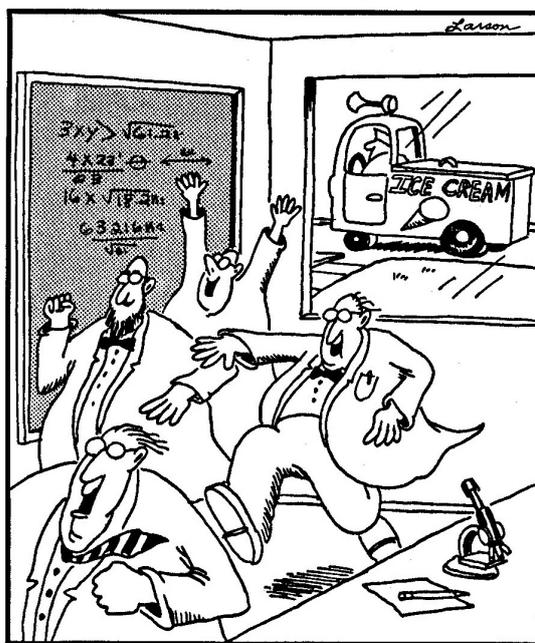


Appunti del corso di:
**Fondamenti di Teoria Quantistica dei
Campi**

Gabriele Cembalo

A.A. 2024-2025



Università degli Studi di Torino
Dipartimento di Fisica
Via Giuria, 1, Torino (TO)

Informazioni legali

Questo materiale è una rielaborazione personale del corso di **Fondamenti della Teoria Quantistica dei Campi**, tenuto dal **Prof. C. Angelantonj** presso l'**Università degli Studi di Torino**.

Il contenuto riportato non rappresenta materiale ufficiale del docente né dell'università, e può contenere interpretazioni soggettive o errori. Tutti i diritti su slide, dispense o altri materiali forniti dal docente restano riservati ai rispettivi autori e non sono inclusi in questi appunti. Questi appunti sono condivisi a solo scopo didattico e divulgativo, senza fini di lucro, e sono destinati a supportare lo studio personale degli studenti.

È distribuito con licenza **Creative Commons Attribution - Non Commercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0)**.

Puoi copiarlo, distribuirlo e modificarlo, **a patto di attribuirne la paternità e non usarlo a fini commerciali**.

Per maggiori informazioni sulla licenza:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.it>

As far as quantum field theory is concerned, a human being or the center of a star isn't all that different from empty space.

Sean Carroll

Prefazione

In questo documento voglio raccogliere le mie note rispetto gli appunti relativi al corso di "**Fondamenti di Teoria Quantistica dei Campi**" svolto dal professor C. Angelantonj e seguito all'*Università degli studi di Torino* nell'a.a. 2024-2025 aggiungendo eventualmente i riferimenti a vari libri (più o meno utili a seconda della volontà di approfondire). Questi appunti sono una riscrittura degli appunti presi in aula, quindi la fonte principale sono le note (in aula) del professore, ma i libri sono fondamentali per una completa comprensione degli argomenti. Ci tengo anche a segnalare il fatto che, pur essendo ampiamente ispirati alle già citate note del professore, sono stati fondamentali gli appunti di E. Chiarotto reperiti sul canale Telegram. Durante il corso sono stati consigliati diversi libri (indicati in Bibliografia), cercherò di indicare i vari riferimenti bibliografici all'inizio di ogni capitolo.

Il corso dev'essere visto come la seconda parte di un corso riguardo la QFT, per cui molti concetti verranno dati per scontati e si passerà a oltre, visto che saranno cose già viste al corso di *Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi* (IQFT). Il materiale fornito dal docente è pressoché nullo, per cui per questo corso consultare i libri è vitale, quelli maggiormente utili sono:

- J. Iliopoulos, *Elementary Particle Physics*, Oxford. È un testo che ha seguito molto, consigliato da consultare.
- E. Peskin, D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview. Considerato da molti il (uno dei) testo fondamentale della QFT.
- P. Ramond, *Field Theory, a modern primer*, Westview.
- M. Schwartz, *Introduction to Quantum Field Theory*, Harvard University.
- M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (2007). Testo molto utile, ma con un approccio molto pragmatico e asciutto.

Può essere anche utile il libro di Lancaster e Blundell, *Quantum Field Theory, for the gifted amateur*, non tanto per conti o discorsi tecnici, ma più che

altro per motivazioni e discorsi riguardo le motivazioni per cui si fanno determinate cose. Questo corso, dunque questi appunti, è stato molto tecnico e impegnativo sotto tutti i punti di vista. Altri testi consigliati sono:

- O. Nastase, *Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press.
- L. Alvarez Ganmè, M. A. Vazquez-Mozo, *An Invitation to Quantum Field Theory*, Springer. È un testo molto denso e in realtà non è molto consigliato per preparare l'esame.

Nel corso degli appunti sono presenti parti **evidenziate in rosso**, che non sono particolarmente importanti, ma sono note che devono essere sottoposte ad un controllo.

Chiaramente sono da intendere come degli appunti personali scritti in bella, eventuali sviste, errori o inesattezze sono dovute alla mia ignoranza, ma soprattutto ho scritto questi appunti in modo da "*spiegare*" a me stesso l'argomento, quindi alcune parti potrebbero sembrare troppo prolisse o troppo superficiali per alcuni. In ogni caso fa piacere se possono aiutare qualcun'altro. Spero in ogni caso di esser riuscito a scrivere un documento chiaro e ben strutturato.

Alcune volte posso non far riferimento ad un particolare testo o corso passato, in questi casi mi sto riferendo ai MIEI appunti riguardanti quell'argomento. Una mia collezione di appunti è presente nella mia pagina personale di GitHub: [gCembalo.github.io](https://github.com/gCembalo).

Qualsiasi errore/refuso può essere inviato alla mia mail personale: gabriele.cembalo02@gmail.com.

Ultimo aggiornamento: 15/07/2025

Indice

Convenzioni	1
1 Il campo scalare	3
1.1 Soluzione per il campo scalare libero	3
1.2 Propagatore del campo scalare	5
1.3 Richiami al teorema di Noether	8
1.4 Propagatore di Lehmann-Kallen e autostati di una teoria interagente	8
1.5 Operatori di creazione e distruzione	12
1.6 Disaccoppiamento degli stati a multiparticelle	13
1.7 Formula di riduzione LSZ per campi scalari	14
1.8 Rappresentazione degli stati ed evoluzione temporale	18
1.9 Equazione di Dyson	21
1.10 Formula di Gell-Mann-Low	23
1.10.1 Diagrammi connessi, non connessi e bolle di vuoto	26
1.11 Teorema di Wick per campi scalari	28
1.12 Esempio di teoria interagente e fattore di simmetria	31
1.12.1 Le regole di Feynmann per il campo scalare	32
1.12.2 Esempio sulla funzione di Green	35
1.13 Variabili di Mandelstam	36
1.14 Sezione d'urto	38
1.14.1 Urto con 2 particelle finali	43
1.14.2 Urto con 3 particelle finali (cenni)	45
1.15 Contributo delle bolle di vuoto	46
1.16 Gradi di divergenza	47
1.17 Potenziale di Yukawa scalare (scattering tra nucleoni e pioni)	50
1.17.1 Caso non relativistico	53
2 Il campo spinoriale	55
2.1 Spinori di Weyl	55
2.2 Lagrangiana per campi di Majorana, di Dirac e di Weyl	57
2.3 Soluzioni per campi spinoriali	59
2.4 Formula LSZ per campi spinoriali	62

2.5	Teorema di Wick per campi spinoriali	68
2.5.1	Dimostrazione per induzione (cenni)	70
2.6	Regole di Feynman per la teoria di Yukawa	70
3	Il campo vettoriale	73
3.1	Derivata covariante e cinetica dei fotoni	73
3.2	Soluzione per la teoria di Maxwell	75
3.3	Normalizzazione degli stati e stati fisici (metodo di Gupta-Bleuler)	76
3.4	Somma sulle polarizzazioni fisiche (identità di Ward)	78
3.5	Propagatore per il campo di Maxwell	80
3.6	Regole di Feynman per la QED	81
3.6.1	Esempio annichilazione di fermioni	82
3.6.2	Esempio del Bhabha scattering	85
3.6.3	Esempio per M invariante di gauge	88
3.6.4	Esempio annichilazione di fermioni in fotoni	89
3.6.5	Esempio sul segno di un loop di fermioni	92
3.7	Rappresentazione fondamentale, anti-fondamentale ed aggiunta	92
3.8	Teoria di Yang-Mills (generalizzazione della teoria di Maxwell)	96
3.8.1	Osservazione sulla teoria di Yang-Mills	99
4	Funzioni di partizione	101
4.1	I path integral	101
4.2	Legame tra path integral e prodotto T-ordinato nel vuoto	104
4.3	Integrale di Feynman e funzione di partizione per i campi scalari	106
4.4	Funzione di partizione di una teoria scalare libera	107
4.4.1	Spazio delle fasi	107
4.4.2	Spazio delle coordinate	109
4.4.3	Rotazione di Wick	109
4.5	Energia libera e funzioni di Green connesse	111
4.5.1	Valore della funzione di correlazione a 2 e 4 gambe	112
4.6	Funzione di partizione di una teoria interagente	113
4.6.1	Esempio con la teoria ϕ^4	115
4.7	Variabili commutanti e anti-commutanti	120
4.7.1	Integrale gaussiano	122
4.7.2	Integrale di Berezyn	123
4.8	Funzione di partizione per campi fermionici	124
4.9	Funzione di partizione per campi vettoriali	126
4.10	Funzione di partizione di Yang-Mills e campi ghost di Faddeev-Popov	128
4.10.1	Accenni alla simmetria BRST	131
4.11	Funzione di partizione per la QED	131

5	Il modello standard	135
5.1	La lagrangiana di Fermi	135
5.1.1	Validità della teoria di Fermi	137
5.2	Rottura spontanea di simmetria (Wigner e Nambu-Goto)	140
5.3	Rottura della simmetria e spettro di massa	141
5.4	Teorema di Goldstone	142
5.5	Esempio di rottura della simmetria	143
5.5.1	Sostituzione 1	144
5.5.2	Sostituzione 2	145
5.6	Fotone massivo tramite Goldstone	146
5.6.1	Sostituzione	146
5.7	Struttura del modello standard (Glashow-Weisberg-Salam)	148
5.8	Termini cinetici di Yang-Mills rispetto ad generatori	149
5.9	Settore leptonic	150
5.9.1	Bosoni fisici e costanti di accoppiamento	151
5.9.2	Numeri quantici e campi	153
5.9.3	Lagrangiana massless dei leptoni	154
5.10	Trasformazione di carica e di parità	156
5.10.1	Decadimento del muone	160
5.11	Settore di Higgs	162
5.11.1	Rottura della simmetria tramite Higgs	163
5.11.2	Calcolo del potenziale	164
5.11.3	Calcolo della derivata covariante	164
5.11.4	Lagrangiana di Higgs e masse dei bosoni vettori	166
5.12	Lagrangiana di Yang-Mills-Higgs	166
5.13	Masse dei leptoni tramite Higgs	168
5.14	Adroni e quark	168
5.14.1	Nota sulle costanti di accoppiamento	170
5.15	Mixing dei quark	171
	Appendici	177
A	Richiami di teoria dei gruppi	179
B	Matrici γ	181
B.1	Definizioni	181
B.2	Identità	182
B.3	Tracce	183
C	Rotazione di Wick	187
C.1	Spazio di Minkowski	187
C.2	Spazio Euclideo	188
C.3	Relazioni	188

Bibliografia

189

Convenzioni

Vediamo brevemente le convenzioni, alcune già introdotte e utilizzate nel corso di Introduzione alla teoria dei campi.

Appunto importante: il 90% delle volte ometterò il cappelletto sopra i simboli di operatori, ma saranno sempre situazioni in cui non ci sarà ambiguità di significato e in cui (se si è fatto il corso di IQFT) si saprà tranquillamente la natura dell'oggetto considerato. Ovviamente, quando non è molto chiaro il ruolo dei campi metterò esplicitamente il simbolo $\hat{\cdot}$.

Utilizzeremo le unità naturali $\hbar = c = 1$ e la metrica:

$$(+, - - -) \quad (0.0.1)$$

da cui seguono:

$$x^\mu = (t, \vec{x}) \quad , \quad x_\mu = (t, -\vec{x}) \quad (0.0.2)$$

$$p^\mu = (E_p, \vec{p}) \quad , \quad p_\mu = (E_p, -\vec{p}) \quad (0.0.3)$$

$$\partial^\mu = (\partial_t, -\vec{\nabla}) \quad , \quad \partial_\mu = (\partial_t, \vec{\nabla}) \quad (0.0.4)$$

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = (\partial_t^2, -\nabla^2). \quad (0.0.5)$$

Per le trasformate di Fourier $TF[\cdot]$ utilizziamo:

$$\tilde{F}(p) = \int d^4x F(x) e^{ipx} \quad (0.0.6)$$

$$F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{F}(p) e^{-ipx}. \quad (0.0.7)$$

Per la delta di Dirac:

$$\delta^4(k) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \quad (0.0.8)$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad TF[\delta^4(x-y)] = 1. \quad (0.0.9)$$

Derivata ed impulso, per via dell'equazione di Schrodinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = E\psi \quad (0.0.10)$$

$$-i\hbar \vec{\nabla} \psi = \vec{k}\psi \quad (0.0.11)$$

dunque, a livello di operatori:

$$i\partial^\mu = (\partial_t, -\vec{\nabla}) \longleftrightarrow p^\mu = (E, \vec{k}) \quad (0.0.12)$$

scriviamo quindi che:

$$\partial_\mu \longrightarrow -ip_\mu. \quad (0.0.13)$$

L'operatore di evoluzione temporale, per hamiltoniane H indipendenti dal tempo, è:

$$U(t - t_0) = e^{-iH(t-t_0)}. \quad (0.0.14)$$

La normalizzazione degli stati liberi la prendiamo:

$$|\vec{k}\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \quad (0.0.15)$$

$$\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{q}). \quad (0.0.16)$$

Lo stato di vuoto della teoria libera (void) lo indichiamo con $|0\rangle$, mentre lo stato di vuoto interagente (vacuum) lo indichiamo con $|\Omega\rangle$.¹

¹Nota che nel Peskin e Schroeder utilizza la nostra stessa notazione, però lo Schrednicki, che non sempre è segnato, bisogna intuirlo dal contesto e quando compaiono entrambi $|0\rangle$ è quello della teoria interagente, mentre il vuoto libero è $|\emptyset\rangle = |0\rangle_0$.

Capitolo 1

Il campo scalare

In questo capitolo rivedremo inizialmente alcuni concetti già visti al corso di introduzione alla teoria dei campi, in modo leggermente più formale (infatti ora la fonte principale sarà il Peskin e Schroeder [4], mentre a IQFT avevamo usato per una parte anche il Lancaster e Blundell [2]), ma ne aggiungeremo tanti di nuovi.

1.1 Soluzione per il campo scalare libero

Partiamo dalla lagrangiana, che già conosciamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \quad (1.1.1)$$

in cui il segno nel termine cinetico è legato alla scelta della metrica e al fatto che vogliamo l'hamiltoniana H definita positiva. Abbiamo i momenti coniugati definiti da:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(x) \quad (1.1.2)$$

che ci portano all'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (1.1.3)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi). \quad (1.1.4)$$

Le equazioni del moto sappiamo che si ricavano dal principio di minima azione, quindi chiedendo che la variazione di:

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \right] \quad (1.1.5)$$

sia nulla. Abbiamo che la variazione è:

$$\delta S = \int d^4x \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu (\delta \phi) - m^2 \phi \delta \phi - V'(\phi) \delta \phi \right] \quad (1.1.6)$$

se integriamo per parti il primo pezzo e consideriamo il termine di superficie nullo, allora:

$$\delta S = \int d^4x \left[-\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi - V'(\phi) \right] \delta \phi \quad (1.1.7)$$

e imponendo la variazione nulla, $\delta S = 0$, otteniamo:

$$(\square + m^2)\phi + V'(\phi) = 0 \quad (1.1.8)$$

in cui $\square = \partial_t^2 - \nabla^2$.

Quella che chiamiamo **Equazione di Klein-Gordon** è:

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (1.1.9)$$

che nello spazio dei momenti è:

$$(p^2 - m^2)\tilde{\phi}(p) = 0. \quad (1.1.10)$$

La soluzione di (1.1.9) è:

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) \left[A(p) e^{-ipx} + A^\dagger(p) e^{ipx} \right] \quad (1.1.11)$$

in cui vale:

$$p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (1.1.12)$$

Sappiamo che in (1.1.11) possiamo riscrivere gli operatori $A^{(\dagger)}$ come:

$$A^{(\dagger)}(p) = \frac{a^{(\dagger)}(p)}{2E_p} \quad (1.1.13)$$

e usando le proprietà della δ possiamo risolvere l'integrale dp^0 . L'espressione del campo scalare libero e del campo momento coniugato è quindi:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[a(p) e^{-ipx} + a^\dagger(p) e^{ipx} \right] \quad (1.1.14)$$

$$\pi(x) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[a(p) e^{-ipx} - a^\dagger(p) e^{ipx} \right]. \quad (1.1.15)$$

Imponiamo che il commutatore a tempi uguali sia uguale al commutatore canonico di variabili coniugate:

$$\left[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y}) \right] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1.1.16)$$

mentre gli altri commutatori sono nulli. Usando questa condizione si ricava che:

$$\left[\hat{a}(p), \hat{a}^\dagger(p') \right] = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (1.1.17)$$

che è l'algebra degli operatori di creazione e distruzione.

Se $\hat{\phi}(x)$ non trasforma sotto Lorentz, allora nemmeno \hat{a} e \hat{a}^\dagger devono trasformare e quindi lo stato rimane uguale a se stesso.

Possiamo anche calcolare l'operatore hamiltoniano:

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[a(p)a^\dagger(p) + a^\dagger(p)a(p) \right] \quad (1.1.18)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[a^\dagger(p)a(p) + (2\pi)^3 \delta(0) \right] \quad (1.1.19)$$

in cui, la δ , energia di punto zero, è proporzionale al volume dello spazio e diverge a basse energie (divergenza infrarossa, dovuta alla δ) ed ad alte energie (divergenza ultravioletta, dovuto a E_p). Per aggirare gli infiniti definiamo l'hamiltoniana normal-ordered:

$$: H : = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a^\dagger(p)a(p) \quad (1.1.20)$$

cosa che si può fare solo se ignoriamo la gravità (l'energia di punto zero è legata all'energia di vuoto e alla costante cosmologica) e se la geometria del sistema non può cambiare (vedi l'effetto Casimir, in cui si osserva il campo elettromagnetico tra piatti conduttori e al variare della distanza dei piatti l'energia di punto zero si manifesta come una forza attrattiva o repulsiva).

Facciamo attenzione che per come abbiamo scritto la soluzione del campo, gli operatori non sono adimensionali e questa cosa può non piacere, ma in questo modo otteniamo una misura di integrazione:

$$\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \quad (1.1.21)$$

che è Lorentz invariante. Inoltre questa cosa verrà comoda per il calcolo delle sezioni d'urto (sebbene non sia una scelta obbligatoria).

1.2 Propagatore del campo scalare

I riferimenti sono p. 28-31 del Peskin e Schroeder [4].

Possiamo sfruttare il fatto che il propagatore dei campi sia un c-numero

(quindi un numero che commuta) e scrivere:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.2.1)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \left[\left(a(p)e^{-ipx} + a^\dagger(p)e^{ipx} \right), \left(a(p)e^{-ipy} + a^\dagger(p)e^{ipy} \right) \right] \quad (1.2.2)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right] \quad (1.2.3)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{e^{-ip(x-y)}}{2E_p} \Big|_{E_p} + \frac{e^{-ip(x-y)}}{-2E_p} \Big|_{-E_p} \right] \quad (1.2.4)$$

a questo punto possiamo deformare il cammino di integrazione per passare sopra i poli, poi applichiamo il lemma di Jordan, che ci permette di vedere che se $x_0 > y_0$, allora dobbiamo chiudere sotto e di conseguenza ritorniamo al passaggio prima, ma che se $x_0 < y_0$ allora chidiamo sopra e otteniamo zero. Abbiamo dunque:

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2} \quad (1.2.5)$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{ip(x-y)}}{p^2 - m^2}. \quad (1.2.6)$$

Possiamo definire i due tipi di propagatori:

$$D_R(x-y) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.2.7)$$

$$D_A(x-y) = \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.2.8)$$

che ci permettono di dire che se la prescrizione è di passare sopra i poli, allora otteniamo il propagatore ritardato (1.2.7) con $x^0 > y^0$, mentre se passiamo sotto i poli otteniamo il propagatore ritardato (1.2.8), in cui $x^0 < y^0$ e in cui il segnale torna indietro.

Se invece deformiamo il cammino con un polo sopra e uno sotto otteniamo il propagatore di Feynman:

$$\Delta_F = \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.2.9)$$

in cui utilizziamo il prodotto temporalmente ordinato:

$$T[\phi(x)\phi(y)] = \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x). \quad (1.2.10)$$

Dai corsi di MQ2 e IQFT sappiamo già che il propagatore è la funzione di Green dell'operatore del moto, ovvero vale:

$$(\square + m^2) D_R(x-y) = -i\delta^4(x-y) \quad (1.2.11)$$

che nello spazio degli impulsi è:

$$(-p^2 + m^2) \tilde{D}_R(p) = -i \quad (1.2.12)$$

il che ci permette di scrivere:

$$D_R(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{D}_R(p) e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2}. \quad (1.2.13)$$

Possiamo effettivamente dimostrare che (1.2.13) soddisfi (1.2.11). Vediamo che:

$$(\square + m^2) D_R(x - y) = (\square + m^2) \left(\theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \right) \quad (1.2.14)$$

$$= A_1 + 2A_2 + A_3. \quad (1.2.15)$$

Analizziamo i singoli termini, ricordando (1.1.16):

$$A_1 = \left[\square \theta(x^0 - y^0) \right] \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.2.16)$$

$$= \left[(\partial_0)^2 \theta(x^0 - y^0) \right] \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$$

$$= \left[\partial_0 \delta(x^0 - y^0) \right] \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$$

$$= -\delta(x^0 - y^0) \partial_0 \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$$

$$= -\delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$$

$$= -\delta(x^0 - y^0) (-i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}))$$

$$= i\delta^4(x - y) \quad (1.2.17)$$

insieme a:

$$A_2 = \partial_\mu \theta(x^0 - y^0) \partial^\mu \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.2.18)$$

$$= \partial_0 \theta(x^0 - y^0) \partial^0 \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$$

$$= \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$$

$$= -i\delta(x^0 - y^0) \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

$$= -i\delta^4(x - y) \quad (1.2.19)$$

per ultimo:

$$A_3 = \theta(x^0 - y^0) (\square + m^2) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.2.20)$$

$$= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [(\square + m^2) \phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.2.21)$$

$$= 0. \quad (1.2.22)$$

Dunque complessivamente abbiamo:

$$(\square + m^2) D_R(x - y) = A_1 + 2A_2 + A_3 \quad (1.2.23)$$

$$= i\delta^4(x - y) - 2i\delta^4(x - y) + 0 \quad (1.2.24)$$

$$= -i\delta^4(x - y). \quad (1.2.25)$$

1.3 Richiami al teorema di Noether

I riferimenti sono p. 17-19 del Peskin e Schroeder [4].

Noether ci dice che quando abbiamo una simmetria abbiamo anche una corrente conservata.

Se consideriamo una trasformazione infinitesima abbiamo:

$$\phi(x) = e^{ipx} \phi(0) e^{-ipx} \quad (1.3.1)$$

$$\sim \phi(0) + i [\vec{P}, \phi] \vec{x} + \dots \quad (1.3.2)$$

ponendo $\vec{x} = \vec{a}$, che chiamiamo *parametro della traslazione*, possiamo vedere che:

$$\delta\phi = [P, \phi(x)] \quad (1.3.3)$$

$$= [\vec{a} \cdot \vec{P}, \phi] \quad (1.3.4)$$

$$= -i \vec{a} \cdot \vec{\nabla}_x \phi. \quad (1.3.5)$$

Il tensore energia-impulso è definito come:

$$T^\mu_\nu = -\mathcal{L} \delta^\mu_\nu + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi \quad (1.3.6)$$

e il momento canonicamente coniugato:

$$P_i = \int d^3x T^{0i} = - \int d^3x \pi(x) \partial_i \phi. \quad (1.3.7)$$

Inoltre, preso \vec{a} parametro di traslazione, abbiamo (sempre ricordando (1.1.16)):

$$[P, \phi(x)] = [\vec{a} \cdot \vec{P}, \phi] \quad (1.3.8)$$

$$= \vec{a} \int d^3y [\pi(y), \phi(x)] \vec{\nabla}_y \phi(y) \quad (1.3.9)$$

$$= -i \vec{a} \cdot \vec{\nabla}_x \phi. \quad (1.3.10)$$

1.4 Propagatore di Lehmann-Kallen e autostati di una teoria interagente

I riferimenti sono p. 106-108 dello Srednicki [7], e p. 213-215 del Peskin e Schroeder [4].

1.4. Propagatore di Lehmann-Kallen e autostati di una teoria interagente 9

Vogliamo espandere la nostra conoscenza del propagatore anche al caso interagente. Se il campo è interagente allora, alla lagrangiana, dobbiamo aggiungere un potenziale di interazione che ci spieghi come il campo interagisce con se stesso e con le altre particelle. Prendiamo il vuoto $|\Omega\rangle$ della teoria interagente e cerchiamo di determinare il propagatore.

Facciamo il conto preliminare studiando il propagatore di due campi con $x^0 > y^0$. Utilizzeremo gli autovalori di impulso ed energia $|\alpha\rangle$:

$$\hat{P}|\alpha\rangle = \vec{p}_\alpha|\alpha\rangle \quad , \quad \hat{H}|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle \quad (1.4.1)$$

e la loro rispettiva relazione di completezza:

$$\mathbb{1} = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle\alpha| \quad (1.4.2)$$

oltre a ricordarci che vale:

$$\phi(x) = e^{ipx} \phi(0) e^{-ipx} \quad (1.4.3)$$

con p operatore. Implementiamo i conti:

$$\langle\Omega| \phi(x)\phi(y) |\Omega\rangle = \sum_{\alpha} \langle\Omega| \phi(x) |\alpha\rangle \langle\alpha| \phi(y) |\Omega\rangle \quad (1.4.4)$$

$$= \sum_{\alpha} \langle\Omega| e^{ipx} \phi(0) e^{-ipx} |\alpha\rangle \langle\alpha| e^{ipy} \phi(0) e^{-ipy} |\Omega\rangle \quad (1.4.5)$$

$$= \sum_{\alpha} e^{-ip_\alpha(x-y)} |\langle\Omega| \phi(0) |\alpha\rangle|^2. \quad (1.4.6)$$

Visto il caso $x^0 > y^0$, possiamo definire il propagatore interagente, in analogia al caso libero, come:

$$\Delta_F = \langle\Omega| T[\phi(x)\phi(y)] |\Omega\rangle \quad (1.4.7)$$

$$= \theta(x^0 - y^0) \langle\Omega| \phi(x)\phi(y) |\Omega\rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle\Omega| \phi(y)\phi(x) |\Omega\rangle \quad (1.4.8)$$

$$= \sum_{\alpha} |\langle\Omega| \phi(0) |\alpha\rangle|^2 \left[e^{-ip_\alpha(x-y)} \theta(x^0 - y^0) + e^{-ip_\alpha(y-x)} \theta(y^0 - x^0) \right]. \quad (1.4.9)$$

Possiamo definire la densità spettrale come:

$$\rho(q) = \sum_{\alpha} (2\pi)^4 \delta^4(q - p_\alpha) |\langle\Omega| \phi(0) |\alpha\rangle|^2 \quad (1.4.10)$$

che è una densità di massa/energia, e in cui $q = p_\alpha$ (per via della δ) e in cui $q_0^2 > 0$, ovvero tale per cui q_μ è un oggetto time-like.

Notiamo che Δ_F è un'invariante di Lorentz, per cui, anche $\rho(q)$ dovrà esserlo. Scriviamo dunque:

$$\rho(q) = \theta(q^0) \sigma(q^2) \quad (1.4.11)$$

in cui:

$$\sigma(q^2) = \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \delta(q^2 - m^2) \quad (1.4.12)$$

che chiamiamo *spettro di massa*. Possiamo scrivere il propagatore interagente (1.4.9) come:

$$\Delta_F = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \rho(q) \left[e^{-iq(x-y)} \theta(x^0 - y^0) + e^{-iq(y-x)} \theta(y^0 - x^0) \right] \quad (1.4.13)$$

$$= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \theta(q^0) \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \delta(q^2 - m^2) \left[e^{-iq(x-y)} \theta(x^0 - y^0) + e^{-iq(y-x)} \theta(y^0 - x^0) \right] \quad (1.4.14)$$

$$= \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\delta(q^0 - E_{q,m})}{2E_{q,m}} \left[e^{-iq(x-y)} \theta(x^0 - y^0) + e^{-iq(y-x)} \theta(y^0 - x^0) \right] \quad (1.4.15)$$

$$= \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \Delta_F^0(x-y, m^2) \quad (1.4.16)$$

dove $\Delta_F^0(x-y, m^2)$ è il propagatore di Feynman per la particella libera di massa m , mentre σ rappresenta la densità degli stati (compresi gli stati legati). La rappresentazione è detta **rappresentazione di Lehmann-Kallen**. Nel caso di campo libero avevamo $\sigma(m^2) = \delta(m^2 - m_0^2)$.

Possiamo anche dimostrare che la σ è correttamente normalizzata per essere una densità. Da (1.4.16) otteniamo che:

$$\langle \Omega | [\phi(x), \phi(y)] | \Omega \rangle = \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \langle 0 | [\phi_0(x), \phi_0(y)] | 0 \rangle \quad (1.4.17)$$

se deriviamo rispetto y^0 :

$$\langle \Omega | [\phi(x), \pi(y)] | \Omega \rangle = \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \langle 0 | [\phi_0(x), \pi_0(y)] | 0 \rangle \quad (1.4.18)$$

in cui abbiamo ipotizzato che il potenziale di interazione non dipende dalle derivate del campo. Ovviamente, noi ricordiamo il commutatore (1.1.16), che vale a prescindere dal fatto che sia una teoria libera o interagente, per cui dobbiamo avere:

$$1 = \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) \quad (1.4.19)$$

dunque, la $\sigma(m^2)$ ha le dimensioni che deve avere.

Fin'ora non ci siamo preoccupati di distinguere stati a singola particella da stati multi-particelle. Ricordiamo che esistono 3 set di autostati possibili:

1.4. Propagatore di Lehmann-Kallen e autostati di una teoria interagente 11

- $|0\rangle$: lo stato di vuoto libero (assenza di particelle).
- $|\alpha\rangle$: lo stato di singola particella libera di massa m_0 .
- $|\alpha, n\rangle$: lo stato legato di molte particelle, dipende dall'impulso e da altre n ariabili, ha energia:

$$E_k = \sqrt{k^2 - M^2} \quad (1.4.20)$$

con $M > m_0$ e in cui M è la massa minima per stati legati, di almeno 2 particelle. Notiamo che per $m > M$ la σ assume valori continui.

Per la precisione, dopo lo stato a singola particella, possiamo avere uno stato legato a molte particelle che può avere $M < 2m_0$ (ma sempre $M > m_0$), ma dobbiamo anche notare che se escludiamo gli stati legati ci rimangono solo gli stati con $M \geq 2m_0$ (che possono avere momento relativo grande a piacere!)¹.

Per uno stato legato possiamo scrivere:

$$\sigma(m^2) = Z \delta(m^2 - m_0^2) + \theta(m^2 - M^2) \tilde{\sigma}(m^2) \quad (1.4.21)$$

e dunque:

$$\Delta_F = \int_0^\infty d(m^2) \Delta_F^0(x-y, m^2) [Z \delta(m^2 - m_0^2) + \theta(m^2 - M^2) \tilde{\sigma}(m^2)] \quad (1.4.22)$$

$$= Z \Delta_F^0(x-y, m_0^2) + \int_{M^2}^\infty d(m^2) \Delta_F^0(x-y, m^2) \tilde{\sigma}(m^2) \quad (1.4.23)$$

in cui il primo termine è il propagatore di un campo libero moltiplicato per una costante di normalizzazione Z (descrive una sola particella), che è utile perché se vogliamo correlare il campo libero ϕ_0 al campo interagente ϕ , allora abbiamo $\phi = \sqrt{Z} \phi_0$, cioè permette di riscaldare il campo libero.

Notiamo che imponendo la normalizzazione di $\sigma(m^2)$ abbiamo:

$$1 = \int_0^\infty d(m^2) \sigma(m^2) = Z + \int_{M^2}^\infty d(m^2) \tilde{\sigma}(m^2) \quad (1.4.24)$$

e siccome:

$$\int_{M^2}^\infty d(m^2) \tilde{\sigma}(m^2) > 0 \quad (1.4.25)$$

dobbiamo avere $Z \in (0, 1)$, dove Z dà una misura di quanto il campo interagisca con se stesso e si calcola tramite teorie perturbative.

¹A riguardo vedi pag. 51 dello Srednicki [7].

1.5 Operatori di creazione e distruzione

I riferimenti sono p. 39-40 e 49 dello Srednicki [7].

In questa sezione cerchiamo le espressioni degli operatori di creazione e distruzione in termini dei campi scalari ϕ e ϕ^\dagger . Per semplicità indicheremo:

$$d^3\tilde{p} = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \quad (1.5.1)$$

e di conseguenza le espressioni dei campi saranno:

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{p} \left[a(p)e^{-ipx} + a^\dagger(p)e^{ipx} \right]. \quad (1.5.2)$$

Calcoliamo la derivata temporale del campo:

$$\dot{\phi}(x) = \int d^3\tilde{p} (-iE_p) \left[a(p)e^{-ipx} - a^\dagger(p)e^{ipx} \right] \quad (1.5.3)$$

e calcoliamo la quantità:

$$\int d^3x e^{iqx} \left[\dot{\phi}(x) - iE_q\phi(x) \right] = \quad (1.5.4)$$

$$= \int d^3x d^3\tilde{p} e^{iqx} \left[-iE_p(a(p)e^{-ipx} - a^\dagger(p)e^{ipx}) - iE_q(a(p)e^{-ipx} + a^\dagger(p)e^{ipx}) \right] \quad (1.5.5)$$

$$= \int d^3x d^3\tilde{p} \left[-i(E_p + E_q) a(p) e^{-i(p-q)x} + i(E_p - E_q) a^\dagger(p) e^{i(p+q)x} \right] \quad (1.5.6)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[-i(E_p + E_q) a(p) e^{-i(p-q)x} (2\pi)^3 \delta^3(p-q) + i(E_p - E_q) a^\dagger(p) e^{i(p+q)x} (2\pi)^3 \delta^3(p+q) \right] \quad (1.5.7)$$

$$= -ia(p) \quad (1.5.8)$$

in cui nel passaggio (1.5.6) abbiamo integrato su x per far comparire la δ . Dunque abbiamo trovato:

$$a(p) = i \int d^3x e^{iqx} \left[\dot{\phi}(x) - iE_q\phi(x) \right] \quad (1.5.9)$$

$$= i \int d^3x \left[e^{iqx} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x) \right] \quad (1.5.10)$$

in cui abbiamo definito $\overleftrightarrow{\partial}_t = \overrightarrow{\partial}_t - \overleftarrow{\partial}_t$. Analogamente:

$$a^\dagger(p) = -i \int d^3x e^{-iqx} \left[\dot{\phi}(x) + iE_q \phi(x) \right] \quad (1.5.11)$$

$$= -i \int d^3x \left[e^{-iqx} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x) \right]. \quad (1.5.12)$$

Possiamo definire, nella teoria libera, l'operatore di creazione in modo che sia indipendente dal tempo come:

$$a_p^\dagger = \int d^3k g_p(k) a^\dagger(k) \quad (1.5.13)$$

in cui abbiamo:

$$g_p(k) \propto \exp \left\{ -\frac{(\vec{k} - \vec{p})^2}{4\sigma^2} \right\} \quad (1.5.14)$$

che è un pacchetto d'onda con larghezza σ e centrato in \vec{p} . Definito con (1.5.13) abbiamo a_p^\dagger che crea una particella in un intorno di \vec{p} .

Notiamo che se supponiamo che a_p^\dagger sia della stessa forma anche in una teoria interagente, allora esso non sarà indipendente dal tempo, per cui conviene considerare:

$$|p\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} a_p^\dagger(t) |\Omega\rangle. \quad (1.5.15)$$

1.6 Disaccoppiamento degli stati a multiparticelle

I riferimenti sono p. 53-54 dello Srednicki [7].

Quando abbiamo una teoria libera sappiamo che vale:

$$\langle k, n | \phi_0(x) | 0 \rangle = 0 \quad (1.6.1)$$

in cui a sinistra abbiamo uno stato legato e a destra il vuoto. Vogliamo dimostrare in questa sezione che vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle k, n | \phi_0(x) | \Omega \rangle = 0 \quad (1.6.2)$$

ovvero che gli stati a molte particelle si disaccoppiano.

Prendiamo come stato iniziale uno stato a multiparticella, che può essere scritto come una sovrapposizione di pacchetti d'onda:

$$|\psi\rangle = \sum_n \int d^3p \psi_n(p) |p, n\rangle \quad (1.6.3)$$

e che dev'essere normalizzabile.

Notiamo che vale:

$$\langle p, n | \phi(x) | \Omega \rangle = \langle p, n | e^{ipx} \phi(0) e^{-ipx} | \Omega \rangle \quad (1.6.4)$$

$$= e^{ipx} \langle p, n | \phi(0) | \Omega \rangle \quad (1.6.5)$$

$$= e^{ipx} A_n(p). \quad (1.6.6)$$

Ora, calcoliamo:

$$\langle \psi | a^\dagger | \Omega \rangle = \sum_n \int d^3p \psi_n^*(p) \langle p, n | a^\dagger | \Omega \rangle \quad (1.6.7)$$

$$= -i(2\pi)^3 \sum_n \int d^3p \psi_n^*(p) \langle p, n | \int d^3k g(k) \int d^3x \left[e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x) \right] | \Omega \rangle \quad (1.6.8)$$

$$= -i(2\pi)^3 \sum_n \int d^3p d^3k d^3x \left[\psi_n^*(p) g(k) \left(e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle p, n | \phi(x) | \Omega \rangle \right) \right] \quad (1.6.9)$$

$$= -i(2\pi)^3 \sum_n \int d^3p d^3k d^3x \left[\psi_n^*(p) g(k) \left(e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_t e^{ipx} A_n(p) \right) \right] \quad (1.6.10)$$

$$= (2\pi)^3 \sum_n \int d^3p d^3k d^3x \left[\psi_n^*(p) g(k) (E_p + E_k) e^{i(p-k)x} A_n(p) \right] \quad (1.6.11)$$

$$= (2\pi)^3 \sum_n \int d^3p d^3k \left[\psi_n^*(p) g(k) (E_p + E_k) e^{i(E_p - E_k)t} A_n(p) \delta^3(p - k) \right] \quad (1.6.12)$$

ricordando che:

$$E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2} \quad (1.6.13)$$

per uno stato a multi-particella, e:

$$E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad (1.6.14)$$

per lo stato di singola particella. Se applichiamo la δ^3 e usiamo il fatto che $M > m$, allora nell'integrale rimane solo una fase oscillante positiva, **che quindi tende a zero** quando $t \rightarrow -\infty$, per via del lemma di Riemann-Lebesgue, per cui vediamo che gli stati a multi-particella si disaccoppiano.

1.7 Formula di riduzione LSZ per campi scalari

I riferimenti sono [Wikipedia](#).

Per il campo interagente abbiamo una lagrangiana della forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + \mathcal{L}_{int} \quad (1.7.1)$$

le cui equazioni del moto sono:

$$(\square + m_0^2)\phi = \frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\phi} = j_0(\phi). \quad (1.7.2)$$

Nel caso di campo libero $\mathcal{L}_{int} = 0$ e abbiamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_0)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 \quad (1.7.3)$$

le cui equazioni del moto sono:

$$(\square + m^2)\phi_0 = 0 \quad (1.7.4)$$

in cui m è la massa fisica misurabile del campo ϕ .

Studiamo:

$$(\square + m^2)\phi = j_0(\phi) + (m^2 - m_0^2)\phi^2 = j(\phi) \quad (1.7.5)$$

la cui soluzione dipende dalla soluzione omogenea, che è la teoria libera:

$$\phi(x) = \sqrt{Z}\phi_0 + \int d^4y G_R(x-y)j(y) \quad (1.7.6)$$

Se abbiamo uno stato iniziale $|\alpha\rangle$ e vogliamo ricavare lo stato finale $|\beta\rangle$. La densità di probabilità di scattering è $S_{\alpha\beta} = \langle\beta|\alpha\rangle$, che poi possiamo legare alla sezione d'urto, che è un'osservabile.

Possiamo osservare che quando abbiamo un'interazione a corto raggio, nei due stati, iniziale e finale, quindi gli stati a $t \rightarrow \pm\infty$, rimane solo il campo *libero*, che per definizione interagisce solo con se stesso.² Infatti, si ha:

$$\begin{cases} \langle\alpha|\phi|\beta\rangle & \longrightarrow \sqrt{Z}\langle\alpha|\phi_{in}|\beta\rangle & \text{se } t = -\infty \\ \langle\alpha|\phi|\beta\rangle & \longrightarrow \sqrt{Z}\langle\alpha|\phi_{out}|\beta\rangle & \text{se } t = +\infty \end{cases} \quad (1.7.7)$$

queste sono dette **condizioni LSZ** (Lippman-Symanzik-Zimmerman), in cui si indica con ϕ il campo interagente e con ϕ_{in} e ϕ_{out} i campi liberi di stato iniziale e finale.

Prendiamo un solo tipo di particelle e studiamo $\langle\beta_{out}|\alpha_{in}\rangle$ in cui possiamo esplicitare una particella di impulso p , ovvero consideriamo:

$$|\alpha\rangle = |\tilde{\alpha}, p\rangle = a^\dagger(p) |\tilde{\alpha}\rangle \quad (1.7.8)$$

in cui possiamo ricordare le espressioni trovate (1.5.10) e (1.5.12).

²Ovviamente si intende limite in senso debole, fuori dall'integrale.

Nota In generale, alcune delle particelle potrebbero non interagire, questo fenomeno è detto *forward scattering*: in questo caso lo stato iniziale e finale contengono una particella identica (stesso tipo e stesso momento).

Se ignoriamo il forward scattering, ovvero se ipotizziamo che tutte le particelle dello stato iniziale interagiscano, allora $\forall p \int \alpha_{in}$ abbiamo $p \notin \beta_{out}$, che si può anche scrivere come:

$$\langle \beta_{out} | a_{out}^\dagger(p) = 0 \quad (1.7.9)$$

e viceversa. Calcoliamo l'ampiezza di scattering:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \beta | a_{in}^\dagger(q) - a_{out}^\dagger(q) | \tilde{\alpha} \rangle \quad (1.7.10)$$

$$= -i \int d^3x \left[e^{-iqx} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle \beta | \phi_{in}(x) - \phi_{out}(x) | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.7.11)$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3x \left[e^{-iqx} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.7.12)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \partial_t \left[e^{-iqx} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.7.13)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-iqx} (\partial_t^2 \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle) - \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle [\partial_t^2 e^{-iqx}] \right] \quad (1.7.14)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-iqx} (\partial_t^2 \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle) + \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle [(-\nabla^2 + m^2) e^{-iqx}] \right] \quad (1.7.15)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-iqx} [(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle] \right] \quad (1.7.16)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-iqx} (\square_x + m^2) \langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.7.17)$$

in cui: nel passaggio (1.7.12) abbiamo utilizzato le condizioni LSZ (1.7.7); in (1.7.15) abbiamo ricordato l'equazione di Klein-Gordon, per cui:

$$(\square + m^2)e^{-iqx} = (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)e^{-iqx} = 0; \quad (1.7.18)$$

all'espressione (1.7.16) ci siamo arrivati integrando per parti due volte.

Tutto il calcolo che abbiamo fatto per arrivare a (1.7.17) serve ad estrarre una sola particella; se estraiamo tutte le particelle arriviamo alla formula di riduzione di LSZ.

Studiamo $\langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle$ in cui estraiamo nello stato finale:

$$\langle \beta | = \langle \tilde{\beta} p | = \langle \tilde{\beta} | a(p) \quad (1.7.19)$$

e rifacciamo lo stesso ragionamento fatto per arrivare a (1.7.17):

$$\langle \beta | \phi(x) | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \tilde{\beta} | a_{out}(p) \phi(x) - \phi(x) a_{in}(p) | \tilde{\alpha} \rangle \quad (1.7.20)$$

$$= i \int d^3 y \left[e^{ipy} \overleftrightarrow{\partial}_{t_y} \langle \tilde{\beta} | \phi_{out}(y) \phi(x) - \phi(x) \phi_{in}(y) | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.7.21)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3 y \left[e^{ipy} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y)\phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.7.22)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4 y \partial_{t_y} \left[e^{ipy} \overleftrightarrow{\partial}_t \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y)\phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle \right] \quad (1.7.23)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4 y \left[e^{ipy} (\partial_{t_y}^2 \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y)\phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle) - \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y)\phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle (\partial_{t_y}^2 e^{ipy}) \right] \quad (1.7.24)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4 y \left[e^{ipy} (\partial_{t_y}^2 \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y)\phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle) + \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y)\phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle [(-\nabla_y^2 + m^2)e^{ipy}] \right] \quad (1.7.25)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4 y \left[e^{ipy} (\square_y + m^2) \langle \tilde{\beta} | T[\phi(y)\phi(x)] | \tilde{\alpha} \rangle \right]. \quad (1.7.26)$$

Determiniamo finalmente la formula di riduzione LSZ per gli scalari:

$$\begin{aligned} \langle p_1, \dots, p_n | q_1, \dots, q_m \rangle_{in} &= \left(\frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^{n+m} \left[\prod_{i=1}^m \int d^4 x_i e^{-iq_i x_i} (\square_{x_i} + m^2) \right] \times \\ &\times \left[\prod_{j=1}^n \int d^4 y_j e^{ip_j y_j} (\square_{y_j} + m^2) \right] \langle \Omega | T[\phi(y_1) \dots \phi(y_n) \phi(x_1) \dots \phi(x_m)] | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (1.7.27)$$

Nello spazio dei momenti otteniamo:

$$\left[\prod_{i,j=1}^{m,n} (q_i^2 - m^2) (p_j^2 - m^2) \right] G(q_1 \dots q_m p_1 \dots p_n) \quad (1.7.28)$$

in cui il primo fattore sono i propagatori amputati tramite il calcolo dei residui, mentre il secondo fattore è la funzione di correlazione (di Green) ad $m + n$ gambe.

Per la precisione, la **funzione di correlazione (di Green) a $m + n$ gambe** è definita come:

$$\begin{aligned}
G(q_1 \dots q_m p_1 \dots p_n) &= \left[\prod_{i=1}^m \int d^4 x_i e^{-iq_i x_i} \right] \left[\prod_{j=1}^n \int d^4 y_j e^{ip_j y_j} \right] \times \\
&\quad \times \langle \Omega | T[\phi(y_1) \dots \phi(y_n) \phi(x_1) \dots \phi(x_m)] | \Omega \rangle \\
&= (\sqrt{Z})^{n+m} \left[\prod_{i=1}^m \frac{i}{q_i^2 - m^2} \right] \left[\prod_{j=1}^n \frac{i}{p_j^2 - m^2} \right] \text{out} \langle p_1, \dots, p_n | q_1, \dots, q_m \rangle_{in}
\end{aligned} \tag{1.7.29}$$

in cui possiamo osservare che ha dei poli legati alla condizione di mass-shell, inoltre, si ha che l'ampiezza di probabilità è legata al residuo della funzione di Green nei poli quando tutti i momenti vanno on-shell.

Vedi successivi per dettagli. (si?) Indichiamo con \tilde{G} la funzione di correlazione/Green (1.7.29), come facciamo sempre con le grandezze nello spazio dei momenti. La funzione di correlazione/Green amputata si ottiene eliminando i propagatori delle gambe esterne dalla funzione di Green nello spazio dei momenti (1.7.29):

$$\tilde{G}^{(n)} = \tilde{G}_A^{(n)} \prod_{i=1}^n \Delta_F(p_i). \tag{1.7.30}$$

Nota che esiste un abuso di notazione anche qui, per cui si chiama G sia la funzione di Green, sia la funzione di Green amputata; ricordiamoci però che le regole di Feynman restituiscono la funzione di Green amputata!

1.8 Rappresentazione degli stati ed evoluzione temporale

I riferimenti sono p. 83-84 del Peskin e Schroeder [4].

Vediamo in questa sezione un particolare tipo di rappresentazione che possiamo utilizzare per i nostri stati e operatori per descriverne l'evoluzione temporale. Sono consapevole di aver già scritto una sezione analoga negli appunti di *IQFT*, ma preferisco includere anche quest'altra fonte per completezza.

Consideriamo l'hamiltoniana:

$$H = \int d^3 x \mathcal{H} = H_0 + H_{int} \tag{1.8.1}$$

cioè il caso in cui possiamo separare l'hamiltoniana in una parte libera H_0 ed una parte interagente H_{int} , in particolare ci interessa il caso in cui la forza di interazione è debole e quindi si può usare una teoria perturbativa.

Se utilizziamo la rappresentazione di Schrödinger, allora gli stati evolvono nel tempo e le osservabili/operatori sono costanti. L'evoluzione temporale è data da:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (1.8.2)$$

e possiamo usare il propagatore come:

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (1.8.3)$$

in cui:

$$U^{-1}(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0) \quad , \quad i \frac{\partial}{\partial t} U = HU. \quad (1.8.4)$$

Se abbiamo un'Hamiltoniana che non dipende dal tempo, allora:

$$U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.8.5)$$

ovvero abbiamo U espresso in una notazione esponenziale, che diventa inutilizzabile quando $H = H(t)$ e dunque quando l'hamiltoniana non commuta più con se stessa a tempi diversi:

$$[H(t), H(t')] \neq 0. \quad (1.8.6)$$

Se utilizziamo la rappresentazione di Heisenberg allora, succede l'opposto, ovvero gli stati sono costanti e gli operatori evolvono nel tempo:

$$q_H(t) = U^\dagger q(0) U \quad (1.8.7)$$

continua a valere:

$$i \frac{\partial}{\partial t} U = HU \quad (1.8.8)$$

da cui discende l'equazione:

$$i \frac{\partial}{\partial t} q_H(t) = i \frac{\partial U^\dagger}{\partial t} q(0) U + i U^\dagger q(0) \frac{\partial}{\partial t} U \quad (1.8.9)$$

$$= -HU^\dagger q(0) U + U^\dagger q(0) HU \quad (1.8.10)$$

$$= [q_H, H]. \quad (1.8.11)$$

Notiamo che le due rappresentazioni (Schrödinger e Heisenberg) sono equivalenti perché i valori di aspettazione sono uguali:

$${}_S \langle \psi(t) | q_S(0) | \psi(t) \rangle_S = {}_H \langle \psi(0) | q_H(t) | \psi(0) \rangle_H. \quad (1.8.12)$$

Mettiamo nel nostro cassetto della memoria le cose imparate e passiamo a parlare della rappresentazione che ci sarà più utile, ovvero la **rappresentazione di interazione** (o *di Dirac*) che è una rappresentazione mista tra

Heisenberg e Schrödinger. In questa rappresentazione sia gli stati sia gli operatori evolvono nel tempo, ma con pezzi di Hamiltoniana diversi. Gli operatori evolvono, alla Heisenberg, ma con l'hamiltoniana libera:

$$q_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} q(0) e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (1.8.13)$$

Gli stati evolvono come:

$$|\psi(t)\rangle = e^{iH_0(t-t_0)} |\psi(t)\rangle_S \quad (1.8.14)$$

$$= e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} |\psi(0)\rangle \quad (1.8.15)$$

ovvero, togliamo il pezzo di hamiltoniana libera e dunque gli stati evolvono alla Schrödinger, ma con l'hamiltoniana di interazione.³

L'evoluzione temporale di uno stato segue l'eq di Schrödinger:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = e^{iH_0(t-t_0)} \left[-H_0 |\psi(t)\rangle_S + i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_S \right] \quad (1.8.16)$$

$$= e^{iH_0(t-t_0)} (-H_0 + H) |\psi(t)\rangle_S \quad (1.8.17)$$

$$= e^{iH_0(t-t_0)} H_I e^{-iH_0(t-t_0)} |\psi(t)\rangle_I \quad (1.8.18)$$

Ovvero abbiamo:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = H_{int}^I |\psi(t)\rangle_I \quad (1.8.19)$$

$$H_{int}^I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_{int} e^{-iH_0(t-t_0)} = H_{int}(\phi_I). \quad (1.8.20)$$

Osserviamo che per $H_{int} = 0$ riotteniamo la rappresentazione di Heisenberg; inoltre, i valori di aspettazione non dipendono dalla rappresentazione:

$${}_I \langle \psi(t) | q_I(t) | \psi(t) \rangle_I = {}_S \langle \psi(t) | q_S(0) | \psi(t) \rangle_S = {}_H \langle \psi(0) | q_H(t) | \psi(0) \rangle_H. \quad (1.8.21)$$

Per passare dalla rappresentazione di Heisenberg a quella di interazione dobbiamo usare:

$$q_H(t) = e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)} q_I(0) e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.8.22)$$

$$= U^\dagger q_I(t) U \quad (1.8.23)$$

dove indichiamo:

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}. \quad (1.8.24)$$

Osservo che U soddisfa l'equazione di Schrödinger:

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t_0) = H_{int}^I U_I(t, t_0) \quad (1.8.25)$$

³Nota che vale $e^A e^B = e^{A+B}$ soltanto se $[A, B] = 0$.

come si vede da:

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = -H_0 e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} + e^{iH_0(t-t_0)} H e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.8.26)$$

$$= e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.8.27)$$

$$= e^{iH_0(t-t_0)} H_{int} e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.8.28)$$

$$= H_{int}^I e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.8.29)$$

$$= H_{int}^I U(t, t_0). \quad (1.8.30)$$

Per riuscire a dare una rappresentazione di U in forma esponenziale dobbiamo studiare l'equazione di Dyson, in quanto H_{int}^I ed U dipendono entrambi dal tempo e non è detto che commutino.

1.9 Equazione di Dyson

I riferimenti sono p. 85 del Peskin e Schroeder [4].

Consideriamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} X(t) = g A(t) X(t) \quad (1.9.1)$$

in cui X e A sono operatori, e possiamo supporre:

$$X(t) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} g^n X_n(t) \quad (1.9.2)$$

che sostituito in (1.9.1) da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g^n \dot{X}_n(t) = g A(t) \left(\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} g^n X_n(t) \right). \quad (1.9.3)$$

Abbiamo dunque:

$$\dot{X}_1 = A, \quad \dot{X}_n = A X_{n-1} \quad \forall n > 1 \quad (1.9.4)$$

da cui:

$$X_1 = \int dt A \quad (1.9.5)$$

pertanto:

$$X_n = \int dt A X_{n-1} \quad (1.9.6)$$

$$= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n [T[A(t_1) A(t_2) \dots A(t_n)]]. \quad (1.9.7)$$

in cui T indica il prodotto temporalmente ordinato.

Siccome l'argomento di (1.9.7) è simmetrico, dal punto di vista geometrico abbiamo che (guarda bene gli estremi di integrazione):

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \quad (1.9.8)$$

come puoi vedere nella figura 1.1.

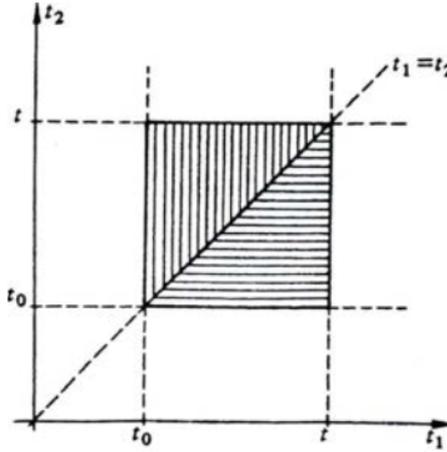


Figura 1.1: Rappresentazione geometrica dal Rossetti, *Rudimenti di Meccanica Quantistica*, appendice 9.

La relazione (1.9.8) la possiamo generalizzare per n integrali:

$$X_n = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n [T[A(t_1) A(t_2) \dots A(t_n)]] \quad (1.9.9)$$

in cui il fattore $(n!)^{-1}$ compare cambiando gli estremi di integrazione ad n integrali. Possiamo scrivere:

$$X(t) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n [T[A(t_1) A(t_2) \dots A(t_n)]] \quad (1.9.10)$$

che possiamo riscrivere in modo compatto come l'inverso di un'espansione di Taylor:

$$X(t) = T \exp \left\{ g \int_{t_0}^t dt_1 A(t_1) \right\}. \quad (1.9.11)$$

Questo che abbiamo appena detto ci interessa perché l'equazione:

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t_0) = H_{int}^I U_I(t, t_0) \quad (1.9.12)$$

è risolta da:

$$U_I(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t dt_1 H_{int}^I(t_1) \right\} \quad (1.9.13)$$

che è detta **equazione di Dyson**, che se scritta in termini perturbativi diventa la *serie di Dyson*.

1.10 Formula di Gell-Mann-Low (evoluzione temporale campo interagente)

I riferimenti sono p. 86-87 del Peskin e Schroeder [4].

Prendiamo un campo scalare reale con:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \quad (1.10.1)$$

e studiamo l'equazione del moto:

$$(\square + m^2)\phi = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi} \quad (1.10.2)$$

in cui, però, stiamo usando la rappresentazione di Heisenberg, dunque:

$$\dot{\phi} = i[H, \phi] \quad , \quad \dot{\pi} = i[H, \pi] \quad (1.10.3)$$

dunque:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_{int} \quad (1.10.4)$$

$$= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}. \quad (1.10.5)$$

Però, se utilizziamo la rappresentazione di interazione allora ϕ_I evolve solo con H_0 e abbiamo la soluzione del campo libero:

$$\phi_0 = \psi^+ + \psi^- \quad (1.10.6)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \left(a e^{-ikx} + a^\dagger e^{ikx} \right). \quad (1.10.7)$$

Vediamo come evolve lo stato di vuoto. Definiamo i ground state della teoria libera e interagente come:

$$H_0 |0\rangle = 0 \quad (1.10.8)$$

$$H |\Omega\rangle = E_0 |\Omega\rangle \quad (1.10.9)$$

e, mettendoci nella rappresentazione di interazione, vediamo come evolve nel tempo:

$$e^{-iHt} |0\rangle = e^{-iHt} \mathbb{1} |0\rangle \quad (1.10.10)$$

$$= e^{-iHt} \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|0\rangle \quad (1.10.11)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_n t} |n\rangle \langle n|0\rangle \quad (1.10.12)$$

$$= e^{-iE_0 t} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-iE_n t} |n\rangle \langle n|0\rangle. \quad (1.10.13)$$

Abbiamo che $\langle \Omega|0\rangle$ perché stiamo ipotizzando che l'interazione possa essere trattata con uno sviluppo perturbativo, quindi la costante di accoppiamento dev'essere $g \ll 1$, e nel limite di $g = 0$ riotteniamo la teoria libera, quindi il vuoto interagente deve tendere al vuoto della teoria libera e deve farlo in maniera continua rispetto alla variazione di g .

Quindi:

$$|\Omega\rangle = \frac{1}{\langle \Omega|0\rangle} e^{-i(H-E_0)\tau} |0\rangle - \frac{1}{\langle \Omega|0\rangle} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i(E_n-E_0)\tau} |n\rangle \langle n|0\rangle \quad (1.10.14)$$

ma siccome $E_n > E_0$ possiamo studiare:

$$|\Omega\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{e^{-i(H-E_0)\tau}}{\langle \Omega|0\rangle} |0\rangle \quad (1.10.15)$$

perché gli altri termini tendono a zero grazie alla manipolazione $-i\varepsilon$, abbiamo scelto $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll 1$.

Un modo equivalente per fare quest'operazione è usare la rotazione di Wick:

$$\tau \longrightarrow i\tau. \quad (1.10.16)$$

In più, siccome $\tau \rightarrow \infty$, possiamo traslare di una piccola costante:

$$\tau \longrightarrow \tau + t_0 \quad (1.10.17)$$

e avere:

$$|\Omega\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{e^{-i(H-E_0)\tau}}{\langle \Omega|0\rangle} |0\rangle \quad (1.10.18)$$

inoltre l'energia di punto zero sul vuoto agisce come l'identità:

$$\langle H_0|0\rangle = 0 \quad (1.10.19)$$

quindi:

$$e^{iH_0 t} |0\rangle = \mathbb{1} |0\rangle \quad (1.10.20)$$

perciò posso aggiungerlo:

$$|\Omega\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \left[e^{-iE_0(\tau+t_0)} \langle \Omega|0\rangle \right]^{-1} e^{-iH(\tau+t_0)} e^{iH_0(\tau+t_0)} |0\rangle \quad (1.10.21)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \left[e^{-iE_0(\tau+t_0)} \langle \Omega|0\rangle \right]^{-1} U(t_0, -\tau) |0\rangle. \quad (1.10.22)$$

Analogamente scriviamo:

$$\langle \Omega| = \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle 0| U(\tau, t_0) \left[e^{-iE_0(\tau-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle \right]^{-1}. \quad (1.10.23)$$

A questo punto, ci piacerebbe, riscrivere il valore di aspettazione dei campi:

$$\langle \Omega| T[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] |\Omega\rangle \quad (1.10.24)$$

in cui $\phi = \phi_H$, in termini del vuoto libero $|0\rangle$ e con la rappresentazione di interazione, in cui il campo evolve come nella teoria libera ($\phi_I = \phi_0$).

Ricordiamoci che per passare dalla rappresentazione di Heisenberg a quella di interazione dobbiamo usare:

$$q_H(t) = U^\dagger q_I(t) U \quad (1.10.25)$$

in cui:

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}. \quad (1.10.26)$$

Osserviamo inoltre che:

$$U^\dagger(t_2, t_1) = U(t_1, t_2) \quad (1.10.27)$$

$$U(t, t_0) = U(t, t') U(t', t_0). \quad (1.10.28)$$

Possiamo implementare i conti:

$$\begin{aligned} \langle \Omega| T \left[\prod_i \phi(x_i) \right] |\Omega\rangle &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle 0| U(\tau, t_0) T \left[\prod_i \phi(x_i) \right] U(t_0, -\tau) |0\rangle \cdot \\ &\quad \cdot [|\langle 0|\Omega\rangle|^2 e^{-2iE_0\tau}]^{-1} \end{aligned} \quad (1.10.29)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle 0| U(\tau, t_0) T \left[\prod_{i=1}^n U^\dagger(t_i, t_0) \phi_I(x_i) U(t_i, t_0) \right] U(t_0, -\tau) |0\rangle \cdot \\ &\quad \cdot [|\langle 0|\Omega\rangle|^2 e^{-2iE_0\tau}]^{-1} \end{aligned} \quad (1.10.30)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle 0| U(\tau, t_0) T \left[\prod_{i=1}^n U(t_0, t_i) \phi_I(x_i) U(t_i, t_0) \right] U(t_0, -\tau) |0\rangle \cdot \\ &\quad \cdot [|\langle 0|\Omega\rangle|^2 e^{-2iE_0\tau}]^{-1} \end{aligned} \quad (1.10.31)$$

in cui possiamo inserire $U(\pm\tau)$ perché $\tau \rightarrow \infty$, dunque è già temporalmente ordinato; inoltre possiamo cambiare l'ordine degli oggetti interni al

prodotto temporalmente ordinato, quindi mettere gli operatori di evoluzione temporale tutti vicini:

$$\langle \Omega | T \left[\prod_i \phi(x_i) \right] | \Omega \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle 0 | T \left[U(\tau, -\tau) \prod_{i=1}^n \phi_0(x_i) \right] | 0 \rangle \cdot \left[|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-2i E_0 \tau} \right]^{-1}. \quad (1.10.32)$$

Per poter riscrivere il denominatore osserviamo che gli autostati di H sono normalizzati, quindi:

$$\langle \Omega | \Omega \rangle = 1 \quad (1.10.33)$$

e se sostuiamo (1.10.22) e (1.10.23) otteniamo:

$$\langle \Omega | \Omega \rangle = \langle 0 | U(\tau, t_0) U(t_0, -\tau) | 0 \rangle \left(|\langle \Omega | 0 \rangle|^2 e^{-2i E_0 \tau} \right)^{-1} \quad (1.10.34)$$

$$= \langle 0 | U(\tau, -\tau) | 0 \rangle \left(|\langle \Omega | 0 \rangle|^2 e^{-2i E_0 \tau} \right)^{-1} \quad (1.10.35)$$

$$= 1. \quad (1.10.36)$$

Nota bene che abbiamo abbandonato l'indice I per non appesantire la notazione: quando applico sul vuoto libero siamo nella rappresentazione di interazione, ovvero campo libero, in questo modo manteniamo la consistenza con le formule sopra, anche se i valori di aspettazione sono uguali.

In definitiva abbiamo trovato:

$$\langle \Omega | T \left[\prod_i \phi(x_i) \right] | \Omega \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{\langle 0 | T \left[U(\tau, -\tau) \phi(x_i) \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | U(\tau, -\tau) | 0 \rangle}, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (1.10.37)$$

che è detta **formula di Gell-Mann e Low**.

Ricordiamoci anche che:

$$U(\tau, -\tau) = T \exp \left\{ -i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_{int}^{(I)} \right\} \quad (1.10.38)$$

in cui $H_I(t) = H_{int}^{(I)} = H_{int}(\phi_I)$.

1.10.1 Diagrammi connessi, non connessi e bolle di vuoto

Cominciamo ad addentrarci un po' di più nella trattazione dei diagrammi di Feynman, definendo i termini del titolo. Le **bolle di vuoto** sono i pezzi del diagramma che non sono collegati alle gambe esterne. I **diagrammi sconnessi** sono quelli che non hanno bolle di vuoto ma *permettono forward scattering* (cioè posso avere particelle che non interagiscono). I **diagrammi connessi**⁴ sono quelli che non hanno nè bolle di vuoto nè forward scattering.

⁴Teniamo bene a mente che il termine "diagramma connesso" può essere soggetto ad abusi di notazione.

Chiamiamo **diagrammi tree-level** i diagrammi in cui *non abbiamo loop* (quindi tutti i 4-impulsi sono fissati).

Dimostriamo che la formula di Gell-Mann-Low (GML) (1.10.37), in cui inseriamo la rappresentazione (1.10.38), esclude automaticamente le bolle di vuoto. Per far ciò studiamo numeratore e denominatore separatamente ed espandiamo in serie (nota che i campi dentro l'hamiltoniana \mathcal{H}_I sono in rappresentazione di interazione):

$$\langle \Omega | T [\phi_1 \dots \phi_n] | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T [\phi_1 \dots \phi_n e^{-i \int d^4 z \mathcal{H}_I}] | 0 \rangle}{\langle 0 | T [e^{-i \int d^4 z \mathcal{H}_I}] | 0 \rangle} \equiv \frac{N}{D}. \quad (1.10.39)$$

Abbiamo indicato con n il numero di campi, ovvero numero di particelle in stato finale e iniziale; consideriamo p l'ordine della perturbazione, s è il numero di vertici collegati con le gambe esterne, mentre $p - s$ è il numero di vertici che non sono collegati con le gambe esterne (ovvero le bolle di vuoto).

Abbiamo visto che il numeratore (N) di GML dà come risultato tutti i diagrammi (ad un certo ordine perturbativo), compresi quelli che includono le bolle di vuoto, riscriviamo dunque esplicitandono i vertici collegati alle gambe esterne e quelli scollegati (bolle di vuoto):

$$N = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=0}^p \left\{ \frac{(-i)^p}{p!} \langle 0 | T [\phi_1 \dots \phi_n \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y_s \mathcal{H}_I(y_1) \dots \mathcal{H}_I(y_s)] | 0 \rangle_C \times \right. \quad (1.10.40)$$

$$\left. \times \frac{p!}{s!(p-s)!} \langle 0 | T \left[\int d^4 x_{s+1} \dots \int d^4 x_p \mathcal{H}_I(x_{s+1}) \mathcal{H}_I(x_p) \right] | 0 \rangle \right\} \quad (1.10.41)$$

in cui nella riga (1.10.40) ci sono i termini collegati alle gambe esterne e in (1.10.41) le bolle di vuoto. Notiamo anche che appare un termine:

$$\binom{p}{s} = \frac{p!}{s!(p-s)!} \quad (1.10.42)$$

perché stiamo scegliendo s elementi (\mathcal{H}) da un gruppo di p elementi che sono equivalenti tra loro (il pedice C serve solo ad enfatizzare il fatto che i vertici sono collegati).

Possiamo manipolare l'espressione estraendo il primo blocco di termini e riscrivendo il resto in termini di $r = p - s$. Da notare che quando scambiamo le sommatorie dobbiamo cambiarne l'indice p , in modo da rispettare la condizione $p > s$, perciò:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=0}^p \rightarrow \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=s}^{\infty}. \quad (1.10.43)$$

e dunque:

$$N = \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-i)^s}{s!} \langle 0 | T \left[\phi_1 \dots \phi_n \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y_s \mathcal{H}_I(y_1) \dots \mathcal{H}_I(y_s) \right] | 0 \rangle_C \right\} \times \quad (1.10.44)$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-i)^r}{r!} \langle 0 | T \left[\int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_r \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_r) \right] | 0 \rangle \right\} \quad (1.10.45)$$

osserviamo che il secondo blocco (1.10.45), che contiene le bolle di vuoto, coincide esattamente con l'espansione in serie del denominatore!

Tutti i diagrammi non collegati alle gambe esterne (bolle di vuoto) non danno contributo al risultato finale, in altre parole la formula di Gell-Mann-Low elimina le bolle di vuoto, ma mantiene sia i diagrammi connessi sia quelli disconnessi. Scriviamo:

$$\langle \Omega | T \left[\phi_1 \dots \phi_n \right] | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \left[\phi_1 \dots \phi_n e^{-i \int d^4 z \mathcal{H}_I} \right] \rangle}{\langle 0 | T \left[e^{-i \int d^4 z \mathcal{H}_I} \right] | 0 \rangle} \quad (1.10.46)$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-i)^s}{s!} \langle 0 | T \left[\phi_1 \dots \phi_n \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y_s \mathcal{H}_I(y_1) \dots \mathcal{H}_I(y_s) \right] | 0 \rangle_C \cdot \quad (1.10.47)$$

1.11 Teorema di Wick per campi scalari

I riferimenti sono p. 88-90 del Peskin e Schroeder [4].

Utilizzo la notazione:

$$\Delta_F(x-y) = \overline{\phi(x)\phi(y)} \quad (1.11.1)$$

con in campi in rappresentazione di interazione.

Teorema 1. *Il teorema di Wick afferma:*

$$T[\phi(x_i)] = T[\phi_i] = N[\phi_i] + \sum_{\sigma} N[\overline{\phi_i \phi_j \phi_k}] + \sum_{\sigma} N[\overline{\phi_i \phi_j \phi_{i'} \phi_{j'} \phi_{k'}}] + \dots \quad (1.11.2)$$

dove per brevità omettiamo tutti i segni di produttrice, indichiamo con $N[\dots]$ il prodotto normal-ordered e indichiamo con i puntini tutte le altre possibili contrazioni dei campi.

Se abbiamo un numero pari di campi, allora nell'ultimo termine contraiamo tutte le coppie e sommiamo sulle permutazioni (σ), se invece abbiamo un numero di dispari di campi, allora ci rimane un campo non accoppiato.

Se "paniniamo" nel vuoto, otteniamo:

$$\langle 0 | T[\phi(x_i)] | 0 \rangle = 0 \quad (1.11.3)$$

se abbiamo un numero dispari di campi, mentre con un numero pari di campi abbiamo solo le somme sulle permutazioni del prodotto dei propagatori (cioè sopravvive solo il termine dove tutti i campi sono accoppiati).

Da notare che ci interessa studiare:

$$\langle 0 | T[\phi(x_i)] | 0 \rangle \quad (1.11.4)$$

perché prima abbiamo dimostrato che possiamo esprimere:

$$\langle \Omega | T[\phi_H(x_i)] | \Omega \rangle \propto \langle 0 | U(+\infty, -\infty) T[\phi(x_i)] | 0 \rangle \quad (1.11.5)$$

in cui $\phi = \phi_I = \phi_0$, cioè abbiamo la rappresentazione di interazione che si comporta come il campo libero.

Dimostrazione per 2 campi. Consideriamo solo campi liberi:

$$\phi = \phi^+ + \phi^- \quad (1.11.6)$$

in cui:

$$\phi^+ \sim \hat{a} e^{-ikx} \quad , \quad \phi^- \sim \hat{a}^\dagger e^{ikx}. \quad (1.11.7)$$

Studiamo:

$$T[\phi(x)\phi(y)] = \phi(x)\phi(y) \quad (1.11.8)$$

in cui imponiamo $x^0 > y^0$. Implementando i conti:

$$T[\phi(x)\phi(y)] = (\phi^+(x) + \phi^-(x)) \cdot (\phi^+(y) + \phi^-(y)) \quad (1.11.9)$$

$$= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^+(x)\phi^-(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) \quad (1.11.10)$$

$$= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^-(x)\phi^-(y) + [\phi^+(x), \phi^-(y)] \quad (1.11.11)$$

$$= N[\phi(x)\phi(y)] + [\phi^+(x), \phi^-(y)] \quad (1.11.12)$$

che se "paniniamo" nel vuoto:

$$\langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | N[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle + \langle 0 | [\phi^+(x), \phi^-(y)] | 0 \rangle \quad (1.11.13)$$

in cui:

$$\langle 0 | N[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle \sim \langle 0 | \hat{a}^\dagger \dots \hat{a} | 0 \rangle = 0 \quad (1.11.14)$$

e ricordando anche che il commutatore tra campi è un c-numero otteniamo:

$$\Delta_F(x-y) = \langle 0 | [\phi^+(x), \phi^-(y)] | 0 \rangle \quad (1.11.15)$$

$$= [\phi^+(x), \phi^-(y)]. \quad (1.11.16)$$

Dunque, abbiamo trovato che:

$$T[\phi(x)\phi(y)] = N[\phi(x)\phi(y)] + \overline{\phi(x)\phi(y)}. \quad (1.11.17)$$

Dimostrazione per induzione. Siccome il teorema vale per due campi, assumiamo che valga per n e lo dimostriamo per $n+1$. Assumiamo che x_{n+1} sia il tempo più piccolo (possiamo sempre riarrangiare i termini all'interno del prodotto temporalmente ordinato):

$$T[\phi_1 \dots \phi_{n+1}] = T[\phi_1 \dots \phi_n] \phi_{n+1} \quad (1.11.18)$$

$$= T[\phi_i] \phi_{n+1} \quad (1.11.19)$$

$$= N[\phi_i] \phi_{n+1} + \sum_{\sigma} N[\overline{\phi_i \phi_j \phi_k}] \phi_{n+1} + \sum_{\sigma} N[\overline{\phi_i \phi_j \phi_{i'} \phi_{j'} \phi_{k'}}] \phi_{n+1} + \dots \quad (1.11.20)$$

vediamo che il primo termine è riscrivibile come:

$$N[\phi_i] \phi_{n+1} = \left(\sum_{i=0}^n \prod_{j=0}^i (\phi_j^-) \prod_{k=0}^{n-1} (\phi_k^+) \right) (\phi_{n+1}^+ + \phi_{n+1}^-) \quad (1.11.21)$$

$$= \left(\sum \phi_j^- \phi_k^+ \right) (\phi_{n+1}^+ + \phi_{n+1}^-) \quad (1.11.22)$$

$$= \sum \phi_j^- \phi_k^+ \phi_{n+1}^+ + \sum \phi_j^- \phi_k^+ \phi_{n+1}^- \quad (1.11.23)$$

facciamo agire il commutatore nell'ultimo termine:

$$N[\phi_i] \phi_{n+1} = \sum \phi_j^- \phi_k^+ \phi_{n+1}^+ + \sum \phi_j^- \phi_k^+ \phi_{n+1}^- \quad (1.11.24)$$

$$= \sum \phi_j^- \phi_k^+ \phi_{n+1}^+ + \sum \phi_j^- \phi_{n+1}^- \phi_k^+ + \sum \phi_j^- [\phi_k^+, \phi_{n+1}^-] \quad (1.11.25)$$

$$= N[\phi_i \phi_{n+1}] + \sum \phi_j \overline{\phi_{n+1} \phi_k}. \quad (1.11.26)$$

In maniera analoga per gli altri membri abbiamo il termine di normal ordering corretto e la somma va a completare il termine successivo perché aggiunge il termine di contrazione con ϕ_{n+1} .

1.12 Esempio di teoria interagente e fattore di simmetria

I riferimenti sono p. 91-93 del Peskin e Schroeder [4].

Studiamo la teoria ϕ^4 , la cui lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1.12.1)$$

in cui λ è la costante di accoppiamento della teoria ed è adimensionale (ricordando che, in unità naturali, abbiamo $[\phi] = L^{-1}$ e che $[S] = 1$).

In questa teoria quindi:

$$H_{int}^{(I)} = H_{int}(\phi_I) = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1.12.2)$$

studiamo il valore di aspettazione:

$$\langle \Omega | T[\phi_1 \dots \phi_n] | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T[\phi_1 \dots \phi_n e^{-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \phi^4(z)}] | 0 \rangle}{\langle 0 | T[e^{-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \phi^4(z)}] | 0 \rangle} \quad (1.12.3)$$

facciamo delle espansioni in serie di λ e studiamo le correzioni al propagatore, ricordando (1.10.8) e (1.10.9). Consideriamo il caso di sole due particelle, ignoriamo il denominatore di (1.10.37) e consideriamo anche le bolle di vuoto:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T[\phi(x)\phi(y)] | \Omega \rangle &= \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle + \\ &+ \frac{(-i\lambda)}{4!} \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y) \int d^4z \phi^4(z)] | 0 \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{(-i\lambda)^2}{(4!)^2} \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y) \int d^4z \phi^4(z) \int d^4w \phi^4(w)] | 0 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (1.12.4)$$

in cui per ogni ordine perturbativo portiamo fuori l'integrale e utilizziamo il teorema di Wick:

- All'ordine zero (non perturbato) abbiamo solo il propagatore:

$$\Delta_F(x-y) = \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle \quad (1.12.5)$$

e lo rappresentiamo come in figura 1.2a.

- Al primo ordine abbiamo solo due combinazioni non equivalenti:

$$\begin{aligned} \int d^4z \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)\phi^4(z)] | 0 \rangle &= 3\Delta_F(x-y) \int d^4z \Delta_F(z-z) \Delta_F(z-z) + \\ &+ 12 \int d^4z \Delta_F(x-z) \Delta_F(y-z) \Delta_F(z-z) \end{aligned} \quad (1.12.6)$$

e lo rappresentiamo come in figura 1.2b. Il punto z rappresenta il punto di interazione, e siccome z è integrato, l'interazione avviene in qualunque punto dello spazio tempo.

- Al *secondo ordine* abbiamo:

$$\int d^4z \int d^4w \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)\phi^4(z)\phi^4(w)] | 0 \rangle \quad (1.12.7)$$

e lo rappresentiamo come in figura 1.2c. Il numero di vertici (numero di punti, esclusi x e y) mostra a quale ordine perturbativo stiamo lavorando.

- Al *terzo ordine* abbiamo:

$$\int d^4z \int d^4w \int d^4u \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)\phi^4(z)\phi^4(w)\phi^4(u)] | 0 \rangle \quad (1.12.8)$$

e lo rappresentiamo come in figura 1.2d. Il coefficiente di quest'ordine perturbativo è:

$$\left(-\frac{i\lambda}{4!}\right) \cdot \frac{1}{3!} \cdot 3! \cdot 12 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \quad (1.12.9)$$

in cui: $1/3!$ è il *coefficiente di Taylor/Dyson*; $3!$ viene dal fatto che possiamo permutare z, w, u ; 12 è per le contrazioni equivalenti in z ; 24 è per le contrazioni equivalenti in w ; 12 è per le contrazioni equivalenti in u ; $1/2$ è perché le due contrazioni con $\Delta(w-u)$ sono equivalenti.

In generale i fattoriali di Dyson e della permutazione dei vertici si compensano, inoltre, in ogni vertice permutando le gambe equivalenti si ottiene un $4!$ (perché nella lagrangiana ho 4 campi) che va a compensare il $1/4!$ presente nel coefficiente della lagrangiana di interazione.

L'unica cosa che rimane sono eventuali simmetrie residue, per questo motivo il termine numerico complessivo è detto **fattore di simmetria**. Nell'esempio di sopra si ha $s = 8$, dunque:

$$\frac{(-i\lambda)^3}{8} \int d^4z \int d^4w \int d^4u \Delta_F(x-z) \Delta_F(z-z) \Delta_F(z-w) \Delta_F(w-u) \times \\ \times \Delta_F(u-w) \Delta_F(u-u) \Delta_F(w-y). \quad (1.12.10)$$

La simmetria del problema si vede permutando le linee equivalenti (devono avere anche la stessa direzione temporale). Puoi vedere la figura 1.3.

1.12.1 Le regole di Feynmann per il campo scalare

I riferimenti sono p. 114-115 del Peskin e Schroeder [4] e p. 90-91 dello Srednicki [7].

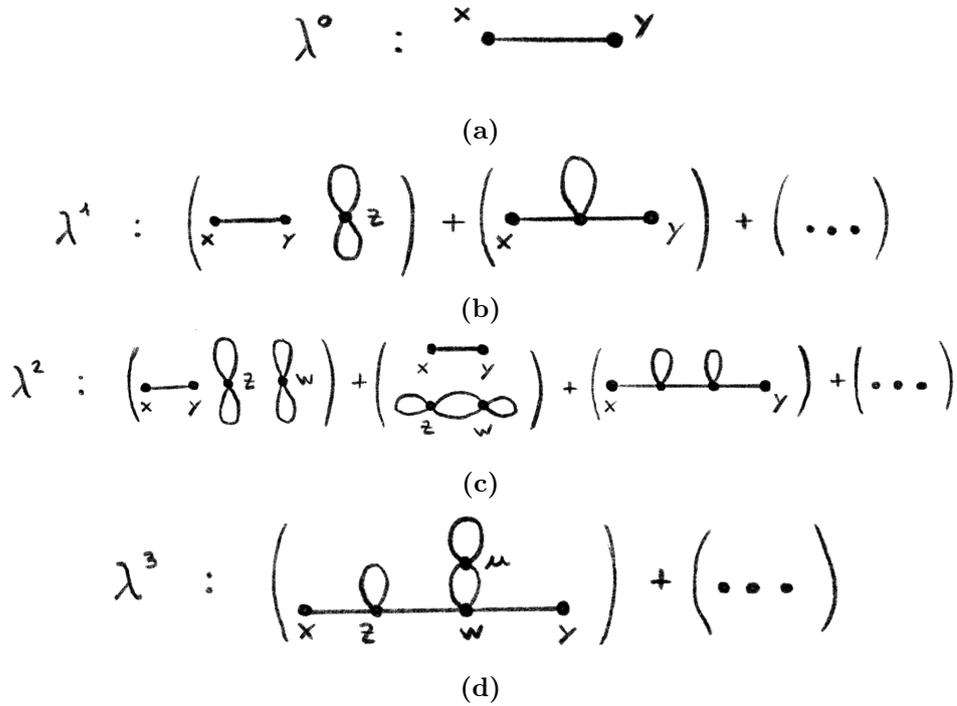


Figura 1.2: Ordini perturbativi teoria ϕ^4 .

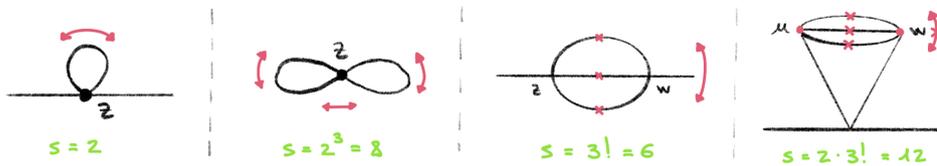


Figura 1.3

Enunciamo in questa sezione le regole di Feynmann per il campo scalare e la teoria ϕ^4 . Le regole di Feynmann permettono guardando uno specifico diagramma di Feynman, che rappresenta un certo ordine perturbativo, di scrivere l'integrale corrispondente.

Nello spazio delle coordinate e con $\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$ le regole di Feynman sono:

- Ad ogni campo *esterno* associamo:

$$\phi \sim e^{-ipx} \tag{1.12.11}$$

e lo disegniamo come una linea tratteggiata.

- Ad ogni linea di campo *interna* associamo:

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (1.12.12)$$

- Ad ogni *vertice* associamo:

$$(-i\lambda) \int d^4z \quad (1.12.13)$$

intendendo che l'interazione avviene in ogni punto z dello spazio.

- Dividiamo ogni *diagramma* per il suo fattore di simmetria s .

Queste sono le regole nello spazio delle coordinate, ma ovviamente possiamo allo spazio degli impulsi (p_i sono i quadri-impulsi di un vertice a 4 linee). Per un vertice con 4 gambe esterne abbiamo:

$$(-i\lambda) \int d^4z e^{-i(p_1+p_2+p_3+p_4)z} = (-i\lambda) \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1+p_2+p_3+p_4). \quad (1.12.14)$$

Per un vertice con 2 gambe esterne ed un loop abbiamo:

$$\begin{aligned} (-i\lambda) \int d^4z e^{-i(p_1+p_2+p_3+p_4)z} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-iq(z-z)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \\ (-i\lambda) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-iq(z-z)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} (2\pi)^4 \delta^4(p_1+p_2). \end{aligned} \quad (1.12.15)$$

Le regole di Feynman nello spazio degli impulsi sono:

- Ad ogni campo *esterno* associamo:

$$\phi \sim 1. \quad (1.12.16)$$

- Ad ogni linea di campo *interna* associamo:

$$\tilde{\Delta}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (1.12.17)$$

- Ad ogni *vertice* associamo:

$$(-i\lambda) \cdot (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_i). \quad (1.12.18)$$

- In ogni *loop* integriamo:

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \quad (1.12.19)$$

per tutti i momenti non fissati dalla δ^4 .

- Dividiamo ogni *diagramma* per il suo fattore di simmetria s .

Ricordiamoci che per convenzione l'impulso ha segno positivo se punta dentro il vertice (impulso entrante).

Notiamo un'anticipazione di quello che faremo in seguito (ovvero collegare la sezione d'urto a $|M|^2$), cioè che: applicando le regole di Feynman nello spazio degli impulsi, per ogni diagramma otteniamo:

$$\tilde{G}_A = M \cdot (2\pi)^2 \delta^4(\Sigma p_{in} - \Sigma p_{out}) \quad (1.12.20)$$

in cui \tilde{G}_A è la funzione di Green amputata ed M è detto *elemento di matrice S ridotta*.

1.12.2 Esempio sulla funzione di Green

Studiamo:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1.12.21)$$

e calcoliamo la funzione di correlazione/Green con 2 e con 4 gambe al prim'ordine perturbativo, utilizzando quello che abbiamo imparato da LSZ (1.7.29), dalla formula di GML (1.10.37) e dal teorema di Wick.

Vediamo la funzione a 2 gambe:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \langle \Omega | T[\phi(x_1)\phi(x_2)] | \Omega \rangle \quad (1.12.22)$$

$$\approx -i \frac{\lambda}{4!} \langle 0 | T[\phi_1 \phi_2 \int d^4 z \phi_z^4] | 0 \rangle_C \quad (1.12.23)$$

$$= -i \frac{\lambda}{2} \int d^4 z \Delta(x_1 - z) \Delta(x_2 - z) \Delta(z - z) \quad (1.12.24)$$

$$= -\frac{i\lambda}{2} \int d^4 z \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p_1) e^{-ip_1(x_1-z)} \times \\ \times \tilde{\Delta}(p_2) e^{-ip_2(x_2-z)} \tilde{\Delta}(p) e^{-ip(z-z)} \quad (1.12.25)$$

$$= -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \exp\{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2)\} \times \\ \times \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p) \quad (1.12.26)$$

dunque nello spazio degli impulsi abbiamo:

$$\tilde{G}^{(2)}(p_1, p_2) = -\frac{i\lambda}{2} \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p) \quad (1.12.27)$$

la funzione di Green amputata di conseguenza è:

$$\tilde{G}^{(2)}(p_1, p_2) = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p) \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \quad (1.12.28)$$

e dunque, da (1.12.20):

$$M = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p). \quad (1.12.29)$$

Vediamo a 4 gambe:

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle \Omega | T[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)] | \Omega \rangle \quad (1.12.30)$$

$$\approx -i\frac{\lambda}{4!} \langle 0 | T[\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 \int d^4z \phi_z^4] | 0 \rangle_C \quad (1.12.31)$$

$$= -i\lambda \int d^4z \Delta(x_1 - z) \Delta(x_2 - z) \Delta(x_3 - z) \Delta(x_4 - z) \quad (1.12.32)$$

$$= -i\lambda \int d^4z \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p_1) e^{-ip_1(x_1-z)} \tilde{\Delta}(p_2) e^{-ip_2(x_2-z)} \times \\ \times \tilde{\Delta}(p_3) e^{-ip_3(x_3-z)} \tilde{\Delta}(p_4) e^{-ip_4(x_4-z)} \quad (1.12.33)$$

$$= -i\lambda \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \exp\{-i(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4)\} \times \\ \times \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) \tilde{\Delta}(p_3) \tilde{\Delta}(p_4) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \quad (1.12.34)$$

che nello spazio degli impulsi diventa:

$$G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \exp\{-i(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4)\} \times \\ \times \langle \Omega | T[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)] | \Omega \rangle \quad (1.12.35)$$

$$\approx -i\lambda \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) \tilde{\Delta}(p_3) \tilde{\Delta}(p_4) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4). \quad (1.12.36)$$

La funzione di Green amputata è:

$$\tilde{G}_A^{(4)} = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \quad (1.12.37)$$

dunque, da (1.12.20), ricaviamo:

$$M = -i\lambda. \quad (1.12.38)$$

1.13 Variabili di Mandelstam

I riferimenti sono p. 162 del Peskin e Schroeder [4] e p. 351 dello Srednicki [7].

Per 4 particelle con la stessa massa posso introdurre le variabili di Mandelstam s, t, u che vengono fuori dai diagrammi in figura 1.4.

Siano p_1, p_2 i quadri-impulsi dei campi iniziali (quindi i tri-impulsi iniziali puntano verso il vertice) e siano p_3, p_4 i quadri-impulsi dei campi finali

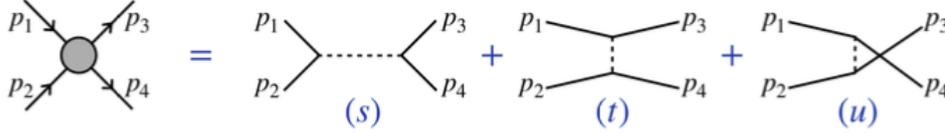


Figura 1.4

(quindi i tri-impulsi finali puntano fuori dal vertice), allora le variabili di Mandelstam sono definite come:

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(p_1 \cdot p_2) = m_3^2 + m_4^2 + 2(p_3 \cdot p_4) \\ t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2(p_1 \cdot p_3) = m_2^2 + m_4^2 - 2(p_2 \cdot p_4) \\ u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2(p_1 \cdot p_4) = m_2^2 + m_3^2 - 2(p_2 \cdot p_3) \end{cases} \quad (1.13.1)$$

che non sono variabili indipendenti, infatti vale:

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2. \quad (1.13.2)$$

Possiamo dimostrarlo:

$$2m_1^2 = 2p_1^2 \quad (1.13.3)$$

$$= 2p_1 \cdot (p_3 + p_4 - p_2) \quad (1.13.4)$$

$$= 2p_1 \cdot p_3 + 2p_1 \cdot p_4 - 2p_1 \cdot p_2 \quad (1.13.5)$$

$$= (m_1^2 + m_3^2 - t) + (m_1^2 + m_4^2 - u) + (m_1^2 + m_2^2 + s) \quad (1.13.6)$$

$$= 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 - (s + t + u) \quad (1.13.7)$$

$$\implies s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2. \quad (1.13.8)$$

Notiamo anche che ad alte energie, in cui m è trascurabile rispetto p , abbiamo:

$$\begin{cases} s \approx +2(p_1 \cdot p_2) = +2(p_3 \cdot p_4) \\ t \approx -2(p_1 \cdot p_3) = -2(p_2 \cdot p_4) \\ u \approx -2(p_1 \cdot p_4) = -2(p_2 \cdot p_3). \end{cases} \quad (1.13.9)$$

Nel sistema di riferimento del centro di massa abbiamo:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0 \quad (1.13.10)$$

se chiamiamo θ l'angolo di deflessione tra \vec{p}_1 e \vec{p}_3 , allora abbiamo:

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 = E_{cm}^2 \\ t = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2(E_1 E_3 - |\vec{p}_1||\vec{p}_3| \cos \theta) \\ u = (p_1 - p_4)^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2(E_1 E_4 - |\vec{p}_1||\vec{p}_4| \cos(\pi + \theta)). \end{cases} \quad (1.13.11)$$

Osserviamo che se $m_i = m \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, allora nel centro di massa abbiamo:

$$E_1 = E_2 + E_3 + E_4 \quad (1.13.12)$$

e anche:

$$s = (2E_1)^2 = (2E_3)^2 \quad (1.13.13)$$

il che implica che:

$$E_1 = E_3 \quad (1.13.14)$$

cioé:

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3|. \quad (1.13.15)$$

Se poniamo $E_i = E$ e $|\vec{p}_i| = |\vec{p}|$, allora otteniamo:

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = 4E^2 = E_{cm}^2 \\ t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 = 2m^2 - 2(E^2 - |\vec{p}|^2 \cos \theta) \\ u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 = 2m^2 - 2(E^2 - |\vec{p}|^2 \cos(\pi + \theta)) \end{cases} \quad (1.13.16)$$

Se trascuriamo le masse, allora abbiamo:

$$E_1 = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = E_2 \quad (1.13.17)$$

$$E_3 = |\vec{p}_3| = |\vec{p}_4| = E_4 \quad (1.13.18)$$

pertanto nel sistema di riferimento del centro di massa abbiamo:

$$t = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) \quad (1.13.19)$$

$$u = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta). \quad (1.13.20)$$

1.14 Sezione d'urto

I riferimenti sono p. 99-108 del Peskin e Schroeder [4] e p. 93-100 dello Srednicki [7].

Per il calcolo della sezione d'urto non polarizzata dobbiamo considerare il fatto che:

- Nello stato iniziale si ha una sovrapposizione di tutte le polarizzazioni possibili, quindi bisogna mediare sulle polarizzazioni iniziali.
- Nello stato finale devo considerare tutti i possibili risultati, quindi devo sommare sulle polarizzazioni finali.

Sappiamo che ogni fermione e ogni fotone ha 2 possibili stati di polarizzazione, dunque se abbiamo n fermioni ed m fotoni nello stato iniziale, dobbiamo considerare:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2^{n+m}} \sum_{spin} |M|^2 \quad (1.14.1)$$

in cui ricordiamo che l'elemento di matrice S ridotta (ovvero M) si ricava dalla funzione di Green amputata:

$$\tilde{G}_A = M \cdot (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_{in} - \Sigma p_{out}). \quad (1.14.2)$$

Consideriamo uno stato iniziale con due particelle, nel sistema di riferimento del centro di massa abbiamo:

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0 \quad (1.14.3)$$

quindi:

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = |\vec{k}| \quad (1.14.4)$$

imponiamo che:

$$\vec{k}_1 = |\vec{k}| \hat{z} \quad , \quad \vec{k}_2 = -|\vec{k}| \hat{z}. \quad (1.14.5)$$

Vogliamo riscrivere $|\vec{k}|$ in funzione delle masse e dell'energia del centro di massa; vediamo:

$$s = (k_1 + k_2)^2 \quad (1.14.6)$$

$$= (E_1 + E_2)^2 \quad (1.14.7)$$

$$= E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \quad (1.14.8)$$

$$= (|\vec{k}|^2 + m_1^2) + (|\vec{k}|^2 + m_2^2) + 2\sqrt{(|\vec{k}|^2 + m_1^2)(|\vec{k}|^2 + m_2^2)} \quad (1.14.9)$$

$$\implies \left[s - 2|\vec{k}|^2 - (m_1^2 + m_2^2) \right]^2 = 4(|\vec{k}|^2 + m_1^2)(|\vec{k}|^2 + m_2^2) \quad (1.14.10)$$

$$\implies s^2 + (m_1^2 + m_2^2)^2 - 4s|\vec{k}|^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) = 4m_1^2 m_2^2 \quad (1.14.11)$$

dunque abbiamo:

$$|\vec{k}_1|_{cm} = |\vec{k}| = \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}. \quad (1.14.12)$$

Se anche nello stato finale abbiamo due particelle (m'_1, m'_2) , allora otteniamo un'espressione analoga con:

$$k \longrightarrow k' \quad (1.14.13)$$

$$m \longrightarrow m' \quad (1.14.14)$$

inoltre, ricordiamo che:

$$s = E_{cm}^2. \quad (1.14.15)$$

Nel sistema di riferimento del laboratorio abbiamo $\vec{k}_2 = 0$ (bersaglio), dunque:

$$s = (E_1 + m_2)^2 - |\vec{k}_1|^2 \quad (1.14.16)$$

$$= (|\vec{k}_1|^2 + m_1^2) + 2m_2\sqrt{|\vec{k}_1|^2 + m_1^2} + m_2^2 - |\vec{k}_1|^2 \quad (1.14.17)$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\sqrt{|\vec{k}_1|^2 + m_1^2} \quad (1.14.18)$$

$$\implies s^2 + (m_1^2 + m_2^2)^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) = 4m_2^2|\vec{k}_1|^2 + 4m_2^2m_1^2 \quad (1.14.19)$$

dunque abbiamo:

$$|\vec{k}_1|_{lab} = \frac{1}{2m_2}\sqrt{s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}. \quad (1.14.20)$$

Possiamo passare dal sistema di riferimento del centro di massa a quello del lab (e viceversa) usando:

$$m_2|\vec{k}_1|_{lab} = E_{cm}|\vec{k}_1|_{cm}. \quad (1.14.21)$$

Per comodità assumiamo che le particelle siano confinate in una scatola di volume V e che il processo di scattering avvenga in un tempo T (quindi il volume nello spazio delle fasi è VT). La probabilità del processo è:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \frac{|\langle \beta | \alpha \rangle|^2}{\langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle} \quad (1.14.22)$$

in cui:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \mathcal{M} \cdot (2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out}) (2\pi)^4 \delta^4(0) \quad (1.14.23)$$

dove utilizziamo una notazione abbreviata:

$$k_{in} - k_{out} = k_1 + k_2 - \sum_{i=1}^n k'_i. \quad (1.14.24)$$

Abbiamo anche:

$$|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = |\mathcal{M}|^2 [(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out})]^2 \quad (1.14.25)$$

$$= |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out}) (2\pi)^4 \delta^4(0) \quad (1.14.26)$$

$$= |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out}) VT \quad (1.14.27)$$

in cui abbiamo usato:

$$(2\pi)^4 \delta^4(0) = \int d^4x = VT \quad (1.14.28)$$

è il volume di Minkowski (volume spaziale per volume temporale).

Gli stati a singola particella sono normalizzati come segue:

$$\langle k | k \rangle = \langle 0 | a(k) a^\dagger(k) | 0 \rangle \quad (1.14.29)$$

$$= \langle 0 | [a(k), a^\dagger(k)] | 0 \rangle \quad (1.14.30)$$

$$= (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(0) \quad (1.14.31)$$

$$= 2E_k V \quad (1.14.32)$$

dove V è sempre il volume. Dunque abbiamo che:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = 4E_1 E_2 V^2 \quad (1.14.33)$$

$$\langle \beta | \beta \rangle = \prod_{j=1}^n 2E'_j V \quad (1.14.34)$$

in cui n è il numero di particelle dello stato finale. Pertanto la probabilità (1.14.22) diventa:

$$P = \frac{|\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out}) VT}{4E_1 E_2 V^2 \prod_{j=1}^n 2E'_j V} \quad (1.14.35)$$

cioè:

$$\frac{P}{T} = |\mathcal{M}|^2 \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out})}{4E_1 E_2 V \prod_{j=1}^n 2E'_j V}. \quad (1.14.36)$$

Nella pratica (1.14.36) non è utilizzabile esattamente, poiché non si può misurare il valore esatto dell'impulso, ma la sovrapposizione entro un piccolo range, quindi per ogni tri-impulso finale devo sommare su un piccolo range. Tuttavia le particelle sono confinate nella scatola ($V = L^3$), quindi hanno momento quantizzato; in 1D abbiamo:

$$\vec{k}'_j = \frac{2\pi}{L} \vec{n}_j \quad (1.14.37)$$

in cui n è un valore intero, e inoltre assumiamo condizioni di bordo periodiche, ma questo non impatta sul risultato finale.

Nel caso 3D, nel limite continuo abbiamo:

$$\sum_{\vec{n}_j} \longrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k'_j \quad (1.14.38)$$

cioé dobbiamo moltiplicare quello trovato per:

$$\frac{V}{(2\pi)^3} d^3 k'_j. \quad (1.14.39)$$

Dunque abbiamo:

$$\frac{P}{T} = |\mathcal{M}|^2 \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out})}{4E_1 E_2 V \prod_{j=1}^n 2E'_j} \prod_{j=1}^n \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 k'_j \quad (1.14.40)$$

$$= |\mathcal{M}|^2 \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k_{in} - k_{out})}{4E_1 E_2 V} \prod_{j=1}^n \frac{d^3 k'_j}{(2\pi)^3 2E'_j} \quad (1.14.41)$$

e possiamo osservare che l'ultimo termine è la misura invariante di Lorentz:

$$d^3 \tilde{k}'_j = \frac{d^3 k'_j}{(2\pi)^3 2E'_j}. \quad (1.14.42)$$

Infine, possiamo introdurre la misura Lorentz-invariante ad n corpi nello spazio delle fasi, detta **LIPS** di n :

$$d^3 \Pi'_n(k_{in}) = (2\pi)^4 \delta^4 \left(k_{in} - \sum_{i=1}^n k'_i \right) \prod_{j=1}^n d^3 \tilde{k}'_j \quad (1.14.43)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4 \left(k_{in} - \sum_{i=1}^n k'_i \right) \prod_{j=1}^n \frac{d^3 k'_j}{(2\pi)^3 2E'_j}. \quad (1.14.44)$$

La probabilità per unità di tempo è:

$$\frac{dP}{T} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4E_1 E_2 V} d^3 \Pi'_n(k_{in}) \quad (1.14.45)$$

che per ottenere la sezione d'urto devo ancora dividere per il flusso incidente.

Ci poniamo nel sistema di riferimento del laboratorio, in cui il bersaglio è fisso, dunque con $\vec{k}_2 = 0$, $E_2 = m_2$, e siccome abbiamo una sola particella incidente il flusso vale:

$$\Phi = \rho\nu = \frac{1}{V} |\vec{v}_1| = \frac{|\vec{k}_1|}{V E_1}. \quad (1.14.46)$$

La sezione d'urto, nel *laboratorio*, è dunque:

$$d\sigma_{lab} = \frac{dP}{\Phi T} = \frac{V E_1}{|\vec{k}_1|} \frac{|\mathcal{M}|^2}{4 E_1 E_2 V} d^3 \Pi'_n(k_{in}) \quad (1.14.47)$$

$$= \frac{|\mathcal{M}|^2}{4 m_2 |\vec{k}_1|} d^3 \Pi'_n(k_{in}). \quad (1.14.48)$$

Ricordiamo che vale (1.14.21), dunque nel sistema di riferimento del *centro di massa* abbiamo:

$$d\sigma_{cm} = \frac{dP}{\Phi T} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4 E_{cm} |\vec{k}_1|} d^3\Pi'_n(k_{in}). \quad (1.14.49)$$

1.14.1 Urto con 2 particelle finali

Studio un urto con 2 particelle nello stato iniziale e 2 nel finale, come raffigurato in figura 1.5, dunque una sezione d'urto:

$$d\sigma_{cm} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4 E_{cm} |\vec{k}_1|} d^3\Pi'_2(k_{in}). \quad (1.14.50)$$

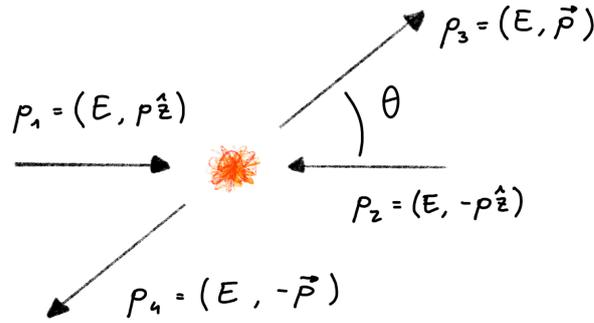


Figura 1.5: Processo d'urto $2 \rightarrow 2$.

Nel sistema di riferimento del centro di massa ho:

$$\vec{k}_{in} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0 \quad (1.14.51)$$

$$E_{in} = E_1 + E_2 = E_{cm}. \quad (1.14.52)$$

Possiamo calcolare la misura di Lorentz LIPS a 2 corpi:

$$\Pi'_2(k_{in}) = (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) \frac{d^3k'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \frac{d^3k'_2}{(2\pi)^3 2E'_2} \quad (1.14.53)$$

$$= \frac{1}{4(2\pi)^2 E'_1 E'_2} \delta(E_{cm} - E'_1 - E'_2) \delta^3(\vec{k}'_1 + \vec{k}'_2) dk'_1 dk'_2 \quad (1.14.54)$$

$$= \frac{1}{4(2\pi)^2 E'_1(k) E'_2(k)} \delta(E_{cm} - E'_1(k) - E'_2(k)) k^2 d\Omega dk \quad (1.14.55)$$

in cui abbiamo posto:

$$k = |\vec{k}'_1|, \quad E'_i(k) = \sqrt{k^2 + m_i^2}. \quad (1.14.56)$$

Osserviamo che possiamo utilizzare la δ per fare l'integrale sul dk , ricordandoci però della proprietà:

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|} \quad (1.14.57)$$

dove x_0 sono gli zeri di $f(x)$, ovvero i punti per cui $f(x_0) = 0$. Noi dentro la δ abbiamo $f(k) = E_{cm} - E'_1(k) - E'_2(k)$, dunque vediamo che:

$$\partial_k f(k) = \partial_k E'_1(k) + \partial_k E'_2(k) \quad (1.14.58)$$

$$= \frac{k}{\sqrt{k^2 + m_1^2}} + \frac{k}{\sqrt{k^2 + m_2^2}} \quad (1.14.59)$$

$$= k \left(\frac{1}{E'_1(k)} + \frac{1}{E'_2(k)} \right) \quad (1.14.60)$$

$$= k \frac{E'_1 + E'_2}{E'_1 E'_2} \quad (1.14.61)$$

$$= \frac{k E_{cm}}{E'_1 E'_2} \quad (1.14.62)$$

e dunque $f(k) = 0$ per:

$$k = |\vec{k}'_1|. \quad (1.14.63)$$

Abbiamo la (1.14.55) che diventa:

$$\Pi'_2(k_{in}) = \frac{|\vec{k}'_1|}{4(2\pi)^2 E_{cm}} d\Omega \quad (1.14.64)$$

perciò sostituendo dentro l'espressione per la sezione d'urto (1.14.50):

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}'_1|}{|\vec{k}_1|} \quad (1.14.65)$$

in cui abbiamo:

$$d\Omega = 2\pi d(\cos\theta) \quad (1.14.66)$$

e θ angolo di scattering. La sezione d'urto integrata è:

$$\sigma_{cm} = \frac{1}{32\pi E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}'_1|}{|\vec{k}_1|} \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) |\mathcal{M}(\cos\theta)|^2. \quad (1.14.67)$$

Volendo posso esprimere tutto in funzione delle variabili di Mandelstam, ricordando che da (1.13.11) vale:

$$s = E_{cm}^2 \quad (1.14.68)$$

e che:

$$dt = 2|\vec{k}_1||\vec{k}'_1| d(\cos\theta) \quad (1.14.69)$$

allora la sezione d'urto differenziale diventa:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64 \pi s |\vec{k}_1|^2} \quad (1.14.70)$$

che è indipendente dal sistema di riferimento scelto. La sezione d'urto integrata è:

$$\sigma = \frac{1}{64 \pi s |\vec{k}_1|^2} \int_{t_-}^{t_+} dt |\mathcal{M}(s, t)|^2 \quad (1.14.71)$$

in cui abbiamo indicato:

$$t_{\pm} = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 \pm 2|\vec{p}_1| |\vec{p}_3|. \quad (1.14.72)$$

Osseviamo che se $m_i = m \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, allora nel sistema di riferimento del centro di massa abbiamo:

$$E_1 = E_2 \quad , \quad E'_1 = E'_2 \quad (1.14.73)$$

e anche:

$$s = (2E_1)^2 = (2E'_1)^2 \quad (1.14.74)$$

il che implica:

$$E_1 = E'_1 \quad \implies \quad |\vec{k}_1| = |\vec{k}'_1| \quad (1.14.75)$$

pertanto la sezione d'urto si riduce a:

$$\sigma = \frac{1}{32 \pi E_{cm}^2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) |\mathcal{M}(\cos \theta)|^2. \quad (1.14.76)$$

1.14.2 Urto con 3 particelle finali (cenni)

Studiamo un urto con 2 particelle nello stato iniziale e 3 nel finale, dunque con sezione d'urto:

$$d\sigma_{cm} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4 E_{cm} |\vec{k}_1|} d^3\Pi'_3(k_{in}). \quad (1.14.77)$$

Nel sistema di riferimento del centro di massa abbiamo:

$$\vec{k}_{in} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0 \quad , \quad E_{in} = E_1 + E_2 = E_{cm}. \quad (1.14.78)$$

La misura Lorentz invariante è:

$$\Pi'_3(k_{in}) = (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2 - k'_3) \frac{d^3k'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \frac{d^3k'_2}{(2\pi)^3 2E'_2} \frac{d^3k'_3}{(2\pi)^3 2E'_3} \quad (1.14.79)$$

$$= \frac{1}{4 (2\pi)^5 E'_1 E'_2 E'_3} \delta(E_{cm} - E'_1 - E'_2 - E'_3) d^3k'_1 d^3k'_2 \quad (1.14.80)$$

in cui abbiamo:

$$E'_1 = \sqrt{(\vec{k}'_1)^2 + m_1^2} \quad (1.14.81)$$

$$E'_2 = \sqrt{(\vec{k}'_2)^2 + m_2^2} \quad (1.14.82)$$

$$E'_3 = \sqrt{(\vec{k}'_1 + \vec{k}'_2)^2 + m_3^2} \quad (1.14.83)$$

e possiamo ancora utilizzare la δ sull'energia per togliere ancora un integrale sul modulo, come fatto per il caso a 2 corpi, ma ora ce ne resta ancora uno di mezzo.

1.15 Contributo delle bolle di vuoto

I riferimenti sono p. 96-98 del Peskin e Schroeder [4].

Studiamo la densità di energia di una bolla di vuoto, vedi la figura 1.6, al second'ordine:

$$V_i = \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int d^4z \int d^4w \langle 0 | T[\phi_z^4 \phi_w^4] | 0 \rangle \quad (1.15.1)$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int d^4z \int d^4w \Delta_F(z-z) \Delta_F^2(z-w) \Delta_F(w-w) \quad (1.15.2)$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int d^4z \int d^4w \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p_1) e^{-ip_1(z-w)} \times \\ \times \tilde{\Delta}(p_2) e^{-ip_2(w-z)} \tilde{\Delta}(p_3) e^{-ip_3(z-z)} \tilde{\Delta}(p_4) e^{-ip_4(w-w)} \quad (1.15.3)$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{16} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}(p_1) \tilde{\Delta}(p_2) \tilde{\Delta}(p_3) \tilde{\Delta}(p_4) \times \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2) \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p_1) \quad (1.15.4)$$

$$= (\dots) \delta^4(p_1 - p_2) \delta^4(p_1 - p_2) \quad (1.15.5)$$

$$= (\dots) \delta^4(p_1 - p_2) \delta^4(0) \quad (1.15.6)$$

$$= \bar{V}_i (2\pi)^4 \delta^4(0). \quad (1.15.7)$$

Se regolarizziamo la teoria, allora:

$$\delta^4(0) = \frac{2\tau V_3}{(2\pi)^4} \quad (1.15.8)$$

ovvero, è proporzionale al volume dello spazio di Minkowski (volume temporale 2τ per il volume spaziale V_3).

Ricordiamoci che quando stavamo parlando della formula di Gell-Mann-Low, nella sezione §1.10, avevamo trovato la relazione:

$$\langle 0 | U(\tau, -\tau) | 0 \rangle = |\langle \Omega | 0 \rangle|^2 e^{-2i E_0 \tau}$$

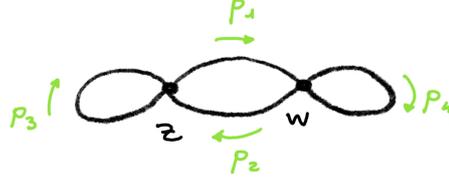


Figura 1.6

il cui termine esponenziale racchiude tutte le bolle di vuoto della teoria:

$$e^{-2i E_0 \tau} \propto \exp\left\{\sum V_i\right\}. \quad (1.15.9)$$

Se trascuriamo il termine $\ln(|\langle \Omega|0\rangle|^2)$, allora otteniamo la relazione:

$$E_0 = \frac{i}{2\tau} \sum V_i \quad (1.15.10)$$

che messa insieme al fatto che, da (1.15.8), abbiamo:

$$\frac{1}{2\tau} = \frac{V_3}{(2\pi)^4 \delta^4 0} \quad (1.15.11)$$

ci permette di scrivere:

$$\frac{E_0}{V_3} = i \sum \frac{V_i}{(2\pi)^4 \delta^4(0)} = i \sum \tilde{V}_i \quad (1.15.12)$$

cioè riscriviamo la densità di energia del vuoto interagente in funzione della somma delle bolle di vuoto.

In altre parole le bolle di vuoto permettono di calcolare l'energia di vuoto di una teoria interagente E_0 (che è legata alla costante cosmologica Λ , sebbene le predizioni siano molto lontane dal valore sperimentale 10^{-9} J/m^3 , questo è un problema aperto noto come *Vacuum catastrophe*), inoltre l'energia di vuoto ha delle fluttuazioni che sono appunto causate da queste bolle di vuoto.

1.16 Gradi di divergenza

I riferimenti sono p. 129 dello Srednicki [7], ma c'è un conto un po' più rigoroso a p. 193 del Peskin e Schroeder [4].

Possiamo vedere il numero di loop, presenti in un diagramma di Feynman, anche come il numero di correzioni quantistiche in \hbar .

Siano E il numero di linee/gambe esterne, I il numero di linee interne e V il numero di vertici, così:

$$\left[\delta^4(\Sigma p_i)\right]^V = \left[\delta^4(\Sigma p_I)\right]^{V-1} \cdot \delta^4(\Sigma p_E). \quad (1.16.1)$$

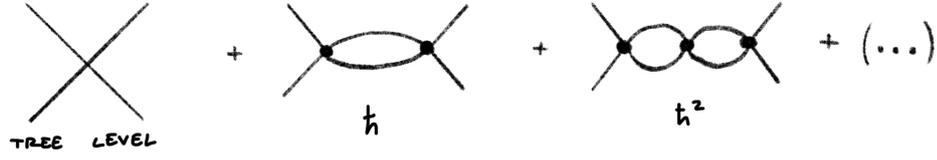


Figura 1.7

Quindi, abbiamo $V - 1$ vincoli sui momenti interni; se L è il numero di momenti indipendenti, allora abbiamo che $L = I - (V - 1)$ equivale al numero di loop.

Per studiare il legame tra I ed \hbar dobbiamo chiaramente reintrodurre \hbar nelle nostre equazioni. Ogni propagatore ha un \hbar perché compare nel commutatore:

$$[\phi(t, \vec{x}), \Pi(\vec{y}, t)] = i\hbar \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1.16.2)$$

e:

$$\langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = [\phi_x^+, \phi_y^-]. \quad (1.16.3)$$

Inoltre, abbiamo che:

$$H_{int} \longrightarrow \frac{1}{\hbar} H_{int} \quad (1.16.4)$$

quindi abbiamo un \hbar in ogni vertice di interazione, e per ogni diagramma c'è:

$$\hbar^{E+I-V} = \hbar^{E-1} \hbar^L \quad (1.16.5)$$

quindi abbiamo una potenza overall fissata dalla scelta dello stato iniziale e finale e una potenza che dipende dal numero di momenti indipendenti, pari al numero di loop.

In presenza di un loop abbiamo:

$$M = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (1.16.6)$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (1.16.7)$$

$$\sim \frac{p^4}{p^2} \rightarrow \infty \quad (1.16.8)$$

in cui stiamo considerando una teoria ϕ^4 , con un solo loop ed una linea di campo interna.

Facciamo un conto molto approssimato in D dimensioni. Consideriamo un diagramma con L loop ed I gambe interne. I momenti dei loop danno:

$$\prod_{i=1}^L d^D p \sim p^{DL} \quad (1.16.9)$$

e i propagatori interni danno:

$$\prod_{i=1}^I \frac{1}{p^2 - m^2} \sim \frac{1}{p^{2I}} \quad (1.16.10)$$

dunque, per $p \rightarrow \infty$, l'integrale diverge se:

$$\frac{p^{DL}}{p^{2I}} = p^{DL-2I} \geq 1. \quad (1.16.11)$$

Definiamo il *grado di divergenza* (superficiale) in D dimensioni come:

$$\mathcal{D} = DL - 2I. \quad (1.16.12)$$

Studiamo una teoria del tipo:

$$\mathcal{L}_{int} \sim \phi^N \quad (1.16.13)$$

cioé in cui ci sono N linee di campo e quindi in cui per ogni diagramma abbiamo:

$$VN = E + 2I \quad (1.16.14)$$

con V numero di vertici, e di conseguenza:

$$I = \frac{1}{2}(NV - E). \quad (1.16.15)$$

Inoltre, abbiamo:

$$L = I - (V - 1) = \frac{1}{2}NV - \frac{1}{2}E - V + 1 \quad (1.16.16)$$

pertanto il grado di divergenza è:

$$\mathcal{D} = DL - 2I \quad (1.16.17)$$

$$= D \left(\frac{1}{2}NV - \frac{1}{2}E - V + 1 \right) - (NV - E) \quad (1.16.18)$$

$$= V \left(\frac{1}{2}DN - D - N \right) - \left(\frac{1}{2}DE - D - E \right). \quad (1.16.19)$$

Se $\mathcal{D} > 0$ il diagramma diverge come $\Lambda^{\mathcal{D}}$ (in cui Λ è un valore di cut-off), se $\mathcal{D} = 0$ diverge come $\ln \Lambda$, mentre se $\mathcal{D} < 0$ non diverge.⁵ Tuttavia queste divergenze possono essere risolte tramite una rinormalizzazione. Da notare che per campi massivi non ho contributi di divergenza infrarossa ($p \rightarrow 0$). La massa e la costante di accoppiamento vengono cambiate dalla rinormalizzazione.

⁵Notiamo che la divergenza tratta solamente le componenti ultraviolette, ovvero $p \rightarrow \infty$.

Nell'esempio di prima, con:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1.16.20)$$

abbiamo $D = 4$, $N = 4$ e dunque $\mathcal{D} = 4 - E$, perciò i diagrammi con 2 o 4 gambe esterne hanno $\mathcal{D} \geq 0$, dunque divergono rispettivamente con una divergenza quadratica ($\mathcal{D} = 2$) o logaritmica ($\mathcal{D} = 0$).

1.17 Potenziale di Yukawa scalare (scattering tra nucleoni e pioni)

Consideriamo una teoria con 2 tipi di particelle scalari (spin 0), reali (massa μ , con campo σ) e complesse (massa m , campo ϕ). Abbiamo la lagrangiana libera che è:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} \mu^2 \sigma^2 + \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - m^2 \phi \bar{\phi}. \quad (1.17.1)$$

Le soluzioni per i campi liberi le conosciamo già e sono:

$$\sigma = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[a(p) e^{-ipx} + a^\dagger(p) e^{ipx} \right], \quad \kappa = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\sigma}} = \dot{\sigma} \quad (1.17.2)$$

$$\phi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[b(p) e^{-ipx} + c^\dagger(p) e^{ipx} \right], \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \quad (1.17.3)$$

$$\bar{\phi} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[c(p) e^{-ipx} + b^\dagger(p) e^{ipx} \right], \quad \bar{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\phi}}} = \dot{\bar{\phi}}. \quad (1.17.4)$$

Come nel caso precedente dobbiamo imporre la regola di commutazione, a tempi uguali:

$$[\phi, \bar{\pi}] = i\delta^3(x - y). \quad (1.17.5)$$

Inoltre abbiamo che:

$$\Delta_\phi(x - y) = \langle 0 | T[\phi(x) \bar{\phi}(y)] | 0 \rangle \quad (1.17.6)$$

quando $x^0 > y^0$ diventa:

$$\langle 0 | b_x b_y^\dagger | 0 \rangle \quad (1.17.7)$$

quindi, abbiamo una particella; mentre quando $x^0 < y^0$ diventa:

$$\langle 0 | c_y c_x^\dagger | 0 \rangle \quad (1.17.8)$$

e abbiamo un'antiparticella.

Se lasciamo il campo σ invariato e facciamo una trasformazione di fase su ϕ , allora otteniamo:

$$\delta\phi = i\alpha\phi \quad (1.17.9)$$

dunque, la corrente sarebbe:

$$j^\mu = i\bar{\phi} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \quad (1.17.10)$$

$$= -i\partial^\mu \bar{\phi}\phi + i\partial^\mu \phi\bar{\phi} \quad (1.17.11)$$

e la carica:

$$Q = \int d^3x j^0 \quad (1.17.12)$$

$$= i \int d^3x (\bar{\phi}\dot{\phi} - \dot{\bar{\phi}}\phi). \quad (1.17.13)$$

Se consideriamo una teoria interagente con:

$$\mathcal{L}_{int} = -g\sigma\bar{\phi}\phi \quad (1.17.14)$$

$$\mathcal{H}_{int} = g\sigma\bar{\phi}\phi \quad (1.17.15)$$

quindi con 3 gambe in ogni vertice, possiamo identificare ϕ con il nucleone (linea continua con freccia) e σ con il pione (linea tratteggiata). Ricordiamo che per l'espansione in serie di Gell-Mann-Low, in ogni vertice ho un termine abbiamo un termine ($-ig$). Scriviamo:

$$\exp\left\{-i \int d^4x \mathcal{H}_{int}\right\} = \sum \frac{1}{n!} \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_{int}\right)^n \quad (1.17.16)$$

$$= \sum \frac{1}{n!} \left(-ig \int d^4x \sigma\bar{\phi}\phi\right)^n \quad (1.17.17)$$

da notare poi che il fattore $1/n!$ viene sempre cancellato dai modi equivalenti di scambiare i vertici tra di loro, inoltre, per la teoria di Yukawa non abbiamo fattori di simmetria per i diagrammi, questo perché i campi in gioco non possono essere scambiati tra loro.

Alcuni esempi di interazioni sono:⁶

- *Primo esempio*, raffigurato in figura 1.8a è:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T[\bar{\phi}_1 \phi_2 \bar{\phi}_3 \phi_4] | \Omega \rangle &= \langle 0 | T[\bar{\phi}_1 \phi_2 \bar{\phi}_3 \phi_4] | 0 \rangle_C + \\ &+ (-ig)^2 \int d^4z d^4w \langle 0 | T[\bar{\phi}_1 \phi_2 \bar{\phi}_3 \phi_4 \sigma(z) \phi(z) \bar{\phi}(z) \sigma(w) \phi(w) \bar{\phi}(w)] | 0 \rangle_C + \dots \end{aligned} \quad (1.17.18)$$

- *Secondo esempio*, raffigurato in figura 1.8b è:

$$bra\Omega T[\bar{\phi}_1 \phi_2 \sigma_3 \sigma_4] | \Omega \rangle = \langle 0 | T[\bar{\phi}_1 \phi_2 \sigma_3 \sigma_4] | 0 \rangle_C + \dots \quad (1.17.19)$$

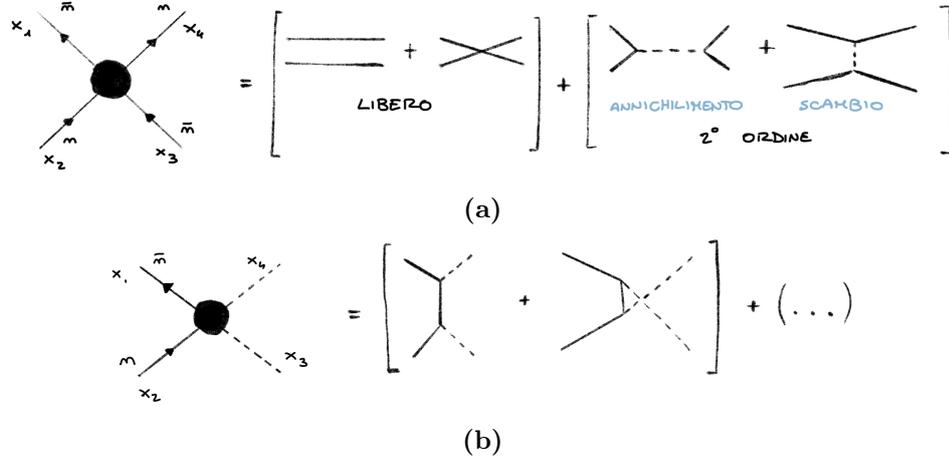


Figura 1.8: Esempi interazioni teoria $\sigma\bar{\phi}\phi$.

I diagrammi di Feynman che entrano nella definizione della matrice S (ampiezza di probabilità) sono quelli a cui vengono amputate le gambe esterne, ovvero, quelli a cui stiamo eliminando i poli della funzione di Green, ovvero stiamo trovando l'ampiezza di probabilità (on-shell) come il residuo della funzione di Green.

Da notare che per tutti i diagrammi al tree-level senza gambe esterne, si ha un fattore di simmetria finale $s = 1$.

Proviamo a studiare l'ampiezza di probabilità per un processo di scambio, raffigurato in figura 1.9.

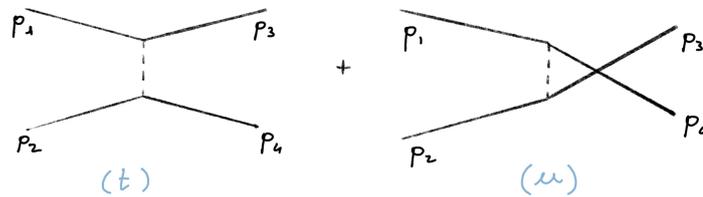


Figura 1.9: Processo di scambio

⁶I termini di ordine dispari sono nulli perché abbiamo un numero dispari di campi, e la C sta ad indicare il fatto che escludiamo i diagrammi con le bolle di vuoto.

Scriviamo:

$$iT = (ig)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \mu^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k - p_3) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - k - p_4) \quad (1.17.20)$$

$$= -\frac{ig^2}{t - \mu^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (1.17.21)$$

$$= M_t \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (1.17.22)$$

ovvero:

$$M_t = -\frac{ig^2}{t - \mu^2}. \quad (1.17.23)$$

Se scambiamo p_3 e p_4 abbiamo:

$$iT = -\frac{ig^2}{u - \mu^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (1.17.24)$$

ovvero:

$$M_u = -\frac{ig^2}{u - \mu^2}. \quad (1.17.25)$$

Se vogliamo ritrovare la probabilità, prima sommiamo le ampiezze e poi ne facciamo il quadrato (altrimenti perdiamo i termini di interferenza); inoltre per calcolare l'ampiezza di probabilità dobbiamo prendere il residuo considerando particelle on-shell e ignorando le gambe esterne. In sintesi:

$$|M_{tot}|^2 = |M_u + M_t|^2 \quad (1.17.26)$$

$$= |M_u|^2 + |M_t|^2 + 2 \operatorname{Re}\{M_u M_t^\dagger\} \quad (1.17.27)$$

da notare che in questo caso i diagrammi hanno tutti segno positivo perché abbiamo solo scalari (quando avremo anche i fermioni potremmo avere dei segni relativi).

1.17.1 Caso non relativistico

Osserviamo che:

$$(p^\mu - p'^\mu)^2 = (p^0 - p'^0)^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 \quad (1.17.28)$$

ma nel limite non relativistico abbiamo che $p^0 = p'^0$ e dunque:

$$M = -\frac{ig^2}{(p_1 - p_3)^2 - \mu^2} \approx \frac{ig^2}{|\vec{p}_1 - \vec{p}_3|^2 + \mu^2} = \frac{ig^2}{|\vec{q}|^2 + \mu^2}. \quad (1.17.29)$$

Se siamo nel limite non relativistico vale l'approssimazione di Born:

$$\tilde{V}(q) = |M| = \frac{g^2}{|\vec{q}|^2 + \mu^2} \quad (1.17.30)$$

ovvero che il modulo di M è la trasformata di Fourier del potenziale. Dunque troviamo:

$$V(x) = g^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{q}|^2 + \mu^2} \quad (1.17.31)$$

$$= \frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \int_0^\infty dq q^2 \frac{e^{-irq \cos\theta}}{q^2 + \mu^2} \quad (1.17.32)$$

$$= \frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 + \mu^2} \left(\frac{e^{-irq}}{-irq} - \frac{e^{irq}}{-irq} \right) \quad (1.17.33)$$

$$= \frac{g^2}{ir(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \frac{q}{q^2 + \mu^2} (e^{irq} - e^{-irq}) \quad (1.17.34)$$

$$= \frac{g^2}{ir(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q e^{irq}}{q^2 + \mu^2} \quad (1.17.35)$$

in cui abbiamo indicato $r = |\vec{x}|$ e $q = |\vec{q}|$, arrivati a questo punto possiamo deformare il cammino ed utilizzare il lemma di Jordan:

$$V(x) = \frac{g^2}{r(2\pi)^2} \text{Res} \left\{ \frac{q e^{irq}}{q^2 + \mu^2} \right\}_{q=i\mu} \quad (1.17.36)$$

$$= \frac{g^2}{4\pi r} e^{-\mu r} \quad (1.17.37)$$

che è il potenziale di Yukawa; quindi, g rappresenta per i nucleoni l'equivalente della carica elettrica, inoltre è un potenziale a corto raggio per particelle massive (è una sorta di generalizzazione del potenziale coulombiano).

Capitolo 2

Il campo spinoriale

In questo capitolo rivedremo i concetti analizzati nella parte riguardante i campi scalari (capitolo §1), ma applicati al caso di campi spinoriali. È utile rivedere l'Appendice A per un rapido ripasso di alcune cose riguardanti la teoria dei gruppi (più che altro per rivedere un po' di notazione che utilizzeremo) già viste in altri corsi. È rilevante anche guardare le proprietà delle matrici γ^μ in Appendice B.

2.1 Spinori di Weyl

I riferimenti sono p. 215-225 dello Srednicki [7].

Conosciamo già le definizioni:

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \quad , \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \quad (2.1.1)$$

e il fatto che nella rappresentazione di Weyl abbiamo:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.2)$$

Introduciamo il campo *left* $\psi_a(x)$ per cui abbiamo $N_k^\dagger = 0$ (dunque stiamo considerando la rappresentazione (2, 1)) e il campo *right* $\psi_a^\dagger(x)$ per cui $N_k = 0$ (e abbiamo la rappresentazione (1, 2)). Possiamo passare dalla rappresentazione left e right tramite un'operazione di hermitiana coniugazione:

$$\left[\psi_a(x) \right]^\dagger = \psi_a^\dagger(x). \quad (2.1.3)$$

In più sappiamo che per la trasformazione infinitesima abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{Left: } & \left\{ \begin{aligned} \delta\psi_a(x) &= \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} (S_{\mu\nu}^L)_a^b \psi_b(x) \\ \text{Right: } \delta\psi_a^\dagger(x) &= \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} (S_{\mu\nu}^R)_a^b \psi_b^\dagger(x) \end{aligned} \right. \quad (2.1.4) \end{aligned}$$

in cui:

$$\begin{cases} S_L^{\mu\nu} = +\frac{i}{4} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \\ S_R^{\mu\nu} = -\frac{i}{4} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu). \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Possiamo considerare:

$$\chi\psi = \chi^a \psi_a \quad (2.1.6)$$

$$\chi^\dagger \psi^\dagger = \chi_a^\dagger \psi^{\dagger a} \quad (2.1.7)$$

per cui dobbiamo utilizzare i simboli di Levi-Civita bidimensionali¹, perché se definiamo:

$$\psi^a(x) = \varepsilon^{ab} \psi_b(x) \quad (2.1.9)$$

allora abbiamo:

$$\chi\psi = \chi^a \psi_a = \varepsilon^{ab} \chi_b \psi^a \quad (2.1.10)$$

$$= \chi_b \varepsilon^{ab} \psi_a = -\chi_b \varepsilon^{ba} \psi_a \quad (2.1.11)$$

$$= -\chi_b \psi^b = \psi^b \chi_b = \psi\chi \quad (2.1.12)$$

analogamente per (2.1.7) e otteniamo in definitiva:

$$\chi\psi = \psi\chi \quad (2.1.13)$$

$$\chi^\dagger \psi^\dagger = \bar{\psi}^\dagger \chi^\dagger \quad (2.1.14)$$

ma si ha che:

$$\chi_a \psi_b = -\psi_b \chi_a \quad (2.1.15)$$

in cui il meno viene riassorbito dallo scambio di indici del simbolo ε . Inoltre si vede:

$$(\chi\psi)^\dagger = \psi^\dagger \chi^\dagger = \chi^\dagger \psi^\dagger. \quad (2.1.16)$$

Per concludere possiamo considerare anch'è la combinazione:

$$\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi = \psi_a^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} \chi_b \quad (2.1.17)$$

che è un'invariante e trasforma come un vettore di Lorentz:

$$\left(\psi_a^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} \chi_b \right)^\dagger = \chi_b^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} \psi_a = \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi. \quad (2.1.18)$$

¹Che nota essere comunque antisimmetrici e definiti tali per cui:

$$\varepsilon^{ab} \varepsilon_{bc} = \delta^a_c, \quad \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \varepsilon^{\dot{b}\dot{c}} = \delta_{\dot{a}}^{\dot{c}}. \quad (2.1.8)$$

2.2 Lagrangiana per campi di Majorana, di Dirac e di Weyl

I riferimenti sono p. 226-233 dello Srednicki [7] e p. 44 del Peskin e Schroeder [4].

Possiamo a questo punto scrivere la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2}m\psi\psi - \frac{1}{2}m^* \psi^\dagger \psi^\dagger \quad (2.2.1)$$

in cui abbiamo considerato il fatto che in generale abbiamo:

$$m = |m|e^{i\alpha} \in \mathbb{C}. \quad (2.2.2)$$

Nota però che potremmo ridefinire gli spinori:

$$\psi \longrightarrow \psi e^{-i\frac{\alpha}{2}} \quad (2.2.3)$$

$$\psi^\dagger \longrightarrow \psi^\dagger e^{i\frac{\alpha}{2}} \quad (2.2.4)$$

e non avere il "problema" di $m \in \mathbb{C}$.

Le equazioni del moto per la lagrangiana (2.2.1) sono:

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m\psi^\dagger = 0 \quad (2.2.5)$$

$$-i\sigma^\mu \partial_\mu \psi^\dagger + m\psi = 0 \quad (2.2.6)$$

ovvero, scritte in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} -m \delta_a^{\dot{c}} & i\sigma_{ac}^\mu \partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^{\mu ac} \partial_\mu & -m \delta^{\dot{a}}_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_c \\ \psi^{\dot{c}\dagger} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.2.7)$$

che in notazione più semplice si riduce a:

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma_\mu \partial^\mu \\ i\bar{\sigma}_\mu \partial^\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0. \quad (2.2.8)$$

Se definiamo lo **spinore di Majorana**:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi^{\dot{a}\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (2.2.9)$$

e utilizziamo la rappresentazione di Weyl per le matrici γ^μ (2.1.2), allora otteniamo le *equazioni di Dirac*:

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Psi_M = 0. \quad (2.2.10)$$

Ora, consideriamo due spinori left e scriviamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1,2} \left(i\psi_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{1}{2} m(\psi_i \psi_i + \psi_i^\dagger \psi_i^\dagger) \right) \quad (2.2.11)$$

che se poniamo:

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_2) \quad (2.2.12)$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - i\psi_2) \quad (2.2.13)$$

diventa:

$$\mathcal{L} = i\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi - m(\chi\xi + \xi^\dagger\chi^\dagger). \quad (2.2.14)$$

Se ora introduciamo lo **spinore di Dirac**:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_a \\ \xi^{\dot{a}\dagger} \end{pmatrix}, \quad \Psi^\dagger = \begin{pmatrix} \chi^{\dot{a}\dagger} \\ \xi_a \end{pmatrix} \quad (2.2.15)$$

e definiamo:

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{\dot{a}c} \\ \delta_a^c & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.16)$$

che numericamente vale $\beta = \gamma^0$, ma la struttura degli indici è diversa. Facendo questo abbiamo:

$$\bar{\Psi} = \psi^\dagger \Psi^\dagger = (\xi^a, \chi_a^\dagger) \quad (2.2.17)$$

il che implica che la lagrangiana diventi:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi} \not{\partial} \Psi - m\bar{\Psi}\Psi. \quad (2.2.18)$$

Sappiamo già che abbiamo un'invarianza di fase globale con una corrente di Noether:

$$j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (2.2.19)$$

inoltre, possiamo tornare indietro agli spinori di Weyl (quelli left e right) tramite una proiezione:

$$P_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \quad (2.2.20)$$

con γ^5 definita da:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (2.2.21)$$

Per fare il passaggio dallo spinore di Dirac a quello di Majorana dobbiamo utilizzare la matrice di coniugazione di carica e imporre che il coniugato di carica dello spinore di Dirac sia uguale allo spinore di Dirac, ovvero:

$$\Psi = \Psi^C = C \bar{\Psi}^T \quad \text{con} \quad C = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}. \quad (2.2.22)$$

Con la nostra condizione abbiamo:

$$\Psi^C = C \bar{\Psi}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} \quad (2.2.23)$$

e imponendo che:

$$\begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} \quad (2.2.24)$$

questo permette di ridurre lo spinore di Dirac a quello di Majorana.

Importante. Da qui in poi abbandono la notazione con ψ_a, ψ_a^\dagger ed uso solo lo spinore di Dirac che indico come ψ .

2.3 Soluzioni per campi spinoriali

I riferimenti sono p. 236-251 dello Srednicki [7] e p. 45-49 e 58-63 del Peskin e Schroeder [4].

Consideriamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \not{\partial} \psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.3.1)$$

$$= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \quad (2.3.2)$$

la cui equazione del moto è:

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0 \quad (2.3.3)$$

e il momento coniugato:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = -i\bar{\psi}\gamma^0 = -i\psi^\dagger = \bar{\pi}. \quad (2.3.4)$$

È utile anche ricordarci che l'equazione di Dirac implica l'equazione di Klein-Gordon:

$$-(i\not{\partial} + m)(i\not{\partial} - m) = (\not{\partial}^2 + m^2) = (\square + m^2) \quad (2.3.5)$$

questo perché vale la proprietà per l'operatore *slashed*:

$$\not{a}\not{b} = a_\mu \gamma^\mu a_\nu \gamma^\nu = a_\mu a_\nu \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = a_\mu a_\nu g^{\mu\nu} = a^2. \quad (2.3.6)$$

Siccome l'equazione di Dirac implica l'equazione di Klein-Gordon possiamo espandere in onde piane e scrivere la soluzione:

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[b_s(p) u_s(p) e^{-ipx} + d_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ipx} \right] \quad (2.3.7)$$

in cui per convenzione diciamo che b^\dagger crea le particelle mentre d^\dagger crea anti-particelle.

Imponiamo le condizioni di anti-commutazione:

$$\{\psi_\alpha(t, \vec{x}), \bar{\psi}_\beta(t, \vec{y})\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.3.8)$$

e tutti gli altri nulli. L'algebra (2.3.8) implica:

$$\{b_s(\vec{p}), b_r^\dagger(\vec{p}')\} = \{d_s(\vec{p}), d_r^\dagger(\vec{p}')\} = (2\pi)^3 2E_p \delta_{rs} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.3.9)$$

Inoltre, affinché (2.3.7) sia soluzione di (2.3.3) dobbiamo avere:

$$\begin{cases} (\not{p} - m)u_s(\vec{p}) = 0 \\ (\not{p} + m)v_s(\vec{p}) = 0. \end{cases} \quad (2.3.10)$$

L'hamiltoniana è:

$$H = \int d^3x \bar{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m)\psi \quad (2.3.11)$$

$$= \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [b_s^\dagger(p) b_s(p) + d_s^\dagger(p) d_s(p)]. \quad (2.3.12)$$

In più sappiamo che dall'invarianza di fase globale compare la quantità conservata:

$$Q = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} [b_s^\dagger(p) b_s(p) - d_s^\dagger(p) d_s(p)]. \quad (2.3.13)$$

Per lo spin e momento angolare abbiamo le relazioni:

$$\begin{cases} S_\pm u_\pm(\vec{0}) = \pm \frac{1}{2} u_\pm(\vec{0}) \\ S_\pm v_\pm(\vec{0}) = \mp \frac{1}{2} v_\pm(\vec{0}) \end{cases}, \quad \begin{cases} [J_z, b_\pm^\dagger(\vec{0})] = \pm \frac{1}{2} b_\pm^\dagger(\vec{0}) \\ [J_z, d_\pm^\dagger(\vec{0})] = \pm \frac{1}{2} d_\pm^\dagger(\vec{0}) \end{cases} \quad (2.3.14)$$

dunque u_+ e v_+ sono le soluzioni con spin $S_z = \uparrow$, mentre u_- e v_- sono soluzioni per $S_z = \downarrow$.

Se ci poniamo nel sistema di riferimento di riposo, in cui $p^\mu = (m, \vec{0})$, possiamo facilmente risolvere le equazioni e scrivere le soluzioni:

$$u_+(0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_-(0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.15)$$

$$v_+(0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_-(0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.16)$$

Possiamo anche studiare le quantità:

$$\sum_s u_s(p) \bar{u}_s(p) \quad , \quad \sum_s v_s(p) \bar{v}_s(p) \quad (2.3.17)$$

che non sono invarianti di Lorentz e si possono riscrivere tramite $\gamma^\mu p_\mu$; per far ciò ci mettiamo nel sistema di riferimento di riposo, in cui otteniamo rispettivamente:

$$m\gamma^0 \pm m. \quad (2.3.18)$$

Generalizzando il sistema di riferimento otteniamo:

$$\sum_s u_s(p) \bar{u}_s(p) = (\not{p} + m) \quad , \quad \sum_s v_s(p) \bar{v}_s(p) = (\not{p} - m). \quad (2.3.19)$$

Le normalizzazioni degli spinori sono tale che:

$$\begin{cases} \bar{u}_s(p) u_r(p) = +2m \delta_{sr} \\ \bar{v}_s(p) v_r(p) = -2m \delta_{sr} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} u_s^\dagger(p) u_r(p) = 2 E_p \delta_{sr} \\ v_s^\dagger(p) v_r(p) = 2 E_p \delta_{sr} \end{cases} \quad (2.3.20)$$

di cui la seconda si generalizza come:

$$\begin{cases} \bar{u}_s(p) \gamma^\mu u_r(p) = 2 p^\mu \delta_{sr} \\ \bar{v}_s(p) \gamma^\mu v_r(p) = 2 p^\mu \delta_{sr}. \end{cases} \quad (2.3.21)$$

Inoltre, si ha anche:

$$\bar{u}_s(p) \gamma^0 v_r(-p) = \bar{v}_s(p) \gamma^0 u_r(-p) = 0. \quad (2.3.22)$$

Ovviamente abbiamo bisogno anche di definire il propagatore di Feynman per il campo spinoriale:

$$S_F(x - y) = \langle 0 | T[\psi(x) \bar{\psi}(y)] | 0 \rangle \quad (2.3.23)$$

$$= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle - \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle \quad (2.3.24)$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (2.3.25)$$

che diventa:

$$\begin{cases} \text{se } x^0 > y^0 & \langle 0 | (b + d^\dagger)_x (d + b^\dagger)_y | 0 \rangle \longrightarrow \langle 0 | b_x b_y^\dagger | 0 \rangle \\ \text{se } y^0 > x^0 & \langle 0 | (d + b^\dagger)_y (b + d^\dagger)_x | 0 \rangle \longrightarrow \langle 0 | d_y d_x^\dagger | 0 \rangle. \end{cases} \quad (2.3.26)$$

Inoltre, abbiamo il propagatore ritardato è la funzione di Green (dell'operatore di Dirac):

$$(i\not{\partial}_x - m)S_R(x - y) = i\delta^4(x - y). \quad (2.3.27)$$

La formula di Gell-Mann-Low rimane uguale al caso scalare (1.10.37), ma nel teorema di Wick e nella formula SLZ dobbiamo fare attenzione perché abbiamo delle relazioni di anti-commutazione (quindi verranno fuori dei segni negativi) e non di commutazione come nel caso scalare. Nelle prossime sezioni vedremo entrambi questi due argomenti. Ma scriviamo un attimo la formula di Gell-Mann-Low:

$$G = \langle \Omega | T[\psi \dots \bar{\psi}] | \Omega \rangle \quad (2.3.28)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{\langle 0 | T[U(\tau, -\tau) \psi \dots \bar{\psi}] | 0 \rangle}{\langle 0 | U(\tau, -\tau) | 0 \rangle} \quad (2.3.29)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{\langle 0 | T[\psi \dots \bar{\psi} e^{-i \int d^4 z \mathcal{H}_I}] | 0 \rangle}{\langle 0 | T[e^{-i \int d^4 z \mathcal{H}_I}] | 0 \rangle} \quad (2.3.30)$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-i)^s}{s!} \langle 0 | T \left[\psi \dots \bar{\psi} \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y_s \mathcal{H}_I(y_1) \dots \mathcal{H}_I(y_s) \right] | 0 \rangle. \quad (2.3.31)$$

2.4 Formula LSZ per campi spinoriali

I riferimenti sono p. 263-267 dello Srednicki [7].

Facciamo lo stesso ragionamento del caso scalare. Studiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\not{\partial} - m_0)\psi + \mathcal{L}_{int} \quad (2.4.1)$$

dove per esempio posso avere:

$$\mathcal{L}_{int} \sim g \phi \bar{\psi} \psi \quad (2.4.2)$$

che è una **lagrangiana di Yukawa**, oppure:

$$\mathcal{L}_{int} \sim e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.4.3)$$

che viene chiamata **lagrangiana di Maxwell**. L'equazione del moto per la teoria interagente è:

$$(\not{\partial} - m_0)\psi = j_0 \quad (2.4.4)$$

che è leggermente diversa al caso della teoria libera in cui avevamo:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_0(\not{\partial} - m)\psi_0 \quad ; \quad (\not{\partial} - m)\psi_0 = 0. \quad (2.4.5)$$

Possiamo porre:

$$j = j_0 + (m - m_0)\psi \quad (2.4.6)$$

in modo da poter riscrivere l'equazione del moto (2.4.4) come:

$$(\not{\partial} - m)\psi = j \quad (2.4.7)$$

la cui soluzione si trova usando la soluzione dell'omogenea, ossia il campo libero (2.3.7), e la funzione di Green, che è il propagatore:

$$\psi(x) = \sqrt{Z} \psi_0 + \int d^4x S_{rel}(x-y) j(y) \quad (2.4.8)$$

in cui il fattore \sqrt{Z} tiene conto dell'autointerazione.

Quindi, scelti due stati normalizzati, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \alpha | \psi | \beta \rangle = \sqrt{Z} \langle \alpha | \psi_{in} | \beta \rangle \quad (2.4.9)$$

e analogamente:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \alpha | \psi | \beta \rangle = \sqrt{Z} \langle \alpha | \psi_{out} | \beta \rangle \quad (2.4.10)$$

dove abbiamo indicato con ψ_{in} e ψ_{out} i campi liberi iniziali e finali in cui abbiamo solo l'autointerazione; inoltre, le ψ rappresentano pacchetti d'onda.

Vogliamo studiare:

$$S_{\alpha\beta} = \langle \beta | \alpha \rangle \quad (2.4.11)$$

esplicitiamo la presenza di una particella con momento p ed elicità s :

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha, (p, s)\rangle \quad (2.4.12)$$

per far ciò abbiamo bisogno di esprimere gli operatori di creazione e distruzione in funzione dei campi (relazioni di inversione). Ricordo che abbiamo:

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[b_s(p) u_s(p) e^{-ipx} + d_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ipx} \right] \quad (2.4.13)$$

e che valgono le seguenti relazioni:

$$\bar{u}_s(p) \gamma^\mu u_r(p) = \bar{v}_s(p) \gamma^\mu v_r(p) = 2p^\mu \delta_{sr} \quad (2.4.14)$$

$$\bar{u}_s(p) \gamma^0 v_r(-p) = \bar{v}_s(p) \gamma^0 u_r(-p) = 0. \quad (2.4.15)$$

Possiamo svolgere i conti:

$$\int d^3x \bar{u}_r(p) \gamma^0 \psi(x) e^{ipx} = \quad (2.4.16)$$

$$= \int d^3x \bar{u}_r(p) \gamma^0 \left(\sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \left[b_s(q) u_s(q) e^{-iqx} + d_s^\dagger(q) v_s(q) e^{iqx} \right] \right) e^{ipx} \quad (2.4.17)$$

$$= \sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \int d^3x \left\{ \bar{u}_r(p) \gamma^0 \left[b_s(q) u_s(q) e^{-iqx} + d_s^\dagger(q) v_s(q) e^{iqx} \right] \right\} \quad (2.4.18)$$

$$= \sum_s \int \frac{d^3q}{2E_q} \bar{u}_r(p) \gamma^0 \left[u_s(q) b_s(q) e^{-i(E_q - E_p)t} \delta^3(q - p) + v_s(q) d_s^\dagger(q) e^{i(E_q + E_p)t} \delta^3(q + p) \right] \quad (2.4.19)$$

$$= \sum_s \frac{1}{2E_p} \left[\bar{u}_r(p) \gamma^0 u_s(p) b_s(p) + \bar{u}_s(p) \gamma^0 v_s(-p) d_s^\dagger(-p) e^{i(2E_p)x} \right] \quad (2.4.20)$$

$$= \hat{b}_r(p) \quad (2.4.21)$$

analogamente possiamo vedere:

$$\int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 v_r(p) e^{ipx} = \quad (2.4.22)$$

$$= \int d^3x \left(\sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \left[b_s^\dagger(q) \bar{u}_s(q) e^{iqx} + d_s(q) \bar{v}_s(q) e^{-iqx} \right] \right) \gamma^0 v_r(p) e^{ipx} \quad (2.4.23)$$

$$= \sum_s \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \int d^3x \left[b_s^\dagger(q) \bar{u}_s(q) e^{iqx} + d_s(q) \bar{v}_s(q) e^{-iqx} \right] \gamma^0 v_r(p) \quad (2.4.24)$$

$$= \sum_s \frac{1}{2E_q} \left[b_s^\dagger(-p) \bar{u}_s(-p) e^{-i(2E_p)x} + d_s(p) \bar{v}_s(p) \right] \gamma^0 v_r(p) \quad (2.4.25)$$

$$= \hat{d}_r(p). \quad (2.4.26)$$

Dunque abbiamo trovato per le particelle:

$$\hat{b}(p, s) = \int d^3x \bar{u}_s(p) \gamma^0 \psi_0(x) e^{ipx} \quad (2.4.27)$$

$$\hat{b}^\dagger(p, s) = \int d^3x \bar{\psi}_0(x) \gamma^0 u_s(p) e^{-ipx} \quad (2.4.28)$$

e per le anti-particelle:

$$\hat{d}(p, s) = \int d^3x \bar{\psi}_0(x) \gamma^0 v_r(p) e^{ipx} \quad (2.4.29)$$

$$\hat{d}^\dagger(p, s) = \int d^3x \bar{v}_r(p) \gamma^0 \psi_0(x) e^{-ipx}. \quad (2.4.30)$$

Tornando al nostro problema iniziale (2.4.11) possiamo considerare una particella nello stato iniziale $|\alpha\rangle$ ed ignorare il forward-scattering, e calcolare:

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\beta|b_{in}^\dagger(p, s)|\tilde{\alpha}\rangle \quad (2.4.31)$$

$$= \langle\beta|b_{in}^\dagger(p, s) - b_{out}^\dagger(p, s)|\tilde{\alpha}\rangle \quad (2.4.32)$$

$$= \langle\beta|\int d^3x [\bar{\psi}_{in}(x) - \bar{\psi}_{out}(x)] \gamma^0 u_s(p) e^{-ipx} |\tilde{\alpha}\rangle \quad (2.4.33)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3x \langle\beta|\bar{\psi}(x)|\tilde{\alpha}\rangle \gamma^0 u_s(p) e^{-ipx} \quad (2.4.34)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{Z}} \int d^4x \partial_t \left[\langle\beta|\bar{\psi}(x)|\tilde{\alpha}\rangle \gamma^0 u_s(p) e^{-ipx} \right] \quad (2.4.35)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[i (\partial_t \langle\beta|\bar{\psi}(x)|\tilde{\alpha}\rangle) \gamma^0 u_s(p) e^{-ipx} + \right. \\ \left. + i \langle\beta|\bar{\psi}(x)|\tilde{\alpha}\rangle \gamma^0 u_s(p) \partial_t e^{-ipx} \right] \quad (2.4.36)$$

possiamo ricordare che valgono (2.3.10), in particolare la prima, che ci permette di scrivere:

$$i\gamma^0 \partial_0 e^{-ipx} u_s(p) = \gamma^0 p_0 e^{-ipx} u_s(p) \quad (2.4.37)$$

$$= -(\gamma^i p_i - m) e^{-ipx} u_s(p) \quad (2.4.38)$$

$$= -(i\gamma^i \partial_i - m) e^{-ipx} u_s(p) \quad (2.4.39)$$

e dunque possiamo riprendere i nostri conti:

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[i \langle\beta|\bar{\psi}(x)|\tilde{\alpha}\rangle \gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 u_s(p) e^{-ipx} - \right. \\ \left. - \langle\beta|\bar{\psi}(x)|\tilde{\alpha}\rangle (i\gamma^i \partial_i - m) e^{-ipx} u_s(p) \right] \quad (2.4.40)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\langle\beta|\bar{\psi}(x)|\tilde{\alpha}\rangle (i\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 + i\gamma^i \overleftarrow{\partial}_i + m) u_s(p) e^{-ipx} \right] \quad (2.4.41)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\langle\beta|\bar{\psi}(x)|\tilde{\alpha}\rangle (i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) u_s(p) e^{-ipx} \right]. \quad (2.4.42)$$

Possiamo fare il conto analogo per l'antiparticella iniziale:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \tilde{\beta} | d_{in}^\dagger(p, s) | \alpha \rangle \quad (2.4.43)$$

$$= \langle \tilde{\beta} | d_{in}^\dagger(p, s) - d_{out}^\dagger(p, s) | \alpha \rangle \quad (2.4.44)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d^3x \bar{v}_r(p) \gamma^0 \langle \tilde{\beta} | \psi(x) | \alpha \rangle e^{-ipx} \quad (2.4.45)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\bar{v}_r(p) \gamma^0 \partial_t \left(\langle \tilde{\beta} | \psi(x) | \alpha \rangle \right) e^{-ipx} + \bar{v}_r(p) \gamma^0 \langle \tilde{\beta} | \psi(x) | \alpha \rangle \partial_t e^{-ipx} \right] \quad (2.4.46)$$

a questo punto possiamo riusare la relazione (2.3.10) per scrivere:

$$\bar{v}_r(p) \gamma^0 \partial_0 e^{-ipx} = -i \bar{v}_r(p) \gamma^0 p_0 e^{-ipx} \quad (2.4.47)$$

$$= i \bar{v}_r(p) (\gamma^i p_i + m) e^{-ipx} \quad (2.4.48)$$

$$= i \bar{v}_r(p) (i \gamma^i \partial_i + m) e^{-ipx} \quad (2.4.49)$$

che ci fa arrivare a:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\bar{v}_r(p) (i \gamma^0 \partial_0) \left(\langle \tilde{\beta} | \psi(x) | \alpha \rangle \right) e^{-ipx} - (\bar{v}_r(p) (i \gamma^i \partial_i + m) e^{-ipx}) \langle \tilde{\beta} | \psi(x) | \alpha \rangle \right] \quad (2.4.50)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-ipx} \bar{v}_r(p) (i \vec{\partial} - m) \langle \tilde{\beta} | \psi(x) | \alpha \rangle \right] \quad (2.4.51)$$

e possiamo vedere che il risultato finale è analogo al caso di particella (2.4.42), ma con un segno opposto sul termine di derivata.

Ovviamente dovremmo calcolare anche tutte le altre componenti, ma i conti sono analoghi e i risultati complessivi sono:

$$\begin{cases} \langle \beta | b_{in}^\dagger(p, s) | \alpha \rangle = +\frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\langle \beta | \bar{\psi} | \alpha \rangle (i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) u_s(p) e^{-ipx} \right] \\ \langle \beta | b_{out}(p, s) | \alpha \rangle = -\frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{+ipx} \bar{u}_s(p) (i \overrightarrow{\not{\partial}} - m) \langle \beta | \psi | \alpha \rangle \right] \\ \langle \beta | d_{in}^\dagger(p, s) | \alpha \rangle = +\frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[e^{-ipx} \bar{v}_s(p) (i \overleftarrow{\not{\partial}} - m) \langle \beta | \psi | \alpha \rangle \right] \\ \langle \beta | d_{out}(p, s) | \alpha \rangle = -\frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[\langle \beta | \bar{\psi} | \alpha \rangle (i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) v_s(p) e^{+ipx} \right]. \end{cases} \quad (2.4.52)$$

Se estraiamo una particella dopo aver già estratto $n+m$ campi, ignorando come sempre il forward scattering, possiamo inserire un fattore $(-1)^{m+n}$ che si semplifica per gli scambi:

$$\langle \beta | T[\psi_{\alpha_1}(y_1) \dots \psi_{\alpha_n} \bar{\psi}_{\beta_1}(z_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_m}(z_m)] b_{in}^\dagger | \alpha \rangle = \quad (2.4.53)$$

$$= \langle \beta | T[\psi \dots \bar{\psi}] b_{in}^\dagger | \alpha \rangle - (-1)^{m+n} \langle \beta | b_{out}^\dagger T[\psi \dots \bar{\psi}] | \alpha \rangle \quad (2.4.54)$$

$$= \langle \beta | T[\psi \dots \bar{\psi}] (b_{in}^\dagger - b_{out}^\dagger) | \alpha \rangle. \quad (2.4.55)$$

Infatti, facendo passare b_{out}^\dagger attraverso tutti i campi esso prende un segno $(-1)^{m+n}$, che si compensa con il segno scelto, dopodiché facciamo gli stessi passaggi di prima.

Supponendo di avere n particelle ed m antiparticelle nello stato iniziale $|\alpha\rangle$ e di avere s particelle e t antiparticelle nello stato finale $\langle\beta|$, si ha che:

$$\langle\beta_{(s,t)}|\alpha_{(n,m)}\rangle = \langle\Omega|[(b_1 \dots b_s)(d_1 \dots d_t)]_{out} [(b_1^\dagger \dots b_n^\dagger)(d_1^\dagger \dots d_m^\dagger)]_{in} |\Omega\rangle \quad (2.4.56)$$

che per come abbiamo scritto le (2.4.52) possiamo riordinarle come segue:

$$\langle\beta_{(s,t)}|\alpha_{(n,m)}\rangle = \langle\Omega|(d_1^\dagger \dots d_m^\dagger)_{in} (b_1^\dagger \dots b_s^\dagger)_{out} (b_1^\dagger \dots b_n^\dagger)_{in} (d_1^\dagger \dots d_t^\dagger)_{out} |\Omega\rangle. \quad (2.4.57)$$

Osserviamo che se t è pari allora possiamo spostare $(d_1^\dagger \dots d_t^\dagger)_{out}$ a destra senza problemi, mentre se è dispari verrà fuori un fattore $(-1)^{m+n}$, analogamente per spostare $(d_1^\dagger \dots d_m^\dagger)_{in}$ ottengo un fattore $(-1)^{n+s}$. Ora esplicitiamo i vari pezzetti:

$$\begin{aligned} \langle\beta_{(s,t)}|\alpha_{(n,m)}\rangle &= (-1)^{m+s} \langle\Omega|(d_1^\dagger \dots d_m^\dagger)_{in} (b_1^\dagger \dots b_s^\dagger)_{out} (b_1^\dagger \dots b_n^\dagger)_{in} (d_1^\dagger \dots d_t^\dagger)_{out} |\Omega\rangle = \\ &= (-1)^{m+t} \left(\frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^{n+m+s+t} \left\{ \prod_{j=1}^m \int d^4 x_j e^{-i p_j x_j} \bar{v}_s(p_j) (i \vec{\not{\partial}}_j - m) \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \prod_{k=1}^s \int d^4 x_k e^{+i p_k x_k} \bar{u}_s(p_k) (i \vec{\not{\partial}}_k - m) \right\} \times \langle\Omega|\psi_j \psi_k \bar{\psi}_i \bar{\psi}_l |\Omega\rangle \times \\ &\quad \times \left\{ \prod_{j=1}^n \int d^4 x_i (i \vec{\not{\partial}}_i + m) u_s(p_i) e^{-i p_i x_i} \right\} \left\{ \prod_{l=1}^t \int d^4 x_l (i \vec{\not{\partial}}_l + m) v_s(p_l) e^{+i p_l x_l} \right\}. \end{aligned} \quad (2.4.58)$$

Notiamo, e teniamo a mente, che non è segnato esplicitamente, ma gli elementi con la stessa sommatoria hanno indici spinoriali legati, nell'ordine in cui i vari elementi sono scritti:

$$\begin{aligned} (\dots) \bar{u}_{\gamma_1}(z_1) (\dots) (i \vec{\not{\partial}} - m)_{\gamma_1 c_1} (\dots) \langle 0 | T[\psi_{c_1}(z_1) (\dots) \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) (\dots)] | 0 \rangle \times \\ \times (i \vec{\not{\partial}} + m)_{\alpha_1 \alpha_1} (\dots) u_{\alpha_1}(x_1) (\dots) \end{aligned}$$

in cui gli indici $(\alpha_1, \gamma_1, \dots)$ rappresentano gli indici del prodotto tra gli spinori.

Usando lo stesso abuso di notazione che abbiamo osservato per il caso scalare (ovvero utilizziamo G sia per indicare la funzione di Green, sia la funzione di Green amputata), possiamo scrivere la definizione delle funzioni di Green:

$$G = \bar{v}_j \bar{u}_k \langle\Omega| T[\psi_j \psi_k \bar{\psi}_i \bar{\psi}_l] |\Omega\rangle u_i v_l \quad (2.4.59)$$

$$\tilde{G} = \left\{ \prod_{j=1}^m \int d^4 x_j e^{-i p_j x_j} \right\} \left\{ \prod_{k=1}^s \int d^4 x_k e^{+i p_k x_k} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^n \int d^4 x_i e^{-i p_i x_i} \right\} \times \\ \times \left\{ \prod_{l=1}^t \int d^4 x_l e^{+i p_l x_l} \right\} G \quad (2.4.60)$$

$$= (-1)^{n+t} (\sqrt{Z})^{n+m+s+t} \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{i}{\not{p}_j - m} \right\} \left\{ \prod_{k=1}^s \frac{i}{\not{p}_k + m} \right\} \times \\ \times \left\{ \prod_{i=1}^n \frac{i}{\not{p}_i + m} \right\} \left\{ \prod_{l=1}^t \frac{i}{\not{p}_l - m} \right\} \langle \beta_{(s,t)} | \alpha_{(n,m)} \rangle \quad (2.4.61)$$

che troviamo grazie alla formula LSZ. La funzione di correlazione/Green amputata si ottiene eliminando i propagatori delle gambe esterne dalla funzione di Green nello spazio dei momenti:

$$\tilde{G}^{(n)} = \tilde{G}_A^{(n)} \prod_{i=1}^n \Delta_F(p_i). \quad (2.4.62)$$

2.5 Teorema di Wick per campi spinoriali

Abbiamo già visto il prodotto:

$$T[\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)] = \theta(x^0 - y^0) \psi_\alpha(x) \psi_\beta(y) - \theta(y^0 - x^0) \psi_\beta(y) \psi_\alpha(x) \quad (2.5.1)$$

possiamo ipotizzare $x^0 > y^0$ e che $\psi = \psi^+ + \psi^-$ (così il primo contiene \hat{b} e il secondo \hat{d}^\dagger). In questo modo:

$$T[\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)] = \psi_\alpha^+(x) \psi_\beta^+(y) + \psi_\alpha^+(x) \psi_\beta^-(y) + \psi_\alpha^-(x) \psi_\beta^+(y) + \\ + \psi_\alpha^-(x) \psi_\beta^-(y) \quad (2.5.2)$$

$$= \psi_\alpha^+(x) \psi_\beta^+(y) + \psi_\beta^-(y) \psi_\alpha^+(x) + \psi_\alpha^-(x) \psi_\beta^+(y) + \\ + \psi_\alpha^-(x) \psi_\beta^-(y) + \left\{ \psi_\alpha^+(x), \psi_\beta^-(y) \right\} \quad (2.5.3)$$

$$= N[\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)] + \left\{ \psi_\alpha^+(x), \psi_\beta^-(y) \right\} \quad (2.5.4)$$

ricordiamoci anche che vale:

$$\{\psi_\alpha(t, \vec{x}), \psi_\beta(t, \vec{y})\} = \{\bar{\psi}_\alpha(t, \vec{x}), \bar{\psi}_\beta(t, \vec{y})\} = 0 \quad (2.5.5)$$

$$\{\psi_\alpha(t, \vec{x}), \bar{\psi}_\beta(t, \vec{y})\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.5.6)$$

e dunque, calcolando il valore di aspettazione sul vuoto, abbiamo:

$$\langle 0 | T[\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | N[\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)] | 0 \rangle + \left\{ \psi_\alpha^+(x), \psi_\beta^-(y) \right\} = 0 \quad (2.5.7)$$

$$\langle 0 | T[\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | N[\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)] | 0 \rangle + \left\{ \bar{\psi}_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^-(y) \right\} = 0. \quad (2.5.8)$$

Il propagatore è dunque:

$$\langle 0 | T[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | N[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)] | 0 \rangle + \left\{ \psi_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^-(y) \right\} \quad (2.5.9)$$

$$= S_F(x - y). \quad (2.5.10)$$

Possiamo riscrivere dunque:

$$T[\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)] = N[\psi(x)\psi(y)] \quad (2.5.11)$$

$$T[\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)] = N[\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)] \quad (2.5.12)$$

$$T[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)] = N[\psi(x)\bar{\psi}(y)] + S_F(x - y) \quad (2.5.13)$$

$$= N[\psi(x)\bar{\psi}(y)] + \overline{\psi(x)\psi(y)}. \quad (2.5.14)$$

In maniera più generica possiamo porre $A, B \in \{\psi, \bar{\psi}\}$ e otteniamo:

$$T[A(x)\bar{B}(y)] = N[A(x)\bar{B}(x)] + \overline{A(x)\bar{B}(y)} \quad (2.5.15)$$

in cui se $A = B$ allora il termine contratto è nullo, altrimenti è uguale al propagatore.

Consideriamo ora un ψ generico, che può essere $\{\psi, \bar{\psi}\}$, e vediamo:

$$T[\psi_1 \dots \psi_n] = (-1)^\sigma \psi_{t_1} \dots \psi_{t_n} \quad (2.5.16)$$

in cui σ è il numero di permutazioni necessarie per ottenere il prodotto temporalmente ordinato. Nel prodotto normal-ordered dividiamo in due gruppi, $A = \{\psi^-\}$ e $B = \{\psi^+\}$:

$$N[\psi_1 \dots \psi_n] = \sum_{A,B} \delta_\sigma \prod_{i \in A} \psi_i^- \prod_{j \in B} \psi_j^+ \quad (2.5.17)$$

in cui la δ indica che c'è un segno \pm che dipende dall'ordine dei campi.

L'enunciato del **teorema di Wick** rimane uguale al caso bosonico, ma dentro al prodotto normale ordinato abbiamo segni sia positivi sia negativi:

$$T[\psi_1 \dots \psi_n] = N[\psi_1 \dots \psi_n] + \sum_{\sigma} N[\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n] + \dots + \sum_{\sigma} N[\psi_1 \psi_2 \dots \psi_{n-1} \psi_n] \quad (2.5.18)$$

in cui stiamo utilizzando un campo ψ generico, ma poi nella pratica dobbiamo ricordare che:

$$\psi\psi = \overline{\psi\psi} = 0. \quad (2.5.19)$$

Inoltre, la lagrangiana di interazione ha un numero pari di campi, quindi anche nel teorema di Wick possiamo avere solo un numero pari di campi (diversamente dal caso scalare, in cui anche il caso dispari era possibile).

Per il teorema di Wick (2.5.18), in cui σ sono le combinazioni possibili, abbiamo:

$$\langle 0|T[\psi \dots \overline{\psi}]|0\rangle = \begin{cases} 0 & \# \text{ campi è dispari} \\ \pm \sum_{\sigma} \prod_{i,j} S_{\psi}(x_i - x_j) & \# \text{ campi è pari} \end{cases} \quad (2.5.20)$$

e in cui indichiamo con:

$$S_F(x - y) = \overline{\psi\psi} = \left\{ \psi_{\alpha}^{+}(x), \overline{\psi}_{\beta}^{-}(y) \right\} = \langle 0|T[\psi_{\alpha}(x) \overline{\psi}_{\beta}(y)]|0\rangle. \quad (2.5.21)$$

2.5.1 Dimostrazione per induzione (cenni)

Ipotizziamo che ψ_{n+1} abbia il tempo più piccolo, e quindi possiamo portarlo fuori dal prodotto temporalmente ordinato:

$$T[\psi_1 \dots \psi_n \psi_{n+1}] = T[\psi_1 \dots \psi_n] \psi_{n+1} \quad (2.5.22)$$

in cui vediamo che:

$$[\psi_1 \dots \psi_n] \psi_{n+1} = \left(\sum_{A,B} \delta_{\sigma} \prod_{i \in A} \psi_i^{-} \prod_{j \in B} \psi_j^{+} \right) (\psi_{n+1}^{+} + \psi_{n+1}^{-}) \quad (2.5.23)$$

$$= \sum_{A,B} \delta_{\sigma} \prod_{i \in A} \psi_i^{-} \prod_{j \in B} \psi_j^{+} \psi_{n+1}^{+} + \sum_{A,B} \delta_{\sigma} \prod_{i \in A} \psi_i^{-} \prod_{j \in B} \psi_j^{+} \psi_{n+1}^{-}. \quad (2.5.24)$$

Per fare in modo che il secondo termine sia normale ordinato, dobbiamo fare delle permutazioni a causa di cui escono dei segni negativi e gli anti-commutatori, ma i segni ricostruiscono il segno giusto per il prodotto normale ordinato di $n+1$ campi, mentre gli anti-commutatori completano la sommatoria con una contrazione aggiungendo le contrazioni tra ψ_{n+1} e gli altri campi, analogamente gli anti-commutatori della prima sommatoria completano la sommatoria con due contrazioni, ecc. Si vedano i libri per completezza.

2.6 Regole di Feynman per la teoria di Yukawa

I riferimenti sono p. 287-289 dello Srednicki [7] e p. 118 del Peskin e Schroeder [4].

L'interazione di Yukawa tra spinori e scalari è data da:

$$\mathcal{L}_{int} = -g \bar{\psi} \psi \phi \quad (2.6.1)$$

in cui il campo ψ rappresenta un fermione l .

Elenchiamo le regole di Feynman nello spazio degli impulsi:

- Ad ogni campo *esterno* associamo:

$$\phi \sim 1 \quad , \quad l_{in}^- \sim u(p) \quad , \quad l_{out}^- \sim \bar{u}(p) \quad (2.6.2)$$

$$l_{in}^+ \sim \bar{v}(p) \quad , \quad l_{out}^+ \sim v(p). \quad (2.6.3)$$

- Ad ogni linea di campo *interna* associamo:

$$\tilde{\Delta}_\phi(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad , \quad \tilde{\Delta}_\psi(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (2.6.4)$$

- In ogni *vertice* associamo:

$$(-ig) \cdot (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_i). \quad (2.6.5)$$

- In ogni *loop* integriamo:

$$\int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \quad (2.6.6)$$

per tutti i momenti non fissati dalla δ .

- Dividiamo ogni *diagramma* per il fattore di simmetria s .

Ricordiamo che per convenzione l'impulso ha segno positivo se punta dentro il vertice (impulso entrante).

Applicando le regole di Feynman nello spazio degli impulsi, in base a quello che abbiamo imparato nella sezione §1.14, per ogni diagramma otteniamo:

$$\tilde{G} = M \cdot (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_{in} - \Sigma p_{out}). \quad (2.6.7)$$

Capitolo 3

Il campo vettoriale

Vediamo in questo capitolo, l'ultimo tipo di campo che ci interessa trattare, ovvero i campi vettoriali.

3.1 Derivata covariante e cinetica dei fotoni

Consideriamo:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\rlap{-}\not{D} - m)\psi \quad (3.1.1)$$

se studiamo un'invarianza per fase locale, ovvero $\alpha = \alpha(x)$, la lagrangiana così com'è non è invariante, ma è proprio a questo proposito che utilizziamo la derivata covariante $\rlap{-}\not{D}$. Infatti, possiamo richiedere l'invarianza imponendo che sotto trasformazione di fase locale si abbia:

$$\rlap{-}\not{D} \psi' = e^{i\alpha(x)} \rlap{-}\not{D} \psi \quad (3.1.2)$$

il che si ottiene ponendo:

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu(x) \quad (3.1.3)$$

infatti così facendo abbiamo:

$$(\partial_\mu + iA'_\mu(x)) e^{i\alpha(x)} \psi = e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu + iA_\mu(x)) \psi \quad (3.1.4)$$

da cui:

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha(x). \quad (3.1.5)$$

Scriviamo dunque la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\rlap{-}\not{D} - m)\psi = \bar{\psi} (i\rlap{-}\not{A} - m)\psi. \quad (3.1.6)$$

Però, se vogliamo rendere dinamico il campo A allora dobbiamo introdurre un termine cinetico per A , che però deve mantenere l'invarianza di Lorentz

e anche quella di fase locale. Il termine cinetico che cerchiamo si costruisce a partire dal commutatore:

$$[D_\mu, D_\nu] f = [\partial_\mu + iA_\mu, \partial_\nu + iA_\nu] f \quad (3.1.7)$$

$$= (\partial_\mu + iA_\mu)(\partial_\nu + iA_\nu) f - (\partial_\nu + iA_\nu)(\partial_\mu + iA_\mu) f \quad (3.1.8)$$

$$= i[\partial_\mu(A_\nu f) + A_\mu \partial_\nu f - \partial_\nu(A_\mu f) - A_\nu \partial_\mu f] \quad (3.1.9)$$

$$= i(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) f \quad (3.1.10)$$

$$= iF_{\mu\nu} f. \quad (3.1.11)$$

Dunque la lagrangiana dinamica (con il termine cinetico) è:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - \cancel{A} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (3.1.12)$$

Ricordando la definizione di tensore elettromagnetico notiamo che abbiamo:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (3.1.13)$$

$$= 2(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \partial_\mu A_\nu \quad (3.1.14)$$

e studiando:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \implies \partial_\nu F^{\mu\nu} = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = j^\mu. \quad (3.1.15)$$

Inoltre, valgono quelle che vengono chiamate *identità di Bianchi*:

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} = 0 \quad (3.1.16)$$

scrivibili anche come:

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \partial^\mu F^{\nu\rho} = 0 \quad (3.1.17)$$

e che possono essere derivate dalle identità di Jacobi:

$$\sum_{\#\sigma} [A, [B, C]] = 0 \quad (3.1.18)$$

applicate alle derivate covarianti. Infatti, ricordando che:

$$[D_\rho, D_\nu] = iF_{\rho\nu} \quad (3.1.19)$$

otteniamo:

$$\sum_{\#\sigma} [D_\mu, F_{\rho\nu}] = 0 \quad (3.1.20)$$

da cui ricaviamo le identità (3.1.16).

3.2 Soluzione per la teoria di Maxwell

I riferimenti sono p. 335-338 dello Srednicki [7] e p. 123-124 e 159-160 del Peskin e Schroeder [4].

Studiamo la teoria del fotone, ovvero prendiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.2.1)$$

$$= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (3.2.2)$$

$$= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \partial^\mu A^\nu \quad (3.2.3)$$

e possiamo vedere che abbiamo:

$$\pi_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\nu} \propto F_{\nu 0} \quad (3.2.4)$$

e dunque che $\pi_0 = 0$, il che è incompatibile con la richiesta per il commutatore tra A e π , che imponiamo:

$$[A_\mu(t, \vec{x}), \pi_\nu(t, \vec{y})] = i \eta_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.2.5)$$

Però per poter usare la quantizzazione canonica dobbiamo modificare la lagrangiana, aggiungendo un termine di gauge fixing:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (3.2.6)$$

in questo modo $\pi_0 \neq 0$ e possiamo imporre il commutatore (3.2.5). Le equazioni del moto, nel vuoto, sono date da:

$$\delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L} \quad (3.2.7)$$

$$= -\frac{1}{2} \int d^4x \left(F_{\mu\nu} \partial^\mu (\delta A^\nu) + \frac{1}{\xi} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu (\delta A^\nu) \right) \quad (3.2.8)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x \left(\partial^\mu F_{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \partial_\nu \partial_\mu A^\mu \right) (\delta A^\nu) \quad (3.2.9)$$

$$= 0 \quad (3.2.10)$$

e dunque:

$$\square A^\nu + \frac{1-\xi}{\xi} \partial^\nu (\partial A) = 0. \quad (3.2.11)$$

Osserviamo che se mettiamo $\xi = 1$ riotteniamo l'equazione di Klein-Gordon e possiamo risolvere l'equazione tramite le onde piane:

$$A_\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \left[a(\lambda, k) \epsilon_\mu(\lambda, k) e^{-ikx} + a^\dagger(\lambda, k) \epsilon_\mu^*(\lambda, k) e^{ikx} \right] \quad (3.2.12)$$

in cui indichiamo con λ la polarizzazione. Imponendo (3.2.5) troviamo i commutatori:

$$\left[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k') \right] = -\eta^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 2E_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (3.2.13)$$

Invertendo la relazione (3.2.12) possiamo trovare gli operatori di creazione e distruzione in funzione del campo:

$$\hat{a}(\lambda, k) = i \int d^3x e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 A^\mu(x) \epsilon_\mu^*(\lambda, k) \quad (3.2.14)$$

analoghi al caso spinoriale. Possiamo ottenere gli operatori (3.2.14) solo se richiediamo che i vettori di polarizzazione siano perpendicolari tra loro e normalizzati, ovvero che:

$$\epsilon^\mu(\lambda, p) \epsilon_\mu^*(\lambda', p) = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (3.2.15)$$

3.3 Normalizzazione degli stati e stati fisici (metodo di Gupta-Bleuler)

Osserviamo che vale la relazione:

$$|a_\lambda^\dagger(k) |0\rangle|^2 = \langle 0| a_\lambda(k) a_{\lambda'}^\dagger(k) |0\rangle = \langle 0| \left[a_\lambda(k), a_{\lambda'}^\dagger(k) \right] |0\rangle \propto -\eta_{\lambda\lambda'} \quad (3.3.1)$$

ovvero abbiamo che la polarizzazione scalare, $\lambda = 0$, ha degli stati, detti *ghost*, a norma negativa. Infatti rinormalizzando gli stati abbiamo che:

$$|a_0^\dagger(k) |0\rangle|^2 = -1 \quad , \quad |a_i^\dagger(k) |0\rangle|^2 = 1. \quad (3.3.2)$$

Se però imponiamo che:

$$\langle \psi | \partial A | \psi \rangle = 0 \quad (3.3.3)$$

allora questo seleziona automaticamente gli stati fisici con norma definita positiva.

Consideriamo un fotone, quindi una particella di tipo luce, con:

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega) \quad (3.3.4)$$

e studiamo:

$$\langle \psi | \partial A | \psi \rangle = \langle \psi | \partial A^+ + \partial A^- | \psi \rangle \quad (3.3.5)$$

in cui vediamo:

$$\partial^\mu A_\mu^\dagger(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int d^3\tilde{k} \left[a^{(\lambda)}(k) (-ik^\mu) \cdot \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} \right] \quad (3.3.6)$$

$$= -i\omega \int d^3\tilde{k} \left[a^{(0)}(k) - a^{(3)}(k) \right] e^{-ikx} \quad (3.3.7)$$

in cui abbiamo messo la misura:

$$d^3\tilde{k} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \quad (3.3.8)$$

per brevità. Ricordiamo anche che k è ortogonale a $\epsilon^{(1)}$ e $\epsilon^{(2)}$. Dunque nel nostro studio rimane solo un termine:

$$\partial^\mu A_\mu^\dagger(x) |\psi\rangle \sim (a^{(0)} - a^{(3)}) |\psi\rangle. \quad (3.3.9)$$

Vogliamo però separare gli stati fisici $|\psi_T\rangle \in \mathcal{H}_1$ (le polarizzazioni trasverse) dagli stati non fisici $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_2$ (polarizzazione scalare e longitudinale). Pertanto consideriamo:

$$|\psi\rangle = |\psi_T\rangle |\phi\rangle \quad (3.3.10)$$

e richiediamo che le osservabili agiscano solo sullo spazio fisico, ovvero solo su $|\psi_T\rangle \in \mathcal{H}_1$.

Supponiamo che:

$$|\phi\rangle = \sum c_n |\phi_n\rangle \quad , \quad |\phi_0\rangle = |0\rangle \quad (3.3.11)$$

inoltre definiamo:

$$N_{03} = \int d^3\tilde{k} \left[a^{(3)\dagger} a^{(3)} - a^{(0)\dagger} a^{(0)} \right] \quad (3.3.12)$$

e dopodiché imponiamo:

$$\partial^\mu A_\mu^+(x) |\phi\rangle \sim (a^{(0)} - a^{(3)}) |\phi\rangle = 0 \quad (3.3.13)$$

$$\langle\phi| \partial^\mu A_\mu^-(x) \sim \langle\phi| (a^{(0)\dagger} - a^{(3)\dagger}) = 0 \quad (3.3.14)$$

in questo modo soddisfiamo:

$$\langle\psi| \partial A |\psi\rangle = \langle\psi| \langle\phi| \partial A^+ + \partial A^- |\phi\rangle |\psi\rangle = 0. \quad (3.3.15)$$

Inoltre, il fatto che valga (3.3.13) implica che:

$$a^{(0)} |\phi_n\rangle = a^{(3)} |\phi_n\rangle \quad \forall n \quad (3.3.16)$$

dunque:

$$\langle\phi_n| N_{03} |\phi_n\rangle \sim \langle\phi_n| a^{(3)\dagger} a^{(3)} - a^{(0)\dagger} a^{(0)} |\phi_n\rangle \quad (3.3.17)$$

$$= \langle\phi_n| (a^{(3)\dagger} - a^{(0)\dagger}) a^{(0)} |\phi_n\rangle \quad (3.3.18)$$

$$= 0 \quad \forall n > 0. \quad (3.3.19)$$

Però dobbiamo ricordare che:

$$\langle\phi_n| N_{03} |\phi_n\rangle = n \langle\phi_n|\phi_n\rangle \quad (3.3.20)$$

e pertanto abbiamo:

$$\langle \phi_n | \phi_n \rangle = 0 \quad \forall n > 0 \quad (3.3.21)$$

mentre per il caso $n = 0$ abbiamo $|\phi_0\rangle = |0\rangle$ e quindi:

$$\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1. \quad (3.3.22)$$

Tutto ciò implica che:

$$\langle \phi | \phi \rangle = \sum_{n>0} |c_n|^2 \langle \phi_n | \phi_n \rangle \quad (3.3.23)$$

$$= |c_0|^2 \langle 0 | 0 \rangle + \sum_{n>0} |c_n|^2 \langle \phi_n | \phi_n \rangle \quad (3.3.24)$$

$$= |c_0|^2 \quad (3.3.25)$$

$$\geq 0. \quad (3.3.26)$$

L'hamiltoniana della teoria è:

$$H(x) = \frac{i}{2} \int d^3x \left[\sum_{i=1}^3 [(\dot{A}_i)^2 + (\nabla A_i)^2] - (\dot{A}_0)^2 - (\nabla A_0)^2 \right] \quad (3.3.27)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\sum_{i=1}^3 a^{(i)}(k) a^{(i)\dagger}(k) - a^{(0)}(k) a^{(0)\dagger}(k) \right) \quad (3.3.28)$$

e dunque:

$$\langle \psi | H | \psi \rangle \sim \langle \psi_T | N_{12} | \psi_T \rangle \langle \phi | \phi \rangle + \langle \psi_T | \psi_T \rangle \langle \phi | N_{03} | \phi \rangle \quad (3.3.29)$$

$$= |c_0|^2 \langle \psi_T | N_{12} | \psi_T \rangle \quad (3.3.30)$$

e dunque che le polarizzazioni non fisiche non agiscono sulle osservabili.

3.4 Somma sulle polarizzazioni fisiche (identità di Ward)

I riferimenti sono p. 181-182 e 260 dello Srednicki [7] e p. 337, 342, 351-353, 399 del Peskin e Schroeder [4].

Introduciamo un versore time-like $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ ed un vettore di tipo luce $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$, tramite i quali possiamo definire un piano nello spazio di Minkowski (4D); poi scegliamo ϵ_1 ed ϵ_2 ortogonali al piano e ortogonali tra loro, cioè tali per cui:

$$\epsilon_{(1,2)}^\mu p_\mu = \epsilon_{(1,2)}^\mu n_\mu = \epsilon_{(1)}^\mu \epsilon_\mu^{(2)} = 0 \quad (3.4.1)$$

poi scegliamo ϵ_0 parallelo ad n ; infine, ϵ_3 si trova sul piano ed è ortogonale ad n .

Una scelta possibile che possiamo fare è:

$$\epsilon_{\mu}^{(\lambda)} = \delta_{\mu\lambda} \quad (3.4.2)$$

cioè un vettore dove l'unico elemento non nullo è quello in posizione λ .

Scegliamo le polarizzazioni non fisiche in modo che:

$$\epsilon_{(0)}^{\mu} = n^{\mu} \quad , \quad \epsilon_{(3)}^{\mu} = \frac{k^{\mu}}{k^0} - n^{\mu} \quad (3.4.3)$$

e inoltre introduciamo:

$$\bar{k}^{\mu} = 2(k \cdot n) n^{\mu} - k^{\mu} \quad (3.4.4)$$

ovvero:

$$n^{\mu} = \frac{\bar{k}^{\mu} + k^{\mu}}{2k^0}. \quad (3.4.5)$$

Se sommiamo tutte le polarizzazioni otteniamo:

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon^{\mu}(\lambda, p) \epsilon^{*\nu}(\lambda', p) \eta^{\lambda\lambda'} = \eta^{\mu\nu} \quad (3.4.6)$$

in cui:

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon^{\mu}(\lambda, p) \epsilon^{*\nu}(\lambda', p) = -\eta^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu}(0, p) \epsilon^{*\nu}(0, p) - \epsilon^{\mu}(3, p) \epsilon^{*\nu}(3, p) \quad (3.4.7)$$

$$= -\eta^{\mu\nu} + n^{\mu} n^{\nu} - \left(\frac{k^{\mu}}{k^0} - n^{\mu} \right) \left(\frac{k^{\nu}}{k^0} - n^{\nu} \right) \quad (3.4.8)$$

$$= -\eta^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{(k^0)^2} + \frac{k^{\mu} n^{\nu} + k^{\nu} n^{\mu}}{k^0} \quad (3.4.9)$$

$$= -\eta^{\mu\nu} - \frac{1}{2(k^0)^2} \left[2k^{\mu} k^{\nu} - k^{\mu} (\bar{k}^{\nu} + k^{\nu}) - k^{\nu} (\bar{k}^{\mu} + k^{\mu}) \right] \quad (3.4.10)$$

$$= -\eta^{\mu\nu} + \frac{k^{\mu} \bar{k}^{\nu} + \bar{k}^{\mu} k^{\nu}}{(\bar{k} \cdot k)}. \quad (3.4.11)$$

Notiamo che k^{μ} non è Lorentz invariante, tuttavia questo non è un problema perché questo termine si annulla grazie alle identità di Ward: per un fotone nello stato iniziale $M = \epsilon^{\mu}(k) M_{\mu}$ abbiamo che:

$$k^{\mu} M_{\mu} = 0 \quad (3.4.12)$$

e quindi:

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon^{\mu}(\lambda, p) \epsilon^{*\nu}(\lambda', p) \longrightarrow -\eta^{\mu\nu}. \quad (3.4.13)$$

Noi non dimostriamo le identità di Ward in generale, ma le verificheremo in un esempio sull'annichilazione di fermioni in fotoni. Vedi il continuo del capitolo.

3.5 Propagatore per il campo di Maxwell

Ricordiamo che:

$$\square A_\mu + \frac{1-\xi}{\xi} \partial_\mu (\partial A) = 0 \quad (3.5.1)$$

cioé che:

$$\left[\square \delta^\nu_\mu + \frac{1-\xi}{\xi} \partial_\mu \partial^\nu \right] A_\nu = 0. \quad (3.5.2)$$

Il propagatore è la funzione di Green, dunque tale per cui:

$$\left[\square \delta^\nu_\mu + \frac{1-\xi}{\xi} \partial_\mu \partial^\nu \right] \Delta_{\nu\rho}(x-y) = i \eta_{\mu\rho} \delta^4(x-y) \quad (3.5.3)$$

che nello spazio dei momenti diventa:

$$\left[k^2 \delta^\nu_\mu + \frac{1-\xi}{\xi} k_\mu k^\nu \right] \tilde{\Delta}_{\nu\rho}(k) = -i \eta_{\mu\rho}. \quad (3.5.4)$$

L'unica struttura possibile, affinché sia rispettata (3.5.4), è:

$$\tilde{\Delta}_{\nu\rho} = a(k^2) \eta_{\nu\rho} + b(k^2) k_\nu k_\rho \quad (3.5.5)$$

che possiamo sostituire in (3.5.4) e risolvere per $a(k^2)$ e $b(k^2)$:

$$\left[k^2 a(k^2) + i \right] \eta_{\mu\rho} + \frac{1}{\xi} \left[(1-\xi) \frac{1}{k^2} a(k^2) + b(k^2) \right] k^2 k_\mu k_\rho = 0 \quad (3.5.6)$$

da cui troviamo:

$$a(k) = -\frac{i}{k^2} \quad (3.5.7)$$

$$b(k) = \frac{i(1-\xi)}{k^4} \quad (3.5.8)$$

e scriviamo il propagatore nello spazio dei momenti:

$$\tilde{\Delta}_{\nu\rho} = -\frac{i}{k^2} \left(\eta_{\nu\rho} + (\xi-1) \frac{k_\nu k_\rho}{k^2} \right). \quad (3.5.9)$$

Riassunto. Prendiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial A)^2 + \bar{\psi}(\not{D} - m)\psi \quad (3.5.10)$$

se vogliamo generalizzare la teoria di Maxwell e procediamo con la quantizzazione canonica è un disastro e vedremo nel proseguio delle note come farlo utilizzando i path integral.

3.6 Regole di Feynman per la QED

I riferimenti sono p. 348-350 dello Srednicki [7] e p. 123-124 del Peskin e Schroeder [4].

I leptoni sono composti da elettroni, muoni e tau, questi hanno stesso numero quantico e stessa carica elettrica, ma massa diversa ($m_e = 0.511$ MeV, $m_\mu = 106$ MeV, $m_\tau = 1777$ MeV). Prendiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_{int} \quad (3.6.1)$$

$$= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial A)^2 + \sum_a \psi_a (i\not{\partial} - e\not{A} - m_a)\psi_a \quad (3.6.2)$$

in cui: il secondo è un termine di gauge e l'indice $a = \{e, \mu, \tau\}$ rappresenta la famiglia fermionica.

Vediamo le regole di Feynman nello spazio degli impulsi:

1. Campi:

- ad ogni fermione nello stato iniziale associamo $u(p)$ e nello stato finale $\bar{u}(p)$.
- Ad ogni anti-fermione nello stato iniziale associamo $\bar{v}(p)$ e nello stato finale $v(p)$.
- Ad ogni fotone nello stato iniziale associamo $[\epsilon_\lambda^\mu(k)]^*$ e nello stato finale $\epsilon_\lambda^\mu(k)$.

2. Propagatore:

- per i fermioni disegniamo una linea continua (con freccia) e associamo:

$$S_a(p) = \frac{i(\not{p} + m_a)}{p^2 - m_a^2 + i\varepsilon}. \quad (3.6.3)$$

- Per i fotoni disegniamo una linea ondulata ed associamo:

$$\Delta^{\mu\nu}(k) = \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}. \quad (3.6.4)$$

3. *Vertici*: ad ogni vertice associamo $(-ie\gamma^\mu)$ ed imponiamo la conservazione del 4-impulso.
4. *Simmetria*: ogni diagramma va diviso per il suo fattore di simmetria.
5. *Loop*: integriamo sui momenti indeterminati dentro i loop.

Ricordiamo che per i diagrammi tree-level il fattore di simmetria è sempre 1.

3.6.1 Esempio annichilazione di fermioni

I riferimenti sono p. 131-136 del Peskin e Schroeder [4].

Consideriamo la QED, dunque una lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu \quad (3.6.5)$$

e studiamo il processo:

$$e^- + e^+ \longrightarrow \mu^- + \mu^+$$

in cui abbiamo solo il canale s e siccome $m_\mu \approx 200 m_e$ trascuriamo solo la massa dell'elettrone. Il processo lo possiamo vedere in figura 3.1.

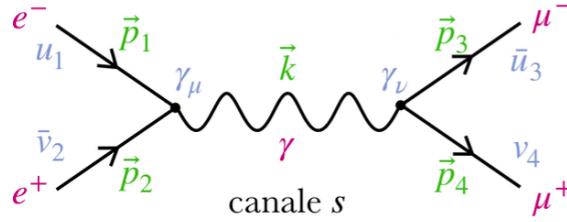


Figura 3.1: Raffigurazione canale s processo $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$.

Utilizziamo le regole di Feynman per la QED per scrivere l'elemento di matrice S ridotta:

$$M (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \quad (3.6.6)$$

$$= \left[\bar{v}(p_2) (-ie \gamma_\mu) u(p_1) \right] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i \eta^{\mu\nu}}{k^4} \left[\bar{u}(p_3) (-ie \gamma_\nu) v(p_4) \right] \times \\ \times (2\pi)^4 \delta(k - p_3 - p_4) (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k) \quad (3.6.7)$$

$$= \frac{-i e^2}{(p_1 + p_2)^2} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \quad (3.6.8)$$

Dunque abbiamo:

$$M = M_s = \frac{-i e^2}{s} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) \quad (3.6.9)$$

e possiamo procedere con il calcolo della sezione d'urto non polarizzata mediando sulle polarizzazioni iniziali e sommando su quelle finali:

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spin} |M_s|^2 \quad (3.6.10)$$

$$= \frac{e^4}{4 s^2} \sum_{spin} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) (\bar{v}_4 \cdot \gamma^\nu \cdot u_3) (\bar{u}_1 \cdot \gamma_\nu \cdot v_2) \quad (3.6.11)$$

$$= \frac{e^4}{4 s^2} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}_2 - m_e) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{p}_3 + m_\mu) \gamma^\nu (\not{p}_4 - m_\mu) \right\} \quad (3.6.12)$$

ad alte energie $m_e \approx 0$

$$\approx \frac{e^4}{4 s^2} p_1^\alpha p_2^\beta p_{3,\rho} p_{4,\sigma} \times \\ \times \text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \} \text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma - m_\mu^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \} \quad (3.6.13)$$

$$= \frac{4 e^4}{s^2} p_1^\alpha p_2^\beta p_{3,\rho} p_{4,\sigma} [\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}] \times \\ \times [\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - m_\mu^2 \eta^{\mu\nu}] \quad (3.6.14)$$

$$= \frac{8 e^4}{s^2} [(p_1 \cdot p_3) (p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) + m_\mu^2 (p_1 \cdot p_2)] \quad (3.6.15)$$

ora, notando che nel sistema di riferimento del centro di massa, con $m_e \approx 0$, abbiamo:

$$\begin{cases} p_1 = (E, E\hat{z}) & ; & p_2 = (E, -E\hat{z}) \\ p_3 = (E, \vec{k}) & ; & p_4 = (E, -\vec{k}) \end{cases} \quad (3.6.16)$$

in cui:

$$\vec{k} \cdot \hat{z} = |\vec{k}| \cos \theta = \sqrt{E^2 - m_\mu^2} \cos \theta \quad (3.6.17)$$

allora continuando i conti:

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{8 e^4}{(2E)^4} \left[\left(E^2 - E \sqrt{E^2 - m_\mu^2} \cos \theta \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(E^2 + E \sqrt{E^2 - m_\mu^2} \cos \theta \right)^2 + 2 E^2 m_\mu^2 \right] \quad (3.6.18)$$

$$= \frac{e^4}{2} \left[\left(1 - \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \cos \theta \right)^2 + \left(1 + \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \cos \theta \right)^2 + 2 \frac{m_\mu^2}{E^2} \right] \quad (3.6.19)$$

$$= e^4 \left[1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right]. \quad (3.6.20)$$

Calcoliamo anche la sezione d'urto:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{|\vec{p}_3| E_{cm}}{E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{|\mathcal{M}|^2}{64 \pi^2 E_{cm}^2} \quad (3.6.21)$$

osserviamo che:

$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right| = 2 \quad (3.6.22)$$

dunque:

$$\frac{|\vec{p}_3| E_{cm}}{E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} = \frac{\sqrt{E^2 - m_\mu^2} \cdot 2E}{2 \cdot E^2} = \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \quad (3.6.23)$$

per semplicità possiamo porre $a = m_\mu^2/E^2$, $x = \cos \theta$ e calcolare la sezione d'urto totale:

$$\sigma_{cm} = \frac{e^4}{64 \pi^2 E_{cm}^2} \int d\Omega \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right] \quad (3.6.24)$$

$$= \frac{e^4}{32 \pi E_{cm}^2} \int_{-1}^{+1} dx \sqrt{1-a} \left[1 + a + (1-a)x^2 \right] \quad (3.6.25)$$

$$= \frac{e^4}{32 \pi E_{cm}^2} \sqrt{1-a} \left[2(1+a) + \frac{2}{3}(1-a) \right] \quad (3.6.26)$$

$$= \frac{e^4}{12 \pi E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) \quad (3.6.27)$$

$$= \frac{4\pi \alpha^2}{3 E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2} \right). \quad (3.6.28)$$

Se avessimo trascurato tutte le masse avremmo ottenuto:

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{2e^4}{s^2} (t^2 + u^2) \quad (3.6.29)$$

tramite la simmetria di crossing possiamo studiare:

$$e^- + \mu^- \longrightarrow e^- + \mu^-$$

da cui otteniamo:

$$|\mathcal{M}_t|^2 = \frac{2e^4}{t^2} (s^2 + u^2). \quad (3.6.30)$$

Se avessimo studiato:

$$e^- + e^- \longrightarrow e^- + e^-$$

allora avremmo avuto anche il canale u , oltre il canale t , questo perché le particelle finali sono identiche, per cui possiamo scambiarne gli impulsi e dobbiamo studiare:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spin} |M_t + M_u|^2 \quad (3.6.31)$$

$$= |\mathcal{M}_t|^2 + |\mathcal{M}_u|^2 + \frac{1}{4} \sum_{spin} 2 \operatorname{Re}\{M_t M_u^\dagger\}. \quad (3.6.32)$$

3.6.2 Esempio del Bhabha scattering

I riferimenti sono p. 355 es. 59.2 dello Srednicki [7] e p. 192 es. 5.2 del Peskin e Schroeder [4].

Consideriamo la QED con la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu \quad (3.6.33)$$

e studiamo il processo:

$$e^- + e^+ \longrightarrow e^- + e^+$$

in cui abbiamo sia il canale s (di annichilazione) che il canale t (di scambio), raffigurati in figura 3.2.

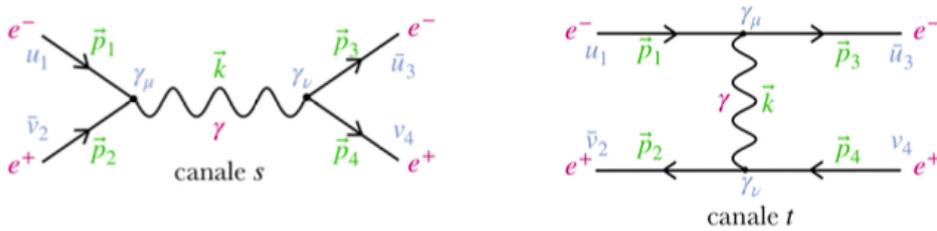


Figura 3.2: Raffigurazione canale s e t processo $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$.

A noi interessa riordinare gli elementi che troviamo nella matrice S come $\psi \bar{\psi}$, formando il propagatore $S_F(x - y) = \overline{\psi(x) \bar{\psi}(y)}$, ma per fare questo dobbiamo ricordarci:

$$\{\psi, \psi\} = \{\bar{\psi}, \bar{\psi}\} = 0 \quad (3.6.34)$$

$$\{\psi(t, \vec{x}), \bar{\psi}(t, \vec{y})\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.6.35)$$

Contraendo troviamo un segno relativo e l'elemento di matrice S ridotta complessivo è dato da $M = M_s - M_t$:

$$M_s = \left[\bar{v}(p_2) (-ie \gamma_\mu) u(p_1) \right] \frac{i \eta^{\mu\nu}}{k^2} \left[\bar{u}(p_3) (-ie \gamma_\nu) v(p_4) \right] \quad (3.6.36)$$

$$= \frac{-ie^2}{s} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) \quad (3.6.37)$$

$$M_t = \left[\bar{u}(p_3) (-ie \gamma_\mu) u(p_1) \right] \frac{i \eta^{\mu\nu}}{k^2} \left[\bar{v}(p_2) (-ie \gamma_\nu) v(p_4) \right] \quad (3.6.38)$$

$$= \frac{-ie^2}{t} (\bar{u}_3 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{v}_2 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4). \quad (3.6.39)$$

Mediamo sulle polarizzazioni iniziali e sommiamo su quelle finali:

$$|\mathcal{M}_s|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spin} |M_s|^2 \quad (3.6.40)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spin} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) (\bar{v}_4 \cdot \gamma^\nu \cdot u_3) (\bar{u}_1 \cdot \gamma_\nu \cdot v_2) \quad (3.6.41)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spin} \left[(\bar{v}_2)_\alpha (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (u_1)_\beta \cdot (\bar{u}_1)_\gamma (\gamma_\nu)_{\gamma\delta} (v_2)_\delta \right] \times \\ \times \left[(\bar{u}_3)_\rho (\gamma^\mu)_{\rho\sigma} (v_4)_\sigma \cdot (\bar{v}_4)_\tau (\gamma^\nu)_{\tau\epsilon} (u_3)_\epsilon \right] \quad (3.6.42)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spin} \left[(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\not{p}_1 + m_e)_{\beta\gamma} (\gamma_\nu)_{\gamma\delta} (\not{p}_2 - m_e)_{\delta\alpha} \right] \times \\ \times \left[(\gamma^\mu)_{\rho\sigma} (\not{p}_4 - m_e)_{\sigma\tau} (\gamma^\nu)_{\tau\epsilon} (\not{p}_3 + m_e)_{\epsilon\rho} \right] \quad (3.6.43)$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}_2 - m_e) \right\} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{p}_3 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_4 - m_e) \right\} \quad (3.6.44)$$

alle alte energie $m_e \approx 0$

$$\approx \frac{e^4}{4s^2} p_1^\alpha p_2^\beta p_{3,\rho} p_{4,\sigma} \text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \} \text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \} \quad (3.6.45)$$

$$= \frac{4e^2}{s^2} p_1^\alpha p_2^\beta p_{3,\rho} p_{4,\sigma} \left[\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \right] \times \\ \times \left[\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \right] \quad (3.6.46)$$

$$= \frac{8e^4}{s^2} \left[(p_1 \cdot p_3) (p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) \right] \quad (3.6.47)$$

$$= \frac{2e^4}{s^2} (t^2 + u^2). \quad (3.6.48)$$

Possiamo ricavare il canale t usando la simmetria di crossing:

$$|\mathcal{M}_t|^2 = \frac{2e^4}{t^2} (s^2 + u^2). \quad (3.6.49)$$

Studiamo ora il termine misto:

$$|\mathcal{M}_{st}| = \frac{1}{4} \sum_{spin} \text{Re} \left\{ M_s M_t^\dagger \right\} \quad (3.6.50)$$

$$= \frac{e^4}{4st} \sum_{spin} (\bar{v}_2 \cdot \gamma_\mu \cdot u_1) (\bar{u}_3 \cdot \gamma^\mu \cdot v_4) (\bar{v}_4 \cdot \gamma^\nu \cdot v_2) (\bar{u}_1 \cdot \gamma_\nu \cdot u_3) \quad (3.6.51)$$

$$= \frac{e^4}{4st} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}_3 + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_4 - m_e) \gamma^\nu (\not{p}_2 - m_e) \right\} \quad (3.6.52)$$

alle alte energie $m_e \approx 0$

$$= \frac{e^4}{4st} p_{1,\alpha} p_{3,\beta} p_{4,\rho} p_{2,\sigma} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma_\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \right\} \quad (3.6.53)$$

dobbiamo a questo punto ricordarci delle relazioni per le matrici γ , che puoi non solo vedere nell'Appendice B, ma soprattutto nelle note del corso di *Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi*. Vediamo infatti:

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu = 4 \eta^{\alpha\beta} \quad , \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2 \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \quad (3.6.54)$$

per cui abbiamo:

$$\text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \gamma^\alpha (\gamma_\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu) \gamma^\sigma \right\} = -2 \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \gamma^\alpha (\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\beta) \gamma^\sigma \right\} \quad (3.6.55)$$

$$= -8 \eta^{\alpha\rho} \text{Tr} \left\{ \gamma^\beta \gamma^\sigma \right\} \quad (3.6.56)$$

$$= -32 \eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\sigma}. \quad (3.6.57)$$

Tornando ai nostri conti:

$$|\mathcal{M}_{st}| = -\frac{8e^4}{st} (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) \quad (3.6.58)$$

$$= -\frac{2e^4}{st} u^2. \quad (3.6.59)$$

Complessivamente abbiamo:

$$|\mathcal{M}_{tot}|^2 = |\mathcal{M}_s|^2 + |\mathcal{M}_t|^2 - 2|\mathcal{M}_{st}|^2 \quad (3.6.60)$$

$$= 2e^4 \left[\frac{t^2}{s^2} + \frac{s^2}{t^2} + u^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right)^2 \right]. \quad (3.6.61)$$

Se avessimo studiato il processo:

$$e^- + e^- \longrightarrow e^- + e^-$$

avremmo avuto due diagrammi di scambio (canale t e canale u) in quanto le particelle degli stati finali sono identiche e quindi possiamo scambiarne gli impulsi.

3.6.3 Esempio per M invariante di gauge

Studiamo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial A)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad (3.6.62)$$

in cui il termine $-\frac{1}{2\xi}(\partial A)^2$ rende la lagrangiana non invariante e fissa il gauge, la scelta di gauge dipende dal valore di ξ , tuttavia si può dimostrare che le ampiezze non dipendono dalla scelta di gauge (ovvero non dipendono da ξ). Studiamo un processo di QED del tipo:

$$e^- + e^+ \longrightarrow \mu^- + \mu^+$$

raffigurato in figura 3.3 e per cui ricordiamo:

$$(\not{p} - m) u(p) = 0 \quad , \quad (\not{p} + m) v(p) = 0. \quad (3.6.63)$$

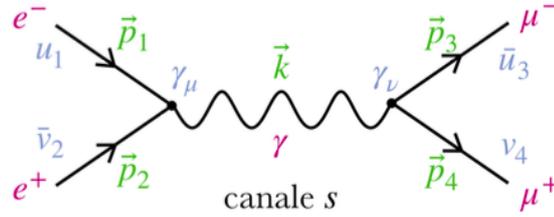


Figura 3.3: Raffigurazione canale s processo $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$.

Calcoliamo:

$$M = i e^2 (\bar{v}_1 \gamma^\mu u_2) (\bar{u}_3 \gamma^\nu v_4) \frac{1}{p^2} \left(-\eta_{\mu\nu} - (\xi - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \quad (3.6.64)$$

sostituiamo $p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$

$$= -\frac{i e^2}{s} \left\{ (\bar{v}_1 \gamma^\mu u_2) (\bar{u}_3 \gamma_\mu v_4) + \frac{\xi - 1}{s} [\bar{v}_1 (\not{p}_1 + \not{p}_2) u_2] [\bar{u}_3 (\not{p}_3 + \not{p}_4) v_4] \right\} \quad (3.6.65)$$

$$= -\frac{i e^2}{s} \left\{ (\bar{v}_1 \gamma^\mu u_2) (\bar{u}_3 \gamma_\mu v_4) + \frac{\xi - 1}{s} [\bar{v}_1 (\not{p}_1 + m_e) u_2 + \bar{v}_1 (\not{p}_2 - m_e) u_2] \times \right. \\ \left. \times [\bar{u}_3 (\not{p}_3 - m_\mu) v_4 + \bar{u}_3 (\not{p}_4 + m_\mu) v_4] \right\} \quad (3.6.66)$$

$$= -\frac{i e^2}{s} (\bar{v}_1 \gamma^\mu u_2) (\bar{u}_3 \gamma_\mu v_4). \quad (3.6.67)$$

3.6.4 Esempio annichilazione di fermioni in fotoni

I riferimenti sono p. 351-368 dello Srednicki [7].

Studiamo ora il processo:

$$e^+ + e^- \longrightarrow 2\gamma$$

che si ottiene in modo simile al urto di Compton ruotando il diagramma di Feynman. Questo processo è rappresentato in figura 3.4 e in cui abbiamo sia il canale t che u (in cui scambiamo gli impulsi finali rispetto il canale t):

$$M_t = \bar{v}_2 (-ie \gamma_\nu \epsilon_4^\nu) \frac{i(\not{q} + m_e)}{q^2 - m_e^2} (-ie \gamma_\mu \epsilon_3^\mu) u_1 \quad , \quad q = p_1 - k_3 = p_2 - k_4 \quad (3.6.68)$$

$$M_u = \bar{v}_2 (-ie \gamma_\mu \epsilon_3^\mu) \frac{i(\not{q} + m_e)}{q^2 - m_e^2} (-ie \gamma_\nu \epsilon_4^\nu) u_1 \quad , \quad q = p_1 - k_4 = p_2 - k_3. \quad (3.6.69)$$

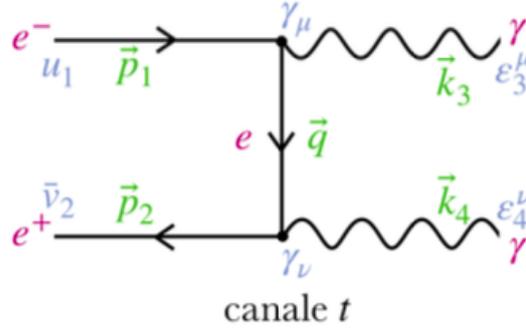


Figura 3.4: Raffigurazione canale t processo $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$.

I due diagrammi hanno lo stesso segno, dunque:

$$M = M_t + M_u \quad (3.6.70)$$

$$= -ie^2 \bar{v}_2 \left[\gamma_\nu \frac{(\not{p}_1 - \not{k}_3 + m_e)}{(p_1 - k_3)^2 - m_e^2} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{(\not{p}_1 - \not{k}_4 + m_e)}{(p_1 - k_4)^2 - m_e^2} \gamma_\nu \right] u_1 \epsilon_3^\mu \epsilon_4^\nu \quad (3.6.71)$$

possiamo definire:

$$M_{\mu\nu} = -ie^2 \bar{v}_2 \left[\gamma_\nu \frac{(\not{p}_1 - \not{k}_3 + m_e)}{(p_1 - k_3)^2 - m_e^2} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{(\not{p}_1 - \not{k}_4 + m_e)}{(p_1 - k_4)^2 - m_e^2} \gamma_\nu \right] u_1. \quad (3.6.72)$$

Possiamo considerare una trasformazione di gauge del tipo:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad (3.6.73)$$

ovvero per cui:

$$\tilde{A}_\mu(k) \longrightarrow \tilde{A}_\mu(k) + k_\mu \tilde{\alpha}(k). \quad (3.6.74)$$

Dobbiamo ricordarci l'espressione del campo vettoriale (3.2.12), in cui ϵ porta la componente vettoriale che trasforma:

$$\epsilon_\mu(k, \lambda) \longrightarrow \epsilon_\mu(k, \lambda) + k_\mu \tilde{\alpha}(k). \quad (3.6.75)$$

Siccome M dev'essere invariante dobbiamo avere:

$$\delta M = M_{\mu\nu} (k_3^\mu \epsilon_4^\nu + \epsilon_3^\mu k_4^\nu + k_3^\mu k_4^\nu) = 0. \quad (3.6.76)$$

Verifichiamo ora che $M_{\mu\nu} k_3^\mu = M_{\mu\nu} k_4^\nu = 0$ (l'identità di Ward). Abbiamo che:

$$M_{\mu\nu} k_3^\mu \propto \bar{v}_2 \left[\gamma_\nu \frac{(\not{p}_1 - \not{k}_3 + m_3)}{(p_1 - k_3)^2 - m_e^2} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{(\not{p}_1 - \not{k}_4 + m_3)}{(p_1 - k_4)^2 - m_e^2} \gamma_\nu \right] u_1 k_3^\mu \quad (3.6.77)$$

contraiamo e sostituiamo $k_4 = p_1 + p_2 - k_3$ nel secondo termine

$$= \bar{v}_2 \left[\gamma_\nu \frac{(\not{p}_1 - \not{k}_3 + m_3)}{(p_1 - k_3)^2 - m_e^2} \not{k}_3 + \not{k}_3 \frac{(\not{k}_3 - \not{p}_2 + m_3)}{(p_2 - k_3)^2 - m_e^2} \gamma_\nu \right] u_1 \quad (3.6.78)$$

possiamo utilizzare le relazioni:

$$\not{A} \cdot \not{B} = -\not{B} \cdot \not{A} + 2A \cdot B \quad (3.6.79)$$

$$\not{C} \cdot \not{C} = C \cdot C \quad (3.6.80)$$

insieme al fatto che, essendo un fotone:

$$(k_3)^2 = 0. \quad (3.6.81)$$

Otteniamo per questo:

$$= \bar{v}_2 \left[\frac{\gamma_\nu}{(p_1 - k_3)^2 - m_e^2} \left[-\not{k}_3 (\not{p}_1 - m_e) + 2(k_3 \cdot p_1) \right] + \left[(\not{p}_2 + m_e) \not{k}_3 - 2(k_3 \cdot p_2) \right] \frac{\gamma_\nu}{(p_2 - k_3)^2 - m_e^2} \right] u_1 \quad (3.6.82)$$

$$= 2 \bar{v}_2 \gamma_\nu u_1 \left[\frac{(k_3 \cdot p_1)}{(p_1 - k_3)^2 - m_e^2} - \frac{(k_3 \cdot p_2)}{(p_2 - k_3)^2 - m_e^2} \right] \quad (3.6.83)$$

$$= 0 \quad (3.6.84)$$

in cui abbiamo usato il fatto:

$$(k_3 - p)^2 = k_3^2 + p^2 - 2(k_3 \cdot p) \quad (3.6.85)$$

$$= m_e^2 - 2(k_3 \cdot p) \quad (3.6.86)$$

con $p = \{p_1, p_2\}$.

Possiamo dimostrare che si annulla anche usando le identità di Ward:

$$t^{\mu\nu} k_\mu = 0 \quad (3.6.87)$$

che in generale è:

$$t^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_m} k_{\mu_i} = 0 \quad (3.6.88)$$

e dunque:

$$M = t^{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_m} \varepsilon_{\mu_1}^*(k_1) \dots \varepsilon_{\mu_n}^*(k_n) \varepsilon_{\nu_1}^*(p_1) \dots \varepsilon_{\nu_m}^*(p_m) \quad (3.6.89)$$

è invariante.

Nel nostro caso abbiamo:

$$M = i e^2 t^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^{*(\lambda_1)}(k_1) \varepsilon_\nu^{*(\lambda_2)}(k_2) \quad (3.6.90)$$

e dunque:

$$|M|^2 = e^4 (t^T)^{\mu\nu} t^{\rho\sigma} \varepsilon_\mu^{(\lambda_1)}(k_1) \varepsilon_\nu^{(\lambda_2)}(k_2) \varepsilon_\rho^{*(\lambda_1)}(k_1) \varepsilon_\sigma^{*(\lambda_2)}(k_2) \quad (3.6.91)$$

dobbiamo sommare sulle polarizzazioni finali (solo quelle trasversali), e tuttavia abbiamo visto che vale:

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon_\mu^{*\lambda}(k) \varepsilon_\nu^\lambda(k) = -\eta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu \bar{k}_\nu + \bar{k}_\mu k_\nu}{k \cdot \bar{k}} \quad (3.6.92)$$

se avessimo sommato su tutte le polarizzazioni (compresa quella scalare e longitudinale), allora sarebbe rimasta solo la metrica.

Sommando avremmo:

$$|M|^2 = e^4 (t^T)^{\mu\nu} t^{\rho\sigma} \left(-\eta_{\mu\rho} + \frac{k_\mu \bar{k}_\rho + \bar{k}_\mu k_\rho}{k \cdot \bar{k}} \right) \left(-\eta_{\sigma\nu} + \frac{k_\sigma \bar{k}_\nu + \bar{k}_\sigma k_\nu}{k \cdot \bar{k}} \right) \quad (3.6.93)$$

tuttavia osserviamo che:

$$t^{\rho\sigma} k_\rho = (t^\dagger)^{\rho\sigma} k_\rho = 0 \quad (3.6.94)$$

quindi il secondo termine in parentesi si annulla, ma questo equivale ad avere:

$$|M|^2 = e^4 (t^T)^{\mu\nu} t^{\rho\sigma} \eta_{\mu\rho} \eta_{\sigma\nu} \quad (3.6.95)$$

quindi è come se avessimo sommato su tutte le polarizzazioni anziché solo su quelle finali.

3.6.5 Esempio sul segno di un loop di fermioni

Guardando la figura 3.5 scriviamo:

$$\begin{aligned} \langle 0|T[A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)]|0\rangle &= (-ie)^2 \int d^4x d^4y \langle 0|A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \bar{\psi}(x) \times \\ &\quad \times \not{A}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \not{A}(y) \psi(y)|0\rangle \end{aligned} \quad (3.6.96)$$

$$= -\Delta_{\mu\rho} \Delta_{\nu\sigma} \Delta_1 \Delta_2. \quad (3.6.97)$$

In generale troviamo che un loop con n fotoni esterni che abbia solo fermioni interni ha segno negativo:

$$\begin{aligned} \langle 0|T[A_{\mu_2}(x_1) \dots A_{\mu_1}(x_n)]|0\rangle &= (-ie)^2 \int d^4y_1 \dots d^4y_n \times \\ &\quad \times \langle 0|A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) \bar{\psi}(y_1) \not{A}(y_1) \psi(y_1) \bar{\psi}(y_2) \times \\ &\quad \times \not{A}(y_2) \psi(y_2) \dots \bar{\psi}(y_n) \not{A}(y_n) \psi(y_n)|0\rangle \end{aligned} \quad (3.6.98)$$



Figura 3.5: Raffigurazione loop di fermioni.

3.7 Rappresentazione fondamentale, anti-fondamentale ed aggiunta

Ora facciamo un passo indietro, torniamo all'astratto e riparlamo di teoria dei gruppi.

I riferimenti sono p. 407-418 dello Srednicki [7].

Ogni elemento del gruppo G può essere in funzione dei generatori del gruppo T^a (rappresentazione fondamentale), che sono matrici hermitiane con traccia nulla e vengono normalizzati imponendo:

$$\text{Tr}\{T^a T^b\} = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (3.7.1)$$

l'insieme di questi generatori costituisce la *rappresentazione* R del gruppo, inoltre, i generatori soddisfano la stessa algebra del gruppo.

Per esempio, in un gruppo $SU(N)$ abbiamo $N^2 - 1$ generatori con $\dim = N \times N$ che obbediscono a:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (3.7.2)$$

in cui $f^{abc} \in \mathbb{R}$ è detta *costante di struttura* ed è completamente anti-simmetrica.

La rappresentazione (R) del gruppo è un insieme di matrici hermitiane a traccia nulla T_R^a di dimensioni $D_R \times D_R$, in cui D è la dimensione della rappresentazione, che soddisfano l'algebra del gruppo:

$$\left[T_R^a, T_R^b \right] = i f^{abc} T_R^c. \quad (3.7.3)$$

Se esiste una trasformazione unitaria:

$$T_R^a \longrightarrow U^{-1} T_R^a U \quad (3.7.4)$$

tale per cui:

$$-(T_R^a)^* = T_R^a \quad (3.7.5)$$

allora la rappresentazione è *reale*. Se una trasformazione di questo tipo non esiste ma esiste una matrice unitaria V tale per cui:

$$-(T_R^a)^* = V^{-1} T_R^a V \quad \forall a \quad (3.7.6)$$

allora la rappresentazione è *pseudo-reale*. Altrimenti la rappresentazione è complessa ed esiste una rappresentazione coniugata \bar{R} con elementi:

$$T_R^a = -(T_{\bar{R}}^a)^*. \quad (3.7.7)$$

Un esempio particolare di rappresentazione è la *rappresentazione aggiunta* per cui ho:

$$(T_A^a)^{bc} = -i f^{abc} \quad (3.7.8)$$

siccome la costante di struttura è reale vale:

$$-(T_A^a)^* = T_A^a \quad \forall a \quad (3.7.9)$$

ovvero è una rappresentazione reale.

Un operatore unitario lo possiamo scrivere come:

$$U = e^{i\omega^a(x) T^a} = \mathbb{1} + i\omega^a(x) T^a \quad (3.7.10)$$

quindi la condizione $U^\dagger U = \mathbb{1}$ implica che $T^a = (T^a)^\dagger$, cioè i generatori T devono essere matrici hermitiane, in più i generatori soddisfano:

$$\left[T^a, T^b \right] = i f^{abc} T^c \quad (3.7.11)$$

in cui f sono le costanti di struttura. Per esempio, per $SU(2)$ abbiamo:

$$T^a = \frac{1}{2} \sigma^a \quad , \quad f^{abc} = \varepsilon^{abc} \quad (3.7.12)$$

con ε il simbolo di Levi-Civita. Per $SU(3)$ abbiamo 8 generatori:

$$T^a = \frac{1}{2} \lambda^a \quad (3.7.13)$$

in cui λ sono le **matrici di Gell-Mann**.¹

Consideriamo la rotazione di un vettore:

$$v'^a = U_b^a v^b \quad (3.7.14)$$

e per cui abbiamo:

$$\bar{v}'^a v'^a = \bar{v}^a U^\dagger U v^a \quad (3.7.15)$$

pertanto per mantenere la lunghezza invariante dobbiamo richiedere:

$$U^\dagger U = \mathbb{1} \quad (3.7.16)$$

ossia, U dev'essere unitario.

Ora, supponiamo di avere tanti fermioni tutti con la stessa massa e scriviamo:

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^n \bar{\psi}^a (i\cancel{\partial} - m) \psi^a \quad (3.7.17)$$

a cui applichiamo una trasformazione unitaria locale $U(x)$:

$$\mathcal{L}_U = \sum_{a=1}^n \bar{\psi}^a U^\dagger (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) U \psi^a \quad (3.7.18)$$

pertanto la variazione è:

$$\delta\mathcal{L} = i\gamma^\mu \bar{\psi}^a U^\dagger (\partial_\mu U) \psi^a. \quad (3.7.19)$$

Per fare in modo che la lagrangiana sia invariante, introduciamo una derivata covariante tale per cui:

$$D \longrightarrow UDU^\dagger \quad (3.7.20)$$

e per farlo definiamo:

$$D_\mu = \partial_\mu + i A_\mu \quad (3.7.21)$$

e richiediamo:

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = -iU (\partial_\mu U^\dagger) + UA_\mu U^\dagger. \quad (3.7.22)$$

¹Per dettagli puoi vedere la pagina [Wikipedia](#).

Infatti abbiamo:

$$D_\mu \longrightarrow U D_\mu U^\dagger = U (\partial_\mu + i A_\mu) U^\dagger \quad (3.7.23)$$

$$= \partial_\mu + U \partial_\mu U^\dagger + i U A_\mu U^\dagger \quad (3.7.24)$$

$$= \partial_\mu + i A'_\mu. \quad (3.7.25)$$

In generale possiamo ridefinire:

$$A_\mu \longrightarrow q A_\mu \quad (3.7.26)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + i q A_\mu \quad (3.7.27)$$

così che teniamo in considerazione anche la carica dei campi.

Studiamo la trasformazione infinitesima

$$U = e^{i\omega^a(x) T^a} \approx \mathbb{1} + i\omega^a(x) T^a \quad \text{con } a \in \{1, \dots, \dim G\} \quad (3.7.28)$$

in cui G è il gruppo. Abbiamo:

$$A'_\mu = -i U \partial_\mu U^\dagger + U A_\mu U^\dagger \quad (3.7.29)$$

$$\approx -i [\mathbb{1} + i\omega(x)] \partial_\mu [\mathbb{1} - i\omega(x)] + [\mathbb{1} + i\omega(x)] A_\mu [\mathbb{1} - i\omega(x)] \quad (3.7.30)$$

$$= -\partial_\mu \omega(x) + A_\mu + i\omega(x) A_\mu - i A_\mu \omega(x) + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (3.7.31)$$

$$= A_\mu - \partial_\mu \omega(x) + i[\omega(x), A_\mu] \quad (3.7.32)$$

riscriviamo la variazione di A utilizzando come base i generatori T :

$$\delta A_\mu = A'_\mu - A_\mu \quad (3.7.33)$$

$$= -\partial_\mu \omega^a T^a + i\omega^a A_\mu^b [T^a, T^b] \quad (3.7.34)$$

$$= -\partial_\mu \omega^a T^a + i\omega^a A_\mu^b (i f^{abc} T^c) \quad (3.7.35)$$

$$= -\partial_\mu \omega^a T^a - \omega^b A_\mu^c f^{bca} T^a \quad (3.7.36)$$

$$= -\left(\partial_\mu \omega^a + \omega^b A_\mu^c f^{abc} \right) T^a \quad (3.7.37)$$

$$= \delta A_\mu^a T^a \quad (3.7.38)$$

in cui nell'ultimo passaggio abbiamo cambiato i nomi agli indici ed abbiamo sfruttato il fatto che f^{abc} è completamente anti-simmetrica.

Ricordiamo che in rappresentazione aggiunta abbiamo:

$$(T_A^a)^{bc} = -i f^{abc} \quad (3.7.39)$$

dunque se scriviamo A^μ nella rappresentazione aggiunta abbiamo:

$$\delta A_\mu^a = -\left(\partial_\mu \omega^a + \omega^b A_\mu^c f^{abc} \right) \quad (3.7.40)$$

$$= -\left(\partial_\mu \omega^a + i A_\mu^c (T_A^c)^{ab} \right) \omega^b \quad (3.7.41)$$

$$= -(D_\mu^A)^{ab} \omega^b \quad (3.7.42)$$

se A è nella rappresentazione aggiunta allora lo è anche la derivata covariante (l'apice A sta per rappresentazione aggiunta) che possiamo scrivere anche come:

$$D_\mu = \partial_\mu - i[\cdot, A_\mu]. \quad (3.7.43)$$

Riassumendo. Se utilizziamo una rappresentazione fondamentale $n \Rightarrow \psi \rightarrow U\psi$ mentre per la rappresentazione anti-fondamentale abbiamo $\bar{n} \Rightarrow \psi \rightarrow U^*\psi$.

La rappresentazione aggiunta di $U(n)$ è $n \times n$, in questo modo otteniamo una rappresentazione reale tale per cui $\psi \rightarrow U\psi U^\dagger$, quindi A trasforma nella rappresentazione aggiunta di $SU(n)$ e la derivata covariante dipende dalla rappresentazione di A .

Per un campo ψ che trasforma nella rappresentazione fondamentale abbiamo:

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu \quad (3.7.44)$$

mentre se ϕ appartiene alla rappresentazione aggiunta abbiamo:

$$D_\mu\phi = \partial\phi - i[\phi, A_\mu]. \quad (3.7.45)$$

I campi di gauge sono sempre in rappresentazione aggiunta.

3.8 Teoria di Yang-Mills (generalizzazione della teoria di Maxwell)

La teoria di Maxwell (QED) descrive una teoria abeliana $U(1)$, ora, vogliamo generalizzarla alle teorie non-abeliane $SU(N)$, il che ci servirà per trattare l'interazione forte descritta da $SU(3)$ (8 generatori corrispondenti agli 8 bosoni vettori dell'interazione forte, ovvero i gluoni) e per trattare l'interazione elettrodebole descritta da $SU(2) \times U(1)$ (3+1 generatori corrispondenti ai 3 bosoni vettori dell'interazione debole e il fotone di QED).

Definiamo la derivata covariante come:

$$(D_\mu)_{ij} = \partial_\mu\delta_{ij} + iA_\mu^a T_{ij}^a \quad (3.8.1)$$

in cui T^a sono i generatori del gruppo, che in forma matriciale è:

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu. \quad (3.8.2)$$

Studiamo la parte di dinamica legata al vettore A , osserviamo che per ottenere F covariante dobbiamo definirlo utilizzando il commutatore delle derivate covarianti:

$$[D_\mu, D_\nu]f = [\partial_\mu + iA_\mu, \partial_\nu + iA_\nu]f \quad (3.8.3)$$

$$= (\partial_\mu + iA_\mu)(\partial_\nu + iA_\nu)f - (\partial_\nu + iA_\nu)(\partial_\mu + iA_\mu)f \quad (3.8.4)$$

$$= i(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu])f \quad (3.8.5)$$

$$= iF_{\mu\nu}f. \quad (3.8.6)$$

Dall'identità di Jacobi:

$$[D_\mu, F_{\rho\nu}] + [D_\rho, F_{\nu\mu}] + [D_\nu, F_{\mu\rho}] = 0 \quad (3.8.7)$$

possiamo dimostrare che vale l'identità di Bianchi:

$$D_\mu F_{\rho\nu} + D_\rho F_{\nu\mu} + D_\nu F_{\mu\rho} = 0 \quad (3.8.8)$$

che possiamo generalizzare come:

$$\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} D_\mu F_{\rho\sigma} = 0. \quad (3.8.9)$$

Il tensore di curvatura di Maxwell generalizzato è:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \quad (3.8.10)$$

ricordandoci che nella teoria di Maxwell A_μ era un numero e di conseguenza il commutatore è nullo, ma qui A_μ è una matrice, quindi il suo commutatore non è necessariamente nullo.

Inoltre la derivata covariante deve trasformare come:

$$D_\mu \longrightarrow U D_\mu U^\dagger \quad (3.8.11)$$

e siccome per definizione abbiamo:

$$F_{\mu\nu} = -i[D_\mu, D_\nu] \quad (3.8.12)$$

ne ricaviamo:

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow U F_{\mu\nu} U^\dagger \quad (3.8.13)$$

cioè che F non è invariante, ma trasforma in maniera covariante come una matrice $n \times n$ (rappresentazione aggiunta).

Quindi perché la lagrangiana sia invariante la dobbiamo scrivere come:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g^2} \text{Tr}\{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\} \quad (3.8.14)$$

aggiungendo la traccia imponiamo l'invarianza di Gauge perché vale:

$$\text{Tr}\{U F F U^\dagger\} = \text{Tr}\{F F U^\dagger U\} \quad (3.8.15)$$

inoltre, la traccia ci restituisce un oggetto di second'ordine nelle derivate (anche il determinante mantiene l'invarianza di Gauge ma non l'ordine delle derivate).

Ricordiamo che:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) \quad (3.8.16)$$

e studiamo la variazione della lagrangiana:

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{g^2} \text{Tr}\{F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}\} \quad (3.8.17)$$

$$= -\frac{1}{g^2} \text{Tr}\left\{F_{\mu\nu} \left[\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu + i\left(\delta A^\mu A^\nu - \delta A^\nu A^\mu + A^\mu \delta A^\nu - A^\nu \delta A^\mu\right)\right]\right\} \quad (3.8.18)$$

$$= -\frac{2}{g^2} \text{Tr}\left\{F_{\mu\nu} \left[\partial^\mu \delta A^\nu - i\delta A^\nu A^\mu + iA^\mu \delta A^\nu\right]\right\} \quad (3.8.19)$$

integriamo per parti il primo termine ed utilizziamo la ciclicità della traccia sul secondo

$$= -\frac{2}{g^2} \text{Tr}\left\{\left(-\partial^\mu F_{\mu\nu} - iA^\mu F_{\mu\nu} + iF_{\mu\nu} A^\mu\right) \delta A^\nu\right\} \quad (3.8.20)$$

pertanto l'equazione del moto è:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - i[F^{\mu\nu}, A_\mu] = 0 \quad (3.8.21)$$

che possiamo riscrivere utilizzando la derivata covariante in rappresentazione aggiunta come:

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (3.8.22)$$

Riscriviamo il tensore F nella base dei generatori del gruppo:

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a \quad (3.8.23)$$

$$= \partial_\mu A_\nu^a T^a - \partial_\nu A_\mu^a T^a + i[A_\mu^a T^a, A_\nu^b T^b] \quad (3.8.24)$$

$$= \partial_\mu A_\nu^a T^a - \partial_\nu A_\mu^a T^a - A_\mu^a A_\nu^b f^{abc} T^c \quad (3.8.25)$$

ovvero:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - A_\mu^a A_\nu^b f^{abc} \quad (3.8.26)$$

ed f è anti-simmetrica. La lagrangiana la possiamo scrivere:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g^2} \text{Tr}\{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\} \quad (3.8.27)$$

$$= -\frac{1}{2g^2} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^b \text{Tr}\{T^a\}T^b \quad (3.8.28)$$

$$= -\frac{1}{4g^2} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \quad (3.8.29)$$

$$= -\frac{1}{4g^2} \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - A_\mu^b A_\nu^c f^{abc}\right) \left(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - A_b^\mu A_c^\nu f_{abc}\right) \quad (3.8.30)$$

qui ci sono dei termini di ordine superiore a 2, che definiscono delle interazioni del campo, qui si tratta di interazioni del campo con se stesso.

Nel campo di Maxwell ($f = 0$) la costante g è irrilevante perché può essere riassorbita ridefinendo il campo come:

$$A \longrightarrow gA \quad (3.8.31)$$

questo non accade nella lagrangiana di Yang-Mills perché abbiamo anche termini di ordine 3 e 4, perciò ridefinendo (3.8.31) si ottiene:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g A_\mu^b A_\nu^c f^{abc} \right) \left(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g A_b^\mu A_c^\nu f_{abc} \right) \quad (3.8.32)$$

quindi g detta **costante di accoppiamento di Yang-Mills**, rappresenta l'intensità con un cui avviene l'interazione.

3.8.1 Osservazione sulla teoria di Yang-Mills

Riprendiamo l'esempio del campo spinoriale ad N componenti, in aggiunta al campo vettoriale, la lagrangiana completa è:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \bar{\Psi} (i\not{D} - m) \Psi \quad (3.8.33)$$

in cui ricordiamo (3.7.27), inoltre per avere invarianza locale il campo A deve trasformare come:

$$gA_\mu \longrightarrow gA'_\mu = -iU (\partial_\mu U^\dagger) + gUA_\mu U^\dagger. \quad (3.8.34)$$

Se riscriviamo esplicitando i generatori abbiamo (3.7.28) e:

$$gA'_\mu = gA_\mu - \partial_\mu \omega^a T^a + ig\omega^a [T^a, A_\mu] \quad (3.8.35)$$

$$= gA_\mu - D_\mu (\omega^a T^a) \quad (3.8.36)$$

$$= gA_\mu + iD_\mu U \quad (3.8.37)$$

dove abbiamo utilizzato la derivata covariante in rappresentazione aggiunta (3.7.43). Esplicitando la lagrangiana notiamo che il termine di interazione dato da:

$$\mathcal{L}_{int} = -g \bar{\Psi} (\gamma_\mu A^\mu) \Psi \quad (3.8.38)$$

come in Maxwell.

Se invece consideriamo un campo scalare complesso:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi)^\dagger + m^2 \phi \phi^\dagger \quad (3.8.39)$$

quando richiediamo l'invarianza di fase locale tramite la derivata covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu \quad (3.8.40)$$

otteniamo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (\partial_\mu \phi + iA_\mu \phi) (\partial_\mu \phi + iA^\mu \phi)^\dagger + m^2 \phi \phi^\dagger. \quad (3.8.41)$$

Dunque, abbiamo dei termini di interazioni di tipo derivativo, in cui un campo (A) interagisce con la derivata di un altro campo (ϕ).

Le interazioni derivative non sono rare, ma si trattano meglio usando i path integrals, che vedremo nel prossimo capitolo.

Capitolo 4

Funzioni di partizione

In questo capitolo vedremo la formulazione della QFT tramite gli integrali di cammino e delle funzioni di partizione, sarà utile pertanto rivedere le note del corso di [Meccanica Quantistica 2](#).

4.1 I path integral

I riferimenti sono p. 57-61 dello Srednicki [7] e p. 275-284 del Peskin e Schroeder [4].

Introduciamo gli integrali funzionali nell'ambito della Meccanica Quantistica non relativistica, per una particella che si muove in 1 dimensione.

L'hamiltoniana di una particella è:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (4.1.1)$$

e vogliamo studiare l'ampiezza di probabilità dall'istante finale (B) a quello iniziale (A) espressa da:

$$\mathcal{A}_{AB} = \langle q_b t_B | q_A t_A \rangle \quad (4.1.2)$$

$$= \langle q_b | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_B - t_A)} | q_A \rangle \quad (4.1.3)$$

in cui ci possiamo porre nelle unità naturali $c = \hbar = 1$. Possiamo dividere l'intervallo temporale in $N + 1$ sotto-intervalli:

$$U(t_A, t_B) = U(t_0, t_1) \dots U(t_N, t_{N+1}) \quad (4.1.4)$$

in cui poniamo $t_A = t_0$ e $t_B = t_{N+1}$, e tra ogni prodotto di operatori di evoluzione temporale inseriamo una relazione di completezza:

$$\int dq_n |q_n\rangle \langle q_n| = \mathbb{1} \quad (4.1.5)$$

in cui $q_A = q_0$ e $q_B = q_{N+1}$. Facendo ciò possiamo riscrivere:

$$\mathcal{A}_{AB} = \langle q_b t_B | q_A t_A \rangle \quad (4.1.6)$$

$$= \langle q_b | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_B - t_A)} | q_A \rangle \quad (4.1.7)$$

$$= \int dq_1 \dots dq_N \langle q_{N+1} | e^{-iH \delta t} | q_N \rangle \dots \langle q_1 | e^{-iH \delta t} | q_0 \rangle. \quad (4.1.8)$$

Riscriviamo l'esponenziale come:

$$e^{-iH \delta t} = \exp \left\{ -i \left(\frac{p^2}{2m} + V(q) \right) \delta t \right\} \quad (4.1.9)$$

anche se dovremmo utilizzare la *formula di Campbell-Baker-Hausdorf*, nel limite di δt piccolo i termini con i commutatori sono trascurabili e possiamo scrivere (4.1.9) tranquillamente. Utilizzando (4.1.9) nell'espressione dei braket dell'ampiezza di probabilità abbiamo:

$$\langle q_{n+1} | e^{-iH \delta t} | q_n \rangle = \langle q_{n+1} | \exp \left\{ -i \frac{p^2}{2m} \delta t \right\} e^{-iV(q) \delta t} | q_n \rangle \quad (4.1.10)$$

$$= \int dp_n \langle q_{n+1} | \exp \left\{ -i \frac{p^2}{2m} \delta t \right\} | p_n \rangle \langle p_n | e^{-iV(q) \delta t} | q_n \rangle \quad (4.1.11)$$

$$= \int dp_n \langle q_{n+1} | p_n \rangle \exp \left\{ -i \frac{p^2}{2m} \delta t \right\} \langle p_n | q_n \rangle e^{-iV(q) \delta t} \quad (4.1.12)$$

$$= \int dp_n \exp \left\{ -i \frac{p^2}{2m} \delta t \right\} e^{-iV(q) \delta t} \langle q_{n+1} | p_n \rangle \langle p_n | q_n \rangle \quad (4.1.13)$$

a questo punto ricordiamo che:

$$\langle q | p \rangle = \frac{e^{ipq}}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.1.14)$$

e continuando i nostri conti:

$$= \int dp_n e^{-iH(q_n, p_n) \delta t} \frac{1}{2\pi} e^{i p_n (q_{n+1} - q_n)} \quad (4.1.15)$$

$$= \int \frac{dp_n}{2\pi} \exp \{ i (p_n \dot{q}_n - H(q_n, p_n)) \delta t \} \quad (4.1.16)$$

in cui abbiamo utilizzato il fatto:

$$\frac{q_{n+1} - q_n}{\delta t} \longrightarrow \dot{q}_n \quad \text{per } \delta t \rightarrow 0. \quad (4.1.17)$$

Possiamo scrivere in termini del tutto generali l'**integrale funzionale**:

$$\mathcal{A}_{AB} = \langle q_B t_B | q_A t_A \rangle \quad (4.1.18)$$

$$= \int \mathcal{D}_q \int \mathcal{D}_p \exp \left\{ i \int_{t_A}^{t_B} dt \left(p\dot{q} - H(q, p) \right) \right\}. \quad (4.1.19)$$

La scrittura (4.1.19) volendo la possiamo riscrivere in modo da togliere l'integrale \mathcal{D}_p e per farlo dobbiamo completare il quadrato che compare nell'esponenziale, riscrivendo il tutto in termini della lagrangiana:

$$\int \mathcal{D}_p \exp \left\{ i \int_{t_A}^{t_B} dt \left(p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} - V(q) \right) \right\} \quad (4.1.20)$$

$$= \int \mathcal{D}_p \exp \left\{ i \int_{t_A}^{t_B} dt \left(-\frac{1}{2m} (p - m\dot{q})^2 + \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right) \right\} \quad (4.1.21)$$

$$= \text{cost} \cdot \exp \left\{ i \int_{t_A}^{t_B} dt \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right) \right\} \quad (4.1.22)$$

la costante la possiamo riassorbire nella definizione di \mathcal{D}_q e ci rimane:

$$\mathcal{A}_{AB} = \langle q_B t_B | q_A t_A \rangle \quad (4.1.23)$$

$$= \int \mathcal{D}_q \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_A}^{t_B} dt \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right) \right\} \quad (4.1.24)$$

$$= \int \mathcal{D}_q \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_A}^{t_B} dt \mathcal{L}(q, \dot{q}) \right\} \quad (4.1.25)$$

$$= \int \mathcal{D}_q e^{\frac{i}{\hbar} S}. \quad (4.1.26)$$

Se ora volessimo studiare il valore di aspettazione di un'osservabile $Q(t)$, con autovalori:

$$\hat{Q}(t) |q_n\rangle = q(t_n) |q_n\rangle \quad (4.1.27)$$

allora, facendo un ragionamento analogo a quello fatto fin'ora, abbiamo:

$$\langle q_B t_B | Q(t) | q_A t_A \rangle = \int \mathcal{D}_q q(t) e^{\frac{i}{\hbar} S}. \quad (4.1.28)$$

Per un prodotto temporalmente ordinato avremmo:

$$\langle q_B t_B | T[Q(t_1) \dots Q(t_n)] | q_A t_A \rangle = \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p q(t_1) \dots q(t_n) e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (4.1.29)$$

che sviluppiamo il prodotto temporalmente ordinato, inseriamo le identità in q e applichiamo l'operatore, ottenendo l'autovalore corrispondente.

Possiamo anche aggiungere all'hamiltoniana due termini aggiuntivi di sorgente:

$$H \longrightarrow H' = H - f(t) q(t) - g(t) p(t) \quad (4.1.30)$$

per i quali abbiamo:

$$\langle q_B t_B | Q(t) | q_A t_A \rangle = \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p q(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H) \right\} \quad (4.1.31)$$

$$= \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p q(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H + gp + fq) \right\} \Bigg|_{g=f=0} \quad (4.1.32)$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta f} \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H + gp + fq) \right\} \Bigg|_{g=f=0} \quad (4.1.33)$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta f} \langle q_B t_B | q_A t_A \rangle_{f,g} \Bigg|_{f=g=0} \quad (4.1.34)$$

in cui possiamo definire la *derivata funzionale* in modo che:

$$\frac{\delta}{\delta f(t_1)} f(t_2) = \delta(t_1 - t_2). \quad (4.1.35)$$

In modo analogo troviamo:

$$\int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p p(t) e^{\frac{i}{\hbar} S} = \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta g} \langle q_B t_B | q_A t_A \rangle_{f,g} \Bigg|_{f=g=0}. \quad (4.1.36)$$

Possiamo generalizzare i risultati (4.1.34) e (4.1.36) come:

$$\langle q_B t_B | T[Q(t_1) \dots Q(t_n) P(t_{n+1}) \dots P(t_{n+k})] | q_A t_A \rangle = \quad (4.1.37)$$

$$= \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p q(t_1) \dots q(t_n) p(t_{n+1}) \dots p(t_{n+k}) e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (4.1.38)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{i} \right)^{n+k} \frac{\delta^n}{\delta f_1 \dots \delta f_n} \frac{\delta^k}{\delta g_{n+1} \dots \delta g_{n+k}} \langle q_B t_B | q_A t_A \rangle_{f,g} \Bigg|_{f=g=0} \quad (4.1.39)$$

4.2 Legame tra path integral e prodotto T-ordinato nel vuoto

L'ampiezza di transizione generica è data da:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int dq_0 dq_f \langle \psi | q_f \rangle \langle q_f | q_0 \rangle \langle q_0 | \phi \rangle \quad (4.2.1)$$

$$= \int dq_0 dq_f \psi^*(q_f) \phi(q_0) \langle q_f | q_0 \rangle \quad (4.2.2)$$

ma a noi interessa studiare il ground state:

$$\langle 0|0\rangle_{f,g} = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow +\infty}} \int dq_0 dq_f \psi^*(q_f) \phi(q_0) \langle q_f t_f | q_0 t_0 \rangle. \quad (4.2.3)$$

Sapendo che $\psi_n(q) = \langle q|n\rangle$ e supponendo $E_0 = 0$, allora il ground state dello stato finale ed iniziale sono:

$$|q_0 t_0\rangle = e^{+\frac{i}{\hbar} H t_0} |q_0\rangle \quad (4.2.4)$$

$$= e^{+\frac{i}{\hbar} H t_0} \sum_{n \geq 0} |n\rangle \langle n|q_0\rangle \quad (4.2.5)$$

$$= \sum_{n \geq 0} e^{+\frac{i}{\hbar} E_n t_0} \psi_n^*(q_0) |n\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty(1-i\epsilon)} \psi_0^*(q_0) |0\rangle \quad (4.2.6)$$

$$\langle q_f t_f| = \langle q_f| e^{-\frac{i}{\hbar} H t_f} \quad (4.2.7)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar} H t_f} \sum_{n \geq 0} \langle q_f|n\rangle \langle n| \quad (4.2.8)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \langle n| e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t_f} \phi_n(q_f) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty(1-i\epsilon)} \langle 0| \phi_0(q_f) \quad (4.2.9)$$

possiamo moltiplicare per una funzione d'onda arbitraria $\chi(q_0)$, per cui richiediamo $\langle \chi|0\rangle \neq 0$, ed integriamo:

$$\int dq_0 \chi(q_0) |q_0 t_0\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty(1-i\epsilon)} \int dq_0 \chi(q_0) \psi_0^*(q_0) |0\rangle = \langle \chi|0\rangle \langle 0| \quad (4.2.10)$$

se facciamo la stessa cosa per gli stati finali con una funzione d'onda $\xi(q_f)$, allora possiamo scrivere il ground state come:

$$\langle 0|0\rangle = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow +\infty}} \frac{\text{cost}}{\langle \xi|0\rangle \langle 0|\chi\rangle} \int dq_0 \dots dq_{N+1} \int dp_0 \dots dp_N \times \\ \times \chi(q_0) \xi^*(q_f) \exp\left\{i \int_{t_0}^{t_f} dt (p\dot{q} - H(q,p))\right\} \quad (4.2.11)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}_q \int \mathcal{D}_p \exp\left\{i \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - H(q,p))\right\} \quad (4.2.12)$$

pertanto:

$$\langle 0|0\rangle_{f,g} = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H(q,p) + fq + gp)\right\}. \quad (4.2.13)$$

Possiamo supporre:

$$H = H_0 + H_{int} \quad (4.2.14)$$

e per cui:

$$\langle 0|0\rangle_{f,g} = \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H_0 - H_{int} + fq + gp)\right\} \quad (4.2.15)$$

sviluppando il termine di interazione in serie di potenze:

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int dt H_{int}\right\} = \sum c_{nm} q^n p^m \quad (4.2.16)$$

dunque abbiamo:

$$\langle 0|0\rangle_{f,h} = \sum c_{nm} (-i\hbar)^{n+m} \frac{\delta^n}{\delta f^n} \frac{\delta^m}{\delta g^m} \cdot \quad (4.2.17)$$

$$\cdot \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H_0 + fq + gp)\right\} \quad (4.2.18)$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int dt H_{int}\left(\frac{i\delta}{\hbar\delta f}, \frac{i\delta}{\hbar\delta g}\right)\right\} \times \\ \times \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int dt (p\dot{q} - H_0 + fq + gp)\right\} \quad (4.2.19)$$

se ponessimo $H_{int} \rightarrow \lambda H_{int}$ con λ piccolo, allora potremmo sviluppare perturbativamente il primo termine.

4.3 Integrale di Feynman e funzione di partizione per i campi scalari

Per comodità ci rimettiamo nelle unità naturali, quindi con $\hbar = 1$ e utilizziamo la notazione:

$$\langle A \rangle = \int d^4x A(x) \quad (4.3.1)$$

e ricordiamo che:

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \right) \quad (4.3.2)$$

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2) + V(\phi). \quad (4.3.3)$$

Definiamo la **funzione di partizione** come:

$$Z[J] = \langle 0|0\rangle_J \quad (4.3.4)$$

$$= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_\phi \mathcal{D}_\pi \exp\left\{i(\pi\dot{\phi} - \mathcal{H} + J\phi)\right\} \quad (4.3.5)$$

$$= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_\phi \exp\{i\langle \mathcal{L} + J\phi \rangle\} \quad (4.3.6)$$

$$= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_\phi \exp\left\{i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi)\right\} \quad (4.3.7)$$

in cui abbiamo:

$$N = Z_0[J = 0] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_0} \quad (4.3.8)$$

dove con S_0 indichiamo l'azione della teoria libera. Facendo così il ground state in assenza di sorgenti rimane normalizzato:

$$Z_0[0] = \langle 0|0 \rangle_{J=0} = 1. \quad (4.3.9)$$

Per garantire la convergenza dell'integrale (4.3.7) possiamo procedere in due modi:

- Operare con la sostituzione:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + i \frac{\epsilon}{2} \phi^2 \quad (4.3.10)$$

il che è equivalente ad utilizzare:

$$m^2 \longrightarrow m^2 - i\epsilon. \quad (4.3.11)$$

- Passiamo nella metrica euclidea, facendo una *rotazione di Wick*:

$$x_0 = -i\bar{x}_0 \implies d^4x \longrightarrow -i d^4\bar{x} \quad (4.3.12)$$

e così otterremo:

$$\exp\left\{-\frac{1}{2} \int d^4\bar{x} \left((\bar{\partial}\phi)^2 + m^2\phi^2 - 2V(\phi) \right)\right\} \quad (4.3.13)$$

che converge.

4.4 Funzione di partizione di una teoria scalare libera

I riferimenti sono p. 67-69 dello Srednicki [7].

Vediamo ora i conti per determinare la funzione di partizione per una teoria scalare libera.

4.4.1 Spazio delle fasi

Consideriamo il caso $V = 0$ e partiamo con:

$$Z_0[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{\frac{i}{2} \int d^4x \left[\partial_\mu\phi \partial^\mu\phi - (m^2 - i\epsilon)\phi^2 + 2J\phi \right]\right\}. \quad (4.4.1)$$

Il modo più semplice per calcolare Z è quello di passare nello spazio delle fasi facendo una trasformata di Fourier:

$$\tilde{F}(p) = \int d^4x F(x) e^{ipx} \quad (4.4.2)$$

$$F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{F}(p) e^{-ipx}. \quad (4.4.3)$$

Abbiamo quindi:

$$I = \frac{i}{2} \int d^4x \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - (m^2 - i\epsilon) \phi^2 + 2J\phi \right] \quad (4.4.4)$$

facciamo la sostituzione $i\partial_\mu \rightarrow p_\mu$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \left[- (p^\mu p'_\mu + m^2 - i\epsilon) \tilde{\psi}(p) \tilde{\phi}(p') + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{J}(p) \tilde{\phi}(p') + \tilde{J}(p') \tilde{\phi}(p) \right] e^{-i(p+p')x} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \left[- (p^\mu p'_\mu + m^2 - i\epsilon) \tilde{\psi}(p) \tilde{\phi}(p') + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{J}(p) \tilde{\phi}(p') + \tilde{J}(p') \tilde{\phi}(p) \right] (2\pi)^4 \delta^4(p+p') \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[(p^2 - m^2 + i\epsilon) \tilde{\psi}(p) \tilde{\phi}(-p) + \tilde{J}(p) \tilde{\phi}(-p) + \tilde{J}(-p) \tilde{\phi}(p) \right] \quad (4.4.7)$$

possiamo porre per brevità $\phi(\pm p) = \phi_\pm$, ma anche:

$$K = p^2 - m^2 + i\epsilon \quad (4.4.8)$$

e cambiamo variabile:

$$\tilde{\phi}(p) \longrightarrow \tilde{\phi}(p) - K^{-1} \tilde{J}(p) \quad (4.4.9)$$

continuando i conti:

$$\begin{aligned} I &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[K \left(\tilde{\phi}_+ - K^{-1} \tilde{J}_+ \right) \left(\tilde{\phi}_- - K^{-1} \tilde{J}_- \right) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{J}_+ \left(\tilde{\phi}_- - K^{-1} \tilde{J}_- \right) + \tilde{J}_- \left(\tilde{\phi}_+ - K^{-1} \tilde{J}_+ \right) \right] \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[K \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(-p) - K^{-1} \tilde{J}(p) \tilde{J}(-p) \right] \quad (4.4.11)$$

$$= iS_0 - \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) J(y) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (4.4.12)$$

osserviamo che l'integrale funzionale agisce solo sul primo termine, dato che il secondo termine è indipendente dal campo ϕ .

Abbiamo dunque:

$$Z_0[J] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) J(y) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right\} \quad (4.4.13)$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y} \right\} \quad (4.4.14)$$

in cui abbiamo riconosciuto il propagatore (1.2.13).

4.4.2 Spazio delle coordinate

Questo conto lo possiamo fare anche nello spazio delle coordinate, integriamo il primo termine della lagrangiana per parti:

$$\mathcal{L}_J = \mathcal{L}_0 + J\phi = -\frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi + J\phi \quad (4.4.15)$$

e poi completiamo il quadrato:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_J = -\frac{1}{2} \left[\phi - J (\square + m^2)^{-1} \right] (\square + m^2) \left[\phi - J (\square + m^2)^{-1} \right] + \\ + \frac{1}{2} J (\square + m^2)^{-1} J \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

però possiamo ricordarci che l'inverso di un operatore è la sua funzione di Green:

$$(\square + m^2) \Delta(x-y) = -i \delta^4(x-y) \quad (4.4.17)$$

che abbiamo già calcolato ed è uguale al propagatore (1.2.13) e quindi:

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \exp\{i\langle \mathcal{L}_0 + J\phi \rangle\} \quad (4.4.18)$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x \Delta(x-y) J_y \rangle_{x,y} \right\}. \quad (4.4.19)$$

4.4.3 Rotazione di Wick

Facendo la *rotazione di Wick*:

$$x_0 = -i\bar{x}_0 \quad (4.4.20)$$

ovviamente tutte le quantità si modificano, ma si può vedere l'Appendice C per le relazioni. Notiamo che abbiamo una trasformazione analoga anche per l'impulso:

$$k_0 = -i k_0^E \quad (4.4.21)$$

che implica:

$$k^2 = -k_E^2 \quad (4.4.22)$$

e che:

$$x^\mu p_\mu = Et - \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (4.4.23)$$

$$= (-iE_E)(-i\tau) - \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (4.4.24)$$

$$= -x_\mu^E p_\mu^E \quad (4.4.25)$$

in cui possiamo mettere entrambi gli indici bassi poiché nello spazio euclideo non cambia nulla la posizione degli indici.

Continuiamo i nostri conti:

$$I = iS + i\langle \phi J \rangle \quad (4.4.26)$$

$$= -S_E + \langle \phi J \rangle_E \quad (4.4.27)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x_E \left[-\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2 + 2J\phi \right] \quad (4.4.28)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x_E \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'_E}{(2\pi)^4} \left[(p_\mu p'_\mu - m^2) \tilde{\phi}(p) \phi(p') + \right. \\ \left. + \tilde{\phi}(p) \tilde{J}(p') + \tilde{\phi}(p') \tilde{J}(p) \right] e^{-ix(p+p')} \quad (4.4.29)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \left[- (p_\mu p_\mu + m^2) \tilde{\phi}(p) \phi(-p) + \tilde{\phi}(p) \tilde{J}(-p) + \tilde{\phi}(-p) \tilde{J}(p) \right] \quad (4.4.30)$$

possiamo porre per brevità $\phi(\pm p) = \phi_\pm$, ma anche:

$$K = - (p^2 + m^2) \quad (4.4.31)$$

e cambiamo variabile:

$$\tilde{\phi}(p) \longrightarrow \tilde{\phi}(p) - K^{-1} \tilde{J}(p) \quad (4.4.32)$$

continuando i conti:

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \left\{ K \left[\tilde{\phi}_+ - K^{-1} \tilde{J}_+ \right] \left[\tilde{\phi}_- - K^{-1} \tilde{J}_- \right] + \right. \\ \left. + \left[\tilde{\phi}_+ - K^{-1} \tilde{J}_+ \right] \tilde{J}_- + \left[\tilde{\phi}_- - K^{-1} \tilde{J}_- \right] \tilde{J}_+ \right\} \quad (4.4.33)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \left[K \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(-p) - K^{-1} \tilde{J}(p) \tilde{J}(-p) \right] \quad (4.4.34)$$

$$= -S_E - \frac{1}{2} \int d^4x_E d^4y_E \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \left[J(x) J(y) \frac{e^{ip(x-y)}}{-(p^2 + m^2)} \right] \quad (4.4.35)$$

$$= -S_E + \frac{1}{2} \int d^4x_E d^4y_E J(x) J(y) \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} \quad (4.4.36)$$

da cui concludiamo:

$$Z_0^E[J] = e^{-W_0[J]} = \exp\left\{\frac{1}{2} \langle J(x) J(y) \Delta(x-y) \rangle_{x,y}\right\}. \quad (4.4.37)$$

Se torniamo nello spazio di Minkowski, richiedendo $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$ per la convergenza, otteniamo:

$$I = iS + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[J(x) J(y) \frac{i e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (4.4.38)$$

Nota di E. Chiarotto (tra l'altro il 9 febbraio 2023): Non mi torna il segno, dovrebbe essere $-1/2$, ma il passaggio prima è uguale a quello che ha scritto Angy (o come piace a me, Tonij).

4.5 Energia libera e funzioni di Green connesse

Introduciamo l'energia libera di Helmholtz W e scriviamo Z utilizzando la funzione di Green G :

$$Z[J] = e^{iW[J]} \quad (4.5.1)$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(i)^N}{N!} \langle J_1 \dots J_N G^{(N)}(1, \dots, N) \rangle_{1, \dots, N} \quad (4.5.2)$$

in cui ricordiamoci che:

$$G^{(N)} = \langle 0 | T[\phi_1 \dots \phi_N] | 0 \rangle \quad (4.5.3)$$

ma se vogliamo invertire questa relazione otteniamo:

$$G^{(N)} = \frac{1}{(i)^N} \frac{\delta^N (Z[J])}{\delta J_1 \dots \delta J_N} \Bigg|_{J=0} \quad (4.5.4)$$

e applicando tale espressione otteniamo:

$$G^{(N)} = \langle 0 | T[\phi_1 \dots \phi_N] | 0 \rangle = \sum_{\sigma} \prod_{ij} \Delta(x_i - x_j) \quad (4.5.5)$$

in cui σ sono tutte le combinazioni possibili, e questo risultato *include* il teorema di Wick, ma restituisce anche le bolle di vuoto.

Da qui, fino a * controllare sui libri Ricordandoci (4.5.1), possiamo scrivere anche l'energia di Helmholtz in serie di potenze come:

$$W[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(i)^N}{N!} \langle J_1 \dots J_N G_c^{(N)}(1, \dots, N) \rangle_{1, \dots, N} \quad (4.5.6)$$

da cui ricaviamo le funzioni di Green connesse:

$$iG_c^{(N)} = (-1)^N \frac{\delta^N (W[J])}{\delta J_1 \dots \delta J_N} \Big|_{J=0} \quad (4.5.7)$$

ovvero restituisce lo stesso risultato della formula di Gell-Mann-Low (ed include il teorema di Wick).*

Per la teoria libera il risultato esatto è:

$$W_0[J] = \frac{i}{2} \langle J_x \Delta_F(x-y) J_y \rangle_{x,y} \quad (4.5.8)$$

che descrive solo la propagazione da $x_1 \rightarrow x_2$ e permette di notare che W è il generatore delle funzioni di Green connesse (G_c), mentre la Z genera tutte le funzioni di Green possibili (sia connesse sia disconnesse).

4.5.1 Valore della funzione di correlazione a 2 e 4 gambe

Analizziamo ora la funzione di correlazione ad N gambe:

$$G^{(N)} = \langle 0 | T[\phi_1 \dots \phi_N] | 0 \rangle \quad (4.5.9)$$

$$= \frac{1}{(i)^N} \frac{\delta^N}{\delta J_1 \dots \delta J_N} Z_0[J] \Big|_{J=0} \quad (4.5.10)$$

$$= \frac{1}{(i)^N} \frac{\delta^N}{\delta J_1 \dots \delta J_N} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y} \right\} \Big|_{J=0} \quad (4.5.11)$$

in particolare:

$$G^{(2)} = \langle 0 | T[\phi_1 \phi_2] | 0 \rangle \quad (4.5.12)$$

$$= \frac{1}{(i)^2} \frac{\delta^2}{\delta J_1 \delta J_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y} \right\} \Big|_{J=0} \quad (4.5.13)$$

$$= -\frac{\delta}{\delta J_1} \left[-\langle J_x \Delta(x-x_2) \rangle_x \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y} \right\} \right]_{J=0} \quad (4.5.14)$$

$$= \left[\Delta(x_1 - x_2) \cdot e^{-\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y}} - \langle J_x \Delta(x-x_2) \rangle_x \langle J_y \Delta(x_1 - y) \rangle_y \cdot e^{-\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y}} \right]_{J=0} \quad (4.5.15)$$

$$= \Delta(x_1 - x_2) \quad (4.5.16)$$

ma anche:

$$G^{(4)} = \langle 0 | T[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4] | 0 \rangle \quad (4.5.17)$$

$$= \frac{1}{(i)^4} \frac{\delta^4}{\delta J_1 \dots \delta J_4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y} \right\} \Big|_{J=0} \quad (4.5.18)$$

$$= -\frac{\delta^3}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3} \left[-\langle J_x \Delta(x-x_4) \rangle_x \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y} \right\} \right]_{J=0} \quad (4.5.19)$$

$$= -\frac{\delta^2}{\delta J_1 \delta J_2} \left[\left(-\Delta_{34} + \langle J_x \Delta(x-x_4) \rangle_x \langle J_y \Delta(y-x_3) \rangle_y \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle J_x J_y \Delta(x-y) \rangle_{x,y} \right\} \right]_{J=0} \quad (4.5.20)$$

$$= \frac{\delta}{\delta J_1} \left[\left(\Delta_{34} \langle J_x \Delta(x-x_2) \rangle_x + \Delta(x_2-x_4) \langle J_x \Delta(x-x_3) \rangle_x + \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta(x_2-x_3) \langle J_x \Delta(x-x_4) \rangle_x - \prod_{i=2}^4 \langle J_x \Delta(x-x_i) \rangle_x \right) Z_0[J] \right]_{J=0} \quad (4.5.21)$$

$$= \Delta(x_1-x_2) \Delta(x_3-x_4) + \Delta(x_1-x_3) \Delta(x_2-x_4) + \\ + \Delta(x_1-x_4) \Delta(x_2-x_3). \quad (4.5.22)$$

4.6 Funzione di partizione di una teoria interagente

I riferimenti sono p. 71-72 dello Srednicki [7].

Consideriamo una lagrangiana di interazione:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \quad (4.6.1)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \quad (4.6.2)$$

in cui consideriamo un potenziale che dipende da una costante di accoppiamento λ piccola, in modo che V sia una perturbazione rispetto alla teoria libera.

Facciamo per semplicità il conto nell'eucledio ed espandiamo in serie il termine con il potenziale:

$$e^{-\langle V \rangle} = \sum c_n \phi^n \quad (4.6.3)$$

in questo modo abbiamo:

$$Z[J] = \frac{1}{N} \in \mathcal{D}_\phi \exp\{iS_0 - i\langle V \rangle + i\langle J\phi \rangle\} \quad (4.6.4)$$

$$= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_\phi \exp\{-S_0^E - \langle V(\phi) \rangle + \langle J\phi \rangle\} \quad (4.6.5)$$

$$= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_\phi \sum c_n \phi^n \exp\{-S_0^E + \langle J\phi \rangle\} \quad (4.6.6)$$

$$= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_\phi \sum c_n \left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^n \exp\{-S_0^E + \langle J\phi \rangle\} \quad (4.6.7)$$

$$= \frac{1}{N} \sum c_n \left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^n Z_0[J] \quad (4.6.8)$$

$$= \frac{1}{N} \exp\{-\langle V(\delta_J) \rangle\} Z_0[J] \quad (4.6.9)$$

$$= \frac{1}{N} \exp\{-\langle V(\delta_J) \rangle - W_0[J]\} \quad (4.6.10)$$

in questo modo l'integrale funzionale può essere calcolato con serie perturbativa. Prendiamone il logaritmo:

$$-\ln Z[J] = W[J] \quad (4.6.11)$$

$$= \ln N + \langle V(\delta_J) \rangle + W_0[J] \quad (4.6.12)$$

$$= \ln N + W_0 - W_0 + \langle V \rangle + W_0 \quad (4.6.13)$$

$$= \ln N + W_0 - \ln \left(e^{W_0} e^{-\langle V \rangle} e^{-W_0} \right) \quad (4.6.14)$$

$$= \ln N + W_0 - \ln \left(1 + e^{W_0} \left(e^{-\langle V \rangle} - 1 \right) e^{-W_0} \right) \quad (4.6.15)$$

$$= \ln N + W_0 - \ln(1 + \delta(\lambda)) \quad (4.6.16)$$

$$= \ln N + W_0[J] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \delta^n(\lambda). \quad (4.6.17)$$

Siccome λ è piccola possiamo sviluppare il potenziale:

$$\delta(\lambda) = e^{W_0} \left(e^{-\langle V \rangle} - 1 \right) e^{-W_0} \quad (4.6.18)$$

$$\approx e^{W_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle V \rangle^n \right) e^{-W_0} \quad (4.6.19)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \lambda^n \quad (4.6.20)$$

in cui abbiamo definito il coefficiente come:

$$\delta_n = \frac{(-1)^n}{n!} e^{W_0} \left(\frac{1}{\lambda} \langle V(\delta_J) \rangle \right)^n e^{-W_0}. \quad (4.6.21)$$

Se esplicitiamo tutto all'interno dello sviluppo in serie abbiamo:

$$\delta(\lambda) = e^{W_0} \left(-\langle V \rangle + \frac{1}{2} \langle V \rangle^2 - \frac{1}{3!} \langle V \rangle^3 + \dots \right) e^{-W_0} \quad (4.6.22)$$

$$= \delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda^2 + \delta_3 \lambda^3 + \dots \quad (4.6.23)$$

in cui abbiamo:

$$\delta_1 = e^{W_0} \frac{\langle V(\delta_J) \rangle}{\lambda} e^{-W_0}, \quad \delta_2 = e^{W_0} \frac{\langle V(\delta_J) \rangle}{\lambda} \frac{\langle V(\delta_J) \rangle}{\lambda} e^{-W_0} \dots \quad (4.6.24)$$

Concludiamo vedendo che:

$$W[J] = \ln N + W_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \delta^n(\lambda) \quad (4.6.25)$$

$$= \ln N + W_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \lambda^m \right]^n \quad (4.6.26)$$

$$\approx \ln N + W_0 - (\delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda^2 + \dots) + \frac{1}{2} (\delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda^2 + \dots)^2 - \frac{1}{3} (\delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda^2 + \dots)^3 + \dots \quad (4.6.27)$$

$$= \ln N + W_0 - \left[\delta_1 \lambda + \left(\delta_2 - \frac{1}{2} \delta_1^2 \right) \lambda^2 + \left(\delta_3 - \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{3} (\delta_1)^3 \right) \lambda^3 + \dots \right] \quad (4.6.28)$$

il fatto che per ogni ordine λ^n non ci sia solo δ_n , ma vengano sottratti i termini inferiori di δ , fa sì che le bolle di vuoto si semplifichino.

4.6.1 Esempio con la teoria ϕ^4

Ricordiamo che per gli scalari liberi abbiamo:

$$W_0^E = -\frac{1}{2} \langle J_x \Delta(x-y) J_y \rangle_{xy} \quad (4.6.29)$$

e ora consideriamo:

$$V = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (4.6.30)$$

dunque, in base ai risultati di prima, abbiamo:

$$W[J] = \ln N + W_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \delta^n(\lambda) \quad (4.6.31)$$

$$= \ln N + W_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \lambda^m \right]^n \quad (4.6.32)$$

$$\begin{aligned} \approx \ln N + W_0 - \left[\delta_1 \lambda + \left(\delta_2 - \frac{1}{2} \delta_1^2 \right) \lambda^2 + \right. \\ \left. + \left(\delta_3 - \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{3} (\delta_1)^3 \right) \lambda^3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.6.33)$$

in cui:

$$\delta_n = \frac{(-1)^n}{n!} e^{W_0} \left(\frac{1}{\lambda} \langle V(\delta J) \rangle \right)^n e^{-W_0}. \quad (4.6.34)$$

Calcoliamo i diversi termini:

$$\delta_1 = -e^{W_0} \left(\frac{1}{\lambda} \langle V(\delta J) \rangle \right) e^{-W_0} \quad (4.6.35)$$

$$= -\frac{1}{4!} e^{W_0} \left(\frac{\delta}{\delta J_z} \right)^4 \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} \quad (4.6.36)$$

$$= -\frac{1}{4!} e^{W_0} \frac{\delta^3}{\delta J_z^3} \left\{ [\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x] \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} \right\} \quad (4.6.37)$$

$$= -\frac{1}{4!} e^{W_0} \frac{\delta^2}{\delta J_z^2} \left\{ [\Delta_{zz} + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2] \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} \right\} \quad (4.6.38)$$

$$\begin{aligned} = -\frac{1}{4!} e^{W_0} \frac{\delta}{\delta J_z} \left\{ [3\Delta_{zz} \langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^3] \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.6.39)$$

$$= -\frac{1}{4!} e^{W_0} [3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4] e^{-W_0} \quad (4.6.40)$$

$$= -\left\{ \frac{1}{8} (\Delta_{zz})^2 + \frac{1}{4} \Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + \frac{1}{24} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right\} \quad (4.6.41)$$

vediamo anche che:

$$\delta_2 = \frac{1}{2} e^{W_0} \left(\frac{1}{\lambda} \langle V(\delta J) \rangle \right)^2 e^{-W_0} \quad (4.6.42)$$

$$= \frac{1}{2(4!)^2} e^{W_0} \left(\frac{\delta}{\delta J_w} \right)^4 \left(\frac{\delta}{\delta J_z} \right)^4 \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} \quad (4.6.43)$$

$$= \frac{1}{2(4!)^2} e^{W_0} \left(\frac{\delta}{\delta J_w} \right)^4 \left\{ \left[3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right] \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} \right\} \quad (4.6.44)$$

$$= \frac{1}{2(4!)^2} e^{W_0} \left\{ \frac{\delta^4}{\delta J_w^4} \left[3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} + \right. \quad (4.6.45)$$

$$+ 4 \frac{\delta^3}{\delta J_w^3} \left[3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right] \times \\ \left. \times \frac{\delta}{\delta J_w} \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} + \right. \quad (4.6.46)$$

$$+ 6 \frac{\delta^2}{\delta J_w^2} \left[3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right] \times \\ \left. \times \frac{\delta^2}{\delta J_w^2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} + \right. \quad (4.6.47)$$

$$+ 4 \frac{\delta}{\delta J_w} \left[3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right] \times \\ \left. \times \frac{\delta^3}{\delta J_w^3} \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} + \right. \quad (4.6.48)$$

$$+ \left[3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right] \times \\ \left. \times \frac{\delta^4}{\delta J_w^4} \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle J_x \Delta_{xy} J_y \rangle_{xy} \right\} \right\} \quad (4.6.49)$$

$$= \frac{1}{2(4!)^2} \left\{ (4!) (\Delta_{zw})^4 + 4 [(4!) (\Delta_{zw})^3 \langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x] \cdot \langle J_y \Delta_{wy} \rangle_y + \right. \quad (4.6.50)$$

$$+ 6 \left[12\Delta_{zz} (\Delta_{zw})^2 + 12(\Delta_{zw})^2 (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 \right] \times \\ \left. \times \left[\Delta_{ww} + (\langle J_y \Delta_{wy} \rangle_y)^2 \right] + \right. \quad (4.6.51)$$

$$+ 4 \left[12\Delta_{zz} \Delta_{zw} \langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x + 4\Delta_{zw} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^3 \right] \times \\ \left. \times \left[3\Delta_{ww} \langle J_y \Delta_{wy} \rangle_y + (\langle J_y \Delta_{wy} \rangle_y)^3 \right] + \right. \quad (4.6.52)$$

$$+ \left[3(\Delta_{zz})^2 + 6\Delta_{zz} (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^2 + (\langle J_x \Delta_{xz} \rangle_x)^4 \right] \times \\ \left. \times \left[3(\Delta_{ww})^2 + 6\Delta_{ww} (\langle J_y \Delta_{wy} \rangle_y)^2 + (\langle J_y \Delta_{wy} \rangle_y)^4 \right] \right\} \quad (4.6.53)$$

notiamo che l'ultimo termine è proprio $\frac{1}{2}(\delta_1)^2$, quindi $\delta_2 = \frac{1}{2}\delta_1^2 + (\dots)$ e questo primo termine si semplifica nello sviluppo:

$$W[J] = \ln N + W_0 - \left[\delta_1 \lambda + \left(\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_1^2 \right) \lambda^2 + \right. \\ \left. + \left(\delta_3 - \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{3}(\delta_1)^3 \right) \lambda^3 + \dots \right] \quad (4.6.54)$$

e in modo analogo possiamo ottenere che:

$$\delta_3 = \delta_1 \delta_2 - \frac{1}{3}(\delta_1)^3 + (\dots). \quad (4.6.55)$$

Da notare che nella formula precedente ho indicato con z, w i vertici e con x e y i punti esterni, inoltre abbiamo ommesso di segnare esplicitamente l'integrale sui vertici (z, w).

Volendo distinguere ciascun punto esterno (numeri) dai vertici (lettere) e raggruppando i diagrammi equivalenti otteniamo:

$$\delta_1 = -\frac{1}{4!} \left(3\langle \Delta_{xx}^2 \rangle_x + 6\langle \Delta_{xx} \Delta_{x1} \Delta_{x2} J_1 J_2 \rangle_{x12} + \langle \Delta_{x1} \Delta_{x2} \Delta_{x3} \Delta_{x4} J_1 J_2 J_3 J_4 \rangle_{x1234} \right) \quad (4.6.56)$$

insieme a:

$$\delta_2 - \frac{1}{2}(\delta_1)^2 = \frac{1}{2(4!)} \left\{ \langle (\Delta_{zw})^4 + 3\Delta_{zz} (\Delta_{zw})^2 \Delta_{ww} \rangle_{zw} + \right. \\ + \langle J_1 \Delta_{1z} (4(\Delta_{zw})^3 + 6\Delta_{zz} (\Delta_{zw})^2 + 6\Delta_{zz} \Delta_{zw} \Delta_{ww}) \Delta_{w2} J_2 \rangle_{zw12} + \\ + \langle J_1 J_2 \Delta_{1z} \Delta_{2z} (3(\Delta_{zw})^2) \Delta_{w3} \Delta_{w4} J_3 J_4 \rangle_{zw1234} + \\ + \langle J_1 \Delta_{1z} (4\Delta_{zz} \Delta_{zw}) \Delta_{2w} \Delta_{3w} \Delta_{4w} J_2 J_3 J_4 \rangle_{zw1234} + \\ \left. + \langle J_1 J_2 J_3 \Delta_{1z} \Delta_{2z} \Delta_{3z} \left(\frac{2}{3} \Delta_{zw} \right) \Delta_{w4} \Delta_{w5} \Delta_{w6} J_4 J_5 J_6 \rangle_{zw123456} \right\} \quad (4.6.57)$$

imponendo:

$$Z[J=0] = 1 \quad (4.6.58)$$

eliminiamo tutte le funzioni di Green con zero gambe esterne ($G^{(n=0)}$) tramite la costante di normalizzazione:

$$\ln N = \sum G^{(n=0)}. \quad (4.6.59)$$

Dopo la rinormalizzazione, l'energia libera W ha solo diagrammi in cui tutte le particelle interagiscono tra di loro e collegate alle n gambe esterne:

$$W[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle J_1 \dots J_n G_c^{(n)} \rangle_{x_1 \dots x_n} \quad (4.6.60)$$

invertendo trovo:

$$G_c^{(n)} = (-1)^n \frac{\delta^n W}{\delta J_1 \dots \delta J_n}. \quad (4.6.61)$$

Puoi vedere i vari termini delle funzioni di Green nella figura 4.1.

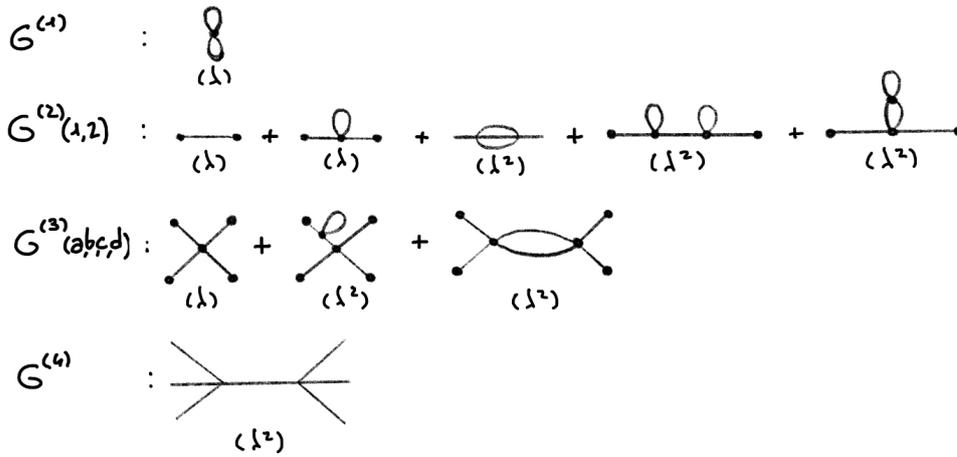


Figura 4.1

Ciascuno è un esempio di tanti processi equivalenti. Ad esempio quelli in figura 4.2.

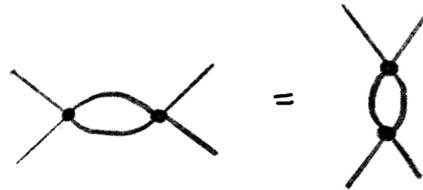


Figura 4.2

Quindi ogni vertice è associato a $-\lambda$ (siamo nell'euclideo), inoltre per ogni vertice (che non abbia solo gambe esterne) dobbiamo fare degli integrali perché le derivate:

$$\frac{\delta J_1}{\delta J_2} = \delta(x_1 - x_2) \quad (4.6.62)$$

ci permettono di semplificare soltanto gli integrali delle gambe esterne.

Consideriamo il termine di ordine λ in $G^{(2)}$ e lo chiamiamo (A), mentre quello in ordine λ^2 lo chiamiamo (B):

$$(A) = -\frac{\lambda}{2} \int d^4x \Delta(x_1 - x) \Delta(x - x_2) \Delta(x - x) \quad (4.6.63)$$

$$(B) = -\frac{\lambda^2}{3} \int d^4x d^4y \Delta(x_1 - x) \Delta^3(x - y) \Delta(y - x_2). \quad (4.6.64)$$

In δ_2 avevamo un termine:

$$\frac{1}{12} \langle J_x \Delta_{ax} \Delta_{xy}^3 \Delta_{yb} J_y \rangle_{xy} \quad (4.6.65)$$

che se derivato diventa:

$$\lambda^2 \frac{2}{12} \langle \Delta_{ax} \Delta_{xy}^3 \Delta_{yb} \rangle_{xy}. \quad (4.6.66)$$

Ovviamente possiamo rifare il conto nello spazio degli impulsi:

$$(A) = -\frac{\lambda}{2} \int d^4x \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i e^{ip_1(x_1-x)}}{p_1^2 + m^2} \frac{i e^{ip_2(x-x_2)}}{p_2^2 + m^2} \frac{i}{k^2 + m^2} \quad (4.6.67)$$

integriamo in x e usiamo le δ

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1 x_1} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{-ip_2 x_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2) \times \\ &\quad \times \frac{i}{p_1^2 + m^2} \frac{i}{p_2^2 + m^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 + m^2} \end{aligned} \quad (4.6.68)$$

vedendo così:

$$\tilde{G}(p_1, p_2) = -\frac{\lambda}{2} \delta^4(p_1 - p_2) \frac{i}{p_1^2 + m^2} \frac{i}{p_2^2 + m^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 + m^2}. \quad (4.6.69)$$

4.7 Variabili commutanti e anti-commutanti

I riferimenti sono p. 276-281 dello Srednicki [7].

Le variabili commutanti $[x, y] = 0$ sono dei c-numeri, indicati con le lettere latine. Le variabili anti-commutanti $\{\theta, \eta\} = 0$, sono dette variabili di Grassmann, indicati con le lettere greche. Da notare che un anti-commutante per un anti-commutante è un commutante, mentre un commutante per un anti-commutante è un anti-commutante.

Si ha che:

$$\frac{d}{d\theta} \theta = 1 \quad (4.7.1)$$

e che $\{\partial_\theta, \partial_\theta\} = 0$, quindi le funzioni delle variabili di Grassmann hanno al massimo un'ordine nel loro sviluppo di Taylor, dunque:

$$\phi(\theta) = \alpha + b\theta \quad \text{con} \quad \{\phi, \phi\} = 0 \quad \implies \{\alpha, \alpha\} = 0 \quad , \quad [b, b] = 0. \quad (4.7.2)$$

$$f(\theta) = a + \beta\theta \quad \text{con} \quad \{f, f\} = 0 \quad \implies \{a, a\} = 0 \quad , \quad [\beta, \beta] = 0. \quad (4.7.3)$$

Dunque:

$$\frac{df}{d\theta} = -\beta \quad (4.7.4)$$

la derivata deve stare vicino alla variabile, quindi dobbiamo far anti-commutare β e θ . Per gli integrali dobbiamo richiedere:

$$\int d\theta (af(\theta) + bg(\theta)) = a \int d\theta f(\theta) + b \int d\theta g(\theta) \quad (4.7.5)$$

$$\int d\theta \frac{df}{d\theta} = 0 \quad (4.7.6)$$

$$\int d\theta f(\theta + a) = \int d\theta f(\theta) \quad (4.7.7)$$

questo perché tutti questi integrali sono da considerarsi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \quad (4.7.8)$$

dunque i termini di bordo devono annullarsi. Questo implica:

$$\int d\theta (1) = 0 \quad (4.7.9)$$

$$\int d\theta (\theta) = 1 \quad (4.7.10)$$

$$\int d\theta [f(\theta)] = -\beta. \quad (4.7.11)$$

Abbiamo anche:

$$\int d\theta f(\theta + \eta) = \int d\theta f(\theta) \quad (4.7.12)$$

$$\int d\theta (b + \beta\theta + \alpha\eta) = \int d\theta (b + \beta\theta) \quad (4.7.13)$$

$$\int d\theta (\alpha\eta) = \int d\theta (\text{cost}) \quad (4.7.14)$$

$$= 0. \quad (4.7.15)$$

Se abbiamo:

$$f(\theta_1, \theta_2) = a + \beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2 + c\theta_1\theta_2 \quad (4.7.16)$$

inoltre:

$$\partial_1 f(\theta_1, \theta_2) = -\beta_1 + c\theta_2 \quad (4.7.17)$$

mentre per esempio abbiamo:

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 = -1. \quad (4.7.18)$$

In generale abbiamo:

$$f(\theta_1, \dots, \theta_N) = a + \sum \beta_i \theta_i + \sum c_{ij} \theta_i \theta_j + \dots \quad (4.7.19)$$

per derivate e integrali dobbiamo fare attenzione al segno dovuto al numero di permutazioni.

4.7.1 Integrale gaussiano

Studiamo:

$$G(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_n \exp\{-X^T A X\} \quad (4.7.20)$$

ipotizziamo di poter diagonalizzare la matrice:

$$A = R^T D R \quad (4.7.21)$$

sostituiamo $Y = RX$, supponendo per semplicità che abbia determinante/Jacobiano pari a 1, dunque:

$$G(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \dots dy_n \exp\{-Y^T D Y\} \quad (4.7.22)$$

questi integrali sono tutti indipendenti perché la matrice D è diagonale:

$$G(A) = \sqrt{\frac{\pi^n}{\lambda_1 \dots \lambda_n}} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}. \quad (4.7.23)$$

Consideriamo ora il caso in cui D ha degli autovalori nulli, dunque G non è ben definito. Introduciamo un integrale che agisce solo sugli autovettori con autovalore non nullo:

$$G'(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \dots dy_{n-m} \exp\{-Y^T D Y\} \quad (4.7.24)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \dots dy_n \delta(y_{n-m+1}) \dots \delta(y_n) \exp\{-Y^T D Y\} \quad (4.7.25)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_n \delta(y_{n-m+1}) \dots \delta(y_n) \exp\{-X^T A X\} \det \left[\frac{\partial Y}{\partial X} \right] \quad (4.7.26)$$

qui stiamo considerando il caso generico in cui il determinante/Jacobiano non è 1, quindi stiamo cambiando la misura di integrazione.

4.7.2 Integrale di Berezyn

Studiamo l'integrale gaussiano, per i c-numeri abbiamo:

$$\int dx_1 \dots dx_n \exp\{-X^T A X\} = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\sqrt{\det A}} = \sqrt{\det(\pi A^{-1})} \quad (4.7.27)$$

dove A è una matrice simmetrica e quindi invertibile. Per le variabili di Grassmann abbiamo che:

$$\theta^T M \theta = (\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = (m_{12} - m_{21}) \theta_1 \theta_2 \quad (4.7.28)$$

quindi se scegliamo una matrice anti-simmetrica otteniamo:

$$\theta^T M \theta = 2 m_{12} \theta_1 \theta_2. \quad (4.7.29)$$

L'integrale di Berezyn è l'equivalente dell'integrale gaussiano:

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \exp\{-\theta^T M \theta\} = \int d\theta_1 d\theta_2 (1 - \theta^T M \theta) \quad (4.7.30)$$

$$= -2 m_{12} \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 \quad (4.7.31)$$

$$= 2 m_{12} \quad (4.7.32)$$

$$= 2 \sqrt{\det M} \quad (4.7.33)$$

generalizziamo come:

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_n \exp\{-\theta^T M \theta\} = \sqrt{2^n \det M} = \sqrt{\det(2M)}. \quad (4.7.34)$$

Inoltre siccome M dev'essere anti-simmetrica abbiamo che $M^T = -M$ e possiamo scrivere M come una matrice diagonale a blocchi:

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 0 & \lambda_n \\ & & & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7.35)$$

Consideriamo:

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_n \exp\{-\theta^T M \theta + \eta^T \theta\} = \int d\theta_1 \dots d\theta_n \exp\left\{-\theta^T M \theta + \frac{1}{2} \eta^T \theta - \frac{1}{2} \theta^T \eta\right\} \quad (4.7.36)$$

dove completiamo il quadrato:

$$\theta^T M \theta - \frac{1}{2} \eta^T \theta + \frac{1}{2} \theta^T \eta = \left(\theta - \frac{1}{2} M^{-1} \eta\right)^T M \left(\theta - \frac{1}{2} M^{-1} \eta\right) - \frac{1}{4} \eta^T M^{-1} \eta \quad (4.7.37)$$

quindi:

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_n \exp\{-\theta^T M \theta + \eta^T \theta\} = \sqrt{\det(2M)} \exp\left\{\frac{1}{4} \eta^T M^{-1} \eta\right\}. \quad (4.7.38)$$

Finora abbiamo considerato variabili di Grassman reali, consideriamo ora delle variabili di Grassman complesse:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta_1 + i\theta_2) \quad , \quad \zeta^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta_1 - i\theta_2) \quad (4.7.39)$$

per cui abbiamo:

$$d\zeta d\zeta^* = \frac{1}{2} (d\theta_1 + id\theta_2) (d\theta_1 - id\theta_2) \quad (4.7.40)$$

$$= -i d\theta_1 d\theta_2 \quad (4.7.41)$$

insieme a:

$$\theta^T M \theta = 2m_{12} \theta_1 \theta_2 \quad (4.7.42)$$

$$= 2m_{12} \frac{1}{2i} (\zeta + \zeta^*) (\zeta - \zeta^*) \quad (4.7.43)$$

$$= 2i m_{12} \zeta \zeta^* \quad (4.7.44)$$

$$= -i \zeta^* M \zeta. \quad (4.7.45)$$

Quindi abbiamo:

$$\int d\zeta^* d\zeta \exp\{i\zeta^T M \zeta\} = i \int d\theta_1 d\theta_2 \exp\{-\theta^T M \theta\} \quad (4.7.46)$$

$$= 2i \sqrt{\det M} \quad (4.7.47)$$

$$= i \sqrt{\det(2M)}. \quad (4.7.48)$$

4.8 Funzione di partizione per campi fermionici

I campi fermionici e le sorgenti $(\eta, \bar{\eta})$ si comportano come variabili di Grassmann complesse:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_\psi \mathcal{D}_{\bar{\psi}} \exp\left\{i \int d^4x \left(\bar{\psi}(i\partial - m)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\right)\right\}. \quad (4.8.1)$$

Quando studiamo le derivate delle sorgenti dobbiamo fare attenzione ai segni perché dobbiamo portare $\delta\eta$ vicino ad η e compaiono dei segni negativi:

$$\langle 0|T[\psi_1 \psi_2 \bar{\psi}_3 \bar{\psi}_4]|0\rangle = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \psi_1 \psi_2 \bar{\psi}_3 \bar{\psi}_4 \exp\left\{i \int d^4 \left(\bar{\psi}(i\not{\partial} - m) \psi + \bar{\eta}\psi - \eta\bar{\psi}\right)\right\} \quad (4.8.2)$$

$$= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} (-1)^{3!} \frac{\delta}{(-i\delta\eta_4)} \frac{\delta}{(-i\delta\eta_3)} \frac{\delta}{(-i\delta\eta_2)} \frac{\delta}{(-i\delta\eta_1)} \times \\ \times \exp\left\{i \int d^4 \left(\bar{\psi}(i\not{\partial} - m) \psi + \bar{\eta}\psi - \eta\bar{\psi}\right)\right\} \quad (4.8.3)$$

$$= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \frac{\delta}{(i\delta\eta_4)} \frac{\delta}{(i\delta\eta_3)} \frac{\delta}{(i\delta\eta_2)} \frac{\delta}{(i\delta\eta_1)} \times \\ \times \exp\left\{i \int d^4 \left(\bar{\psi}(i\not{\partial} - m) \psi + \bar{\eta}\psi - \eta\bar{\psi}\right)\right\} \quad (4.8.4)$$

$$= \frac{\delta}{(i\delta\eta_4)} \frac{\delta}{(i\delta\eta_3)} \frac{\delta}{(i\delta\eta_2)} \frac{\delta}{(i\delta\eta_1)} Z_0[\eta, \bar{\eta}]. \quad (4.8.5)$$

Consideriamo il passaggio nello spazio di Fourier:

$$\psi(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p) e^{-ipx} \quad (4.8.6)$$

e idem per η ; **facciamo questo perché altrimenti avremmo un operatore e l'inverso di un operatore che in teoria non potremmo definirlo con $1/A$.** Possiamo calcolare:

$$I = i \int d^4 x \left[\bar{\psi}(i\not{\partial} - m) \psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \right] \quad (4.8.7)$$

passiamo nello spazio delle fasi

$$= i \int d^4 x \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\tilde{\bar{\psi}}(q) (\not{p} - m) \tilde{\psi}(p) + \tilde{\bar{\eta}}(q) \tilde{\psi}(p) + \tilde{\bar{\psi}}(q) \tilde{\eta}(p) \right] e^{-ix(p+q)} \quad (4.8.8)$$

$$= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\tilde{\bar{\psi}}(q) (\not{p} - m) \tilde{\psi}(p) + \tilde{\bar{\eta}}(q) \tilde{\psi}(p) + \tilde{\bar{\psi}}(q) \tilde{\eta}(p) \right] \delta^4(p+q) \quad (4.8.9)$$

$$= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\tilde{\bar{\psi}}(-p) (\not{p} - m) \tilde{\psi}(p) + \tilde{\bar{\eta}}(-p) \tilde{\psi}(p) + \tilde{\bar{\psi}}(-p) \tilde{\eta}(p) \right] \quad (4.8.10)$$

facciamo il cambio di variabile: $\tilde{\psi} \rightarrow \tilde{\psi} - (\not{p} - m + i\epsilon)^{-1} \tilde{\eta}$

$$= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\tilde{\bar{\psi}}(-p) (\not{p} - m) \tilde{\psi}(p) - \tilde{\bar{\eta}}(-p) (\not{p} - m + i\epsilon)^{-1} \tilde{\eta}(p) \right] \quad (4.8.11)$$

$$= iS_0 - i \int d^4 x d^4 y \bar{\eta}(x) \eta(y) \left[\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{\not{p} - m + i\epsilon} \right] \quad (4.8.12)$$

$$= iS_0 - \int d^4 x d^4 y \bar{\eta}(x) \eta(y) \left[\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{\not{p} - m + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \right]. \quad (4.8.13)$$

Dunque abbiamo:

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = \exp\{-\langle \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \rangle_{xy}\} \quad (4.8.14)$$

$$S(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}. \quad (4.8.15)$$

4.9 Funzione di partizione per campi vettoriali

I riferimenti sono p. 343-344 dello Srednicki [7].

Se scriviamo la funzione di partizione come quelli per il campo scalare e spinoriale, ma per il campo vettoriale, abbiamo:

$$Z[J^\mu] = N \int \mathcal{D}_{A_\mu} \exp\left\{i \int d^4 x \left(\mathcal{L}_0 + J^\mu A_\mu\right)\right\} \quad \text{con} \quad \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (4.9.1)$$

Questo integrale è mal definito (non converge) perché nella teoria di Maxwell abbiamo un'invarianza di gauge, quindi integrando su A_μ stiamo integrando su infinite scelte di A_μ .

Per vederlo possiamo ignorare il termine di corrente: l'integrando è uguale per qualunque A_μ , dunque stiamo integrando lo stesso valore per infinite volte e per questo l'integrale va a infinito.

Possiamo però verificare che effettivamente l'esponenziale diverge in di-

versi modi, sempre a causa dell'invarianza di gauge. Calcoliamo:

$$I = i \int d^4x \left(\mathcal{L}_0 + J^\mu A_\mu \right) \quad (4.9.2)$$

$$= i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + J^\mu A_\mu \right] \quad (4.9.3)$$

$$= i \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4} (q_\mu \tilde{A}_\nu - q_\nu \tilde{A}_\mu) (p^\mu \tilde{A}^\nu - p^\nu \tilde{A}^\mu) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \tilde{J}^\mu(q) \tilde{A}_\mu(p) + \frac{1}{2} \tilde{J}^\mu(p) \tilde{A}_\mu(q) \right] e^{-i(p+q)x} \quad (4.9.4)$$

$$= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{4} (p_\mu \tilde{A}_\nu(-p) - p_\nu \tilde{A}_\mu(-p)) (p^\mu \tilde{A}^\nu(p) - p^\nu \tilde{A}^\mu(p)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \tilde{J}^\mu(-p) \tilde{A}_\mu(p) + \frac{1}{2} \tilde{J}^\mu(p) \tilde{A}_\mu(-p) \right] \quad (4.9.5)$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \left(-p^\mu p_\mu \tilde{A}_\nu(-p) \tilde{A}^\nu(p) + p_\mu p_\mu \tilde{A}^\mu(-p) \tilde{A}^\nu(p) + \right. \right. \\ \left. \left. + p_\mu p_\mu \tilde{A}^\mu(-p) \tilde{A}^\nu(p) - p^\nu p_\nu \tilde{A}_\mu(-p) \tilde{A}^\mu(p) \right) - \tilde{J}^\mu(-p) \tilde{A}_\mu(p) - \right. \\ \left. - \tilde{J}^\mu(-p) \tilde{A}_\mu(p) \right] \quad (4.9.6)$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[-\tilde{A}_\mu(-p) (p^2 \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \tilde{A}_\nu(p) + \tilde{J}^\mu(-p) \tilde{A}_\mu(p) + \right. \\ \left. + \tilde{A}_\mu(-p) \tilde{J}^\mu(p) \right]. \quad (4.9.7)$$

Possiamo porre l'operatore cinetico uguale a:

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \quad (4.9.8)$$

e possiamo osservare che:

$$P_{\mu\nu} P^{\nu\rho} = P^\rho{}_\mu = \delta^\rho{}_\mu - \frac{p^\rho p_\mu}{p^2} \quad (4.9.9)$$

dunque che è un proiettore (ovvero può avere solo autovalori 0, 1), inoltre osservo che $P_{\mu\nu} p^\nu = 0$ e abbiamo che $\text{Tr}\{P_{\mu\nu}\} = 3$, quindi la matrice $P_{\mu\nu}$ non può essere invertita e questo ci impedisce di completare il quadrato e procedere come nei casi precedenti.

La polarizzazione longitudinale (lungo la direzione del moto) è $\tilde{A}_\mu^L \sim p_\mu$, l'integrando non dipende dalla componente longitudinale perché $\mathcal{L}_0 \sim P_{\mu\nu} p^\nu = 0$, per la lagrangiana, mentre nella sorgente $\tilde{J}^\mu \tilde{A}_\mu^L \propto p_\mu \tilde{J}^\mu = 0$ perché la corrente J è conservata ($\partial_\mu J^\mu = 0 \Rightarrow p_\mu \tilde{J}^\mu = 0$), quindi quando integriamo sulla polarizzazione longitudinale abbiamo:

$$\int \mathcal{D}_{AL} (1) = \infty. \quad (4.9.10)$$

4.10 Funzione di partizione di Yang-Mills e campi ghost di Faddeev-Popov

I riferimenti sono p. 420-423 dello Srednicki [7].

Per evitare la divergenza dobbiamo scegliere una direzione nello spazio di integrazione che sia tale che venga scelto un solo rappresentante per ogni orbita di gauge (che sono formate da tutti potenziali connessi da trasformazioni di gauge), questo equivale a imporre il gauge dall'inizio, dunque stiamo imponendo:

$$G^a(A_\mu) = 0 \quad (4.10.1)$$

dove G è detta *funzione di gauge-fixing* (è una funzione arbitraria che interseca ogni orbita di gauge una sola volta).

Osservazione: l'indice rappresenta gli elementi del gruppo: $a \in \{1, \dots, N\}$ in cui N è la dimensione del gruppo; se la teoria è abeliana allora $N = 1$, dunque abbiamo un solo generatore e possiamo non mettere l'indice.

Definiamo:

$$\Delta_G^{-1} = \int \mathcal{D}_U \delta[G^a(A_\mu^U)] \quad , \quad U = e^{i\omega^a(x)T^a} \quad (4.10.2)$$

in cui U è un elemento del gruppo di gauge e A trasforma come:

$$A_\mu^U = U A_\mu U^\dagger - i U \partial_\mu U^\dagger. \quad (4.10.3)$$

Osserviamo che:

$$\Delta_G^{-1}(A_\mu) = \int \mathcal{D}_U \delta [G^a(A_\mu^U)] \quad (4.10.4)$$

è invariante di gauge perché se consideriamo $A' = A^{U'}$, cioè trasformiamo con U' , e dunque:

$$\Delta_G^{-1}(A'_\mu) = \int \mathcal{D}_U \delta [G^a(A'_\mu^U)] \quad (4.10.5)$$

$$= \int \mathcal{D}_U \delta [G^a(A_\mu^{U'U})] \quad (4.10.6)$$

ma il prodotto di due elementi di un gruppo appartiene ancora al gruppo e stiamo integrando su tutti gli elementi dello stesso, dunque possiamo porre $U'U = U''$ e $DU = DU''$, pertanto rinominando $U'' \rightarrow U$ otteniamo $\Delta_G^{-1}(A'_\mu) = \Delta_G^{-1}(A_\mu)$ e ciò vale $\forall A', A$ che siano connessi da una trasformazione di gauge. Studiamo:

$$\Delta_G^{-1}(A_\mu) = \int \mathcal{D}_U \delta [G^a(A_\mu^U)] \quad (4.10.7)$$

in cui G è una funzione di U , faccio un cambio di variabile:

$$U \longrightarrow G \quad , \quad \mathcal{D}_U = \mathcal{D}_G \det \left| \frac{\delta U}{\delta G} \right| \quad (4.10.8)$$

dunque:

$$\Delta_G^{-1}(A_\mu) = \int \mathcal{D}_G \det \left| \frac{\delta U}{\delta G} \right| \delta[G] = \det \left| \frac{\delta U}{\delta G} \right|_{G=0} \quad (4.10.9)$$

perciò:

$$\Delta_G(A_\mu) = \det \left| \frac{\delta G}{\delta U} \right|_{G=0} \propto \det \left| \frac{\delta G}{\delta \omega} \right|_{G=0} \quad (4.10.10)$$

perché U dipende solo dai parametri ω . Per risolvere la funzione di partizione di Yang-Miltz (YM) inseriamo:

$$1 = \Delta_G(A_\mu) \cdot \Delta_G^{-1}(A_\mu) \quad (4.10.11)$$

così che:

$$Z_{YM}[J^\mu] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu^a} \exp\{iS_{YM} + i\langle J_\mu A^\mu \rangle\} \quad (4.10.12)$$

$$= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu^a} \exp\{iS[J^\mu]\} \quad (4.10.13)$$

$$= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu^a} \Delta_G(A_\mu) \cdot \Delta_G^{-1}(A_\mu) \exp\{iS[J^\mu]\} \quad (4.10.14)$$

$$= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu^a} \left(\det \left| \frac{\delta G}{\delta U} \right|_{G=0} \cdot \int \mathcal{D}_U \delta[G^a(A_\mu^U)] \right) \exp\{iS[J^\mu]\} \quad (4.10.15)$$

siccome tutto l'integrale è invariante di gauge, possiamo sostituire $A'_\mu = A_\mu^U \rightarrow A_\mu$ in questo modo eliminiamo la dipendenza da U , quindi l'integrale su \mathcal{D}_U ci dice solo quant'è grande il gruppo e ci ridefinisce la costante di normalizzazione (consideriamo solo gruppi compatti, quindi la dimensione del gruppo è finita). Infine osserviamo che la δ garantisce automaticamente la condizione $G = 0$ del determinante:

$$Z_{YM}[J^\mu] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu^a} \delta[G^a(A_\mu)] \cdot \det \left| \frac{\delta G}{\delta U} \right| \exp\{iS[J^\mu]\} \quad (4.10.16)$$

ricordiamo che G è una funzione arbitraria, quindi possiamo fare uno shift di una funzione "costante" C (non dipendente da A), inoltre inseriamo un integrale gaussiano rispetto a C :

$$= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu^a} \int \mathcal{D}_{C^a} \exp\left\{ -\frac{i}{2\xi} \int d^4x C^a(x) C^a(x) \right\} \delta[G^a(A_\mu) - C^a] \cdot \det \left| \frac{\delta G}{\delta U} \right| \exp\{iS[J^\mu]\} \quad (4.10.17)$$

$$= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu^a} \exp\left\{ iS_{YM} + i\langle J^{a\mu} A_\mu^a \rangle - \frac{i}{2\xi} \langle G^a(A_\mu) G^a(A_\mu) \rangle \right\} \det \left| \frac{\delta G}{\delta U} \right| \quad (4.10.18)$$

il valore di ξ fissa il gauge e può essere scelto in maniera arbitraria perché le ampiezze di probabilità sono gauge-invarianti e quindi sono indipendenti da ξ .

Per procedere con la soluzione di Z dobbiamo distinguere tra il caso abeliano ($N = 1$, $f^{abc} = 0$) ed il caso non abeliano ($N \neq 1$, $f^{abc} \neq 0$).

Nel caso di una teoria abeliana ($U(1)$, dimensione 1) con parametro α , in cui scegliamo il gauge di Lorentz per cui:

$$G = \partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu (A_\mu + \partial_\mu \alpha) \quad (4.10.19)$$

dunque abbiamo:

$$\frac{\delta G}{\delta \alpha} = \partial^\mu \partial_\mu \quad (4.10.20)$$

che non dipende dal campo A , quindi il determinante può essere riassorbito nella costante di normalizzazione.

Per una teoria di Yang-Miltz (teoria non-abeliana) invece la A trasforma con la derivata covariante, infatti ricordiamo che per $U = e^{i\omega^a(x) T^a}$ con $a \in \{1, \dots, N\}$ abbiamo che:

$$A'_\mu = A_\mu - D_\mu(\omega^a T^a) \quad (4.10.21)$$

in cui abbiamo usato la derivata covariante in rappresentazione aggiunta:

$$D_\mu^A = \partial_\mu - i[\cdot, A_\mu]. \quad (4.10.22)$$

In componenti otteniamo:

$$\delta A_\mu^a = - \left(\partial_\mu \omega^a + \omega^b A_\mu^c f^{abc} \right) \quad (4.10.23)$$

$$= - \left(\partial_\mu \delta^{ab} + i A_\mu^c (T_A^a)^{bc} \right) \omega^b \quad (4.10.24)$$

$$= - (D_\mu^A)^{ab} \omega^b. \quad (4.10.25)$$

Di seguito non scriveremo più il pedice A per la rappresentazione aggiunta per evitare di appesantire la notazione.

Scegliendo il gauge di Lorentz abbiamo che:

$$G = G^a T^a = \partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu (A_\mu - D_\mu \omega) \quad (4.10.26)$$

dunque:

$$\frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} = -\partial^\mu D_\mu^{ab} \quad (4.10.27)$$

che dipende da A . Riscriviamo il determinante come il risultato un integrale di Berezyn a varibili complesse:

$$\det \left| \frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} \right| = \det \left| \partial_\mu D^\mu \delta^{ab} \right| \quad (4.10.28)$$

$$\propto \int \mathcal{D}\xi^b \mathcal{D}\bar{\xi}^b \exp \left\{ i \int d^4x \bar{\xi}^b \left(\partial_\mu D^\mu \xi^b \right) \right\} \quad (4.10.29)$$

$$= \int \mathcal{D}\xi^b \mathcal{D}\bar{\xi}^b \exp \left\{ -i \int d^4x \left(\partial_\mu \bar{\xi}^b \right) \left(D_\mu \xi^b \right) \right\} \quad (4.10.30)$$

dunque la funzione di partizione di Yang-Mills comprende l'azione di Yang-Mills (S_{YM}), un termine di gauge-fixing (S_{gf}), un'azione *ghost* (S_{gh}) e il termine di corrente:

$$Z_{YM}[J^\mu] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu^a} \mathcal{D}\xi^b \mathcal{D}\bar{\xi}^b \exp\{iS_{YM} + iS_{gf} + iS_{gh} + i\langle J^{a\mu} A_\mu^a \rangle\} \quad (4.10.31)$$

$$= \frac{1}{N} \int \int \mathcal{D}_{A_\mu^a} \mathcal{D}\xi^b \mathcal{D}\bar{\xi}^b \exp\left\{i \int d^4x \left(-\frac{1}{4g^2} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 - (\partial_\mu \bar{\xi}^b) (D^\mu \xi^b) + J^{a\mu} A_\mu^a \right)\right\} \quad (4.10.32)$$

dove abbiamo imposto $G^a(A_\mu) = \partial^\mu A_\mu^a$.

I campi ξ sono detti *campi ghost di Faddeev-Popov*, si tratta scalari complessi di Grassman (in rappresentazione aggiunta), questo significa che non hanno una statistica compatibile con il loro spin, infatti questi campi non rappresentano delle particelle reali (da qui il nome "ghost") e un ipotetico processo che le produca deve avere ampiezza nulla.

4.10.1 Accenni alla simmetria BRST

I riferimenti sono p. 435-441 dello Srednicki [7].

Andando a studiare $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}$ ci si rende conto che esiste una simmetria residua, detta simmetria BRST (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin), tramite la quale si dimostra che gli stati ghost cancellano i contributi di A legati alle polarizzazioni scalare e longitudinale, oltre a far semplificare qualunque particella prodotta dai campi ghost.

4.11 Funzione di partizione per la QED

I riferimenti sono p. 345-348 dello Srednicki [7].

Alla lagrangiana di Maxwell aggiungo un termine di gauge fixing e un campo fermionico:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_{\pm e} + \mathcal{L}_{int} \quad (4.11.1)$$

$$= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial A)^2 + \bar{\psi} (i\not{\partial} - e\not{A} - m) \psi \quad (4.11.2)$$

osserviamo che abbiamo termini quadratici (teoria libera) in A e in ψ , l'unico termine di interazione è:

$$\mathcal{L}_{int} = -e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (4.11.3)$$

e quindi abbiamo:

$$Z = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu} \mathcal{D}_\psi \mathcal{D}_{\bar{\psi}} \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta) \right\} \quad (4.11.4)$$

$$= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}_{A_\mu} \mathcal{D}_\psi \mathcal{D}_{\bar{\psi}} \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta) \right\} \quad (4.11.5)$$

$$= \exp \left\{ i \langle \mathcal{L}_{int} \left(\frac{\delta}{i\delta J_\mu}, \frac{\delta}{-i\delta \eta}, \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}} \right) \right\} Z_0[\eta, \bar{\eta}, J^\mu] \quad (4.11.6)$$

fattorizziamo $Z_0[\eta, \bar{\eta}, J^\mu] = Z[\eta, \bar{\eta}] \cdot Z_0[A_\mu]$ in cui ricordiamo che:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \exp \{ -\langle \bar{\eta}(y) S(x-y) \eta(x) \rangle \} \quad (4.11.7)$$

mentre per i fotoni abbiamo:

$$Z_0[A_\mu] = \int \mathcal{D}_{A_\mu} \exp \left\{ i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + J^\mu A_\mu \right) \right\} \quad (4.11.8)$$

e dunque:

$$I = i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + J^\mu A_\mu \right) \quad (4.11.9)$$

passiamo nello spazio di Fourier

$$= \frac{i}{2} \int d^4x \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{i(p+q)x} \left(\frac{1}{2} \left(q_\mu \tilde{A}_\nu(q) - q_\nu \tilde{A}_\mu(q) \right) \left(p^\mu \tilde{A}^\nu(p) - p^\nu \tilde{A}^\mu(p) \right) + \frac{1}{\xi} q_\mu \tilde{A}^\mu(q) p_\nu \tilde{A}^\nu(p) + \tilde{J}^\mu(q) \tilde{A}_\mu(p) + \tilde{J}^\mu(p) \tilde{A}_\mu(q) \right) \quad (4.11.10)$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(-p^2 \tilde{A}_\mu(-p) \tilde{A}^\mu(p) + p_\mu p_\nu \tilde{A}^\mu(-p) \tilde{A}^\nu(p) - \frac{1}{\xi} p_\mu p_\nu \tilde{A}^\mu(-p) \tilde{A}^\nu(p) + \tilde{J}^\mu(-p) \tilde{A}_\mu(p) + \tilde{A}_\mu(-p) \tilde{J}^\mu(p) \right) \quad (4.11.11)$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[- \left(p^2 \eta_{\mu\nu} - \frac{\xi-1}{\xi} p_\mu p_\nu \right) \tilde{A}^\nu(-p) \tilde{A}^\mu(p) + \tilde{J}^\mu(-p) \tilde{A}_\mu(p) + \tilde{A}_\mu(-p) \tilde{J}^\mu(p) \right] \quad (4.11.12)$$

cambiamo variabile:

$$\tilde{A}_\mu \longrightarrow \tilde{A}_\mu - K_{\mu\alpha}^{-1} \tilde{J}^\alpha \quad (4.11.13)$$

dove poniamo:

$$K_{\mu\nu} = - \left(p^2 \eta_{\mu\nu} - \frac{\xi-1}{\xi} p_\mu p_\nu \right) \quad (4.11.14)$$

così che:

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[K^{\mu\nu} \left(\tilde{A}_\mu(p) - K_{\mu\alpha}^{-1} \tilde{J}^\alpha(p) \right) \left(\tilde{A}_\nu(-p) - K_{\nu\beta}^{-1} \tilde{J}^\beta(-p) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{J}^\mu(-p) \left(\tilde{A}_\mu(p) - K_{\mu\alpha}^{-1} \tilde{J}^\alpha(p) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\tilde{A}_\nu(-p) - K_{\nu\beta}^{-1} \tilde{J}^\beta(-p) \right) \tilde{J}^\nu(p) \right] \quad (4.11.15)
\end{aligned}$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[K^{\mu\nu} \tilde{A}^\nu(-p) \tilde{A}^\mu(p) - \tilde{J}^\mu(p) K_{\mu\nu}^{-1} \tilde{J}^\nu(-p) \right] \quad (4.11.16)$$

ricordiamoci che il propagatore di Maxwell è (3.5.9):

$$\tilde{\Delta} = -\frac{i}{p^2} \left(\eta_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) = K_{\mu\nu}^{-1}$$

e dunque:

$$I = iS_0 - \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\tilde{J}^\mu(p) \tilde{\Delta}_{\mu\nu}(p) \tilde{J}^\nu(-p) \right] \quad (4.11.17)$$

$$= iS_0 - \frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y \left[J^\mu(x) \Delta_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y) \right]. \quad (4.11.18)$$

Quindi, abbiamo che:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}, A_\mu] = \exp \left\{ -\langle \bar{\eta}(y) S(x-y) \eta(x) \rangle - \frac{1}{2} \langle J^\mu(x) \Delta_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y) \rangle_{xy} \right\} \quad (4.11.19)$$

dove ci poniamo nel gauge di Feynman ($\xi = 1$), perciò il propagatore è:

$$\Delta_{\mu\nu} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i \eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}. \quad (4.11.20)$$

Capitolo 5

Il modello standard

Vediamo in questo capitolo la trattazione del modello standard delle particelle elementari.

5.1 La lagrangiana di Fermi

Per la QED sappiamo di avere:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} (i\not{\partial} - e\not{A} + m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (5.1.1)$$

ma le particelle possono interagire anche tramite la forza debole e la forza forte. La descrizione di Fermi per la forza debole descrive l'interazione tramite la corrente:

$$\mathcal{L}_F = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J^\mu J_\mu^\dagger \quad \text{con} \quad J^\mu = L^\mu + H^\mu \quad (5.1.2)$$

con all'interno i termini che chiamiamo **corrente leptonica** e **corrente adronica**, la costante di Fermi è:

$$G_F = 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}. \quad (5.1.3)$$

Le due correnti vengono costruite in analogia con la QED:

$$L^\mu \sim H^\mu \sim \bar{\psi} (G_V V^\mu - G_A A^\mu) \psi \quad (5.1.4)$$

dove V è la corrente vettoriale ed A è la corrente assiale $A^\mu \sim \gamma^\mu \gamma_5$, il fatto che ci sia $V - A$ è legato al fatto che solo la componente Left partecipa all'interazione.

Notiamo che siccome vale:

$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5 \quad , \quad (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad , \quad (\gamma^0)^2 = \mathbb{1} \quad (5.1.5)$$

abbiamo che:

$$j_\mu = \bar{\chi} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \xi \quad (5.1.6)$$

$$\implies j_\mu^\dagger = \xi^\dagger \left(1 - \gamma_5^\dagger\right) \gamma_\mu^\dagger (\gamma^0)^\dagger \chi \quad (5.1.7)$$

$$= \xi^\dagger (1 - \gamma_5) (\gamma^0 \gamma_\mu) \chi \quad (5.1.8)$$

$$= \xi^\dagger (\gamma^0 \gamma_\mu) (1 - \gamma_5) \chi \quad (5.1.9)$$

$$= \bar{\xi} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \chi. \quad (5.1.10)$$

Le costanti G_V , G_A sono diverse in base al tipo di particella che interagisce, sperimentalmente si trova $G_V = G_A = 1$ per le particelle elementari/puntiformi. Tuttavia questa teoria è valida anche per protoni e neutroni (entro un certo range di energia) con $G_V \approx 1$, $G_A = \alpha \approx 1.24$.

Scriviamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F \sim \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e \right) \left(\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e \right) + \\ + \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{p} \gamma^\mu (1 - \alpha \gamma_5) n \right) \left(\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu \right) \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

dove ν_e è lo spinore di Dirac per il neutrino elettronico, mentre e è il campo di Dirac per l'elettrone, e la presenza della γ_5 esprime il fatto che non viene conservata la parità.

Se facciamo l'analisi dimensionale:

$$[S] = [\mathcal{L}] \cdot L^4 = 1 \quad (5.1.12)$$

dunque:

- Per gli spinori:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi \quad (5.1.13)$$

dunque:

$$[\mathcal{L}] \sim [\psi]^2 L^{-1} = L^{-4}$$

che implica:

$$[\psi] = L^{-3/2}.$$

- Per gli scalari:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (5.1.14)$$

e per i bosoni vettori:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (5.1.15)$$

dunque:

$$[\mathcal{L}] \sim [\phi]^2 L^{-2} = L^{-4}$$

che implica:

$$[\phi] = [A_\mu] = L^{-1}.$$

Ciò implica che la costante di accoppiamento $g = e$ della QED sia adimensionale:

$$[\mathcal{L}] = [g] [\psi]^2 [A_\mu] = [g] L^{-3} L^{-1} = L^{-4} \implies [g] = 1. \quad (5.1.16)$$

Mentre nella lagrangiana di Fermi:

$$[\mathcal{L}] = [G_F] [\psi]^4 = [G_F] L^{-6} = L^{-4} \quad (5.1.17)$$

ovvero:

$$[G_F] = L^2 = M^{-2}. \quad (5.1.18)$$

Vedremo che G_F è dimensionale perché nasconde al suo interno il propagatore dei bosoni vettori a basse energia.

5.1.1 Validità della teoria di Fermi

Nel limite di basse energie la teoria di Fermi è valida, mentre ad alte energie σ cresce con l'energia del centro di massa e la teoria non è più unitaria. Se studiamo l'interazione, vedi in particolare il processo:

$$e + \bar{\nu}_e \longrightarrow e + \bar{\nu}_e$$

nel diagramma in figura 5.1, allora abbiamo 4 gambe esterne e l'elemento di matrice S ridotta è:

$$M = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_2 \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_4 \right) \left(\bar{u}_3 \gamma_\mu (a - b \gamma_5) u_1 \right) \quad (5.1.19)$$

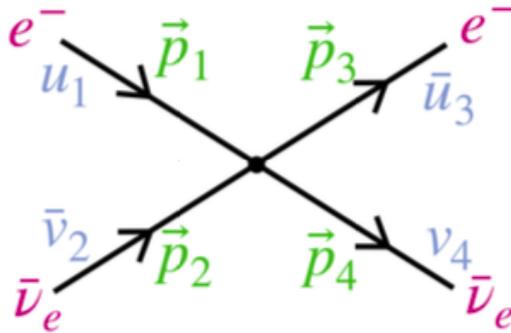


Figura 5.1: Raffigurazione processo $e + \bar{\nu}_e \longrightarrow e + \bar{\nu}_e$.

e dunque:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spin} |M|^2 \quad (5.1.20)$$

$$= \frac{G_F^2}{8} \sum_{spin} \left(\bar{\nu}_2 \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_4 \right) \left(\bar{\nu}_4 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \nu_2 \right) \times \\ \times \left(\bar{u}_3 \gamma_\mu (a - b \gamma_5) u_1 \right) \left(\bar{u}_1 \gamma_\nu (a - b \gamma_5) u_3 \right) \quad (5.1.21)$$

$$= \frac{G_F^2}{8} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu (a - b \gamma_5) (\not{p}_3 + m_e) \gamma_\mu (a - b \gamma_5) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_4 - m_\nu) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) (\not{p}_2 - m_\nu) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \right\} \quad (5.1.22)$$

$$\approx \frac{G_F}{8} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1) \gamma_\nu (a - b \gamma_5) (\not{p}_3) \gamma_\mu (a - b \gamma_5) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_4) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) (\not{p}_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \right\} \quad (5.1.23)$$

$$= \frac{G_F^2}{8} (p_1)^\alpha (p_3)^\beta (p_2)_\rho (p_4)_\sigma \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu (a - b \gamma_5)^2 \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu (1 - \gamma_5)^2 \right\} \quad (5.1.24)$$

$$= \frac{G_F^2}{8} (p_1)^\alpha (p_3)^\beta (p_2)_\rho (p_4)_\sigma \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu (a^2 + b^2 - 2ab \gamma_5) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu (2 - 2\gamma_5) \right\} \quad (5.1.25)$$

$$= 4 G_F^2 (p_1)^\alpha (p_3)^\beta (p_2)_\rho (p_4)_\sigma \left[(a^2 + b^2) (\eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} + \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu}) + \right. \\ \left. + 2iab \varepsilon_{\alpha\nu\beta\mu} \right] \left[\eta^{\sigma\nu} \eta^{\rho\mu} + \eta^{\sigma\mu} \eta^{\rho\nu} - \eta^{\sigma\rho} \eta_{\mu\nu} + i\varepsilon^{\sigma\nu\rho\mu} \right] \quad (5.1.26)$$

possiamo analizzare i termini separatamente:

$$\left(\eta^{\sigma\nu} \eta^{\rho\mu} + \eta^{\sigma\mu} \eta^{\rho\nu} - \eta^{\sigma\rho} \eta_{\mu\nu} \right) \left(\eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} + \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \right) = 2 \left(\delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho + \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right) \\ \varepsilon^{\sigma\nu\rho\mu} \varepsilon_{\alpha\nu\beta\mu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -2 \left(\delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma - \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho \right) = 2 \left(\delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho - \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right) \\ \left(\eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} + \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \right) \varepsilon^{\sigma\nu\rho\mu} = \left(\eta^{\sigma\nu} \eta^{\rho\mu} + \eta^{\sigma\mu} \eta^{\rho\nu} - \eta^{\sigma\rho} \eta_{\mu\nu} \right) \varepsilon_{\alpha\nu\beta\mu} = 0$$

in cui l'ultima equazione è dovuta al fatto che ε è anti-simmetrico per scambio

di μ, ν , mentre il termine tra parentesi è simmetrico. Continuando i conti:

$$= 8 G_F^2 (p_1)^\alpha (p_3)^\beta (p_2)_\rho (p_4)_\sigma \left[(a^2 + b^2) \left(\delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho + \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right) - 2ab \left(\delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho - \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma \right) \right] \quad (5.1.27)$$

$$= 8 G_F^2 \left[(a^2 + b^2 - 2ab) (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) + (a^2 + b^2 + 2ab) (p_1 \cdot p_2) (p_3 \cdot p_4) \right] \quad (5.1.28)$$

$$= 2 G_F^2 \left[(a - b)^2 u^2 + (a + b)^2 s^2 \right] \quad (5.1.29)$$

$$= 2 G_F^2 s^2 \left[\frac{1}{4} (a - b)^2 (1 + \cos \theta)^2 + (a + b)^2 \right]. \quad (5.1.30)$$

La sezione d'urto totale è:

$$\sigma = \frac{1}{32\pi s} \int d(\cos \theta) |\mathcal{M}|^2 \quad (5.1.31)$$

$$= \frac{2 G_F^2 s}{32 s} f(a, b) \quad (5.1.32)$$

$$\propto s = (p_1 + p_2)^2 \quad (5.1.33)$$

dunque, questa teoria non è consistente ad alte energie perché le probabilità crescono in maniera indefinita, tuttavia è una buona approssimazione ad energia dell'ordine dell'energia di Fermi. L'unica dipendenza del momento in questa teoria viene fuori dalla media sulle polarizzazioni, per avere un andamento più ragionevole bisogna introdurre delle particelle che mediano l'interazione, tuttavia queste interazioni sono a corto raggio ($\sim 10^{-15}$ m), quindi non possiamo usare i fotoni come nella QED ma dobbiamo usare una particella massiva e il potenziale di Yukawa:

$$V \sim \frac{1}{r} e^{-mr} \quad (5.1.34)$$

dove m è la massa della particella. Quindi dobbiamo introdurre un campo massivo che si accoppi con la corrente di Fermi:

$$j_\mu B^\mu \quad (5.1.35)$$

dove il campo B ha un propagatore:

$$\frac{i}{p^2 + m_B^2} \quad (5.1.36)$$

e ciò fa in modo che la probabilità non cresca troppo ad alte energie, mentre a basse energie il campo B non si propaga:

$$\frac{1}{p^2 + m_B^2} \approx \frac{1}{m_B^2}. \quad (5.1.37)$$

Si potrebbe pensare di introdurre un campo vettore massivo usando la lagrangiana di Proca:

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m_B^2}{2} B_\mu B^\mu \quad (5.1.38)$$

che però non è invariante di gauge e questo fa sì che la teoria non sia rinormalizzabile; per evitare questo problema si usa il *meccanismo di Higgs*.

5.2 Rottura spontanea di simmetria (Wigner e Nambu-Goto)

In Meccanica Quantistica una simmetria è una mappa:

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha'\rangle = U |\alpha\rangle \quad (5.2.1)$$

tale per cui:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha'|\beta'\rangle \quad (5.2.2)$$

quindi U dev'essere un operatore unitario. Inoltre ricordiamo che per il teorema di Noether ogni simmetria corrisponde una corrente conservata:

$$\delta S \sim \int d^4x (\partial_\mu j^\mu) = 0 \quad (5.2.3)$$

da cui ricaviamo la carica conservata:

$$Q^a = \int d^4x j^{0a} \quad (5.2.4)$$

inoltre abbiamo che:

$$[H, Q^a,] = 0 \quad (5.2.5)$$

e per questo possiamo esprimere:

$$U = e^{i a^a Q^a}. \quad (5.2.6)$$

Una simmetria può agire su una teoria in due modi diversi in base a come agisce sul vuoto: *realizzazione alla Wigner* o *realizzazione di Nambu-Goto*. Per Wigner abbiamo:

$$U |0\rangle = |0\rangle \quad , \quad Q_0 |0\rangle = 0 \quad (5.2.7)$$

pertanto tutto lo spettro è caratterizzato da multipletti del gruppo di simmetria ovvero di Q_a , quindi per esempio se abbiamo due stati degeneri allora:

$$|\alpha\rangle = Q_a |\alpha\rangle. \quad (5.2.8)$$

Per Nambu-Goto invece abbiamo:

$$U |0\rangle \neq |0\rangle \quad (5.2.9)$$

cioè il vuoto non è invariante, e con un abuso di notazione si dice che la *simmetria è spontaneamente rotta* (U continua a commutare con H).

5.3 Rottura della simmetria e spettro di massa

Consideriamo un campo reale scalare ϕ^a con $a = \{1, 2\}$ e:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - V(\phi^a) \quad (5.3.1)$$

dunque per cui abbiamo:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^a)^2 + \frac{1}{2} (\nabla_i \phi^a)^2 + V(\phi^a) \quad (5.3.2)$$

tuttavia la teoria dev'essere invariante di Poincarè (Lorentz e traslazioni nello spazio-tempo), quindi il vuoto della teoria è dato dalla condizione che estremizza del potenziale, cioè dobbiamo avere:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi^a} = 0. \quad (5.3.3)$$

Studiamo le conseguenze di queste due realizzazioni per lo spettro di massa della teoria. Nella lagrangiana non abbiamo scritto un termine di massa esplicito ma lo ritroviamo quando espandiamo in un intorno del vuoto:

$$V(\phi^a) = V(\langle \phi^a \rangle) + \frac{\partial V}{\partial \phi^a} (\phi^a - \langle \phi^a \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \Big|_{\langle \phi \rangle} (\phi^a - \langle \phi^a \rangle) (\phi^b - \langle \phi^b \rangle) \quad (5.3.4)$$

la derivata prima è nulla nel vuoto, il termine costante è l'energia di punto zero che può essere ignorata e dunque rimane solamente:

$$M_{ab}^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \Big|_{\phi^a = \langle \phi^a \rangle}. \quad (5.3.5)$$

Consideriamo una trasformazione:

$$\delta \phi^a = R_b^a \phi^b \quad (5.3.6)$$

di $SO(2)$, per la quale il potenziale trasforma con:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \phi^a} \delta \phi^a = \frac{\partial V}{\partial \phi^a} R_b^a \phi^b. \quad (5.3.7)$$

Tuttavia se ipotizziamo che \mathcal{L} sia invariante di $SO(2)$, abbiamo che:

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial \phi^a} R_b^a \phi_b \right)_{\langle \phi^b \rangle} = 0 \quad (5.3.8)$$

quindi:

$$\frac{\partial}{\partial \phi^c} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi^a} R_b^a \phi^b \right)_{\langle \phi^b \rangle} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^c} R_b^a \langle \phi^b \rangle + \frac{\partial V}{\partial \phi^a} R_b^a \delta_c^b \right)_{\langle \phi^b \rangle} \quad (5.3.9)$$

$$= M_{ac}^2 R_b^a \langle \phi_b \rangle \quad (5.3.10)$$

$$= 0. \quad (5.3.11)$$

Dunque, ricordando che la variazione del vuoto è:

$$\delta\langle\phi^a\rangle = \alpha R_b^a \langle\phi^b\rangle \quad (5.3.12)$$

possiamo avere:

- La realizzazione alla Wigner se:

$$\delta\langle\phi^a\rangle R_a^b \langle\phi_b\rangle = 0 \quad (5.3.13)$$

che implica la *preservazione del vuoto*:

$$U |0\rangle = |0\rangle \quad (5.3.14)$$

che non dà informazioni aggiuntive sulle particelle.

- La realizzazione alla Nambu-Goto se:

$$\delta\langle\phi^a\rangle R_a^b \langle\phi_b\rangle \neq 0 \quad (5.3.15)$$

che implica la *"rottura" del vuoto*:

$$U |0\rangle = |0\rangle \quad (5.3.16)$$

in questo caso la matrice di massa M_{ab}^2 ha un autovalore nullo, dunque esiste sempre una particella a massa nulla, che prende il nome di **bosone di Goldstone**.

5.4 Teorema di Goldstone

Sia G un gruppo di simmetria ($\dim G = n_A + n_\alpha$) con: n_α generatori H^α che preservano il vuoto ($(H^\alpha)_b^a \langle\phi^b\rangle = 0$ (Wigner); n_A generatori "rotti" K^A che non preservano il vuoto ($(K^A)_b^a \langle\phi^b\rangle \neq 0$ (Nambu-Got). Per ognuno di questi generatori rotti esiste un autovettore:

$$v_a^A = (K^A)_b^a \langle\phi^b\rangle \quad (5.4.1)$$

calcolato rispetto ad M_{ac}^2 con autovalore nullo, ovvero per cui abbiamo:

$$M_{ac}^2 v_a^A = 0 \quad (5.4.2)$$

quindi a ciascun generatore rotto associamo una particella a massa nulla, detta **bosone di Goldstone**.

Nota. non vale l'inverso di questo teorema, per esempio se abbiamo $V = 0$ $\phi = \text{cost}$ e questo restituisce un vuoto, abbiamo delle simmetrie e abbiamo delle particelle mass-less, ma questo è una conseguenza del fatto che $V = 0$, non c'entra con Goldstone.

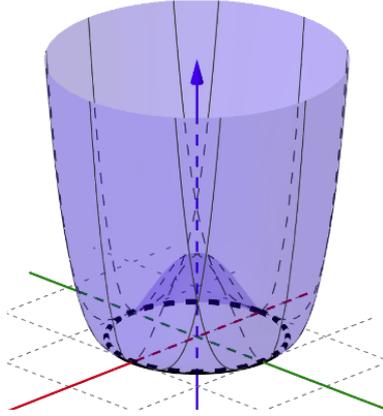


Figura 5.2

5.5 Esempio di rottura della simmetria

I riferimenti sono p. 348 del Peskin [4].

Studiamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{b=1,2} \left(\partial_\mu \phi^b \right) \left(\partial^\mu \phi^b \right) - V(\phi^b) \quad (5.5.1)$$

in cui scegliamo:

$$V(\phi^a) = \frac{\lambda}{4!} \left(\sum_{b=1,2} \frac{1}{2} \phi^b \phi^b - a^2 \right)^2. \quad (5.5.2)$$

Passiamo ad un campo complesso:

$$\phi = \frac{\phi^1 + i \phi^2}{\sqrt{2}} \quad (5.5.3)$$

ed otteniamo:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger - \frac{\lambda}{4!} \left(\phi \phi^\dagger - a^2 \right)^2 \quad (5.5.4)$$

e possiamo osservare che abbiamo un'invarianza di fase globale. Se vogliamo calcolare il vuoto della teoria dobbiamo studiare:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \phi^\dagger} = 0 \quad (5.5.5)$$

da cui otteniamo:

$$\langle \phi \rangle = \langle \phi^\dagger \rangle = a \quad (5.5.6)$$

oppure:

$$\langle \phi \rangle = \langle \phi^\dagger \rangle = 0. \quad (5.5.7)$$

Se abbiamo $a^2 \leq 0$ abbiamo un'uncia soluzione:

$$\langle \phi \rangle = 0 \quad (5.5.8)$$

dunque:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det M^2 \neq 0. \quad (5.5.9)$$

Se $a^2 > 0$ abbiamo un massimo in $\langle \phi \rangle = 0$ ed un minimo in $\langle \phi \rangle = a$, infatti se andiamo a studiare la matrice di massa abbiamo:

$$\partial_{\bar{\phi}}^2 V = \bar{\phi}^2 \longrightarrow a^2 \quad (5.5.10)$$

$$\partial_{\phi}^2 V = \phi^2 \longrightarrow a^2 \quad (5.5.11)$$

$$\partial_{\phi, \bar{\phi}}^2 V = 2\phi\bar{\phi} = 2\phi\bar{\phi} - a^2 \longrightarrow a^2 \quad (5.5.12)$$

dunque abbiamo:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 \\ a^2 & a^2 \end{pmatrix}, \quad \det M^2 = 0 \quad (5.5.13)$$

quindi uno degli autovalori è nullo, dunque il vuoto rompe spontaneamente la simmetria, infatti in questo caso il vuoto realizza la simmetria alla Nambu-Goto.

5.5.1 Sostituzione 1

Prendendo (5.5.4) studiamo:

$$\phi = \rho e^{i\theta} \quad (5.5.14)$$

per cui abbiamo:

$$\partial_{\mu}\phi = (\partial_{\mu}\rho + i\rho\partial_{\mu}\theta) e^{i\theta} \quad (5.5.15)$$

$$\partial_{\mu}\phi^{\dagger} = (\partial_{\mu}\rho - i\rho\partial_{\mu}\theta) e^{-i\theta} \quad (5.5.16)$$

da cui:

$$\mathcal{L} = \partial_{\mu}\rho\partial^{\mu}\rho + \rho^2\partial_{\mu}\theta\partial^{\mu}\theta - \frac{\lambda}{4!}(\rho^2 - a^2)^2 \quad (5.5.17)$$

il potenziale non dipende più da θ (che può essere il bosone di Goldstone) e per cui:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\lambda}{6}(\rho^2 - a^2)\rho = 0 \quad (5.5.18)$$

che implica:

$$\langle \rho \rangle = 0 \quad (\text{massimo}) \quad (5.5.19)$$

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 = \pm a \quad (\text{minimo}). \quad (5.5.20)$$

Espandendo il potenziale intorno al vuoto, ignorando l'energia di punto zero, abbiamo:

$$V(\rho) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} (\rho - \rho_0)^2 \quad (5.5.21)$$

$$= \frac{\lambda}{6} a^2 (\rho - \rho_0)^2. \quad (5.5.22)$$

Se poniamo $\xi = \rho - \rho_0$ otteniamo:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi + \rho_0)^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{6} a^2 \xi^2 + \dots \quad (5.5.23)$$

se trascuriamo anche i termini di accoppiamento (infatti per determinare lo spettro di massa ci bastano i termini quadratici) abbiamo che:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \rho_0^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{6} a^2 \xi^2 + \dots \quad (5.5.24)$$

quindi θ è il bosone di Goldstone, mentre ξ è un campo massivo. Infine, dobbiamo rinormalizzare i due campi:

$$\xi \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \xi \quad , \quad \rho_0 \theta \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \theta \quad (5.5.25)$$

in questo modo otteniamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{12} a^2 \xi^2 + \dots \quad (5.5.26)$$

5.5.2 Sostituzione 2

Ripartendo da (5.5.4), ma trasliamo rispetto al vuoto:

$$\phi = \frac{\xi + i\theta}{\sqrt{2}} + \langle \phi \rangle \quad , \quad \langle \phi \rangle = a \quad (5.5.27)$$

in questo modo otteniamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{4 \cdot 4!} \left(\xi^2 + \theta^2 + 2\sqrt{2} a \xi \right)^2 \quad (5.5.28)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{\lambda}{4 \cdot 4!} \left(\xi^4 + \theta^4 + 8 a^2 \xi^2 + 2 \xi^2 \theta^2 + 4\sqrt{2} a \xi^3 + 4\sqrt{2} a \xi \theta^2 \right)^2 \quad (5.5.29)$$

dunque ξ ha massa:

$$m_\xi^2 = \frac{\lambda}{6} a^2 \quad (5.5.30)$$

mentre θ resta massless e rappresenta il bosone di Goldstone.

Osservazione Dopo aver fatto una traslazione rispetto al vuoto, se volessimo fare una traslazione di fase infinitesima per mantenere la lagrangiana invariante dovremmo studiare una trasformazione non lineare. **forse a lezione (21) si fa un esempio.**

5.6 Fotone massivo tramite Goldstone

Consideriamo la simmetria $U(1)$ (di fase) locale:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi \phi^\dagger) \quad (5.6.1)$$

in cui abbiamo:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + ie A_\mu) \phi \quad (5.6.2)$$

e studiamo:

$$V(\phi \phi^\dagger) = \frac{\lambda}{4!} (\phi \phi^\dagger - a^2)^2 \quad (5.6.3)$$

con $\langle \phi \rangle = \langle \phi^\dagger \rangle = a$ e $a^2 > 0$. Osserviamo che i gradi di libertà totali sono 4 (due dallo scalare complesso ϕ e due dal fotone A).

5.6.1 Sostituzione

Consideriamo $\phi = \rho e^{i\theta}$, per cui:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu \rho + i\rho \partial_\mu \theta + ie A_\mu \rho) e^{i\theta} \quad (5.6.4)$$

$$= (\partial_\mu \rho + i\rho(\partial_\mu \theta + e A_\mu)) e^{i\theta} \quad (5.6.5)$$

e conseguentemente:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 (\partial_\mu \theta + e A_\mu)^2 - \frac{\lambda}{4!} (\rho^2 - a^2)^2 \quad (5.6.6)$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{4!} (\rho^2 - a^2)^2 \quad (5.6.7)$$

in cui nell'ultimo passaggio abbiamo fatto la trasformazione di gauge:

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \quad (5.6.8)$$

in questo modo il bosone di Goldstone è stato riassorbito nel fotone che ha acquistato massa:

$$m_A^2 = 2 a^2 e^2. \quad (5.6.9)$$

Espandendo intorno al vuoto ponendo:

$$\xi = \rho - \rho_0 \quad (5.6.10)$$

in cui:

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 = \pm a \quad (5.6.11)$$

otteniamo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi + \rho_0)^2 e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{4!} \left((\xi + \rho_0)^2 - \rho_0^2 \right)^2 \quad (5.6.12)$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi^2 + 2\rho_0 \xi + \rho_0^2) e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{4!} \left[\xi^2 + 2\rho_0 \xi \right]^2 \quad (5.6.13)$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \rho_0^2 e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{6} \rho_0^2 \xi^2 + \mathcal{L}_{int} \quad (5.6.14)$$

in cui poniamo:

$$\mathcal{L}_{int} = \left(\xi^2 + 2\rho_0 \xi \right) e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{4!} \left[\xi^4 + 4\rho_0 \xi^3 \right]. \quad (5.6.15)$$

Infine, dobbiamo rinormalizzare:

$$\xi \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \xi \quad (5.6.16)$$

e sostituiamo $\rho_0^2 = a^2$, così otteniamo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + a^2 e^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{12} a^2 \xi^2 + \mathcal{L}_{int} \quad (5.6.17)$$

dunque, che sta descrivendo un campo ξ reale con la stessa massa vista in precedenza:

$$m_\xi^2 = \frac{\lambda}{6} a^2 \quad (5.6.18)$$

ed un campo vettoriale massivo con:

$$M_A^2 = 2 a^2 e^2. \quad (5.6.19)$$

Osservazione. Il risultato assomiglia alla lagrangiana di Proca (i termini quadratici sono uguali, ma i termini di interazione sono diversi) ma sta volta è rinormalizzabile; la rottura spontanea della simmetria preserva i gradi di libertà e li riorganizza: un grado di libertà appartiene a ξ (particella di Higgs) e 3 appartengono al bosone massivo A , in più la trasformazione di gauge equivale a inglobare il bosone di Goldstone dentro A e in particolare la polarizzazione longitudinale di A coincide con il bosone di Goldstone.

Nota. Non si può fare un discorso analogo con il campo spinoriale perché dovremmo fissare l'invarianza per rotazione e quindi l'invarianza di Lorentz/Poincaré!

5.7 Struttura del modello standard (Glashow-Weisberg-Salam)

Possiamo descrivere la fisica utilizzando:

- **Particelle di materia**, descritte da campi spinoriali (Dirac/Weyl), che si separano in:
 - *Leptoni* (elettrone, muone, tau e neutrini), che sono particelle elementari, ovvero senza ulteriori strutture interne.
 - *Adroni*, costituiti da quark (up/down, charm/strange, top/bottom) che sono particelle fondamentali.
- **Interazioni** (elettromagnetica, debole e forte, ignoriamo la gravità), descritte da campi di gauge (vettoriali), legati alla simmetria di gauge. Queste interazioni fanno parte del gruppo di gauge: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, in cui il termine $SU(3)$ riguarda la carica di colore (*Quantum Chromo-Dynamics*, che non trattiamo), il termine $SU(2)$ è l'isospin, $SU(3)$ è l'ipercarica e inoltre $SU(2) \times U(1)$ unifica elettromagnetismo e forza debole (notiamo che da solo $U(1)$ non è l'elettromagnetismo).
- **Settore di Higgs**, descritto da un campo scalare che è responsabile della generazione dei termini di massa della materia (che non posso aggiungere direttamente).

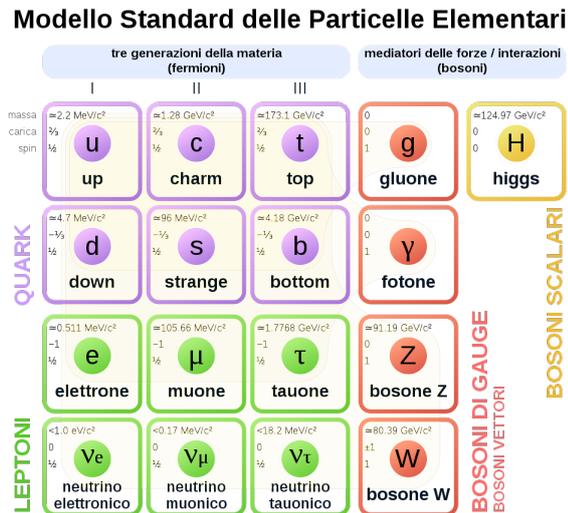


Figura 5.3

Se si rompono esplicitamente (non spontaneamente) le simmetrie di gauge allora si ottengono delle equazioni che non sono consistenti, quindi bisogna

verificare che le simmetrie di gauge vengono conservate dalla quantizzazione. Se abbiamo delle anomalie, ovvero le simmetrie non sono conservate dalla quantizzazione la teoria perde di senso. Nel modello standard per evitare anomalie nelle simmetrie di gauge il numero di famiglie dei quark devono essere uguali al numero di famiglie dei leptoni e sono 3 ciascuno (elettrone e neutrino elettronico fanno parte della stessa famiglia, idem per gli μ , τ , analogamente up/down, top/bottom e charm/strange).

La lagrangiana del modello standard è costituita da un termine di Young-Mills (bosoni vettori che mediano le interazioni), un termine di Higgs, un termine di materia (descrivono leptoni e quark) e delle interazioni di Yukawa. Andiamo a studiare prima il settore leptonic, per cui abbiamo solo interazioni elettrodeboli, dopodiché trattiamo i termini di Yang-Mills e di Higgs, infine studiamo le interazioni elettrodeboli del settore adronico: costruiamo la parte di interazione debole in analogia al settore leptonic e analizziamo il mixing dei quark.

5.8 Termini cinetici di Yang-Mills rispetto ad generatori

Il termine di Yang-Mills è dato da $SU(3)_C \times SU(2)_{I_3} \times U(1)_Y$ con numeri quantici di colore (C), isospin (I_3) e ipercarica (Y). Il gruppo $SU(3)$ descrive le interazioni di QCD tra i quark mediati dai gluoni, mentre $SU(2) \times U(1)$ descrivono le interazioni elettrodeboli mediate dai bosoni W_μ^\pm (corrente debole carica), Z_μ (corrente debole neutra) e A_μ (corrente elettromagnetica).

Introduciamo inoltre le costanti di accoppiamento g_3 , g_2 , g_1 , rispettivamente per l'interazione di colore $SU(3)_C$, l'interazione di isospin $SU(2)_{I_3}$ e l'interazione di ipercarica $U(1)_Y$.

Per il gruppo $SU(3)_C$ abbiamo i generatori:

$$T^B = \frac{1}{2} \lambda^B \quad B \in \{1, \dots, 8\} \quad (5.8.1)$$

in cui λ sono le **matrici di Gell-Mann-Low** ed i bosoni vettori sono i gluoni: G_μ^B .

Il termine cinetico per la QCD è:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} \sum_{B=1}^8 G_{\mu\nu}^B G^{\mu\nu B} \quad (5.8.2)$$

che in realtà non utilizzeremo, ma l'abbiamo citata solo per completezza, e in cui definiamo:

$$G_{\mu\nu}^B = \partial_\mu G_\nu^B - \partial_\nu G_\mu^B - g_3 f^{BCD} G_\mu^C G_\nu^D. \quad (5.8.3)$$

Per il gruppo $SU(2)_{I_3}$ abbiamo i generatori:

$$T^a = \frac{1}{2} \sigma^a \quad a \in \{1, 2, 3\} \quad (5.8.4)$$

in cui σ sono le **matrici di Pauli** ed i bosoni vettori sono: W_μ^a .

Il termine cinetico è:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 W_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (5.8.5)$$

cui definiamo:

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g_2 \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c. \quad (5.8.6)$$

Per il gruppo $U(1)_Y$ abbiamo un unico generatore (l'identità) ed un bosone vettore B_μ . Il termine cinetico è:

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (5.8.7)$$

in cui definiamo:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (5.8.8)$$

5.9 Settore leptónico

Dai risultati sperimentali (di Madame Wu) si osserva che le interazioni deboli violano la parità, dunque le componenti L e R si comportano diversamente e perciò conviene usare gli spinori di Weyl anziché quelli di Dirac.

Una famiglia contiene una particella (e, μ, τ) e il suo neutrino associato, nel modello standard $e/\mu/\tau$ hanno una componente L e una R, mentre i neutrini sono massless ed esistono solo nella chiralità L (negli esperimenti si osserva che oscillano e hanno una massa molto piccola $\ll 1$ eV).

Le componenti Left formano un doppietto di $SU(2)$ che indichiamo come:

$$L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad (5.9.1)$$

mentre le componenti Right sono dei singoletti di $SU(2)$ che indichiamo come l_R, ν_R . Vedremo che il neutrino Right è completamente disaccoppiato, ovvero non interagisce.

5.9.1 Bosoni fisici e costanti di accoppiamento

Per comodità possiamo definire:

$$W_\mu = W_\mu^a \sigma^a \quad (5.9.2)$$

$$= \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (5.9.3)$$

$$= \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (5.9.4)$$

in cui abbiamo posto:

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (5.9.5)$$

e quindi usiamo:

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2} (\sigma_1 \pm i\sigma_2) \quad (5.9.6)$$

dunque:

$$W_\mu^+ \sigma_+ + W_\mu^- \sigma_- = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 + i\sigma_2) (W_\mu^1 - iW_\mu^2) + (\sigma_1 - i\sigma_2) (W_\mu^1 + iW_\mu^2) \right] \quad (5.9.7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \sigma_1 + W_\mu^2 \sigma_2). \quad (5.9.8)$$

Sappiamo che $SU(2) \times SU(1)$ descrive la corrente elettro-debole, che è composta da una corrente debole carica, una debole neutra e la corrente elettromagnetica.

Possiamo usare W_μ^\pm per mediare la corrente debole carica e vogliamo utilizzare una combinazione lineare dei due bosoni rimanenti per mediare la corrente debole neutra e l'elettromagnetismo, per ciò introduciamo una matrice di rotazione R ortogonale ($R^T R = \mathbb{1}$):

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & \sin \theta_w \\ -\sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (5.9.9)$$

$$\begin{cases} A_\mu = \sin \theta_w W_\mu^3 + \cos \theta_w B_\mu \\ Z_\mu = \cos \theta_w W_\mu^3 - \sin \theta_w B_\mu \end{cases} \quad (5.9.10)$$

che invertendo abbiamo:

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & \sin \theta_w \\ -\sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \quad (5.9.11)$$

$$\begin{cases} B_\mu = \cos \theta_w A_\mu - \sin \theta_w Z_\mu \\ W_\mu^3 = \sin \theta_w A_\mu + \cos \theta_w Z_\mu \end{cases} \quad (5.9.12)$$

nata che vale $\theta_w \approx 28^\circ$, detto *angolo di Weinberg*, oppure angolo di weak mixing. Questa scelta per Z e A è giustificata anche dal fatto che nella rottura di simmetria tramite Higgs la combinazione che forma Z acquisisce massa, mentre A rimane massless.

Dafiniamo la derivata covariante come:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu + \frac{i}{2} g_2 W_\mu^a \sigma^a \quad (5.9.13)$$

in cui il primo fattore $1/2$ è una convenzione, mentre il secondo è dovuto al fatto che il generatore di $SU(2)$ sia $T^a = \sigma^a / 2$. Questa scelta di derivata covariante rende la lagrangiana invariante rispetto a trasformazioni locali di $SU(2) \times U(1)$, inoltre bisogna ricordare che quando applichiamo questa derivata covariante un un singoletto di $SU(2)$, il termine con W è nullo.

Le costanti di accoppiamento verranno fissate imponendo la carica elettrica di elettrone e neutrino Left, tramite lo studio della derivata covariante per il doppietto Left:

$$D_\mu L = \partial_\mu L + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} + \frac{i}{2} g_2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \quad (5.9.14)$$

$$= \partial_\mu L + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} g_1 Y B_\mu + g_2 W_\mu^3 & \sqrt{2} g_2 W_\mu^+ \\ \sqrt{2} g_2 W_\mu^- & g_1 Y B_\mu - g_2 W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \quad (5.9.15)$$

$$= \partial_\mu L + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} (g_1 Y B_\mu + g_2 W_\mu^3) \nu_L + (\sqrt{2} g_2 W_\mu^+) l_L \\ (g_1 Y B_\mu - g_2 W_\mu^3) l_L + (\sqrt{2} g_2 W_\mu^-) \nu_L \end{pmatrix}. \quad (5.9.16)$$

Anche:

$$\bar{L} \not{D} L = \bar{L} \not{\partial} L + \bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{ew} L + \bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{cc} L \quad (5.9.17)$$

$$= \bar{L} \not{\partial} L + \frac{i}{2} \left[\bar{\nu}_L \gamma^\mu (g_1 Y B_\mu + g_2 W_\mu^3) \nu_L + \bar{l}_L \gamma^\mu (g_1 Y B_\mu - g_2 W_\mu^3) l_L \right] + \frac{i}{2} \sqrt{2} g_2 \left(\bar{\nu}_L \gamma^\mu W_\mu^+ l_L + \bar{l}_L \gamma^\mu W_\mu^- \nu_L \right). \quad (5.9.18)$$

Studiamo la corrente elettrodebole:

$$\bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{ew} L = \frac{i}{2} \left[\bar{\nu}_L \gamma^\mu (g_1 Y B_\mu + g_2 W_\mu^3) \nu_L + \bar{l}_L \gamma^\mu (g_1 Y B_\mu - g_2 W_\mu^3) l_L \right] \quad (5.9.19)$$

$$= \frac{i}{2} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \left[(g_1 Y \cos \theta_w + g_2 \sin \theta_w) A_\mu - (g_1 Y \sin \theta_w - g_2 \cos \theta_w) Z_\mu \right] \nu_L + \frac{i}{2} \bar{l}_L \gamma^\mu \left[(g_1 Y \cos \theta_w - g_2 \sin \theta_w) A_\mu - (g_1 Y \sin \theta_w + g_2 \cos \theta_w) Z_\mu \right] l_L \quad (5.9.20)$$

siccome A media la corrente elettromagnetica, quindi dobbiamo imporre la carica elettrica:

$$\begin{cases} \nu_L : & \frac{1}{2}(g_1 Y \cos \theta_w + g_2 \sin \theta_w) = 0 \\ l_L : & \frac{1}{2}(g_1 Y \cos \theta_w - g_2 \sin \theta_w) = e \end{cases} \quad (5.9.21)$$

ovvero:

$$-g_2 \sin \theta_w = g_1 Y \cos \theta_w = e \quad (5.9.22)$$

se imponiamo che l'iper carica del doppietto Left sia $Y(L) = -1$, allora:

$$g_2 \sin \theta_w = g_1 \cos \theta_w = -e \quad (5.9.23)$$

ovvero:

$$g_1 = -\frac{e}{\cos \theta_w} \quad , \quad g_2 = -\frac{e}{\sin \theta_w} \quad (5.9.24)$$

che se sostituite nella corrente elettrodebole:

$$\begin{aligned} \bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{ew} L &= ie \bar{l}_L \gamma^\mu A_\mu l_L - \frac{i}{2} \left[\bar{\nu}_L \gamma^\mu (g_1 Y \sin \theta_w - g_2 \cos \theta_w) \nu_L + \right. \\ &\quad \left. + \bar{l}_L \gamma^\mu (g_1 Y \sin \theta_w + g_2 \cos \theta_w) l_L \right] Z_\mu \end{aligned} \quad (5.9.25)$$

$$\begin{aligned} &= ie \bar{l}_L \gamma^\mu A_\mu l_L + \frac{ie}{2 \sin \theta_w \cos \theta_w} \left[-\bar{\nu}_L \gamma^\mu (\sin^2 \theta_w + \cos^2 \theta_w) \nu_L + \right. \\ &\quad \left. + \bar{l}_L \gamma^\mu (\sin^2 \theta_w - \cos^2 \theta_w) l_L \right] Z_\mu \end{aligned} \quad (5.9.26)$$

$$\begin{aligned} &= -ie \left[-\bar{l}_L (\gamma^\mu A_\mu) l_L + \frac{1}{\sin(2\theta_w)} \bar{\nu}_L (\gamma^\mu Z_\mu) \nu_L - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\tan(2\theta_w)} \bar{l}_L (\gamma^\mu Z_\mu) l_L \right]. \end{aligned} \quad (5.9.27)$$

5.9.2 Numeri quantici e campi

Possiamo riscrivere la matrice di Pauli in funzione dell'isospin:

$$I_3 = \frac{1}{2} \sigma_3 \quad (5.9.28)$$

e ciò ci permette di ricavare la formula di Gell-Mann e Nishijima:

$$Q = \frac{Y}{2} + I_3 \quad (5.9.29)$$

che usiamo per ricavare l'ipercarica (Y) che è uguale per tutti i membri dello stesso multipletto. Ricordiamo che per i singoletti l'isospin vale $I_3 = 0$, mentre per i doppietti è:

$$I_3 = +\frac{1}{2} \quad (5.9.30)$$

per la prima componente e:

$$I_3 = -\frac{1}{2} \quad (5.9.31)$$

per la seconda. Abbiamo:

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \quad (5.9.32)$$

è un doppietto rispetto a $SU(2)$ ed è carico rispetto ad $U(1)$; l_R è un singoletto rispetto ad $SU(2)$ ($I_3 = 0$) ed è carico rispetto ad $U(1)$. Il campo di Higgs è un doppietto di $SU(2)$ ed è carico rispetto ad $U(1)$, pertanto lo definiamo come:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (5.9.33)$$

dove ϕ^+ , ϕ^0 sono due campi complessi e ϕ^+ ha carica $+1$.

Riassumiamo il tutto nella tabella 5.4.

	Higgs		Leptoni				Quarks			
	ϕ^+	ϕ^0	ν_L	l_L	ν_R	l_R	u_L	d_L	u_R	d_R
Q	+1	0	0	-1	0	-1	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
I_3	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
Y	+1	+1	-1	-1	0	-2	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Figura 5.4

5.9.3 Lagrangiana massless dei leptoni

Riassumendo, per il doppietto Left abbiamo:

$$\bar{L} \not{D} L = \bar{L} \not{\partial} L + \bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{ew} L + \bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{cc} L \quad (5.9.34)$$

in cui:

$$\bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{ew} L = -ie \left[-\bar{l}_L (\gamma^\mu A_\mu) l_L + \frac{1}{\sin(2\theta_w)} \bar{\nu}_L (\gamma^\mu Z_\mu) \nu_L - \frac{1}{\tan(2\theta_w)} \bar{l}_L (\gamma^\mu Z_\mu) l_L \right] \quad (5.9.35)$$

$$\bar{L} \gamma^\mu J_\mu^{cc} L = -\frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \left(\bar{\nu}_L \gamma^\mu W_\mu^+ l_L + \bar{l}_L \gamma^\mu W_\mu^- \nu_L \right) \quad (5.9.36)$$

mentre per i singoletti Right abbiamo:

$$\bar{l}_R \not{D} l_R = \bar{l}_R \not{\partial} l_R + i e \bar{l}_R \gamma^\mu \left(A_\mu - \tan \theta_w Z_\mu \right) l_R \quad (5.9.37)$$

il neutrino Right è completamente disaccoppiato, nel senso che non abbiamo interazioni elettrodeboli.

Infine osserviamo che nei termini puramente cinetici la parte L e quella la R sono identiche, quindi possiamo scriverli come:

$$\bar{l}_L \not{\partial} l_L + \bar{\nu}_L \not{\partial} \nu_L + \bar{l}_R \not{\partial} l_R + \bar{\nu}_R \not{\partial} \nu_R = \bar{l} \not{\partial} l + \bar{\nu} \not{\partial} \nu. \quad (5.9.38)$$

Possiamo scrivere la lagrangiana del settore leptónico come:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{lep} &= i \bar{L} \not{D} L + i \bar{l}_R \not{D} l_R + i \bar{\nu}_R \not{D} \nu_R \quad (5.9.39) \\ &= i \bar{l} \not{\partial} l + i \bar{\nu} \not{\partial} \nu - e \left(\bar{l} \gamma^\mu l \right) A_\mu + e \left[\frac{1}{\sin(2\theta_w)} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\tan(2\theta_w)} \bar{l}_L \gamma^\mu l_L + \tan \theta_w \bar{l}_R \gamma^\mu l_R \right] Z_\mu + \\ &\quad + \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \left(\bar{\nu}_L \gamma^\mu W_\mu^+ l_L + \bar{l}_L \gamma^\mu W_\mu^- \nu_L \right) \quad (5.9.40) \end{aligned}$$

in cui il primo termine sono i termini *cinetici e di corrente elettromagnetica*, il secondo la *corrente debole neutra* e l'ultimo la *corrente debole carica*. Osserviamo che le correnti deboli (neutre e cariche) si accoppiano in modo diverso con le componenti left e right, questo è sintomo del fatto che le interazioni deboli violano la parità.

Riscriviamo la lagrangiana usando i proiettori Left e Right:

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad (5.9.41)$$

e per entrambi vale $(P_{L,R})^2 = P_{L,R}^\dagger = P_{L,R}$. Osserviamo che:

$$\bar{\psi}_L (\gamma^\mu B_\mu) \phi_L = \psi^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\mu B_\mu P_L \phi \quad (5.9.42)$$

$$= \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu (P_L)^2 B_\mu \phi \quad (5.9.43)$$

$$= \bar{\psi} \gamma^\mu P_L B_\mu \phi \quad (5.9.44)$$

e analogamente per *R*. Scriviamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{lep} &= i \bar{l} \not{\partial} l + i \bar{\nu} \not{\partial} \nu - e \left(\bar{l} \gamma^\mu l \right) A_\mu + \\ &\quad + \frac{e}{2 \sin 2\theta_w} \left[\bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu + \bar{l} \gamma^\mu (4 \sin^4 \theta_w - 1 + \gamma_5) l \right] Z_\mu + \\ &\quad + \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_w} \left(\bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^+ l + \bar{l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^- \nu \right). \quad (5.9.45) \end{aligned}$$

Annotazioni. Nel studiare il settore leptonic abbiamo un po' barato, nel senso che se teniamo le componenti L/R esplicite non dovremmo utilizzare γ^μ (matrici 4x4) bensì le σ^μ (matrici 2x2) per le componenti R e le $\bar{\sigma}^\mu$ (matrici 2x2) per le componenti L. Ricordiamo che $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$ e $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma})$, inoltre in rappresentazione di Weyl abbiamo:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9.46)$$

e possiamo osservare che:

$$\gamma^0 \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix}. \quad (5.9.47)$$

In più, nel nostro disorso abbiamo utilizzato un abuso di notazione per cui:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (5.9.48)$$

questo abuso è compatibile con le relazioni dei proiettori:

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi, \quad \psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \quad (5.9.49)$$

inoltre:

$$\psi = \psi_R + \psi_L \quad (5.9.50)$$

che ci giustifica l'uso della γ . Riarrangiando i termini ritroviamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L}_K = L^\dagger \bar{\sigma}^\mu i D_\mu L + l_R^\dagger \sigma^\mu i D_\mu l_R + \nu_R^\dagger \sigma^\mu i D_\mu \nu_R \quad (5.9.51)$$

$$= i \left(l_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu l_L + l_R^\dagger \sigma^\mu D_\mu l_R \right) + i \left(\nu_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \nu_L + \nu_R^\dagger \sigma^\mu D_\mu \nu_R \right) \quad (5.9.52)$$

$$= \begin{pmatrix} l_L^\dagger & l_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} (i D_\mu) \begin{pmatrix} l_L \\ l_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_L^\dagger & \nu_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} (i D_\mu) \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R \end{pmatrix} \quad (5.9.53)$$

$$= \begin{pmatrix} l_L^\dagger & l_R^\dagger \end{pmatrix} \gamma^0 \gamma^\mu (i D_\mu) \begin{pmatrix} l_L \\ l_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_L^\dagger & \nu_R^\dagger \end{pmatrix} \gamma^0 \gamma^\mu (i D_\mu) \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R \end{pmatrix} \quad (5.9.54)$$

$$= \bar{l} (i \gamma^\mu D_\mu) l + \bar{\nu} (i \gamma^\mu D_\mu) \nu. \quad (5.9.55)$$

5.10 Trasformazione di carica e di parità

Ricordiamo ancora che $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma})$ e che nella rappresentazione di Weyl:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (5.10.1)$$

ma anche che, nella stessa rappresentazione:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Mentre in quella di Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La parità (P) in generale agisce come:

$$\psi(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} \psi^P(t, \vec{x}) = \gamma^0 \psi(t, -\vec{x}). \quad (5.10.2)$$

La coniugazione di carica è:

$$C = i\gamma^0 \gamma^2 = -i\gamma^2 \gamma^0 \quad (5.10.3)$$

e in generale agisce come:

$$\psi \xrightarrow{C} \psi^C = C \psi C^\dagger \quad (5.10.4)$$

in base al tipo di campo a cui lo applichiamo abbiamo una trasformazione diversa rispetto C . Vediamo i diversi casi.

Spinore chiriale. La coniugazione di carica agisce come:

$$\psi \xrightarrow{C} \psi^C = \eta_C C (\bar{\psi})^T \quad (5.10.5)$$

ovvero:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \xrightarrow{C} \psi^C = \eta_C C (\bar{\psi})^T \quad (5.10.6)$$

$$= \eta_C C \gamma^0 \psi^* \quad (5.10.7)$$

$$= -i\eta_C \gamma^2 \psi^* \quad (5.10.8)$$

$$= \eta_C \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L^* \\ \psi_R^* \end{pmatrix} \quad (5.10.9)$$

$$= \eta_C \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \psi_L^*(t, -\vec{x}) \\ +i\sigma^2 \psi_R^*(t, -\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (5.10.10)$$

per brevità richiediamo che la fase sia $\eta_C = 1$.

Scalare complesso. La coniugazione restituisce:

$$\Phi \xrightarrow{C} \Phi^C = \Phi^* \quad (5.10.11)$$

dunque per PC abbiamo:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} \xrightarrow{CP} \Phi^{CP} = \Phi^*(t, -\vec{x}) = \begin{pmatrix} \phi_A^* \\ \phi_B^* \end{pmatrix}. \quad (5.10.12)$$

Bosone vettore neutro. Abbiamo:

$$A_\mu \xrightarrow{C} A_\mu^C = -A_\mu \quad (5.10.13)$$

dunque per PC otteniamo:

$$B_\mu^{CP} = (B_0^{CP}, B_i^{CP}) = (-B_0, B_i) \quad (5.10.14)$$

$$(W_\mu^3)^{CP} = ((W_0^3)^{CP}, (W_i^3)^{CP}) = (-W_0^3, W_i^3). \quad (5.10.15)$$

Bosone vettore carico Abbiamo:

$$A_\mu^\pm \xrightarrow{C} (A_\mu^\pm)^C = -A_\mu^\pm \quad (5.10.16)$$

dunque per PC otteniamo:

$$(W_\mu^\pm)^{CP} = ((W_0^\pm)^{CP}, (W_i^\pm)^{CP}) = (-W_0^\mp, W_i^\mp). \quad (5.10.17)$$

Invarianza della parte leptonica sotto CP. Dimostriamo che la parte leptonica del modello standard è invariante sotto CP:

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi = i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu + \frac{i}{2} g_2 W_\mu^a \sigma^a \right) \psi \xrightarrow{CP} \quad (5.10.18)$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{CP} & -i(\psi^{CP})^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \left[\partial_\mu^{CP} - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu^{CP} - \right. \\ & \left. - \frac{i}{2} g_2 (W_\mu^3 \sigma^3 + W_\mu^+ \sigma^+ + W_\mu^- \sigma^-)^{CP} \right] \psi^{CP} \quad (5.10.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & -i(-i\gamma^2 \psi^*)^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \left[+\partial_0 + ig_1 \frac{Y}{2} B_0 + \right. \\ & \left. + \frac{i}{2} g_2 (W_0^3 \sigma^3 + W_0^- \sigma^+ + W_0^+ \sigma^-) \right] (-i\gamma^2 \psi^*) + \\ & + -i(-i\gamma^2 \psi^*)^\dagger \gamma^0 \gamma^i \left[-\partial_i - ig_1 \frac{Y}{2} B_i - \right. \\ & \left. - \frac{i}{2} g_2 (W_i^3 \sigma^3 + W_i^- \sigma^+ + W_i^+ \sigma^-) \right] (-i\gamma^2 \psi^*) \quad (5.10.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & +i\psi^T \gamma^2 (\gamma^0 \gamma^0) \gamma^2 \left[\partial_0 + ig_1 \frac{Y}{2} B_0 + \frac{i}{2} g_2 (W_0^3 \sigma^3 + W_0^- \sigma^+ + W_0^+ \sigma^-) \right] \psi^* - \\ & -i\psi^T \gamma^2 (\gamma^0 \gamma^i) \gamma^2 \left[\partial_i + ig_1 \frac{Y}{2} B_i + \frac{i}{2} g_2 (W_i^3 \sigma^3 + W_i^- \sigma^+ + W_i^+ \sigma^-) \right] \psi^* \quad (5.10.21) \end{aligned}$$

abbiamo che $C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T$, ma siccome $C = i\gamma^0\gamma^2$ e $C^{-1} = C^T = -C^\dagger = -C$, otteniamo che:

$$-(\gamma^0\gamma^2)\gamma^\mu(\gamma^0\gamma^2) = (\gamma^\mu)^T. \quad (5.10.22)$$

Pertanto, oltre a $(\gamma^2)^2 = -\mathbb{1}$, abbiamo:

$$\gamma^2\gamma^0\gamma^i\gamma^2 = -C\gamma^iC\gamma^0 = -(\gamma^i)^T\gamma^0 = -(\gamma^0\gamma^i)^T. \quad (5.10.23)$$

Trasporre la matrice W equivale a scambiare i bosoni carichi, B resta uguale. Dunque abbiamo:

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi = i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ig_1\frac{Y}{2}B_\mu + \frac{i}{2}g_2W_\mu^a\sigma^a\right)\psi \xrightarrow{CP} \quad (5.10.24)$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{CP} & -i\psi^T(\gamma^0\gamma^0)^T\left[\partial_0 + \frac{i}{2}(g_1YB_0 + g_2(W_0^3\sigma^3 + W_0^+\sigma^+W_0^-\sigma^-))\right]^T(\psi^\dagger)^T + \\ & + i\psi^T(\gamma^i)^T(\gamma^0)^T\left[\partial_i + \frac{i}{2}(g_1YB_i + \right. \\ & \left. + g_2(W_i^3\sigma^3 + W_i^+\sigma^+W_i^-\sigma^-))\right]^T(\psi^\dagger)^T \end{aligned} \quad (5.10.25)$$

$$= \dots \quad (5.10.26)$$

La parte leptonica del modello standard è invariante sotto CP:

$$e_R^\dagger\sigma^\mu iD_\mu e_R = ie_R^\dagger\sigma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{i}{2}g''B_\mu\right)e_R \xrightarrow{CP} \quad (5.10.27)$$

$$\xrightarrow{CP} -i(e_R^{CP})^+\sigma^\mu\left(\partial_\mu^{CP} - \frac{i}{2}g''B_\mu^{CP}\right)e_R^{CP} \quad (5.10.28)$$

$$\begin{aligned} & = -i(-ie_R^T\sigma^2)\sigma^0\left(\partial_0 - \frac{i}{2}g''(-B_0)\right)(i\sigma^2 e_R^*) - \\ & \quad - i(-ie_R^T\sigma^2)\sigma^i\left(-\partial_i - \frac{i}{2}g''B_i\right)(i\sigma^2 e_R^*) \end{aligned} \quad (5.10.29)$$

$$\begin{aligned} & = -ie_R^T(\sigma^2\sigma^0\sigma^2)\left(\partial_0 + \frac{i}{2}g''B_0\right)e_R^* + \\ & \quad + ie_R^T(\sigma^2\sigma^i\sigma^2)\left(\partial_i + \frac{i}{2}g''B_i\right)e_R^* \end{aligned} \quad (5.10.30)$$

ma abbiamo che $\sigma^2 \sigma^0 \sigma^2 = \sigma^0 = (\sigma^0)^T$ e $\sigma^2 \sigma^i \sigma^2 = (\sigma^i)^T$, per cui:

$$= -ie_R^T (\sigma^0)^T \left(\partial_0 + \frac{i}{2} g'' B_0 \right) e_R^* + ie_R^T (\sigma^i)^T \left(\partial_i + \frac{i}{2} g'' B_i \right) e_R^* \quad (5.10.31)$$

aggiungiamo la derivata totale

$$= -ie_R^T (\sigma^\mu)^T \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} g'' B_\mu \right) e_R^* + i \partial_\mu (e_R^T (\sigma^\mu)^T e_R^*) \quad (5.10.32)$$

siccome è un numero abbiamo che $(\dots) = (\dots)^T$

$$= \left[-ie_R^T (\sigma^\mu)^T \frac{i}{2} g'' B_\mu e_R + i \partial_\mu (e_R^T (\sigma^\mu)^T e_R) \right]^T \quad (5.10.33)$$

$$= ie_R^+ \sigma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g'' B_\mu \right) e_R. \quad (5.10.34)$$

5.10.1 Decadimento del muone

Il muone decade tramite il bosone W , quindi usiamo la corrente carica:

$$\mathcal{L} = \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_w} \left(\bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^+ l + \bar{l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^- \nu \right) \quad (5.10.35)$$

inoltre ricordiamo che la costante di Fermi vale:

$$G_F = \frac{e^2}{4\sqrt{2} \sin^2 \theta_w M_w^2}. \quad (5.10.36)$$

Abbiamo la situazione raffigurata in figura 5.5.

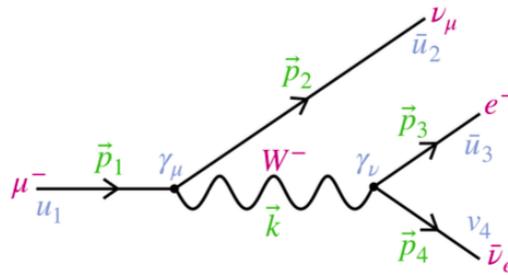


Figura 5.5: Processo di decadimento del muone.

Abbiamo:

$$\mathcal{A} = \frac{(ie)^2}{8 \sin^2 \theta_w} \langle \psi_\mu | \bar{\psi}_\mu \gamma^\rho (1 - \gamma_5) W_\rho^- \psi_{\nu_\mu} \cdot \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\sigma (1 - \gamma_5) W_\sigma^+ \psi_e | \bar{\psi}_{\nu_\mu} \bar{\psi}_e \psi_{\nu_e} \rangle \quad (5.10.37)$$

così che:

$$M = \frac{(ie)^2}{8 \sin^2 \theta_w} \bar{u}_2 \gamma^\rho (1 - \gamma_5) u_1 \frac{(-i\eta_{\rho\sigma})}{s - M_w^2} \bar{u}_3 \gamma^\sigma (1 - \gamma_5) \nu_4 \quad (5.10.38)$$

$$= \frac{ie^2}{8 \sin^2 \theta_w (s - M_w^2)} \bar{u}_2 \gamma^\rho (1 - \gamma_5) u_1 \cdot \bar{u}_3 \gamma_\rho (1 - \gamma_5) \nu_4 \quad (5.10.39)$$

e di conseguenza:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2^7 \sin^4 \theta_w (s - M_w^2)^2} \sum_{spin} \left(\bar{u}_2 \gamma^\rho (1 - \gamma_5) u_1 \right) \left(\bar{u}_3 \gamma_\rho (1 - \gamma_5) \nu_4 \right) \times \\ \times \left(\bar{u}_1 \gamma^\sigma (1 - \gamma_5) u_2 \right) \left(\bar{\nu}_4 \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) \nu_3 \right) \quad (5.10.40)$$

$$= \frac{M_w^4 G_F^2}{4 (s - M_w^2)^2} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m_\mu) \gamma^\sigma (1 - \gamma_5) (\not{p}_2) \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_3 + m_e) \gamma_\rho (1 - \gamma_5) (\not{p}_4) \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) \right\} \quad (5.10.41)$$

$$= \frac{M_w^4 G_F^2}{(s - M_w^2)^2} (p_2)_\beta (p_4)^\tau \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m_\mu) \gamma^\sigma \gamma^\beta \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_3 + m_e) \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) \right\} \quad (5.10.42)$$

$$= \frac{M_w^4 G_F^2}{(s - M_w^2)^2} (p_1)_\alpha (p_2)_\beta (p_3)^\epsilon (p_4)^\tau \text{Tr} \left\{ \gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma^\beta \gamma^\rho (1 - \gamma_5) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ \gamma_\epsilon \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) \right\} \quad (5.10.43)$$

$$= \frac{2^4 M_w^4 G_F^2}{(s - M_w^2)^2} (p_1)_\alpha (p_2)_\beta (p_3)^\epsilon (p_4)^\tau \left[\eta^{\alpha\sigma} \eta^{\beta\rho} + \eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\sigma} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\sigma\rho} - i \varepsilon^{\alpha\sigma\beta\rho} \right] \times \\ \times \left[\eta_{\epsilon\sigma} \eta_{\tau\rho} + \eta_{\epsilon\rho} \eta^{\tau\sigma} - \eta_{\epsilon\tau} \eta_{\sigma\rho} - i \varepsilon_{\epsilon\rho\tau\sigma} \right] \quad (5.10.44)$$

$$= \frac{2^4 M_w^4 G_F^2}{(s - M_w^2)^2} (p_1)_\alpha (p_2)_\beta (p_3)^\epsilon (p_4)^\tau \left[\left(\eta^{\alpha\sigma} \eta^{\beta\rho} + \eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\sigma} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\sigma\rho} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\eta_{\epsilon\sigma} \eta_{\tau\rho} + \eta_{\epsilon\rho} \eta^{\tau\sigma} - \eta_{\epsilon\tau} \eta_{\sigma\rho} \right) - \varepsilon^{\alpha\sigma\beta\rho} \varepsilon_{\epsilon\rho\tau\sigma} \right] \quad (5.10.45)$$

$$= \frac{2^4 M_w^4 G_F^2}{(s - M_w^2)^2} (p_1)_\alpha (p_2)_\beta (p_3)^\epsilon (p_4)^\tau \left[2 \left(\delta_\epsilon^\alpha \delta_\tau^\beta + \delta_\tau^\alpha \delta_\epsilon^\beta \right) - \right. \\ \left. - 2 \left(\delta_\epsilon^\alpha \delta_\tau^\beta - \delta_\tau^\alpha \delta_\epsilon^\beta \right) \right] \quad (5.10.46)$$

$$= \frac{2^4 M_w^4 G_F^2}{(s - M_w^2)^2} 4 (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) \quad (5.10.47)$$

$$= \frac{2^4 M_w^4 G_F^2}{(s - M_w^2)^2} t^2. \quad (5.10.48)$$

5.11 Settore di Higgs

I riferimenti sono p. 527-530 dello Srednicki [7].

Per definizione l'Higgs si trasforma in maniera non banale rispetto $SU(2) \times SU(1)$, come:

$$\Phi \longrightarrow e^{-i\theta} U \Phi \quad (5.11.1)$$

mentre non interagisce con i quark essendo essi doppietti di $SU(3)$. Consideriamo:

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (5.11.2)$$

che è invariante per trasformazioni locali di $SU(2) \times SU(1)$ se definiamo la derivata covariante come:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu + \frac{i}{2} g_2 W_\mu^a \sigma^a \quad (5.11.3)$$

dove il primo fattore $1/2$ è una convenzione, mentre il secondo è dovuto al fatto che il generatore di $SU(2)$ è $T^a = \sigma^a/2$, inoltre abbiamo visto che $Y(\Phi) = +1$. Ricordiamo che abbiamo definito:

$$W_\mu = W_\mu^a \sigma^a \quad (5.11.4)$$

$$= \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (5.11.5)$$

$$= \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (5.11.6)$$

in cui avevamo posto:

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (5.11.7)$$

ossia utilizziamo σ^\pm anziché σ_1 e σ_2 . Con questa Sostituzione i termini cinetici diventano:

$$\begin{cases} F_{\mu\nu}^1 = \partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1 - g_2 (W_\mu^2 W_\nu^3 - W_\mu^3 W_\nu^2) \\ F_{\mu\nu}^2 = \partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2 - g_2 (W_\mu^1 W_\nu^3 - W_\mu^3 W_\nu^1) \\ F_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 - g_2 (W_\mu^1 W_\nu^2 - W_\mu^2 W_\nu^1) \end{cases} \quad (5.11.8)$$

cioè:

$$\begin{cases} F_{\mu\nu}^+ = \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+ - g_2 (W_\mu^3 W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^3) \\ F_{\mu\nu}^- = \partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^- + g_2 (W_\mu^3 W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^3) \\ F_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 - g_2 (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-) \end{cases} \quad (5.11.9)$$

quindi per la parte $SU(2) \times SU(1)$ (forza elettrodebole di YM) e la parte di Higgs abbiamo:

$$\mathcal{L}_{YMH} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^3 F^{3,\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^+ F^{-,\mu\nu} + (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi). \quad (5.11.10)$$

5.11.1 Rottura della simmetria tramite Higgs

Possiamo scegliere:

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2} \left(\Phi^\dagger \Phi - \phi_0^2 \right)^2 \geq 0 \quad (5.11.11)$$

la scelta di questo potenziale fa sì che tutta la lagrangiana sia invariante rispetto a $SU(2) \times SU(1)$ locali. Vogliamo studiare il vuoto di questa teoria, siccome il potenziale è definito positivo abbiamo che il minimo del potenziale si trova per:

$$\Phi^\dagger \Phi - \phi_0^2 = |\Phi_A|^2 + |\Phi_B|^2 - \phi_0^2 = 0 \quad (5.11.12)$$

una delle soluzioni (quella che si prende convenzionalmente) è:

$$\langle \Phi_A \rangle = 0 \quad , \quad \langle \Phi_B \rangle = \phi_0 \quad (5.11.13)$$

ovvero la configurazione di vuoto è:

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (5.11.14)$$

e siccome $\phi_0 \neq 0$ rispetta le simmetrie di Poincarè. Possiamo espandere rispetto al vuoto considerando $\Phi = \langle \Phi \rangle + \phi$, in cui:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} \quad (5.11.15)$$

sono le oscillazioni di vuoto e ha 4 gradi di libertà (2 per ogni componente).

Vogliamo anche verificare quali simmetrie sono preservate dal vuoto. Per σ^\pm abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (5.11.16)$$

cioè il vuoto rompe spontaneamente i generatori σ^1 e σ^2 di $SU(2)$, analogamente per σ^3 abbiamo:

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (5.11.17)$$

e per $U(1)$ abbiamo:

$$e^{-i\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad , \quad \forall \theta \neq 0. \quad (5.11.18)$$

Quindi apparentemente il vuoto rompe tutti i generatori, tuttavia se combiniamo le due trasformazioni σ^3 e $U(1)$, abbiamo che:

$$e^{-i\theta} U \Phi = \begin{pmatrix} \exp\{-i(\theta - \frac{1}{2}\epsilon^3)\} & 0 \\ 0 & \exp\{-i(\theta + \frac{1}{2}\epsilon^3)\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (5.11.19)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \exp\{-i(\theta + \frac{1}{2}\epsilon^3)\} \phi_0 \end{pmatrix} \quad (5.11.20)$$

questa trasformazione lascia il vuoto invariato nel caso in cui $\theta = -\frac{1}{2}\epsilon^3$. Quindi dei 4 generatori soltanto uno preserva il vuoto, pertanto abbiamo 3 bosoni di Goldstone che possono essere riassorbiti nei bosoni di gauge e quindi abbiamo 3 bosoni massivi: W_μ^\pm e un'unica combinazione di W_μ^3 e B_μ che chiameremo Z_μ (combinazione ortogonale alla scelta $\theta = -1/2\epsilon^3$), infine abbiamo la particella mass-less che preserva il vuoto e rappresenta l'elettromagnetismo (A_μ).

5.11.2 Calcolo del potenziale

Ci possiamo porre nel gauge unitario dove mettiamo i bosoni di Goldstone a zero perché li possiamo riassorbire tramite una trasformazione di gauge, quindi:

$$\Phi = \langle \Phi \rangle + \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (5.11.21)$$

in cui h è il campo scalare reale di Higgs (già correttamente normalizzato). Abbiamo:

$$\Phi^\dagger \Phi = \left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (5.11.22)$$

$$= \phi_0^2 + \sqrt{2} \phi_0 h + \frac{1}{2} h^2 \quad (5.11.23)$$

$$= \phi_0^2 + \sqrt{2} \phi_0 \left(1 + \frac{h}{2\sqrt{2}\phi_0} \right) h \quad (5.11.24)$$

e anche:

$$V = \frac{m^2}{2\phi_0^2} \left(\Phi^\dagger \Phi - \phi_0^2 \right)^2 \quad (5.11.25)$$

$$= m^2 h^2 \left(1 + \frac{h}{2\sqrt{2}\phi_0} \right)^2 \quad (5.11.26)$$

$$= m^2 h^2 + \frac{m^2 h^3}{\sqrt{2}\phi_0} + \frac{m^2 h^4}{8\phi_0^2} \quad (5.11.27)$$

quindi la massa di Higgs è $m_h^2 = 2m^2$ e possiamo osservare che ha interazioni h^3 e h^4 , dunque possiamo avere un vertice con 3 o 4 gambe esterne.

5.11.3 Calcolo della derivata covariante

Per calcolare il termine cinetico studiamo la derivata covariante. Per semplicità poniamo:

$$\eta = \frac{h}{\sqrt{2}} \quad (5.11.28)$$

e possiamo vedere:

$$D_\mu \Phi = \left[\partial_\mu + \frac{i}{2} g_1 B_\mu + \frac{i}{2} g_2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + \eta \end{pmatrix} \quad (5.11.29)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \eta \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} g_1 B_\mu + g_2 W_\mu^3 & \sqrt{2} g_2 W_\mu^+ \\ \sqrt{2} g_2 W_\mu^- & g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\phi_0 + \eta) \quad (5.11.30)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \eta \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} g_2 W_\mu^+ \\ g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3 \end{pmatrix} (\phi_0 + \eta) \quad (5.11.31)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} g_2 (\phi_0 + \eta) W_\mu^+ \\ \partial_\mu \eta + \frac{i}{2} (\phi_0 + \eta) (g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3) \end{pmatrix} \quad (5.11.32)$$

insieme a:

$$(D_\mu \Phi)^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} g_2 (\phi_0 + \eta) W_\mu^- & , & \partial_\mu \eta - \frac{i}{2} (\phi_0 + \eta) (g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3) \end{pmatrix} \quad (5.11.33)$$

conseguentemente:

$$(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{4} \left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 \left[2g_2^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + (g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3)^2 \right] \quad (5.11.34)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{4} \left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 \left[2g_2^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \right] \quad (5.11.35)$$

con:

$$Z_\mu = \frac{g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (5.11.36)$$

5.11.4 Lagrangiana di Higgs e masse dei bosoni vettori

Abbiamo:

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (5.11.37)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{4} \left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right)^2 \left[2g_2^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \right] - \\ &\quad - m^2 h^2 - \frac{m^2 h^3}{\sqrt{2} \phi_0} - \frac{m^2 h^4}{8 \phi_0^2} \end{aligned} \quad (5.11.38)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} m_h^2 h^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} - \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\frac{h^2}{2} + \sqrt{2} \phi_0 h \right) \left[2g_2^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \right] - \\ &\quad - \frac{m^2 h^3}{\sqrt{2} \phi_0} - \frac{m^2 h^4}{8 \phi_0^2} \end{aligned} \quad (5.11.39)$$

in cui la prima riga di (5.11.39) sono il termine cinetico per h e la masse dei bosoni, mentre la seconda e terza riga rappresentano le interazioni. Le masse dei bosoni di gauge sono:

$$m_H^2 = 2m^2 \quad , \quad m_W^2 = \frac{\phi_0^2 g_2^2}{2} \quad , \quad m_Z^2 = \frac{\phi_0^2}{2} (g_1^2 + g_2^2) \quad (5.11.40)$$

e se sostituiamo:

$$g_1 = -\frac{e}{\cos \theta_w} \quad , \quad g_2 = -\frac{e}{\sin \theta_w} \quad (5.11.41)$$

otteniamo:

$$m_W^2 = \frac{e^2 \phi_0^2}{2 \cos^2 \theta_w} \quad , \quad m_Z^2 = \frac{e^2 \phi_0^2}{2}. \quad (5.11.42)$$

5.12 Lagrangiana di Yang-Mills-Higgs

Possiamo riscrivere:

$$\sin \theta_w = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad , \quad \cos \theta_w = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (5.12.1)$$

in cui θ_w è detto *angolo di Weinberg*. Dunque abbiamo:

$$\begin{cases} A_\mu = \sin \theta_w W_\mu^3 + \cos \theta_w B_\mu \\ Z_\mu = \cos \theta_w W_\mu^3 - \sin \theta_w B_\mu \end{cases} \quad (5.12.2)$$

ovvero:

$$\begin{cases} B_\mu = \cos \theta_w A_\mu - \sin \theta_w Z_\mu \\ W_\mu^3 = \sin \theta_w A_\mu + \cos \theta_w Z_\mu \end{cases} \quad (5.12.3)$$

in cui Z media la corrente debole neutra e A media l'interazione elettromagnetica. Definiamo inoltre:

$$\begin{cases} A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu \\ W_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm \end{cases} \quad (5.12.4)$$

che sostituiamo nei termini cinetici di Yang-Mills. Abbiamo:

$$F_{\mu\nu}^\pm = W_{\mu\nu}^\pm \mp ig_2 \left[\sin \theta_w (A_\mu W_\nu^\mp - W_\mu^\mp A_\nu) + \cos \theta_w (Z_\mu W_\nu^\mp - W_\mu^\mp Z_\nu) \right] \quad (5.12.5)$$

$$F_{\mu\nu}^3 = \left[\sin \theta_w A_{\mu\nu} + \cos \theta_w Z_{\mu\nu} \right] - ig_2 (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-) \quad (5.12.6)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu = \cos \theta_w A_{\mu\nu} - \sin \theta_w Z_{\mu\nu}. \quad (5.12.7)$$

Sostituendo otteniamo la lagrangiana che descrive i bosoni di gauge ed Higgs:

$$\mathcal{L}_{YMH} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^3 F^{3,\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^+ F^{-,\mu\nu} + (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (5.12.8)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W_{\mu\nu}^- + \\ &+ \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} m_h^2 h^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} - \\ &- \frac{1}{4} \left(\frac{h^2}{2} + \sqrt{2} \phi_0 h \right) \left[2g_2^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \right] - \\ &- \frac{m^2 h^3}{\sqrt{2} \phi_0} - \frac{m^2 h^4}{8 \phi_0^2} + \\ &+ ig_2 \left[\sin \theta_w (W_{\mu\nu}^+ W_-^\mu A^\nu - W_{\mu\nu}^- W_+^\mu A^\nu + F_{\mu\nu} W_+^\mu W_-^\nu) + \right. \\ &+ \left. \cos \theta_w (W_{\mu\nu}^+ W_-^\mu Z^\nu - W_{\mu\nu}^- W_+^\mu Z^\nu + Z_{\mu\nu} W_+^\mu W_-^\nu) \right] + \\ &+ \frac{g_2^2}{2} (2g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \left[W_\mu^+ W_\nu^- (A_\rho A_\sigma \sin^2 \theta_w + \right. \\ &+ \left. Z_\rho Z_\sigma \cos^2 \theta_w + 2A_\rho Z_\sigma \sin \theta_w \cos \theta_w) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} W_\mu^+ W_\nu^+ W_\rho^- W_\sigma^- \right]. \quad (5.12.9) \end{aligned}$$

Osservazione. I parametri della teoria sono "liberi", ovvero non vengono fissati dalla teoria e devono essere determinati dagli esperimenti.

5.13 Masse dei leptoni tramite Higgs

Nel modello standard l'elettrone è massivo, mentre il neutrino è considerato massless, inoltre il termine di massa deve rispettare tutte le simmetrie (Lorentz e gauge). Per fare in modo di avere un oggetto invariante per Lorentz e per $SU(2) \times U(1)$ dobbiamo considerare $L^+ \Phi e_R + e_R^+ \Phi^\dagger L$, espandiamo la teoria intorno al vuoto e verifichiamo che questo è un termine di massa (nota: Φ è il campo di Higgs ed è un doppietto, moltiplicare due doppietti ci permette di ottenere un singoletto). Vediamo:

$$L^+ \Phi e_R + e_R^+ \Phi^\dagger L = \begin{pmatrix} \nu_e^+ & e_L^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e_R + e_R^+ \begin{pmatrix} 0 & \phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \quad (5.13.1)$$

$$= \left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}} \right) \left(e_L^+ e_R + e_R^+ e_L \right) \quad (5.13.2)$$

che contiene il termine di massa (a meno di una costante moltiplicativa). Definiamo:

$$L^a = \left\{ \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu_L \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau_L \end{pmatrix} \right\} , \quad l_R^a = (e_R, \mu_R, \tau_R) \quad (5.13.3)$$

dunque la lagrangiana per i leptoni è:

$$\mathcal{L}_{lep} = \sum_a \left[(L^a)^+ \bar{\sigma}^\mu i D_\mu L^a + (l_R^a)^+ \sigma^\mu i D_\mu l_R^a - c^a \left((L^a)^+ \Phi l_R^a + (l_R^a)^+ \Phi^\dagger L^a \right) \right]. \quad (5.13.4)$$

5.14 Adroni e quark

Sperimentalmente si osserva e:

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e \\ p^+ &\longrightarrow n + e^+ + \nu_e \end{aligned}$$

il protone ($p = u u d$) e il neutrone ($n = d d u$) sono degli adroni, ovvero degli stati legati di quark, quindi bisogna inserire dei termini di interazione tra i quark e i bosoni di gauge. Per ora consideriamo solo i quark up ($q_u = \frac{2}{3} e$) e down ($q_d = -\frac{1}{3} e$), che possono esistere sia come particelle left sia come right, siccome l'interazione debole rompe la parità, definiamo i doppietti left e i singoletti right per $SU(2)$:

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} , \quad Q_R = \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} \quad (5.14.1)$$

dove u e d (sia L sia R) sono spinori di Weyl. Possiamo descrivere l'interazione elettrodebole come per i leptoni:

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2} g_2 W_\mu + \frac{i}{2} g_1 Y B_\mu \quad (5.14.2)$$

$$= \partial_\mu + \frac{i}{2} g_2 \sqrt{2} (W_\mu^+ \sigma_+ + W_\mu^- \sigma_-) + i \left(g_2 I_3 W_\mu^3 + g_1 \frac{Y}{2} B_\mu \right) \quad (5.14.3)$$

sostituiamo:

$$\begin{cases} B_\mu = \cos \theta_w A_\mu - \sin \theta_w Z_\mu \\ W_\mu^3 = \sin \theta_w A_\mu + \cos \theta_w Z_\mu \end{cases} \quad (5.14.4)$$

$$g_1 = -\frac{e}{\cos \theta_w}, \quad g_2 = -\frac{e}{\sin \theta_w}, \quad Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (5.14.5)$$

così otteniamo il termine:

$$g_2 I_3 W_\mu^3 + g_1 \frac{Y}{2} B_\mu = -e \left(Q A_\mu + \frac{\cos \theta_w}{\sin \theta_w} I_3 Z_\mu - \frac{\sin \theta_w}{\cos \theta_w} \frac{Y}{2} Z_\mu \right) \quad (5.14.6)$$

$$= -e Q A_\mu - \frac{e}{\tan \theta_w} \left(I_3 - \tan^2 \theta_w \frac{Y}{2} \right) Z_\mu \quad (5.14.7)$$

$$= -e Q A_\mu - \frac{e}{\sin \theta_w \cos \theta_w} \left(\cos^2 \theta_w I_3 - \sin^2 \theta_w \frac{Y}{2} \right) Z_\mu \quad (5.14.8)$$

$$= -e Q A_\mu - \frac{2e}{\sin(2\theta_w)} \left(I_3 - \sin^2 \theta_w Q \right) Z_\mu \quad (5.14.9)$$

per cui l'interazione (5.14.3) è:

$$iD_\mu = i\partial_\mu + e Q A_\mu + \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} (W_\mu^+ \sigma_+ + W_\mu^- \sigma_-) + \frac{2e}{\sin(2\theta_w)} (I_3 - \sin^2 \theta_w Q) Z_\mu \quad (5.14.10)$$

e di conseguenza:

$$\begin{aligned} i\bar{Q}_L \not{D} Q_L &= i\bar{Q}_L \not{\partial} Q_L + e \left(\frac{2}{3} \bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \frac{1}{3} \bar{d}_L \gamma^\mu d_L \right) A_\mu + \\ &+ \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \left(\bar{u}_L \gamma^\mu W_\mu^+ d_L + \bar{d}_L \gamma^\mu W_\mu^- u_L \right) + \\ &+ \frac{2e}{\sin(2\theta_w)} \left[\bar{u}_L \gamma^\mu \left(+\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_L + \right. \\ &\left. + \bar{d}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_L \right] Z_\mu \quad (5.14.11) \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} i\bar{u}_R \not{D} u_R + i\bar{d}_R \not{D} d_R &= i\bar{u}_R \not{\partial} u_R + i\bar{d}_R \not{\partial} d_R + \\ &+ e \left(\frac{2}{3} \bar{u}_R \gamma^\mu u_R - \frac{1}{3} \bar{d}_R \gamma^\mu d_R \right) A_\mu - \\ &- \frac{2e}{\sin(2\theta_w)} \left(\frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \bar{u}_R \gamma^\mu u_R - \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \bar{d}_R \gamma^\mu d_R \right) Z_\mu. \end{aligned} \quad (5.14.12)$$

La lagrangiana massless di interazione debole per il settore dei quark è:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{quark} &= i\bar{Q}_L \not{D} Q_L + i\bar{u}_R \not{D} u_R + i\bar{d}_R \not{D} d_R \quad (5.14.13) \\ &= i\bar{u} \not{\partial} u + i\bar{d} \not{\partial} d + e \left(\frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu d \right) A_\mu + \\ &+ \frac{e}{2\sqrt{2} \sin \theta_w} \left(\bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^+ d + \bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^- u \right) + \\ &+ \frac{e}{2 \sin(2\theta_w)} \left[\bar{u} \gamma^\mu \left(1 - \gamma_5 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_w \right) u - \right. \\ &\left. - \bar{d} \gamma^\mu \left(1 - \gamma_5 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w \right) d \right] Z_\mu. \end{aligned} \quad (5.14.14)$$

Volendo si può partire dalla derivata covariante generica:

$$D_\mu Q_L = \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} g_2 W_\mu + \frac{i}{2} g' B_\mu \right) Q_L \quad (5.14.15)$$

$$D_\mu u_R = \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} g'' B_\mu \right) u_R \quad (5.14.16)$$

$$D_\mu d_R = \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} g''' B_\mu \right) d_R. \quad (5.14.17)$$

Come prima s'intende $W_\mu = W_\mu^a \sigma^a$, g_2 è già fissata (vedi la sezione §5.14.1), mentre le costanti g' , g'' , g''' sono arbitrarie e verranno fissate imponendo le cariche dei quark¹. Inoltre, la parte cinetica della lagrangiana la possiamo anche scrivere nella forma:

$$\mathcal{L}_{K,q} = Q_L^\dagger i \bar{\sigma}^\mu D_\mu Q_L + u_R^\dagger i \sigma^\mu D_\mu u_R + d_R^\dagger i \sigma^\mu D_\mu d_R. \quad (5.14.18)$$

Notiamo anche che $\bar{\sigma}^\mu$ e i campi sono dei numeri per $SU(2)$, ma non lo sono per Lorentz.

5.14.1 Nota sulle costanti di accoppiamento

Se consideriamo una trasformazione per cui la derivata covariante è:

$$D_\mu \Psi = \left(\partial_\mu + i A_\mu^a T^a \right) \Psi \quad (5.14.19)$$

¹**Nota.** Questa g' non c'entra nulla con quella dei leptoni

allora abbiamo:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (\partial_\mu + i A_\mu^a T^a) \Psi - \frac{1}{4g_2^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (5.14.20)$$

in cui abbiamo:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]. \quad (5.14.21)$$

Non possiamo mettere una costante arbitraria dentro la derivata covariante, altrimenti la lagrangiana non sarebbe più invariante! Tuttavia possiamo fare una trasformazione:

$$A_\mu \longrightarrow g_2 A_\mu \quad (5.14.22)$$

dunque:

$$F_{\mu\nu} = g_2 (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i g_2 [A_\mu, A_\nu]) \quad (5.14.23)$$

cioè:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (\partial_\mu + i g_2 A_\mu^a T^a) \Psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (5.14.24)$$

ricordiamo che la rappresentazione del gruppo di gauge (fondamentale, aggiunta) fissa la forma della derivata covariante ma non cambia il valore di g_2 . Per una trasformazione abeliana $U(1)$, cambiare la rappresentazione è equivalente ad assegnare la carica: il campo trasforma come:

$$\Psi \longrightarrow e^{iqa} \Psi \quad (5.14.25)$$

dunque la derivata covariante è:

$$D_\mu = \partial_\mu + iq A_\mu. \quad (5.14.26)$$

Assegnare un valore a g' , g'' , g''' equivale ad assegnare il valore di ipercarica per le varie componenti.

5.15 Mixing dei quark

Come i leptoni, esistono 3 famiglie per i quark, tuttavia diversamente dai leptoni (almeno per il modello standard) i quark possono mischiarsi; questo veniva direttamente dalle osservazioni sperimentali. Negli anni '60 vengono scoperti dei processi elettro-deboli che portano alla formazione del quark strange, ciò avviene tramite la corrente:

$$j^\mu = \bar{u} \bar{\sigma}^\mu d \cos \theta_c + \bar{u} \bar{\sigma}^\mu s \sin \theta_c \quad (5.15.1)$$

dove θ_c è detto **angolo di Cabibbo** (sperimentalmente si trova $\sin \theta_c \approx 0.22$).

Il quark down e strange non sono autostati di interazione, quindi Cabibbo propose di riscrivere il doppietto come:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix}. \quad (5.15.2)$$

Se studiamo solo la parte di corrente neutra:

$$\begin{aligned} & \left(d_L^+ \cos \theta_c + s_L^+ \sin \theta_c \right) \bar{\sigma}^\mu \frac{e}{3 \sin(2\theta_w)} \left(2 + \cos(2\theta_w) \right) Z_\mu \left(d_L \cos \theta_c + s_L \sin \theta_c \right) = \\ & = \frac{2}{3} e \frac{1 + \cos(2\theta_w)}{\sin(2\theta_w)} Z_\mu \sin \theta_c \cos \theta_c \left(s_L^+ \bar{\sigma}^\mu d_L + d_L^+ \bar{\sigma}^\mu s_L \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.15.3)$$

Questa è la parte di corrente di mixing tra down e strange, tuttavia sperimentalmente si osservava che i processi con $\Delta Q = 0$ (carica elettrica), $\Delta s = 1, 2$ (strangeness) erano molto soppressi e non venivano spiegati dall'ipotesi di Cabibbo.

Nel 70' viene proposto il meccanismo GIM (Glashow-Iliopoulos-Maiani) che richiede l'esistenza del quark charm, che ha carica $\frac{2}{3}e$ e che forma un doppietto con il quark strange, e per cui il mixing viene scritto tramite una matrice di rotazione:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (5.15.4)$$

tale per cui abbiamo:

$$\begin{cases} d' = d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \\ s' = -d \sin \theta_C + s \cos \theta_C \end{cases} \quad (5.15.5)$$

in cui d' e s' sono gli autostati di interazione.

Successivamente sono stati scoperti anche top e bottom, dunque possiamo generalizzare:

$$Q_L^a = \begin{pmatrix} u_L^a \\ d_L^a \end{pmatrix}, \quad Q_R^a = \begin{pmatrix} u_R^a \\ d_R^a \end{pmatrix} \quad a = \{1, 2, 3\} \quad (5.15.6)$$

che non sono i quark fisici, ma le loro combinazioni lineari. La parte cinetica è:

$$\mathcal{L}_K = \sum_a \mathcal{L}_K(u^a, d^a) \quad (5.15.7)$$

come in precedenza. Nei termini di massa non possiamo mettere direttamente $u_L^+ u_R + u_R^+ u_L$ perchè non è invariante per $SU(2)$ (L è un doppietto,

R è un singoletto), ma possiamo usare il doppietto di Higgs, in questo modo abbiamo:

$$Q_L'^+ \Phi' = (U Q_L)^+ (U \Phi) = Q_L^+ U^+ U \Phi = Q_L^+ \Phi \quad (5.15.8)$$

con $U \in SU(2)$. Quindi abbiamo che:

$$\mathcal{L}_m(d) = - \sum_{a,b=1}^3 \left[G_{ab}^{(d)} (Q_L^a)^+ \Phi d_R^b + \tilde{G}_{ab}^{(d)} (d_R^b)^+ \Phi^+ Q_L^a \right] \quad (5.15.9)$$

in cui $G_{ab}^{(d)}$ è una matrice complessa 3x3 che permette il mixing.

In corrispondenza del vuoto ritroviamo i termini di massa, ma solo per il quark down:

$$Q_L^+ \Phi = (u^+ \quad d^+) \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \phi_0 d_L^+ \quad (5.15.10)$$

quindi:

$$\mathcal{L}_m(d) = -\phi_0 \sum_{a,b=1}^3 \left[G_{ab}^{(d)} (d_L^a)^+ d_R^b + \tilde{G}_{ab}^{(d)} (d_R^b)^+ d_L^a \right] \quad (5.15.11)$$

$$= - (D_L d_L)^+ M^{(d)} (D_R d_R)^+ M^{(d)} (D_L d_L) \quad (5.15.12)$$

in cui abbiamo diagonalizzato:

$$\phi_0 G^{(d)} = D_L^+ M^{(d)} D_R \quad (5.15.13)$$

in cui qui le D sono due matrici unitarie ed $M^{(d)}$ è diagonale con elementi reali. Inoltre, i termini D_L, d_L, D_R e d_R sono i quark fisici per la componente down.

Osserviamo che δ_{AB} è invariante per $SU(2)$, infatti:

$$(U_B^A)^+ \delta_A^C U_C^D = U^+ U = \mathbb{1} \quad (5.15.14)$$

ma anche il tensore anti-simmetrico (ε_{AB}) è invariante, infatti:

$$Q_L^+ \varepsilon \Phi \longrightarrow Q_L^+ U^+ \varepsilon U \Phi = Q^+ \Phi \quad (5.15.15)$$

poiché:

$$U^+ \varepsilon U = 1. \quad (5.15.16)$$

Quindi possiamo scrivere il termine di massa per il quark up come segue:

$$\mathcal{L}_m(u) = - \sum_{a,b=1}^3 \left[G_{ab}^{(u)} \left((Q_L^a)^+ \varepsilon \Phi^* \right) u_R^b - \tilde{G}_{ab}^{(u)} (u_R^b)^+ (\Phi^T \varepsilon Q_L^a) \right] \quad (5.15.17)$$

in cui il segno negativo relativo viene dal fatto che ε è antisimmetrico.

Se studiamo il vuoto:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (5.15.18)$$

abbiamo che:

$$\begin{cases} (Q_L^a)^+ \varepsilon \Phi^* = \left((u_L^a)^+ & (d_L^a)^+ \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \phi_0 (u_L^a)^+ \\ \Phi^T \varepsilon Q_L^a = \begin{pmatrix} 0 & \phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L^a \\ d_L^a \end{pmatrix} = -\phi_0 u_L^a \end{cases} \quad (5.15.19)$$

sostituendo nella lagrangiana, il segno negativo relativo si semplifica:

$$\mathcal{L}_m(u) = - \sum_{a,b=1}^3 \left[G_{ab}^{(u)} (u_L^a)^+ u_R^b - \tilde{G}_{ab}^{(u)} (u_R^b)^+ u_L^a \right] \quad (5.15.20)$$

$$= - \left[(U_L u_L)^+ M^{(u)} (U_R u_R) + (U_R u_R)^+ M^{(u)} (U_L u_L) \right] \quad (5.15.21)$$

in cui abbiamo diagonalizzato come prima tramite:

$$\phi_0 G^{(u)} = U_L^+ M^{(u)} U_R \quad (5.15.22)$$

inoltre, i quark fisici sono U_L , u_L , U_R e u_R .

Quindi riassumendo i quark fisici sono:

$$\begin{cases} \tilde{d}_L^a = D_{L,ab} d_L^b \\ \tilde{d}_R^a = D_{R,ab} d_R^b \end{cases}, \quad \begin{cases} \tilde{u}_L^a = U_{L,ab} u_L^b \\ \tilde{u}_R^a = U_{R,ab} u_R^b \end{cases} \quad (5.15.23)$$

inoltre consideriamo:

$$M^{(d)} = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix}, \quad M^{(u)} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \quad (5.15.24)$$

per comodità di seguito indicheremo i quark fisici come:

$$u_L, \quad u_r, \quad d_L, \quad d_R \quad (5.15.25)$$

cioè rinominiamo:

$$\tilde{u} \longrightarrow u \quad (5.15.26)$$

$$\tilde{d} \longrightarrow d. \quad (5.15.27)$$

La lagrangiana completa dei quark è:

$$\mathcal{L}_q = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{qA} + \mathcal{L}_{qZ} + \mathcal{L}_{qW} + \mathcal{L}_{qH} \quad (5.15.28)$$

in cui abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{qA} = \sum_{a=1}^3 i \left[u_{L,a}^+ \bar{\sigma}^\mu \left(\partial_\mu + i \frac{2}{3} e A_\mu \right) u_{L,a} + u_{R,a}^+ \sigma^\mu \left(\partial_\mu + i \frac{2}{3} e A_\mu \right) u_{R,a} + \right. \\ \left. + d_{L,a}^+ \bar{\sigma}^\mu \left(\partial_\mu - i \frac{1}{3} e A_\mu \right) d_{L,a} + d_{R,a}^+ \sigma^\mu \left(\partial_\mu - i \frac{1}{3} e A_\mu \right) d_{R,a} \right] \quad (5.15.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{qZ} = \sum_{a=1}^3 \frac{e}{\sin(2\theta_w)} \left[- \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_{L,a}^+ \bar{\sigma}^\mu u_{L,a} + \left(\frac{4}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_{R,a}^+ \sigma^\mu u_{R,a} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_{L,a}^+ \bar{\sigma}^\mu d_{L,a} - \left(\frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_{R,a}^+ \sigma^\mu d_{R,a} \right] Z_\mu \quad (5.15.30) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{qW} = - \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \left(u_L^+, c_L^+, t_L^+ \right) \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu d_L \\ \bar{\sigma}^\mu s_L \\ \bar{\sigma}^\mu b_L \end{pmatrix} W_\mu^+ \quad (5.15.31)$$

Dove definiamo la matrice CKM (Cabibbo-Kobahashi-Moskawa) come $V = U_L D_L^+$, inoltre si osserva che:

$$V^+ V = (U_L D_L^+)^+ (U_L D_L^+) = D_L U_L^+ U_L D_L^+ = D_L D_L^+ = 1. \quad (5.15.32)$$

Osserviamo che in teoria V contiene 9 parametri, ma 5 di questi parametri sono delle fasi e possono essere riassorbite nella definizione dei quark fisici. Quindi, abbiamo 4 parametri indipendenti: 3 angoli reali (θ_{12} , θ_{13} , θ_{23}) e una fase complessa (δ) che devono essere determinati sperimentalmente. Possiamo riscrivere V in funzione dei 4 parametri indipendenti (notazione $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$):

$$\begin{aligned} V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\delta}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.15.33) \end{aligned}$$

La parità è esplicitamente rotta, ma potremmo avere un'invarianza per la simmetria CP, ricordiamo che per CP abbiamo:

$$W_0^+ \longrightarrow -W_0^+ \quad (5.15.34)$$

$$W_i^+ \longrightarrow W_i^+ \quad (5.15.35)$$

$$q_L \longrightarrow -i\sigma^2 q_L^+ \quad (5.15.36)$$

$$q_R \longrightarrow i\sigma^2 q_R^+ \quad (5.15.37)$$

dunque:

$$\mathcal{L}_{qW} = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \sum_{a,b=1}^3 \left[u_{L,a}^+ \bar{\sigma}^\mu V_{ab} d_{L,b} W_\mu^+ + d_{L,b}^+ V_{ab}^* \bar{\sigma}^\mu u_{L,a} W_\mu^- \right] \quad (5.15.38)$$

si trasforma come:

$$\mathcal{L}_{qW}^{CP} = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \sum_{a,b=1}^3 \left[-u_{L,a}^T (\bar{\sigma}^\mu)^T V_{ab} d_{L,b}^* W_\mu^- - d_{L,b}^T (\bar{\sigma}^\mu)^T V_{ab}^* u_{L,a}^* W_\mu^+ \right] \quad (5.15.39)$$

$$= -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \sum_{a,b=1}^3 \left[d_{L,b}^+ \bar{\sigma}^\mu V_{ab} u_{L,a} W_\mu^- + u_{L,a}^+ \bar{\sigma}^\mu V_{ab}^* d_{L,b} W_\mu^+ \right] \quad (5.15.40)$$

pertanto abbiamo l'invarianza di CP solo se $V = V^*$, nel 1964 viene osservata la violazione di CP per le interazioni deboli.

Appendici

Appendice A

Richiami di teoria dei gruppi

I riferimenti per questa, rapida, appendice sono p. 38-42 del Peskin e Schroeder [4] e p. 211-214 dello Srednicki [7].

Rivedremo, un po' velocemente, alcuni concetti riguardante la teoria dei gruppi che ci saranno utili nel corso.

Ricordiamo che un *gruppo* G è un insieme di elementi per cui esiste l'identità, l'inverso e vale la proprietà associativa. Diciamo che un gruppo è *chiuso* se per ogni operazione O definita dentro il gruppo abbiamo:

$$O(g_1, g_2) = g_3 \in G \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Ogni elemento del gruppo può essere in funzione dei *generatori* del gruppo T^a , che sono matrici con traccia nulla, e l'insieme di tali generatori costituisce la *rappresentazione del gruppo*; inoltre, i generatori soddisfano la stessa algebra del gruppo.

Nei *gruppi di Lie* i parametri sono continui, quindi possiamo studiare una trasformazione infinitesima da cui si può ricavare l'algebra (di Lie) del gruppo. Diciamo che un gruppo è *Abeliano* se gli elementi del gruppo commutano.

Nel caso di un gruppo di Lie possiamo sempre scrivere un generico elemento del gruppo in forma esponenziale:

$$g(\theta) = e^{i\theta_a T^a}$$

con $a \in 1, \dots, \dim G$. L'*algebra di Lie* si ottiene dalle relazioni:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

in cui f^{abc} è detta *costante di struttura*.

Ricordiamo che l'algebra di Lie di $SO(3)$ è uguale all'algebra di $SU(2)$:

$$[T^a, T^b] = i\varepsilon^{abc} T^c.$$

Abbiamo che $SO(1,3) = SU(2) \otimes SU(2)$, e possiamo usare diverse rappresentazioni:

- La rappresentazione $(1, 1)$, oppure $(0, 0)$, per gli scalari (campi con spin 0).
- La rappresentazione $(2, 1)$, $(1, 2)$ oppure $(1/2, 0)$, $(0, 1/2)$ per gli spinori (campi left e right con spin $1/2$).
- La rappresentazione $(2, 2)$, oppure $(1/2, 1/2)$, per i vettori (campi con spin 1).

I generatori del gruppo di Lorentz sono $M^{\mu\nu}$ (hermitiano, anti-simmetrico), che includono l'operatore di momento angolare:

$$J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M^{jk}$$

e l'operatore di boost:

$$K^i = M^{i0}.$$

Si ricava che:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk} J_k. \end{aligned}$$

Abbiamo anche già visto che possiamo introdurre due operatori non-hermitiani:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2} (J_i + iK_i) \\ N_i^\dagger &= \frac{1}{2} (J_i - iK_i) \end{aligned}$$

per i quali l'algebra è:

$$\begin{aligned} [N_i, N_j] &= i\varepsilon_{ijk} N_k \\ [N_i^\dagger, N_j^\dagger] &= i\varepsilon_{ijk} N_k^\dagger \\ [N_i, N_j^\dagger] &= 0 \end{aligned}$$

dunque, ci permettono di avere due algebre di Lie legate al gruppo $SU(2)$ (ciascuna di loro), che sono legate tra loro.

Appendice B

Matrici γ

Questa appendice puoi vederla come un continuazione di quella già presente negli appunti del corso di *Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi*, ma saremo un po' più rapidi e dimostreremo alcune delle relazioni, che non solo ci saranno utili, ma che anche abbiamo già incontrato e preso per buone.

I riferimenti sono p. 133-135 del Peskin e Schroeder [4] e p. 295-297 dello Srednicki [7] e la pagina [Wikipedia](#).

B.1 Definizioni

Ricordiamo alcune definizioni:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.1})$$

in cui abbiamo:

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \quad , \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \quad (\text{B.1.2})$$

con σ^i matrici di Pauli. Vale anche l'altra definizione:

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (\text{B.1.3})$$

Valgono le seguenti regole di anti-commutazione:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1} \quad (\text{B.1.4})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0. \quad (\text{B.1.5})$$

Abbiamo le seguenti identità:

$$\text{Tr}\{\mathbb{1}\} = 4 \quad (\text{B.1.6})$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \quad (\text{B.1.7})$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (\text{B.1.8})$$

Ricordiamo anche che in QFT la convenzione per la metrica di Minkowski è:

$$\eta = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1.9})$$

Ricordiamoci anche del *tensore di Levi-Civita* definito come:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \sigma = \text{even} \\ -1 & \sigma = \text{odd} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{B.1.10})$$

in cui con σ indichiamo il numero di permutazioni sugli indici per ottenere:

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \xrightarrow{\sigma} (0, 1, 2, 3).$$

Alcune delle identità che valgono per il simbolo di Levi-Civita in 4 dimensioni sono:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho = \eta^{\mu\nu} \gamma^\rho + \eta^{\nu\rho} \gamma^\mu - \eta^{\mu\rho} \gamma^\nu - i\varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \gamma_\sigma \gamma_5 \quad (\text{B.1.11})$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -4! = -24 \quad (\text{B.1.12})$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -6 \delta^\mu{}_\nu \quad (\text{B.1.13})$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta^\mu{}_\rho \delta^\nu{}_\sigma - \delta^\mu{}_\sigma \delta^\nu{}_\rho). \quad (\text{B.1.14})$$

B.2 Identità

Vediamo una carrellata di proprietà, che dimostriamo, delle matrici di Dirac. Ovviamente la numerazione è totalmente a caso e messa solamente per creare una sorta di ordine.

Identità 1:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = 1 \quad (\text{B.2.1})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= \eta_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} \\ &= (1)^2 + 3(-1)^2 = 4. \end{aligned}$$

Identità 2:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (\text{B.2.2})$$

Dimostrazione:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu = (2\eta^{\mu\nu}) \gamma_\mu - 4\gamma^\nu = -2\gamma^\nu.$$

Identità 3: (che non vale se la dimensione è diversa da 4.)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\rho} \quad (\text{B.2.3})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \gamma^\rho \gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\mu \\ &= 2\eta^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma_\mu - \gamma^\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\} \gamma_\mu + \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma_\mu \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\nu - \gamma^\nu (2\eta^{\mu\rho}) \gamma_\mu + 4\gamma^\nu \gamma^\rho \\ &= 2(\gamma^\rho \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\rho) \\ &= 2\{\gamma^\rho, \gamma^\nu\} \\ &= 4\eta^{\nu\rho}. \end{aligned}$$

Identità 4: (che non vale se la dimensione è diversa da 4.)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \quad (\text{B.2.4})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu \\ &= 2\eta^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu - \gamma^\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\} \gamma^\sigma \gamma_\mu + \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma_\mu \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - \gamma^\nu (2\eta^{\mu\rho}) \gamma^\sigma \gamma_\mu + \gamma^\nu \gamma^\rho \{\gamma^\mu, \gamma^\sigma\} \gamma_\mu - \\ &\quad - \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma_\mu \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - 2\gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho + \gamma^\nu \gamma^\rho (2\eta^{\mu\sigma}) \gamma_\mu - 4\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - 2\gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho + 2\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma - 4\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - 2\gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho - 2\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \\ &= 2\{\gamma^\rho \gamma^\sigma\} \gamma^\nu - 2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu - 2\{\gamma^\nu, \gamma^\sigma\} \gamma^\rho + \\ &\quad + 2\gamma^\sigma \{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} - 2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho - 2\{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} \gamma^\sigma + \\ &\quad + 2\gamma^\rho \{\gamma^\nu, \gamma^\sigma\} - 2\{\gamma^\rho, \gamma^\sigma\} \gamma^\nu + 2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu. \end{aligned}$$

Identità 5:

$$\gamma^\mu \gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{\alpha_n} \gamma_\mu = 2\gamma^{\alpha_n} \dots \gamma^{\alpha_1} \quad (\text{B.2.5})$$

con n dispari.

B.3 Tracce

Le proprietà della traccia, in generale, sono la *ciclicità*:

$$\text{Tr}\{ABC\} = \text{Tr}\{BCA\} = \text{Tr}\{CAB\} \quad (\text{B.3.1})$$

l'*additività*:

$$a \text{Tr}\{A\} + b \text{Tr}\{B\} = \text{Tr}\{aA + bB\} \quad (\text{B.3.2})$$

e l'invarianza per trasposizione:

$$\mathrm{Tr}\{A^T\} = \mathrm{Tr}\{A\}. \quad (\text{B.3.3})$$

Vediamo quelle per le matrici γ^μ .

Traccia 1:

$$\mathrm{Tr}\{\#\text{odd}(\gamma^\mu)\} = 0 \quad (\text{B.3.4})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}\} &= \mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_1} (\gamma_5)^2 \dots \gamma^{\mu_n} (\gamma_5)^2\} \\ &= \mathrm{Tr}\{\gamma_5 \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \dots \gamma_5 \gamma^{\mu_n} \gamma_5\} \\ &= \mathrm{Tr}\{(-\gamma^{\mu_1} \gamma_5) \gamma_5 \dots (-\gamma^{\mu_n} \gamma_5) \gamma_5\} \\ &= (-1)^n \mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}\}. \end{aligned}$$

Traccia 2:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = 4\eta^{\mu\nu}. \quad (\text{B.3.5})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} &= \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} + \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\{\gamma^\nu \gamma^\mu\} \\ &= \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\} \\ &= \eta^{\mu\nu} \mathrm{Tr}\{\mathbb{1}\} \\ &= 4\eta^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Traccia 3:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu\} = 4 \left(\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} + \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \right). \quad (\text{B.3.6})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu\} &= \mathrm{Tr}\{\{\gamma^\alpha, \gamma^\mu\} \gamma^\beta \gamma^\nu - \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu\} \\ &= \mathrm{Tr}\{2\eta^{\alpha\mu} \gamma^\beta \gamma^\nu - \gamma^\mu \{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\nu\} \\ &= \mathrm{Tr}\{2\eta^{\alpha\mu} \gamma^\beta \gamma^\nu - 2\eta^{\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\beta \{\gamma^\alpha, \gamma^\nu\} - \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\alpha\} \\ &= 2\eta^{\alpha\mu} \mathrm{Tr}\{\gamma^\beta \gamma^\nu\} - 2\eta^{\alpha\beta} \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} + 2\eta^{\alpha\nu} \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\beta\} - \\ &\quad - \mathrm{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu\} \\ &= 8 \left(\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} + \eta^{\alpha\nu} \eta^{\mu\beta} \right) - \mathrm{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu\}. \end{aligned}$$

Traccia 4:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}\} = \mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_n} \dots \gamma^{\mu_1}\}. \quad (\text{B.3.7})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}\} &= \mathrm{Tr}\{(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n})^*\} \\
&= \mathrm{Tr}\{(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n})^\dagger\} \\
&= \mathrm{Tr}\{(\gamma^{\mu_n})^\dagger \dots (\gamma^{\mu_1})^\dagger\} \\
&= \mathrm{Tr}\{(\gamma^0 \gamma^{\mu_n} \gamma^0) \dots (\gamma^0 \gamma^{\mu_1} \gamma^0)\} \\
&= \mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_n} \gamma^0 \gamma^0 \dots \gamma^{\mu_1} \gamma^0 \gamma^0\} \\
&= \mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_n} \dots \gamma^{\mu_1}\}.
\end{aligned}$$

Traccia 5:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_\rho \gamma^\nu \gamma_\sigma \gamma^\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\tau \gamma_\mu\} = -32 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\lambda\rho}. \quad (\text{B.3.8})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\gamma_\rho \gamma^\nu \gamma_\sigma (\gamma^\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\tau \gamma_\mu)\} &= \mathrm{Tr}\{\gamma_\rho \gamma^\nu \gamma_\sigma (-2\gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\lambda)\} \\
&= -2 \mathrm{Tr}\{\gamma_\rho (\gamma^\nu \gamma_\sigma \gamma_\tau \gamma_\nu) \gamma_\lambda\} \\
&= -2 \mathrm{Tr}\{\gamma_\rho (4\eta_{\sigma\tau}) \gamma_\lambda\} \\
&= -8\eta_{\sigma\tau} \mathrm{Tr}\{\gamma_\rho \gamma_\lambda\} \\
&= -32\eta_{\sigma\tau} \eta_{\lambda\rho}.
\end{aligned}$$

Vediamo quelle con γ^5 .

Traccia 6:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_5\} = 0. \quad (\text{B.3.9})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\gamma_5\} &= \mathrm{Tr}\{i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3\} \\
&= 4(\eta^{01} \eta^{23} + \eta^{03} \eta^{12} - \eta^{02} \eta^{13}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Traccia 7:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu\} = 0. \quad (\text{B.3.10})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu\} &= \mathrm{Tr}\{(\gamma^a \gamma^a) \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu\} \\
&= \mathrm{Tr}\{\gamma^a \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^a\} \\
&= (\text{impongo } a \neq \mu, \nu \text{ e non è sommato}) \\
&= \mathrm{Tr}\{\gamma^a \gamma_5 \gamma^\mu (-\gamma^a \gamma^\nu)\} \\
&= -\mathrm{Tr}\{\gamma^a \gamma_5 (-\gamma^a \gamma^\mu) \gamma^\nu\} \\
&= +\mathrm{Tr}\{\gamma^a (-\gamma^a \gamma_5) \gamma^\mu \gamma^\nu\} \\
&= -\mathrm{Tr}\{(\gamma^a \gamma^a) \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu\}.
\end{aligned}$$

Traccia 8:

$$\text{Tr}\{\gamma_5 \cdot \#\text{odd}(\gamma^\mu)\} = 0. \quad (\text{B.3.11})$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\gamma_5 \cdot \#\text{odd}(\gamma^\mu)\} &= \text{Tr}\{i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \cdot \#\text{odd}(\gamma^\mu)\} \\ &= i \text{Tr}\{\#\text{odd}(\gamma^\mu)\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Traccia 9:

$$\text{Tr}\{\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\} = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{B.3.12})$$

Dimostrazione:

$$\text{Tr}\{\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\} = -4ie^{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Appendice C

Rotazione di Wick

Vediamo in questa appendice le varie relazioni che ci sono tra le diverse quantità nello spazio di Minkowski e nello spazio Euclideo quando operiamo con una *rotazione di Wick*:

$$x_0 = -i\bar{x}_0. \quad (\text{C.0.1})$$

C.1 Spazio di Minkowski

Coordinate	$x = (t, \vec{x})$
Elemento di volume	$d^4x = dt d^3x$
Metrica	$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$
Elemento di linea	$ds = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$
Derivate	$\partial_\mu = (\partial_t, \vec{\nabla})$
Matrici γ^μ	$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$
Lagrangiana	$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_t\phi)^2 - (\nabla\phi)^2] - V(\phi)$
Azione	$S = \int d^4x \mathcal{L}$

C.2 Spazio Euclideo

Coordinate	$x_E = (\tau, \vec{x})$
Elemento di volume	$d^4x_E = d\tau d^4x$
Metrica	$\delta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, +1, +1, +1) = \mathbb{1}$
Elemento di linea	$ds = \delta_{\mu\nu} dx_E^\mu dx_E^\nu$
Derivate	$\partial_\mu^E = (\partial_\tau, \vec{\nabla})$
Matrici γ^μ	$\{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$
Lagrangiana	$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}[(\partial_t\phi)^2 + (\nabla\phi)^2] + V(\phi)$
Azione	$S_E = \int d^4x_E \mathcal{L}_E$

C.3 Relazioni

Coordinate	$\vec{x} = \vec{x}_E$
Elemento di volume	$d^4x = -id^4x_E$
Metrica	
Elemento di linea	
Derivate	$\partial_t = i\partial_\tau$
Matrici γ^μ	$\gamma^0 = \gamma_E^0, \gamma^i = i\gamma_E^i$
Lagrangiana	$\mathcal{L} = -\mathcal{L}_E$
Azione	$iS = -S_E$

Bibliografia

- [1] John Iliopoulos e Theodore N. Tomaras. *Elementary Particle Physics*. Oxford University Press, 2021.
- [2] Tom Lancaster e Stephen J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 2014.
- [3] Horatiu Nastase. *Introduction to Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1970.
- [4] Michael E. Peskin e Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.
- [5] Pierre Ramond. *Field theory: a modern primer*. 1981.
- [6] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.
- [7] M. Srednicki. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 2007.