

da cui seguono:

$$\beta = \tanh \eta = \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \cosh \eta \quad (3.4.22)$$

in cui vediamo che siccome  $\beta \in [0, 1]$ , allora  $\eta \geq 0$ . La matrice di boost in termini di  $\eta$  diventa:

$$\Lambda_{B_x} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4.23)$$

Come vedremo meglio, i boost non formano un gruppo, a differenza delle rotazioni spaziali, poiché l'algebra dei commutatori non è chiusa, ossia, il commutatore di due boost non è ancora un boost.

**Inversione spaziale** È la trasformazione di parità. È una trasformazione del tipo:

$$x'^0 = x^0 \quad , \quad x'^i = -x^i \quad (3.4.24)$$

il che rende la matrice rappresentativa della trasformazione:

$$\Lambda_P = g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.4.25)$$

**Inversione temporale** È una trasformazione del tipo:

$$x'^0 = -x^0 \quad , \quad x'^i = x^i \quad (3.4.26)$$

il che rende la matrice rappresentativa della trasformazione tale per cui:

$$\Lambda_0^0 = -1 \quad , \quad \det\{\Lambda\} = -1 \quad (3.4.27)$$

dunque, una trasformazione di Lorentz impropria e anticrona, ossia in  $L_-^\downarrow$ .

**Inversione completa** Invertiamo tutti gli assi, dunque, è una trasformazione del tipo:

$$x'^0 = -x^0 \quad , \quad x'^i = -x^i \quad (3.4.28)$$

il che rende la matrice rappresentativa della trasformazione tale per cui:

$$\Lambda_0^0 = -1 \quad , \quad \det\{\Lambda\} = 1 \quad (3.4.29)$$

dunque, una trasformazione di Lorentz propria e anticrona, ossia in  $L_+^\downarrow$ .

### 3.4.2 Generatori e algebra del gruppo di Lorentz

Cominciamo considerando una trasformazione di Lorentz (TL) infinitesima:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \quad (3.4.30)$$

con  $|\omega^\mu{}_\nu| \ll 1 \quad \forall \mu, \nu$ . Chiamiamo  $\omega^\mu{}_\nu$  i parametri della trasformazione. Dalla condizione (3.4.9) della metrica otteniamo che<sup>15</sup>:

$$g_{\mu\nu} (\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho) (\delta^\nu{}_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma) = g_{\rho\sigma} \quad (3.4.31)$$

$$\underbrace{g_{\mu\nu} \delta^\mu{}_\rho \delta^\nu{}_\sigma}_{g_{\rho\sigma}} + \underbrace{\omega^\nu{}_\rho \delta^\nu{}_\sigma}_{\omega^\sigma{}_\rho} + \underbrace{\omega^\mu{}_\sigma \delta^\mu{}_\rho}_{\omega^\rho{}_\sigma} = g_{\rho\sigma} \quad (3.4.32)$$

$$g_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} \quad (3.4.33)$$

$$\implies \omega_{\sigma\rho} = -\omega_{\rho\sigma} \quad (3.4.34)$$

dunque, i parametri della TL devono essere antisimmetrici. Per cui, esistono solo 6 parametri indipendenti, che sono 3 angoli di Eulero e 3 parametri dei boost. È possibile riscrivere la TL infinitesima in modo da separare i parametri infinitesimi dai generatori delle TL infinitesimi, ma per farlo occorre ricordare quello visto per oggetti simmetrici e antisimmetrici nella sezione §3.1.2. Abbiamo visto che  $\omega_{\rho\sigma}$  sono antisimmetrici per scambio  $\rho \longleftrightarrow \sigma$  da (3.4.34), quindi, sappiamo che il loro prodotto con una quantità generica è non nullo solo sulla contrazione con la parte antisimmetrica di questa seconda quantità. Nello specifico vediamo<sup>16</sup>:

$$\omega_{\rho\sigma} g^{\mu\rho} g^\sigma{}_\nu = \omega_{\rho\sigma} \cdot \frac{1}{2} (g^{\mu\rho} g^\sigma{}_\nu - g^{\mu\sigma} g^\rho{}_\nu) \quad (3.4.35)$$

in cui la parte tra parentesi è la parte antisimmetrica di  $g^{\mu\rho} g^\sigma{}_\nu$ , antisimmetrizzata negli indici  $\rho$  e  $\sigma$ , che possiamo identificare con  $i (M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$ . Infatti, se proviamo a riprendere il discorso di provare a separare i parametri  $\omega_{\rho\sigma}$  dai generatori infinitesimi troviamo:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + g^{\mu\rho} g^\sigma{}_\nu \omega_{\rho\sigma} = \delta^\mu{}_\nu + \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (g^{\mu\rho} g^\sigma{}_\nu - g^{\mu\sigma} g^\rho{}_\nu) \quad (3.4.36)$$

$$= \delta^\mu{}_\nu + \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} i (M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu. \quad (3.4.37)$$

Dunque, vediamo che i generatori del gruppo di Lorentz sono 6 matrici antisimmetriche, tensori di rango 2, definite da:

$$(M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = -i (g^{\mu\rho} g^\sigma{}_\nu - g^{\mu\sigma} g^\rho{}_\nu). \quad (3.4.38)$$

Trovati i generatori del gruppo, quindi, sappiamo scrivere un generico elemento del gruppo, ovvero, una generica trasformazione di Lorentz (in forma esponenziale):

$$\Lambda = e^{\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma}} \quad (3.4.39)$$

<sup>15</sup>Trascurando  $\mathcal{O}(\omega^2)$ .

<sup>16</sup>Nota che vale:  $g^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ .

e sappiamo anche determinare l'algebra del gruppo:

$$\left[ M^{\lambda\tau}, M^{\rho\sigma} \right] = -i \left( g^{\lambda\sigma} M^{\tau\rho} + g^{\tau\rho} M^{\lambda\sigma} - g^{\lambda\rho} M^{\tau\sigma} - g^{\tau\sigma} M^{\lambda\rho} \right) \quad (3.4.40)$$

in cui possiamo notare che  $g^{\lambda\rho}$  è la costante di struttura. Nota, inoltre, che l'algebra (3.4.40) è identica all'algebra di  $SO(n, m)$  (3.3.10), ma attenzione che gli  $M^{\lambda\tau}$  non sono i generatori delle rotazioni  $J^{\lambda\tau}$ , o per lo meno non lo sono tutti.

L'algebra trovata (3.4.40) è l'algebra del gruppo  $SO(1, 3)$ , cioè il gruppo delle trasformazioni proprie di Lorentz. Noi saremo interessati solo a tale gruppo ( $SO(1, 3)$ ), poiché le trasformazioni improprie (quelle con  $\det\{\Lambda\} = -1$ ) non possono essere connesse con l'identità.

È possibile determinare l'algebra di Lorentz (3.4.40) per una rappresentazione generica e non per una quadri-dimensionale come la nostra, vedi p.19 di Gambino [3].

Se continuiamo ad indagare la natura e le proprietà delle matrici  $M$  è possibile trovare una diretta corrispondenza con i momenti angolari  $J^\mu$  e con i generatori dei boost  $K^i$ . Possiamo riscrivere i tensori  $M^{\mu\nu}$  come<sup>17</sup>:

$$J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M^{jk} \quad , \quad K^i = M^{0i} = -M^{i0} \quad (3.4.41)$$

in cui, sapendo che  $M^{\mu\nu}$  sono antisimmetrici, si ha  $K^{\mu\mu} = 0$ . Stiamo sostanzialmente associando le parti spaziali di  $M^{\rho\sigma}$  alle  $J_i$  e ai  $K^i$  le componenti di  $M^{\rho\sigma}$  quando abbiamo  $\rho = 0$  o  $\sigma = 0$ . Abbiamo, quindi, i vettori:

$$\vec{J} = \frac{1}{2} (M^{23}, M^{31}, M^{12}) \quad , \quad \vec{K} = (M^{01}, M^{02}, M^{03}) \quad (3.4.42)$$

Possiamo anche esprimere i parametri  $\omega_{\mu\nu}$  in termini di angoli di rotazione e rapidità:

$$\vec{\theta} = (\omega^{23}, \omega^{31}, \omega^{12}) \quad , \quad \vec{\eta} = (\omega^{01}, \omega^{02}, \omega^{03}) \quad (3.4.43)$$

Da queste definizioni possiamo vedere che:

$$\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\omega_{0i} M^{0i} + \omega_{i0} M^{i0} + \omega_{ij} M^{ij}) = -\vec{\eta} \cdot \vec{K} + \vec{\theta} \cdot \vec{J} \quad (3.4.44)$$

e che una generica TL (3.4.39) si riscrive come:

$$\Lambda = e^{i(\vec{\theta} \cdot \vec{J} - \vec{\eta} \cdot \vec{K})} \quad (3.4.45)$$

<sup>17</sup>In cui  $\varepsilon_{ijk}$  è il tensore di Levi-Civita completamente antisimmetrico.

È possibile verificare, vedi l'Appendice B, che i generatori (3.4.41) sono effettivamente i momenti angolari e i boost visti nella sezione §3.4.1. Presi i generatori, utilizzando l'unica rappresentazione che conosciamo del gruppo  $SO(3, 1)$ , è possibile vedere l'algebra<sup>18</sup>:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \quad , \quad [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k \quad , \quad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k. \quad (3.4.46)$$

Dalla prima delle (3.4.46) abbiamo la conferma definitiva che possiamo vedere i  $J_i$  come i generatori del gruppo di  $SO(3)$ . Come già sappiamo, le rotazioni di  $SO(3)$  formano un gruppo compatto avendo i parametri (angoli di Eulero) che variano in un intervallo chiuso e limitato. Possiamo anche dire che componendo rotazioni successive possiamo sempre tornare al punto di partenza, ciò evidenzia la proprietà dei gruppi compatti di avere volume finito.

Notiamo anche che i generatori dei boost non generano un'algebra chiusa, dal momento che il commutatore di due  $K_i$  non manda in un altro  $K_j$ , bensì in un  $J_j$ , altro operatore che non è generatore dei boost. Per questo motivo diciamo che le trasformazioni di velocità non formano un gruppo, e di conseguenza, non sono un sottogruppo del gruppo di Lorentz, a differenza delle rotazioni spaziali di  $SO(3)$ . Si può anche notare che se si fa un boost lungo una certa direzione, non si può ritornare al punto di partenza continuando a comporre boost lungo la stessa direzione e per questo si dice che i boost hanno volume infinito. Possiamo anche notare che i boost non formano un'insieme compatto, infatti, i parametri non variano su un intervallo limitato di valori. È vero che in Relatività Speciale le velocità sono limitate in  $[-c, +c]$ , ma nei due casi limite ( $v = \pm c$ ) il parametro  $\gamma \rightarrow \infty$  (e  $\beta = 1$ ), quindi, il boost non è definito.

Importante però notare che, se consideriamo tutti i generatori  $K^i$  e  $J^i$ , allora otteniamo un'algebra chiusa e di conseguenza un gruppo. Il gruppo che otteniamo è proprio il gruppo di Lorentz  $SO(3, 1)$  (o  $L_+^\uparrow$ ) delle trasformazioni di Lorentz proprie ed ortocrone, ovvero, con  $\det = +1$  e  $\Lambda_0^0 = +1$ .

L'ultima cosa che potremmo dire è che una generica rappresentazione di  $M_{\mu\nu}$  può essere data da:

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + S_{\mu\nu} \quad (3.4.47)$$

in cui individuiamo l'operatore  $L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$  e un'altro operatore  $S_{\mu\nu}$  hermitiano, con la stessa algebra di  $L_{\mu\nu}$  e che commuta con esso, ma che non dipende nè da  $x^\mu$  nè dalle sue derivate. La rappresentazione (3.4.47) è una rappresentazione differenziale.

<sup>18</sup>Nota che si può anche utilizzare la relazione (3.4.40). Possiamo fare riferimento alla sezione 4.1 delle note di Gambino [3] per la dimostrazione dell'algebra del gruppo di Lorentz.

### 3.4.3 Operatori di Casimir del gruppo di Lorentz

Cerchiamo ora di trovare gli operatori di Casimir del gruppo di Lorentz. Prima, però, capiamo perché è importante farlo. Partiamo da un esempio che conosciamo bene.

Prendiamo il gruppo delle rotazioni nello spazio tridimensionale  $SO(3)$ . Sappiamo bene che i generatori sono gli operatori di momento angolare  $L^i$  e, in realtà, sappiamo anche chi è l'operatore di Casimir (ossia colui che commuta con tutti i generatori  $L^i$ ), cioè:

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2. \quad (3.4.48)$$

In Meccanica Quantistica abbiamo visto che gli operatori di momento angolare non commutano e non possono essere diagonalizzati contemporaneamente. Però viene in soccorso  $L^2$ , poiché quello che abbiamo fatto a suo tempo è stato diagonalizzare  $L^2$  ed  $L_z$  ed etichettare gli stati fisici del sistema con gli autovalori di  $L^2$  ed  $L_z$  (ovvero  $\hbar l(l+1)$ ,  $\hbar m$ ). In altre parole, quindi, le rappresentazioni di  $SO(3)$  corrisponderanno alle etichette date dagli autovalori di  $L^2$  ed  $L_z$ , cioè da uno dei generatori e dall'operatore di Casimir.

In generale, quello per cui utilizzeremo gli operatori di Casimir sarà proprio questo, completare quello che in Meccanica Quantistica era lo SCOC ed etichettare gli stati fisici.

Torniamo al caso del gruppo di Lorentz. Gli operatori di Casimir, sicuramente, commutando con i generatori del gruppo, saranno invarianti per trasformazioni di Lorentz, cioè saranno degli scalari. Siccome abbiamo  $M^{\mu\nu}$  tensori di rango 2 antisimmetrici, ci sono due scelte ovvie:

$$\frac{1}{2}M^{\mu\nu}M_{\mu\nu} = J^2 - K^2 \quad (3.4.49)$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\mu\nu}M_{\rho\sigma} = \vec{J} \cdot \vec{K}. \quad (3.4.50)$$

Nel caso di (3.4.49) è un oggetto completamente simmetrico, mentre per (3.4.50) essendoci il tensore di Levi-Civita, è un oggetto completamente antisimmetrico.

Quindi, in analogia a quello detto per la Meccanica Quantistica, nel caso di  $SO(3,1)$  gli stati potranno essere identificati (etichettati) tramite gli autovalori relativi ad un generatore del gruppo e ai due operatori (3.4.49) e (3.4.50).

È facile verificare che gli operatori (3.4.49) e (3.4.50) commutano con tutti i generatori. Ad esempio:

$$[J^2 - K^2, J_i] = [J^2, J_i] - [K^2, J_i] = -K_l[K_l, J_i] - [K_l, J_i]K_l \quad (3.4.51)$$

$$= i\varepsilon_{ijk}\{K_l, K_k\} = 0. \quad (3.4.52)$$

### 3.4.4 L'algebra del gruppo di Lorentz fattorizza nel prodotto tensoriale di due sottoalgebre indipendenti

Quello che vedremo in questa sezione è, che a differenza della Meccanica Quantistica non relativistica in cui lo spin viene inglobato nella teoria a posteriori, l'algebra<sup>19</sup> di  $SO(3, 1)$  è isomorfa all'algebra del prodotto:

$$SU(2) \otimes SU(2) \quad (3.4.53)$$

ciò è molto importante, poiché nel momento in cui costruiremo una teoria invariante per Lorentz, allora avremo già lo spin inglobato in essa. Un'osservazione importante è che l'algebra  $SU(2)$  è rappresentata da matrici complesse  $2 \times 2$ , ma noi abbiamo visto che avremo bisogno di matrici  $4 \times 4$ , per cui, è necessario considerare 2 gruppi  $SU(2)$ , ovvero, il prodotto (3.4.53).

Torniamo al gruppo di Lorentz. L'algebra trovata (3.4.46) si può semplificare molto se, complessifichiamo  $\vec{J}$  e  $\vec{K}$  e definiamo i generatori:

$$\vec{N} = \frac{1}{2} (\vec{J} + i\vec{K}) \quad , \quad \vec{N}^\dagger = \frac{1}{2} (\vec{J} - i\vec{K}) \quad (3.4.54)$$

che sono rappresentazioni finito-dimensionale del gruppo di Lorentz, ma non sono unitarie, poiché sono l'una il complesso coniugato dell'altra. L'algebra di  $SO(3, 1)$  a questo punto diventa:

$$[N_i, N_i^\dagger] = 0 \quad , \quad [N_i, N_j] = i\varepsilon_{ijk} N^k \quad , \quad [N_i^\dagger, N_j^\dagger] = i\varepsilon_{ijk} N^{\dagger k} \quad (3.4.55)$$

è quindi evidente che  $N_i$  ed  $N_i^\dagger$  soddisfano indipendentemente l'algebra di  $SU(2)$ , con il vantaggio che le due sotto-algebre sono indipendenti.

Gli operatori di Casimir (3.4.49) e (3.4.50) sono dati da:

$$N_i N^i \quad , \quad N_i^\dagger N^{\dagger i} \quad (3.4.56)$$

con rispettivamente autovalori  $n(n+1)$  ed  $m(m+1)$ .

Dunque, l'algebra del gruppo  $L_+^\uparrow$  è localmente isomorfa all'algebra del prodotto 3.4.53. Possiamo classificare tutte le rappresentazioni di  $L_+^\uparrow$  partendo dalle rappresentazioni irriducibili di  $SU(2)$ , che conosciamo bene dalla Meccanica Quantistica non relativistica, e componendole (ossia un procedimento analogo a quando abbiamo composto momenti angolari). Le rappresentazioni di  $SU(2)$  sono etichettate dall'autovalore di  $J^2$ , cioè  $j(j+1)$ , e hanno dimensionalità  $2j+1$ . Nel caso di  $L_+^\uparrow$  utilizzeremo le etichette date dagli autovalori di  $N^2$  ed  $N^{\dagger 2}$ ,  $n(n+1)$  e  $m(m+1)$  rispettivamente, con  $n, m = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ .

<sup>19</sup>Attenzione, l'algebra, non il gruppo.

Le rappresentazioni di  $L_+^\dagger$  sono quindi etichettate dalla coppia  $(n, m)$ , mentre gli stati di una certa rappresentazione sono etichettati anche dagli autovalori di  $N_3$  ed  $N_3^\dagger$ .

**Nota** Le due sottoalgebre di  $N$  ed  $N^\dagger$  sono indipendenti, ma non lo sono le due rappresentazioni. Infatti, si può pensare ad una trasformazione di parità (che manda  $J_i \rightarrow -J_i$  e  $K_i \rightarrow -K_i$ ), oppure di hermitiana coniugazione (che cambia il segno di  $i$  e quindi scambia  $N \leftrightarrow N^\dagger$ ). Vediamo quindi che le rappresentazioni del gruppo di Lorentz non sono invarianti per trasformazioni di parità o di hermitiana coniugazione.

Nella nota 19 abbiamo accennato al fatto che l'isomorfismo vale al livello delle algebre di  $SO(3, 1)$  ed il prodotto (3.4.53), ma non dei gruppi. Infatti, l'isomorfismo non vale a livello di gruppo, ma solo di algebra, sotto la condizione che l'algebra di  $SU(2) \otimes SU(2)$  sia complessificata (come abbiamo fatto con  $N$  ed  $N^\dagger$ ). Infatti,  $SU(2) \otimes SU(2)$  non è il gruppo di ricoprimento universale di  $SO(3, 1)$ , bensì lo è  $SL(2, \mathbb{C})$ , che studieremo nella sezione §3.4.5. Il gruppo  $SO(3, 1)$  è isomorfo (localmente) a (gruppo quoziente):

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2} \quad (3.4.57)$$

in cui  $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$ . Il gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$  è un doppio ricoprimento di  $SO(3, 1)$ . Nota che si ha bisogno che anche  $SL(2, \mathbb{C})$  sia definito sui complessi.

### 3.4.5 Gruppo unimodulare $SL(2, \mathbb{C})$

Prima di studiare il gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$  ricordiamo cos'abbiamo imparato da  $SO(3)$  ed  $SU(2)$ .

Abbiamo visto che è possibile dare una rappresentazione di  $SO(3)$  (gruppo delle rotazioni) nel gruppo  $SU(2)$  (gruppo delle matrici complesse unitarie 2x2 con  $\det = 1$ ).

$SO(3)$  è localmente isomorfo ad  $SU(2)$  avendo la stessa algebra. Il gruppo di ricoprimento universale dell'algebra del momento angolare,  $SO(3)$ , è proprio  $SU(2)$ , che appunto, contiene  $SO(3)$  come sottogruppo. È vantaggioso utilizzare, in Meccanica Quantistica,  $SU(2)$  al posto di  $SO(3)$ , poiché quest'ultimo permette di vedere, tramite le sue rappresentazioni, solo gli spin interi, mentre  $SU(2)$  descrive rotazioni di spin sia intero che semi-intero. Alla rotazione  $R$  corrisponde la matrice complessa  $U$  di  $SU(2)$ :

$$R = e^{\varphi \hat{n} \cdot \vec{A}} \longleftrightarrow U = e^{-\frac{i}{2} \varphi \hat{n} \cdot \vec{\sigma}}. \quad (3.4.58)$$

Possiamo dire che  $SO(3)$  è localmente isomorfo al gruppo quoziente:

$$\frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2}. \quad (3.4.59)$$

C'è il gruppo  $\mathbb{Z}_2$  (Vedi il capitolo §1) poiché sappiamo bene che ad una rotazione in  $SO(3)$  corrispondono due rotazioni in  $SU(2)$ .

Possiamo fare discorsi analoghi anche per il gruppo di Lorentz  $SO(3, 1)$ . Come con  $SO(3)$  e  $SU(2)$  possiamo costruire un gruppo di ricoprimento universale per  $SO(3, 1)$ . Infatti, è possibile rappresentare il gruppo di Lorentz mediante matrici complesse  $2 \times 2$  con  $\det = 1$ , che costituiscono il gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$ . Le matrici di  $SL(2, \mathbb{C})$  sono quelle che mantengono invariato  $x^\mu x_\mu$ , ovvero matrici, in analogia a quanto fatto nella sezione §3.3.2:

$$X = x^\mu \sigma_\mu = x^0 \mathbb{1}_{2 \times 2} + \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \quad , \quad \det\{X\} = x_0^2 - \vec{x}^2 = x^\mu x_\mu \quad (3.4.60)$$

in cui abbiamo definito  $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$  e possiamo vedere che  $X = X^\dagger$ . Se prendiamo una generica matrice  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  e guardiamo la trasformazione:

$$X' = AXA^\dagger \quad (3.4.61)$$

possiamo notare che  $X' = X'^\dagger$  e che  $\det X = \det X'$ , per cui  $X'$  lascia invariato il modulo quadro del quadrivettore  $x^\mu$ . Pertanto, alla matrice  $A$  corrisponde una trasformazione di Lorentz  $\Lambda$ . In questo senso possiamo dire che il gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$  fornisce una rappresentazione spinoriale, in quanto agisce su vettori di  $\mathbb{C}^2$  detti **spinori**, di  $SO(3, 1)$ , così come succedeva per  $SO(3)$  ed  $SU(2)$ . Esattamente come  $SO(3) \rightarrow SU(2)$  permette di decrivere le rappresentazioni spinoriali come rappresentazioni ad un solo valore, ora,  $SO(3, 1) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$  include l'estensione relativistica delle proprietà spinoriali. Notiamo, sempre in analogia con quanto fatto §3.3.2, che le matrici  $A$  e  $-A$  corrispondono alla stessa  $\Lambda$ , per cui il gruppo  $SO(3, 1)$  è localmente isomorfo ad:

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}. \quad (3.4.62)$$

Il gruppo  $SU(2)$  è sottogruppo di  $SL(2, \mathbb{C})$ . Ogni matrice complessa di  $SL(2, \mathbb{C})$  fattorizza nel prodotto di una matrice di  $SU(2)$  per una matrice hermitiana positiva con  $\det = 1$ .

Ogni matrice di  $SL(2, \mathbb{C})$  può essere scritta come  $e^{iB}$ , con  $B$  matrice  $2 \times 2$  a traccia nulla<sup>20</sup>. Poiché le matrici  $B$  possono essere combinazioni complesse delle matrici di Pauli si ha:

$$A = e^{i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \pm i\vec{\eta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \quad (3.4.64)$$

<sup>20</sup>Poiché vale:

$$\det\{e^{iB}\} = e^{i\text{Tr}B} \quad (3.4.63)$$

e sappiamo che il determinante delle matrici di  $SL(2, \mathbb{C})$  è 1.

con  $\vec{\theta}$  e  $\vec{\eta}$  trivettori reali. Sappiamo bene che  $e^{i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}$  corrisponde ad una rotazione di un angolo  $\theta$  nella direzione  $\hat{\theta}$ . Il vettore  $\vec{\eta}$  può essere identificato con la rapidità poiché:

$$\vec{K} = \pm i \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad (3.4.65)$$

soddisfa l'algebra dei generatori dei boost. Quindi, nella rappresentazione bidimensionale, una TL con parametri  $\vec{\theta}$  e  $\vec{\eta}$  viene rappresentata con una matrice data da (3.4.64). Possiamo quindi scegliere, confrontando (3.4.45) e (3.4.64), i generatori di rotazioni e boost:

$$\vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad , \quad \vec{K} = \pm i \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad (3.4.66)$$

che portano ai generatori:

$$N = 0 \quad , \quad N^\dagger = \sigma \quad (3.4.67)$$

(o viceversa, a seconda del segno  $\pm$  che si prende). La scelta (3.4.67) è quella che genera la struttura spinoriale  $(0, \frac{1}{2})$  o  $(\frac{1}{2}, 0)$  (vedi la sezione §3.4.6).

### 3.4.6 Rappresentazione scalare, spinoriale e vettoriale

Come già accennato nella sezione §3.4.5 il gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$  fornisce una rappresentazione spinoriale di  $SO(3, 1)$ , così come succedeva per  $SO(3)$  ed  $SU(2)$  e che definendo gli operatori  $\vec{N}$  e  $\vec{N}^\dagger$  possiamo etichettare i sistemi con le coppie di valori  $(n, m)$ , autovalori degli operatori. Abbiamo anche detto che:

$$n, m = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (3.4.68)$$

Vediamo i diversi casi che si possono avere:

- $(0, 0)$  quindi abbiamo  $n = 0$  ed  $m = 0$ , che vuol dire:

$$\vec{N} = 0 \quad , \quad \vec{N}^\dagger = 0 \quad , \quad \vec{J} = 0 \quad , \quad \vec{K} = 0. \quad (3.4.69)$$

Questa è la rappresentazione **scalare**  $\phi$ , che è in uno spazio di dimensione 1 e ha parità definita, cioè è scalare o pseudo-scalare.

- $(\frac{1}{2}, 0)$  quindi abbiamo  $n = \frac{1}{2}$  ed  $m = 0$ , che vuol dire:

$$\vec{N} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad , \quad \vec{N}^\dagger = 0 \quad , \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad , \quad \vec{K} = -i \frac{\vec{\sigma}}{2}. \quad (3.4.70)$$

Questa è la rappresentazione **spinore left-handed** (sinistrorso)  $\psi_L$ , poiché è non nulla l'etichetta sulla sinistra. La generica trasformazione di Lorentz (3.4.45), o anche (3.4.64), diventa:

$$\xi = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\eta})}. \quad (3.4.71)$$

- $(0, \frac{1}{2})$  quindi abbiamo  $n = 0$  ed  $m = \frac{1}{2}$ , che vuol dire:

$$\vec{N} = 0 \quad , \quad \vec{N}^\dagger = \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad , \quad \vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad , \quad \vec{K} = i\frac{\vec{\sigma}}{2}. \quad (3.4.72)$$

Questa è la rappresentazione **spinore right-handed** (destrorso)  $\psi_R$ . La generica trasformazione di Lorentz (3.4.45), o anche (3.4.64), diventa:

$$\bar{\xi} = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\eta})}. \quad (3.4.73)$$

Gli spinori  $\psi_L$  e  $\psi_R$  hanno 2 componenti (up e down) e si dicono **spinori di Weyl**, indicati tendenzialmente con  $\xi$  e  $\bar{\xi}$  e talvolta i loro indici sono indicati con  $\alpha$  e  $\dot{\alpha}$ . Si può notare che le due rappresentazioni  $(\frac{1}{2}, 0)$  e  $(0, \frac{1}{2})$  sono inequivalenti, infatti, per passare da una all'altra è necessaria una coniugazione complessa (vedi p.23 di Gambino [3]). Sono inoltre due rappresentazioni non unitarie.

Avremo a disposizione nella nostra teoria, ovviamente, anche altri valori di  $n$  ed  $m$ , ma anche rappresentazioni generate, con un procedimento simile alla composizione dei momenti angolari, a partire da quelle "base" elencate sopra. Infatti, date le rappresentazioni degli spinori left e right, generiamo le altre rappresentazioni moltiplicando le due di base. Ad esempio potremo avere:

- La rappresentazione di uno **spinore di Dirac** a 4 componenti:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (3.4.74)$$

- La rappresentazione con spin 1 e 4 componenti (quadrivettori)

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (3.4.75)$$

come ad esempio il quadripotenziale  $A^\mu$ . Questi sono i **campi vettoriali**.

- La composizione di due spinori left-handed:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0) \oplus (1, 0) \quad (3.4.76)$$

che si decompone nella somma diretta di uno scalare  $(0, 0)$  ed un tensore di rango 2,  $(1, 0)$ , antisimmetrico self-duale, ovvero tale che:

$$B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu} \quad , \quad B_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} B_{\rho\sigma} \quad (3.4.77)$$

come ad esempio il tensore di Maxwell  $F^{\mu\nu}$  che trasforma come  $(0, 1) \oplus (1, 0)$ . La rappresentazione  $(0, 1)$  corrisponderebbe ad un tensore antiself-duale, ovvero tale:

$$B_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} B_{\rho\sigma}. \quad (3.4.78)$$

### 3.4.7 Teorema di Wigner e regola di superselezione

In Meccanica Quantistica sappiamo bene che gli stati fisici sono raggi in uno spazio di Hilbert, per cui abbiamo una classe di equivalenza di vettori normalizzati che differiscono solo per un fattore di fase. Abbiamo anche che ad ogni simmetria del sistema corrisponde una trasformazione degli stati che preserva l'interpretazione probabilistica della teoria. Vale:

$$P(\Psi \rightarrow \Psi_1) = |\langle \Psi | \Psi_1 \rangle|^2 = P(\Psi' \rightarrow \Psi'_1) = |\langle \Psi' | \Psi'_1 \rangle|^2 \quad (3.4.79)$$

ovvero, la probabilità che lo stato  $\Psi$  transisca in  $\Psi_1$  è uguale anche dopo la trasformazione che manda  $\Psi \rightarrow \Psi'$  e  $\Psi_1 \rightarrow \Psi'_1$ . Wigner ha dimostrato che, per trasformazioni che appartengono ad un gruppo continuo e che sono connesse con l'identità, le trasformazioni  $\Psi \rightarrow \Psi'$  devono essere unitarie e lineari. In simboli possiamo scrivere, quello che va sotto il nome di **teorema di Wigner**:

$$\text{se } |\Psi'\rangle = U |\Psi\rangle \text{ con } UU^\dagger = \mathbb{1} \quad (3.4.80)$$

$$\langle \Psi' | \Psi'_1 \rangle = \langle \Psi | U^\dagger U | \Psi_1 \rangle = \langle \Psi | \Psi_1 \rangle \quad (3.4.81)$$

ciò è alla base delle trasformazioni unitarie in Meccanica Quantistica. Dunque, in presenza di una simmetria continua gli stati fisici non possono trasformarsi secondo rappresentazioni non unitarie del gruppo di simmetria. Allora, gli stati quanto-relativistici non possono trasformarsi secondo rappresentazioni finite del gruppo di Lorentz, in quanto esse non sono unitarie. Nonostante ciò, però, non ci dimentichiamo completamente delle rappresentazioni finite poiché sono comunque importanti perché le quantità (osservabili) fisiche (come quadrimpulso, campo EM, campi spinoriali, etc.) si trasformano per TL secondo rappresentazioni finite del gruppo di Lorentz.

Un altro modo di vedere il teorema di Wigner è:

*Un teoria quantistica formulata su uno spazio di Hilbert mantiene invariate le probabilità a in ogni sistema di riferimento inerziale, se e solo se la corrispondenza tra stati in differenti sistemi inerziali si realizza attraverso trasformazioni unitarie del gruppo di Poincaré.*

Se una rappresentazione è unitaria, allora non è finito dimensionale. Vediamo ad esempio  $\vec{J}$  e  $\vec{K}$  che sono terne hermitiane, i cui autostati sono stati fisici ed infinito dimensionali. Per questo la rappresentazione è infinito dimensionale.

Invece, una rappresentazione finito dimensionale non è unitaria. Vediamo ad esempio  $\vec{N}$  ed  $\vec{N}^\dagger$  che sono anch'esse terne hermitiane. Le osservabili si trasformano per TL secondo rappresentazioni finito dimensionali.

Parliamo anche della seconda parte del titolo della sezione, la regola di superselezione. Abbiamo visto nella sezione §3.3 che uno spinore cambia segno con una rotazione di  $2\pi$  attorno un qualsiasi asse. La stessa cosa accade per gli stati spinoriali. Il fatto è che questa rotazione non dovrebbe produrre effetti misurabili. Ciò si traduce nel chiedere che tutte le osservabili fisiche, cui corrispondono elementi di matrice di operatori hermitiani  $\langle B|O|A\rangle$ , devono essere invarianti per rotazioni di  $2\pi$ , che sono a loro volta rappresentate da un operatore unitario  $R_{2\pi}$ . Deve quindi valere:

$$\langle B|O|A\rangle = \langle R_{2\pi}B|O|R_{2\pi}A\rangle = \langle B|R_{2\pi}^\dagger OR_{2\pi}|A\rangle \quad (3.4.82)$$

$$\implies O = R_{2\pi}^\dagger OR_{2\pi} \quad (3.4.83)$$

che implica che tutte le osservabili fisiche  $O$  devono trasformarsi secondo rappresentazioni tensoriali (spin intero) del gruppo di Lorentz. Di conseguenza,  $O$  ha elementi non nulli solo tra stati fisici  $|A\rangle$  e  $|B\rangle$  che si comportano allo stesso modo per rotazioni di  $2\pi$ , dunque devono essere entrambi spinori o entrambi tensori. Questa si chiama **regola di superselezione**.

Facciamo un esempio. Prendiamo  $|\Psi_I\rangle$  uno stato di spin intero e  $|\Psi_S\rangle$  uno stato di spin semi-intero, allora:

$$\langle \Psi_S|O|\Psi_I\rangle = \underbrace{\langle \Psi_S|R_{2\pi}^\dagger}_{\langle \Psi_S|} O \underbrace{R_{2\pi}|\Psi_I\rangle}_{-|\Psi_I\rangle} = -\langle \Psi_S|O|\Psi_I\rangle = 0. \quad (3.4.84)$$

Tipiche osservabili che trattiamo sono i trivettori  $\vec{J}$  (momento angolare) ed  $\vec{S}$  (spin), oppure quadrivettori come il quadri-impulso  $p^\mu$ . La regola di superselezione implica (o riflette) pure l'impossibilità di preparare stati quantistici che siano sovrapposizioni lineari di stati spinoriali e tensoriali.

Una breve osservazione prima di passare al vero colosso del capitolo. Se avessimo fatto tutti i nostri discorsi lavorando in uno spazio euclideo, in cui il tempo lo avremmo sostituito con  $\sqrt{-1}t$ , avremmo avuto per tutto il tempo in mano la metrica  $-\delta_{\mu\nu}$  al posto di quella minkowskiana  $g_{\mu\nu}$ , ma avremmo ottenuto gli stessi risultati. La differenza sta nel fatto che saremmo arrivati ad un'algebra  $SO(4)$ , ossia delle rotazioni in 4 dimensioni.

Nello spazio minkowskiano abbiamo trovato, invece, l'algebra di  $SU(2) \otimes SU(2)$  attraverso due combinazioni hermitiane dei generatori  $(J_i \pm iK_i)$ . I due  $SU(2)$  sono completamente indipendenti tra loro, poiché non possono essere scambiati uno con l'altro da un'operazione di hermitiana coniugazione. I due  $SU(2)$  però sono collegati da trasformazioni di parità, infatti abbiamo visto che possiamo scambiarli con una trasformazione di quel tipo; ciò perde d'interesse nello spazio euclideo in cui tutte le direzioni sono equivalenti.

Facciamo sempre attenzione a non scambiare le proprietà dei generatori con quelle dell'algebra (o sottoalgebra) del gruppo.

### 3.5 Il gruppo di Poincaré

Come abbiamo già notato nel primo capitolo non vogliamo richiedere che la nostra teoria sia invariante solo per trasformazioni del gruppo di Lorentz, ma vogliamo anche includere nelle invarianze anche le traslazioni<sup>21</sup>, cioè trasformazioni del tipo:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (3.5.2)$$

in cui  $a^\mu$  è un quadrivettore indipendente da  $x$ . Vogliamo, quindi, l'invarianza per rotazioni e boost, identificati dalle matrici  $\Lambda^\mu_\nu$  come visto per il gruppo di Lorentz, e per traslazioni. Quindi chiediamo l'invarianza per trasformazioni:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (3.5.3)$$

che sono trasformazioni a 10 parametri (6 dai dal gruppo di Lorentz, i cui generatori abbiamo visto essere  $\vec{J}$  e  $\vec{K}$ , e gli altri 4 parametri che sono dati dalle traslazioni spazio-temporali). Il gruppo che formano trasformazioni del tipo (3.5.3) sappiamo già qual è, poiché come già accennato, il **gruppo di Poincaré** (o gruppo di Lorentz inomogeneo) è formato dell'"unione" del gruppo delle rotazioni e dei boost nello spazio quadridimensionale di Minkowski (il gruppo di Lorentz) con le traslazioni quadridimensionali. Indichiamo le trasformazioni (3.5.3) di Poincaré con TP e il gruppo con  $ISO(3, 1)$ , ovvero, come gruppo speciale ortogonale inomogeneo.

È possibile vedere subito che le trasformazioni di Poincaré non commutano con le trasformazioni di Lorentz. Considerando 2 TP successive con parametri  $(\Lambda_1, a_1)$  e  $(\Lambda_2, a_2)$  si vede che:

$$x^\mu \longrightarrow \Lambda_1^\mu_\nu x^\nu + a_1^\mu \longrightarrow \Lambda_2^\mu_\rho \Lambda_1^\rho_\nu x^\nu + \Lambda_1^\mu_\rho a_1^\rho + a_2^\mu \quad (3.5.4)$$

si vede quindi che il parametro di traslazione  $a_1$  viene ruotato, per cui, i generatori delle rotazioni non commutano con quelli delle traslazioni.

Occorre però notare che le trasformazioni di Lorentz omogenee  $\{\Lambda, 0\}$  e le traslazioni spazio-temporali  $\{\mathbb{1}, a\}$  formano sottogruppo, e mentre il secondo

<sup>21</sup>Formalmente il gruppo di Poincaré  $ISO(3, 1)$  è il prodotto semidiretto:

$$ISO(3, 1) = \mathbb{R}^4 \rtimes SO(3, 1). \quad (3.5.1)$$

Un gruppo prodotto semidiretto tra due gruppi  $N$  ed  $H$ ,  $G = N \rtimes H$ , è costruito da due sottogruppi normali (vedi la definizione 12) e un'azione di  $H$  su  $N$  che ne deforma la struttura del prodotto. La differenza con il prodotto diretto è che in  $G = N \times H$  non c'è interazione tra i due gruppi e i vari elementi commutano tra loro, invece, in  $G = N \rtimes H$  solo  $N$  è normale,  $H$  agisce su  $N$  con un'azione di gruppo e l'operazione di gruppo è "twistata" da questa azione. Nel nostro caso di interesse,  $ISO(3, 1) = \mathbb{R}^4 \rtimes SO(3, 1)$ , sappiamo bene che l'azione delle rotazioni (in  $SO(3, 1)$ ) non commuta con le traslazioni e applicare una rotazione ad un quadrivettore di traslazione restituisce sempre una traslazione, ma con un contributo rotazionale di momento angolare.

è abeliano (visto che le traslazioni commutano) il primo non lo è.

Il gruppo di Poincaré ricopre un ruolo fondamentale nella classificazione degli stati di singola particella in Meccanica Quantistica relativistica. Infatti, alcune delle rappresentazioni irriducibili unitarie (o trivialmente unidimensionali o necessariamente infinito dimensionali, poichè il gruppo è non compatto) sono utilizzate per rappresentare quello che si è osservato in natura, ossia, particelle massive con spin intero o semintero (rappresentazioni infinito dimensionali), particelle con massa nulla ed elicità  $h$  (rappresentazioni unidimensionali).

Nella teoria che costruiremo una particella è rappresentata da una rappresentazione irriducibile del gruppo di Poincaré. Come succedeva in Meccanica Quantistica.

### 3.5.1 Algebra del gruppo di Poincaré

In questa sottosezione cercheremo di capire qual è l'algebra del gruppo di Poincaré. Prima di fare ciò però dobbiamo capire com'è fatto il gruppo delle traslazioni.

Sappiamo dalla Meccanica Quantistica che il generatore delle traslazioni è l'operatore impulso<sup>22</sup>, nel nostro caso quadri-impulso, nello spazio delle configurazioni definito come:

$$P_\rho = -i\partial_\rho. \quad (3.5.7)$$

Infatti, l'operatore di derivata genera proprio il coefficiente nello sviluppo in serie della traslazione infinitesima:

$$\delta x^\mu = i\varepsilon^\rho P_\rho x^\mu \equiv \varepsilon^\mu \quad (3.5.8)$$

in cui  $\varepsilon^\mu$  sono i parametri della trasformazione, e ciò è il motivo per cui scriviamo per una generica trasformazione:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \quad (3.5.9)$$

ed un generico elemento del gruppo, che è chiuso, delle traslazioni:

$$U_t(\varepsilon) = e^{-i\varepsilon^\mu P_\mu} = e^{-i(\varepsilon^0 P_0 - \vec{\varepsilon} \cdot \vec{P})}. \quad (3.5.10)$$

---

<sup>22</sup>Lo vediamo prendendo una trasformazione generica (troncando Taylor al primo ordine):

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu = \varepsilon^\rho \partial_\rho x^\mu \quad (3.5.5)$$

sappiamo dalla (3.5.7) che  $P_\rho = -i\partial_\rho$ , quindi:

$$x'^\mu = x^\mu + i\varepsilon^\rho P_\rho x^\mu \quad (3.5.6)$$

e possiamo dire che  $P_\rho$  è il generatore delle traslazioni.

Non ci siamo fatti troppi problemi e abbiamo esteso  $\vec{p}$  allo spazio di Minkowski, dandogli una componente 0. Sappiamo, sempre dalla Meccanica Quantistica, che la traslazione temporale è rappresentata dall'operatore di evoluzione temporale (in cui compare  $\hat{H}$ ):

$$e^{iH\Delta t} = e^{iP^0\Delta t} \quad ; \quad P^0 \equiv H \quad , \quad \varepsilon^0 = \Delta t. \quad (3.5.11)$$

Quindi concludiamo che:

$$P^\mu = (P^0, \vec{P}) \equiv -i\partial_\mu \quad (3.5.12)$$

sono i **generatori del gruppo delle traslazioni**, la cui algebra è:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \quad (3.5.13)$$

che riflette la natura abeliana del gruppo delle traslazioni.

Cerchiamo a questo punto l'algebra del gruppo di Poincaré.<sup>23</sup> Dalla Meccanica Quantistica sappiamo che gli impulsi non commutano con i generatori del gruppo di Lorentz<sup>24</sup> ( $M_{\mu\nu}$ ):

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = -ig_{\mu\nu}P_\rho + ig_{\nu\rho}P_\mu \quad (3.5.14)$$

ed in particolare:

$$[P^i, P^j] = 0 \quad [P^i, H] = 0 \quad [J^i, H] = 0 \quad (3.5.15)$$

$$[K^i, P^j] = i\delta^{ij}H \quad [K^i, H] = iP^i \quad [K^i, K^j] = -i\varepsilon^{ijk}J^k \quad (3.5.16)$$

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk}J^k \quad [J^i, P^j] = i\varepsilon^{ijk}P^k \quad [J^i, K^j] = i\varepsilon^{ijk}K^k. \quad (3.5.17)$$

Notiamo che i primi commutatori (3.5.15) evidenziano il fatto che traslazioni e rotazioni sono costanti del moto, mentre dalla seconda delle (3.5.16) vediamo che i generatori dei boost,  $K^i$ , non commutano con  $H$ . È evidente che i 10 generatori (impulso e del gruppo di Lorentz) formino un'algebra chiusa, con sottoalgebre delle rotazioni e traslazioni. Notiamo anche che le traslazioni formano un gruppo non compatto. L'ultima riga (3.5.17) certifica il fatto che  $\vec{J}$ ,  $\vec{K}$  e  $\vec{P}$  sono trivettori. Notiamo anche dai primi due commutatori della seconda riga (3.5.16), che esprimono la variazione delle componenti di  $P^\mu$  per boost, che  $P^\mu$  si comporta, ovviamente, come un quadrivettore, cioè la componente temporale acquista un termine proporzionale all'impulso lungo la direzione del boost e viceversa, mentre le componenti trasversali non vengono modificate.

<sup>23</sup>Possiamo fare riferimento alla sezione 5.1 delle note di Gambino [3] per la dimostrazione dell'algebra del gruppo di Poincaré.

<sup>24</sup>Abbiamo anche visto che le TP non commutano con le TL.

Dalla classificazione di Wigner, che abbiamo visto nella sezione §3.4.7, le rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré sono infinito dimensionali (poiché  $P^\mu$  è continuo). La non compattezza del gruppo di Lorentz e del gruppo delle traslazioni, infatti, di porta a dire (in modo equivalente alla frase appena conclusa) che le rappresentazioni irriducibili finito-dimensionali non sono unitarie. Per le applicazioni fisiche a noi interesseranno le rappresentazioni irriducibili unitarie, dunque, per forza (Wigner ci dice così) infinito-dimensionali.

Una breve osservazione. Dalla teoria dei gruppi, ed in particolare dalla teoria delle rappresentazioni, sappiamo che possiamo avere rappresentazioni diverse per uno stesso gruppo.  $P^\mu$  con la rappresentazione differenziale (3.5.12) ha lo svantaggio che è di dimensione infinita, ma il vantaggio di essere unitaria. Se invece dessimo a  $P^\mu$  una rappresentazione matriciale  $4 \times 4$  avremmo una rappresentazione finita, ma con lo svantaggio di non essere unitaria.

Di solito si utilizzano rappresentazioni unitarie per gli stati, in modo da conservare la norma nel tempo (e per poter utilizzare l'operatore di evoluzione temporale  $U$ ), invece, per le osservabili (gli operatori) conviene utilizzare le rappresentazioni finite, in modo da saperli scrivere.

### 3.5.2 Casimir del gruppo di Poincaré

Visti chi sono i generatori e qual è l'algebra del gruppo possiamo cominciare a pensare chi sono gli operatori di Casimir del gruppo di Poincaré. In gruppi non semisemplici, come  $ISO(3,1)$  (poiché contiene le traslazioni, che sono un gruppo abeliano), gli operatori di Casimir esistono, ma non li possiamo trovare utilizzando solo il rango, ovvero sfruttando il teorema di Racah, dobbiamo costruirli esplicitamente usando l'algebra di Lie e cosa più importante sono legati a quantità fisiche conservate nelle rappresentazioni irriducibili. Un primo operatore di Casimir può essere trovato notando che la "lunghezza" del vettore  $P^\mu$  dev'essere invariante per trasformazioni del gruppo di Poincaré per definizione, quindi, è un operatore di Casimir:

$$P^2 = P_\mu P^\mu. \quad (3.5.18)$$

Il secondo Casimir è il quadrato dell'operatore che viene chiamato **operatore di Pauli-Lubanski**, che è un operatore completamente antisimmetrico, definito come:

$$W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma} \quad (3.5.19)$$

per il quale valgono:

$$W \cdot P = 0 \quad , \quad [W^\mu, P^\nu] = 0. \quad (3.5.20)$$

Inoltre,  $W^\mu$  si trasforma come un quadrivettore, così come  $P^\mu$ . Il commutatore di  $W^\mu$  e  $P^\nu$  è nullo per simmetria e per colpa della presenza di  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , questo vincolo comporta che solo 3 componenti di  $W^\mu$  sono indipendenti. In particolare si ottiene:

$$W^0 = \vec{P} \cdot \vec{J} \quad (3.5.21)$$

$$\vec{W} = P^0 \vec{J} - \vec{P} \times \vec{K} \quad (3.5.22)$$

con  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  se consideriamo anche rotazioni intrinseche e quindi ricordiamo la definizione di  $M^{\mu\nu}$  (3.4.47).

Il secondo operatore di Casimir abbiamo detto essere  $W^2$ . È facile verificare che  $P^2$  e  $W^2$  commutano con tutti i generatori del gruppo di Poincaré.

Come abbiamo già detto, le rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré sono infinito dimensionali, sono state classificate da Wigner<sup>25</sup> in termini degli operatori di Casimir.

È interessante trovare gli operatori di Casimir, poiché come già visto in Meccanica Quantistica e fatto per il gruppo di Lorentz, possiamo etichettare tutti gli stati fisici quantistici della teoria con gli autovalori dei due operatori di Casimir del gruppo di Poincaré.

### 3.5.3 Interpretazione fisica del vettore di Pauli-Lubanski

Nella sezione §3.5.2 abbiamo definito un operatore di Casimir come il quadrato dell'operatore di Pauli-Lubanski (3.5.19), ma non ci siamo molto preoccupati del senso di quella definizione, ci siamo semplicemente fidati dei due fisici che gli hanno dato il nome. Proviamo in questa sezione a capire meglio l'interpretazione fisica che si può dare al vettore (3.5.19).

Notiamo che il primo operatore di Casimir è:

$$P^\mu P_\mu = P^0 P_0 - \vec{P} \cdot \vec{P} = E^2 - |\vec{P}|^2 \equiv m^2 \quad (3.5.23)$$

che non è altro che la relazione di mass-shell, per cui, se abbiamo detto che gli stati fisici saranno etichettati dagli autovalori degli operatori di Casimir, allora i nostri stati saranno etichettati, per quello che riguarda  $P^2$ , da  $m$ . Gli stati che considereremo avranno massa definita.

Saremmo molto tentati, forse forzati dalla Meccanica Quantistica, dall'interpretare l'operatore  $W^\mu$  semplicemente come lo spin. Però ciò non è possibile, poiché l'intuizione di spin come momento angolare è persa nel momento in cui introduciamo i boost, che sono presenti perché inseriti in  $M_{\rho\sigma}$ .

<sup>25</sup>La scoperta delle rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré è in realtà dovuta a E. Majorana.

Quindi, possiamo fare un'affermazione abbastanza traumatica se ragioniamo in termini di Meccanica Quantistica non relativistica, ossia che, lo spin non è più un operatore di Casimir del gruppo di Lorentz.

Per capire come interpretare  $W^\mu$  dobbiamo distinguere un paio di situazioni, ma vedremo comunque che lo spin in qualche modo rientrerà nella conversazione. Continueremo il discorso anche nella sezione §3.5.4.

Prendiamo una **particella massiva**, con massa  $m$ , e mettiamoci nel suo sistema di riferimento di riposo, in cui:

$$P^\mu = (m, \vec{0}) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} W^i = -\frac{1}{2}m\varepsilon^{0ijk}M_{jk} = -mJ^i \\ W^0 = 0 \end{cases} \quad (3.5.24)$$

abbiamo utilizzato le definizioni (3.4.41), in cui ricordiamo che  $J^i$  è il generatore di una rotazione in 3 dimensioni. Però, identifichiamo  $J^i$  con lo spin  $S^i$ , poiché possiamo notare che  $J^i$  non può essere il momento angolare orbitale essendo  $\vec{L} = 0$  nel SR di riposo.

Dunque, vediamo da (3.5.24) che il vettore di Pauli-Lubanski, per una particella massiva e nel suo sistema di riferimento di riposo, è legato al vettore di spin. Sappiamo bene che l'operatore di Casimir, colui che ci fornisce con i suoi autovalori le etichette degli stati fisici, è  $W^2$ , ma sappiamo anche che gli autovalori di  $S^2$  sono  $s(s+1)$ . Quindi abbiamo:

$$W^i = -mS^i \quad \Longrightarrow \quad W^2 = m^2s(s+1). \quad (3.5.25)$$

Quindi, per una particella massiva  $W^2$  è la generalizzazione dello spin introdotto in Meccanica Quantistica non relativistica, in cui  $s$  assume valori discreti  $0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ .

Quindi questa rappresentazione è etichettata dalla massa  $m$  e dallo spin  $s$ . Diversi stati fisici all'interno della rappresentazione sono etichettati dagli autovalori di  $S^3$ , ovvero  $\{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$ , che sono  $2s+1$  termini e dagli autovalori continui di  $P_i$ . Le particelle massive con massa  $m$ , spin  $s$ , terza componente  $s^3$  e tri-impulso  $P^i$  hanno  $2s+1$  gradi di libertà.

Ora, analizziamo il caso di **particella massless**. Abbiamo:

$$P^\mu P_\mu = 0 \quad (3.5.26)$$

quindi, gli autovalori dell'operatore di Casimir  $P^2$  sono nulli, e avendo la definizione (3.5.19) di  $W^\mu$ , allora anche:

$$P^\mu W_\mu = 0 \quad , \quad W^\mu W_\mu = 0. \quad (3.5.27)$$

Quindi, complessivamente abbiamo le condizioni:

$$\begin{cases} P^\mu P_\mu = 0 \\ P^\mu W_\mu = 0 \\ W^\mu W_\mu = 0 \end{cases} \quad (3.5.28)$$

e l'unico modo che abbiamo per soddisfare queste 3 condizioni è che  $P^\mu$  e  $W^\mu$  siano proporzionali:

$$P^\mu = \alpha W^\mu \implies \begin{cases} W_\mu P^\mu = \alpha W_\mu W^\mu = 0 \\ P_\mu P^\mu = \alpha P_\mu W^\mu = 0 \end{cases} \quad (3.5.29)$$

per questo scriviamo:

$$W_\mu = h P_\mu \quad (3.5.30)$$

in cui chiamiamo il parametro  $h$  **elicità** e descrive il numero di componenti indipendenti di uno stato massless.

Se guardiamo l'azione di  $W^\mu$  su uno stato fisico di massa zero abbiamo:

$$W^\mu |p\rangle = h P^\mu |p\rangle. \quad (3.5.31)$$

Se a questo punto passiamo in un sistema di riferimento non di riposo, in cui  $P^\mu = (0, P^i)$ , si può vedere che:

$$h = \frac{\vec{J} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \quad (3.5.32)$$

ossia, che l'elicità è la proiezione dello spin sul vettore impulso. Ciò ci fa vedere quello raffigurato in figura 3.2. La relazione 3.5.32 la possiamo vedere abbastanza facilmente. Assumiamo che gli autovalori  $P^x = P^y = 0$  e quindi necessariamente che  $P^z = \pm P^0 \neq 0$ , in questo modo abbiamo:

$$W^0 = \vec{P} \cdot \vec{J} = P^z J^z, \quad W^3 = P^0 J^3 \quad (3.5.33)$$

e dunque:

$$W^0 |p, h\rangle = \vec{J} \cdot \vec{P} |p, h\rangle = \pm W^3 |p, h\rangle = \pm P^0 J^3 |p, h\rangle = \pm P^0 h |p, h\rangle \quad (3.5.34)$$

da cui vediamo:

$$\vec{J} \cdot \hat{P} |p, h\rangle = h |p, h\rangle \quad (3.5.35)$$

ovvero quello visto in (3.5.32).

Facciamo qualche osservazione prima di concludere. A causa della presenza del tensore completamente antisimmetrico  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  nella definizione di  $W^\mu$ , quest'ultimo si comporta come uno pseudo-vettore<sup>26</sup>: cambia segno sotto

<sup>26</sup>Il fatto che  $W^\mu$  sia completamente antisimmetrico è dato dalla presenza di  $J^\mu$ , mentre  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  fornisce solo la struttura pseudo-tensoriale.



**Figura 3.2:** Raffigurazione del tri-impulso e dello spin.

trasformazioni di parità. Di conseguenza, anche l'elicità  $h$  cambia segno per parità ( $h \rightarrow -h$ ), perché sotto parità l'impulso  $\vec{P}$  cambia segno, mentre lo spin  $\vec{J}$  no. Inoltre, per stati massless con spin  $s \neq 0$ , la rappresentazione irriducibile dell'algebra di Poincaré ammette solo due gradi di libertà fisici, corrispondenti a elicità  $\pm s$ , ossia a spin allineato o anti-allineato rispetto all'impulso  $P$ . Attenzione però, perché per le particelle massless non ogni valore di spin è possibile, infatti, solo alcuni valori di  $s$  si presentano nei modelli fisici (vedi ad esempio il fotone, il gravitone, etc.). In più, per le particelle massless, non esistendo un sistema di riferimento di riposo (poiché in ogni sistema di riferimento hanno sempre velocità  $v = c$ ), non è possibile definire lo spin  $s$ ; ciò che si può definire è l'elicità  $h$ . Ad esempio, il fotone ha spin 1 e due stati di elicità, il gravitone ha spin 2 e due stati di elicità, i neutrini hanno elicità  $\pm 1/2$ .

### 3.5.4 Piccolo gruppo

Possiamo addentrarci nell'ultima sezione del capitolo e possiamo parlare di quello che va sotto il nome di piccolo gruppo. Il **piccolo gruppo**, o gruppo di Wigner, è il gruppo delle trasformazioni che mantengono invariato il quadrimomento  $P^\mu$  di una particella. Il piccolo gruppo  $G_P$  è un sottogruppo di  $SO(3, 1)$  e gli elementi trasformanti come:

$$\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu = P^\mu \quad (3.5.36)$$

e sono anche indicate come rotazioni di Wigner. Il piccolo gruppo è importante per la Fisica perché, in generale, per classificare le particelle si guardano i due operatori di Casimir (vedi §3.5.2) e come si trasformano gli stati sotto trasformazioni del piccolo gruppo. Quindi, il piccolo gruppo determina i gradi di libertà interni della particella, ovvero spin per le particelle massive ed elicità per quelle massless.

Nel caso di una particella massiva si ha:

- Le componenti di  $P^\mu$  commutano tra loro, per cui gli autovalori formano una base dello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  della particella libera, che

potremmo indicare con  $|p, \xi\rangle$ , in cui  $\xi$  rappresenta tutti gli altri numeri quantici (etichette), se necessari, per specificare la particella (come spin, etc.).

- Esiste sempre una trasformazione di Lorentz che porta nel sistema di riferimento di riposo, in cui si ha:

$$P^\mu = (m, \vec{0}) \equiv k^\mu. \quad (3.5.37)$$

- Tutte le rotazioni spaziali lasciano invariato  $k^\mu$ , dunque, il piccolo gruppo nel caso massivo è  $SO(3)$ .
- Tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni sono unitarie. Il che ci piace perché Wigner ci insegna che per conoscere l'effetto di una trasformazione di Poincaré basta conoscere queste rappresentazioni unitarie irriducibili. Puoi vedere negli appunti di Gambino [3] come agiscono queste trasformazioni e come lo spin  $SU(2)$  emerge in modo naturale, senza dover ricorrere alle rappresentazioni irriducibili proiettive del gruppo delle rotazioni.
- Comunque, ad oggi si è convinti che tutte le particelle elementari abbiano spin  $\frac{1}{2}$  o 1 e la possibilità di particelle scalari, con spin 0 è legata all'esistenza del bosone di Higgs.

Nel caso di una particella massless si ha:

- \* Anche in questo caso le componenti di  $P^\mu$  commutano tra loro, per cui gli stati  $|p, \xi\rangle$  formano una base dello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ .
- \* Non è possibile andare nel sistema di riferimento di riposo, poiché una particella massless si muove sempre alla velocità della luce. Si sceglie allora un 4-impulso "standard":

$$P^\mu = (E, 0, 0, E) \equiv k^\mu, \quad (3.5.38)$$

corrispondente a una particella che si muove lungo l'asse  $z$ .

- \* Le trasformazioni di Lorentz che lasciano invariato  $k^\mu$  formano il gruppo  $ISO(2)$ , composto da rotazioni nel piano trasverso ( $SO(2)$ ) e traslazioni ( $\mathbb{R}^2$ ): questo è il piccolo gruppo per una particella massless.
- \* Tuttavia, le rappresentazioni irriducibili unitarie di  $ISO(2)$  sono infinite-dimensionali a meno che le traslazioni agiscano trivialmente. In fisica delle particelle, si considerano solo tali rappresentazioni: ciò riduce il piccolo gruppo effettivo a  $SO(2)$ .

- \* Le rappresentazioni irriducibili unitarie di  $SO(2)$  sono etichettate da un numero intero o semintero, che corrisponde all'elicità  $h$  della particella. Questo implica che una particella massless con spin  $s$  ha solo due stati fisici:  $h = \pm s$ .

Concludendo, tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo di Poincaré si possono classificare secondo gli autovalori degli operatori di Casimir, dunque, in termini di  $m$ ,  $s$  ed  $h$ :

- $P^2 = P^\mu P_\mu = m^2 > 0$ ,  $W^2 = m^2 s(s+1)$ : gli stati sono etichettati come  $|m, s\rangle$  con  $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$  e rappresentano particelle di massa  $m$  e spin  $s$ .
- $P^2 = P^\mu P_\mu = 0$ ,  $W^2 = 0$  e con  $W^\mu = \pm s P^\mu$ : gli stati sono etichettati come  $|h\rangle$  con  $h = \pm s$  con  $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$  e rappresentano particelle di massa nulla ed elicità  $h$ .
- $P^2 = P^\mu P_\mu = 0$ ,  $W^2 = k^2 > 0$ : gli stati rappresentano particelle di massa nulla, con stati di polarizzazione che variano in modo continuo,  $s$  continuo, e non sembrano avere applicazioni in QFT (almeno a livello perturbativo), per cui sono stati non realizzabili in natura.
- $P^2 = P^\mu P_\mu = m^2 < 0$ , rappresentano particelle, ad esempio i tachioni, superluminali con  $v > c$ , dunque non realizzabili in natura (inconsistenti con le interpretazioni fisiche usuali).
- $P^2 = P^\mu P_\mu = 0$ ,  $W^2 = 0$ : rappresentano il caso banale (scalare), ovvero il vuoto quantistico, quindi lo stato con nessuna particella.

### 3.6 Schema riassuntivo gruppi

Dopo questo lungo capitolo molto astratto sulla teoria dei gruppi e prima di passare nuovamente alla Fisica, vediamo in figura (3.3) un breve diagramma riassuntivo del gruppo di Poincaré e dei gruppi visti. Ricordiamo i vari componenti:

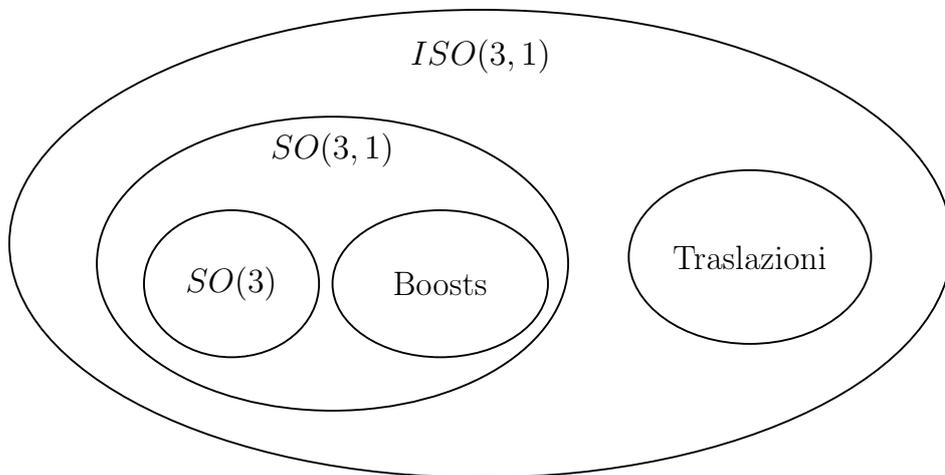
- $SO(3)$ : gruppo delle rotazioni spaziali in 3 dimensioni. I generatori dipendono da 3 parametri, è un gruppo compatto e chiuso, in più è il sottogruppo del gruppo di Lorentz  $SO(1, 3)$ .

Il gruppo  $O(3)$  è il gruppo delle rotazioni spaziali in 3 dimensioni, non necessariamente proprie, ovvero con  $\det = \pm 1$ .

- Boost: non formano un gruppo, poiché l'algebra non è chiusa.
- $SO(3, 1)$ : gruppo delle trasformazioni proprie di Lorentz. È sottogruppo del gruppo  $O(3, 1)$  ed è formato da trasformazioni di  $L_+^\uparrow$  (proprie ed

ortocrone), ossia da: Rotazioni + Boost. Le trasformazioni di  $SO(3, 1)$  formano un gruppo chiuso, ma non compatto.

- $O(3, 1)$ : gruppo di Lorentz. Il 3 e l'1 indicano quanti elementi positivi e negativi ci sono nella metrica.
- Traslazioni: sono trasformazioni che formano un gruppo abeliano, non compatto.
- $ISO(3, 1)$ : gruppo di Poincaré, formato da:  $SO(3, 1) +$  Traslazioni. È un gruppo non compatto per via della non compattezza delle traslazioni e dei boost.



**Figura 3.3:** Schema riassuntivo gruppi.

Quello che faremo è costruire una teoria proprio sul gruppo  $ISO(3, 1)$ . Ciò vuol dire che costruiremo una teoria basata sulle leggi di invarianza del sistema, ossia, costruiremo una teoria, in questo caso, relativistica.

Costruiremo un'azione invariante per tutte le trasformazioni che rispettano tutte le leggi di invarianza della Relatività Speciale, cioè, tutte le trasformazioni del gruppo di Poincaré.

Potremo descrivere il sistema quantistico-relativistico tramite una rappresentazione irriducibile del gruppo di Poincaré, poichè nel gruppo ci sono i suoi generatori, tra cui  $H$  che descrive la dinamica del sistema (in Fisica classica si ha l'equazione di Hamilton-Jacobi e in Meccanica Quantistica l'equazione di Schrodinger).



# Appendici



# Appendice A

## Unità naturali

Studiamo in questa sezione cosa si intende con unità naturali. In Fisica è molto comune utilizzare le *God givens units*, ossia, le cosiddette unità naturali. I tipi indipendenti di grandezze sono la lunghezza  $[L]$ , il tempo  $[T]$ , la massa  $[M]$  e - se consideriamo anche la termodinamica e la meccanica statistica - la temperatura  $[T]$ . In natura esistono delle costanti dimensionali universali, quali la velocità della luce  $c$ , la costante di Plank ridotta  $\hbar$ , la costante gravitazionale di Newton  $G_N$  e la costante di Boltzmann  $k$ . Usualmente vengono definite come unità naturali quelle in cui si pone:

$$\hbar = c = 1 \quad (\text{A.0.1})$$

e di conseguenza quando si modificano le quantità (in unità standard):

$$\begin{cases} \hbar = 6.66 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s} \\ c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ \hbar c \sim 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \end{cases} \implies \begin{cases} \hbar = 1 \\ c = 1 \\ \hbar c = 1. \end{cases}$$

Dire che la velocità della luce è una grandezza unitaria adimensionale implica che le unità di lunghezza e tempo sono equivalenti:

$$[L] = [T] \quad (\text{A.0.2})$$

di conseguenza anche:<sup>1</sup>

$$[E] = [\vec{p}] = [M] \quad (\text{A.0.4})$$

Per una forza  $F$  si ha:

$$[F] = [EL^{-1}] = [ML^{-1}] \quad (\text{A.0.5})$$

---

<sup>1</sup>Come conseguenza della relazione tra massa ed energia della Relatività Speciale:

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (\text{A.0.3})$$

per cui una quantità, tipo  $\hbar$ , che ha le dimensioni di un'azione, ovvero  $[ET]$ , in unità naturali è:

$$[\hbar] = [ET] = [ML] = 1 \quad \Longrightarrow \quad [M] = [L^{-1}]. \quad (\text{A.0.6})$$

Dalle relazioni viste tra le grandezze si ha solo una di esse realmente indipendente. Scegliendo la lunghezza come indipendente vale:

$$[L] = [T] \quad , \quad [E] = [\vec{p}] = [M] = [L^{-1}] \quad , \quad [F] = [L^{-2}]. \quad (\text{A.0.7})$$

Tipicamente, in QFT, le sezioni d'urto sono espresse in unità naturali, ma ciò non è molto comodo da utilizzare nel mondo fisico, poiché a noi servono unità standard. In generale (non solo per le sezioni d'urto), ricordando quali siano le unità di misura di  $\hbar$  e  $c$  è possibile passare dall'espressione di una grandezza in unità naturali in una sua espressione in unità del S.I. moltiplicando opportune potenze di  $\hbar$  e  $c$ . Si ha:

$$[\hbar] = ML^2T^{-1} \quad ; \quad [c] = LT^{-1}.$$

Vediamo un esempio. Prendiamo la sezione d'urto di Thomson in unità naturali e rendiamola in unità standard. Abbiamo il processo:

$$\gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^-$$

con l' $e^-$  libero e la sezione d'urto:

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi \frac{\alpha^2}{m_e^2} \quad (\text{A.0.8})$$

che riscriviamo come:

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi \frac{\alpha^2}{m_e^2} \hbar^x c^y \quad (\text{A.0.9})$$

di cui analizzando le dimensioni:

$$\begin{aligned} L^2 &= M^{-2} (ML^2T^{-1})^x (LT^{-1})^y \\ L^2 &= M^{x-2} L^{2x+y} T^{-x-y}. \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} L : 2 = 2x + y \\ M : 0 = x - 2 \\ T : 0 = -x - y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = -y \\ x = 2 \\ y = -2. \end{cases}$$

Dunque la sezione d'urto è:

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi \frac{\alpha^2}{m_e^2} \left( \frac{\hbar}{c} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{(m_e c^2)^2} (\hbar c)^2 \sim 64 \text{ fm}^2 = 64 \cdot 10^{-2} \text{ b}. \quad (\text{A.0.10})$$

## Appendice B

# Complementi di Relatività Speciale

### B.1 Legame tra rapidità, massa di riposo ed energia di un sistema

In questa breve appendice vedremo come sono legate tra loro la rapidità  $\eta$ , la massa a riposo di un sistema  $m$  e la sua energia. Tutto ciò ci tornerà utile per l'equazione di Dirac.

Ricordiamo che gli elementi della matrice che opera un boost si esprimono in termini della rapidità  $\eta$ , ricordiamo ciò che abbiamo visto nella sezione §3.4.1, come segue:

$$\cosh \eta = \gamma \quad , \quad \sinh \eta = \beta\gamma \quad , \quad \tanh \eta = \beta \quad (\text{B.1.1})$$

con:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{B.1.2})$$

e abbiamo le matrici di boost che si possono scrivere, ad esempio con un boost lungo  $x$ , come:

$$\Lambda_{B_x} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1.3})$$

Utilizzando la cinematica relativistica abbiamo la relazione:

$$E = \gamma mc^2 \quad , \quad |\vec{v}| = \frac{|\vec{p}|}{\gamma m} \quad , \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (\text{B.1.4})$$

esse ci permettono di trovare:

$$\cosh^2\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \gamma) = \frac{1}{2} \frac{mc^2}{mc^2} (1 + \gamma) = \frac{1}{2} \frac{mc^2 + \gamma mc^2}{mc^2} \quad (\text{B.1.5})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E + mc^2}{mc^2} \quad (\text{B.1.6})$$

o in unità naturali:

$$\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) = \sqrt{\frac{E + m}{2m}}. \quad (\text{B.1.7})$$

Analogamente:

$$\sinh^2\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{1}{2}(\gamma - 1) = \frac{1}{2} \frac{mc^2\gamma - mc^2}{mc^2} \quad (\text{B.1.8})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E - mc^2}{mc^2} \quad (\text{B.1.9})$$

e:

$$\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) = \sqrt{\frac{E - m}{2m}}. \quad (\text{B.1.10})$$

Possiamo ancora vedere:

$$\tanh\left(\frac{\eta}{2}\right) = \sqrt{\frac{E - m}{E + m}} = \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{E + m} = \frac{|\vec{p}|}{E + m}. \quad (\text{B.1.11})$$

## B.2 Generatori del gruppo di Lorentz

Verifichiamo brevemente che i generatori:

$$J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M^{jk}, \quad K^i = M^{0i} = -M^{i0} \quad (\text{B.2.1})$$

siano i momenti angolari e i boost. Dovremo utilizzare la relazione:

$$(M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = -i (g^{\mu\rho} g^\sigma{}_\nu - g^{\mu\sigma} g^\rho{}_\nu) \quad (\text{B.2.2})$$

e il fatto che  $g^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ . Calcoliamo, ad esempio,  $J_z$ , così da poterlo confrontare con la matrice trovata nella sezione §3.3, gli altri si calcolano in

modo analogo:

$$(J_z)^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}(\varepsilon_{3jk}M^{jk})^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}(\underbrace{\varepsilon_{312}}_{+1}M^{12} + \underbrace{\varepsilon_{321}}_{-1}\underbrace{M^{21}}_{-M^{12}})^\mu{}_\nu = (M^{12})^\mu{}_\nu \quad (\text{B.2.3})$$

$$= -i(g^{\mu 1}g^2{}_\nu - g^{\mu 2}g^1{}_\nu) \quad (\text{B.2.4})$$

$$= -i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1 \ 0) + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0 \ 0) \quad (\text{B.2.5})$$

$$= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2.6})$$

che possiamo vedere essere una matrice 4x4 in cui nella parte spaziale compare la matrice di rotazione attorno l'asse  $z$ . Analogamente:

$$(K^x)^\mu{}_\nu = (M^{01})^\mu{}_\nu \quad (\text{B.2.7})$$

$$= -i(g^{\mu 0}g^1{}_\nu - g^{\mu 1}g^0{}_\nu) \quad (\text{B.2.8})$$

$$= -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0 \ 0) + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (\text{B.2.9})$$

$$= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2.10})$$

che possiamo vedere essere il generatore di un boost lungo l'asse  $x$ .

Determinate le espressioni matriciali si può verificare l'algebra del gruppo di Lorentz.



# Bibliografia

- [1] F. Bastianelli. «Appunti di teoria dei gruppi».
- [2] D. Schroeter D. Griffiths. *Introduzione alla meccanica quantistica*. CEA.
- [3] P. Gambino. «Appunti di teoria dei gruppi».
- [4] Tom Lancaster e Stephen J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 2014. ISBN: 978-0-19-969933-9.
- [5] Michael E. Peskin e Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN: 978-0-201-50397-5. DOI: [10.1201/9780429503559](https://doi.org/10.1201/9780429503559).
- [6] Pierre Ramond. *Field theory: a modern primer*. Vol. 51. 1981.
- [7] G. Salmé. «Appunti di teoria dei gruppi».
- [8] S. Sciuto. «Quantum Mechanics 2, lecture notes».
- [9] M. Srednicki. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, gen. 2007. ISBN: 978-0-521-86449-7. DOI: [10.1017/CB09780511813917](https://doi.org/10.1017/CB09780511813917).
- [10] D. Tong. «QFT lecture notes».
- [11] Steven Weinberg. *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, giu. 2005. ISBN: 978-0-521-67053-1. DOI: [10.1017/CB09781139644167](https://doi.org/10.1017/CB09781139644167).