Formulario analisi matematica

Gabriele Cembalo
gCembalo.github.io

Identità trigonometriche

$\sin(\arctan(\alpha)) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$
$\sin(\pi/2 \pm \alpha) = \cos(\alpha)$
$\cos(\pi/2 \mp \alpha) = \pm\sin(\alpha)$
$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin(\alpha)$
$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\sin(3\pi/2 \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\cos(3\pi/2 \pm \alpha) = \pm\sin(\alpha)$
$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
$t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
$\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\tan(\alpha) = \frac{2t}{1-t^2}$
$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$
$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$
$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Angoli notevoli

	cos	sin	tan
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1

Gerarchia infiniti

$\log_a^\beta x < \sqrt{x} < x^\alpha < a^x < x! < x^x$

Limiti notevoli $x \to 0$

$\lim \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim \frac{\tan x}{x} = 1$
$\lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
$\lim \frac{\sinh x}{x} = \lim \frac{\tanh x}{x} = 1$
$\lim \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log(a)}$ con $(a > 0, a \neq 1)$
$\lim \frac{a^x - 1}{x} = \log(a)$, $a > 0$
$\lim \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, $\lim \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim \frac{\arctan x}{x} = 1$, $\lim \frac{\arcsin x}{x} = 1$
$\lim (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Limiti notevoli $x \to \pm\infty$

$\lim(1+\frac{1}{x})^x = e$, $\lim \frac{\sin x}{x} = 0$
$\lim(1+\frac{a}{x})^x = \lim_{y\to\pm\infty}(1+\frac{1}{y})^{ay} = e^a$
con $y = \frac{x}{a}$

Differenziabilità in $\mathbb{R}^n$

<u>1° formula dell'incremento finito</u> $f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) = f(\bar{x})h + o(|h|)$, $h \to 0$
<u>differenziale ($df(\bar{x})$):</u> $\varphi(h) = f'(\bar{x}) \cdot h$
<u>formula del gradiente:</u>
$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{v}$
<u>derivata campo scalare f lungo una curva γ:</u> definito $\phi = f \circ \gamma$ allora $\phi'(\bar{t}) = \nabla f(\gamma(\bar{t})) \cdot \gamma'(\bar{t})$
<u>derivata campi vettoriali G, F composti:</u>
$J(G \circ F)(\bar{x}) = JG(F(\bar{x})) \cdot JF(\bar{x})$
$\bar{x}$ è <u>punto stazionario</u> di f se $\nabla f(\bar{x}) = 0$

Punti di non derivabilità

$\nexists \lim \frac{\Delta f}{\Delta x}$ nè sx nè dx $\to$ no derivabile
$\nexists \lim \frac{\Delta f}{\Delta x}$ ma $\exists$ finiti dx e sx $\to$ punto angoloso
$\lim \frac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty$ (o $-\infty$) $\to$ punto a tangente verticale
$\lim_{x\to x_0^\pm} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \pm\infty$ (o $\mp\infty$) $\to$ cuspite

Asintoti obliqui

$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$
$q = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$

derivate

$|f(x)| \xrightarrow{d_x} \frac{f(x)}{|f(x)|} \cdot f'(x)$
$a^x \xrightarrow{d_x} \log a \cdot a^x$
$\arctan x \xrightarrow{d_x} \frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x \xrightarrow{d_x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x \xrightarrow{d_x} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x \xrightarrow{d_x} \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Integrali utili

$\int \log x dx = x\log x - x$
$\int \sin^2 x dx = 1/2(x - \sin x\cos x)$
$\int \cos^2 x dx = 1/2(x + \sin x\cos x)$
$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \arctan(x/a)$
$\int x\cos x dx = x\sin x + \cos x$
$\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x$
$\int \sin^4 x dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)$
$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{32}(12x + 8\sin(2x) + \sin(4x)$
$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$
$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$

Sostituzioni furbe

• Con $\sin x$, $\cos x$ $\to$ $t = \tan(x/2)$
Valgono $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$
$\frac{2t}{1+t^2} = \sin x$; $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos x$
• Con $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\tan x$, $\sin x\cos x$ $\to$ $t = \tan x$ e vale $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$
$\frac{t^2}{1+t^2} = \sin^2 x$; $\frac{1}{1+t^2} = \cos^2 x$
• se ho $\sqrt{ax^2+bx+c}$
- $a > 0$ completo il □ fino $\sqrt{1-y^2}$ e $t = \arcsin y$
- $a < 0$ completo il □ fino $\sqrt{y^2 \pm 1}$ e $t = \sinh^{-1} y$ (se +), $t = \cosh^{-1} y$ (se -)

Sviluppi di Taylor $x \to 0$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + x^n/n! + o(x^n)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \ldots + \binom{1/2}{n}x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\tan x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + o(x^9)$

Valgono per $x \to \pm\infty$

$\sqrt{x^2 \pm x} \sim x$
$\tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$
$\tan^{-1}\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$

Algebra o-piccoli

$\varphi(x)o(x^n) = o(x^n)$ se φ è limitata
$x^m o(x^n) = o(x^{n+m})$
$o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$
$o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$

Serie

In genere vale $I_a \subseteq I_s \subseteq S$ con S dominio
<u>Formula di stirling</u>
$\log n! = n\log n - n, n \to \infty$
<u>Binomio di Newton</u>
$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k}y^k$
<u>Serie armonica</u>
$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ =(conv. se $\alpha > 1$ div. se $\alpha \leq 1$)
<u>Serie geometrica</u>
$\sum_{n\geq 0} q^n$ =(conv. se $|q| < 1$ a $\frac{1}{1-q}$ div. se $|q| \geq 1$)
<u>Vale sempre</u> $|\sum_{n\geq 0} a_n| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n|$
<u>Prodotto secondo Cauchy</u> $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot \sum_{n\geq 0} b_n = \sum_{n\geq 0} c_n$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$
<u>Teorema Cauchy-Hadamard</u>
$R = 1/L$ e $L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$
vale $D_R(z_0) \subseteq I_a \subseteq I_s \subseteq \bar{D_R}(z_0)$
<u>Stima resto per serie segno alterno</u>
$|s_n(x) - s(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$ con $s_n(x) =$

$\sum_k^n f_k(x)$ e $s(x)=\sum_n^{+\infty} f_n(x)$

Sviluppi in serie notevoli

nota per lo sviluppo in $x_0 \neq 0$ sostituisci $t=x-x_0$ e sviluppi in $t=0$

$\frac{1}{x-a}=-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x}{a})^n$ da $\frac{1}{1-y}=\sum y^n$

$\frac{1}{x-a}=-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x}{a})^n$ da $\frac{1}{1-y}=\sum y^n$ che vale $\forall y \in (-1,1)$

$-\log(1-x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$ $x\in[-1,1)$

$e^z=\sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{k!}$

$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$

$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$

$\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$

nota per le serie di funzioni valgono: $s'(x)=\sum_{k\geq 0}f_n'(x)$ e per i coefficienti $s^{(k)}(x_0)=a_k k!$ oppure $a_k=\frac{s^{(k)}(x_0)}{k!}$

Disuguaglianze utili

$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ per$(x,y)\to 0$

$|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ per$(x,y)\to 0$

$|xy|\leq \frac{1}{2}(x^2+y^2), \sqrt{x^2+y^2}\to 0$

$|x\pm y|\leq |x|+|y|, \sqrt{x^2+y^2}\to 0$

$\frac{1}{x^{2\alpha}+y^{2\beta}}\leq\frac{1}{x^{2\alpha}}$ $\forall\alpha,\beta>0$

$\frac{1}{x^{2\alpha}+y^{2\beta}}\leq\frac{1}{y^{2\beta}}$ $\forall\alpha,\beta>0$

ODE lineari di I ordine

del tipo $y'+a(x)y=g(x)$

1. risolvo l'omogenea
2. trovo $A(x)=\int a(x)\mathrm{d}x$ e $G(x)=\int e^{A(x)}g(x)\mathrm{d}x$

la sol sarà: $y(x)=(G(x)+c)e^{-A(x)}$

ODE lineari di II ordine a coefficienti costanti

del tipo $y''+ay'+by=g(x)$

1. risolvo l'omogenea con l'eq. caratteristica $\lambda^2+a\lambda+b$ e calcolo $\Delta=a^2+4b$

casi: a. $\Delta>0$ sol: $c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$

b. $\Delta=0$ sol: $(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$

c. $\Delta<0$ sol: $(c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x)e^{\sigma x}$ con $\sigma=-a/2$, $\omega=\sqrt{|\Delta|}/2$

3. risolvo l'eq. particolare con $g(x)$ del tipo: $g(x)=p_n(x)e^{\mu x}\cos\theta x$ e trovo la sol: $y_p(x)=x^m e^{\mu x}(q_n(x)\sin\theta x+\hat{q_n}(x)\cos\theta x)$ poi faccio le derivate di y_p e risolvo sostituendo $y_p''+ay_p'+by_p=g(x)$

valori di m**:** a. se $\Delta>0$, $\theta=0$, $\mu\in\{\lambda_1,\lambda_2\}$ allora $m=1$

b. se $\Delta=0$, $\theta=0$, $\mu=\lambda$ allora $m=2$

c. se $\Delta<0$, $\theta=\omega$, $\mu=\sigma$ allora $m=1$

d. altrimenti $m=0$

Geometria analitica

Nel piano

retta: $y=mx+q$

circonferenza: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

ellisse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

parabola: $y=ax^2+bx+c$

iperbole: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Nello spazio

piano: $\pi: ax+by+cz+d=0$

sfera:$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

ellissoide: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

paraboloide ellittico: $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

paraboloide iperbolico: $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

iperbole a una falda: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

iperbole a due falda: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

cilindro: (es) $x^2+y^2=1$

cono: $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

Cambi di coordinate

coordinate polari

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta & \rho\geq 0 \\ y=\rho\sin\theta & \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$$

vale $|\det J_\phi(\rho,\theta)|=\rho$

coordinate sferiche

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\geq 0 \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi & \theta\in[0,\pi] \\ z=\rho\cos\theta & \varphi\in[0,2\pi] \end{cases}$$

vale $|\det J_\phi(\rho,\theta,\varphi)|=\rho^2\sin\theta$

coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi & \rho\geq 0 \\ y=\rho\sin\varphi & \varphi\in[0,2\pi] \\ z=z \end{cases}$$

vale $|\det J_\phi(\rho,\varphi,z)|=\rho$

Curve

circonferenza

$\gamma=R(\cos\theta,\sin\theta)$,$\theta\in[0,2\pi]$

spirale logaritmica

$\gamma=ae^{b\theta}(\cos\theta,\sin\theta)$,$a,b\neq 0$

ellisse

$\gamma(t)=(a\cos t,b\sin t)$,$t\in[0,2\pi]$

lunghezza $L(\gamma)=\int_a^b|\gamma'(t)|\mathrm{d}t$

e se γ cartesiana $\int_a^b\sqrt{1+(f')^2}\mathrm{d}t$

integrale di 1° specie

$\int_\gamma f\mathrm{d}s=\int_a^b f(\gamma(s))|\gamma'(s)|\mathrm{d}s$

integrale di 2° specie

$\int_\gamma \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\int_a^b\vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\mathrm{d}t$

$\vec{F}$ conservativo se $F(x)=\nabla U(x)$ $\forall x\in domF$

$\int_\gamma\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=U(\gamma(b))-U(\gamma(a))$

condizione necessaria: $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}=\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$,$\forall i,j$

Lemma di Poincaré: se vale la cond. necessaria e A dominio semplicemente connesso, allora F conservativo e $\oint_\gamma\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=0$ e $U(x)=\int_\gamma\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$, $\frac{\partial U}{\partial x_i}=F_i$

Formula di Gauss-Green: $\gamma\in\partial D^+$ con D chiuso, limitato, connesso e ∂D regolare

$\oint_\gamma\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\int_D\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

note:

- Se f densità, Γ filo, allora $m_{tot}=\int_\Gamma f\mathrm{d}s$ e $x_i=\frac{\int_\gamma\pi_i\mathrm{d}s}{m_{tot}}$ dove x_i è la coordinarta i del baricentro e π_i è la proiezione sulla componente.
- A semplicemente connesso se connesso per archi e ogni curva è contraibile. 1-forme • chiusa se $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}=\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$,$\forall i,j$
- esatta se è il potenziale di un campo scalare (ovvero se F è conservativo)

Forma argomento $F=\left(-\frac{y}{x+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ vale $\int_\gamma\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=2\pi$

Superfici

$N=\varphi_u\times\varphi_v$ vettore normale con φ parametrizzazione della superficie e (u,v) parametri

Area sueprficie regolare

$A(S)=\int_D|\varphi_u(u,v)\times\varphi_v(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

se cartesiana $\int_D\sqrt{(f_x)^2+(f_y)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

D è il dominio dei parametri

Sup. di rotazione

presa $\gamma(t)=(g_1(t),0,g_2(t))$,$t\in[a,b]$ allora

$A(S)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b g_1(t)\sqrt{(g_1)^2+(g_2)^2}\mathrm{d}t$

Campi scalari

$\int_S f\mathrm{d}\sigma=\int_D f(\varphi(u,v))|\varphi_u\times\varphi_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

Campi vettoriali

$\int_S F\cdot N\mathrm{d}\sigma=\int_D F(\varphi(u,v))\cdot(\varphi_u\times\varphi_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

flusso di F attraverso S

$\phi=\int_S F\cdot N\mathrm{d}\sigma$

Note

- se F ammette potenzile scalare $F=\nabla U$ allora $\nabla\times F=0$
- se F ammette potenzile vettore $F=\nabla\times U$ allora $\nabla\cdot F=0$
- se $F=\nabla\times U$ e $S=S_1\cup S_2$ cartesiane e S chiusa, allora $\int_S F\cdot N\mathrm{d}\sigma=0$
- C è un dominio regolare se: chiuso, limitato, interno non vuoto, connesso e ∂C semplice, parametrica, regolare e N uscente

Teorema di Stokes: $\partial S^+=\varphi(\partial D^+)$ allora

$\int_S(rotF)\cdot N\mathrm{d}\sigma=\int_{\partial S^+}F\cdot\mathrm{d}s$

Teorema della divergenza: C dominio regolare

$\int_{\partial C}F\cdot N\mathrm{d}\sigma=\int_C divF\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$