Esercizi di Meccanica Statistica

ESERCIZIO 1

PARTENDO DA:

$$S = kN \log\left[\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m E}{3h^2 N}\right)^{3/2}\right] + \frac{5}{2}Nk$$

USANDO L'EQUAZIONE DI STATO RICAVARE IL POTENZIALE CHIMICO.

SOL USIAMO

$$\mu = -T\frac{\partial S}{\partial N}$$

$$= -T\left\{k\log[\dots] + kN\left[-\log N - \log N^{3/2}\right] + \frac{5}{2}k\right\}$$

$$= -T\left\{k\log[\dots] + kN\left[-\log N - \frac{3}{2}\log N\right] + \frac{5}{2}k\right\}$$

$$= -T\left\{k\log\left[\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m E}{3h^2 N}\right)^{3/2}\right] - \frac{5}{2}kN\log N + \frac{5}{2}k\right\}$$

ESERCIZIO 2 DETERMINARE L'ENTROPIA $S(T,V,N)$ E MOSTRARE CHE, RISCRIVENDO LA FUNZIONE E, V, N UTILIZZANDO LA RELAZIONE:

$$E = \frac{3}{2} N k T$$

SI RITROVA L'ESPRESSIONE DI $S(T,V,N)$ DELL'ENSEMBLE MICROCANONICO.

SOL ABBIAMO $F = -NkT \log\left(\frac{V}{N\lambda_T^3}\right) - NkT$; $\lambda_T = \sqrt{\frac{h^2\beta}{2\pi m}}$

VEDIAMO SUBITO

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m}}\left(\frac{3N}{2E}\right)^{1/2} = \left(\frac{3Nh^2}{4\pi m E}\right)^{1/2}$$

E CI RICORDIAMO

$$T\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial \log T} = -\frac{\partial}{\partial \log \beta} = -\beta\frac{\partial}{\partial \beta}$$

CERCHIAMO

$$-S = \frac{\partial F}{\partial T} = -Nk\log\left[\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m E}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right] + NkT\frac{\partial}{\partial T}\log\lambda_T^3 - Nk$$

$$= -Nk\log[\dots] - Nk\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\log\lambda_T^3 - Nk$$

$$= -Nk\log[\dots] - Nk - 3Nk\beta \frac{1}{\lambda_T}\frac{\partial}{\partial\beta}\lambda_T$$

$$= -Nk\log[\dots] - Nk - 3Nk\beta \frac{1}{\lambda_T}\left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^{1/2}$$

$$= -Nk\log[\dots] - Nk - 3Nk\beta \frac{1}{\beta^{1/2}}\left(\frac{1}{2}\beta^{-1/2}\right)$$

$$= -Nk\log[\dots] - Nk - \frac{3}{2}Nk$$

$$= -Nk\log[\dots] - \frac{5}{2}Nk$$

DUNQUE ABBIAMO

$$S = Nk\log\left[\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m E}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right] + \frac{5}{2}Nk$$

$$\blacksquare$$

ESERCIZIO 3 PARTENDO DALL'ESPRESSIONE DI $g(E)$:

$$g(E) = \frac{1}{N!}\left[\frac{V(2\pi m E)^{3/2}}{h^3}\right]^N \frac{1}{\Gamma(3N/2)}\,\frac{1}{E}$$

SI PUÒ OTTENERE $Z(\beta)$.

SOL $Z(\beta) = \int_0^{+\infty} dE \; g(E)\, e^{-\beta E}$

$$= \frac{1}{N!}\left[\frac{V(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\right]^N \frac{1}{\Gamma(3N/2)} \int_0^{\infty} dE \; E^{\frac{3N}{2}-1}\; e^{-\beta E}$$

CHIAMANDO $x = \beta E \rightsquigarrow \beta^{-1} dx = dE$

$$Z(\beta) = \frac{1}{N!}\left[\frac{V(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\right]^N \frac{1}{\Gamma(3N/2)} \int_0^{\infty} dx \; \beta^{-1} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{3N/2-1} e^{-\beta E}$$

$$= \dots \int_0^{\infty} dx \; \beta^{\frac{3N}{2}}\, x^{\frac{3N}{2}-1}\, e^{-x}$$

$$= \frac{1}{N!}\left[\dots\right]^N \frac{1}{\Gamma(3N/2)}\, \beta^{-3N/2}\, \Gamma(3N/2)$$

$$= \frac{1}{N!}\left[\frac{V(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\right]^N \beta^{-\frac{3N}{2}}$$

ESERCIZIO 4 MOSTRARE IL LEGAME TRA L'ENTROPIA E LA QUANTITÀ H CHE COMPARE NEL TEOREMA H DI BOLZMANN, NEL CASO DI GAS IDEALE.

SOL ABBIAMO LA DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE AD 1 PARTICELLA $f(\vec{x},\vec{v},t)$ NORMALIZZATA A

$$\int d^3x\, d^3v\; f(\vec{x},\vec{v},t) = N .$$

ABBIAMO LA DEFINIZIONE $H = \int d^3x\, d^3v\; f(\vec{x},\vec{v},t)\ \ln f(\vec{x},\vec{v},t)$
E IL TEOREMA H CI DICE

$$\frac{dH}{dt} \leq 0$$

CON L'UGUAGLIANZA ALL'EQUILIBRIO. ALL'EQUILIBRIO, PER UN GAS IDEALE, ABBIAMO LA DISTRIBUZIONE DI MAXWELL-BOLTZMANN:

$$f_{MB}(\vec{x},\vec{v},t) = \frac{N}{V(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{p^2}{2mkT}\right\} .$$

POSSIAMO CALCOLARE H ALL'EQUILIBRIO

$$H = \int d^3x\, d^3v\; f_{MB} \cdot \ln f_{MB}$$

$$= \int d^3x\, d^3v\; f_{MB} \cdot \left\{ \ln\frac{N}{V} - \frac{3}{2}\ln(2\pi mkT) - \frac{p^2}{2mkT} \right\}$$

$$= \int d^3x\, d^3v\, f_{MB} \ln\frac{N}{V} - \frac{3}{2}\ln(2\pi m k T)\int d^3x\, d^3v\, f_{MB} -$$

$$- \frac{1}{kT}\int d^3x\, d^3v\, \frac{mv^2}{2} f_{MB}$$

$$= N \ln\frac{N}{V} - \frac{3}{2} N \ln(2\pi m k T) - \frac{1}{kT}\cdot\frac{3}{2}NkT$$

$$= N \ln\left[\frac{N}{V}\frac{1}{(2\pi m k T)^{3/2}}\right] - \frac{3}{2}N$$

SE MOLTIPLICHIAMO PER $-k$

$$\Rightarrow -kH = kN \ln\left[\frac{V}{N}(2\pi m k T)^{3/2}\right] + \frac{3}{2}Nk$$

DUNQUE ABBIAMO PER UN GAS IDEALE

$$S = -k_B H + \text{cost.}$$

INFATTI SE USI $E = \frac{3}{2}NkT \longrightarrow T = \frac{2}{3}\frac{E}{NK}$ ALLORA SI HA

$$S = -kH + \text{cost} = kN \ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m E}{3N}\right)^{3/2}\right] + \text{cost}$$

CIÒ CHE NON TORNA È LA COSTANTE h. h NON COMPARE ALL'INTERNO DI H, MA LA SI METTE DENTRO (COME INPUT QUANTISTICO) SFRUTTANDO IL FATTO CHE S È DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE ADDITIVA.

INFATTI DEFINENDO $f \to f/h^3$ OTTENIAMO UN PEZZO IN PIÙ

$$- \frac{3}{2} N k \ln h^2$$

E SI RICOSTRUISCE LA FORMULA DI SACKUR-TETRODE.

ESERCIZIO 5 MOSTRARE ESPLICITAMENTE CHE NEI PRESSI DI $\langle E \rangle$ LA $P(E)$ È UNA GAUSSIANA CON VARIANZA $\sigma^2 \propto kT^2 C_{V,N}$ IN ACCORDO CON LA DERIVAZIONE GENERALE.

SOL NOI VALEVAMO VISTO CHE

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} = -\sigma^2$$

DUNQUE CON
$$Z = \frac{1}{N!}\left[\frac{V(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\right]^N \beta^{-\frac{3N}{2}}$$

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta}$$

ABBIAMO

$$\sigma^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\log Z$$

CAMBIANDO VARIABILE PERÒ

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{dT}{d\beta}\frac{\partial}{\partial T} = -kT^2\frac{\partial}{\partial T}$$

DUNQUE

$$\sigma^2 = -\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} = kT^2 \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}$$

E CI POSSIAMO RICORDARE $C_{V,N} = \left(\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \right)_{V,N}$

COSÌ :

$$\sigma^2 = kT^2 C_{V,N}$$

$\blacksquare$

ESERCIZIO 6 SI PUÒ MOSTRARE LA COSTANTE DI NORMALIZZAZIONE

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{N! \prod_a m_a!}}$$

SOL PRENDIAMO

$$|\nu\rangle = \mathcal{N} \sum_Q \delta_Q |a_{Q(1)}\rangle_1 \otimes |a_{Q(2)}\rangle_2 \otimes \dots \otimes |a_{Q(N)}\rangle_N$$

CON LA CONDIZIONE $\sum_a m_a = N$

E IMPONIAMO LA NORMALIZZAZIONE

$$1 = \langle \nu | \nu \rangle = \mathcal{N}^2 \sum_{P,Q} \delta_P \delta_Q \langle a_{P(1)}, \dots, a_{P(N)} | a_{Q(1)} \dots a_{Q(N)} \rangle$$

VISTO CHE GLI STATI A SINGOLA PARTICELLA SONO ORTONORMALI ABBIAMO CHE IL PRODOTTO SCALARE È NON NULLO SOLO SE P DIFFERISCE DA Q PER PERMUTAZIONI DI PARTICELLE CHE OCCUPANO LO STESSO LIVELLO. INFATTI, LE PERMUTAZIONI CHE SCAMBIANO LE m_a PARTICELLE NELLO STATO a NON MODIFICANO LO STATO $|\nu\rangle$. DOBBIAMO SOLO CONTARE QUANTI SONO I PRODOTTI NON NULLI.

PER OGNI LIVELLO $|a\rangle$ CI SONO $m_a!$ STATI EQUIVALENTI PER SCAMBIO. DUNQUE AVREMO PER P

$$\prod_a m_a!$$

PERMUTAZIONI. DUNQUE

$$1 = \langle \nu | \nu \rangle = \mathcal{N}^2 \prod_a n_a! \sum_Q \delta_Q \overbrace{\langle \dots | \dots \rangle}^{1}$$

IL NUMERO DI PERMUTAZIONI DI Q È $N!$, PER CUI ABBIAMO

$$1 = \mathcal{N}^2 \prod_a n_a! \; N!$$

$$\Rightarrow \mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{N! \prod_a n_a!}}$$

QUINDI LA NORMALIZZAZIONE CONTA QUANTE VOLTE LO STESSO STATO FISICO COMPARE NELLA SOMMA SULLE PERMUTAZIONI, TENENDO CONTO DELL'INDISTINGUIBILITÀ E DELLE OCCUPAZIONI MULTIPLE DEGLI STESSI LIVELLI A SINGOLA PARTICELLA.

ESERCIZIO 7 SI DIMOSTRA CHE LA CAPACITÀ TERMICA SI PUÒ SCRIVERE COME:

$$c_{V,N} = \frac{3}{2} N k \left(\frac{5}{2} \frac{f_{5/2}}{f_{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{f_{3/2}}{f_{1/2}} \right)$$

SOL ABBIAMO

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} N k T \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)}$$

CON LA DEFINIZIONE

$$f_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{\frac{e^x}{z} + 1} \quad ; \quad z \frac{\partial f_\nu}{\partial z} = f_{\nu-1}(z)$$

$$z = e^{\beta\mu}$$ $\rightarrow$ z DIPENDE DA T

IN QUESTO MODO:

$$C_V = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{3}{2} N k \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} + \frac{3}{2} N k T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \right)$$

DOBBIAMO VEDERE COME z DIPENDE DA T. SAPPIAMO

$$\langle N \rangle \equiv N = g_s \frac{V}{V_T} f_{3/2}(z) = g_s V \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} f_{3/2}(z)$$

$$\log N = \text{cost.} + \frac{3}{2}\log T + \log f_{3/2}(z)$$

VEDENDONE UNA VARIAZIONE INFINITESIMA (CON $dN = 0$)

$$0 = \frac{3}{2}\frac{dT}{T} + \frac{1}{f_{3/2}(z)}\frac{\partial}{\partial z} f_{3/2}(z)\cdot dz$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT}{dz} = -\frac{2}{3}\frac{1}{f_{3/2}(z)}\frac{\partial f_{3/2}}{\partial z}$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{1}{z}\frac{T}{f_{3/2}(z)} f_{1/2}(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dT} = -\frac{3}{2}\frac{z}{T}\frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)}}$$

QUESTO CI SERVE POICHÈ

$$C_V = \frac{3}{2}Nk\frac{f_{5/2}}{f_{3/2}} + \frac{3}{2}NkT\frac{dz}{dT}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_{5/2}}{f_{3/2}}\right)$$

$$= \frac{3}{2}Nk\frac{f_{5/2}}{f_{3/2}} + \frac{3}{2}NkT\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{z}{T}\frac{f_{3/2}}{f_{1/2}}\left[\frac{1}{f_{3/2}}\frac{\partial}{\partial z}f_{5/2} - \frac{f_{5/2}}{(f_{3/2})^2}\frac{\partial}{\partial z}f_{3/2}\right]$$

$$= \frac{3}{2} Nk \frac{f_{5/2}}{f_{3/2}} - \frac{9}{4} Nk \frac{f_{3/2}}{f_{1/2}} \left[\frac{f_{3/2}}{f_{3/2}} - \frac{f_{5/2} f_{1/2}}{(f_{3/2})^2} \right]$$

$$= \frac{3}{2} Nk \left[\frac{f_{5/2}}{f_{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{f_{3/2}}{f_{1/2}} + \frac{3}{2} \frac{f_{5/2}}{f_{3/2}} \right]$$

QUINDI ABBIAMO TROVATO

$$C_V = \frac{3}{2} Nk \left[\frac{5}{2} \frac{f_{5/2}}{f_{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{f_{3/2}}{f_{1/2}} \right]$$

ESERCIZIO 8 SI MOSTRA CHE PER LA CAPACITÀ TERMICA SI TROVA:

$$C_{V,N} = \frac{3}{2} \langle N \rangle k \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{5-3\ell}{2} b_\ell \xi^{\ell-1}$$

PER UN GAS DI FERMIONI LIBERI.

SOL ABBIAMO:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} \langle N \rangle kT \frac{1}{\xi} f_{5/2}\left(f^{-1}_{3/2}(\xi) \right)$$

PER z PICCOLO $f_\nu(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell-1} \frac{z^\ell}{\ell^\nu}$ INVERTENDOLA

$$z(\xi) = f^{-1}_{3/2}(\xi) = \xi + \frac{\xi^2}{2^{3/2}} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3^{3/2}} \right) \xi^3 + \dots$$

SI HA

$$f_{5/2}(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell^\nu} z^\ell$$

$$= z - \frac{z^2}{2^{5/2}} + \frac{z^3}{3^{5/2}} + \dots$$

$$f_{5/2}\left(f^{-1}_{3/2}(\xi) \right) = \left(\xi + \frac{\xi^2}{2^{3/2}} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3^{3/2}} \right) \xi^3 + \dots \right) - \frac{1}{2^{5/2}} \left(\xi + \frac{\xi^2}{2^{3/2}} + \dots \right)^2 + \dots$$

$$= \xi + \left(\frac{1}{2^{3/2}} - \frac{1}{2^{5/2}} \right) \xi^2 + \dots$$

$$f_{5/2}\left(f_{3/2}^{-1}(\xi)\right) = \xi + \sum_{\ell=2}^{\infty} b^{\ell} \xi^{\ell}$$

CON b_ℓ COEFFICIENTI DI VIRIALE FERMIONICI.

Così ABBIAMO

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} \langle N \rangle kT \left[1 + \sum_{\ell=2}^{\infty} b_\ell \xi^{\ell-1} \right]$$

PER CUI

$$C_{V,N} = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{3}{2} \langle N \rangle k \left[1 + \sum_{\ell=2}^{\infty} b_\ell \xi^{\ell-1} \right] + \frac{3}{2} \langle N \rangle kT \sum_{\ell=2}^{\infty} b_\ell \frac{\partial}{\partial T} \xi^{\ell-1}$$

DOBBIAMO DUNQUE RICORDARE

$$\xi = \frac{V_T}{g_s v} = \frac{\lambda_T^3}{g_s v} \qquad \text{CON} \qquad \lambda_T = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m kT}}$$

DUNQUE

$$\xi = \frac{1}{g_s v}\left(\frac{h^2}{2\pi m k T}\right)^{3/2} \Rightarrow \frac{d\xi}{dT} = -\frac{3}{2}\frac{1}{g_s v}\left(\frac{h^2}{2\pi m k T}\right)^{3/2}\frac{1}{T} = -\frac{3}{2}\frac{\xi}{T}$$

ALLORA

$$\frac{d}{dT}\xi^{\ell-1} = (\ell-1)\xi^{\ell-2}\frac{d\xi}{dT} = -\frac{3}{2}(\ell-1)\frac{\xi^{\ell-1}}{T}$$

COSÌ:

$$C_{V,N} = \frac{\langle E\rangle}{T} + \frac{3}{2}\langle N\rangle kT\sum_{\ell=2}^{\infty} b_\ell\left(-\frac{3}{2}\right)(\ell-1)\frac{\xi^{\ell-1}}{T}$$

$$= \frac{\langle E\rangle}{T} - \frac{9}{4}\langle N\rangle k\sum_{\ell=2}^{\infty}(\ell-1)b_\ell\,\xi^{\ell-1}$$

$$= \frac{3}{2}\langle N\rangle k\left[1 + \underbrace{\left(1-\frac{3}{2}(\ell-1)\right)}_{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\ell = \frac{5-3\ell}{2}}\sum_{\ell=2}^{\infty} b_\ell\,\xi^{\ell-1}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\langle N\rangle k\left[1 + \sum_{\ell=2}^{\infty}\frac{5-3\ell}{2}b_\ell\,\xi^{\ell-1}\right]$$

MA VEDIAMO

$$\left(\frac{s-3\ell}{2}\right)^2 b_\ell \Big|_{\ell=1} = b_1 = 1$$

DUNQUE

$$C_{V,N} = \frac{3}{2} \langle N \rangle k \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{s-3\ell}{2} b_\ell \, \xi^{\ell-1}$$

ESERCIZIO 9 SI PUÒ MOSTRARE CHE USANDO:

$$\sum_{\vec{m}}' f(|\vec{m}|) \longrightarrow \frac{V}{V_T} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta^{3/2} \int_0^{\infty} d\varepsilon \, \varepsilon^{1/2} f(\varepsilon)$$

PER ESPRIMERE LA DEGENERAZIONE DEI LIVELLI ENERGETICI, SI OTTIENE:

$$\langle E \rangle = g_s \frac{V}{V_T} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta^{3/2} \int_0^{\infty} d\varepsilon \, \varepsilon^{1/2} \, \varepsilon \, \Theta(\varepsilon_F - \varepsilon)$$

SOL

ESERCIZIO 10 SI MOSTRA CHE PER LA CAPACITÀ TERMICA SI TROVA:

$$C_{V,N} = \frac{3}{2} \langle N \rangle k \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{5-3\ell}{2} a_\ell \eta^{\ell-1}$$

PER UN GAS DI BOSONI LIBERI.

SOL PROCEDIAMO COME NEL CASO FERMIONICO, MA CON LA CONOSCENZA

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} N k T \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell \eta^{\ell-1} \quad ; \quad \eta = \frac{V_T}{V} N = \frac{\lambda_T^3}{V} N = \frac{N}{V} \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2}$$

DUNQUE

$$\frac{d\eta}{dT} = \frac{N}{V} \left(\frac{h^2}{2\pi m k} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{1}{T^{5/2}} = -\frac{3}{2} \frac{\eta}{T}$$

E DI CONSEGUENZA

$$\frac{d\eta^{\ell-1}}{dT} = (\ell-1) \eta^{\ell-2} \frac{d\eta}{dT} = -\frac{3}{2} (\ell-1) \frac{\eta^{\ell-1}}{T}$$

DUNQUE

$$C_{V,N} = \frac{3}{2} N k \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell \frac{\partial}{\partial T} \left(T \eta^{\ell-1} \right) = \frac{3}{2} N k \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell \left[\eta^{\ell-1} + T \left(-\frac{3}{2} \right) (\ell-1) \frac{\eta^{\ell-1}}{T} \right]$$

$$= \frac{3}{2} N k \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[1 - \frac{3}{2} (\ell-1) \right] a_\ell \eta^{\ell-1} = \frac{3}{2} N k \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{5-3\ell}{2} a_\ell \eta^{\ell-1}$$

$\blacksquare$

ESERCIZIO 11 DALLE PROPRIETÀ DEL CAPITOLO §5 SEGUE CHE LA CONDIZIONE DI STABILITÀ:

$$\frac{\partial p}{\partial v} < 0$$

È SEMPRE SODDISFATTA.

SOL CONOSCIAMO IL FATTO CHE Q È UN POLINOMIO A COEFFICIENTI TUTTI POSITIVI, DUNQUE

$$Q > 1 \qquad y \frac{\partial Q}{\partial y} > 1$$

SI HA

$$\bar{\omega} = -\frac{1}{\beta} \log Q$$

E LA PRESSIONE

$$p = -\frac{\bar{\omega}}{v} = \frac{kT}{v} \log Q$$

MA CON

$$\frac{1}{v} = \frac{\langle N \rangle}{V} = -\frac{1}{kT}\frac{1}{V} z \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z}\bigg|_{T,V} = -\frac{1}{kTV} y \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\bigg|_{T,V}$$

$$y = \frac{z}{V_T} \Rightarrow z\frac{\partial}{\partial z} = y\frac{\partial}{\partial y}$$

DUNQUE

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{V} y \frac{\partial}{\partial y}\left(\log Q\right)_{T,V} = y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{kT}\right)$$

MA AVENDO DENSITÀ >0 :

$$\frac{\partial p}{\partial y} > 0 \quad \text{E ANALOGAMENTE} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{v}\right) > 0.$$

DAL PUNTO DI VISTA CANONICO ABBIAMO $y = y(T, v)$ E POSSIAMO USARE LA CATENA :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_T \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_T$$

DI CUI DOBBIAMO STUDIARE IL SEGNO. DALLA TEORIA CONOSCIAMO

$$\frac{\partial p}{\partial y} > 0 \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{v}\right) > 0$$

IN PARTICOLARE LA SECONDA CI DICE CHE SE y AUMENTA ALLORA ANCHE $1/v$ AUMENTA

$\Rightarrow$ v DIMINUISCE ALL'AUMENTARE DI y $\Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial y} < 0 \Rightarrow \dfrac{\partial y}{\partial v} < 0$

DUNQUE POSSIAMO CONCLUDERE

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_T}_{>0} \underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_T}_{<0} < 0$$

ESERCIZIO 12 DISCUTERE LA FORMA DI $\rho_{q,q}$ NEI LIMITI DI ALTA TEMPERATURA $\beta\hbar\omega \ll 1$ E BASSA TEMPERATURA $\beta\hbar\omega \gg 1$.

SOL