Fisica III - Formulario Relatività Speciale

Gabriele Cembalo
gCembalo.github.io

1 Relatività speciale

Valgono: $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$; $\beta = \frac{v}{c}$; $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e definiamo: $\begin{cases} ct = x^0 \\ x = x^1 \\ y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$

Dove non specificato si intende $\gamma = \gamma(v)$

Trasformazioni di Lorentz

lungo una direzione generica x (si considera $\parallel$= direzione parallela al boost e $\perp$= direzione ortogonale al boost)

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(v)(x^0 - \beta x_\parallel) \\ x'_\parallel = \gamma(v)(x_\parallel - \beta x^0) \\ \vec{x}'_\perp = \vec{x}_\perp \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz inverse

boost lungo x

$$\begin{cases} x^0 = \gamma(v)(x'^0 + \beta x'^1) \\ x^1 = \gamma(v)(x'^1 + \beta x'^0) \\ x^2 = x'^2 \\ x^3 = x'^3 \end{cases}$$

Leggi di trasformazione delle velocità

$$u'_\parallel = \frac{u_\parallel - v}{1 - \frac{v u_\parallel}{c^2}} \quad ; \quad \vec{u}'_\perp = \frac{\vec{u}_\perp}{\gamma(v)(1 - \frac{v u_\parallel}{c^2})}$$

Dilatazioni dei tempi

$$\Delta t_{AB} = \gamma(v) \Delta\tau_{AB}$$

con $\Delta\tau_{AB}$ = intervallo di tempo proprio

Contrazione delle lunghezze

$$L = \frac{L_0}{\gamma(v)}$$

con L_0 = lunghezza propria

Invariante relativistico

È definito (tra due eventi A,B) come:

$$\Delta s^2_{AB} = -(x^0_B - x^0_A)^2 + |\vec{x}_B - \vec{x}_A|^2$$

Valgono:

$$\begin{cases} \Delta s^2_{AB} = 0 \text{ intervallo di tipo \underline{luce}} \\ \Delta s^2_{AB} > 0 \text{ intervallo di tipo \underline{spazio}} \quad \exists \textit{ un S.R. t.c. eventi simultanei} \\ \Delta s^2_{AB} < 0 \text{ intervallo di tipo \underline{tempo}} \quad \exists \textit{ un S.R. t.c. eventi coincidenti} \end{cases}$$

Oppure ricordateli come:

$$\begin{cases} \Delta s^2_{AB} = 0 \text{ intervallo di tipo \underline{luce}} \\ \text{intervallo di tipo \underline{spazio} se } \Delta s^2 \text{ ha segno concorde con l'intervallo spaziale} \\ \text{intervallo di tipo \underline{tempo} se } \Delta s^2 \text{ ha segno concorde con l'intervallo temporale} \end{cases}$$

C'è un collegamento causale se l'intervallo è di tipo luce o tempo.

Quadrivelocità

Per un corpo che si muove con velocità $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$

$$U^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(u)(c, \vec{u}) = (\gamma(u)c, \gamma(u)\vec{u}) \qquad \text{dove} \quad u = |\vec{u}|$$

La U^μ si trasforma con le trasformazioni di Lorentz; oppure calcoli $\vec{u}'$ e trovi U'^μ.
Vale la norma quadra: $U^\mu U_\mu = -c^2$

Quadriacclerazione

Per un corpo che si muove con velocità $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$$a^\mu = \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\gamma^4}{c}\vec{v}\cdot\vec{a}, \gamma^2\vec{a} + \frac{\gamma^4}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}\right) \qquad \text{dove} \quad v = |\vec{v}|$$

Energia ed impulso

Energia a riposo o energia di massa ($\forall$ particella, con $m \neq 0$, nel proprio SR in cui è a riposo): $E_0 = m_0c^2$
Energia cinetica: $T \equiv E - E_0 = m_0(\gamma - 1)c^2$
Energia totale: $\boxed{E_{tot} = \gamma(u)m_0c^2 = \sqrt{m_0^2c^4 + \vec{p}^2c^2}}$
Tri-impulso (relativistico): $\vec{p} = m\gamma(u)\vec{u}$

Quadrimpulso

$$P^\mu = m_0U^\mu = m_0(\gamma(u)c, \gamma(u)\vec{u}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

Quadrivettore d'onda:

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$$

- Il quadrimpulso è scrivibile come: $P^\mu = \hbar k^\mu$

Vale la norma quadra **Relazione di mass-shell**: $\boxed{P^\mu P_\mu = -m_0^2c^2}$ (è una relazione che può essere usata anche durante un urto)
NOTA valgono inoltre le seguenti formule:

$$\vec{p} = \frac{E}{c}\beta \qquad \vec{\beta} = \frac{c\vec{p}}{E} \qquad \gamma = \frac{E}{m_0c^2}$$

Per un fotone (particella con massa a riposo nulla $m_0 = 0$) si possono definire energia ed impulso come:

$$E = |\vec{p}|c = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \qquad |\vec{p}| = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \qquad |\vec{v}|_{particella} = c$$

Rapidità

$$\mu = \tanh^{-1}\beta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

Valgono anche:

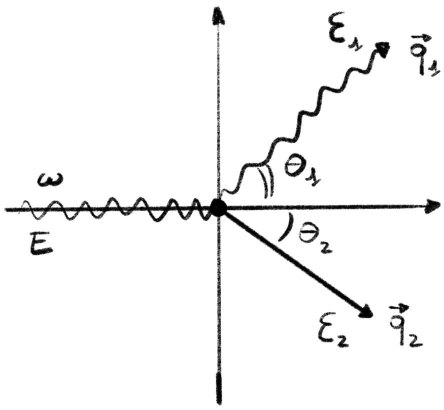
$$\sinh\mu = \gamma\beta \qquad ; \qquad \cosh\mu = \gamma$$

Effetto fotoelettrico

$$T_{max} = e\Delta V = h\nu - L_e$$

Dove L_e è il lavoro di estrazione dallo specifico metallo.
Se la luce incidente ha intensità I allora vale $I = nh\nu$ dove n è il numero di fotoni.

Effetto Compton (scattering a due corpi)



$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \quad , \quad |\vec{k}| = \frac{\omega}{c} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{\lambda/c}$$

$$P^\mu = \hbar k^\mu \quad \text{quindi} \quad E = \hbar\omega \qquad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{E_1}{1 + \frac{E_1}{mc^2}(1 - \cos\vartheta_1)} \quad \longrightarrow \quad \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\vartheta_1)$$

Effetto Doppler

Effetto Doppler lungo una direzione generica (dove ϑ è l'angolo della direzione di propagazione del raggio luminoso):
La v nelle formule della frequenza è la velocità relativa del S.R. K'

$$\nu' = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta'} \quad ; \quad \nu = \nu' \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad k'_\parallel = \gamma k_\parallel \left(1 - \frac{|\vec{w}|v}{c^2 \cos\vartheta}\right) \quad ; \quad k'_\perp = k_\perp$$

$$\omega' = \gamma\omega\left(1 - \frac{|\vec{w}|}{v}\cos\vartheta\right) \quad ; \quad \tan\vartheta' = \frac{\sin\vartheta}{\gamma\left(\cos\vartheta - \frac{|w|v}{c^2}\right)}$$

L'effetto Doppler longitudinale risulta ($\vartheta' = 0$):

$$\nu' = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad ; \quad \omega' = \gamma\omega\left(1 - \frac{w}{v}\right) \quad ; \quad k' = \gamma k\left(1 - \frac{wv}{c^2}\right)$$

Quadriforza

Per un corpo che si muove con velocità $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e sia $\vec{F}$ t.c. $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$

$$\text{postuliamo: } a^\mu = \frac{f^\mu}{m} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} \Longrightarrow f^\mu = ma^\mu = \left(\frac{\gamma^4}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}, \gamma^2\vec{F} + \frac{\gamma^4}{c^2}(\vec{F}\cdot\vec{v})\vec{v}\right) \qquad \text{dove} \quad v = |\vec{v}|$$

Processi d'urto relativistici

Durante un urto si conserva il quadrimpulso totale, quindi di conseguenza energia totale e tri-impulso.

- <u>Sistema di riferimento del laboratorio:</u> in cui una delle due particelli (2) è ferma, $P_2^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{0}\right)$.
- <u>Sistema di riferimento del centro di massa:</u> in cui il tri-impulso totale è nullo, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Longrightarrow |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$.
- Per passre da un S.R. all'altro occorre fare un boost lungo l'asse di collisione.

<u>Processo di formazione:</u> $1 + 2 \longrightarrow 3$ vale $m_3 \geq m_1 + m_2$
<u>Decadimento:</u> $1 \longrightarrow 2 + 3 + 4 + ...n$ vale $m_1 \geq m_2 + m_3 + m_4 + ... + m_n$
<u>TIP</u> per passare dal S.R. del laboratorio a quello del c.m.

- per calcolare l'energia e il modulo della velocità nel S.R. del centro di massa usa l'invarianza di un prodotto scalare tra quadrivettori per ricavare l'energia e la γ, quindi poi invertirla e ricavare la velocità.
- Puoi scrivere i quadrimpulsi delle particelle in gioco, li puoi trasformare con Lorentz utilizzando γ_{cm} e β_{cm}, poi basta che imponi che l'impulso totale nel S.R. del cm sia nulla e riesci a ricavare β_{cm}.
- Puoi calcolare i quadrimpulsi totali iniziali e finali e poi imporre che il suo quadrato $P^\mu P_\mu$ rimanga costante (essendo invariante relativisitico).

Elettromagnetismo

Quadripotenziale: $\mathcal{A} = (-\phi, \vec{A})$
Tensore di campo: $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & cB^z & -cB^y \\ E^y & -cB^z & 0 & cB^x \\ E^z & cB^y & -cB^x & 0 \end{pmatrix}$$

TL sui potenziali e campi EM:

$$\mathcal{A}_\mu \longrightarrow \mathcal{A}'_\mu = \mathcal{A}_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \qquad ; \qquad \underline{\mathcal{A}} \longrightarrow \underline{\mathcal{A}'} = (\Lambda^{-1})^T \underline{\mathcal{A}}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \longrightarrow \mathcal{F}'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1\ T})_\mu{}^\rho \mathcal{F}_{\rho\sigma} (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu \qquad ; \qquad \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}' = (\Lambda^{-1})^T \mathcal{F} \Lambda^{-1}$$

Boost lungo un asse coordinato (Λ riferita ad un boost lungo x con una $v > 0$):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}'_\parallel = \mathbf{E}_\parallel \\ \mathbf{B}'_\parallel = \mathbf{B}_\parallel \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{E}'_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_\perp = \gamma(\mathbf{B}_\perp - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}) \end{cases}$$

NOTA Sono invarianti $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ e $\mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2$.

---

2 Calcolo tensoriale

Tensore di Levi-Civita è un tensore completamente antisimmetrico:

$$-\varepsilon_{0123} = \varepsilon^{0123} = +1$$

se due indici sono uguali allora $\varepsilon = 0$. Ad esempio $\varepsilon^{0223} = 0$.
Partendo da ε^{0123} possiamo dire che:
•pari permutazioni $\longrightarrow \varepsilon = 1$
•dispari permutazioni $\longrightarrow \varepsilon = -1$
Le componenti di $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \neq 0$ sono 24, quindi vale: $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -24$
Valgono le seguenti proprietà:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\lambda\tau\rho\sigma} = -2(\delta^{\mu}{}_{\lambda}\delta^{\nu}{}_{\tau} - \delta^{\mu}{}_{\tau}\delta^{\nu}{}_{\lambda})$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\lambda\nu\rho\sigma} = -6\delta^{\mu}{}_{\lambda}$$

$$\det M = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M^{0}{}_{\mu}M^{1}{}_{\nu}M^{2}{}_{\rho}M^{3}{}_{\sigma} \qquad \text{con M = matrice 4x4}$$

Quadrivettori .
Quadrivettori controvarianti $\longrightarrow$ indici in alto
Quadrivettori covarianti $\longrightarrow$ indici in basso
<u>NOTA</u> Si possono alzare o abbassare gli indici di quadrivettori covarianti o controvarianti:

$$\begin{aligned} a^{\mu} \quad &\longrightarrow \quad a_{\mu} = \eta_{\mu\nu}a^{\nu} \\ b_{\mu} \quad &\longrightarrow \quad b^{\mu} = \eta^{\mu\nu}b_{\nu} \end{aligned}$$

e in più per la metrica di Minkowski vale in generale:

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta^{\mu}_{\rho} \qquad \left(\eta^{-1}\eta = \mathbb{1}\right)$$

Matrice Jacobiana: $\frac{\mathrm{d}x'^{\mu}}{\mathrm{d}x^{\nu}} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Longrightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}x^{\rho}$
Matrice Jacobiana inversa: $\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}x'^{\mu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}$
Si indica in $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ con il primo indice quello delle righe e con il secondo quello delle colonne. Valgono:

$$(\Lambda^{T})_{\mu}{}^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}$$

$$\Lambda_{\mu}{}^{\tau} = (\Lambda^{-1})^{\tau}{}_{\mu}$$

Vale per due generici quadrivettore (covariante o controvariante):

$$\begin{aligned} A \cdot B = A^{\mu}B_{\mu} = \eta_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu} &= A^{0}B_{0} + A^{1}B_{1} + A^{2}B_{2} + A^{3}B_{3} \\ &= -A^{0}B^{0} + A^{1}B^{1} + A^{2}B^{2} + A^{3}B^{3} \\ &= -A^{0}B^{0} + \vec{A}\cdot\vec{B} \end{aligned}$$

$$A \cdot A = A^{\mu}A_{\mu} = \eta_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu} = -(A^{0})^{2} + (A^{1})^{2} + (A^{2})^{2} + (A^{3})^{2}$$

3 Meccanica classica

Moto circolare (in coordinate polari)

Velocità angolare $\vec{\omega}(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v(t)}{r} \quad \longrightarrow \quad v_t = \omega r$

$a(t) = r\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 r$

dove: $a_t = \frac{dv}{dt} = \alpha r \quad \left(\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dv}{dt} = \frac{a_t}{r}\right)$ e $a_n = \frac{v^2}{r} = \omega v = \omega^2 r$

Raggio di curvatura $\rho = \frac{v^2}{|a_n|} = \frac{v^2}{|a \times v|}$

Dinamica del punto materiale

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$ dove $\vec{p} = m\vec{v}$; Teorema dell'impulso $I = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \Delta p$

Vale $\vec{F} = \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}$ se la massa è variabile

Energia

Lavoro $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$; $dW = mvdv \quad [J]$ Potenza $P = \frac{dW}{dt} = \frac{dT}{dt} \quad [Watt]$; $P = \vec{F}_t \cdot \vec{v}$

Energia cinetica $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad [J]$

Energia potenziale forza peso: $U = mgh$; forza elastica: $U = \frac{1}{2}k\Delta x^2$

Energia meccanica $E = T + U$ per forze conservative E=cost, ma vale sempre: $W = \Delta E$

Momento angolare $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ Momento meccanico $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad |\vec{M}| = rF\sin\theta$

Teoremi:

Teorema delle forze vive $W = \Delta T = -\Delta U$; $F(x) = -\frac{dU}{dx}$

Gravitazione

$\vec{F} = G\frac{mM}{\vec{r}^2}$; l'energia potenziale gravitazionale $U = -G\frac{mM}{r}$

La massa ridotta è definita come: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}$
Vengono classificate le orbite dall'energia meccanica E:
$E < 0$ orbita circolare o ellittica
$E = 0$ orbita libera (aperta)
$E > 0$ orbita libera iperbolica

Trasformazioni di Galileo con moto rettilineo uniforme (e scegliendo l'osservatore **O** con l'asse x nella direzione del moto relativo):

$$\begin{cases} x' = x - v_{rel}t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \vec{x}'(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}_{rel} \\ \vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{v}_{rel}(t) \quad \text{composizione velocità} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases}$$

e di conseguenza $\vec{F}' = \vec{F}$

4 Analisi matematica

Identità trigonometriche

$\sin(\arctan(\alpha)) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$
$\sin(\pi/2 \pm \alpha) = \cos(\alpha)$
$\cos(\pi/2 \mp \alpha) = \pm\sin(\alpha)$
$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin(\alpha)$
$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\sin(3\pi/2 \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\cos(3\pi/2 \pm \alpha) = \pm\sin(\alpha)$
$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
$t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
$\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\tan(\alpha) = \frac{2t}{1-t^2}$
$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$
$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$
$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Integrali utili

$\int \log x \mathrm{d}x = x\log x - x$
$\int \sin^2 x \mathrm{d}x = 1/2(x - \sin x\cos x)$
$\int \cos^2 x \mathrm{d}x = 1/2(x + \sin x\cos x)$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \arctan(x/a)$
$\int x\cos x \mathrm{d}x = x\sin x + \cos x$
$\int x\sin x \mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x$
$\int \sin^4 x \mathrm{d}x = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)$
$\int \cos^4 x \mathrm{d}x = \frac{1}{32}(12x + 8\sin(2x) + \sin(4x))$
$\int \sin^n x \mathrm{d}x = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \mathrm{d}x$
$\int \cos^n x \mathrm{d}x = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \mathrm{d}x$
$\int \sin x \cos^3 x = \frac{1}{192}(\cos(6x) - 9\cos(2x))$
$\int \sin x \cos^2 x = \frac{1}{32}(4x - \sin(4x))$
$\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x = \frac{1}{3}$
$\int \sin x\cos x = -\frac{1}{2}\cos^2 x$
$\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x = \frac{1}{2}$

Teoremi

Teorema di Stokes:

$$\int_S \nabla \times F \cdot N \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}s$$

Divergenza:

$$\int_V \nabla \cdot F \mathrm{d}V = \int_{\partial V} F \cdot N \mathrm{d}\sigma$$

Sviluppi di Taylor $x \to 0$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + x^n/n! + o(x^n)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + ... + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + ... + \binom{1/2}{n}x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\tan x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + o(x^9)$

Valgono per $x \to \pm\infty$

$\sqrt{x^2 \pm x} \sim x$
$\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$
$\tan^{-1}\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$

5 Costanti di uso frequente

Costante dielettrica del vuoto : $\epsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}\ F/m$ (oppure $[C^2/Nm^2]$)
Permeabilità magnetica del vuoto : $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\ H/m$
Carica dell'elettrone : $e = 1.60\ 10^{-19}\ C$
Massa dell'elettrone : $m_e = 9.1\ 10^{-31}\ kg$
Rapporto e/m dell'elettrone : $e/m = 1.76\ 10^{11}\ C/kg$
Massa del protone : $m_p = 1.67\ 10^{-27}\ kg$
Velocità delle onde e.m. nel vuoto : $c = 3.0\ 10^8\ m/s$
Impedenza del vuoto : $Z_0 = 376.7\ \Omega$
Costante di Planck : $h = 6.626\ 10^{-34}\ J \cdot s = 4.1357\ 10^{-15}\ eV \cdot s$
Magnetone di Bohr : $\mu_B = 9.42\ 10^{-24}\ Am^2$
Costante gravitazionale : $G = 6.672\ 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$
Numero di Avogadro : $N_A = 6.02252\ 10^{23}\ mol^{-1}$
Costante di Boltzmann : $k = 1.38054\ 10^{-23}\ JK^{-1}$
Costante dei gas : $R = 8.314\ J/(molK) = 1.986\ cal/(molK)$
Volume di una mole(STP gas ideale) : $k = 22.414\ 10^{-3}\ m^3 mol^{-1}$
Unità astronomica : $AU = 1.49598\ 10^{11}\ m$
Raggio(equatoriale)della terra : $R_\oplus = 6.378\ 10^6\ m$
Massa della terra : $M_\oplus = 5.973\ 10^{24}\ kg$
Massa del sole : $M_\odot = 1.989\ 10^{30}\ kg$

Conversioni unità di misura

Costante di Planck : $h = 6.626\ 10^{-34}\ J \cdot s = 4.1357\ 10^{-15}\ eV \cdot s$
Costante di Planck ridotta: $\hbar = \frac{h}{2\pi}$
1 cal/s = 4.186 W
1 eV = $1.6 \cdot 10^{-19}$ C $\cdot$ 1V = $1.6022 \cdot 10^{-19}$J
1 anno luce = $9.461 \cdot 10^{12}$ km

$$\begin{cases} \text{tera-} & [\mathrm{T}] & 10^{12} \\ \text{giga-} & [\mathrm{G}] & 10^{9} \\ \text{mega-} & [\mathrm{M}] & 10^{6} \\ - & & \\ \text{micro-} & [\mu] & 10^{-6} \\ \text{nano-} & [\mathrm{n}] & 10^{-9} \\ \text{pico-} & [\mathrm{p}] & 10^{-12} \end{cases}$$
