

PROVE D'ESAME

FONDAMENTI DI TEORIA
QUANTISTICA DEI CAMPI

LAST UPDATE :

03/02/2026

INDICE

INDICAZIONI	GENERICHE		3
PROVE	D'ESAME		31

INDICAZIONI GENERALI

RACCOLGO NELLE SEGUENTI PAGINE DELLE "RICETTE" PER I VARI ARGOMENTI. SPERO DI AVER RACCOLTO TUTTE LE TIPOLOGIE DI PROBLEMI CHE POSSONO PRESENTARSI ALLO SCRITTO.

INDICE :

AMPIEZZE DI PROBABILITÀ	4
CALCOLO DI LOOP	10
IDENTITÀ DI WARD	12
SCRITTURA LAGRANGIANA	13
INTERAZIONI DERIVATIVE	16
SPETTRO DI MASSA	17
ROTTURA DI SIMMETRIA	18
DIAGONALIZZAZIONE LAGRANGIANA	20
TEORIE NON ABELIANE	24
TERMINE DI GAUGE FIXING E PROPAGATORE VETTORIALE	26
MODELLO STANDARD	29

INDICAZIONI GENERALI

AMPIEZZE DI PROBABILITÀ: PER PROBLEMI DI QUESTO TIPO SONO CRUCIALI LE RELAZIONI:

$$\int_s u_\alpha(p) \bar{u}_\beta(p) = (\not{p} + m)_{\alpha\beta}$$

$$\int_s v_\alpha(p) \bar{v}_\beta(p) = (\not{p} - m)_{\alpha\beta}$$

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)}(p) \epsilon_\nu^{(\lambda)*}(p) = -\eta_{\mu\nu}$$

$$\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \cdot k^\mu = 0$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_1'|}{|\vec{p}_1|} |\mathcal{M}|^2 \quad \xrightarrow{m \rightarrow 0} \quad \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 s}$$

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 \\ t = (p_1 - p_3)^2 \\ u = (p_1 - p_4)^2 \end{cases} \quad \xrightarrow{m \rightarrow 0} \quad \begin{cases} 2(p_1 p_2) = s \\ 2(p_1 p_3) = -t \\ 2(p_1 p_4) = -u \end{cases}$$

PER RISOLVERE QUESTI PROBLEMI, SE RICHIESTO, BASTA TROVARE LE REGOLE DI FEYNMAN. PER TROVARE LO SPETTRO DELLE PARTICELLE BISOGNA ESPANDERE ATTORNO AL VUOTO E/O DIAGONALIZZARE I TERMINI CINETICI E DI MASSA. UNA VOLTA CON LE MASSE SI POSSONO SCRIVERE I PROPAGATORI

$$\phi: \Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m_\phi^2}$$

$$4: S_{\alpha\beta}(p) = i(\not{p} - m_4)_{\alpha\beta} = \frac{i}{p^2 - m_4^2} (\not{p} + m_4)_{\alpha\beta}$$

$$A_\mu: \Delta_{\mu\nu}(p) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2} \quad (\xi = 1)$$

I VERTICI DELLA TEORIA SI TROVANO SCRIVENDO LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE OPPORTUNE, DUNQUE QUELLE IN CUI È POSSIBILE VEDERE IL VERTICE DI INTERESSE, E SI FANNO LE CONTRAZIONI DEI CAMPI.

PER TROVARE LA SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE OCCORRE CALCOLARE L'AMPIEZZA DI PROBABILITÀ $|\mathcal{M}|^2$ A PARTIRE DAL ELEMENTO DI MATRICE RIDOTTA $\mathcal{M}$, CHE OTTENIAMO CON LE REGOLE DI FEYNMAN E SOSTITUENDO ALLE GAMBE ESTERNE LE POLARIZZAZIONI:

$$l_{in} \sim u(p)$$

$$\bar{l}_{in} \sim \bar{v}(p)$$

$$\gamma_{in} \sim E_\mu^{(\lambda)*}(p)$$

$$l_{out} \sim \bar{u}(p)$$

$$\bar{l}_{out} \sim v(p)$$

$$\gamma_{out} \sim E_\mu^{(\lambda)}(p)$$

PER CALCOLARE $|\mathcal{M}|^2$ BISOGNA TENERE CONTO DI EVENTUALI SEGNI RELATIVI, I QUALI SI TROVANO SCRIVENDO LA FUNZIONE DI GREEN DEI DIAGRAMMI IN QUESTIONE E PERMUTANDO I CAMPI, IN MODO DA UTILIZZARE IL TEOREMA DI WICK.

NEL CALCOLO DI $|M|^2$ SI DOVRANNO UTILIZZARE LE PROPRIETÀ

$$\text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \} = 4 \eta^{\mu\nu}$$

$$\text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \} = 4 [\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}]$$

$$\text{Tr} \{ \gamma_\rho \gamma^\nu \gamma_\sigma \gamma^\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\tau \gamma_\mu \} = -32 \eta_{\sigma\tau} \eta_{\lambda\rho}$$

NEI CONTI DI UNA TRACCIA AD 8 MATRICI γ PUÒ RISULTARE COMODO USARE

$$\gamma^\mu \not{\epsilon} \gamma_\mu = -2 \not{\epsilon}$$

COSÌ (SE USATA DUE VOLTE) CI SI PUÒ RICONDURRE AD UNA TRACCIA DI 4 MATRICI.

SE VIENE RICHiesta LA SEZIONE D'URTO DI UN PROCESSO PUÒ ESSERE UTILE RICORDARE LE RELAZIONI NEL SR CM:

$$(E, \vec{p}_1) \quad (E, \vec{p}_3)$$

$$(E, -\vec{p}_2) \quad (E, -\vec{p}_4)$$

$$\text{POICHÈ} \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \quad ; \quad \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0$$

E SI USA Θ COME ANGOLO DI DEFLESSIONE DI $\vec{p}_3$.

$$\text{CON} \quad |\vec{p}_i| = \sqrt{E^2 - m_i^2} \quad ; \quad s = E_{\text{cm}}^2 = 4E^2.$$

POTREBBE
DI ALTE

ANCHE
ENERGIE

RISULTARE

UTILE

RICORDARE

NEL LIMITE

$$s = 4E^2$$

$$t = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$u = -\frac{s}{2}(1 + \cos\theta)$$

NOTA

UN TRUCCETTO UTILE QUANDO CAPITA IL PRODOTTO DI 2
TRACCE DI 4 MATRICI γ , DI CUI 2 COPPIE CONTRATTE, È:

$$\begin{aligned} & \text{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\gamma\} \text{Tr}\{\gamma_\beta \gamma_\alpha \gamma_\delta \gamma_\gamma\} = \\ &= 4 \left[\eta^{\alpha\beta} \eta^{\delta\gamma} - \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\gamma} + \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} \right] 4 \left[\eta_{\beta\alpha} \eta_{\delta\gamma} - \eta_{\beta\gamma} \eta_{\alpha\delta} + \eta_{\beta\gamma} \eta_{\alpha\delta} \right] \\ &= 16 \left[2\eta^\alpha_\beta \eta^\delta_\gamma + 2\eta^\alpha_\gamma \eta^\delta_\beta \right] \end{aligned}$$

PER ALCUNI SCATTERING IN CUI COMPaIANO DELLE γ^s POSSONO RISULTARE
UTILI LE RELAZIONI:

$$(\gamma^s)^2 = \mathbb{1}$$

$$\{\gamma^s, \gamma^\mu\} = 0$$

$$\text{Tr}\{\gamma^s \gamma^\mu \gamma^\nu\} = 0$$

$$\text{Tr}\left\{\gamma^s \left(\begin{smallmatrix} \# \text{ DISPARI DI} \\ \text{MATRICI } \gamma \end{smallmatrix}\right)\right\} = 0$$

$$\text{Tr}\{\gamma^s \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\rho\} = -4i \epsilon^{\alpha\beta\delta\rho}$$

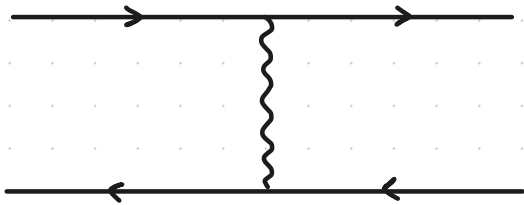
OSSERVAZIONE

IN ESERCIZI DI MODELLO STANDARD È PIÙ COMPLICATO
RICAVARE LE REGOLE DI FEYNMAN E SCRIVERE
LA MATRICE S RIDOTTA.

IN QUESTI CASI, BISOGNA NOTARE UNA COSA MOLTO IMPORTANTE
DELLA STRUTTURA DI $\mathcal{M}$.

SE CONSIDERIAMO LA QED, CON $\mathcal{L}_{\text{INT}} = -ie\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$, E AD
ESEMPIO LO SCATTERING

$$e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$$



SAPPIAMO SCRIVERE

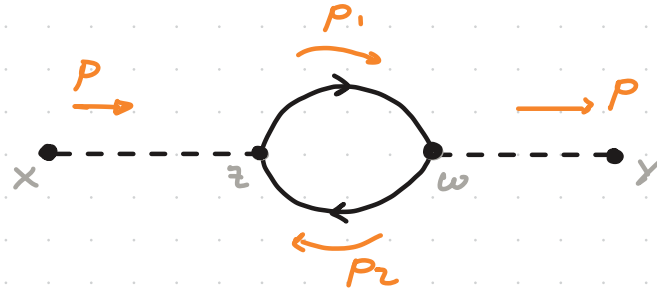
$$\mathcal{M} = (-ie\gamma^\mu) (\bar{u}(p_3) u(p_1)) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} (\bar{v}(p_2) v(p_4))$$

MA POSSIAMO VEDERE, RICORDANDO $\mathcal{J}^\mu = -ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, CHE LA
STRUTTURA DI $\mathcal{M}$ NON È ALTRO CHE:

$$\mathcal{M} = \mathcal{J}_{e^-}^\mu (\text{PROPAGATORE}) \mathcal{J}_{e^+}^\mu.$$

SFRUTTANDO TALE STRUTTURA DI $\mathcal{M}$ SIAMO IN GRADO, CONOSCENDO
SOLO LE CORRENTI, DI CALCOLARE AMPIEZZE DI PROBABILITÀ.

CALCOLO DI LOOP: CONSIDERIAMO UN PROCESSO DEL TIPO:



$$\mathcal{L}_{\text{INT}} = -i\lambda\phi\bar{\psi}\psi$$

PER VEDERE IL GRADO DI DIVERGENZA DEL DIAGRAMMA DOBBIAMO SCRIVERCI LA MATRICE S RIDOTTA, COME AL SOLITO QUANDO ABBIAMO A CHE FARE CON DIAGRAMMI DI FEYNMAN, MA DOBBIAMO RICORDARCI DI INTEGRARE SUI MOMENTI NON FISSATI E DIVIDERE PER IL FATTORE DI SIMMETRIA:

$$\mathcal{M} = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_1 + m)}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_2 + m)}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon}$$

A QUESTO PUNTO DOBBIAMO UTILIZZARE LA CONSERVAZIONE DEL QUADRI-IMPULSO IN OGNI VERTICE COSÌ POSSIAMO RIMANERE CON UN SOLO INTEGRALE (AVENDO SOLO UN LOOP):

$$p = p_1 + p_2 \Rightarrow p_2 = p - p_1$$

NON CONFONDERE LE LINEE TEMPORALI CON GLI IMPULSI

DUNQUE:

$$\mathcal{M} = -\frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{(\not{p}_1 + m)(\not{p} - \not{p}_1 + m)}{(p_1^2 - m^2)((p - p_1)^2 - m^2)}$$

ARRIVATI A QUESTA ESPRESSIONE IL GRADO DI DIVERGENZA
 LO VEDIAMO A GRANDI VALORI DI p_1 :

$$\mathcal{M} \xrightarrow{p_1 \rightarrow \infty} - \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{p_1(p-p_1)}{p_1^2(p-p_1)^2}$$

$$\sim \lambda^2 \int d^4 p_1 \frac{1}{p_1^2}$$

MA NON CONFONDIAMOCI E RICORDIAMO CHE DOBBIAMO ANCORA
 ANDARE IN COORDINATE SFERICHE (IN 4 DIMENSIONI):

$$\mathcal{M} \sim \lambda^4 \int d\Omega_{p_1} \int d^4 p_1 p_1^3 \frac{1}{p_1^2}$$

$$\sim \lambda^4 \int d\Omega_{p_1} \int dp_1 p_1$$

DUNQUE INTEGRANDO $\int dp_1$ ABBIAMO RISULTATO p_1^2 , DUNQUE UNA
 DIVERGENZA QUADRATICA.

IDENTITÀ DI WARD: POSSONO CAPITARE PROBLEMI IN CUI È RICHIESTO DI DIMOSTRARE L'IDENTITÀ DI WARD, O EQUIVALENTEMENTE CHE L'AMPIEZZA DI PROBABILITÀ SIA INVARIANTE DI GAUGE.

QUELLO CHE BISOGNA FARE È DIMOSTRARE CHE SCRIVENDO

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\mu\nu} E_{\mu}^{(1)}(k_1) E_{\nu}^{(2)}(k_2)$$

E FACENDO UNA TRASFORMAZIONE VALGA

$$E_{\mu}(k) \rightarrow E_{\mu}(k) + \alpha(k) k_{\mu}$$

$$\delta \mathcal{M} = \mathcal{M}^{\mu\nu} (k_1)_{\mu} (k_2)_{\nu} = 0.$$

CHIARAMENTE È PIÙ VELOCE SE SI VARIA SOLAMENTE UNO DEI DUE VETTORI DI POLARIZZAZIONE.

DOPO AVER SCRITTO $\mathcal{M}^{\mu\nu}$, FATTO LA TRASFORMAZIONE DI GAUGE, SCRITTO $\delta \mathcal{M}$, SI DEVE UTILIZZARE LA CONSERVAZIONE DEL QUADRO-IMPULSO

$$\sum p_{in} = \sum p_{out}$$

IN MODO DA SCRIVERE I TERMINI $\not{p}_i$ CHE ABBIAMO APPENA CONTRATTO IN $\delta \mathcal{M}$ COME L'OPERATORE INVERSO DEL PROPAGATORE FERMIONICO $(\not{p}_i - m)^{-1}$. IN QUESTO MODO CI SARANNO DEI TERMINI CHE ALGEBRICAMENTE SI CANCELLANO, E ALTRI, GRAZIE AL FATTO CHE I FERMIONI SONO ON-SHELL, CHE SARANNO NULLI PER VIA DELLE RELAZIONI:

$$\begin{cases} (\not{p}_i - m) u(p_i) = 0 \\ (\not{p}_i + m) v(p_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{u}(p_i) (\not{p}_i - m) = 0 \\ \bar{v}(p_i) (\not{p}_i + m) = 0 \end{cases}$$

SCRITTURA LAGRANGIANA: IN ALCUNI PROBLEMI PUÒ ESSERE RICHiesto, DATI ALCUNI CAMPI IN CERTE RAPPRESENTAZIONI, DI SCRIVERE LA DENSITÀ DI LAGRANGIANA. CHIARAMENTE $\mathcal{L}$ DEVE RISPETTARE ALCUNI VINCOLI:

- DEV'ESSERE UNO SCALARE DI LORENTZ
- DEV'ESSERE REALE
- DEVE RISPETTARE LE SIMMETRIE DI GAUGE.

OVVIAMENTE LE COSE CHE CI POSSIAMO METTERE DENTRO SONO INFINITE, MA LIMITANDOCI A TERMINI AL PIÙ DI ORDINE QUARTICO NEI CAMPI (CHE SONO QUELLI TIPICAMENTE RICHIESTI), ALLORA POSSIAMO AVERE:

- TERMINI CINETICI
- TERMINI DI MASSA
- INTERAZIONI TIPO YUKAWA (3 CAMPI)
- INTERAZIONI QUARTICHE (TIPO $\lambda\phi^4$)

QUESTO TIPO DI TERMINI DEVONO ESSERE SCELTI IN MODO DA RISPETTARE LE SIMMETRIE RICHIESTE.

PER I CAMPI CHE TRASFORMANO NELLA RAPPRESENTAZIONE FONDAMENTALE SAPPIAMO SCRIVERE I TERMINI INVARIANTI (SONO QUELLI SEMPRE UTILIZZATI). NEL CASO IN CUI ABBIAMO A CHE FARE CON UN CAMPO SCALARE CHE TRASFORMA NELLA RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA, ALLORA:

$$\square \rightarrow \cup \square \cup^+$$

E POSSIAMO VEDERE Σ COME UNA MATRICE, DI OPPORTUNE DIMENSIONI, E SCRIVERE I TERMINI DI MASSA, E DI INTERAZIONE, IN ANALOGIA A QUANTO FACCIAMO CON CAMPI VETTORIALI. DOBBIAMO UTILIZZARE LA TRACCIA.

⊕ TERMINE CINETICO $\text{Tr}\{\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma\}$

⊕ TERMINE DI MASSA $m^2 \text{Tr}\{\Sigma^2\}$

IN CUI TENIAMO CONTO DEL FATTO CHE $\Sigma = \Sigma^a T^a$, CON T^a GENERATORI DEL GRUPPO, E IL TERMINE:

$$m^2 (\text{Tr}\{\Sigma\})^2 = m^2 (\Sigma^a)^2 \underbrace{(\text{Tr}\{T^a\})^2}_{=0} = 0$$

⊕ TERMINI DI YUKAWA (RIGA)(MATRICE)(COLONNA) LI COSTRUIAMO CON IL PRODOTTO E NON SERVE LA TRACCIA.

⊕ TERMINI QUARTICI:

$$\lambda_1 \text{Tr}\{\Sigma^4\} \quad ; \quad \lambda_2 (\text{Tr}\{\Sigma^2\})^2$$

SE VOGLIAMO RENDERE LE SIMMETRIE LOCALI, ALLORA SAPPIAMO CHE DOBBIAMO METTERE LE DERIVATE COVARIANTI. SE UN CAMPO TRASFORMA NELLA RAPPRESENTAZIONE FONDAMENTALE, ALLORA SI HA

$$D_\mu = \partial_\mu - i g c A_\mu$$

CON g COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO, A_μ CAMPO DI GAUGE ASSOCIATO E c LA CARICA RISPETTO AL GRUPPO DI GAUGE.

NEL CASO IN CUI IL CAMPO TRASFORMA NELLA RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA ABBIAMO

$$D_\mu = \partial_\mu - i g c [\phi, A_\mu]$$

POICHÈ RICHIEDIAMO CHE ESSA TRASFORMI COME IL CAMPO, OSSIA

$$D_\mu \rightarrow U D_\mu U^\dagger.$$

INTERAZIONI DERIVATIVE: Ad esempio si veda la prova del 2024 06 17 in cui accoppiando un campo di gauge abeliano escano fuori dei termini di interazione tipo:

$$ig A_\mu (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^\dagger \phi)$$

Ma non sono così assurdi termini di interazione di tipo derivativo.

Il trucco per leggere il vertice di interazione è quello di andare nello spazio dei momenti:

$$\partial_\mu \rightarrow -ik_\mu$$

In questo modo ($\phi = \phi(k)$; $\phi^\dagger = \phi^\dagger(p)$)

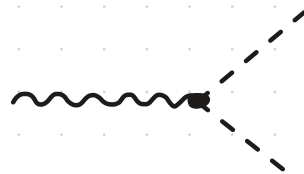
$$\partial^\mu \phi \rightarrow -ik^\mu \phi$$

$$(\partial^\mu \phi)^\dagger \rightarrow (-ip^\mu \phi)^\dagger = ip^\mu \phi^\dagger$$

E dunque

$$ig A_\mu (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^\dagger \phi) \rightarrow ig A_\mu (-ik^\mu \phi^\dagger \phi - ip^\mu \phi^\dagger \phi) \\ = g A_\mu (k^\mu + p^\mu) \phi^\dagger \phi$$

E quindi



$$= -ig(k+p)^\mu$$

SPETTRO DI MASSA: NEI PROBLEMI IN CUI VIENE DATO UN POTENZIALE V , FUNZIONE DEI CAMPI, SOLITAMENTE VIENE CHIESTO DI TROVARNE IL MINIMO, CIOÈ DETERMINARE IL VEV DEL VUOTO E SVILUPPARE LA LAGRANGIANA ATTORNO TALE VEV.

NEL CASO IN CUI V DIPENDE DA DUE CAMPI (ϕ_1, ϕ_2) , DI CUI UNO SOLITAMENTE HA $VEV = 0$ (PER BREVEZZA), CHE SONO ANCHE COMPLESSI, CONVIENE RIPARAMETRIZZARE IL CAMPO COME

$$\phi_1 = \rho e^{i\theta}$$

IN QUESTO MODO $V(\rho, \phi_2)$ E LE SCRITTURE, NONCHÈ I CONTI SI SEMPLIFICANO LEGGERMENTE.

ROTTURA DI SIMMETRIA: CONSIDERIAMO UN GENERICO PROCEDIMENTO GENERICO PER UNA ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA $SU(N)$.

ABBIAMO UNA TEORIA $SU(N)$ CON UN CAMPO SCALARE ϕ IN RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA, OVVERO CHE SI TRASFORMA COME:

$$\phi \rightarrow U \phi U^\dagger \quad \text{con} \quad U \in SU(N)$$

INOLTRE RICORDIAMO CHE LA RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA È SEMPRE REALE ED HA DERIVATA COVARIANTE:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ig[\phi, A_\mu]$$

MA QUESTA LA POSSIAMO RICAVARE ACCOPPIANDO LA CORRENTE DI NOETHER CON UN CAMPO VETTORIALE A_μ^a (CON APICE a SE NECESSARIO).

IL TESTO CI DICE ANCHE CHE IL CAMPO ϕ HA VALORE DI ASPETTAZIONE NEL VUOTO:

$$\langle \phi \rangle = \phi_0 \text{diag}(v_1, \dots, v_N)$$

CON $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}$ POICHÈ RICORDIAMO CHE LA RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA È REALE.

POSSIAMO DARE UNA RICETTA PER RISOLVERE IL PROBLEMA.

PER RICAVARE IL GRUPPO DI SIMMETRIA PRESERVATO DAL VUOTO DOBBIAMO TROVARE I GENERATORI NON ROTTI IMPONENDO:

$$\delta \langle \phi \rangle = 0.$$

CHIARAMENTE CI SERVE CONOSCERE $\delta \phi$ (IL CHE CI È UTILE ANCHE PER LA DERIVATA COVARIANTE).

CONSIDERIAMO UN GENERICO ELEMENTO $U \in G$:

$$U = e^{-i\omega} \quad \text{con} \quad \omega = \omega^a T^a$$

DOVE T^a SONO I GENERATORI DEL GRUPPO. UNA TRASFORMAZIONE INFINITESIMA È

$$\phi \rightarrow U\phi U^\dagger = e^{-i\omega} \phi e^{i\omega}$$

$$\sim (1 - i\omega) \phi (1 + i\omega)$$

$$\sim \phi - i\omega\phi + i\phi\omega$$

$$= \phi + i[\phi, \omega]$$

DUNQUE ABBIAMO LA VARIAZIONE

$$\delta\phi = i[\phi, \omega] = i\omega^a [\phi, T^a].$$

SE VOGLIAMO IL VUOTO PRESERVATO DOBBIAMO RICHIEDERE

$$\delta\langle\phi\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad [\langle\phi\rangle, T^a] = 0.$$

SE DOVESSE ANCHE ESSERE RICHiesto IL GRUPPO DI SIMMETRIA RESIDUO, ALLORA DOBBIAMO RICORDARCI, OLTRE AL FATTO CHE PER I GENERATORI DI $SU(N)$ VALE $\text{Tr}[T^a] = 0$, ANCHE CHE IN ALCUNI CASI $\langle\phi\rangle$ E T^a POSSONO ESSERE SCRITTI COME MATRICI A BLOCCHI, E QUESTO CI SEMPLIFICA I CONTI.

DIAGONALIZZAZIONE LAGRANGIANA: IN PROBLEMI IN CUI NON SI HANNO LE SEGUENTI NORMALIZZAZIONI DEI TERMINI CINETICI E DI MASSA OPPURE ABBIAMO DEI TERMINI NON DIAGONALI:

$$\phi : \quad \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

$$\psi : \quad \bar{\psi} \not{\partial} \psi \quad \bar{\psi} m \psi$$

$$A_\mu : \quad -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \} \quad m^2 \text{Tr} \{ A_\mu A^\mu \}$$

DOVE $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i g [A_\mu, A_\nu]$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$\begin{cases} F_{\mu\nu} \longrightarrow U F_{\mu\nu} U^\dagger \\ A_\mu \longrightarrow \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger + U A_\mu U^\dagger \end{cases} \quad (\text{RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA})$$

ALLORA DOBBIAMO DIAGONALIZZARE LE MATRICI DEI COEFFICIENTI:

$$(\phi \text{ cinetico}) = \frac{1}{2} \partial_\mu (\phi_1 \quad \phi_2) \begin{pmatrix} \kappa \end{pmatrix} \partial^\mu \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$(\phi \text{ MASSA}) = \frac{1}{2}(\phi_1 \ \phi_2) \begin{pmatrix} M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{L} \text{ CINETICO}) = (\bar{\varphi}_1 \ \bar{\varphi}_2) \begin{pmatrix} K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{L} \text{ MASSA}) = (\bar{\varphi}_1 \ \bar{\varphi}_2) \begin{pmatrix} M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

PER CUI DOBBIAMO RISOLVERE L'EQUAZIONE SECOLARE:

$$\det(K - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

E SUCCESSIVAMENTE TROVARE GLI AUTOVETTORI CON:

$$(K - \lambda_i \mathbb{1}) v_i = 0$$

E NORMALIZZANDO I v_i . PER RISCRIVERE LA LAGRANGIANA OCCORRE L'ESPRESSIONE DEI NUOVI CAMPI IN FUNZIONE DEI VECCHI, MA ANCHE QUELLI VECCHI IN FUNZIONE DEI NUOVI, IN MODO DA RISCRIVERE ANCHE TUTTI I TERMINI IN $\mathcal{L}_{\text{INT}}$.

FACCHIAMO L'ESEMPIO DEL CAMPO SCALARE ϕ , IN CUI ϕ_i SONO I CAMPI VECCHI E $\tilde{\phi}$ I NUOVI.

DEFINIAMO:

$$S = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\xi_1}{\sqrt{\lambda_1}} & \frac{\xi_2}{\sqrt{\lambda_2}} \end{array} \right)$$

IN CUI METTIAMO COME COLONNE GLI AUTOVETTORI NORMALIZZATI
 DIVISI A LORO VOLTA PER LA RADICE DEGLI AUTOVALORI.
 QUEST'ULTIMA DIVISIONE È NECESSARIA PER OTTENERE DEI
 NUOVI CAMPI CON LE CORRETTE NORMALIZZAZIONI.

VALE

$$S^{-1} = \left(\begin{array}{c} \frac{\sqrt{\lambda_1} \xi_1}{\sqrt{\lambda_2} \xi_2} \end{array} \right)$$

E LE RELAZIONI TRA I CAMPI SONO:

$$\phi = S \tilde{\phi} \Rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\xi_{1,x}}{\sqrt{\lambda_1}} & \frac{\xi_{2,x}}{\sqrt{\lambda_2}} \\ \frac{\xi_{1,y}}{\sqrt{\lambda_1}} & \frac{\xi_{2,y}}{\sqrt{\lambda_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\phi} = S^{-1} \phi \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} \xi_{1,x} & \sqrt{\lambda_1} \xi_{1,y} \\ \sqrt{\lambda_2} \xi_{2,x} & \sqrt{\lambda_2} \xi_{2,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

NOTA COME SCORCIATOIA PUOI NOTARE !

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_1 = \sqrt{\lambda_1} \vec{\xi}_1 \cdot \vec{\Phi} \\ \tilde{\Phi}_2 = \sqrt{\lambda_2} \vec{\xi}_2 \cdot \vec{\Phi} \end{cases}$$

E I CAMPI VECCHI SONO

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \xi_{1x} \tilde{\Phi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \xi_{2x} \tilde{\Phi}_2 \\ \Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \xi_{1y} \tilde{\Phi}_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \xi_{2y} \tilde{\Phi}_2 \end{cases}$$

RISCRITTI I CAMPI IN QUESTO MODO SI HA
DIAGONALIZZATO E NORMALIZZATO IL TERMINE CINETICO (DI
MASSA O ENTRAMBI), E SI PUÒ RISCRIVERE LA
LAGRANGIANA VEDENDO LE CARATTERISTICHE DEI CAMPI
FISICI.

NOTA GUARDA LA PROVA DEL 2025 OG 15 PER VEDERE COME
SI POSSONO RISCRIVERE I CAMPI DI GAUGE, IN MODO
DA SEMPLIFICARE LE INTERAZIONI.

TEORIE NON ABELIANE. LE COSE CHE DOBBIAMO RICORDARCI SONO:

OGNI ELEMENTO LO POSSIAMO RISCRIVERE RISPETTO LA BASE DEI GENERATORI:

$$A_\mu = A_\mu^a T^a = A_\mu^1 T^1 + A_\mu^2 T^2 + A_\mu^3 T^3$$

AD ESEMPIO $SU(2)$

GENERATORI NORMALIZZATI COME $\text{Tr}\{T^a T^b\} = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ E CHE PER IL GRUPPO $SU(m)$ RISOLVONO L'ALGEBRA:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (f^{abc} = \epsilon^{abc}).$$

IL TERMINE DEL TENSORE DEGLI SFORZI È:

$$-\frac{1}{2} \text{Tr}\{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} \text{Tr}\{T^a T^b\} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$$

E LA SUA ESPRESSIONE:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

LE DERIVATE COVARIANTI SONO:

RAPPRESENTAZIONE FONDAMENTALE : $\mathcal{D}_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi - ig A_\mu^a T^a \varphi$

RAPPRESENTAZIONE
AGGIUNTA

$$\begin{aligned} D_\mu \varphi &= \partial_\mu \varphi - ig[\varphi, A_\mu] \\ &= \partial_\mu \varphi - ig\varphi^a A_\mu^b [T^a, T^b] \\ &= \partial_\mu \varphi + gf^{abc} \varphi^a A_\mu^b T^c \end{aligned}$$

RICORDA INOLTRE CHE IL TERMINE DI MASSA PER IL CAMPO
VETTORIALE A_μ È :

$$\mathcal{L} \supset + \frac{1}{2} m^2 A_\mu^a A^{a\mu}.$$

TERMINE DI GAUGE FIXING E PROPAGATORE: VEDI AD ESEMPIO LA PROVA DEL 2024 OI 29 IN CUI DOPO AVER SCRITTO LA LAGRANGIANA GENERICA TI CHIEDE DI AGGIUNGERE UN TERMINE DI GAUGE FIXING, CHE SE ESPANDE TI DA (INSIEME A $\mathcal{L}_{\text{YM}}$ E IL RESTO DELLA LAGRANGIANA) I VARI ACCOPPIAMENTI, TERMINI CINETICI E DI MASSA.

DATA UNA LAGRANGIANA IN CUI IL CAMPO A_μ È SIA MASSIVO CHE DINAMICO SI PUÒ RICAVERE L'EQUAZIONE DEL MOTO:

$$\partial_\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu} = 0$$

⊗ VEDI SOTTO

A PARTIRE PERÒ DALLA LAGRANGIANA LIBERA. UNA VOLTA OTTENUTO IL TERMINE CINETICO DEL CAMPO, SE SI RIESCE AD INVERTIRE, ALLORA SI HA PER LE MANI IL PROPAGATORE LIBERO. AD ESEMPIO ABBIAMO:

$$(\square + m) A^\nu = 0$$

DOBBIAMO ANDARE NELLO SPAZIO DI FOURIER ($\partial_\mu \rightarrow -ik_\mu$)

$$(-k^2 + m) \tilde{A}^\nu = 0$$

E SCRIVIAMO LA DEFINIZIONE DI FUNZIONE DI GREEN DELLA TEORIA

$$(-k^2 + m) \eta^{\nu\mu} \tilde{G}_{\mu\rho}(k) = i \delta^\nu_\rho$$

FACENDO L'ANSATZ SULLA FORMA DI $\tilde{G}_{\mu\rho}$:

$$\tilde{G}_{\mu\rho} = \partial(\kappa) \eta_{\mu\rho} + b(\kappa) \kappa_\mu \kappa_\rho$$

È FACENDO ∂ E b , E I CONTI, È POSSIBILE TROVARE I COEFFICIENTI DUNQUE LA FORMA DI $\tilde{G}$.

NOTA

RICORDA COME FARE LE DERIVATE DEL CAMPO VETTORIALE. PRESA

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu$$

ALLORA

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu} = 0$$

$$\partial_\mu \frac{\delta}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\varepsilon\tau} F^{\varepsilon\tau} - \frac{1}{2} (\partial_\varepsilon A^\varepsilon)^2 \right\} - \frac{\delta}{\delta A_\nu} \left(-\frac{m^2}{2} A_\varepsilon A^\varepsilon \right) = 0$$

$$\partial_\mu \frac{\delta}{\delta F_{\rho\sigma}} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\varepsilon\tau} F^{\varepsilon\tau} \right\} \frac{\delta F_{\rho\sigma}}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} - \frac{1}{2} \partial_\mu \cdot \frac{\delta}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} \left(\partial_\varepsilon A_\tau \eta^{\varepsilon\tau} \right)^2 + m^2 A^\nu = 0$$

$$\partial_\mu \left\{ -\frac{1}{2} F^{\rho\sigma} \frac{\delta}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) - (\partial_\varepsilon A^\varepsilon) \eta^{\mu\nu} \right\} + m^2 A^\nu = 0$$

$$\partial_\mu \left\{ -\frac{1}{2} F^{\rho\sigma} (\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho) - (\partial_\varepsilon A^\varepsilon) \eta^{\mu\nu} \right\} + m^2 A^\nu = 0$$

$$\partial_\mu \left\{ -\frac{1}{2} \underbrace{(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu})}_{2F^{\mu\nu}} - (\partial_\varepsilon A^\varepsilon) \eta^{\mu\nu} \right\} + m^2 A^\nu = 0$$

$$-\partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial^\nu (\partial_\varepsilon A^\varepsilon) + m^2 A^\nu = 0$$

$$-\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + m^2 A^\nu = 0$$

$$-\square A^\nu + \partial_\mu \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + m^2 A^\nu = 0$$

$$-\square A^\nu + m^2 A^\nu = 0$$

$$(\square - m^2) A^\nu = 0$$

Modello Standard: In problemi di questo tipo è chiaramente cruciale conoscere bene la teoria.
Le cose fondamentali da ricordare sono:

- $SU(2) \times U(1)_Y$: Gruppo di simmetria
- $W_\mu \rightarrow SU(2)$
 $B_\mu \rightarrow U(1)_Y$: Campi di gauge associati
- $D_\mu = \partial_\mu - i g_1 W_\mu^a T^a - i \frac{Y}{2} B_\mu$: Derivata covariante

con $Y = \text{IPERCARICA}$

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $W_\mu^a T^a = W_\mu^1 \frac{\sigma^1}{2} + W_\mu^2 \frac{\sigma^2}{2} + W_\mu^3 \frac{\sigma^3}{2}$

ESPLICITANDO LA RIUSCIAMO A TROVARE
LA MATRICE W_μ , IN CUI
DEFINIAMO

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \pm i W_\mu^2}{\sqrt{2}}$$

- Le correnti, dunque gli accoppiamenti possibili li leggeremo dalle derivate covarianti. Ad esempio per i leptoni dobbiamo calcolarci:

$$i L^+ \cancel{D}_\mu L \sim i L^+ \gamma^\mu (-i g_1 W_\mu^a T^a - i g_2 B_\mu) L$$

SCRIVENDO IL PRODOTTO TRA I VETTORI E LE MATRICI TROVIAMO GLI ACCOPPIAMENTI.

- OCCORRE ANCHE RICORDARE LE DEFINIZIONI :

$$\cos \theta = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

$$\begin{cases} Z_\mu = \cos \theta W_\mu^3 - \sin \theta B_\mu \\ A_\mu = \sin \theta W_\mu^3 + \cos \theta B_\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_\mu = \cos \theta A_\mu - \sin \theta Z_\mu \\ W_\mu^3 = \sin \theta A_\mu + \cos \theta Z_\mu \end{cases}$$

PROVE D'ESAME

NELLE PAGINE CHE SEGUONO CI SONO TUTTE LE PROVE D'ESAME, CON I RELATIVI TESTI, CHE HO SVOLTO.

INDICE :

2021	03	29		32
2021	04	12		52
2021	09	13		59
2022	01	25		79
2022	02	16		89
2024	01	29		108
2024	02	15		135
2024	06	17		158
2025	02	06		173
2025	02	17		200
2025	06	18		226
2025	07	11		245
2025	09	15		262

2021 03 23

PROBLEMA 1. SÌ, CONSIDERA LA LAGRANGIANA:

→ CREDO QUA CI SIA UN ERRORE

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi + g \phi \bar{\psi} \psi$$

CON ϕ UN CAMPO REALE ASSOCIATO ALLA PARTICELLA π , E ψ UN CAMPO DI DIRAC ASSOCIATO ALLA COPPIA $e^\pm$.

1. RICAVARE LE REGOLE DI FEYNMAN NELLO SPAZIO DEI MOMENTI.

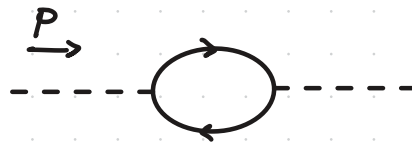
2. CALCOLA L'AMPIEZZA NON POLARIZZATA ASSOCIATA A:

$$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$$

IN TERMINI DI VARIABILI DI MANDELSTAM E MASSE.

3. CALCOLARE LA SEZIONE D'URTO DEL PUNTO 2 NEL LIMITE $m \rightarrow 0$.

4. SCRIVERE GLI ELEMENTI DI MATRICE S RIDOTTA PER IL PROCESSO A UN LOOP:



5. DETERMINARE IL GRADO DI DIVERGENZA ULTRAVIOLETO (MOMENTO CHE CIRCOLA NEL LOOP CHE TENDE AD INFINITO) DEL DIAGRAMMA AL PUNTO 4.

SOL. REGOLE DI FEYNMAN (SPAZIO IMPULSI):

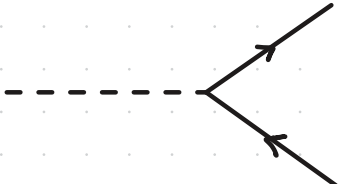
$$\oplus \text{ LINEE ESTERNE: } \phi \sim 1 \quad \ell_{in} \sim u(p) \quad \ell_{out} \sim \bar{u}(p) \quad \bar{\ell}_{in} \sim \bar{v}(p) \quad \bar{\ell}_{out} \sim v(p)$$

⊕ LINEE INTERNE:

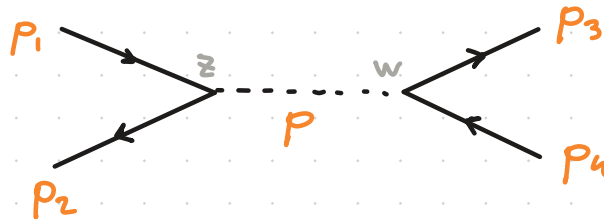
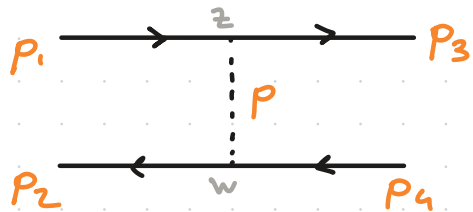
$$\phi: \quad \Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

$$\psi: \quad S_{\alpha\beta} = i(\not{p} - m)^{-1}_{\alpha\beta} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} (\not{p} + m)_{\alpha\beta}$$

⊕ VERTICE:

(YUKAWA)  = $-ig$

CALCOLIAMO $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$



SEGNI RELATIVI:

$$t: \infty < 0 \mid T \left[\underbrace{\bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_4) \psi(x_3) \dots \phi(z) \bar{\psi}(z) \psi(z) \dots \phi(w) \bar{\psi}(w) \psi(w)}_{\text{diagrammatic representation}} \right] \mid 0 \rangle$$

$$\Rightarrow M_t : -1$$

$$s: \alpha \langle 0 | T [\overbrace{\phi(x_1) \psi(x_2) \psi(x_4) \psi(x_3) \dots \phi(z) \psi(z) \psi(z) \dots \phi(\omega) \psi(\omega) \psi(\omega)}^{\text{}}] | 0 \rangle$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_s: +1$$

$$\text{con } \mathcal{M}_s = \frac{i(-ig)^2}{(p_1 + p_2)^2 - \mu^2} (\bar{v}_\alpha(p_2) u_\alpha(p_1)) (\bar{u}_\beta(p_3) v_\beta(p_4))$$

$$\mathcal{M}_t = \frac{i(-ig)^2}{(p_1 - p_3)^2 - \mu^2} (\bar{u}_\alpha(p_3) u_\alpha(p_1)) (\bar{v}_\beta(p_2) v_\beta(p_4))$$

CALCOLIAMO

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \square \left\{ |\mathcal{M}_s|^2 + |\mathcal{M}_t|^2 - 2 \text{Re} \mathcal{M}_s^\dagger \mathcal{M}_t \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \square |\mathcal{M}_s|^2 &= \frac{1}{4} \frac{g^4}{(s - \mu^2)^2} (\bar{v}_\alpha(p_2) u_\alpha(p_1)) (\bar{u}_\beta(p_3) v_\beta(p_4)) (\bar{u}_\gamma(p_1) v_\gamma(p_2)) (\bar{v}_\delta(p_4) u_\delta(p_3)) \\ &= \frac{1}{4} \frac{g^4}{(s - \mu^2)^2} (\not{p}_1 + m)_{\alpha\gamma} (\not{p}_2 - m)_{\gamma\alpha} (\not{p}_4 + m)_{\beta\delta} (\not{p}_3 - m)_{\delta\beta} \end{aligned}$$

$$= \frac{g^4}{4(s-\mu^2)^2} \text{Tr} \{ \not{p}_1 \not{p}_2 - m^2 \} \text{Tr} \{ \not{p}_4 \not{p}_3 - m^2 \}$$

$$= \frac{4g^4}{(s-\mu^2)^2} [(p_1 p_2) - m^2] [(p_3 p_4) - m^2]$$

$$= \frac{4g^4}{(s-\mu^2)^2} \left[\frac{s}{2} - m^2 \right] \left[\frac{s}{2} - m^2 \right]$$

$$= \frac{g^4}{(s-\mu^2)^2} (s - 2m^2)^2$$

$$\frac{1}{4} \int |\mathcal{M}_t|^2 = \frac{g^4}{4(t-\mu^2)^2} \int (\bar{u}_\alpha(p_3) u_\alpha(p_1)) (\bar{v}_\beta(p_2) v_\beta(p_4)) (\bar{u}_\gamma(p_1) u_\gamma(p_3)) (\bar{v}_\delta(p_4) v_\delta(p_2))$$

$$= \frac{g^4}{4(t-\mu^2)^2} (\not{p}_1 + m)_{\alpha\gamma} (\not{p}_3 + m)_{\gamma\alpha} (\not{p}_4 - m)_{\beta\delta} (\not{p}_2 - m)_{\delta\beta}$$

$$= \frac{g^4}{4(t-\mu^2)^2} \text{Tr} \{ \not{p}_1 \not{p}_3 + m^2 \} \text{Tr} \{ \not{p}_4 \not{p}_2 + m^2 \}$$

$$= \frac{4g^4}{(t-\mu^2)^2} [(p_1 p_3) + m^2] [(p_2 p_4) + m^2]$$

$$= \frac{4g^4}{(t-\mu^2)^2} \left[-\frac{t}{2} + m^2 \right] \left[-\frac{t}{2} + m^2 \right]$$

$$= \frac{g^4}{(t-\mu^2)^2} (t - 2m^2)^2$$

$$\frac{1}{4} \text{Tr} \mathcal{M}_s^\dagger \mathcal{M}_t = \frac{g^4}{4(s-\mu^2)(t-\mu^2)} \text{Tr} \left(\bar{u}_\alpha(p_1) v_\alpha(p_2) \right) \left(\bar{v}_\beta(p_4) u_\beta(p_3) \right) \left(\bar{u}_\gamma(p_3) u_\gamma(p_1) \right) \left(\bar{v}_\delta(p_2) v_\delta(p_4) \right)$$

$$= \frac{g^4}{4(s-\mu^2)(t-\mu^2)} (\not{p}_2 - m)_{\alpha\delta} (\not{p}_4 - m)_{\delta\beta} (\not{p}_3 + m)_{\beta\gamma} (\not{p}_1 + m)_{\gamma\alpha}$$

$$= \frac{g^4}{4(s-\mu^2)(t-\mu^2)} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 - m)(\not{p}_4 - m)(\not{p}_3 + m)(\not{p}_1 + m) \right\}$$

$$= \frac{g^4}{4(s-\mu^2)(t-\mu^2)} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 \not{p}_4 - m \not{p}_2 - m \not{p}_4 + m^2) (\not{p}_3 \not{p}_1 + m \not{p}_1 + m \not{p}_3 + m^2) \right\}$$

$$= \frac{g^4}{4(s-\mu^2)(t-\mu^2)} \text{Tr} \left\{ \not{p}_2 \not{p}_4 \not{p}_3 \not{p}_1 + m^2 \not{p}_2 \not{p}_4 - m^2 (\not{p}_2 \not{p}_1 + \not{p}_2 \not{p}_3) - m^2 (\not{p}_4 \not{p}_1 + \not{p}_4 \not{p}_3) + m^2 \not{p}_3 \not{p}_1 + m^4 \right\}$$

$$= \frac{g^4}{4(s-\mu^2)(t-\mu^2)} \left\{ 4 \left[(p_1 p_3)(p_2 p_4) - (p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_2)(p_3 p_4) \right] + 4m^2(p_2 p_4) - 4m^2((p_1 p_2) + (p_2 p_3) + (p_1 p_4) + (p_3 p_4)) + 4m^2(p_1 p_3) + 4m^4 \right\}$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \rightarrow p_1 p_2 = \frac{1}{2}(s - 2m^2)$$

IDEM (CON 1 SEGNO $+2m^2$) PER $\mu \in t$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \square \mathcal{H}_s^+ \mathcal{H}_t &= \frac{g^4}{(s-\mu^2)(t-\mu^2)} \left\{ \frac{1}{4}(t+2m^2)^2 - \frac{1}{4}(\mu+2m^2) + \frac{1}{4}(s-2m^2) + \right. \\ &\quad + m^2 \left[\frac{1}{2}(t+2m^2) - \frac{1}{2}(s-2m^2) - \frac{1}{2}(\mu+2m^2) - \frac{1}{2}(\mu+2m^2) - \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2}(s-2m^2) + \frac{1}{2}(t+2m^2) \right] + \right. \\ &\quad \left. + m^4 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g^4}{(s-\mu^2)(t-\mu^2)} \left\{ \frac{1}{4} \left[t^2 + 4m^4 + 4tm^2 - \mu^2 - 4m^4 - 4\mu m^2 + s^2 + 4m^4 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4sm^2 \right] + \right. \\ &\quad + \frac{m^2}{2} \left[t + 2m^2 - s + 2m^2 - \mu - 2m^2 - \mu - 2m^2 - s + 2m^2 + \right. \\ &\quad \left. + t + 2m^2 \right] + m^4 \left. \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{g^4}{(s-\mu^2)(t-\mu^2)} \left\{ \frac{1}{4} \left[t^2 - \mu^2 + s^2 + 4m^4 + 4m^2(t - \mu - s) \right] + \right. \\ \left. + \frac{m^2}{2} \left[2t - 4m^2 - 2s - 2\mu \right] + m^4 \right\}$$

VALE $s + t + \mu = \sum m_i^2 = 4m_i^2$

$$= \frac{g^4}{(s-\mu^2)(t-\mu^2)} \left\{ \frac{1}{4} \left[t^2 + s^2 - \overset{16m^4 + t^2 + s^2 - 8tm^2 - 8sm^2 + 2ts}{(4m^2 - t - s)^2} + 4m^4 + 4m^2(t - s - (4m^2 - t - s)) \right] + \right. \\ \left. + \frac{m^2}{2} \left[2(t - s - (4m^2 - t - s)) - 4m^2 \right] + m^4 \right\}$$

$$= \frac{g^4}{(s-\mu^2)(t-\mu^2)} \left\{ \frac{1}{4} \left[8tm^2 + 8sm^2 - 16m^4 - 2ts + 4m^4 + 8tm^2 - 16m^4 \right] + \right. \\ \left. + \frac{m^2}{2} \left[4t - 8m^2 - 4m^2 \right] + m^4 \right\}$$

$$= \frac{g^4}{(s-\mu^2)(t-\mu^2)} \left\{ \frac{1}{4} \left[16tm^2 + 8sm^2 + 8tm^2 - 2ts - 28m^4 \right] + \right. \\ \left. + 2tm^2 - 6m^4 + m^4 \right\}$$

$$= \frac{g^4}{(s-\mu^2)(t-\mu^2)} \left\{ 4tm^2 + 2sm^2 + 2tm^2 - \frac{1}{2}ts - 7m^4 + 2tm^2 - 5m^4 \right\}$$

$$= \frac{g^4}{(s-\mu^2)(t-\mu^2)} \left\{ 8tm^2 + 2sm^2 - \frac{1}{2}ts - 12m^4 \right\}$$

DUNQUE

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4}{(s-\mu^2)^2} (s - 2m^2)^2 + \frac{g^4}{(t-\mu^2)^2} (t - 2m^2)^2 -$$

$$- \frac{2g^4}{(s-\mu^2)(t-\mu^2)} \left\{ 8tm^2 + 2sm^2 - \frac{1}{2}ts - 12m^4 \right\}$$

$$= g^4 \left\{ \frac{(s-2m^2)^2}{(s-\mu^2)^2} + \frac{(t-2m^2)^2}{(t-\mu^2)^2} + \frac{ts - (16t+4s)m^2 + 24m^4}{(s-\mu^2)(t-\mu^2)} \right\}$$

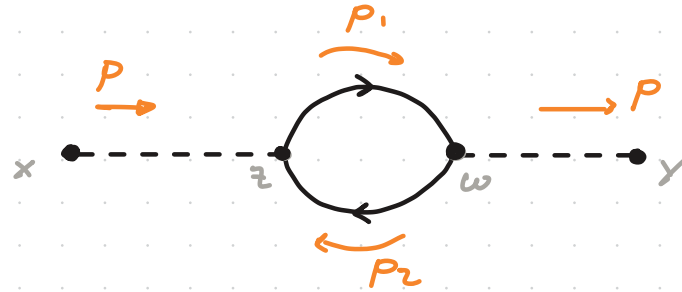
con $m, \mu \rightarrow 0$:

$$|M|^2 = 3g^4$$

DUNQUE LA SEZIONE D'URTO (NEL CM) È

$$\sigma_{cm} = \frac{3g^4}{64\pi^2 s} (4\pi) = \frac{3g^4}{16\pi s}$$

CONSIDERIAMO IL PROCESSO:



LA MATRICE S RIDOTTA (IN BASE ALLE REGOLE DI FEYNMAN DELLA TEORIA DI YUKAWA) È:

$$\mathcal{M}_{\text{loop}} = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_1 + m)}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_2 + m)}{p_2^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

→ FATTORE DI
SIMMETRIA

MA VALE: (in z) $p = p_1 + p_2 \rightarrow p_2 = p - p_1$

$$\mathcal{M}_{\text{loop}} = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{(\not{p}_1 + m)(\not{p} - \not{p}_1 + m)}{(p_1^2 - m^2)((p - p_1)^2 - m^2)} \xrightarrow{p_1 \rightarrow \infty} \int d^4 p_1 \frac{p_1(p - p_1)}{p_1^2(p - p_1)^2}$$

$$\rightarrow \int d^4 p_1 \frac{1}{p_1(p - p_1)}$$

PASSANDO IN COORDINATE SFERICHE

$$\mathcal{M} \sim \int d\Omega_{p_1} \int dp_1 \frac{p_1^3}{p_1^2} \sim \int dp_1 p_1 \Rightarrow \text{DIVERGENZA QUADRATICA (VEDI NOTE P. 44)}$$

PROBLEMA 2. Si consideri una teoria (generalizzazione del modello standard) caratterizzata da un gruppo di gauge $SU(2) \times SU(2)$ e contenuto di materia composto da fermioni sinistri ψ_L nella rappresentazione $(2, 1)$, fermioni destri ψ_R nella rappresentazione $(1, 2)$ e due campi scalari ϕ_1, ϕ_2 nelle rappresentazioni $(2, 1)$ $(1, 2)$ rispettivamente.

Scrivere la Lagrangiana invariante.

Extra assumendo il potenziale $V(\phi_1, \phi_2) = \lambda_1 (\phi_1^\dagger \phi_1 - v_1^2)^2 + m_2^2 \phi_2^\dagger \phi_2$ determinare la simmetria del vuoto.

SOL. Abbiamo il gruppo di gauge $SU(2)_1 \times SU(2)_2$. Le trasformazioni dei campi sono:

	$SO(1,3)$	$SU(2)_1$	$SU(2)_2$
ψ_L	Λ_L	DOPPIETTO	SINGOLETTO
ψ_R	Λ_R	SINGOLETTO	DOPPIETTO
ϕ_1	1	DOPPIETTO	SINGOLETTO
ϕ_2	1	SINGOLETTO	DOPPIETTO

$$\Lambda_{L,R} = e^{i \frac{g}{2} \cdot (\vec{\theta} \mp \vec{\eta})}$$

DUNQUE

$$\begin{cases} \psi_L \xrightarrow{SU(2)_1} U_1 \psi_L \\ \psi_L \xrightarrow{SU(2)_2} \psi_L \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_1 \xrightarrow{SU(2)_1} U_1 \phi_1 \\ \phi_1 \xrightarrow{SU(2)_2} \phi_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_R \xrightarrow{SU(2)_1} \psi_R \\ \psi_R \xrightarrow{SU(2)_2} U_2 \psi_R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_2 \xrightarrow{SU(2)_1} \phi_2 \\ \phi_2 \xrightarrow{SU(2)_2} U_2 \phi_2 \end{cases}$$

LA LAGRANGIANA INVARIANTE CONSIDERANDO IL FATTO CHE POSSIAMO COMBINARE OGGETTI IN MODO CHE ESSI SIANO INVARIANTI DI POINCARÉ E DEL GRUPPO DI GAUGE, È:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & i \bar{\psi}_L^+ \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i \bar{\psi}_R^+ \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R + \\ & + \partial_\mu \phi_1^+ \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2^+ \partial^\mu \phi_2 + \\ & + \mathcal{L}_{\text{massa}} \end{aligned}$$

È FACILE VEDERE CHE I TERMINI DI $\mathcal{L}_0$ SONO INVARIANTI PER $SO(1,3)$, MA ANCHE PER $SU(2) \times SU(2)$ SE RICORDIAMO CHE $SU(2)$ È UN GRUPPO UNITARIO.

CAPIAMO IL TERMINE DI MASSA. DOBBIAMO SICURAMENTE OTTENERE DEGLI SCALARI DI LORENTZ, PER CUI AVREMO PARTE LEFT E RIGHT CHE COMPAGNONO UNA NORMALE E L'ALTRA COMPLESSA CONIUGATA. IN PIÙ DOBBIAMO AVERE DEGLI SCALARI PER $SU(2) \times SU(2)$, DUNQUE METTIAMO INSIEME DEI VETTORI RIGA PER DEI VETTORI COLONNA:

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = -m_i \left[\psi_L^+ \phi_1 \phi_2^+ \psi_R + \psi_R^+ \phi_2 \phi_1^+ \psi_L \right]$$

AD ESEMPIO PER $SU(2)_1$

$$\rightarrow \psi_L^+ \underbrace{U_1^+ U_1}_{\mathbb{1}} \phi_1 \phi_2^+ \psi_R$$

POSSIAMO PERO' ACCOPPIARE I CAMPI DI MATERIA CON DEI CAMPI DI GAUGE ASSOCIATI AI GENERATORI DEL GRUPPO

$$W_\mu \rightarrow SU(2)_1$$

$$B_\mu \rightarrow SU(2)_2$$

E INTRODUCIAMO LE DERIVATE COVARIANTI:

$$D_\mu^{(1)} = \partial_\mu - ig_1 W_\mu$$

$$D_\mu^{(2)} = \partial_\mu - ig_2 B_\mu$$

CHE INTERESSERANNO SOLAMENTE LE PARTI DI DOPPIETTO DEI RELATIVI $SU(2)$.

POSSIAMO ANCHE DARE DINAMICA AI CAMPI DI GAUGE CON DEI TERMINI DI YANG-MILLS.

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \} - \frac{1}{2} \text{Tr} \{ B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \}$$

$$= -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu}^a B^{a\mu\nu}$$

CON I TENSORI DI CURVATURA

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c$$

$$B_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + f^{abc} B_\mu^b B_\nu^c$$

COSÌ LA LAGRANGIANA INVARIANTE PER $SU(2) \times SU(2)$ LOCALE È :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i \bar{\psi}_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu^{(1)} \psi_L + i \bar{\psi}_R^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu^{(2)} \psi_R + \\ & + (\mathcal{D}_\mu^{(1)} \phi_1)^\dagger (\mathcal{D}_\mu^{(1)} \phi_1) + (\mathcal{D}_\mu^{(2)} \phi_2)^\dagger (\mathcal{D}_\mu^{(2)} \phi_2) + \\ & - m_2 \left[\psi_L^\dagger \phi_1 \phi_2^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \phi_2 \phi_1^\dagger \psi_L \right] - \\ & - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu}^a B^{a\mu\nu} \end{aligned}$$

SE PRENDIAMO $V(\phi_1, \phi_2) = \lambda_1 (\phi_1^\dagger \phi_1 - v_1^2)^2 + m_2^2 \phi_2^\dagger \phi_2$
VEDIAMO

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_1} = 2 \lambda_1 (\phi_1^\dagger \phi_1 - v_1^2) \phi_1^\dagger$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_1^\dagger} = 2 \lambda_1 (\phi_1^\dagger \phi_1 - v_1^2) \phi_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_2} = m_2^2 \phi_2^\dagger$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_2^\dagger} = m_2^2 \phi_2$$

E SE IMPONIAMO $V' = 0$ ALLORA ABBIAMO $\langle \phi_2 \rangle = 0$, OSSIA NON
DOBBIAMO FARE NULLA ED $\mathcal{L}$ È GIÀ SCRITTA INTORNO
AL VUOTO DI ϕ_2 , MA VEDIAMO CHE PER ϕ_1 ABBIAMO
DUE CASI :

$$\begin{cases} \phi_1^\dagger = \phi_1 = 0 \\ \phi_1^\dagger \phi_1 = v^2 \end{cases}$$

CHE ϕ_1 POTREBBE AVERE DUE VUOTI;

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle \phi_1 \rangle = 0 \\ \langle \phi_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \end{cases}$$

PERÒ NOTIAMO CHE SCRIVENDO $\phi_1 = \rho e^{i\theta}$ ABBIAMO

$$V(\rho, \phi_2) = \lambda_1 (\rho^2 - v^2)^2 + m_2^2 \phi_2^\dagger \phi_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = 4\lambda_1 (\rho^2 - v^2) \rho \quad \Rightarrow \quad V' = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho^2 = v^2 \end{cases}$$

MA

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = 4\lambda_1 (\rho^2 - v^2) + 8\lambda_1 \rho^2 \quad \Rightarrow \quad V''|_{\langle \rho \rangle} = \begin{cases} -4\lambda_1 v^2 < 0 \\ 8\lambda_1 v^2 > 0 \end{cases}$$

ASSUMENDO
 $v^2 > 0$

DUNQUE VEDIAMO CHE $\langle \rho \rangle = 0$ È UN MASSIMO DI V ,
MENTRE $\langle \rho \rangle = v$ È UN MINIMO.

ANCHE SE GENERALMENTE È COMODO USARE LA RAPPRESENTAZIONE
POLARE, ORA POSSIAMO ANCHE TORNARE AL CAMPO ϕ_1 .

POSSIAMO PARAMETRIZZARE IL VUOTO COME:

$$\langle \phi_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

ALLORA DOBBIAMO VEDERE QUALI GENERATORI LO LASCIANO INVARIATO. ABBIAMO

$$\phi_1 \xrightarrow{SU(2)_1} U_1 \phi_1 = e^{-i\omega^a T^a} \phi_1 \\ \sim (1 - i\omega^a T^a) \phi_1$$

$$\Rightarrow \text{PER } SU(2)_1 \text{ SI HA } \delta \phi_1 = -i\omega^a T^a \phi_1$$

SE RICHIEDIAMO $\delta \langle \phi_1 \rangle = T^a \langle \phi_1 \rangle$ CON T^a GENERATORI.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{a, b, c, d} \in i\mathbb{R} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} bv_1 \\ dv_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow b = d = 0$$

$$\text{PERO' } T^a \text{ È HERMITIANA} \Rightarrow c = b^\dagger = 0$$

$$\text{E ANCHE } \text{Tr}\{T^2\} = 0 \Rightarrow a = 0$$

DUNQUE SOLO LA MATRICE BANALE DI $SU(2)_1$ PRESERVA IL VUOTO.

IN QUESTO CASO, $v^2 > 0$, LA SIMMETRIA RESIDUA È SOLO IL GRUPPO $SU(2)_2$.

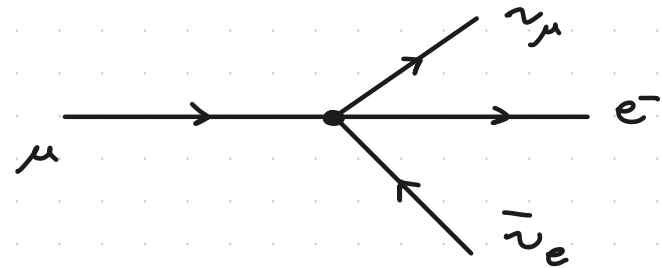
NEL CASO IN CUI $v^2 < 0$, ALLORA $\sqrt{v^2}$ SONO CAMBIATE DI SEGNO, IL VEV DEL VUOTO È $\langle \phi_1 \rangle = \langle \phi_2 \rangle = 0$ È IL GRUPPO DI SIMMETRIA È $SU(2)_1 \times SU(2)_2$.

PROBLEMA 3. NELLA TEORIA DI FERMÌ PER LE INTERAZIONI DEBOLI, LA LAGRANGIANA CONTIENE UN TERMINE DI INTERAZIONE DEL TIPO:

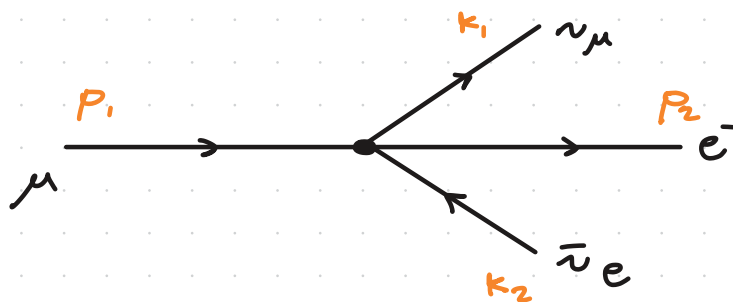
$$\mathcal{L}_{\text{FERMI}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \mu \bar{e} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu_e$$

DOVE ν_μ (ν_e) È IL CAMPO MASSLESS ASSOCIATO AL NEUTRINO MUONICO (ELETTRONICO), μ (e) È IL CAMPO DEL MUONE (ELETTRONE) CON MASSA m_μ (m_e) E G_F È LA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO DI FERMÌ.

DETERMINARE L'AMPIEZZA DI PROBABILITÀ NON POLARIZZATA PER IL PROCESSO DI DECAIMENTO DEL MUONE, NEL LIMITE IN CUI LA MASSA DEL ELETTRONE SIA TRASCURABILE (MA NON QUELLA DEL MUONE).



SOL. SCRIVIAMO GLI IMPULSI



PER LA QED $\mathcal{L}_{\text{INT}} = ie \bar{\psi} \gamma_\mu A^\mu \psi$
SCATTERING $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$

$$\mathcal{M} \propto ie \bar{\nu} \gamma_\mu A^\mu \mu + \dots$$

ABBIAMO

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(k_1) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) u(p_1) \bar{u}(p_2) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \bar{v}(k_2)$$

L'AMPIEZZA NON POLARIZZATA $\bar{E}$:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2} \int \frac{G_F^2}{2} \left(\bar{u}_\beta(k_1) (\gamma^\alpha)_{\beta\gamma} (1 - \gamma^5)_{\delta\delta} u_\delta(p_1) \bar{u}_\varepsilon(p_2) (\gamma_\alpha)_{\varepsilon\tau} (1 - \gamma_5)_{\tau\vartheta} v_\vartheta(k_2) \right) \\ \times \left(\bar{v}_a(k_2) (1 - \gamma_5)_{ab} (\gamma_\mu)_{bc} u_c(p_2) \bar{u}_d(p_1) (1 - \gamma^5)_{de} (\gamma^\mu)_{ef} u_f(k_1) \right)$$

$$= \frac{G_F^2}{4} (\not{p}_1 + m)_{\delta d} (1 - \gamma^5)_{de} (\gamma^\mu)_{ef} (\cancel{1})_{f\beta} (\gamma^\alpha)_{\beta\gamma} (1 - \gamma_5)_{\gamma\delta} \times \\ \times (\cancel{1})_{\vartheta a} (1 - \gamma^5)_{ab} (\gamma_\mu)_{bc} (\not{p}_2)_{c\varepsilon} (\gamma_\alpha)_{\varepsilon\tau} (1 - \gamma_5)_{\tau\vartheta}$$

$$= \frac{G_F^2}{4} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) (1 - \gamma_5) \gamma^\mu \cancel{1} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \right\} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ \cancel{1} (1 - \gamma_5) \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \right\}$$

VALGONO $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$; $\text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \} = 0$; $\text{Tr} \{ \gamma^5 (\text{DISPARI } \gamma) \} = 0$
 $\{ \gamma^5, \gamma^\mu \} = 0$; $\text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \} = -4i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

DUNQUE

$$|\mathcal{M}| = \frac{G_F^2}{4} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m) (1 - \gamma_5)^2 \gamma^\mu \cancel{1} \gamma^\alpha \right\} \text{Tr} \left\{ \cancel{1} (1 - \gamma_5)^2 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\alpha \right\}$$

$\hookrightarrow 1 + 1 - 2\gamma_5$

$$= \frac{G_F^2}{4} \text{Tr} \{ (\not{p}_1 + m) (2 - 2\gamma_5) \gamma^\mu \not{\epsilon}_1 \gamma^\alpha \} \text{Tr} \{ \not{\epsilon}_2 (2 - 2\gamma_5) \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\alpha \}$$

$$= G_F^4 \text{Tr} \{ \not{p}_1 \gamma^\mu \not{\epsilon}_1 \gamma^\alpha - \gamma_5 \not{p}_1 \gamma^\mu \not{\epsilon}_1 \gamma^\alpha \} \text{Tr} \{ \not{\epsilon}_2 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\alpha - \gamma_5 \not{\epsilon}_2 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\alpha \}$$

$$= G_F^4 (p_1)_a (\kappa_1)_b (\kappa_2)^c (p_2)^d \text{Tr} \{ \gamma^a \gamma^\mu \gamma^b \gamma^\alpha - \gamma_5 \gamma^a \gamma^\mu \gamma^b \gamma^\alpha \} \times \\ \times \text{Tr} \{ \gamma_c \gamma_\mu \gamma_d \gamma_\alpha - \gamma_5 \gamma_c \gamma_\mu \gamma_d \gamma_\alpha \}$$

$$= G_F^4 (p_1)_a (\kappa_1)_b (\kappa_2)^c (p_2)^d 16 \left\{ \eta^{a\mu} \eta^{b\alpha} - \eta^{ab} \eta^{\mu\alpha} + \eta^{a\alpha} \eta^{\mu b} + i \epsilon^{a\mu b\alpha} \right\} \times \\ \times \left\{ \eta_{c\mu} \eta_{d\alpha} - \eta_{cd} \eta_{\mu\alpha} + \eta_{c\alpha} \eta_{\mu d} + i \epsilon_{c\mu d\alpha} \right\}$$

$$= 16 G_F^4 (p_1)_a (\kappa_1)_b (\kappa_2)^c (p_2)^d \left\{ 2\eta^a_c \eta^b_d + 2\eta^a_d \eta^b_c + \right. \\ \left. + 4i \left[\epsilon^a_c{}^b{}_d - \epsilon^{a\mu b\alpha} \eta_{cd} \eta_{\mu\alpha} + \epsilon^a_d{}^b{}_c \right] - \epsilon^{a\mu b\alpha} \epsilon_{c\mu d\alpha} \right. \\ \left. + 4i \left[\epsilon_c{}^a{}_d{}^b - \eta^{ab} \eta^{\mu\alpha} \epsilon_{c\mu d\alpha} + \epsilon_c{}^b{}_d{}^a \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= 16 G_F^4 (p_1)_a (k_1)_b (k_2)^c (p_2)^d \left\{ 2\eta^a_c \eta^b_d + 2\eta^a_d \eta^b_c - \varepsilon^{\alpha\mu b\alpha} \varepsilon_{c\mu d\alpha} + \right. \\
&\quad \left. + 4 \left[\varepsilon^a_c{}^b_d - \underbrace{\varepsilon^{\alpha\mu b\alpha} \eta_{cd} \eta_{\mu\alpha}}_{=0 \text{ PER SIMMETRIA}} + \underbrace{\varepsilon^a_d{}^b_c}_{-\varepsilon^a_c{}^b_d} + \varepsilon^a_c{}^b_d - \underbrace{\varepsilon_{c\mu d\alpha} \eta^{ab} \eta^{\mu\alpha}}_{=0 \text{ PER SIMMETRIA}} + \underbrace{\varepsilon^b_c{}^a_d}_{-\varepsilon^a_c{}^b_d} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$= 16 G_F^4 (p_1)_a (k_1)_b (k_2)^c (p_2)^d \left\{ 2\eta^a_c \eta^b_d + 2\eta^a_d \eta^b_c - \varepsilon^{\alpha\mu b\alpha} \varepsilon_{c\mu d\alpha} \right\}$$

NOTA CHE VALE $\varepsilon^{ijkl} \varepsilon_{ijmm} = 2! (\delta^k_m \delta^l_m - \delta^l_m \delta^k_m)$

$$\begin{aligned}
&= 16 G_F^4 \left\{ 2(p_1 k_2)(p_2 k_1) + 2(p_1 p_2)(k_2 k_1) - 2(p_1)_a (k_1)_b (k_2)^c (p_2)^d \times \right. \\
&\quad \left. \times (\delta^a_c \delta^b_d - \delta^a_d \delta^b_c) \right\}
\end{aligned}$$

$$= 16 G_F^4 \left\{ 2(p_1 k_2)(p_2 k_1) + 2(p_1 p_2)(k_1 k_2) - 2(p_1 k_2)(p_2 k_1) + 2(p_1 p_2)(k_1 k_2) \right\}$$

$$= 64 G_F^2 (p_1 p_2)(k_1 k_2)$$

2021 04 12

PROBLEMA 2. SI CONSIDERI UNA TEORIA CARATTERIZZATA DA GRUPPO DI GAUGE $SU(2) \times U(1)_1 \times U(1)_2$ CON IL SEGUENTE CONTENUTO DI MATERIA (CON LE CARICHE CHE SI RIFERISCONO RISPETTIVAMENTE AL PRIMO E SECONDO GRUPPO ABELIANO):

- 4 FERMIONE DI DIRAC, DOPPIETTO DI $SU(2)$, CARICHE $(-1, 0)$.
- ϕ_1 SCALARE COMPLESSO, SINGOLETTO DI $SU(2)$, CARICHE $(0, -1)$.
- ϕ_2 SCALARE COMPLESSO, DOPPIETTO DI $SU(2)$, CARICHE $(-2, 0)$.
- χ_L FERMIONE SINISTRO, DOPPIETTO DI $SU(2)$, CARICHE $(-1, -1)$.
- χ_R FERMIONE DESTRO, SINGOLETTO DI $SU(2)$, CARICHE $(+1, -2)$.

SCRIVERE LA LAGRANGIANA INVARIANTE INCLUDENDO TERMINI FINO ALL'ORDINE QUARTICO NEI CAMPI, IN PARTICOLARE, BILINEARI FERMIONICI, OPPORTUNAMENTE "RIVESTITI" DAI CAMPI SCALARI (SE E DOVE NECESSARIO). ASSUMENDO UN POTENZIALE DELLA FORMA:

$$V(\phi_1, \phi_2) = \lambda_1 (\phi_1^\dagger \phi_1 - v_1^2)^2 + \lambda_2 (\phi_2^\dagger \phi_2 - v_2^2)^2$$

DETERMINARE LA STRUTTURA DEL VUOTO DELLA TEORIA.

SOL. ASSEGNAMO I BOSONI DI GAUGE:

$$\begin{array}{ccc} SU(2) & \times & U(1)_1 \times U(1)_2 \\ \swarrow & & \downarrow \quad \searrow \\ W_\mu^a & & A_\mu \quad B_\mu \end{array}$$

E NOTE LE CARICHE DEI CAMPI SAPPIAMO SCRIVERE LE DERIVATE COVARIANTI:

$$\mathcal{D}_\mu \psi = (\partial_\mu - ig_1 W_\mu^a T^a + ig_2 A_\mu) \psi$$

$$\mathcal{D}_\mu \phi_1 = (\partial_\mu + ig_3 B_\mu) \phi_1$$

$$\mathcal{D}_\mu \phi_2 = (\partial_\mu - ig_1 W_\mu^a T^a + 2ig_2 A_\mu) \phi_2$$

$$\mathcal{D}_\mu \chi_L = (\partial_\mu - ig_1 W_\mu^a T^a + ig_2 A_\mu + ig_3 B_\mu) \chi_L$$

$$\mathcal{D}_\mu \chi_R = (\partial_\mu - ig_2 A_\mu + 2ig_3 B_\mu) \chi_R$$

E LA LAGRANGIANA:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \} - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + (\mathcal{D}_\mu \phi_1)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi_1) + \\ & + (\mathcal{D}_\mu \phi_2)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi_2) + i \bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi + i \chi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \chi_L + \\ & + i \chi_R^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \chi_R + \lambda_1 (\chi_L^\dagger \phi_1^\dagger \phi_2 \chi_R + \chi_R^\dagger \phi_2^\dagger \phi_1 \chi_L) - V(\phi) \end{aligned}$$

in cui:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + i[W_\mu, W_\nu]$$

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

E ABBIAMO PRESO UN POTENZIALE:

$$V(\phi) = \lambda_1 (\phi_1^\dagger \phi_1 - v_1^2)^2 + \lambda_2 (\phi_2^\dagger \phi_2 - v_2^2)^2$$

IL QUALE, SE $v_i^2 > 0$, È SEMIDEFINITO POSITIVO, PER CUI IL MINIMO DEL POTENZIALE È IL PUNTO IN CUI SI ANNULLA:

$$\phi_1^\dagger \phi_1 = v_1^2$$

$$\phi_2^\dagger \phi_2 = v_2^2$$

DUNQUE POSSIAMO PARAMETRIZZARE IL VUOTO DEI DUE CAMPI SCALARI:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \rangle &= v_1 & \langle \phi_2 \rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \text{(SINGOLETTO)} & & \text{(DOPPIETTO)} & \end{aligned}$$

COSÌ IN QUESTO MODO, RICORDANDO:

$$W^a T^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - i W_\mu^2 \\ W_\mu^1 + i W_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^- \\ \sqrt{2} W_\mu^+ & -W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

con

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \pm i W_\mu^2}{\sqrt{2}}$$

POSSIAMO ANALIZZARE I TERMINI CINETICI DEGLI SCALARI:

$$\mathcal{D}_\mu \langle \phi_1 \rangle = i g_3 B_\mu \langle \phi_1 \rangle = i g_3 v_1 B_\mu$$

$$\Rightarrow (\mathcal{D}_\mu \langle \phi_1 \rangle)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \langle \phi_1 \rangle) = g_3^2 v_1^2 B_\mu B^\mu$$

DUNQUE $m_B^2 = 2 g_3^2 v_1^2$. In modo ANALOGO:

$$\mathcal{D}_\mu \langle \phi_2 \rangle = - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} g_1 W_\mu^3 - 2 g_2 A_\mu & \sqrt{2} g_1 W_\mu^- \\ \sqrt{2} g_1 W_\mu^+ & -g_1 W_\mu^3 - 2 g_2 A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} g_2 v_2 W_\mu^- \\ -g_1 v_2 W_\mu^3 - 2 g_2 v_2 A_\mu \end{pmatrix}$$

$$= \frac{i}{2} v_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} g_2 W_\mu^- \\ g_1 W_\mu^3 + 2 g_2 A_\mu \end{pmatrix}$$

POSSIAMO DEFINIRE:

$$\cos \Theta = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + 4 g_2^2}}$$

$$\sin \Theta = \frac{2 g_2}{\sqrt{g_1^2 + 4 g_2^2}}$$

$$H_\mu = \cos \Theta W_\mu^3 + \sin \Theta A_\mu$$

CON IL SUO ORTOGONALE

$$Z_\mu = \sin\theta W_\mu^3 - \cos\theta A_\mu$$

E ABBIAMO

$$\mathcal{D}_\mu \langle \phi_z \rangle = \frac{i}{2} v_z \begin{pmatrix} -\sqrt{2} g_2 W_\mu^- \\ \sqrt{g_1^2 + 4g_2^2} H_\mu \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{D}_\mu \langle \phi_z \rangle)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \langle \phi_z \rangle) = \frac{v_z^2}{4} \left(2g_2^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + (g_1^2 + 4g_2^2) H_\mu H^\mu \right)$$

DUNQUE LEGGIAMO

$$m_{W^\pm}^2 = \frac{v_z^2}{2} g_2^2$$

$$m_H^2 = \frac{v_z^2}{2} (g_1^2 + 4g_2^2)$$

E IL BOSONE Z_μ MASSLESS.

DUNQUE H_μ , $W_\mu^\pm$, B_μ PRENDONO MASSA, MENTRE Z_μ NO.

ROMPIAMO

$$SU(2) \times U(1) \times U(1) \longrightarrow U(1).$$

POTREMMO ANCHE VEDERE LA MASSA DEGLI SPINORI LEFT E RIGHT SVILUPPANDO IL TERMINE DI YUKAWA ATTORNO IL VUOTO

$$\varphi_i = \phi_i - \langle \phi_i \rangle :$$

$$\hookrightarrow \phi_i = \varphi_i + \langle \phi_i \rangle$$

$$\lambda_1 v_1 v_2 (\chi_L^+ \chi_R + \chi_R^+ \chi_L) + \lambda_1 (\chi_L \varphi_1^+ \varphi_2 \chi_R + \chi_R \varphi_2^+ \varphi_1 \chi_L).$$

NOTA ANCHE SE IN

$$\mathcal{D}_\mu \langle \phi_2 \rangle = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} g_2 v_2 W_\mu^- \\ -g_1 v_2 W_\mu^3 - 2g_2 v_2 A_\mu \end{pmatrix}$$

NON CI SI ACCORGE CHE SI PUÒ DEFINIRE $\mathcal{H}_\mu$ SI PUÒ PROCEDERE DIAGONALIZZANDO:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu \langle \phi_2 \rangle)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \langle \phi_2 \rangle) &= \frac{1}{4} (2g_2^2 v_2^2) W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{4} g_1^2 v_2^2 W_\mu^3 W^{\mu 3} + \\ &+ \frac{1}{4} (4g_2^2 v_2^2) A_\mu A^\mu + \frac{1}{4} (4g_1 g_2 v_2^2) W_\mu^3 A^\mu \end{aligned}$$

SCRIVIAMO LA MATRICE (ANCHE CON IL CONTRIBUTO DI B_μ):

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} g_2^2 v_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_3^2 v_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} g_1^2 v_2^2 & \frac{1}{2} g_1 g_2 v_2^2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} g_1 g_2 v_2^2 & g_2^2 v_2^2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} W_\mu^- \\ B_\mu \\ W_\mu^3 \\ A_\mu \end{pmatrix}$$

DOBBIAMO DIAGONALIZZARE I TERMINI DI W_μ^3 E A_μ PER
 CAPIRE SE PRENDONO ENTRAMBI MASSO 0 O SOLO UNA
 LORO COMBINAZIONE LINEARE.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{4}g_1^2 v_2^2 - 1 & \frac{1}{2}g_1 g_2 v_2^2 \\ \frac{1}{2}g_1 g_2 v_2^2 & g_2^2 v_2^2 - 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}g_1^2 v_2^2 + g_2^2 v_2^2$$

CON AUTOVETTORI (NORMALIZZATI):

$$\xi_1 = \frac{2g_2}{\sqrt{g_1^2 + 4g_2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -g_1/2g_2 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + 4g_2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2g_2/g_1 \end{pmatrix}$$

DUNQUE ABBIAMO

$$Z_\mu = \vec{\xi}_1 \cdot \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ A_\mu \end{pmatrix} = \frac{2g_2}{\sqrt{g_1^2 + 4g_2^2}} \left(W_\mu^3 - \frac{g_1}{2g_2} A_\mu \right)$$

$$= \sin\theta W_\mu^3 - \cos\theta A_\mu$$

CON AUTOVALORE $\lambda_1 = m_Z^2 = 0$. INSIEME A:

$$H_\mu = \vec{\xi}_2 \cdot \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ A_\mu \end{pmatrix} = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + 4g_2^2}} \left(W_\mu^3 + \frac{2g_2}{g_1} A_\mu \right) = \cos\theta W_\mu^3 + \sin\theta A_\mu$$

CON AUTOVALORE $\lambda_2 = m_H^2 = \frac{1}{4}v_2^2 (g_1^2 + 4g_2^2)$.

2021 09 13

PROBLEMA 1

UNA TEORIA DI CAMPO RELATIVISTICA È DESCRITTA DALLA LAGRANGIANA

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{INT}}$$

CON

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - \frac{1}{2} m_1^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{1}{2} m_2^2 \phi_2^2 + \\ + \bar{\psi} (-i \partial^\mu \partial_\mu - m_4) \psi$$

E

$$\mathcal{L}_{\text{INT}} = -(g_1 \phi_1 + g_2 \phi_2) \bar{\psi} \psi - \lambda \phi_1 \phi_2 - \kappa \phi_1 \phi_2 \bar{\psi} \psi$$

CON $g_1, g_2, \kappa, \lambda$ COSTANTI POSITIVE.

1. CALCOLARE LA SEZIONE D'URTO NON POLARIZZATA PER IL PROCESSO:

$$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$$

DOVE L'ELETTRONE È DESCRITTO DAL CAMPO ψ .

2. CALCOLARE L'ELEMENTO DI MATRICE S RIGUARDO PER IL PROCESSO

$$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \pi_2$$

DOVE π_2 È LA PARTICELLA DESCRITTA DA ϕ_2 .

SOL

QUELLO CHE CI INTERESSA PER SEZIONE D'URTO E MATRICE S RIDOTTA È SOLO IL PEZZO:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -(g_1 \phi_1 + g_2 \phi_2) \bar{\psi} \psi - \lambda \phi_1 \phi_2 - \kappa \phi_1 \phi_2 \bar{\psi} \psi$$

POICHÈ POSSIAMO LEGGERE LE REGOLE DI FEYNMAN. LE GAMBE ESTERNE SONO

$$\phi \sim 1$$

$u(p), \bar{u}(p)$ FERMIONE ENTRANTE / USCENTE

$\bar{v}(p), v(p)$ ANTIFERMIONE ENTRANTE / USCENTE

I PROPAGATORI (LINEE INTERNE):

$$\phi_i: \frac{i}{p^2 - m_i^2 + i\epsilon}$$

$$\psi: \frac{i}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon} (\not{p} + m_\psi)$$

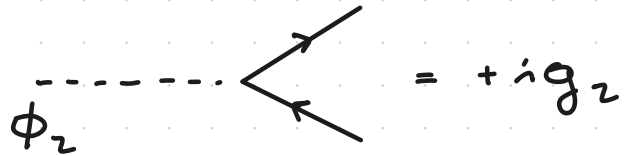
DOBBIAMO VEDERE I VERTICI.

$$\langle 0 | T [\phi_1(x) \bar{\psi}(y) \psi(w) (-ig_1) \int d^4z \phi_1(z) \bar{\psi}(z) \psi(z) + \dots] | 0 \rangle$$

$$= \text{diagramma} = +ig_1$$

Il diagramma mostra una linea a tratti (phi_1) che si connette a un vertice da cui escono due linee a tratto (psi).

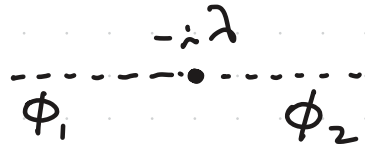
IDEM PER ϕ_2 :



$$= +ig_2$$

ANCORA

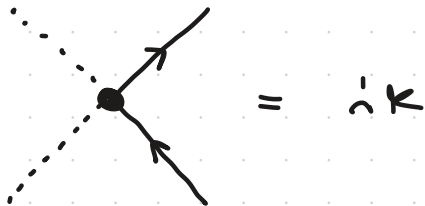
$$\langle 0 | T \left[\phi_1(x) \phi_2(y) \underbrace{(-i\lambda) \int d^4z \phi_1(z) \phi_2(z)} + \dots \right] | 0 \rangle$$



$$-i\lambda$$

È IL VERTICE A 4 CAMPI:

$$\langle 0 | T \left[\phi_1(x) \phi_2(y) \underbrace{\bar{\psi}(z) \psi(w) (-i\kappa) \int d^4k \phi_1(k) \phi_2(k) \bar{\psi}(k) \psi(k)} + \dots \right] | 0 \rangle$$

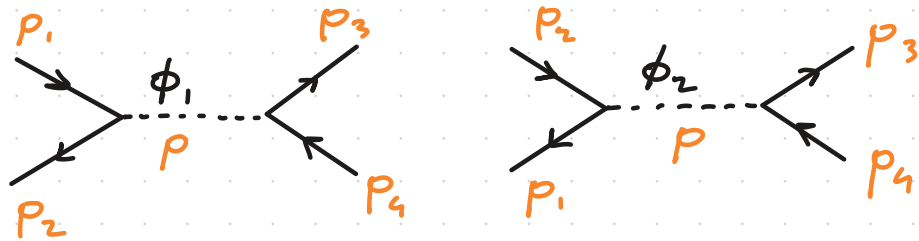


$$= i\kappa$$

CALCOLIAMO LA SEZIONE D'URTO NON POLARIZZATA, NEL LIMITE ALTE ENERGIE, DEL IL PROCESSO:

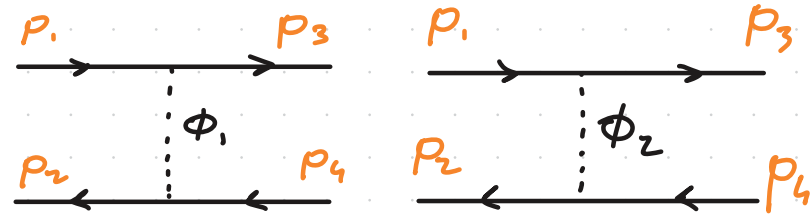
$$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$$

IN CUI I DIAGRAMMI POSSIBILI SONO:



CANALE S

$$p = p_1 + p_2$$



CANALE t

$$p = p_1 - p_3$$

LE MATRICI S RIDOTTE SONO:

$$\mathcal{M}_{\phi_1}^s = \frac{i(g_1)^2}{(p_1 + p_2)^2 - m_1^2} (\bar{u}(p_3) v(p_4)) (\bar{v}(p_2) u(p_1))$$

$$\mathcal{M}_{\phi_2}^s = \frac{i(g_2)^2}{(p_1 + p_2)^2 - m_2^2} (\bar{u}(p_3) v(p_4)) (\bar{v}(p_2) u(p_1))$$

$$\mathcal{M}_{\phi_1}^t = \frac{i(g_1)^2}{(p_1 - p_3)^2 - m_1^2} (\bar{u}(p_3) u(p_1)) (\bar{v}(p_2) v(p_4))$$

$$\mathcal{M}_{\phi_2}^t = \frac{i(g_2)^2}{(p_1 - p_3)^2 - m_2^2} (\bar{u}(p_3) u(p_1)) (\bar{v}(p_2) v(p_4))$$

NOTIAMO CHE TRA I DUE CANALI S (E I DUE t) NON C'È SEGNO RELATIVO. DUNQUE TRA ESSI, L'UNICA DIFFERENZA È LA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO.

VEDIAMO

$$s: \langle 0 | T [\bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_4) \psi(x_3) \dots \hat{\phi}_i(z) \bar{\psi}(z) \psi(z) \dots \phi_i(\omega) \bar{\psi}(\omega) \psi(\omega)] | 0 \rangle$$


$$\Rightarrow M^s: -1$$

$$t: \langle 0 | T [\bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_4) \psi(x_3) \dots \phi_i(z) \bar{\psi}(z) \psi(z) \dots \phi_i(\omega) \bar{\psi}(\omega) \psi(\omega)] | 0 \rangle$$


$$\Rightarrow M^t: +1$$

DUNQUE ABBIAMO SEGNI RELATIVI. DOBBIAMO CALCOLARE:

$$|M|^2 = \frac{1}{4} \square \left\{ \sum_{a=1}^2 |M_{\phi_a}^s|^2 + \sum_{a=1}^2 |M_{\phi_a}^t|^2 + 2 \operatorname{Re} M_{\phi_1}^{s\dagger} M_{\phi_2}^s + 2 \operatorname{Re} M_{\phi_1}^{t\dagger} M_{\phi_2}^t + \right. \\ \left. - 2 \operatorname{Re} M_{\phi_1}^{s\dagger} M_{\phi_1}^t - 2 \operatorname{Re} M_{\phi_1}^{s\dagger} M_{\phi_2}^t - \right.$$

$$- 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_{\phi_2}^{s\dagger} \mathcal{M}_{\phi_1}^+ - 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_{\phi_2}^{s\dagger} \mathcal{M}_{\phi_2}^t \}$$

NELLE ESPRESSIONI $\mathcal{M}_{\phi_i}^{(t,s)}$ NOTIAMO CHE L'UNICA DIFFERENZA È LA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO, DUNQUE CALCOLIAMO CON UN INDICE GENERICO i :

$$g_i = \{g_1, g_2\}$$

DUNQUE:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}_{\phi_i}|^2 &= \frac{g_i^4}{4s^2} \sum (\bar{u}_\alpha(p_3) v_\alpha(p_4)) (\bar{v}_\beta(p_2) u_\beta(p_1)) (\bar{v}_\gamma(p_4) u_\gamma(p_3)) (\bar{u}_\delta(p_1) v_\delta(p_2)) \\ &\sim \frac{g_i^4}{4s^2} (\not{p}_4)_{\alpha\gamma} (\not{p}_3)_{\gamma\alpha} (\not{p}_1)_{\beta\delta} (\not{p}_2)_{\delta\beta} \\ &= \frac{g_i^4}{4s^2} \operatorname{Tr}\{\not{p}_4 \not{p}_3\} \operatorname{Tr}\{\not{p}_1 \not{p}_2\} \\ &= \frac{4g_i^4}{s^2} (p_1 p_2)(p_3 p_4) \end{aligned}$$

IN MODO ANALOGO

$$\frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}_{\phi_i}^t|^2 = \frac{g_i^4}{4t^2} \sum (\bar{u}_\alpha(p_3) u_\alpha(p_1)) (\bar{v}_\beta(p_2) v_\beta(p_4)) (\bar{u}_\gamma(p_1) u_\gamma(p_3)) (\bar{v}_\delta(p_4) v_\delta(p_2))$$

$$\sim \frac{g_{\dot{i}}^4}{4t^2} (\not{p}_1)_{\alpha\gamma} (\not{p}_3)_{\gamma\alpha} (\not{p}_4)_{\beta\delta} (\not{p}_2)_{\delta\beta}$$

$$= \frac{g_{\dot{i}}^4}{4t^2} \text{Tr}\{\not{p}_1 \not{p}_3\} \text{Tr}\{\not{p}_2 \not{p}_4\}$$

$$= \frac{4g_{\dot{i}}^4}{t^2} (p_1 p_3)(p_2 p_4)$$

IL TERMINE DI INTERFERENZA GENERICO

$$\frac{1}{4} \square \mathcal{M}_{\phi_i}^{s+} \mathcal{M}_{\phi_j}^t = \frac{g_{\dot{i}}^2 g_j^2}{4st} \square (\bar{u}_\alpha(p_1) v_\alpha(p_2)) (\bar{v}_\beta(p_4) u_\beta(p_3)) \times$$

$$\times (\bar{u}_\delta(p_3) u_\delta(p_1)) (\bar{v}_\gamma(p_2) v_\gamma(p_4))$$

$$\sim \frac{g_{\dot{i}}^2 g_j^2}{4st} (\not{p}_1)_{\delta\alpha} (\not{p}_2)_{\alpha\gamma} (\not{p}_4)_{\gamma\beta} (\not{p}_3)_{\beta\delta}$$

$$= \frac{g_{\dot{i}}^2 g_j^2}{4st} \text{Tr}\{\not{p}_1 \not{p}_2 \not{p}_4 \not{p}_3\}$$

$$= \frac{g_{\dot{i}}^2 g_j^2}{st} [(p_1 p_2)(p_3 p_4) - (p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_3)(p_2 p_4)]$$

DUNQUE

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}|^2 = & \frac{4}{s^2} (p_1 p_2)(p_3 p_4) [g_1^4 + g_2^4] + \frac{4}{t^2} (p_1 p_3)(p_2 p_4) [g_1^4 + g_2^4] + \\
 & + 2 \frac{4}{s^2} (p_1 p_2)(p_3 p_4) g_1^2 g_2^2 + 2 \frac{4}{t^2} (p_1 p_3)(p_2 p_4) g_1^2 g_2^2 - \\
 & - \frac{2}{st} [(p_1 p_2)(p_3 p_4) - (p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_3)(p_2 p_4)] \times \\
 & \times [g_1^4 + g_2^4 + 2g_1^2 g_2^2]
 \end{aligned}$$

IN TERMINI DI VARIABILI DI MANDELSTAM

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \Sigma |\mathcal{M}|^2 = & \frac{4}{s^2} \frac{s^2}{4} (g_1^4 + g_2^4) + \frac{4}{t^2} \frac{t^2}{4} (g_1^4 + g_2^4) + \\
 & + 2 \frac{4}{s^2} \frac{s^2}{4} (g_1^2 g_2^2) + 2 \frac{4}{t^2} \frac{t^2}{4} (g_1^2 g_2^2) - \\
 & - \frac{2}{st} \left[\frac{s^2}{4} - \frac{u^2}{4} + \frac{t^2}{4} \right] (g_1^2 + g_2^2)^2
 \end{aligned}$$

$$= 2(g_1^4 + g_2^4) + 4(g_1^2 g_2^2) - \frac{2}{st} \left[\frac{s^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} + \frac{t^2}{4} \right] (g_1^2 + g_2^2)^2$$

$$|M|^2 = 2g_1^4 \left[1 - \frac{1}{st} \left(\frac{s^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} + \frac{t^2}{4} \right) \right] +$$

$$+ 2g_2^4 \left[1 - \frac{1}{st} \left(\frac{s^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} + \frac{t^2}{4} \right) \right] +$$

$$+ 4g_1^2 g_2^2 \left[1 - \frac{1}{st} \left(\frac{s^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} + \frac{t^2}{4} \right) \right]$$

$$= 2(g_1^2 + g_2^2)^2 \left[1 - \frac{1}{4} \frac{s^2 - \mu^2 + t^2}{st} \right]$$

$$= 2(g_1^2 + g_2^2)^2 \left[1 - \frac{1}{4} \frac{s^2 + t^2 - (s+t)^2}{st} \right]$$

$$= 2(g_1^2 + g_2^2)^2 \left[1 - \frac{1}{4} \frac{-2st}{st} \right]$$

$$= 2(g_1^2 + g_2^2)^2 \left[1 + \frac{1}{2} \right]$$

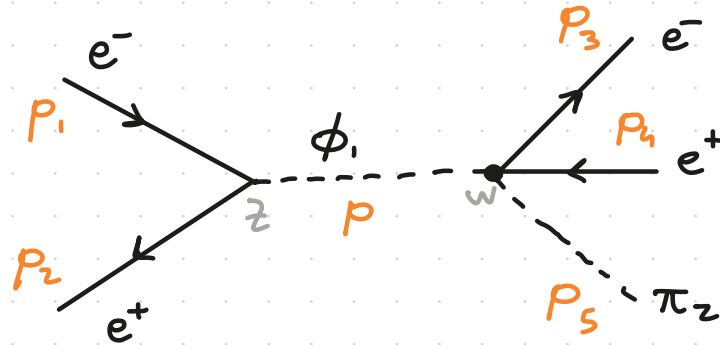
$$= 3(g_1^2 + g_2^2)^2$$

LA SEZIONE D'URTO:

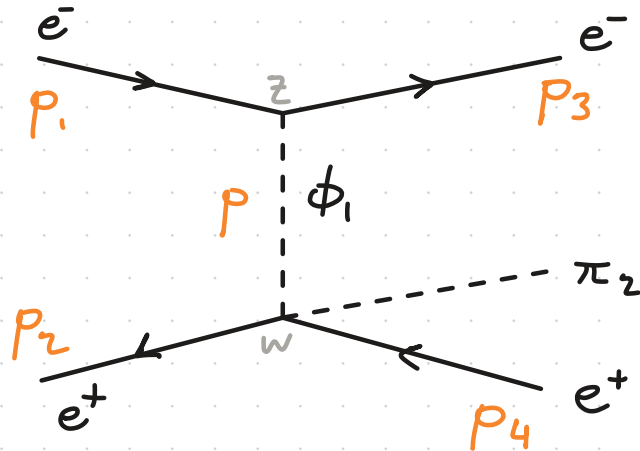
$$\sigma_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 s} |M|^2 \int d\Omega = \frac{3(g_1^2 + g_2^2)^2}{16\pi s}$$

PER IL PROCESSO
HA DIAGRAMMA:

$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \pi_2$, con π_2 DESCRITTO DA ϕ_2



$$\mathcal{M} = \frac{(\not{\epsilon}_1)(\not{\epsilon}_2)\not{p}}{(p_1 + p_2)^2 - m_1^2} (\bar{u}(p_3) v(p_4)) (\bar{v}(p_2) u(p_1))$$



$$\mathcal{M} = \frac{(\not{\epsilon}_1)(\not{\epsilon}_2)\not{p}}{(p_1 - p_3)^2 - m_1^2} (\bar{u}(p_3) u(p_1)) (\bar{v}(p_2) v(p_4))$$

PROBLEMA 2

SI CONSIDERI UNA TEORIA DI GAUGE $SU(4)$ ACCOPPIATA AD UN CAMPO SCALARE ϕ NELLA RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA.

DISCUTERE SE IL CAMPO SCALARE ϕ È REALE O COMPLESSO E SCRIVERE L'ACCOPIAMENTO MINIMALE (OSSIA LA DERIVATA COVARIANTE) TRA IL CAMPO ϕ E I CAMPI DI GAUGE ASSOCIATI AL GRUPPO $SU(4)$.

ASSUMENDO CHE IL POTENZIALE PER IL CAMPO SCALARE AMMETTA DUE VUOTI DIFFERENTI CON:

$$\langle \phi \rangle_1 = v_1 \text{diag}(1, 1, -1, -1)$$

$$\phi_0 \equiv \langle \phi \rangle_2 = v_2 \text{diag}(1, 1, -2, 0)$$

DISCUTERE IL MECCANISMO DI ROTTURA DI SIMMETRIA NEI DUE QUARK.

SOL ESSENDO IN RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA SAPIAMO CHE ϕ TRASFORMA COME:

$$\phi \rightarrow U \phi U^\dagger, \quad U \in SU(4)$$

IL CAMPO POSSIAMO DIRE ESSERE REALE ESSENDO LA RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA REALE.

CALCOLIAMO LA VARIAZIONE INDOTTA DA UNA TRASFORMAZIONE INFINITESIMA:

$$U = e^{-i\omega} \quad \text{CON} \quad \omega = \omega^a T^a, \quad T^a \text{ GENERATORI DI } SU(4)$$

$$\begin{aligned}
\phi &\rightarrow U \phi U^\dagger \\
&\sim (1 - i\omega) \phi (1 + i\omega) \\
&\sim \phi - i\omega \phi + i\phi \omega \\
&= \phi + i[\phi, \omega]
\end{aligned}$$

DUNQUE:

$$\delta\phi = i\omega^a [\phi, T^a]$$

L'ACCOUPLAMENTO MINIMALE LO TROVIAMO ACCOPPIANDO I CAMPI DI GAUGE CON LA CORRENTE DI NOETHER ASSOCIATA ALLA TRASFORMAZIONE. MI PIACE DI PIÙ RICHIEDERE CHE:

$$D_\mu \phi \rightarrow U(D_\mu \phi) U^\dagger$$

COSÌ CHE IL TERMINE CINETICO SIA INVARIANTE. VEDIAMO:

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \partial_\mu (U \phi U^\dagger) = (\partial_\mu U) \phi U^\dagger + U \partial_\mu \phi U^\dagger + U \phi \partial_\mu U^\dagger$$

E SAPPIAMO

$$A_\mu \rightarrow \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger + U A_\mu U^\dagger$$

DUPQUE VEDIAMO

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi \overset{1}{\bullet} - ig A_\mu \phi \overset{2}{\bullet} - ig \phi A_\mu$$

$$\rightarrow \partial_\mu (\psi \phi \psi^\dagger) \overset{1}{\bullet} - ig \left(\frac{i}{g} \psi \partial_\mu \psi^\dagger + \psi A_\mu \psi^\dagger \right) (\psi \phi \psi^\dagger) \overset{2}{\bullet}$$

$$\overset{2}{\bullet} - ig (\psi \phi \psi^\dagger) \left(\frac{i}{g} \psi \partial_\mu \psi^\dagger + \psi A_\mu \psi^\dagger \right)$$

$$= (\partial_\mu \psi) \phi \psi^\dagger + \psi (\partial_\mu \phi) \psi^\dagger + \psi \phi (\partial_\mu \psi^\dagger) \overset{1}{\bullet}$$

$$\overset{1}{\bullet} - ig \left[\frac{i}{g} \psi (\partial_\mu \psi^\dagger) \psi \phi \psi^\dagger + \psi A_\mu \phi \psi^\dagger \right] \overset{2}{\bullet}$$

$$\overset{2}{\bullet} - ig \left[\frac{i}{g} \psi \phi \partial_\mu \psi^\dagger + \psi \phi A_\mu \psi^\dagger \right]$$

NELLA SECONDA RIGA USIAMO $\psi \partial_\mu \psi^\dagger = -(\partial_\mu \psi) \psi^\dagger$

$$= (\partial_\mu \psi) \phi \psi^\dagger + \psi (\partial_\mu \phi) \psi^\dagger + \psi \phi (\partial_\mu \psi^\dagger) \overset{1}{\bullet}$$

$$\overset{1}{\bullet} (-1)(-\partial_\mu \psi) \psi^\dagger \psi \phi \psi^\dagger \overset{1}{\bullet} - ig \psi A_\mu \phi \psi^\dagger \overset{2}{\bullet}$$

$$\begin{aligned}
& \overset{2}{\bullet} (-1) U \phi \partial_\mu U^\dagger \quad \overset{2}{\bullet} i g U \phi A_\mu U^\dagger \\
& = (\partial_\mu U) \phi U^\dagger + U (\partial_\mu \phi) U^\dagger + U \phi (\partial_\mu U^\dagger) \\
& \overset{1}{\bullet} (\partial_\mu U) \phi U^\dagger \\
& \overset{1}{\bullet} i g U A_\mu \phi U^\dagger \\
& \overset{2}{\bullet} (-1) U \phi \partial_\mu U^\dagger \\
& \overset{2}{\bullet} i g U \phi A_\mu U^\dagger
\end{aligned}$$

NON VOGLIAMO TUTTI I TERMINI CHE NON SIANO DELLA FORMA $U(\text{///})U^\dagger$, PER CUI SCEGLIAMO

$$\overset{1}{\bullet} = -1$$

$$\overset{2}{\bullet} = +1$$

così

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + i g [\phi, A_\mu]$$

$$\longrightarrow U (\partial_\mu \phi) U^\dagger + i g U [\phi, A_\mu] U^\dagger$$

LA DERIVATA COVARIANTE LA POSSIAMO ANCHE RISCRIVERE COME:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ig \phi^A A_\mu^B [T^A, T^B]$$

SCRIVENDO ϕ ED A_μ IN TERMINI DEI GENERATORI DI $SU(4)$.

ABBIAMO VISTO
$$\delta \phi = i [\phi, T^A]$$

SUL VUOTO, AFFINCHÈ SIA PRESERVATO, RICHIEDIAMO:

$$\delta \langle \phi \rangle = i [\langle \phi \rangle, T^A] \equiv 0.$$

POSSIAMO SCRIVERE I DUE VUOTI IN TERMINI DI MATRICI DIAGONALI

$$\langle \phi \rangle_1 = v_1 \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

$$\langle \phi \rangle_2 = v_2 \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & (-2 \quad 0) \end{pmatrix}$$

È UN GENERICO GENERATORE A BLOCCHI

$$T^A = \begin{pmatrix} A_{2 \times 2} & C_{2 \times 2} \\ D_{2 \times 2} & B_{2 \times 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$$

HA RICHIEDENDO CHE $T^A \in \text{SU}(4)$ SIA HERMITIANA

$$\Rightarrow C = D^\dagger \quad ; \quad A = A^\dagger \quad B = B^\dagger$$

SAPPIAMO ANCHE CHE $\text{Tr}\{T^A\} = 0$

$$\Rightarrow \text{Tr}\{A\} + \text{Tr}\{B\} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{Tr}\{A\} = \text{Tr}\{B\} = 0 \\ \text{Tr}\{A\} = -\text{Tr}\{B\} \end{cases}$$

POSSIAMO CALCOLARE I DUE COMMUTATORI $[\langle\phi\rangle, T^A]$:

$$[\langle\phi\rangle_1, T^A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ C^\dagger & B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & C \\ C^\dagger & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & C \\ -C^\dagger & -B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & -C \\ C^\dagger & -B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2C \\ -2C^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\langle\phi\rangle_2, T^A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 00 \\ 0 & 1 & 00 \\ 00 & -20 \\ 00 & 00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ c_{11}^\dagger & c_{21}^\dagger & b_{11} & b_{12} \\ c_{12}^\dagger & c_{22}^\dagger & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ c_{11}^+ & c_{21}^+ & b_{11} & b_{12} \\ c_{12}^+ & c_{22}^+ & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ -2c_{11}^+ & -2c_{21}^+ & -2b_{11} & -2b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -2c_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -2c_{21} & 0 \\ c_{11}^+ & c_{21}^+ & -2b_{11} & 0 \\ c_{12}^+ & c_{22}^+ & -2b_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0_2 & 3c_{11} & c_{12} \\ 3c_{21} & c_{22} \\ -3c_{11}^+ & -3c_{21}^+ & 0 & -2b_{12} \\ -c_{12}^+ & c_{22}^+ & -2b_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

DUNQUE, NEL CASO $[\langle \phi \rangle_1, T^A] = 0$ È SEMPLICE
E VEDIAMO:

$$C = 0$$

$$\Rightarrow T^A = \begin{pmatrix} A^A & 0 \\ 0 & B^A \end{pmatrix} \quad \text{CON } A^A, B^A \text{ HERMITIANE}$$

SI A A^A CHE B^A SONO 4 MATRICI MATRICI HERMITIANE, E SAPPIAMO
CHE POSSIAMO DECOMPORLE, CIASCUNA, IN 1 MATRICE A $T_V \neq 0$
E 3 CON $T_V = 0$.

LA SITUAZIONE $\text{Tr} A^a = \text{Tr} B^a = 0$ È SODDISFATTA SOLO SE

A^a, B^a SONO MATRICI 2×2 HERMITIANE A $\text{Tr} = 0$

$$\Rightarrow A^a \in \text{SU}(2) \quad B^a \in \text{SU}(2)$$

MENTRE SE $\text{Tr} A^a = -\text{Tr} B^a$ ALLORA

$$A^a = \mathbb{1} \quad B^a = -\mathbb{1} \quad \Rightarrow T^a = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{GRUPPO } U(1)$$

DUNQUE NEL CASO DI $\langle \phi \rangle_1$ IL GRUPPO RESIDUO È

$$\text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \times U(1).$$

DUNQUE RIMANGONO 7 CAMPI DI GAUGE (ASSOCIATI AL GRUPPO DI GAUGE) PRIVI DI MASSA. I RESTANTI 8 (IN $\text{SU}(4)$ NE AVEVAMO 15) ACQUISIRANNO MASSA TRAMITE IL MECCANISMO DI HIGGS ASSORBENDO ALTRETTANTI BOSONI DI GOLDSTONE DERIVANTI DALL'ESPANSIONE DI ϕ ATTORNO AL VUOTO.

IL CASO DI :

$$[\langle \phi \rangle_2, T^a] = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_2 & 3C_{11} & C_{12} \\ -3C_{11}^+ & -3C_{21}^+ & 0 \\ -C_{12}^+ & C_{22}^+ & -2b_{12} \\ -2b_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv 0$$

CI DICE CHE $C = 0$ E $b_{12} = b_{21} = 0 \Rightarrow B$ DIAGONALE

ALLORA ABBIAMO

$$T^a = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^a & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}^a \end{pmatrix}$$

IN QUESTO CASO B^A SONO MATRICI 2×2 DIAGONALI HERMITIANE.

LA CONDIZIONE $\text{Tr}\{T^A\} = 0$ È :

$$\text{Tr} A^A + b_{11} + b_{22} = 0$$

E DOBBIAMO ANALIZZARE I VARI CASI :

- SE PRENDIAMO $b_{11} = b_{22} = 0 \Rightarrow \text{Tr} A^A = 0$

ALLORA A^A SONO MATRICI 2×2 HERMITIANE A
+RACCIA NULLA

$$\Rightarrow SU(2)$$

- SE PRENDIAMO $A = 0 \Rightarrow b_{11} = -b_{22}$

$$\Rightarrow T^a = \text{diag}(0, 0, b_{11}, -b_{11})$$

$$\Rightarrow U(1)$$

- SE A È DIAGONALE $\propto \mathbb{1} \Rightarrow \text{Tr} A + b_{11} + b_{12} = 0$

$$\Rightarrow 2k + b_{11} + b_{12} = 0$$

$$\Rightarrow U(1)$$

QUINDI IL GRUPPO RESIDUO È : $SU(2) \times U(1) \times U(1)$.
DUNQUE 5 BOSONI DI GAUGE RIMANGONO MASSLESS, POICHÈ I
GENERATORI NON SI ROMPONO. I RESTANTI 40 ACQUISIRANNO MASSA CON HIGGS.

20220125

PROBLEMA 1.

SI CONSIDERI LA TEORIA DI YUKAWA CHE DESCRIVE L'INTERAZIONE TRA CAMPI DI DIRAC ψ^a DI MASSA m_a ($a = 1, 2$ SI RIFERISCE A DUE SPECIE DIVERSE DI PARTICELLE FERMIONICHE) ED UN CAMPO SCALARE ϕ DI MASSA M ATTRAVERSO L'ACCOPIAMENTO:

$$\mathcal{L}_{int} = g \phi \bar{\psi}^a \psi^a$$

RICAVARE LE REGOLE DI FEYNMAN, DESCRIVERE I DIAGRAMMI AD ALBERO CHE SONO ALLA BASE DEI PROCESSI:

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

$$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$$

SCRIVERE GLI ELEMENTI DI MATRICE S RIDOTTA PER ENTRAMBI I PROCESSI E CALCOLARE LA SEZIONE D'URTO NON POLARIZZATA PER IL PRIMO DEI DUE.

SOL. PER LA TEORIA DI YUKAWA LE REGOLE SONO:

⊕ LINEE ESTERNE: $\phi \sim 1$ ENTRANTE / USCENTE

$\mu(p), \bar{\mu}(p)$ FERMIONE ENTRANTE USCENTE

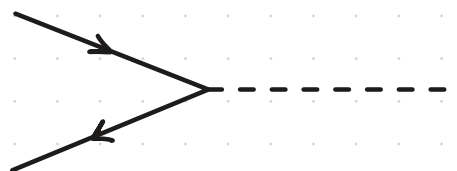
$\bar{\nu}(p), \nu(p)$ ANTI-FERM. // //

⊕ LINEE INTERNE (PROPAGATORI):

$$\phi: \Delta(p) = \frac{\hat{1}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

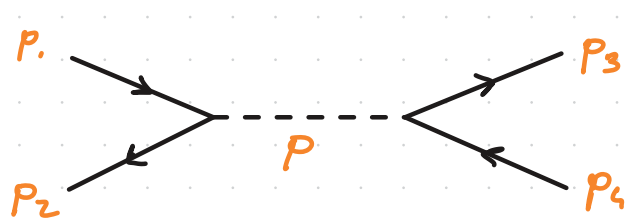
$$4: S_{\alpha\beta}(p) = \hat{1}(\not{p} - m)^{-1}_{\alpha\beta} = \frac{\hat{1}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} (\not{p} + m)_{\alpha\beta}$$

⊕ IL VERTICE:

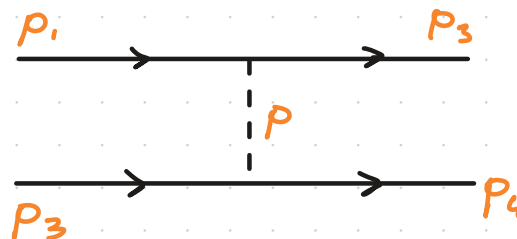


$$= -ig\delta_{\alpha\beta}$$

PER IL PROCESSO $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$ ABBIAMO I DIAGRAMMI:



CANALE S
 $p = p_1 + p_2$



CANALE t:
 $p = p_1 - p_3$

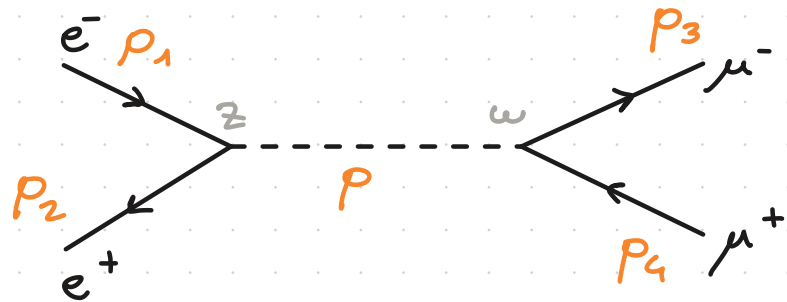
IN CUI ABBIAMO IL CANALE DI SCAMBIO VISTO CHE TRA STATO INIZIALE E FINALE LE PARTICELLE SONO UGUALI.

LE MATRICI S RISOLTE: (TUTTE LE POLARIZZAZIONI SONO DI E)

$$M_s = \frac{i(-ig)^2}{(p_1 + p_2)^2 - M^2} (\bar{v}_\alpha(p_2) u_\alpha(p_1)) (\bar{u}_\beta(p_3) v_\beta(p_4))$$

$$M_t = \frac{i(-ig)^2}{(p_1 - p_3)^2 - M^2} (\bar{u}_\alpha(p_3) u_\alpha(p_1)) (\bar{v}_\beta(p_2) v_\beta(p_4))$$

PER IL PROCESSO $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ ABBIAMO IL DIAGRAMMA:



CANALE S: $p = p_1 + p_2$

$i=1 \rightarrow e$
 $i=2 \rightarrow \mu$

CON

$$M_s = \frac{i(-ig)^2}{(p_1 + p_2)^2 - M^2} (\bar{u}_\alpha^{(\mu)}(p_3) v_\alpha^{(\mu)}(p_4)) (\bar{v}_\beta^{(e)}(p_2) u_\beta^{(e)}(p_1))$$

L'AMPIEZZA NON POLARIZZATA È:

$$\frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}_s|^2 = \frac{g^4}{4[s - M^2]^2} \sum (\underbrace{\bar{v}_\alpha^{(\mu)}(p_4)}_{\text{green}} \underbrace{u_\alpha^{(\mu)}(p_3)}_{\text{orange}}) (\underbrace{\bar{u}_\beta^{(e)}(p_1)}_{\text{purple}} \underbrace{v_\beta^{(e)}(p_2)}_{\text{red}}) \times$$

$$(\underbrace{\bar{u}_\gamma^{(\mu)}(p_3)}_{\text{orange}} \underbrace{v_\gamma^{(\mu)}(p_4)}_{\text{green}}) (\underbrace{\bar{v}_\delta^{(e)}(p_2)}_{\text{red}} \underbrace{u_\delta^{(e)}(p_1)}_{\text{purple}})$$

$$\sim \frac{g^4}{4[s-M^2]^2} (\not{p}_3 + m_2)_{\alpha\gamma} (\not{p}_4 - m_2)_{\gamma\alpha} (\not{p}_2 - m_1)_{\beta\delta} (\not{p}_1 + m_1)_{\delta\beta}$$

$$= \frac{g^4}{4[s-M^2]^2} \text{Tr}\{(\not{p}_3 + m_2)(\not{p}_4 - m_2)\} \text{Tr}\{(\not{p}_2 - m_1)(\not{p}_1 + m_1)\}$$

$$= \frac{g^4}{4[s-M^2]^2} \text{Tr}\{\not{p}_3 \not{p}_4 - m_2^2\} \text{Tr}\{\not{p}_2 \not{p}_1 - m_1^2\}$$

$$= \frac{g^4}{4[s-M^2]^2} [4(p_3 p_4) - 4m_2^2] [4(p_1 p_2) - 4m_1^2]$$

$$= \frac{4g^4}{[s-M^2]^2} \left\{ (p_1 p_2)(p_3 p_4) - m_2^2(p_1 p_2) - m_1^2(p_3 p_4) + m_1^2 m_2^2 \right\}$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = \begin{cases} p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \\ p_3^2 + p_4^2 + 2p_3 p_4 \end{cases} = \begin{cases} 2m^2 + 2p_1 p_2 \\ 2m^2 + 2p_3 p_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (p_1 p_2) = (p_3 p_4) = \frac{s}{2} - m^2$$

(FANDO ATTENZIONE A QUALI MASSE METTERE)

DONQUE

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{4g^4}{[s - M^2]^2} \left\{ \left(\frac{s}{2} - m_1^2 \right) \left(\frac{s}{2} - m_2^2 \right) - m_2^2 \left(\frac{s}{2} - m_1^2 \right) - \right. \\ \left. - m_1^2 \left(\frac{s}{2} - m_2^2 \right) + m_1^2 m_2^2 \right\}$$

$$= \frac{4g^4}{[s - M^2]^2} \left\{ \frac{s^2}{4} - \frac{s}{2} (m_1^2 + m_2^2) + m_1^2 m_2^2 - \frac{s}{2} (m_1^2 + m_2^2) + \right. \\ \left. + 2 m_1^2 m_2^2 + m_1^2 m_2^2 \right\}$$

$$= \frac{4g^4}{[s - M^2]^2} \left\{ \frac{s^2}{4} - s(m_1^2 + m_2^2) + 4 m_1^2 m_2^2 \right\}$$

$$= \frac{4g^4}{[s - M^2]^2} \left(\frac{s}{2} - 2m_1^2 \right) \left(\frac{s}{2} - 2m_2^2 \right)$$

$$= \frac{g^4}{(s - M^2)^2} (s - 4m_1^2)(s - 4m_2^2)$$

ABBIAMO

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{|M|^2}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|}$$

MA CON

$$|\vec{p}_1| = \sqrt{E^2 - m_i^2}, \quad \text{con} \quad s = E_{cm}^2 = 4E^2$$

$$|\vec{p}_1| = \sqrt{\frac{s}{4} - m_i^2} = \frac{1}{2} \sqrt{s - 4m_i^2}$$

SI HA

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{1}{2} \sqrt{s - 4m_\mu^2} \frac{2}{\sqrt{s - 4m_e^2}} \frac{g^4}{(s - M^2)^2} (s - 4m_e^2)(s - 4m_\mu^2)$$

$$\Rightarrow \sigma_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 s} \sqrt{\frac{s - 4m_\mu^2}{s - 4m_e^2}} \frac{g^4}{(s - M^2)^2} (s - 4m_e^2)(s - 4m_\mu^2) \int d\Omega$$

$$= \frac{g^4 \sqrt{s - 4m_e^2} (s - 4m_\mu^2)^{3/2}}{16\pi s (s - M^2)^2}$$

Problema 2. NEL MODELLO STANDARD DELLE PARTICELLE ELEMENTARI IL MUONE μ PUO' DECADERE IN UN NEUTRINO MUONICO ν_μ , UN ELETTRONE ED UN ANTI-NEUTRINO ELETTRONICO $\bar{\nu}_e$:

$$\mu \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$

DESCRIVERE QUALI INTERAZIONI POSSONO INDURRE TALE PROCESSO E CALCOLARE L'ELEMENTO DI MATRICE S RIDOTTA.

SOL. I LEPTONI NEL SM LI ORGANIZZIAMO IN UN DOPPIETTO DI SU(2) (PARTI LEFT) E UN SINGOLETTO (PARTI RIGHT)

$$L_L = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L ; \quad e_R$$

GRUPPO DI SIMEETRIA
 $SU(2) \times U(1)$

DALLA FORMULA DI GELL-MANN NISHIJIMA: $Q = T^3 + \frac{Y}{2}$
(T^3 TERZO GENERATORE DI SU(2), Y CARICA DI U(1)).

POSSIAMO LEGGERE I NUMERI QUANTICI:

$$\nu : Q = 0 \quad T^3 = +\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad Y = -1$$

$$e_L : Q = -1 \quad T^3 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad Y = -1 \quad \checkmark$$

$$l_R: Q = -1 \quad T^3 = 0 \quad \Rightarrow Y = -2$$

DUNQUE SAPPIAMO SCRIVERE LE DERIVATE COVARIANTI

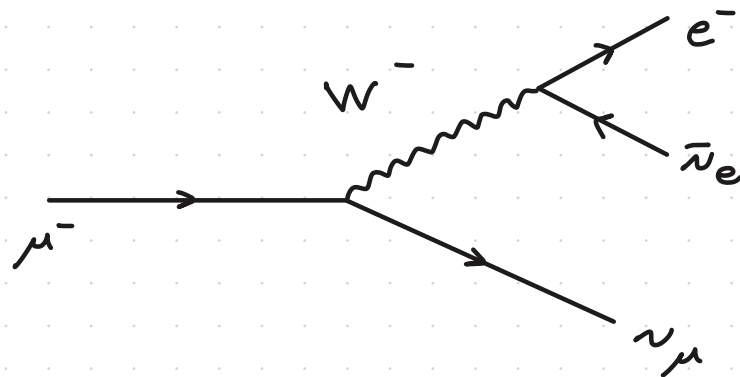
RICORDA CHE SI ASSOCIANO

$SU(2) \rightarrow W_\mu$	BOSONI DI GAUGE
$U(1) \rightarrow B_\mu$	

$$D_\mu L_L = \left(\partial_\mu - i g_1 W_\mu^a T^a + i \frac{g_2}{2} B_\mu \right) L_L$$

$$D_\mu l_R = \left(\partial_\mu + i g_2 B_\mu \right) l_R$$

IL DECADIMENTO $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$ È RAPPRESENTATO DAL DIAGRAMMA



ESSENDO UN PROCESSO CARICO ABBIAMO COME MEDIATORE
 W^- E POSSIAMO GUARDARE LA CORRENTE J_μ^+ CHE
 CI SI ACCOPPIA.

$$W_\mu^A T^A = W_\mu^1 \frac{\sigma_1}{2} + W_\mu^2 \frac{\sigma_2}{2} + W_\mu^3 \frac{\sigma_3}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - i W_\mu^2 \\ W_\mu^1 + i W_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

DEFINIAMO

$$W^\pm = \frac{W^1 \pm i W^2}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^- \\ \sqrt{2} W_\mu^+ & -W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

E PER TROVARE LA CORRENTE (A NOI INTERESSA QUELLA
 ACCOPPIATA A W^- , QUINDI TOGLIAMO TUTTO IL RESTO),
 DOBBIAMO GUARDARE IL TERMINE CINETICO:

$$i \bar{L}_L \not{D} L_L = i (\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) \not{\partial}^\mu (-ig_1) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} W_\mu^- \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$$

$$= \frac{g_1}{2} (\bar{\nu}_L \bar{\ell}_L) \bar{\sigma}^\mu \begin{pmatrix} \sqrt{2} W_\mu^- \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{g_1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L \bar{\sigma}^\mu \ell_L W_\mu^-$$

DUNQUE $J_\mu^+ = \frac{g_1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L \bar{\sigma}^\mu \ell_L$, PER LE DUE FAMIGLIE.

DOBBIAMO ACCOPPIARE LE DUE CORRENTI TRAMITE IL PROPAGATORE (MASSIVO) DI W_μ^- :

$$\Delta_{\mu\nu}^W(p) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2 - m_W^2} \quad (\xi = 1)$$

STESSA COSA CHE ABBIAMO SEMPRE FATTO, MA SENZA SAPERLO. PRENDI IN QED $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$:

CORRENTE e : $\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1)$
 CORRENTE μ : $\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)$

$$\Rightarrow \mathcal{M} \propto (\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1) \frac{\eta_{\mu\nu}}{p_t^2} (\bar{u}_4 \gamma^\nu u_2)$$

L'AMPIEZZA INVARIANTE È $\mathcal{M} \propto (J_{\text{WUONE}}^\mu) (J_{\text{ELET}}^\mu)$

$$\mathcal{M} = \left(\frac{g_1}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \bar{\sigma}^\rho \nu_{eL} \right) \frac{-i\eta_{\rho\sigma}}{p^2 - m_W^2} \left(\frac{g_1}{\sqrt{2}} \nu_{\mu L} \bar{\sigma}^\sigma \mu_L \right).$$

2022 02 16

PROBLEMA 1

SI CONSIDERI LA QED CON UN ULTERIORE CAMPO SCALARE REALE DI MASSA M ACCOPPIATO AI FERMIONI ATTRAVERSO LA LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L}_{\text{INT}} = g\phi\bar{\psi}^a\psi^a$$

DOVE L'INDICE $a = 1, 2$ SI RIFERISCE AL CAMPO DELL'ELETTRONE E A QUELLO DEL MUONE.

RICAVARE LE REGOLE DI FEYNMAN, DESCRIVERE I DIAGRAMMI AD ALBERO CHE SONO ALLA BASE DEI PROCESSI

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

$$e^+ e^- \rightarrow Z\gamma$$

SCRIVERE GLI ELEMENTI DI MATRICE S RIDOTTA PER ENTRAMBI I PROCESSI E CALCOLARE LA SEZIONE D'URTO NON POLARIZZATA PER IL PRIMO DEI DUE, NEL LIMITE DI ALTE ENERGIE (MASSE DEI FERMIONI TRASCURABILI).

SOL ABBIAMO LA LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \sum_{a=1}^2 \bar{\psi}^a (\not{\partial} - m_f) \psi^a + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 - \sum_{a=1}^2 g\phi\bar{\psi}^a\psi^a$$

LE REGOLE DI FEYNMAN PER LA QED USUALE LE CONOSCIAMO, MA DOBBIAMO AGGIUNGERCI UN VERTICE TIPO YUKAWA CON IL CAMPO ϕ .

ABBIAMO LE LINEE INTERNE:

$$\text{wavy line with } p \text{ above it} : \frac{i \eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \quad (\xi = 1)$$

$$\text{dashed line with } p \text{ above it} : \frac{i}{p^2 + M^2 + i\epsilon}$$

$$\text{solid line with arrow and } p \text{ above it} : (\not{p} - m_4)^{-1}$$

ALLE GAMBE ESTERNE CI ASSOCIAMO LE POLARIZZAZIONI DI FERMIONI:

$u(p), \bar{u}(p) \rightarrow$ FERMIONE ENTRANTE, USCENTE

$\bar{v}(p), v(p) \rightarrow$ ANTI-FERMIONE ENTRANTE, USCENTE

AGLI SCALARI ASSOCIAMO SEMPRE $\phi \sim 1$ E AI FOTONI:

$\epsilon_\mu^*(\lambda, k), \epsilon_\mu(\lambda, k) \rightarrow$ FOTONE ENTRANTE, USCENTE.

AI VERTICI ASSOCIAMO:

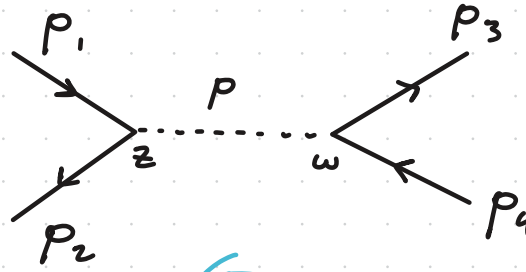
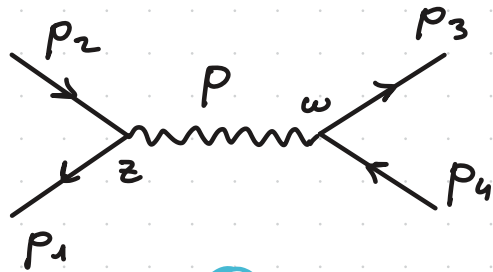
$$\text{fermion-fermion-photon vertex} = -ie\gamma^\mu$$

$$\text{fermion-fermion-scalar vertex} = -ig$$

PER IL PROCESSO
POSSIBILI SONO

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$$

DIAGRAMMI



ENTRAMBI CANALI S ($p = p_1 + p_2$) POICHÈ LE PARTICELLE SONO
DISTINGUIBILI.

LE MATRICI S RIDOTTE SONO:

$$M_{s1} = \frac{i(-ie)^2}{p^2 + i\epsilon} (\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)) \eta_{\mu\nu} (\bar{u}(p_3) \gamma^\nu v(p_4))$$

$$M_{s2} = \frac{i(-ig)^2}{p^2 + M^2 + i\epsilon} (\bar{v}(p_2) u(p_1)) (\bar{u}(p_3) v(p_4))$$

POSSIAMO VEDERE SE C'È UN SEGNO RELATIVO. LE FUNZIONI
DI CORRELAZIONE SONO:

$$s1 : \langle 0 | T [\bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_4) \psi(x_3) (-ie\gamma^\mu) \int d^4z A_\mu(z) \bar{\psi}(z) \psi(z) (-ie\gamma^\nu) \int d^4w A_\nu(w) \bar{\psi}(w) \psi(w)] | 0 \rangle$$

METTENDO I CAMPI NELL'ORDINE CORRETTO, IN MODO DA AVERE
PROPAGATORI $(\bar{\psi}\psi)$:

$$\mathcal{M}_{s_1} \rightarrow +1$$

ANALOGAMENTE:

$$s_2: \langle 0 | T \left[\bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) (-ig) \int d^4z \phi(z) \bar{\psi}(z) \psi(z) (-ig) \int d^4\omega \phi(\omega) \bar{\psi}(\omega) \psi(\omega) \right] | 0 \rangle$$

DUNQUE:

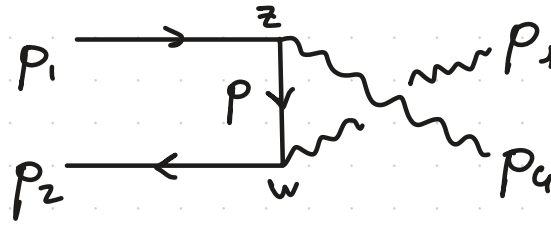
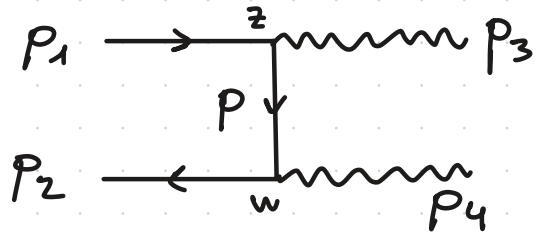
$$\mathcal{M}_{s_2} \rightarrow +1$$

L'AMPIEZZA TOTALE NON POLARIZZATA È DUNQUE:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_s \left\{ |\mathcal{M}_{s_1}|^2 + |\mathcal{M}_{s_2}|^2 + 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_{s_1}^\dagger \mathcal{M}_{s_2} \right\}$$

IL PROCESSO $e^+ e^- \rightarrow 2\gamma$

HA I DIAGRAMMI:



OSSIA I CANALI t ($p = p_1 - p_3$) ED u ($p = p_1 - p_4$).

I QUALI, COME DIFFERENTI CONTRAZIONI HANNO SOLO TERMINI CHE COINVOLGONO CAMP. FOTONICI, DUNQUE COMMUTANTI E QUINDI SENZA SEGNO RELATIVO.

LE AMPIEZZE SONO:

$$\mathcal{M}_t = \frac{i(-ie)^2}{(p_1 - p_3)^2 - m_4^2} \left(\bar{v}(p_2) \gamma^\mu \epsilon_\mu^{\lambda_4}(p_4) (\not{p}_t + m_4) \gamma^\nu \epsilon_\nu^{\lambda_3}(p_3) u(p_1) \right)$$

$$\mathcal{M}_u = \frac{i(-ie)^2}{(p_1 - p_4)^2 - m_4^2} \left(\bar{v}(p_2) \gamma^\mu \epsilon_\mu^{\lambda_3}(p_3) (\not{p}_u + m_4) \gamma^\nu \epsilon_\nu^{\lambda_4}(p_4) u(p_1) \right)$$

TORNANDO AL PRIMO DIAGRAMMA CALCOLIAMO I VARI PEZZI DI $|M|^2$:

$$\frac{1}{4} |M_{s_1}|^2 = \frac{e^4}{4s^2} \int_s \left(\bar{v}_\alpha(p_2) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} u_\beta(p_1) \right) \left(\bar{u}_\delta(p_3) (\gamma_\mu)_{\delta\gamma} v_\gamma(p_4) \right) \times \\ \times \left(\bar{u}_\tau(p_1) (\gamma^\rho)_{\tau\varepsilon} v_\varepsilon(p_2) \right) \left(\bar{v}_\kappa(p_4) (\gamma_\rho)_{\kappa\omega} u_\omega(p_3) \right)$$

NEL LIMITE DI ALTE ENERGIE TRASCURIAMO SOLO LA MASSA DI e : $m_\mu \sim 200 m_e$

$$\sim \frac{e^4}{4s^2} (p_1)_\beta \tau (\gamma^\rho)_{\tau\varepsilon} (p_2)_\varepsilon \alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \times (p_4 - m_\mu)_\gamma \kappa (\gamma_\rho)_{\kappa\omega} (p_3 + m_\mu)_\omega \delta (\gamma_\mu)_{\delta\gamma} \\ = \frac{e^4}{4s^2} (p_1)_\alpha (p_2)_\beta \text{Tr} \{ \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta \gamma^\mu \} \text{Tr} \{ (p_4 - m) \gamma_\rho (p_3 + m) \gamma_\mu \} \\ = \frac{e^4}{4s^2} (p_1)_\alpha (p_2)_\beta 4 \left[\eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\mu} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\rho\mu} + \eta^{\alpha\mu} \eta^{\rho\beta} \right] \times \\ \times \text{Tr} \left\{ p_4 \gamma_\rho p_3 \gamma_\mu + p_4 \gamma_\rho m \gamma_\mu - m \gamma_\rho p_3 \gamma_\mu - m^2 \gamma_\rho \gamma_\mu \right\} \\ = \frac{e^4}{4s^2} \dots \times \left[(p_4)^\varepsilon (p_3)^\tau \text{Tr} \{ \gamma_\varepsilon \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\mu \} - m^2 \text{Tr} \{ \gamma_\rho \gamma_\mu \} \right] \\ = \frac{e^4}{4s^2} \dots \times \left\{ 4 (p_4)^\varepsilon (p_3)^\tau \left[\eta_{\varepsilon\rho} \eta_{\tau\mu} - \eta_{\varepsilon\tau} \eta_{\rho\mu} + \eta_{\varepsilon\mu} \eta_{\rho\tau} \right] - 4 m^2 \eta_{\rho\mu} \right\}$$

$$= \frac{4e^4}{s^2} \left\{ (p_1)_\alpha (p_2)_\beta (p_3)^\tau (p_4)^\varepsilon \left[\eta^{\alpha\beta} \eta^{\beta\mu} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\beta\mu} + \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\beta} \right] \left[\eta_{\varepsilon\beta} \eta_{\tau\mu} - \eta_{\varepsilon\tau} \eta_{\beta\mu} + \eta_{\varepsilon\mu} \eta_{\beta\tau} \right] + \right. \\ \left. - m^2 (p_1)_\alpha (p_2)_\beta \left[\eta^{\alpha\beta} \eta^{\beta\mu} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\beta\mu} + \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\beta} \right] \eta_{\beta\mu} \right\}$$

$$= \frac{4e^4}{s^2} \left\{ (p_1)_\alpha (p_2)_\beta (p_3)^\tau (p_4)^\varepsilon \left[2\eta^\alpha_\varepsilon \eta^\beta_\tau + 2\eta^\alpha_\tau \eta^\beta_\varepsilon \right] + m^2 (p_1)_\alpha (p_2)_\beta 2\eta^{\alpha\beta} \right\}$$

$$= \frac{4e^4}{s^2} \left\{ 2 \left[(p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_3)(p_2 p_4) + m^2 (p_1 p_2) \right] \right\}$$

$$= \frac{8e^4}{s^2} \left[(p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_3)(p_2 p_4) + m^2 (p_1 p_2) \right]$$

$$\frac{1}{4} |\mathcal{M}_{s_2}|^2 = \frac{g^4}{4s^2} \frac{1}{s} \left(\bar{v}_\alpha(p_2) u_\alpha(p_1) \right) \left(\bar{u}_\beta(p_3) v_\beta(p_4) \right) \times \\ \times \left(\bar{u}_\delta(p_1) v_\delta(p_2) \right) \left(\bar{v}_\gamma(p_4) u_\gamma(p_3) \right)$$

$$\sim \frac{g^4}{4s^2} (\not{p}_1)_{\alpha\delta} (\not{p}_2)_{\delta\alpha} (\not{p}_4 - m_\mu)_{\beta\gamma} (\not{p}_3 + m_\mu)_{\gamma\beta}$$

$$= \frac{g^4}{4s^2} \text{Tr}\{\not{p}_1 \not{p}_2\} \text{Tr}\{(\not{p}_4 - m)(\not{p}_3 + m)\}$$

$$= \frac{g^4}{s^2} (p_1 p_2) \text{Tr}\{\not{p}_4 \not{p}_3 - m^2 \mathbb{1}\}$$

$$= \frac{g^4}{s^2} (p_1 p_2) \left[4(p_3 p_4) - 4m^2 \right]$$

$$= \frac{4g^4}{s^2} \left[(p_1 p_2)(p_3 p_4) - m^2(p_1 p_2) \right]$$

~ TERME DI INTERFERENZA:

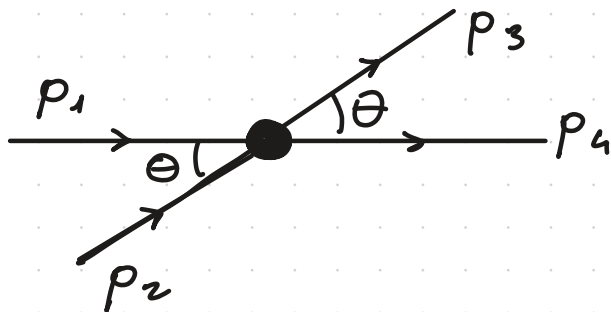
$$\frac{1}{4} \square M_{s_1}^\dagger M_{s_2} = \frac{e^2 g^2}{4 s^2} \square (\bar{u}_\alpha(p_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} v_\beta(p_2)) (\bar{v}_\gamma(p_4) (\gamma_\mu)_{\gamma\delta} u_\delta(p_3)) \times \\ (\bar{v}_\varepsilon(p_2) u_\varepsilon(p_1)) (\bar{u}_\kappa(p_3) v_\kappa(p_4))$$

$$\sim \frac{e^2 g^2}{4 s^2} (\not{p}_2)_\beta \varepsilon (\not{p}_1)_\varepsilon \alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\not{p}_3 + m)_\delta \kappa (\not{p}_4 - m)_\kappa \gamma (\gamma_\mu)_{\gamma\delta}$$

$$= \frac{e^4 g^2}{4 s^2} \underbrace{\text{Tr} \{ \not{p}_2 \not{p}_1 \gamma^\mu \}}_{=0} \text{Tr} \{ (\not{p}_3 + m) (\not{p}_4 - m) \gamma_\mu \}$$

=0

MA PER CALCOLARE LA SEZIONE D'URTO NEL SR DEL CM DOBBIAMO USARE:



$$p_1 = (E, E \hat{z})$$

$$p_2 = (E, -E \hat{z})$$

$$p_3 = (E, \vec{p})$$

$$p_4 = (E, -\vec{p})$$

$$\begin{cases} m_e \sim 0 \\ m_\mu \equiv m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \\ \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{CON } \vec{p} \cdot \hat{z} = |\vec{p}| \cos \theta = \sqrt{E^2 - m^2} \cos \theta$$

PER CUI:

$$(p_1 p_2) = E^2 + E^2 = 2E^2 \quad \longrightarrow \quad (p_1 p_2) = \frac{s}{2} \Rightarrow s = 2(p_1 p_2)$$

$$(p_1 p_3) = E^2 - E\sqrt{E^2 - m^2} \cos \theta$$

$$(p_1 p_4) = E^2 + E\sqrt{E^2 - m^2} \cos \theta$$

$$(p_2 p_3) = E^2 + E\sqrt{E^2 - m^2} \cos \theta$$

$$(p_2 p_4) = E^2 - E\sqrt{E^2 - m^2} \cos \theta$$

$$(p_3 p_4) = E^2 + |\vec{p}|^2 = E^2 + E^2 - m^2 = 2E^2 - m^2$$

E DESCRIVIAMO L'AMPIEZZA COME:

$$|M|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left[(p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_3)(p_2 p_4) + m^2(p_1 p_2) \right] +$$

$$+ \frac{4g^4}{s^2} \left[(p_1 p_2)(p_3 p_4) - m^2(p_1 p_2) \right]$$

$$= \frac{8e^4}{(4E^2)^2} \left[(E^2 + E\sqrt{E^2 - m^2} \cos \theta)^2 + (E^2 - E\sqrt{E^2 - m^2} \cos \theta)^2 + 2m^2 E^2 \right] +$$

$$+ \frac{4g^4}{(4E^2)^2} \left[2E^2 (2E^2 - m^2) - 2m^2 E^2 \right]$$

$$= \frac{e^4}{2E^4} \left[\left(E^2 + E^2 \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \cos\theta \right)^2 + \left(E^2 - E^2 \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \cos\theta \right)^2 + 2m^2 E^2 \right] +$$

$$+ \frac{g^4}{4E^4} \left[4E^4 - 2m^2 E^2 - 2m^2 E^2 \right]$$

$$= \frac{e^4}{2} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \cos\theta \right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \cos\theta \right)^2 + 2 \frac{m^2}{E^2} \right] + g^4 \left[1 - \frac{m^2}{E^2} \right]$$

$$= \frac{e^4}{2} \left[2 + 2 \left(1 - \frac{m^2}{E^2} \right) \cos^2\theta + 2 \frac{m^2}{E^2} \right] + g^4 \left[1 - \frac{m^2}{E^2} \right]$$

$$= e^4 \left[1 + \left(1 - \frac{m^2}{E^2} \right) \cos^2\theta + \frac{m^2}{E^2} \right] + g^4 \left[1 - \frac{m^2}{E^2} \right]$$

NOTA RISPETTO LO SCATTERING $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ NELLA QED USUALE
 SI AGGIUNGE SOLO IL TERMINE COSTANTE g^4 .

LA SEZIONE D'URTO LA TROVIAMO A PARTIRE DA

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E^2} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|}$$

DUNQUE

$$\sigma_{\text{cm}} = \frac{1}{64\pi^2 \cdot E^2} \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{E} \int d\Omega |\mathcal{M}|^2$$

$$= \frac{1}{64\pi^2 \cdot E^2} \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \int d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \left\{ e^4 \left[1 + \left(1 - \frac{m^2}{E^2} \right) \cos^2\theta + \frac{m^2}{E^2} \right] + g^4 \left[1 - \frac{m^2}{E^2} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{64\pi^2 \cdot E^2} \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \cdot 2\pi \left\{ e^4 \left[2 + \left(1 - \frac{m^2}{E^2} \right) \frac{2}{3} + 2 \frac{m^2}{E^2} \right] + 2g^4 \left[1 - \frac{m^2}{E^2} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{16\pi E^2} \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \left\{ e^4 \left[\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \frac{m^2}{E^2} \right] + g^4 \left[1 - \frac{m^2}{E^2} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{16\pi E^2} \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \left\{ \frac{4}{3} e^4 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{E^2} \right] + g^4 \left[1 - \frac{m^2}{E^2} \right] \right\}$$

SI PUO' NOTARE CHE SE $g \rightarrow 0$, DUNQUE SI SPEGNE
L'INTERAZIONE CON IL CAMPO SCALARE, OTTENIAMO IL RISULTATO
STANDARD DELLA QED (OVIAMENTE).

→ VEDI NOTE CHIARITTO
DI ESERCIZI.

VEDENDO IL LIMITE DI ALTE ENERGIE, IN CUI TRASCURIAMO
ANCHE LA MASSA DEL MUONE, ABBIAMO

$$\sigma_{cm} = \frac{1}{16\pi E^2} \left\{ \frac{4}{3} e^4 + g^4 \right\}.$$

PROBLEMA 2

SI CONSIDERI UNA TEORIA DI YANG-MILLS CON GRUPPO DI SIMMETRIA LOCALE $G = SU(5)$, ACCOPPIATA MINIMALMENTE AD UN CAMPO SCALARE Σ NELLA RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA DI G E AD UN CAMPO FERMIONICO MASSIVO ψ (RAPPRESENTATO DA UN CAMPO DI DIRAC) NELLA RAPPRESENTAZIONE FONDAMENTALE.

SCRIVERE LA LAGRANGIANA PER QUESTO MODELLO, COMPRESO UN GENERICO POTENZIALE $V(\Sigma)$ PER IL CAMPO SCALARE, CONTENENTE TERMINI FINO ALL'ORDINE QUARTICO IN Σ , ED EVENTUALI ACCOPPIAMENTI TRA IL CAMPO SCALARE E IL CAMPO FERMIONICO.

ASSUMENDO CHE IL POTENZIALE AMMETTA L'ESISTENZA DI UN VUOTO CON:

$$\langle \Sigma \rangle = v \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3)$$

DETERMINARE IL GRUPPO DI SIMMETRIA FINALE (QUELLO PRESERVATO DAL VUOTO).

SOL ABBIAMO:

$$\begin{aligned} \Sigma &\rightarrow U \Sigma U^\dagger, & U &\in SU(5) \\ \psi &\rightarrow U \psi & (\bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} U^\dagger) \end{aligned}$$

COMINCIAMO A SCRIVERE LA LAGRANGIANA, POI CI PREOCCUPIAMO DELL'ACCOPPIAMENTO.

IL CAMPO SCALARE È UN VETTORE DI 24 ELEMENTI (O MATRICE 5×5) E PER COSTRUIRE I TERMINI CINETICI E DI MASSA CI ISPIRIAMO AL CAMPO DI MAXWELL.

DOBBIAMO UTILIZZARE LA TRACCIA:

CINETICO: $\text{Tr} \{ \partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma \}$

MASSA : $m^2 \text{Tr}\{\Sigma^2\}$

IL CAMPO SPINORIALE LO CONOSCIAMO : $\bar{\Psi}(\not{\partial} - m)\Psi$.

I TERMINI DI INTERAZIONE CHE POSSIAMO METTERE SONO DEL TIPO $\lambda\phi^4$ O YUKAWA.

→ CI CONCENTRIAMO SU TERMINI DI INTERAZIONE CON COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO ADIMENSIONALE

TIPO $\lambda\phi^4$: $\lambda_1 \text{Tr}\{\Sigma^4\}$; $\lambda_2 (\text{Tr}\{\Sigma^2\})^2$

$[\Sigma] = L^{-1} \rightarrow \Sigma^4 = L^{-4}$, $[\lambda_1] = [\lambda_2] = 0$

TIPO YUKAWA : $g \bar{\Psi} \Sigma \Psi$

$[\Psi] = L^{-3/2} \Rightarrow [\bar{\Psi} \Sigma \Psi] = L^{-4}$; $[g] = 0$

DUNQUE LA LAGRANGIANA È :

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(\not{\partial} - m)\Psi + \text{Tr}\{\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma\} - M^2 \text{Tr}\{\Sigma^2\} - \lambda_1 \text{Tr}\{\Sigma^4\} - \lambda_2 (\text{Tr}\{\Sigma^2\})^2 - g \bar{\Psi} \Sigma \Psi$$

IN CUI ABBIAMO SCELTO:

$$V(\Sigma) = M^2 \text{Tr}\{\Sigma^2\} + \lambda_1 \text{Tr}\{\Sigma^4\} + \lambda_2 (\text{Tr}\{\Sigma^2\})^2 + g \bar{\Psi} \Sigma \Psi$$

PER UNA GENERICA TRASFORMAZIONE $U = e^{+i\omega}$, $\omega = \omega^A T^A$
ABBIAMO

$$\Sigma \rightarrow U \Sigma U^\dagger \sim (1 + i\omega) \Sigma (1 - i\omega)$$

$$= \Sigma + i\omega \Sigma - i\Sigma \omega$$

$$= \Sigma + i\omega^A [T^A, \Sigma]$$

ALLORA

$$\delta \Sigma = i\omega^A [T^A, \Sigma]$$

DUNQUE LA DERIVATA COVARIANTE È:

$$D_\mu \Sigma = \partial_\mu \Sigma - ig^1 A_\mu^A [T^A, \Sigma].$$

POSSIAMO ASSUMERE $V(\Sigma)$ ABBIÀ VUOTO:

$$\langle \Sigma \rangle = v \operatorname{diag}(2, 2, 2, -3, -3)$$

$$= v \begin{pmatrix} 2 \mathbb{1}_{3 \times 3} & \mathbb{O}_{3 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 3} & -3 \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

INDICHIAMO CON T^A I GENERATORI DI $SU(5)$, CHE POSSIAMO SCRIVERE A BLOCCHI:

$$T^A = \begin{pmatrix} A^A_{3 \times 3} & C^A_{3 \times 2} \\ D^A_{2 \times 3} & B^A_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

CHE DOVENDO ESSERE HERMITIANA ABBIAMO

$$A, B \text{ HERMITIANE} \\ C = D^\dagger.$$

E PER TROVARE IL GRUPPO RESIDUO DOBBIAMO TROVARE I GENERATORI (NON ROTTI) TAL CHE:

$$\delta \langle \Sigma \rangle = 0.$$

DUNQUE DOBBIAMO RICHIEDERE

$$\delta \langle \Sigma \rangle = 0 \Rightarrow [T^A, \langle \Sigma \rangle] = 0$$

CALCOLIAMO

$$\begin{aligned} [T^A, Z] &= \begin{pmatrix} A & C \\ C^\dagger & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ C^\dagger & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2A & -3C \\ 2C^\dagger & -3B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2A & 2C \\ -3C^\dagger & -3B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -5C \\ 5C^\dagger & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$[T^A, Z] = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

DUNQUE

$$T^A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

E RICHIEDENDO $\text{Tr}\{T^A\} = 0$ (ESSENDO IN $SU(5)$):

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Tr}\{A\} = \text{Tr}\{B\} = 0 \\ \text{Tr}\{A\} = -\text{Tr}\{B\} \end{cases}$$

A^a SONO 9 MATRICI 3×3 HERMITIANE, MENTRE B^a 4 2×2 HERMITIANE.
POSSIAMO METTERCI IN UNA BASE, PER CIASCUNA A^a, B^a IN
CUI 1 DI ESSE È PROPORZIONALE ALL'IDENTITÀ ($\text{Tr} \neq 0$), MENTRE
LE ALTRE (RISPETTIVAMENTE 8 E 3) SONO A $\text{Tr} = 0$.

SE $\text{Tr} A^a = \text{Tr} B^a = 0$ ALLORA ABBIAMO

$$A^a \in \text{SU}(3), \quad B^a \in \text{SU}(2).$$

SE $\text{Tr} A^a = -\text{Tr} B^a$ ALLORA ABBIAMO SOLO IL GRUPPO UNITODUALE
 $\text{U}(1)$.

$$\Rightarrow \text{GRUPPO RESIDUO} \quad \text{U}(1) \times \text{SU}(2) \times \text{SU}(3)$$

2024 01 29

PROBLEMA 1. DESCRIVERE LA LAGRANGIANA, LE SIMEETRIE, E LE REGOLE DI FEYNMAN PER L'ELETTRODINAMICA QUANTISTICA (QED).
CALCOLARE LA SEZIONE D'URTO PER IL PROCESSO (AD ALBERO):

$$e^- e^- \rightarrow e^- e^-$$

SOL. SI HA LA LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - ie\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$$

CON GRUPPO DI GAUGE (ASSOCIATO AL CAMPO MASSLESS A_μ): $U(1)$.

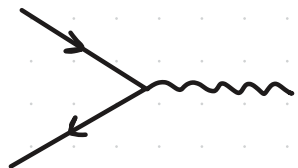
SI HANNO LE REGOLE (NELLO SPAZIO DEI MOMENTI):

⊕ LINEE INTERNE (PROPAGATORI):

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2} \quad (\xi = 1)$$

$$S_{\alpha\beta}(p) = \frac{i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2}$$

⊕ VERTICE


$$= -ie\gamma^\mu$$

⊕ LINEE ESTERNE (PER S RIMOTTA):

$$\ell_{in} \sim u(p)$$

$$\ell_{out} \sim \bar{u}(p)$$

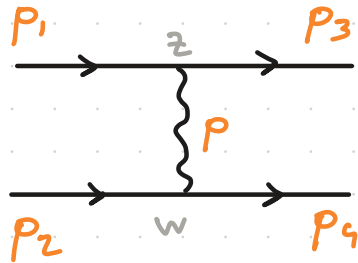
$$\gamma_{in} \sim E_{\mu}^{(\lambda)*}$$

$$\bar{\ell}_{in} \sim \bar{v}(p)$$

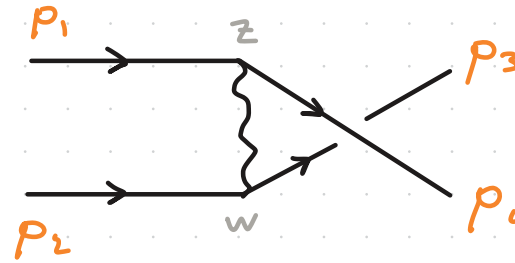
$$\bar{\ell}_{out} \sim v(p)$$

$$\gamma_{out} \sim E_{\mu}^{(\lambda)}$$

PER IL PROCESSO $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ SI HANNO I DIAGRAMMI



CANALE t : $p = p_1 - p_3$



CANALE μ : $p = p_1 - p_4$

IL SEGNO RELATIVO SI VEDE DA:

$$t: \langle 0 | T [\bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_4) \psi(x_3) \dots \bar{\psi}(z) \Delta_{\mu}(z) \psi(z) \dots \bar{\psi}(w) \Delta_{\nu}(w) \psi(w)] | 0 \rangle$$

$$\mu: \langle 0 | T [\bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_4) \psi(x_3) \dots \bar{\psi}(z) \Delta_{\mu}(z) \psi(z) \dots \bar{\psi}(w) \Delta_{\nu}(w) \psi(w)] | 0 \rangle$$

CON IL TEOREMA DI WICK SI VEDE CHE C'È SEGNO RELATIVO.
CALCOLIAMO QUINDI:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum \left\{ |\mathcal{M}_t|^2 + |\mathcal{M}_u|^2 - 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_t^\dagger \mathcal{M}_u \right\}$$

con $\mathcal{M}_t = \frac{-i}{p_t^2} (\bar{u}(p_3) (-ie\gamma^\mu) u(p_1)) (\eta_{\mu\nu}) (\bar{u}(p_4) (-ie\gamma^\nu) u(p_2))$

$$\mathcal{M}_u = \frac{-i}{p_u^2} (\bar{u}(p_4) (-ie\gamma^\mu) u(p_1)) (\eta_{\mu\nu}) (\bar{u}(p_3) (-ie\gamma^\nu) u(p_2))$$

TRA $|\mathcal{M}_t|^2$ E $|\mathcal{M}_u|^2$ CAMBIERÀ SOLTANTO $\mu \leftrightarrow t$ E $3 \leftrightarrow 4$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}_t|^2 &= \frac{e^4}{4t^2} \sum (\bar{u}_\alpha(p_3) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} u_\beta(p_1)) (\bar{u}_\gamma(p_4) (\gamma_\mu)_{\gamma\delta} u_\delta(p_2)) \times \\ &\quad \times (u_\varepsilon(p_1) (\gamma^\nu)_{\varepsilon\tau} u_\tau(p_3)) (\bar{u}_\delta(p_2) (\gamma_\nu)_{\delta\delta} u_\delta(p_4)) \end{aligned}$$

$$= \frac{e^4}{4t^2} (p_1)_\beta \varepsilon (\gamma^\nu)_{\varepsilon\tau} (p_3)_\tau \alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (p_2)_\delta \delta (\gamma_\nu)_{\delta\delta} (p_4)_\delta \gamma (\gamma_\mu)_{\gamma\delta}$$

$$= \frac{e^4}{4t^2} (p_1)_\alpha (p_3)_\beta (p_2)^\delta (p_4)^\gamma 4 [\eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\nu\mu} + \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu}] 4 [\eta_{\delta\nu} \eta_{\gamma\mu} - \eta_{\delta\gamma} \eta_{\nu\mu} + \eta_{\delta\mu} \eta_{\gamma\nu}]$$

$$= \frac{4e^4}{t^2} (p_1)_\alpha (p_3)_\beta (p_2)^\delta (p_4)^\gamma [2\eta^\alpha_\delta \eta^\beta_\gamma + 2\eta^\alpha_\gamma \eta^\beta_\delta]$$

$$= \frac{8e^4}{t^2} \left[(p_1 p_2)(p_3 p_4) + (p_1 p_4)(p_2 p_3) \right]$$

SE FACCIAMO $t \leftrightarrow u$ E $p_3 \leftrightarrow p_4$ ALLORA ABBIAMO

$$\frac{1}{4} \Sigma \left\{ |\mathcal{M}_t|^2 + |\mathcal{M}_u|^2 \right\} = 8e^4 \left\{ \frac{1}{t^2} \left[(p_1 p_2)(p_3 p_4) + (p_1 p_4)(p_2 p_3) \right] + \frac{1}{u^2} \left[(p_1 p_2)(p_3 p_4) + (p_1 p_3)(p_2 p_4) \right] \right\}$$

$$= 8e^4 \left\{ \frac{s^2 + u^2}{4t^2} + \frac{s^2 + t^2}{4u^2} \right\}$$

$$= 2e^4 \left\{ \frac{s^2 u^2 + u^4 + s^2 t^2 + t^4}{u^2 t^2} \right\}$$

$$= 2e^4 \frac{u^4 + t^4 + s^2(u^2 + t^2)}{u^2 t^2}$$

IL TERMINE MISTO:

$$\frac{1}{4} \Sigma \mathcal{M}_t^\dagger \mathcal{M}_u = \frac{e^4}{4ut} \Sigma \left(\bar{u}_\alpha(p_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} u_\beta(p_3) \right) \left(\bar{u}_\gamma(p_2) (\gamma_\mu)_{\gamma\delta} u_\delta(p_4) \right) \times \\ \times \left(\bar{u}_\varepsilon(p_4) (\gamma^\nu)_{\varepsilon\tau} u_\tau(p_1) \right) \left(\bar{u}_\vartheta(p_3) (\gamma_\nu)_{\vartheta\sigma} u_\sigma(p_2) \right)$$

$$= \frac{e^4}{4ut} (p_1)_{\tau\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (p_3)_{\beta\delta} (\gamma_\nu)_{\delta\sigma} (p_2)_{\sigma\gamma} (\gamma_\mu)_{\gamma\delta} (p_4)_{\delta\varepsilon} (\gamma^\nu)_{\varepsilon\tau}$$

$$= \frac{e^4}{4\mu t} (p_1)^\alpha (p_3)^\beta (p_2)_\delta (p_4)_\gamma \text{Tr} \{ \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma^\delta \gamma_\mu \gamma^\gamma \gamma^\nu \}$$

$$= \frac{e^4}{4\mu t} (p_1)^\alpha (p_3)^\beta (p_2)_\delta (p_4)_\gamma (-32) \eta_{\beta}{}^\gamma \eta_{\alpha}{}^\delta$$

$$= \frac{e^4}{4\mu t} (-32) (p_1 p_2) (p_3 p_4)$$

$$= -\frac{8e^4}{\mu t} (p_1 p_2) (p_3 p_4)$$

$$= -\frac{2e^4}{\mu t} s^2$$

DONQUE

$$|\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \frac{\mu^4 + t^4 + s^2(\mu^2 + t^2)}{\mu^2 t^2} + \frac{4e^4 s^2}{\mu t}$$

$$= 2e^4 \left\{ \frac{\mu^4 + t^4 + s^2(\mu^2 + t^2) + 2\mu t s^2}{\mu^2 t^2} \right\}$$

$$= 2e^4 \left\{ \frac{\mu^4 + t^4 + s^2(\mu^2 + t^2 + 2\mu t)}{\mu^2 t^2} \right\}$$

$$= 2e^4 \frac{u^4 + t^4 + s^2(u+t)^2}{u^2 t^2}$$

$$= 2e^4 \frac{s^4 + t^4 + u^4}{u^2 t^2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{cm} = \frac{2e^4}{64\pi^2 s} \frac{s^4 + t^4 + u^4}{u^2 t^2}$$

PROBLEMA 2. SI CONSIDERI UNA TEORIA DI CAMPO CON I SEGUENTI INGREDIENTI: UNO SPINORE DI DIRAC $\psi(x)$ CHE POSSIAMO DIVIDERE NELLE SUE COMPONENTI SINISTRE E DESTRE:

$$L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi$$

$$R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$$

UNO SCALARE COMPLESSO $\phi(x)$, E UN VETTORE REALE A MASSA NULLA $A_\mu(x)$. SI ASSUMA CHE IL MODELLO SIA INVARIANTE RISPETTO ALLE TRASFORMAZIONI DI GAUGE ABELIANE:

$$L \rightarrow e^{ie\theta} L$$

$$R \rightarrow e^{-ie\theta} R$$

$$\phi \rightarrow e^{ie\theta} \phi$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta$$

1. SCRIVERE LA PIÙ GENERALE LAGRANGIANA GAUGE INVARIANTE CHE CONTENGA TERMINI DI DIMENSIONE AL PIÙ UGUALE A QUATTRO.
2. A QUALE CORRENTI SI ACCOPPIA IL CAMPO DI GAUGE A_μ ?
3. ASSUMERE CHE IL TERMINE DI MASSA PER IL CAMPO SCALARE ABBA IL SEGNO "SBAGLIATO" E DISCUTERE LA ROTTURA SPONTANEA DELLA SIMEETRIA. TROVARE LO SPETTRO DI MASSA IN QUESTA FASE DELLA TEORIA.
4. AGGIUNGENDO ALLA LAGRANGIANA IL TERMINE DI GAUGE-FIXING $\frac{1}{2}G^2$ CON $G = \partial^\mu A_\mu - e v \chi$, CALCOLARE I PROPAGATORI DEI CAMPI BOSONICI E VERIFICARE CHE IL PROPAGATORE DELLO SCALARE χ E IL COEFFICIENTE DEL TERMINE $k_\mu k_\nu$ NEL PROPAGATORE DI A_μ SONO SINGOLARI PER LO STESSO VALORE DI k^2 . (PER QUESTO PUNTO SCRIVERE IL CAMPO SCALARE COMPLESSO COME $\phi(x) = v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(x) + i\chi(x))$ CON φ E χ REALI).

SOL. DALLE TRASFORMAZIONI DI GAUGE VEDIAMO:

L	CARICA	$+1$
R	"	-1
ϕ	"	$+2$

E PER TRASFORMAZIONI INFINITESIME

$$\begin{aligned}\delta L &= i e \theta L \\ \delta R &= -i e \theta R \\ \delta \phi &= 2 i e \theta \phi\end{aligned}$$

POSSIAMO SCRIVERE LE DERIVATE COVARIANTI

$$\mathcal{L}_K = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + i L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L + i R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu R$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \delta \mathcal{L}_K &= \partial_\mu (2 i e \theta \phi)^\dagger \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu (2 i e \theta \phi) + \\ &+ i (i e \theta L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L + i L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu (i e \theta L) + \\ &+ i (-i e \theta R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu R + i R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu (-i e \theta R) \\ &= -2 i e \partial_\mu \theta \phi^\dagger \partial^\mu \phi - 2 i e \theta \cancel{\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi} + \\ &+ 2 i e \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \theta \phi + 2 i e \theta \cancel{\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi} -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e \cancel{\Theta L^\dagger \bar{\sigma}^\mu} \partial_\mu L + \\
& - e L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Theta L - e \cancel{\Theta L^\dagger \bar{\sigma}^\mu} \partial_\mu L + \\
& - e \cancel{\Theta R^\dagger \sigma^\mu} \partial_\mu R - \\
& + e R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \Theta R + e \cancel{\Theta R^\dagger \sigma^\mu} \partial_\mu R \\
& = 2i e \partial_\mu \Theta (-\phi^\dagger \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi^\dagger \phi) + \\
& + i e \partial_\mu \Theta (i L^\dagger \bar{\sigma}^\mu L - i R^\dagger \sigma^\mu R)
\end{aligned}$$

SE

RISCRIVO

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_\kappa &= \mathcal{L}_\kappa - A_\mu (2i e \partial_\mu \phi^\dagger \cdot \phi - 2i e \phi^\dagger \partial_\mu \phi + \\
& \quad - e L^\dagger \bar{\sigma}^\mu L + e R^\dagger \sigma^\mu R) \\
&= \mathcal{L}_\kappa + \mathcal{L}_A
\end{aligned}$$

$$\text{così } \mathcal{L}_A \rightarrow \mathcal{L}'_A = A_\mu (\dots) + \partial_\mu \Theta (2i e \partial^\mu \phi^\dagger \phi - 2i e \phi^\dagger \partial^\mu \phi - e L^\dagger \bar{\sigma}^\mu L + e R^\dagger \sigma^\mu R)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Theta$$

$$\text{così: } \tilde{\mathcal{L}}_K \rightarrow \mathcal{L}_K + \delta \mathcal{L}_K - A_\mu(\dots) - \underbrace{\partial_\mu \Theta(\dots)}_{\delta \mathcal{L}_K} = \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_A = \tilde{\mathcal{L}}_K$$

DUNQUE:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + i L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L + i R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu R - \\ &\quad - A_\mu (2ie \partial_\mu \phi^\dagger \cdot \phi - 2ie \phi^\dagger \partial_\mu \phi - e L^\dagger \bar{\sigma}^\mu L + e R^\dagger \sigma^\mu R) \\ &= (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) + i L^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu L + i R^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu R \end{aligned}$$

$$\text{con } \mathcal{D}_\mu \phi = (\partial_\mu - 2ie A_\mu) \phi$$

$$\mathcal{D}_\mu L = (\partial_\mu - ie A_\mu) L$$

$$\mathcal{D}_\mu R = (\partial_\mu + ie A_\mu) R$$

LE CORRENTI CON CUI SI ACCOPPIA A_μ SONO:

$$J_{\text{SCAL}}^\mu = -2e i (\partial^\mu \phi^\dagger \cdot \phi - \phi^\dagger \partial^\mu \phi) = +2e \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$$

$$J_{\text{FERM}}^\mu = ie (L^\dagger \bar{\sigma}^\mu L - R^\dagger \sigma^\mu R)$$

OSSERVAZIONE

PARTENDO
POTUTO

DALLE
SCRIVERE

CARICHE DEI
DIRETTAMENTE :

CARPI

SI SAREBBE

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ie A_\mu) \phi$$

$$D_\mu L = (\partial_\mu - ie A_\mu) L$$

$$D_\mu R = (\partial_\mu + ie A_\mu) R$$

E LE CORRENTI LE SI SAREBBERO POTUTE VEDERE DA:

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) &= (\partial_\mu \phi^\dagger + ie A_\mu \phi^\dagger) (\partial^\mu \phi - ie A^\mu \phi) \\ &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - ie A^\mu \partial_\mu \phi^\dagger \phi + ie A_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + \\ &\quad + 4e^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_\mu^\phi = -ie \partial_\mu \phi^\dagger \phi + ie \phi^\dagger \partial_\mu \phi = ie \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi$$

$$i L^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu L = i L^\dagger \bar{\sigma}^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) L \Rightarrow J_\mu^L = ie L^\dagger \bar{\sigma}^\mu L$$

$$i R^\dagger \sigma^\mu D_\mu R \rightarrow J_\mu^R = -ie R^\dagger \sigma^\mu R$$

C, MANCANO DEI TERMINI DI INTERAZIONE PER AVERE LA LAGRANGIANA PIÙ GENERICA POSSIBILE. IL TERMINE DI MASSA PER I FERMIONI SAREBBE:

$m(L^\dagger R + R^\dagger L)$ MA QUESTO TRASFORMA COME:

$$\rightarrow m(e^{-2ie\theta} L^\dagger R + e^{2ie\theta} R^\dagger L)$$

CI POSSIAMO AGGIUNGERE IL CAMPO ϕ PER RENDEROLO INVARIANTE!

$$\mathcal{L}_{int} \supset -\lambda_1 (L^\dagger \phi R + R^\dagger \phi^\dagger L)$$

CHE È DI TIPO YUKAWA E CON DIMENSIONE L^{-3} .

UN ALTRO TERMINE È DI TIPO $\lambda \phi^4$:

$$\mathcal{L}_{int} \supset -\lambda_2 (\phi^\dagger \phi)^2 \rightarrow [] = L^{-4}$$

E UN TERMINE MASSIVO PER ϕ :

$$\mathcal{L} \supset -\mu^2 \phi^\dagger \phi$$

DUNQUE ABBIAMO:

$$\mathcal{L}_{int} = -\mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda_1 (L^\dagger \phi R + R^\dagger \phi^\dagger L) - \frac{\lambda_2}{2} (\phi^\dagger \phi)^2$$

CON

$$V(\phi\phi^\dagger) = +\mu^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda_2}{2} (\phi^\dagger \phi)^2$$

SE

RIPARAMETRIZZIAMO IL

CAMPO

$$\phi = \rho e^{i\omega}$$

ALLORA

$$V(\rho) = +\mu^2 \rho^2 + \frac{\lambda_2}{2} \rho^4$$

CHE

NEL

CASO

IN

CUI

$$\mu^2 < 0$$

BISOGNA

RICERCARE

IL

VUOTO. ABBIAMO

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = 2\mu^2 \rho + 2\lambda_2 \rho^3 = 2\rho(\mu^2 + \lambda_2 \rho^2)$$

$$\Rightarrow V' = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda_2}} \end{cases}$$

MA

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = 2\mu^2 + 6\lambda_2 \rho^2$$

$$\Rightarrow V''(\rho=0) = 2\mu^2 < 0 \quad \Rightarrow \text{MASSIVO}$$

$$V''(\rho = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda_2}}) = -4\mu^2 > 0 \quad \Rightarrow \underline{\text{MINIMO}}$$

DUNQUE

$$\langle \rho \rangle = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda_2}}$$

C' CONVIENE ANCHE CALCOLARE:

$$V''' = 12\lambda_2 \rho \quad \Rightarrow V'''(\langle \rho \rangle) = 12\lambda_2 \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda_2}} = 12\sqrt{-\mu^2 \lambda_2}$$

$$V^{IV} = 12\lambda_2$$

MA SE NO CONTINUEREMMO QUELLI FERMIONICI
PEZZI CON $e^{i\omega}$ AD AVERE DEI

$$\tilde{L} = L e^{-i\frac{\omega}{2}} \\ L = \tilde{L} e^{+i\frac{\omega}{2}}$$

$$\tilde{R} = R e^{+i\frac{\omega}{2}} \\ R = \tilde{R} e^{-i\frac{\omega}{2}}$$

SE DESCRIVIAMO $\mathcal{L}$ CON $\phi = \rho e^{i\omega}$, $\tilde{L}$, $\tilde{R}$ ABBIAMO:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) + i L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L + i R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu R - \\ & - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda_1 (L^\dagger \phi R + R^\dagger \phi^\dagger L) - \frac{\lambda_2}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & [(\partial_\mu - 2ieA_\mu) \rho e^{i\omega}]^\dagger [(\partial_\mu - 2ieA_\mu) \rho e^{i\omega}] + \\ & + i \tilde{L}^\dagger e^{-i\frac{\omega}{2}} \bar{\sigma}^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) \tilde{L} e^{+i\frac{\omega}{2}} + \\ & + i \tilde{R}^\dagger e^{+i\frac{\omega}{2}} \sigma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \tilde{R} e^{-i\frac{\omega}{2}} - \end{aligned}$$

$$-\mu^2 \varphi^2 - \lambda_1 (\tilde{L}^\dagger e^{-i\omega/2} \varphi e^{i\omega} \tilde{R} e^{-i\omega/2} + \tilde{R}^\dagger e^{i\omega/2} \varphi e^{-i\omega} \tilde{L} e^{i\omega/2}) -$$

$$-\frac{\lambda_2}{2} \varphi^4$$

$$= \left[\partial_\mu \varphi \cdot e^{-i\omega} + i \varphi e^{i\omega} \partial_\mu \omega - 2 i e \varphi A_\mu e^{-i\omega} \right]^\dagger [\dots] +$$

$$+ i \tilde{L}^\dagger \bar{\sigma}^\mu (\partial_\mu - i e A_\mu) \tilde{L} + i \tilde{L}^\dagger e^{-i\omega/2} \bar{\sigma}^\mu \left(+ \frac{i}{2} \right) \partial_\mu \omega \tilde{L} e^{i\omega/2} +$$

$$+ i \tilde{R}^\dagger \sigma^\mu (\partial_\mu + i e A_\mu) \tilde{R} + i \tilde{R}^\dagger e^{i\omega/2} \sigma^\mu \left(-\frac{i}{2} \right) \partial_\mu \omega \tilde{R} e^{-i\omega/2} -$$

$$-\mu^2 \varphi^2 - \lambda_1 (\tilde{L}^\dagger \varphi \tilde{R} + \tilde{R}^\dagger \varphi \tilde{L}) - \frac{\lambda_2}{2} \varphi^4$$

$$= \left[(\partial_\mu \varphi - 2 i e \varphi (A_\mu - \frac{1}{2e} \partial_\mu \omega)) e^{i\omega} \right]^\dagger [\dots] +$$

$$+ i \tilde{L}^\dagger \bar{\sigma}^\mu (\partial_\mu - i e A_\mu) \tilde{L} + i \tilde{L}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \left(+ \frac{i}{2} \partial_\mu \omega \right) \tilde{L} +$$

$$+ i \tilde{R}^\dagger \sigma^\mu (\partial_\mu + i e A_\mu) \tilde{R} + i \tilde{R}^\dagger \sigma^\mu \left(-\frac{i}{2} \partial_\mu \omega \right) \tilde{R} -$$

$$-\mu^2 \varphi^2 - \lambda_1 (\tilde{L}^\dagger \varphi \tilde{R} + \tilde{R}^\dagger \varphi \tilde{L}) - \frac{\lambda_2}{2} \varphi^4$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - 4e^4 \varphi^2 \left(A_\mu - \frac{1}{ze} \partial_\mu \omega \right) \left(A^\mu - \frac{1}{ze} \partial^\mu \omega \right) + \\
&+ i \tilde{L}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \left(\partial_\mu - ie \left(A_\mu - \frac{1}{ze} \partial_\mu \omega \right) \right) \tilde{L} + \\
&+ i \tilde{R}^\dagger \sigma^\mu \left(\partial_\mu + ie \left(A_\mu - \frac{1}{ze} \partial_\mu \omega \right) \right) \tilde{R} - \\
&- \mu^2 \varphi^2 - \lambda_1 \left(\tilde{L}^\dagger \varphi \tilde{R} + \tilde{R}^\dagger \varphi \tilde{L} \right) - \frac{\lambda_2}{2} \varphi^4
\end{aligned}$$

ORA POSSIAMO METTERCI NELLA GAUGE UNITARIA, CON

$$B_\mu = A_\mu - \frac{1}{ze} \partial_\mu \omega$$

CON ω CHE DIVENTA UN BOSONE DI GOLDSTONE E CHE SVILUPPANDO ATTORNO AL VUOTO DARÀ MASSA A B_μ .

SVILUPPANDO ATTORNO $\xi = \varphi - \langle \varphi \rangle$ ABBIAMO:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - 4e^2 (\xi + \langle \varphi \rangle)^2 B_\mu B^\mu + i \tilde{L}^\dagger \bar{\sigma}^\mu (\partial_\mu - ie B_\mu) \tilde{L} + \\
&+ i \tilde{R}^\dagger \sigma^\mu (\partial_\mu + ie B_\mu) \tilde{R} - \\
&- V(\langle \varphi \rangle) - V'(\langle \varphi \rangle) \xi - \frac{1}{2} V''(\langle \varphi \rangle) \xi^2 - \frac{1}{3!} V'''(\langle \varphi \rangle) \xi^3 - \frac{1}{4!} V^{(4)}(\langle \varphi \rangle) \xi^4 - \\
&- \lambda_1 \left(\tilde{L}^\dagger (\xi + \langle \varphi \rangle) \tilde{R} + \tilde{R}^\dagger (\xi + \langle \varphi \rangle) \tilde{L} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - 4e^2 (\xi^2 + 2\xi \langle \varphi \rangle + \langle \varphi \rangle^2) B_\mu B^\mu + \\
 & + i \tilde{L}^\dagger \bar{\sigma}^\mu (\partial_\mu - ie B_\mu) \tilde{L} + i \tilde{R}^\dagger \sigma^\mu (\partial_\mu + ie B_\mu) \tilde{R} - \\
 & - \frac{1}{2} (-4\mu^2) \xi^2 - \frac{1}{3!} (12\sqrt{-\mu^2 \lambda_2}) \xi^3 - \frac{1}{4!} (12\lambda_2) \xi^4 \\
 & - \lambda_1 (\tilde{L}^\dagger \xi \tilde{R} + \tilde{R}^\dagger \xi \tilde{L}) - \lambda_1 \langle \varphi \rangle (\tilde{L}^\dagger \tilde{R} + \tilde{R}^\dagger \tilde{L})
 \end{aligned}$$

DA CUI LEGGIAMO

$$m_B^2 = 8e^2 \langle \varphi \rangle^2$$

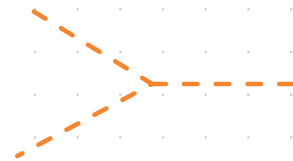
$$m_\xi = -4\mu^2$$

$$g_3 = 12\sqrt{-\mu^2 \lambda_2} \quad \xrightarrow{\text{INTERAZIONE}}$$

$$g_4 = 12\lambda_2 \quad \xrightarrow{\quad \quad \quad \times \quad \quad \quad}$$

$$g_5 = \lambda_1 \quad \xrightarrow{\text{TIP. YUKAWA TRA } \mathcal{L}_{\xi R}}$$

$$m_4 = \lambda_1 \langle \varphi \rangle$$



PROCEDIMENTO MOLTO PIÙ RAPIDO PER LE MASSE.

DA $V(\phi^\dagger\phi) = \mu^2 \phi^\dagger\phi + \frac{\lambda_2}{2} (\phi^\dagger\phi)^2$ si vede:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \Leftrightarrow \mu^2 \phi^\dagger + \lambda_2 (\phi^\dagger\phi) \phi^\dagger = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi^\dagger = \phi = 0 \\ \phi^\dagger\phi = -\mu^2/\lambda_2 \end{cases}$$

E CHE

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \phi^\dagger} = \mu^2 + 2\lambda_2 \phi^\dagger\phi \Rightarrow \begin{array}{ll} \phi = 0 & : V'' = \mu^2 \\ \phi^\dagger\phi = v & : V'' = -\mu^2 \end{array}$$

DUNQUE SE $\mu^2 < 0 \Rightarrow \phi^\dagger\phi = -\frac{\mu^2}{\lambda_2}$ È IL MINIMO DELLA TEORIA.

CHIAMIAMO:

$$\langle \phi^\dagger\phi \rangle = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda_2}} = v$$

E VEDIAMO:

$$D_\mu \langle \phi \rangle = -ie v A_\mu$$

$$\Rightarrow (D_\mu \langle \phi \rangle)^\dagger (D^\mu \langle \phi \rangle) = 4e^2 v^2 A_\mu A^\mu \Rightarrow m_A^2 = -\frac{8e^2 \mu^2}{\lambda_2}$$

E SE SVILUPPIAMO IL TERMINE DI YUKAWA, RISPETTO AL VUOTO $\phi = \phi - \langle \phi \rangle$, TROVIAMO:

$$\mathcal{L}_{YUK} = -\lambda_1 v (L^\dagger R + R^\dagger L) - \lambda_1 (L^\dagger \phi R + R^\dagger \phi^\dagger L)$$

$$\Rightarrow m_{L,R} = \lambda_1 \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda_2}}.$$

PER IL PUNTO 4 RITORNIAMO ALLA LAGRANGIANA:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) + i L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L + i R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu R - \\ & - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda_1 (L^\dagger \phi R + R^\dagger \phi^\dagger L) - \frac{\lambda_2}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 \\ & - \frac{1}{2} G^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

$\longrightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

IN CU, OLTRE A DARE DINAMICA AL CAMPO A_μ INSERIAMO UN TERMINE DI GAUGE FIXING

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2} G^2 \quad \text{CON} \quad G = \partial^\mu A_\mu - e v \alpha \chi$$

CHE CI PERMETTERÀ DI OTTENERE BOSONI DI GAUGE MASSIVI, ANCHE SENZA METTERSI NEL GAUGE UNITARIO. INFATTI, ABBIAMO DATO MASSA AD A_μ PONENDO $w=0$, DUNQUE TOGLIENDO DI MEZZO IL BOSONE DI GOLDSTONE. SE PERÒ TENIAMO IL CAMPO DI GOLDSTONE CI RIMANDEBBERO DEGLI ACCOPPIAMENTI TRA ESSO ED IL CAMPO A_μ , MOTIVO PER CUI LO TOGLIAMO.

PER QUESTO PUNTO DELL'ESERCIZIO VOGLIAMO TENERE IL GOLDSTONE DELLA TEORIA E PER FARE IN MODO DI RIMUOVERE L'ACCOPPIAMENTO CON A_μ , INTRODUCIAMO IL TERMINE DI GAUGE FIXING CHE CONTIENE UN TERMINE DIPENDENTE DA χ , IN MODO CHE ESSO PRODUCA UN TERMINE KISTO GOLDSTONE $\times A_\mu$, CHE CANCELA QUELLO CHE NON CI PIACE.

SCRIVIAMO LE FLUTTUAZIONI ATTORNO AL VUOTO COME:

$$\phi(x) = v + \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi(x) + i\chi(x))$$

GUARDIAMO SOLO IL TERMINE DI YANG-MILLS E DI GAUGE FIXING NELLA LAGRANGIANA:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{GF} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial^\mu A_\mu - ev\alpha\chi)^2 \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2} (ev\alpha\chi)^2 + ev\alpha\chi \partial^\mu A_\mu \end{aligned}$$

MA DOBBIAMO GUARDARE ANCHE I TERMINI QUADRATICI DI ϕ :

$$\mathcal{D}_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu) \left(v + \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi + i\chi) \right)$$

$$(\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger = (\partial_\mu + ieA_\mu) \left(v + \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi - i\chi) \right)$$

ORA NEL TERMINE CINETICO GUARDIAMO SOLO I PEZZI QUADRATICI NEI CAMP. A_μ E χ , ESSENDO INTERESSATI AL LORO PROPAGATORE, E GLI ACCOPPIAMENTI:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\mu \varphi + i\partial_\mu \chi) + ie v A_\mu + \frac{e}{\sqrt{2}} A_\mu (\varphi - i\chi) \right] [\dots] \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \varphi + \sqrt{2} e A_\mu \chi + i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \chi + 2ev A_\mu + \sqrt{2} e A_\mu \varphi \right) \right] [\dots] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \varphi + \sqrt{2} e A_\mu \chi \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \chi + 2e v A_\mu + \sqrt{2} e A_\mu \varphi \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + 2e^2 \chi^2 A_\mu A^\mu + 2e \partial_\mu \varphi A^\mu \chi + \\
&\quad + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + 4e^2 v^2 A_\mu A^\mu + 2e^2 A_\mu A^\mu \varphi^2 + \\
&\quad + 2\sqrt{2} e v \partial_\mu \chi A^\mu + 2e \varphi \partial_\mu \chi A^\mu + 4\sqrt{2} e^2 v A_\mu A^\mu \varphi \\
&= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + (\text{TERMINI CONTENENTI } \varphi(x)) + \\
&\quad + 2e^2 (\chi^2 + v^2) A_\mu A^\mu + 2\sqrt{2} e v \partial_\mu \chi A^\mu
\end{aligned}$$

IL TERMINE $2\sqrt{2} e v \partial_\mu \chi A^\mu$ POSSIAMO INTEGRARLO PER PARTI TRASCURANDO IL TERMINE DI BORDO:

$$\rightarrow -2\sqrt{2} e v \chi \partial_\mu A^\mu$$

DUNQUE ABBIAMO: A_μ e χ

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{YK}} + \mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{QUAD}} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2} (e v \alpha \chi)^2 + e v \alpha \chi \partial^\mu A_\mu + \\
&\quad + 4e^2 v^2 A_\mu A^\mu - 2\sqrt{2} e v \chi \partial^\mu A_\mu
\end{aligned}$$

VEDIAMO CHE I TERMINI DI ACCOPPIAMENTO TRA χ E $\partial^\mu A_\mu$ SI CANCELLANO SE FISSIAMO

$$\alpha = 2\sqrt{2}.$$

RESTA SOLTANTO:

$$\mathcal{L}_{\chi\chi} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{\text{QUAD}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2} (8e^2 v^2) \chi^2 + \frac{1}{2} (8e^2 v^2) A_\mu A^\mu$$

DA CUI LEGGIAMO:

$$m_\chi^2 = 8e^2 v^2$$

$$m_A^2 = 8e^2 v^2$$

DALLA LAGRANGIANA LIBERA DI χ : POSSIAMO DIRE CHE IL PROPAGATORE È $\mathcal{L}_{0,\chi} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2$

$$\Delta_\chi(p) = \frac{i}{p^2 - m_\chi^2} \rightsquigarrow \text{CHE HA SINGOLARITÀ } p^2 = m_\chi^2 = 8e^2 v^2$$

POSSIAMO INVERTIRE IL TERMINE CINETICO DI A_μ PER TROVARE IL SUO PROPAGATORE.

DA

$$\mathcal{L}_{0,A} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu$$

ABBIAIMO

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu} = 0$$

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta F_{\rho\sigma}} \frac{\delta F_{\rho\sigma}}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} - \frac{1}{2} \frac{\delta (\partial_\rho A^\rho)^2}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} \right\} - m_A^2 A^\nu = 0$$

$$\partial_\mu \left\{ -\frac{1}{2} F^{\rho\sigma} \frac{\delta (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} - (\partial_\sigma A^\sigma) \frac{\delta (\partial_\rho A_\sigma \eta^{\rho\sigma})}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} \right\} - m_A^2 A^\nu = 0$$

$$\partial_\mu \left\{ -\frac{1}{2} F^{\rho\sigma} (\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho) - (\partial_\sigma A^\sigma) \eta^{\mu\nu} \right\} - m_A^2 A^\nu = 0$$

$$\partial_\mu \left\{ -\frac{1}{2} (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) - \eta^{\mu\nu} (\partial_\sigma A^\sigma) \right\} - m_A^2 A^\nu = 0$$

$$-\partial_\mu F^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu (\partial_\sigma A^\sigma) - m_A^2 A^\nu = 0$$

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) + m_A^2 A^\nu = 0$$

$$\square A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu + \partial_\mu \partial^\nu A^\mu + m_A^2 A^\nu = 0$$

$$(\square + m_A^2) A^\sim = 0$$

ANDANDO NELLO SPAZIO DI FOURIER ($\partial_\mu \rightarrow -ik_\mu$)

$$(-k^2 + m_A^2) \tilde{A}^\sim = 0$$

CERCHIAMO LA FUNZIONE DI GREEN DELLA TEORIA,
QUINDI:

$$(-k^2 + m_A^2) \eta^{\mu\nu} \tilde{G}_{\sim\mu\nu}(k) = i \delta^\mu_\nu$$

FACENDO L'ANSATZ $\tilde{G}_{\sim\mu\nu}(k) = a(k) \eta_{\mu\nu} + b(k) k_\mu k_\nu$
TROVIAMO

$$(-k^2 + m_A^2) (a \delta^\mu_\nu + b k^\mu k_\nu) = i \delta^\mu_\nu$$

$$-a k^2 \delta^\mu_\nu + a m_A^2 \delta^\mu_\nu - k^2 b k^\mu k_\nu + m_A^2 b k^\mu k_\nu = i \delta^\mu_\nu$$

$$\begin{cases} -a k^2 + a m_A^2 = i \\ -k^2 b + m_A^2 b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-i}{k^2 - m_A^2} \\ b = 0 \end{cases}$$

DUNQUE

$$\tilde{G}_{\nu\mu} = \frac{-i}{k^2 - m_A^2} \eta_{\nu\mu}$$

E VEDIAMO CHE HA SINGOLARITÀ

$$k^2 = m_A^2 = 8e^2 v^2.$$

NOTA NELLA MIA SOLUZIONE HO AGGIUNTO AD $\mathcal{L}$ IL TERMINE $-g^2/2$, MA SE SI AGGIUNGESSE (CON IL +), ALLORA SI ARRIVEREBBE A:

$$\mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{QUAD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} (8e^2 v^2) \chi^2 + 4e^2 v^2 A_\mu A^\mu$$

CON LA SCELTA $\alpha = +2\sqrt{2}$.

DUNQUE LE MASSE SAREBBERO

$$m_\chi^2 = -8e^2 v^2$$

$$m_A^2 = +8e^2 v^2.$$

E LA LAGRANGIANA LIBERA DI A_μ :

$$\mathcal{L}_{0,A} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu$$

DUNQUE L'EQUAZIONE DEL FOTO È:

$$-\partial_\mu F^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} \partial_\mu (\partial_\sigma A^\sigma) + m_A^2 A^\nu = 0$$

$$-\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + m_A^2 A^\nu = 0$$

$$-\square A^\nu + 2\partial^\nu \partial_\mu A^\mu + m_A^2 A^\nu = 0$$

$$(\square - m_A^2) \eta^{\mu\nu} A_\mu - 2\partial^\mu \partial^\nu A_\mu = 0$$

$$[(\square - m_A^2) \eta^{\mu\nu} - 2\partial^\mu \partial^\nu] A_\mu = 0$$

NELLO SPAZIO DEI MOMENTI $(\partial_\mu \rightarrow -ik_\mu)$

$$[(-k^2 - m_A^2) \eta^{\mu\nu} + 2k^\mu k^\nu] \tilde{A}_\mu(k) = 0$$

SCRIVENDO LA FUNZIONE DI GREEN:

$$[(-k^2 - m_A^2) \eta^{\mu\nu} + 2k^\mu k^\nu] \tilde{G}_{\mu\rho}(k) = i\delta^\nu_\rho$$

FACENDO L'ANSATZ: $\tilde{G}_{\mu\rho}(k) = a\eta_{\mu\rho} + b k_\mu k_\rho$ SI HA

$$(-k^2 - m_A^2) a \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\rho} + (-k^2 - m_A^2) \eta^{\mu\nu} b k_\mu k_\rho + 2a k^\mu k^\nu \eta_{\mu\rho} + 2b k^\mu k^\nu k_\mu k_\rho = i\delta^\nu_\rho$$

$$(-k^2 - m_A^2) a \delta^\nu_\rho + (-k^2 - m_A^2) b k^\nu k_\rho + 2a k^\nu k_\rho +$$

$$+ 2b k^2 k^\nu k_\nu = i \delta^\nu_\rho$$

EGUAGLIANDO I TENSORI:

$$\begin{cases} (-k^2 - m_A^2)a = i \\ (-k^2 - m_A^2)b + 2a + 2b k^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{i}{-k^2 - m_A^2} \\ (k^2 - m_A^2)b = -2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-i}{k^2 + m_A^2} \\ b = \frac{2i}{(k^2 - m_A^2)(k^2 + m_A^2)} \end{cases}$$

DUNQUE IL PROPAGATORE È

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2 + m_A^2} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{2k_\mu k_\nu}{k^2 - m_A^2} \right)$$

DA CUI VEDIAMO CHE IL TERMINE IN $k_\mu k_\nu$ HA SINGOLARITÀ

$$k^2 = m_A^2 = 8e^2 v^2$$

OSSIA LA STESSA DI $\Delta^x(k) = \frac{i}{p^2 - (-m_x^2)} \Rightarrow p^2 = -m_x^2 = 8e^2 v^2$

2024 02 15

PROBLEMA 1. CALCOLARE LA SEZIONE D'URTO PER LO SCATTERING COMPTON IN QED, NEL CASO DI UN PROCESSO AD ALBERO NON POLARIZZATO. COSA CAMBIA PER UN PROCESSO SIMILE NEL CASO DI UNA TEORIA DI GAUGE NON ABELIANA, CON GRUPPO $SU(m)$, DOVE IL CAMPO DI DIRAC ASSOCIATO AGLI "ELETTRONI" TRASFORMA COME UN VETTORE A m COMPONENTI:

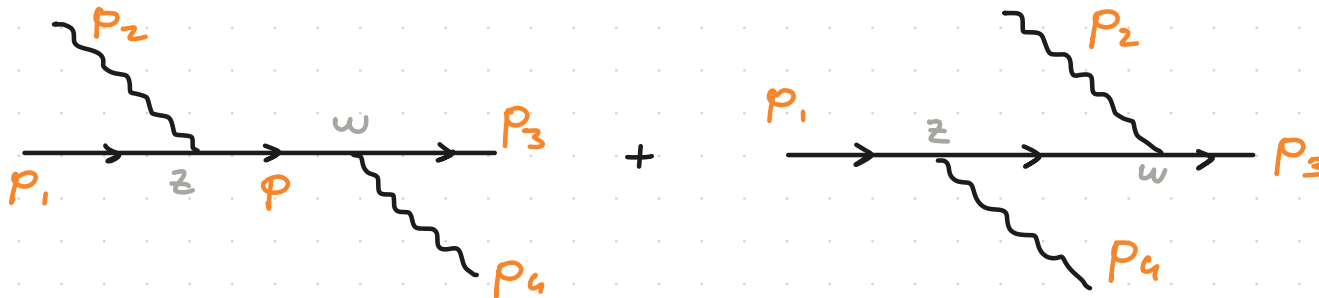
$$\psi \rightarrow U\psi, \quad U \in SU(m) ?$$

SOL. PER LA QED USUALE ABBIAMO:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \quad \text{con} \quad \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

E QUINDI $\mathcal{L}_{\text{INT}} = -ie\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$.

PER LO SCATTERING COMPTON I DIAGRAMMI POSSIBILI SONO



CANALE S: $p = p_1 + p_2$

CANALE U: $p = p_1 - p_4$

SENZA SEGNO RELATIVO. PER ω_1 :

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\lambda, S} \left\{ |\mathcal{M}_s|^2 + |\mathcal{M}_\mu|^2 + 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_s^\dagger \mathcal{M}_\mu \right\}$$

con

$$\mathcal{M}_s = \frac{i(-ie)^2}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} \left(\bar{u}(p_3) \gamma^\mu \varepsilon_\mu^{(\lambda_4)}(p_4) \right) (\not{p}_s + m) \left(\varepsilon_\nu^{(\lambda_2)*} \gamma^\nu u(p_1) \right)$$

$$\mathcal{M}_\mu = \frac{i(-ie)^2}{(p_1 - p_4)^2 - m^2} \left(\bar{u}(p_3) \gamma^\mu \varepsilon_\mu^{(\lambda_2)*}(p_2) \right) (\not{p}_\mu + m) \left(\varepsilon_\nu^{(\lambda_4)}(p_4) \gamma^\nu u(p_1) \right)$$

DUNQUE (NEL LIMITE DI ALTE ENERGIE):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}_s|^2 &= \frac{e^4}{4s^2} \sum \varepsilon_\mu^{(\lambda_4)}(p_4) \varepsilon_\nu^{(\lambda_2)*}(p_2) \varepsilon_\rho^{(\lambda_2)}(p_2) \varepsilon_\sigma^{(\lambda_4)*}(p_4) \times \\ &\quad \times \left(\bar{u}_\alpha(p_3) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\not{p}_s + m)_{\beta\gamma} (\gamma^\nu)_{\gamma\delta} u_\delta(p_1) \right) \times \\ &\quad \times \left(\bar{u}_\varepsilon(p_1) (\gamma^\rho)_{\varepsilon\tau} (\not{p}_s + m)_{\tau\omega} (\gamma^\sigma)_{\omega\theta} u_\theta(p_3) \right) \\ &\sim \frac{e^4}{4s^2} \eta_{\mu\sigma} \eta_{\rho\nu} (\not{p}_1)_\delta \varepsilon^{(\gamma^\rho)_{\varepsilon\tau}} (\not{p}_s)_{\tau\omega} (\gamma^\sigma)_{\omega\theta} (\not{p}_3)_{\theta\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\not{p}_s)_{\beta\gamma} (\gamma^\nu)_{\gamma\delta} \\ &= \frac{e^4}{4s^2} \operatorname{Tr} \left\{ \not{p}_1 \gamma^\rho \not{p}_s \gamma^\sigma \not{p}_3 \gamma_\sigma \not{p}_s \gamma_\rho \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^4}{4s^2} (-2) \text{Tr} \left\{ \not{p}_5 \not{p}_3 \not{p}_5 \underbrace{\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma^\mu}_{-2\not{p}_1} \right\}$$

$$= \frac{e^4}{s^2} \text{Tr} \{ \not{p}_5 \not{p}_3 \not{p}_5 \not{p}_1 \}$$

$$= \frac{4e^4}{s^2} \left\{ 2(p_1 p_5)(p_3 p_5) - (p_1 p_3)(p_5 p_5) \right\}$$

$$\sim \frac{4e^4}{s^2} \left\{ 2(p_1 p_2)(p_3 p_4) + \frac{t}{2} (2p_1 p_2) \right\}$$

$$= \frac{4e^4}{s^2} \left\{ \frac{s^2}{2} + \frac{ts}{2} \right\}$$

$$= 2e^4 \frac{s+t}{s}$$

PER $|\mathcal{M}_\mu|^2$ NON CAMBIA NULLA SE NON $\mu \leftrightarrow s$:

$$\frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}_\mu|^2 = \frac{e^4}{u^2} \{ \not{p}_\mu \not{p}_3 \not{p}_\mu \not{p}_1 \}$$

$$= \frac{e^4}{u^2} 4 \left\{ 2(p_1 p_\mu)(p_3 p_\mu) - (p_1 p_3)(p_\mu)^2 \right\}$$

$$= \frac{4e^4}{\mu^2} \left\{ 2(-p_1 p_4)(-p_2 p_3) + \frac{t}{2}(-2p_1 p_4) \right\}$$

$$= \frac{4e^4}{\mu^2} \left\{ \frac{\mu^2}{2} + \frac{t\mu}{2} \right\}$$

$$= 2e^4 \frac{\mu + t}{\mu}$$

IL TERMINE DI INTERFERENZA:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\lambda, s} \mathcal{M}_s^\dagger \mathcal{M}_\mu &= \frac{e^4}{4\mu s} \sum_{\lambda, s} \varepsilon_\mu^{(\lambda_4)*}(p_4) \varepsilon_\nu^{(\lambda_2)}(p_2) \varepsilon_\delta^{(\lambda_4)}(p_4) \varepsilon_\sigma^{(\lambda_2)*}(p_2) \times \\ &\times \left(\bar{u}_\alpha(p_1) (\gamma^\nu)_{\alpha\beta} (\not{p}_s + m)_{\beta\delta} (\gamma^\mu)_{\delta\gamma} u_\gamma(p_3) \right) \times \\ &\times \left(\bar{u}_\varepsilon(p_3) (\gamma^\sigma)_{\varepsilon\tau} (\not{p}_\mu + m)_{\tau\omega} (\gamma^\delta)_{\omega\theta} u_\theta(p_1) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{e^4}{4\mu s} \eta_{\delta\mu} \eta_{\nu\sigma} \text{Tr} \left\{ \not{p}_3 \gamma^\sigma \not{p}_\mu \gamma^\delta \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_s \gamma^\mu \right\}$$

$$= \frac{e^4}{4\mu s} (p_1)_\alpha (p_s)_\beta (p_3)_\delta (p_\mu)_\gamma \text{Tr} \left\{ \gamma^\delta \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma^\delta \gamma^\alpha \gamma_\sigma \gamma^\beta \gamma_\delta \right\}$$

$$= \frac{e^4}{4\mu s} (p_1)_\alpha (p_s)_\beta (p_3)_\delta (p_\mu)_\gamma (-32) \eta^{\delta\alpha} \eta^{\tau\beta}$$

$$= -\frac{8e^4}{\mu s} (p_1 p_3)(p_5 p_4)$$

$$= \frac{8e^4}{\mu s} \frac{\mu}{2} [(p_1 + p_2)(p_1 - p_4)]$$

$$= \frac{4e^4}{s} [(-p_1 p_4) + (p_1 p_2) - (p_2 p_4)]$$

$$= \frac{4e^4}{s} \left[\frac{\mu}{2} + \frac{s}{2} + \frac{t}{2} \right]$$

$$= 0$$

DONQUE

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{2e^4}{64\pi^2 s} \left\{ \frac{s+t}{s} + \frac{\mu+t}{\mu} \right\}$$

$\rightarrow \mu+t \sim -s$
 $s+t \sim -\mu$

$$= \frac{e^4}{32\pi^2 s} \left\{ \frac{-\mu}{s} + \frac{-s}{\mu} \right\}$$

$$= -\frac{e^4}{32\pi^2 s} \left(\frac{\mu}{s} + \frac{s}{\mu} \right)$$

USANDO:

$$S = 4E^2$$

$$\mu = -\frac{S}{2}(1 + \cos\theta)$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = -\frac{e^4}{32\pi^2 4E^2} \left(\frac{-\frac{S}{2}(1 + \cos\theta)}{S} + \frac{S}{-\frac{S}{2}(1 + \cos\theta)} \right)$$

$$= \frac{e^4}{128\pi^2 E^2} \left(\frac{1 + \cos\theta}{2} + \frac{2}{1 + \cos\theta} \right)$$

$$\sigma_{cm} = \frac{e^4}{128\pi^2 E^2} 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \left\{ \frac{1 + \cos\theta}{2} + \frac{2}{1 + \cos\theta} \right\}$$

$$= \frac{e^4}{64\pi E^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(2 + \frac{\cos^2\theta}{2} \right) \Big|_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 dx \frac{1}{1+x} \right\}$$

$$= \frac{e^4}{64\pi E^2} \left\{ \frac{3}{2} + 2 \int_{-1}^1 dx \frac{1}{1+x} \right\}.$$

NEL CASO IN CUI PRENDIAMO UN GRUPPO DI GAUGE
 $SU(m)$, E LO PRENDIAMO LOCALE, CAMBIA LA DERIVATA
 COVARIANTE DI ψ , POICHÉ:

$$U = \exp\{-i\omega^a T^a\}, \quad T^a \text{ GENERATORI}, \quad U \in SU(m)$$

$$\Rightarrow 4 \rightarrow e^{-i\omega^a T^a} 4 \sim (1 - i\omega^a T^a) 4$$

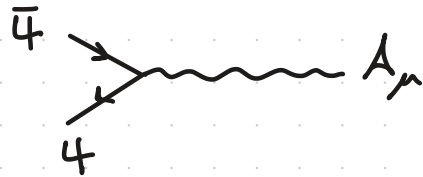
$$\sim 4 - i\omega^a T^a 4$$

$$\Rightarrow \delta 4 = -i\omega^a T^a 4$$

DUNQUE

$$D_\mu 4 = (\partial_\mu - ig A_\mu^a T^a) 4$$

DUNQUE DI SO NELLA QED USUALE AVEVAMO UN UNICO VERTICE DI INTERAZIONE



ORA NELLA TEORIA NON ABELIANA ABBIAMO DEI IN CUI 4 INTERAGISCE CON TUTTI I BOSONI PIÙ ABBIAMO DEI QUARTICO) CHE VENGONO DA AUTOINTERAZIONE

VERTICI SIMILI, A_μ^2 , MA IN (ORDINE CUBICO)
 $\rightarrow m^2 - 1$
 (CHE SONO ASSOCIATI A GENERATORI)

$$F_\mu^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + ig [A_\mu, A_\nu]^a.$$

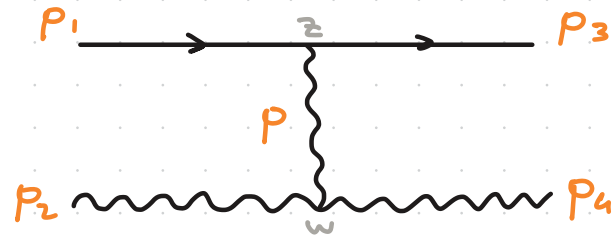
DUNQUE PER VIA DEL VERTICE A 3 CAMPI DI GAUGE NELLO SCATTERING COMPTON ABBIAMO UN DIAGRAMMA IN PIÙ, OSSIA DIVENTA POSSIBILE IL DIAGRAMMA DI SCAMBIO DI UN BOSONE DI GAUGE.

NOTIAMO CHE IL VERTICE



DIVENTA

$$-ig\gamma^\mu T^A.$$



CANALE t : $p = p_1 - p_3$

PROBLEMA 2. SI CONSIDERI LA DENSITÀ LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L} = \text{Tr} \left\{ -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2 (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} g^2 [\phi^\dagger, \phi]^2 + \right. \\ \left. + 2 i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - i g [\bar{\psi}, \psi] \phi \right\}$$

MODELLO
GEORGI - GLASHOW

DOVE TUTTI I CAMPI TRASFORMANO NELLA RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA DEL GRUPPO $SU(2)$.

1. SCRIVERE ESPLICITAMENTE LA FORMA DEL TENSORE $F_{\mu\nu}$ E LE DERIVATE COVARIANTI PER IL CAMPO SCALARE ϕ E LO SPINORE DI DIRAC ψ .
2. DETERMINARE I POSSIBILI VUOTI DELLA TEORIA.
3. STUDIARE LO SPETTRO DEL MODELLO NEL CASO IN CUI IL VUOTO È DATO DA $\langle \phi \rangle \neq 0$.

SOL. RISCRIVIAMO MEGLIO LA LAGRANGIANA USANDO IL FATTO CHE:

$$\text{Tr} \{ A + B \} = \text{Tr} \{ A \} + \text{Tr} \{ B \}$$

E:

$$\phi = \phi^a T^a$$

CON T^a GENERATORI DI $SU(2)$ NORMALIZZATI A

$$\text{Tr} \{ T^a T^b \} = \frac{1}{2} \delta^{ab}.$$

CONOSCIAMO ANCHE L'ALGEBRA DI $SU(2)$: $[T^a, T^b] = i \epsilon^{abc} T^c$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr}\{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\} + 2 \text{Tr}\{(\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi)\} - \frac{1}{2} g^2 \text{Tr}\{[\phi^\dagger, \phi]^2\} + \\ + 2i \text{Tr}\{\bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi\} - ig \text{Tr}\{[\bar{\psi}, \psi] \phi\}$$

SE UN CAMPO ψ TRASFORMA NELL'AGGIUNTA:

$$\psi \rightarrow U \psi U^\dagger$$

ALLORA

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \psi &= \partial_\mu \psi + ig[A_\mu, \psi] \quad , \quad \psi = \{\phi, \psi\} \\ &= \partial_\mu \psi + ig A_\mu^a \psi^b [T^a, T^b] \\ &= \partial_\mu \psi - g \varepsilon^{abc} A_\mu^a \psi^b T^c \end{aligned}$$

L'ESPRESSIONE DEL TENSORE $F_{\mu\nu}$ È QUELLA DI UN TENSORE DEGLI SFORZI DI UNA TEORIA NON ABELIANA OSSIA

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] .$$

I VARI PEZZI SONO

$$-\frac{1}{2} \text{Tr} \{ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} 2 \text{Tr} \{ (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) \} &= 2 (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger{}^a (\mathcal{D}^\mu \phi)^b \text{Tr} \{ T^a T^b \} \\ &= (\mathcal{D}_\mu \phi^\dagger)^a (\mathcal{D}^\mu \phi)^a \end{aligned}$$

$$(\mathcal{D}_\mu \phi)^a = \partial_\mu \phi^a - g \varepsilon^{abc} A_\mu^b \phi^c$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} g^2 \phi^\dagger{}^a \phi^b \phi^\dagger{}^c \phi^d \text{Tr} \{ [T^a, T^b] [T^c, T^d] \} &= \\ &= -\frac{1}{2} g^2 \phi^\dagger{}^a \phi^b \phi^\dagger{}^c \phi^d (\text{Tr})^2 \text{Tr} \{ \varepsilon^{abe} \varepsilon^{cdf} T^e T^f \} \\ &= +\frac{1}{2} g^2 (\phi^\dagger)^a \phi^b (\phi^\dagger)^c \phi^d \varepsilon^{abe} \varepsilon^{cdf} \frac{1}{2} \delta^{ef} \\ &= \frac{1}{4} g^2 (\phi^\dagger)^a \phi^b (\phi^\dagger)^c \phi^d \underbrace{\varepsilon^{abe} \varepsilon^{cde}}_{\delta^{ac} \delta^{bd} - \delta^{ad} \delta^{cb}} \\ &= \frac{1}{4} g^2 \{ (\phi^\dagger{}^a)^2 (\phi^b)^2 - (\phi^\dagger \phi)^a (\phi^\dagger \phi)^b \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + 2i \operatorname{Tr} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi \} &= 2i \bar{\psi}^a \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^b \operatorname{Tr} \{ T^a T^b \} \\
 &= i \bar{\psi}^a \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - i g \operatorname{Tr} \{ [\psi, \psi] \phi \} &= - i g (i \varepsilon^{abc}) \bar{\psi}^a \psi^b \phi^c \operatorname{Tr} \{ T^c T^d \} \\
 &= \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} \bar{\psi}^a \psi^b \phi^c
 \end{aligned}$$

COSÌ LA LAGRANGIANA RISCRISSA È:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + (\mathcal{D}_\mu \phi^\dagger)^a (\mathcal{D}^\mu \phi)^a + \\
 &+ \frac{1}{4} g^2 \{ (\phi^\dagger)^2 (\phi^b)^2 - (\phi^\dagger \phi)^a (\phi^\dagger \phi)^b \} + \\
 &+ i \bar{\psi}^a \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^a + \\
 &+ \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} \bar{\psi}^a \psi^b \phi^c
 \end{aligned}$$

ABBIAMO IL POTENZIALE :

$$V(\phi) = \frac{1}{2} g^2 \text{Tr} \{ [\phi^\dagger, \phi]^2 \}$$

CHE È POSITIVO O AL PIÙ NULLO, PER CUI IL MINIMO LO SI TROVA QUANDO $V(\phi) = 0$, OSSIA:

$$V(\phi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \langle \phi \rangle = 0 \\ \phi \text{ t.c. } [\phi^\dagger, \phi] = 0 \end{cases}$$

IL CASO $\langle \phi \rangle = 0$ È IL CASO SEMPLICE E PER CUI IL GRUPPO DI SIMMETRIA PRESERVA IL VUOTO, DUNQUE $SU(2)$ NON SI ROMPE.

IL CASO NON BANALE È $\langle \phi \rangle \neq 0$ t.c. $[\phi^\dagger, \phi] = 0$. PERÒ LA CONDIZIONE SUL COMMUTATORE NON È ALTRO CHE:

$$[\phi^\dagger, \phi] = \phi^\dagger_a \phi_b [T^a, T^b] = i \epsilon^{abc} \phi^\dagger_a \phi_b T^c \equiv 0$$

$$\Rightarrow i \epsilon^{abc} \phi^\dagger_a \phi_b T^c = 0 \Leftrightarrow \phi^\dagger \wedge \phi = 0$$

$$\Rightarrow \phi^\dagger \text{ PARALLELO A } \phi$$

E CIÒ SUCCEDDE SOLO SE ϕ È ALLINEATO LUNGO UNA CERTA DIREZIONE.

NOTA UN ALTRO MODO DI VEDERLO È $[T^a, T^b] = 0 \Leftrightarrow a=b$

$\Rightarrow$ LE COMPONENTI DEI CAMPI LE PRENDIAMO NELLA STESSA DIREZIONE.

SCRIVIAMO DUNQUE:

$$\langle \phi \rangle = v T^3 = \frac{v}{2} \sigma^3$$

CHE ROMPE SPONTANEAMENTE LA SIMMETRIA.

OSSERVAZIONE SI VERIFICA SUBITO CHE SE PRENDIAMO ϕ NON UNICAMENTE LUNGO UNA DIREZIONE, ALLORA IL COMMUTATORE NON È NULLO:

$$\phi = \phi_1 T^1 + \phi_2 T^2$$

IMPLICA

$$[\phi^\dagger, \phi] = [\phi_1^\dagger T^1 + \phi_2^\dagger T^2, \phi_1 T^1 + \phi_2 T^2]$$

$$= \phi_1^\dagger \phi_1 [T^1, T^1] + \phi_1^\dagger \phi_2 [T^1, T^2] + \phi_2^\dagger \phi_1 [T^2, T^1] + \phi_2^\dagger \phi_2 [T^2, T^2]$$

$$= \phi_1^\dagger \phi_2 \dot{\wedge} \varepsilon^{123} T^3 + \phi_2^\dagger \phi_1 \dot{\wedge} \varepsilon^{213} T^3$$

$$= \dot{\wedge} (\phi_1^\dagger \phi_2 - \phi_2^\dagger \phi_1) \varepsilon^{123} T^3$$

$$\neq 0.$$

DOBBIAMO STUDIARE LO SPETTRO CON $\langle \phi \rangle = v T^3$. COME SAPPIAMO
 DOBBIAMO GUARDARE LA DERIVATA COVARIANTE SUL VEV.

ABBIAMO:

$$2 \text{Tr} \{ (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) \} = (\partial_\mu \phi^\dagger)^a (\partial^\mu \phi)^a$$

DUNQUE NEL VEV

$$\begin{aligned} \partial_\mu \langle \phi \rangle &= (\partial_\mu + i g [A_\mu, \cdot]) \langle \phi \rangle \\ &= i g [A_\mu, \langle \phi \rangle] \\ &= i g A_\mu^a v [T^a, T^3] \end{aligned}$$

IL COMMUTATORE È NON NULLO SOLO SE $2 \neq 3$
 $\Rightarrow$ VEDIAMO CHE SONO I CAMPI DI GAUGE CHE ACQUISISCONO MASSA
 SOLO SE $2 \neq 3$
 CHE SONO A_μ^1 E A_μ^2 .

$$\begin{aligned} 2 \text{Tr} \{ (\partial_\mu \langle \phi \rangle)^\dagger (\partial^\mu \langle \phi \rangle) \} &= 2 (-i) i g^2 \text{Tr} \{ [\langle \phi \rangle, A_\mu] [A^\mu, \langle \phi \rangle] \} \\ &= 2 g^2 v^2 A_\mu^a A^{\mu b} \text{Tr} \{ [T^3, T^a] [T^b, T^3] \} \end{aligned}$$

COMPLESSIFICATO

$$= 2g^2 v^2 A_\mu^a A^{\mu b} (i)^2 \varepsilon^{3ac} \varepsilon^{b3d} \text{Tr}\{T^c T^d\}$$

$$= + 2g^2 v^2 \varepsilon^{a3c} \varepsilon^{b3d} \frac{1}{2} \delta^{cd} A_\mu^a A^{\mu b}$$

$$= + g^2 v^2 \underbrace{\varepsilon^{a3c} \varepsilon^{b3c}}_{\delta^{ab} \delta^{cc} - \delta^{a3} \delta^{b3} = \delta^{ab}} A_\mu^a A^{\mu b}$$

$$= + g^2 v^2 A_\mu^a A^{\mu a}$$

POICHÉ $\delta^{cc} = 1$ E $\delta^{a3} = 0$ $\delta^{b3} = 0$ $a, b \neq 3$

QUINDI $m_A^{(1,2)} = \sqrt{2} g v.$

PER CHE VIA IL DEL GRUPPO FATTO SU CHE SOLO IN $A_\mu^{1,2}$ PRENDONO MASSA DICIAMO

$$SU(2) \rightarrow U(1).$$

PER I FERMIONI ABBIAMO

$$\begin{aligned} -ig \text{Tr}\{[\psi, \psi] \langle \phi \rangle\} &= -igv \bar{\psi}^a \psi^b \text{Tr}\{[T^a, T^b] T^3\} \\ &= -igv (i\varepsilon^{abc}) \bar{\psi}^a \psi^b \text{Tr}\{T^c T^3\} \end{aligned}$$

$$= g v \varepsilon^{abc} \bar{\varphi}^a \varphi^b \frac{1}{2} \delta^{c3}$$

$$= \frac{1}{2} g v \varepsilon^{ab3} \bar{\varphi}^a \varphi^b$$

DUNQUE VEDIAMO $a \neq b$ E ENTRAMBI SONO $\{1, 2\}$.

$$-i g \text{Tr} \{ [\varphi, \varphi] \langle \phi \rangle \} = \frac{1}{2} g v (\bar{\varphi}^1 \varphi^2 - \bar{\varphi}^2 \varphi^1)$$

PER LEGGERE LE MASSE DI $\varphi^{1,2}$ DOBBIAMO DIAGONALIZZARE LA MATRICE DI MASSA *

QUESTA COSA È STATA CHIESTA AL PROFESSORE E HA DETTO CHE, ESSENDO UNA COSA LUNGA CHE COINVOLGE ANCHE UNA TRASFORMAZIONE CHIRIALE, CI SI PUÒ FERMARE QUA PER QUANTO RIGUARDA φ . (VEDI ULTIMA PAGINA DELLA PRIMA)

PER QUANTO RIGUARDA IL CAMPO SCALARE (HIGGS):

$$-\frac{1}{2} g^2 \text{Tr} \{ [\langle \phi^+ \rangle, \langle \phi \rangle]^2 \} = -\frac{1}{2} g^2 v^2 \text{Tr} \{ [T^3, T^3] \} = 0$$

DUNQUE IL CAMPO ϕ NON PRENDE MASSA. *

COME PRIMA (QUA NON C'È LA CONFERMA DEL PROFESSORE) CI SI POTREBBE FERMARE QUA, AVENDO TROVATO LO SPETTRO DELLA TEORIA, MA (W SONO INCASTRATO CON I CONTI) SI PUÒ VEDERE ESPPLICITAMENTE CHE SONO I BOSONI DI GOLDSTONE MANGIATI DA $A_{\mu}^{(1,2)}$.

PASSAGGIO OPZIONALE.

AVEVAMO TROVATO:

$$-ig \text{Tr} \{ [\Phi, \Phi] \langle \Phi \rangle \} = \frac{1}{2} g v (\bar{\Phi}^1 \Phi^2 - \bar{\Phi}^2 \Phi^1)$$

DOBBIAMO DIAGONALIZZARE:

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{2} (\bar{\Phi}_1 \quad \bar{\Phi}_2) \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\bar{\Phi}_1 \quad \bar{\Phi}_2) \begin{pmatrix} \Phi_2 \\ -\Phi_1 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{2} (\bar{\Phi}_1 \Phi_2 - \bar{\Phi}_2 \Phi_1)$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

$$(M - \lambda_1 I) v = 0 \quad \lambda_1 = +i \quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -ia + b = 0 \\ -a - ib = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = ia \\ " \end{cases}$$

$$\lambda_2 = -i \quad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} ia + b = 0 \\ -a + ib = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -ia \\ " \end{cases}$$

DUNQUE (NORMALIZZANDO)

$$\lambda_1 = +i \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_2 = -i \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

COSÌ OTTENIAMO

$$\begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi^1 + i\varphi^2 \\ \varphi^1 - i\varphi^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi^+ + \varphi^- \\ i\varphi^+ - i\varphi^- \end{pmatrix}$$

SOSTITUENDO NEL TERMINE DI MASSA:

$$\dots = \frac{1}{2} g v (\bar{\varphi}^1 \varphi^2 - \bar{\varphi}^2 \varphi^1)$$

$$= \frac{g v}{2} \left\{ \frac{1}{2} (\bar{\varphi}^+ + \bar{\varphi}^-) (i\varphi^+ - i\varphi^-) - \frac{1}{2} (-i\bar{\varphi}^+ + i\bar{\varphi}^-) (\varphi^+ + \varphi^-) \right\}$$

$$= \frac{g v}{4} \left\{ i\bar{\varphi}^+ \varphi^+ - i\bar{\varphi}^+ \varphi^- + i\bar{\varphi}^- \varphi^+ - i\bar{\varphi}^- \varphi^- + i\bar{\varphi}^+ \varphi^+ + i\bar{\varphi}^- \varphi^- - i\bar{\varphi}^- \varphi^+ - i\bar{\varphi}^+ \varphi^- \right\}$$

$$= \frac{i g v}{4} \left\{ 2 \bar{\psi}^+ \psi^+ - 2 \bar{\psi}^- \psi^- \right\}$$

$$= i \frac{g v}{2} (\bar{\psi}^+ \psi^+ - \bar{\psi}^- \psi^-)$$

LA
E
CHIRIALE:

È
PER

DAVANTI,
RIMUOVERLA

IL

TERMINE
POSSIAMO

DI
FARE

HASSA
UNA

NON
VA BENE,
TRASFORMAZIONE

$$\psi^\pm \rightarrow e^{-i\beta\gamma^5} \psi^\pm$$

CON

$$\beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\bar{\psi}^\pm \rightarrow \bar{\psi}^\pm e^{+i\beta\gamma^5}$$

POICHÉ
DA

C'È ANCHE
 $\{\gamma^5, \gamma^0\} = 0$

UN SEGNO

COSÌ

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^\pm \psi^\pm &\rightarrow \bar{\psi}^\pm e^{+i\frac{\pi}{4}\gamma^5} e^{-i\frac{\pi}{4}\gamma^5} \psi^\pm \\ &= \bar{\psi}^\pm e^{+i\frac{\pi}{2}\gamma^5} \psi^\pm \\ &= \bar{\psi}^\pm \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\gamma^5 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \psi^\pm \end{aligned}$$

DUINQUE

$$\mathcal{L}_{m,4} \sim - \frac{g v}{2} (\bar{\psi}^+ \gamma^5 \psi^+ - \bar{\psi}^- \gamma^5 \psi^-).$$

CALCOLO BOSONI DI GOLDSTONE.

AVENDO CAPITO CHE ϕ NON PRENDE MASSA, PER VEDERE CHI SONO I BOSONI DI GOLDSTONE MANGIATI DAI CAMPI VETTORIALI, DOBBIAMO ESPANDERLO ATTORNO IL VUOTO:

$$\xi = \phi - \langle \phi \rangle$$

IN CUI ξ SONO LE FLUTTUAZIONI ATTORNO AL VUOTO. IL MODO IN CUI SI PUÒ RISOLVERE IL PROBLEMA È SCOMPORRE ξ NEI 3 GENERATORI DI $SU(2)$, OLTRE A SCRIVERLO IN TERMINI DELLA SUA PARTE REALE E IMMAGINARIA.

così

$$\begin{aligned}\phi &= \xi + \langle \phi \rangle \\ &= \phi_1 T^1 + \phi_2 T^2 + (h + v) T^3\end{aligned}$$

h SONO LE FLUTTUAZIONI ATTORNO IL VUOTO, MENTRE ϕ_1 ϕ_2 ATTORNO LE DIREZIONI ROTTE.

SI VEDE:

$$\begin{aligned}[\phi^\dagger, \phi] &= \phi_1^\dagger \phi_2 [T^1, T^2] + \phi_1^\dagger (h+v) [T^1, T^3] + \\ &+ \phi_2^\dagger \phi_1 [T^2, T^1] + \phi_2^\dagger (h+v) [T^2, T^3] + \\ &+ (h^\dagger + v) \phi_1 [T^3, T^1] + (h^\dagger + v) \phi_2 [T^3, T^2]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\phi_1^\dagger \phi_2 - \phi_2^\dagger \phi_1) [T^1, T^2] + \\
&\quad + [\phi_1^\dagger (h+v) - (h^\dagger + v) \phi_1] [T^1, T^3] + \\
&\quad + [\phi_2^\dagger (h+v) - (h^\dagger + v) \phi_2] [T^2, T^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2i \operatorname{Im}(\phi_1^\dagger \phi_2) i \varepsilon^{123} T^3 + \\
&\quad + 2i \operatorname{Im}(\phi_1^\dagger (h+v)) i \varepsilon^{132} T^2 + \\
&\quad + 2i \operatorname{Im}(\phi_2^\dagger (h+v)) i \varepsilon^{231} T^1
\end{aligned}$$

$-\varepsilon^{123}$
 $-\varepsilon^{213} = \varepsilon^{123}$

$$\begin{aligned}
&= -2 \varepsilon^{123} \left\{ \operatorname{Im}(\phi_2^\dagger (h+v)) T^1 - \operatorname{Im}(\phi_1^\dagger (h+v)) T^2 + \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{Im}(\phi_1^\dagger \phi_2) T^3 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{g^2}{2} \operatorname{Tr} \{ [\phi^\dagger, \phi]^2 \} &= \frac{g^2}{2} \operatorname{Tr} \left\{ 4 \sum_a c^a T^a \sum_b c^b T^b \right\} \\
&= 2g^2 \sum_{a,b} c^a c^b \operatorname{Tr} \{ T^a T^b \}
\end{aligned}$$

$$= 2g^2 \sum_{a,b} c^a c^b \frac{1}{2} \delta^{ab}$$

$$= g^2 \sum (c^a)^2$$

$$= g^2 \left\{ \left[\text{Im}(\phi_2^\dagger (h+v)) \right]^2 + \left[\text{Im}(\phi_1^\dagger (h+v)) \right]^2 + \left[\text{Im}(\phi_1^\dagger \phi_2) \right]^2 \right\}$$

I TERMINI DI MASSA LI TROVIAMO NEI TERMINI QUADRATICI NEI CAMPI:

$$\mathcal{L}_m = g^2 \left\{ v^2 [\text{Im}(\phi_2^\dagger)]^2 + v^2 [\text{Im}(\phi_1^\dagger)]^2 \right\}$$

DUNQUE, DA QUA IMPAZIAMO CHE LE PARTI IMMAGINARIE DI ϕ_1 E ϕ_2 PRENDONO MASSA:

$$m_{\phi_{1,2}}^2 = 2g^2 v^2$$

LE LORO PARTI REALI NON COMPAGNONO, DUNQUE SONO I BOSONI DI GOLDSTONE RINGIATI DA A_μ^1 E A_μ^2 , E IL CAMPO h (HIGGS) RIMANE MASSLESS (NON CI SONO TERMINI PROPORZIONALI SOLO AD h^2).

2024 06 17

Problema 1.

S. CONSIDERI UN CAMPO SCALARE COMPLESSO DI MASSA m MINIMALMENTE ACCOPPIATO AD UN CAMPO DI GAUGE ABELIANO.

1. SCRIVERE LA DENSITÀ LAGRANGIANA.
2. DESCRIVERE LE INTERAZIONI DEI VARI CAMPI E DERIVARE LE REGOLE DI FEYNMAN NELLO SPAZIO DEI MOMENTI.
3. CALCOLARE LA SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE NON POLARIZZATA PER UN PROCESSO DI SCATTERING COMPTON (OSSIA UNA PARTICELLA SCALARE E UN FOTONE NEGLI STATI INIZIALE E FINALE).

SUGGERIMENTO. PER RICAIVARE LE REGOLE DI FEYNMAN, SIA PER I PROPAGATORI CHE PER LE INTERAZIONI, PASSARE NELLO SPAZIO DEI MOMENTI.

SOL. AL GRUPPO DI GAUGE $U(1)$ CI ASSOCIAMO IL CAMPO A_μ .
SCRIVIAMO LA GENERICA TRASFORMAZIONE

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi \quad \text{CON } \alpha \text{ PARAMETRO DI } U(1).$$

SE $U(1)$ LA RENDIAMO LOCALE ABBIAMO LA DERIVATA COVARIANTE:

$$\delta\phi = \phi - \phi' = \phi - e^{i\alpha}\phi \sim \phi - (1 + i\alpha)\phi = -i\alpha\phi$$

DA

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \quad \hookrightarrow \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} = \partial_\mu \phi^\dagger$$

$$\begin{aligned}
J^\mu &= \partial_\mu \phi^\dagger \delta \phi_\alpha + \partial_\mu \phi \delta \phi^\dagger_\alpha \\
&= -i \phi \partial_\mu \phi^\dagger_\alpha + i \phi^\dagger_\alpha \partial_\mu \phi \\
&= i \alpha \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi
\end{aligned}$$

CHE SE ACCOPPIATA AD A_μ CI DA LA DERIVATA COVARIANTE.

ABBIAMO $\mathcal{D}_\mu \phi = (\partial_\mu - ig A_\mu) \phi$ E LA LAGRANGIANA LOCALE

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

DANDO DINAMICA ANCHE AD A_μ CON

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

ESPANDIAMO TUTTO NELLA LAGRANGIANA COSÌ DA VEDERE LE INTERAZIONI:

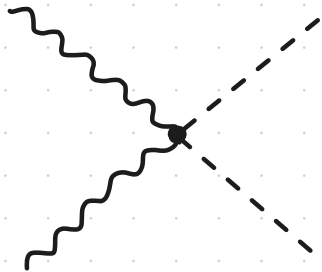
$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) &= [(\partial_\mu + ig A_\mu) \phi^\dagger] [(\partial^\mu - ig A^\mu) \phi] \\
&= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - ig \partial_\mu \phi^\dagger A^\mu \phi + ig A^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi + g^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi
\end{aligned}$$

DUNQUE

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi + i g A_\mu (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^\dagger \phi) + g^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi$$

ABBIAMO DERIVATE) QUINDI DELLE INTERAZIONI CUBICHE (CON DELLE
E QUARTICHE.

PER IL TERMINE QUARTICO ABBIAMO



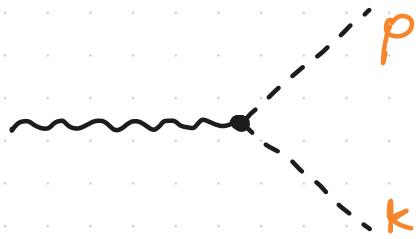
$$= -2 i g^2$$

IL 2 SI CANCELLA CON IL FATTORE
DI SIMMETRIA

USIAMO IL SUGGERIMENTO PER IL TERMINE DI INTERAZIONE
DERIVATIVA:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{INT}} &= i g A_\mu (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^\dagger \cdot \phi) \longrightarrow i g A_\mu (-i \phi^\dagger(k) p^\mu \phi(p) - i k^\mu \phi^\dagger(k) \phi(p)) \\ &= g A_\mu (p^\mu + k^\mu) \phi^\dagger \phi \\ \partial_\mu &\rightarrow -i p_\mu \\ \partial^\mu \phi &\rightarrow -i p^\mu \phi \\ (\partial^\mu \phi)^\dagger &\rightarrow (-i k^\mu \phi^\dagger) = i k^\mu \phi^\dagger \end{aligned}$$

DUNQUE IL VERTICE:



$$= -ig(p^\mu + k^\mu)$$

IN TERMINI DI INTERAZIONE
DERIVATIVI, VERTICI DIPENDONO
DAI MOMENTI DELLE
PARTICELLE.

ESSENDO A_μ UN CAMPO MASSLESS E ϕ SCALARE (COMPLESSO)
SI HANNO I PROPAGATORI:

$$A_{\mu\nu}(p) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

$$\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

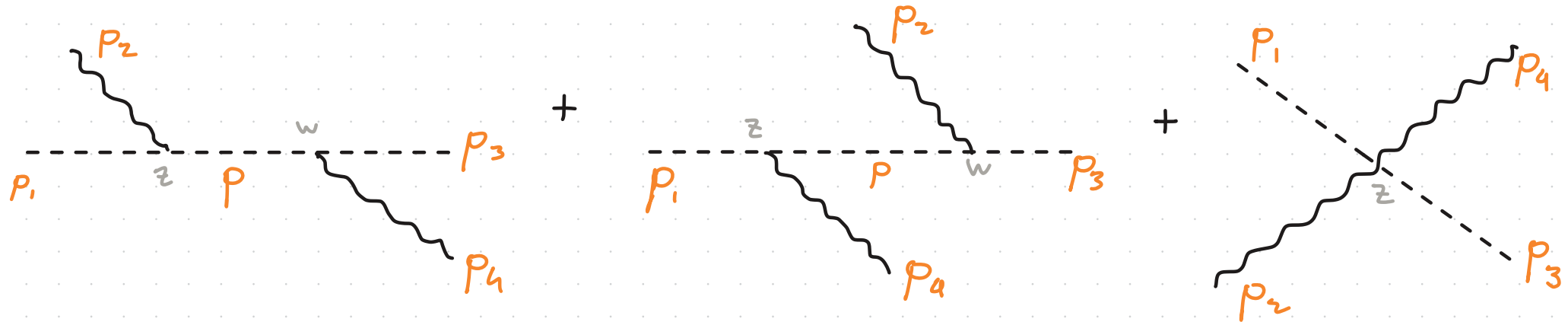
PER IL CALCOLO DELL'AMPIEZZA DI PROBABILITÀ SI HA LA
REGOLA DI TRONCARE LE GAMBE ESTERNE E METTERE LE
POLARIZZAZIONI

$$\phi_{in, out} \sim 1$$

$$\gamma_{in} \sim \epsilon_\mu^{(\lambda)*}$$

$$\gamma_{out} \sim \epsilon_\mu^{(\lambda)}$$

IL PROCESSO $\phi + \gamma \rightarrow \phi + \gamma$ È DESCRITTO DAI DIAGRAMMI:



CANALE S: $p = p_1 + p_2$

CANALE U: $p = p_1 - p_4$

SEAGULL

NON SI HANNO CI SONO SEGNI RELATIVI TRA I DIAGRAMMI.

$$\mathcal{M}_S = \epsilon_\mu^{(\lambda_2)*}(p_2) (-ig(p_1 + p_3)^\mu) \frac{i}{p_S^2 - m^2} (-ig(p_3 + p_5)^\nu) \epsilon_\nu^{(\lambda_4)}(p_4)$$

$$\mathcal{M}_U = \epsilon_\mu^{(\lambda_4)}(p_4) (-ig(p_1 + p_\mu)^\mu) \frac{i}{p_\mu^2 - m^2} (-ig(p_3 + p_\mu)^\nu) \epsilon_\nu^{(\lambda_2)*}(p_2)$$

$$\mathcal{M}_{SG} = \epsilon_\mu^{(\lambda_2)*}(p_2) (-2ig^2) \epsilon^\mu(\lambda_4)(p_4)$$

I MODULI QUADRI!

$$\frac{1}{2} \int |\mathcal{M}_s|^2 = \frac{g^4}{2s^2} \int_{\lambda} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda_2)*}(p_2) \varepsilon_{\rho}^{(\lambda_2)}(p_2) \varepsilon_{\nu}^{(\lambda_4)}(p_4) \varepsilon_{\sigma}^{(\lambda_4)*}(p_4) \times$$

$$\times (p_1 + p_5)^{\mu} (p_3 + p_5)^{\nu} (p_1 + p_5)^{\rho} (p_3 + p_5)^{\sigma}$$

$$= \frac{g^4}{2s^2} \int_{\lambda} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda_2)*}(p_2) \varepsilon_{\rho}^{(\lambda_2)}(p_2) \varepsilon_{\nu}^{(\lambda_4)}(p_4) \varepsilon_{\sigma}^{(\lambda_4)*}(p_4) (2p_1 + p_2)^{\mu} (2p_3 + p_4)^{\nu} (2p_1 + p_2)^{\rho} (2p_3 + p_4)^{\sigma}$$

PERÒ SAPPIAMO $(p_2)_{\mu} \varepsilon^{\mu}(p_2) = 0$

$$= \frac{g^4}{2s^2} \int_{\lambda} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda_2)*}(p_2) \varepsilon_{\rho}^{(\lambda_2)}(p_2) \varepsilon_{\nu}^{(\lambda_4)}(p_4) \varepsilon_{\sigma}^{(\lambda_4)*}(p_4) (2p_1)^{\mu} (2p_3)^{\nu} (2p_1)^{\rho} (2p_3)^{\sigma}$$

$$= \frac{16g^4}{2s^2} \eta_{\rho\mu} \eta_{\nu\sigma} p_1^{\mu} p_1^{\rho} p_3^{\nu} p_3^{\sigma}$$

$$= \frac{8g^4}{s^2} (p_1)^2 (p_3)^2 \sim 0$$

SUCCEDDE LA STESSA COSA CON $|\mathcal{M}|_{\mu}^2 \sim 0$

$$\frac{1}{2} \int |\mathcal{M}_{sg}|^2 = \frac{4g^4}{2} \int \varepsilon_{\mu}^{(\lambda_2)*}(p_2) \eta^{\mu\nu} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda_2)}(p_4) \varepsilon_{\rho}^{(\lambda_2)}(p_2) \eta^{\rho\sigma} \varepsilon_{\sigma}^{(\lambda_4)*}(p_4)$$

$$= 2g^4 \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \eta_{\rho\mu} \eta_{\nu\sigma} = 2g^4 \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = 8g^4$$

$$\frac{1}{2} \Gamma' M_s^\dagger M_\mu = \frac{g^4}{2s\mu} \Gamma' \varepsilon_\mu^{(\lambda_2)} (2p_1 + p_2)^\mu \varepsilon_\nu^{(\lambda_4)*} (2p_3 + p_4)^\nu \times \\ \times \varepsilon_\delta^{(\lambda_4)} (2p_1 + p_4)^\delta \varepsilon_\sigma^{(\lambda_2)*} (2p_3 - p_2)^\sigma$$

using $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) k^\mu = 0$

$$= \frac{g^4}{2s\mu} \Gamma' \varepsilon_\mu^{(\lambda_2)} \varepsilon_\sigma^{(\lambda_2)*} \varepsilon_\delta^{(\lambda_4)} \varepsilon_\nu^{(\lambda_4)*} (2p_1)^\mu (2p_3)^\nu (2p_1)^\delta (2p_3)^\sigma$$

$$= \frac{g^4}{2s\mu} 16 \eta_{\mu\sigma} \eta_{\delta\nu} p_1^\mu p_3^\nu p_1^\delta p_3^\sigma$$

$$= \frac{8g^4}{s\mu} (p_1 p_3)(p_1 p_3)$$

$$= \frac{8g^4}{s\mu} \frac{\mu^2}{4} \sim 2g^4 \frac{\mu}{s}$$

$$\frac{1}{2} \Gamma' M_\mu^\dagger M_{SG} = \frac{2g^4}{2\mu} \Gamma' \varepsilon_\mu^{(\lambda_4)*} (2p_1 - p_4)^\mu \varepsilon_\nu^{(\lambda_2)} (2p_3 - p_2)^\nu \varepsilon_\delta^{(\lambda_2)*} \varepsilon^\delta_{(\lambda_4)}$$

$$\varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot k = 0$$

$$= \frac{g^4}{\mu} \sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda_1)*} \varepsilon_{\sigma}^{(\lambda_4)} \eta^{\sigma\delta} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda_2)} \varepsilon_{\delta}^{(\lambda_3)*} (2p_1)^{\mu} (2p_3)^{\nu}$$

$$= \frac{g^4}{\mu} \eta^{\sigma\delta} \eta_{\sigma\mu} \eta_{\nu\delta} 4 p_1^{\mu} p_3^{\nu}$$

$$= \frac{4g^4}{\mu} \eta_{\mu\nu} p_1^{\mu} p_3^{\nu} = -2g^4$$

$$\frac{1}{2} \sum \mathcal{M}_s^+ \mathcal{M}_{s_6} = \frac{2g^4}{2s} \sum \varepsilon_{\mu}^{(\lambda_1)} (2p_1 + p_2)^{\mu} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda_4)*} (2p_3 + p_4)^{\nu} \varepsilon_{\delta}^{(\lambda_2)*} \eta^{\delta\sigma} \varepsilon_{\sigma}^{(\lambda_5)}$$

$$= \frac{4g^4}{s} \underbrace{\eta_{\mu\delta} \eta_{\sigma\nu} \eta^{\delta\sigma}}_{\eta_{\mu\nu}} p_1^{\mu} p_3^{\nu}$$

$$= -2g^4 \frac{\mu}{s}$$

unique

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{g^4}{64\pi^2 s} \left\{ 8 + 4 \frac{\mu}{s} - 4 - 4 \frac{\mu}{s} \right\} = \frac{g^4}{16\pi^2 s}$$

PROBLEMA 2. SI CONSIDERINO DUE CAMPI SCALARI COMPLESSI ϕ_1 E ϕ_2 CARICHI RISPETTO AL GRUPPO DI SIMMETRIA GLOBALE $U(1) \times U(1)$, CON CARICHE $(+2, -2)$, $(-1, 1)$ RISPETTIVAMENTE.

NOTA LA PRIMA (SECONDA) COPPIA DI CARICHE SI RIFERISCE AL CAMPO ϕ_1 (ϕ_2), E IL PRIMO (SECONDO) ELEMENTO INDICA LA CARICA RISPETTO AL PRIMO (SECONDO) GRUPPO ABELIANO.

1. SCRIVERE LA LAGRANGIANA PIÙ GENERALE FINO ALL'ORDINE QUARTICO NEI CAMPI, NEL CASO DI SIMMETRIA GLOBALE.
2. CONSIDERARE ORA IL CASO IN CUI LA SIMMETRIA $U(1) \times U(1)$ SIA LOCALE, E IL POTENZIALE:

$$V(\phi_1, \phi_2) = \lambda(\phi_1 \phi_2)^2 - \mu^2 \phi_1^\dagger \phi_1 + M^2 \phi_2^\dagger \phi_2$$

DETERMINARE IL VUOTO E LO SPETTRO DEL MODELLO.

SOL. IL TESTO CI DICE CHE ABBIAMO LE SEGUENTI CARICHE:
(CON $U = \exp\{+ie\}$ GENERICO ELEMENTO DI $U(1)$)

$$U(1)_1 : \phi_1 \rightarrow e^{+i2\alpha} \phi_1 ; \quad \phi_2 \rightarrow e^{-i\alpha} \phi_2$$

$$U(1)_2 : \phi_1 \rightarrow e^{-i2\beta} \phi_1 ; \quad \phi_2 \rightarrow e^{+i\beta} \phi_2$$

DOBBIAMO COSTRUIRE INVARIANTI PER $\mathcal{L}$. I TERMINI CINETICI

$$\partial_\mu \phi_1^\dagger \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2^\dagger \partial^\mu \phi_2$$

VANNO BENE. DEI TERMINI QUADRATICI NEI DUE CAMPI (TERMINI DI MASSA CHE POI TOGLIAMO E USIAMO QUELLI DEL PUNTO 2):

$$m_1^2 \phi_1^\dagger \phi_1 \quad m_2^2 \phi_2^\dagger \phi_2$$

POSSIAMO INSERIRE DELLE INTERAZIONI. SONO POSSIBILI TERMINI CUBICI VISTE LE CARICHE DEI CAMPI:

$$\mathcal{L}_{\text{INT}} \supset \frac{\lambda_1}{2} \phi_1 \phi_2^2 + \frac{\lambda_2}{2} \phi_1^+ (\phi_2^+)^2$$

VERIFICA:

$$U(1)_1: \rightarrow e^{-2i\alpha} \phi_1^+ (e^{+i\alpha} \phi_2^+)^2 \quad \checkmark$$

$$U(1)_2: \text{ IDEM}$$

VERIFICA:

$$U(1)_1: \rightarrow e^{+2i\alpha} \phi_1 (e^{-i\alpha} \phi_2)^2 = e^{+2i\alpha} \phi_1 e^{-2i\alpha} \phi_2^2 \quad \checkmark$$

$$U(1)_2: \text{ IDEM con } \beta.$$

ANCHE TERMINI QUARTICI SONO POSSIBILI:

$$\mathcal{L}_{\text{INT}} \supset \lambda_3 (\phi_1 \phi_2)^\dagger (\phi_1 \phi_2) + \frac{\lambda_4}{2} (\phi_1^+ \phi_1)^2 + \frac{\lambda_5}{2} (\phi_2^+ \phi_2)^2$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow U(1)_1: & \rightarrow (e^{+2i\alpha} \phi_1 e^{-i\alpha} \phi_2)^\dagger (e^{+2i\alpha} \phi_1 e^{-i\alpha} \phi_2) \\ & = (\phi_1 \phi_2)^\dagger e^{-i\alpha} (\phi_1 \phi_2) e^{+i\alpha} \quad \checkmark \end{aligned}$$

DUNQUE

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_\mu \phi_1^+ \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2^+ \partial^\mu \phi_2 - m_1^2 \phi_1^+ \phi_1 - m_2^2 \phi_2^+ \phi_2 - \\ & - \frac{\lambda_1}{2} \phi_1 \phi_2^2 - \frac{\lambda_2}{2} \phi_1^+ (\phi_2^+)^2 - \lambda_3 (\phi_1 \phi_2)^\dagger (\phi_1 \phi_2) - \\ & - \frac{\lambda_4}{2} (\phi_1^+ \phi_1)^2 + \frac{\lambda_5}{2} (\phi_2^+ \phi_2)^2 \end{aligned}$$

NEL CASO VOLESSIMO RENDERE LA SIMMETRIA LOCALE, ABBIAMO LE DERIVATE COVARIANTI:

$$\mathcal{D}_\mu \phi_1 = (\partial_\mu - 2ig_1 A_\mu + 2ig_2 B_\mu) \phi_1$$

$$\mathcal{D}_\mu \phi_2 = (\partial_\mu + ig_1 A_\mu - ig_2 B_\mu) \phi_2$$

CON A_μ ASSOCIATO AD $U(1)_1$ E B_μ A $U(1)_2$.

LA LAGRANGIANA DEL PUNTO 2 È

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}_\mu \phi_1)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi_1) + (\mathcal{D}_\mu \phi_2)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi_2) - \\ - \lambda (\phi_1^\dagger \phi_1)^2 + \mu^2 \phi_1^\dagger \phi_1 - \mathcal{H}^2 \phi_2^\dagger \phi_2$$

SI VEDE

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \phi_1} = -2\lambda (\phi_1^\dagger \phi_1) \phi_1^\dagger + \mu^2 \phi_1^\dagger \\ \frac{\partial V}{\partial \phi_2} = -\mathcal{H}^2 \phi_2^\dagger \end{cases}$$

CERCANDO I MINIMI

$$\partial_{\phi_1} V = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi_1^+ = \phi_1 = 0 \\ \phi_1^+ \phi_1 = \mu^2 / 2\lambda \end{cases}$$

$$\partial_{\phi_2} V = 0 \Rightarrow \phi_2^+ = \phi_2 = 0$$

DOBBIAMO GUARDARE SOLO ϕ_1 , ESSENDO ϕ_2 GIÀ ATTORNO AL MINIMO.

RISCRIVIAMO $\phi_1 = \rho e^{i\theta}$, COSÌ:

$$V = \lambda \rho^4 - \mu^2 \rho^2 + \mu^2 \phi_2^+ \phi_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = 4\lambda \rho^3 - 2\mu^2 \rho = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho^2 = \mu^2 / 2\lambda \end{cases}$$

C. SERVE

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = 12\lambda \rho^2 - 2\mu^2 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \right|_{\rho_0} = \begin{cases} -\mu^2 & \text{SE } \rho_0 = 0 \\ 4\mu^2 & \text{SE } \rho_0 = \mu^2 / 2\lambda \end{cases}$$

ALLORA SE $\mu^2 < 0$ IL VUOTO DELLA TEORIA È

$\langle \rho \rangle = 0 \Rightarrow \langle \phi_1 \rangle = 0$ E LA LAGRANGIANA È GIÀ ATTORNO AL VUOTO.

IN TALE CASO LE MASSE DEI CAMPI SONO
RISPETTIVAMENTE $-\mu^2$ E M^2 .

SE $\mu^2 > 0$ ALLORA ATTORNO A: $\phi_0 = 0$ È UN MASSIMO E DOBBIAMO
ESPANDERE

$$\langle \phi \rangle = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}}$$

CALCOLIAMO L'ESPANSIONE DI $V(\phi)$ ATTORNO $\xi = \phi - \langle \phi \rangle$

$$V(\phi, \phi_2) \sim V(\langle \phi \rangle, \langle \phi_2 \rangle) + \left. \frac{\partial V}{\partial \phi} \right|_{\langle \phi \rangle} \xi + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\langle \phi \rangle} \xi^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 V}{\partial \phi^3} \right|_{\langle \phi \rangle} \xi^3 + \frac{1}{4!} \left. \frac{\partial^4 V}{\partial \phi^4} \right|_{\langle \phi \rangle} \xi^4$$

$24\lambda\phi^0$

24λ

$$\sim \text{cost} + 0 + \frac{1}{2} (4\mu^2) \xi^2 + \frac{1}{3!} (24\lambda \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}}) \xi^3 + \frac{1}{4!} (24\lambda) \xi^4$$

$$\sim \text{cost} + \frac{1}{2} (4\mu^2) \xi^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{24}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu^2 \lambda} \right) \xi^3 + \frac{1}{4!} (24\lambda) \xi^4$$

MA DA $\phi_1 = \rho e^{i\theta}$ POSSIAMO VEDERE IL GOLDSTONE:

$$\begin{aligned}
D_\mu \phi_1 &= (\partial_\mu - z i g_1 A_\mu + z i g_2 B_\mu) \rho e^{i\theta} \\
&= (\partial_\mu \rho e^{i\theta} + \rho e^{i\theta} (\partial_\mu \theta - z i g_1 A_\mu + z i g_2 B_\mu)) \\
&= (\partial_\mu \rho - z i (g_1 A_\mu - g_2 B_\mu - \frac{1}{z i} \partial_\mu \theta) \rho) e^{i\theta}
\end{aligned}$$

CHIAMO

$$\cos \theta = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad \sin \theta = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

$$\begin{cases} Z_\mu = \cos \theta A_\mu - \sin \theta B_\mu \\ A_\mu = \cos \theta B_\mu + \sin \theta A_\mu \end{cases}$$

così:

$$D_\mu \phi_1 = \left(\partial_\mu \rho - z i \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \left(Z_\mu - \frac{1}{z i} \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \partial_\mu \theta \right) \rho \right) e^{i\theta}$$

E VEDIAMO CHE θ È UN BOSONE DI GOLDSTONE SE LO
FACCIAMO MANGIARE A Z_μ :

$$Z_\mu - \frac{1}{z i} \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \partial_\mu \theta \rightarrow Z_\mu$$

PER CUI ABBIAMO:

$$\mathcal{D}_\mu \phi_1 = \left(\partial_\mu \varphi - 2i\sqrt{g_1^2 + g_2^2} \varphi Z_\mu \right) e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{D}_\mu \phi_1)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi_1) = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + 4\sqrt{g_1^2 + g_2^2} \varphi^2 Z_\mu Z^\mu$$

SVILUPPANDO ATTORNO $\xi = \varphi - \langle \varphi \rangle$:

$$\Rightarrow (\mathcal{D}_\mu \phi_1)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi_1) = \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + 4\sqrt{g_1^2 + g_2^2} (\xi + \langle \varphi \rangle)^2 Z_\mu Z^\mu$$

COSÌ $\mathcal{L}$ ATTORNO $\xi = \varphi - \langle \varphi \rangle$ E $\tilde{\phi}_2 = \phi_2 - \langle \phi_2 \rangle = \phi_2$ È

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + 4\sqrt{g_1^2 + g_2^2} (\xi^2 + 2\langle \varphi \rangle \xi + \langle \varphi \rangle^2) Z_\mu Z^\mu + \\ & + (\mathcal{D}_\mu \phi_2)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi_2) - \frac{1}{2} (4\mu^2) \xi - \mu^2 (\phi_2^\dagger \phi_2) - \\ & - \frac{1}{3!} \left(\frac{24}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu^2 \lambda} \right) \xi^3 - \frac{1}{4!} (24\lambda) \xi^4 \end{aligned}$$

DA CUI LEGGIAMO LE MASSE E VEDIAMO LE INTERAZIONI
(TRA ξ E Z , MA ANCHE ξ CON SE STESSO).

20250206

PROBLEMA 1. NELLA QED SI CONSIDERA IL PROCESSO DI SCATTERING COMPTON.

1. DISCUTERE LE REGOLE DI FEYNMAN.
2. DIMOSTRARE CHE L'AMPIEZZA DI PROBABILITÀ PER TALE PROCESSO È INVARIANTE DI GAUGE.
3. CALCOLARE LA SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE NON POLARIZZATA, NEL LIMITE DI ALTE ENERGIE.

SOL. PER LA QED, CON $\mathcal{L}_{\text{int}} = -ie\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$, LE REGOLE DI FEYNMAN SONO:

⊕ LINEE INTERNE:

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = \frac{-i}{p^2} \left(\eta_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right)$$

$$S_{\alpha\beta}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} (\not{p} + m)_{\alpha\beta}$$

⊕ VERTICE:


$$= -ie\gamma^\mu$$

⊕ GAMBE ESTERNE, PER $\mathcal{M}$:

$$l_{\text{in}} \sim u(p)$$

$$\bar{l}_{\text{in}} \sim \bar{v}(p)$$

$$\gamma_{\text{in}} \sim \epsilon_\mu^{(1)*}(p)$$

$$l_{\text{out}} \sim \bar{u}(p)$$

$$\bar{l}_{\text{out}} \sim v(p)$$

$$\gamma_{\text{out}} \sim \epsilon_\mu^{(2)}(p)$$

PER
DIAGRAMMI

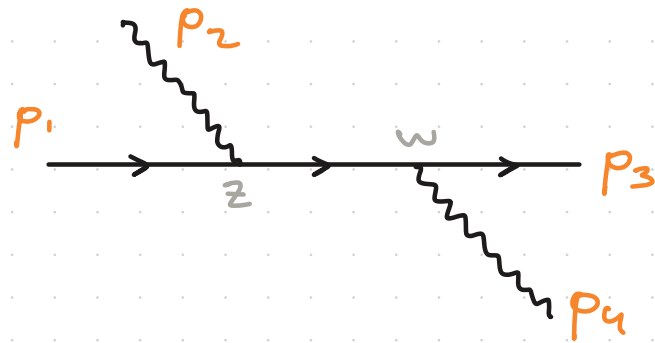
SCATTERING

COMPTON

$$e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$$

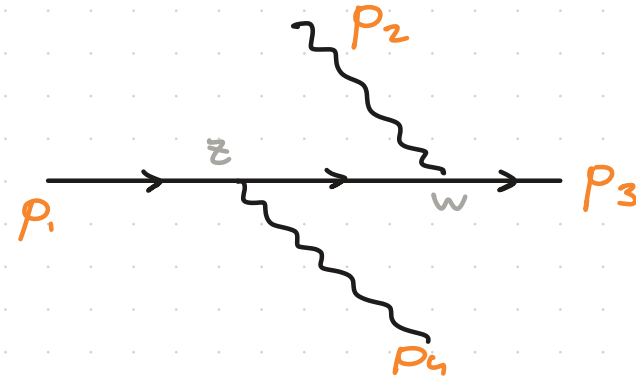
SI

HANNO 1



CANALE S:

$$p = p_1 + p_2$$



CANALE U:

$$p = p_1 - p_4$$

CON

$$\mathcal{M}_s = \frac{i(-ie)^2}{p_s^2 - m^2} \left(\bar{u}(p_3) \gamma^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda_4)}(p_4) \right) \left((\not{p}_1 + \not{p}_2) + m \right) \left(\epsilon_\nu^{(\lambda_2)*}(p_2) \gamma^\nu u(p_1) \right)$$

$$\mathcal{M}_u = \frac{i(-ie)^2}{p_u^2 - m^2} \left(\bar{u}(p_3) \gamma^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda_2)*}(p_2) \right) \left((\not{p}_1 - \not{p}_4) + m \right) \left(\epsilon_\nu^{(\lambda_4)}(p_4) \gamma^\nu u(p_1) \right)$$

VEDIAMO SE C'È SEGNO RELATIVO:

$$S \sim \langle 0 | T \left[\underbrace{\psi(x_1) A_\mu(x_2) A_\nu(x_4) \psi(x_3) \dots \psi(z) A_\mu(z) \psi(z) \dots \psi(w) A_\mu(w) \psi(w)}_{\text{diagrammatical structure}} \right] | 0 \rangle$$

$$\mu: \sim \langle 0 | T \left[\overbrace{\psi(x_1) A_\mu(x_2) A_\nu(x_4) \psi(x_3) \dots \psi(z) A_\mu(z) \psi(z) \dots \psi(w) A_\mu(w) \psi(w)} \right] | 0 \rangle$$

L'UNICA CONTRAZIONE NON DA SEGNO DIFFERENTE COINVOLGE I CAMPI A_μ , DUNQUE

DOBBIAMO DUNQUE CALCOLARE

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{1}{4} \left[|\mathcal{M}_s|^2 + |\mathcal{M}_u|^2 + 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_s^* \mathcal{M}_u \right]$$

MA POSSIAMO DIMOSTRARE CHE $\mathcal{M}$ È INVARIANTE DI GAUGE.

ABBIAMO:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi - \frac{1}{2\xi} (\partial A)^2$$

DOBBIAMO FARE UNA TRASFORMAZIONE:

$$\epsilon_\mu^{(\lambda)}(p) \longrightarrow \epsilon_\mu^{(\lambda)}(p) - \alpha(p) p_\mu$$

SU:

$$\mathcal{M} = -ie^2 \left\{ \left(\bar{u}(p_3) \epsilon_\mu^{(\lambda_4)}(p_4) \gamma^\mu \frac{\not{p}_3 + m}{p_3^2 - m^2} \epsilon_\nu^{(\lambda_2)*}(p_2) \gamma^\nu u(p_1) \right) + \right.$$

$$+ \left(\bar{u}(p_3) \varepsilon_{\nu}^{(\lambda_2)*}(p_2) \gamma^{\nu} \frac{(\not{p}_\mu + m)}{p_\mu^2 - m^2} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda_4)}(p_4) \gamma^{\mu} u(p_1) \right) \Bigg\}$$

$$\equiv \mathcal{M}^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda_4)}(p_4) \varepsilon_{\nu}^{(\lambda_2)*}(p_2)$$

FACENDO UNA TRASFORMAZIONE SIMULTANEA SULLE POLARIZZAZIONI DEI FOTONI:

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mu\nu} \left(\varepsilon_{\mu}^{(\lambda_4)} - \alpha(p_4)(p_4)_{\mu} \right) \left(\varepsilon_{\nu}^{(\lambda_2)*} - \beta(p_2)p_{2\nu} \right)$$

$$= \mathcal{M}^{\mu\nu} \left\{ \varepsilon_{\mu}^{(\lambda_4)} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda_2)*} - \alpha \varepsilon_{\nu}^{(\lambda_2)*} (p_4)_{\mu} - \beta \varepsilon_{\mu}^{(\lambda_4)} (p_2)_{\nu} + \alpha\beta (p_4)_{\mu} (p_2)_{\nu} \right\}$$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{M} = \underbrace{-\alpha \mathcal{M}^{\mu\nu} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda_2)*} (p_4)_{\mu}}_{\text{⊗}} - \beta \mathcal{M}^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda_4)} (p_2)_{\nu} + \alpha\beta \mathcal{M}^{\mu\nu} (p_4)_{\mu} (p_2)_{\nu}$$

ANALIZZANDO IL TERMINE ⊗ (GLI ALTRI SONO ANALOGHI):

$$\delta \mathcal{M} = -\alpha(p_4) (-ie^2) \left\{ \bar{u}(p_3) \gamma^{\mu} \frac{(\not{p}_5 + m)}{p_5^2 - m^2} \not{\varepsilon}^{(\lambda_2)*}(p_2) u(p_1) + \right. \\ \left. + \bar{u}(p_3) \not{\varepsilon}^{(\lambda_2)*}(p_2) \frac{(\not{p}_\mu + m)}{p_\mu^2 - m^2} \gamma^{\mu} u(p_1) \right\} (p_4)_{\mu}$$

$$= ie^2 \alpha(p_4) \left\{ \bar{u}(p_3) \not{p}_4 (\not{p}_5 - m)^{-1} \not{\epsilon}^{(\lambda_2)*}(p_2) u(p_1) + \bar{u}(p_3) \not{\epsilon}^{(\lambda_2)*}(p_2) (\not{p}_4 - m)^{-1} \not{p}_4 u(p_1) \right\}$$

LA CONSERVAZIONE DEL QUADRI-IMPULSO CI DICE:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_4 = p_3 - p_2$$

È VOGLIAMO TROVARE UN MODO PER SCRIVERE GLI OPERATORI $(\not{p}_i - m)$. VEDIAMO:

$$\begin{cases} \not{p}_4 = (\not{p}_1 - m) - (\not{p}_1 - \not{p}_4 - m) = (\not{p}_1 - m) - (\not{p}_4 - m) \\ \not{p}_4 = -(\not{p}_3 - m) + (\not{p}_3 + \not{p}_4 - m) = -(\not{p}_3 - m) + (\not{p}_1 + \not{p}_2 - m) \\ \not{p}_2 = -(\not{p}_1 - m) + (\not{p}_1 + \not{p}_2 - m) = -(\not{p}_1 - m) + (\not{p}_5 - m) \\ \not{p}_2 = (\not{p}_3 - m) - (\not{p}_3 - \not{p}_2 - m) = (\not{p}_3 - m) - (\not{p}_1 - \not{p}_4 - m) \end{cases}$$

così:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{M} = & -ie^2 \alpha(p_4) \left\{ \bar{u}(p_3) \left[-(\not{p}_3 - m) + (\not{p}_1 + \not{p}_2 - m) \right] (\not{p}_5 - m)^{-1} \not{\epsilon}^{(\lambda_2)*} u(p_1) + \right. \\ & \left. + \bar{u}(p_3) \not{\epsilon}^{(\lambda_2)*} (\not{p}_4 - m)^{-1} \left[(\not{p}_1 - m) - (\not{p}_1 - \not{p}_4 - m) \right] u(p_1) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -ie^2 \alpha(p_4) \left\{ -\bar{u}(p_3) (\not{p}_3 - m) (\not{p}_5 - m)^{-1} \not{e}^{(\lambda_2)*} u(p_1) + \right. \\
&\quad + \underline{\bar{u}(p_3) \not{e}^{(\lambda_2)*} u(p_1)} + \\
&\quad + \bar{u}(p_3) \not{e}^{(\lambda_2)*} (\not{p}_4 - m)^{-1} (\not{p}_1 - m) u(p_1) - \\
&\quad \left. - \underline{\bar{u}(p_3) \not{e}^{(\lambda_2)*} u(p_1)} \right\}
\end{aligned}$$

I TERMINI RESTANTI PER $\delta \mathcal{M}$ VIOLA POSSIAMO USARE LE RELAZIONI VALIDE NEI PARTICELLE ON-SHELL:

$$(\not{p} - m) u(p) = 0$$

$$\bar{u}(p) (\not{p} - m) = 0$$

COSÌ CONCLUDIAMO: $\delta \mathcal{M} = 0$.

CALCOLIAMO $|\mathcal{M}|^2$: CHIAMO $\hat{n} = \{s, \mu\}$

$$\frac{1}{4} \sum_{\hat{n}} |\mathcal{M}_{\hat{n}}|^2 = \frac{e^4}{4 \hat{n}^2} \sum_{\lambda, s} \left(\bar{u}_{\alpha}(p_3) (\not{e}^{(\lambda_4)})_{\alpha\beta} (\not{p}_{\hat{n}} + m)_{\beta\gamma} (\not{e}^{(\lambda_2)*})_{\gamma\delta} u_{\delta}(p_1) \right) \times$$

$$\times \left(\bar{u}_\varepsilon(p_1) (\not{\epsilon}^{(\lambda_2)})_{\varepsilon\tau} (\not{p}_2 + m)_{\tau\omega} (\not{\epsilon}^{(\lambda_4)*})_{\omega\theta} u_\theta(p_3) \right)$$

$$\sim \frac{e^4}{4i^2} \frac{1}{s} \varepsilon_\mu^{(\lambda_4)} \varepsilon_\nu^{(\lambda_4)*} \varepsilon_\delta^{(\lambda_2)} \varepsilon_\sigma^{(\lambda_2)*} \times$$

$$\times \frac{1}{s} \left(\bar{u}_\alpha(p_3) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\not{p}_1)_{\beta\delta} (\gamma^\sigma)_{\delta\varepsilon} u_\varepsilon(p_1) \right) \left(\bar{u}_\varepsilon(p_1) (\gamma^\delta)_{\varepsilon\tau} (\not{p}_2)_{\tau\omega} (\gamma^\nu)_{\omega\theta} u_\theta(p_3) \right)$$

$$= \frac{e^4}{4i^2} (-\eta_{\mu\nu})(-\eta_{\rho\sigma}) (\not{p}_1)_{\delta\varepsilon} (\gamma^\delta)_{\varepsilon\tau} (\not{p}_2)_{\tau\omega} (\gamma^\nu)_{\omega\theta} (\not{p}_3)_{\theta\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\not{p}_1)_{\beta\gamma} (\gamma^\sigma)_{\gamma\delta}$$

$$= \frac{e^4}{4i^2} \text{Tr} \left\{ \not{p}_1 \gamma^\delta \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_3 \gamma_\nu \not{p}_1 \gamma_\delta \right\}$$

USIAMO $\gamma^\nu \not{p}_3 \gamma_\nu = -2\not{p}_3$ E LA CICLICITÀ DELLA TRACCIA!

$$= \frac{e^4}{4i^2} (-2) \text{Tr} \left\{ \not{p}_2 \not{p}_3 \not{p}_1 \underbrace{\gamma_\delta \not{p}_1 \gamma^\delta}_{-2\not{p}_1} \right\}$$

$$= \frac{e^4}{i^2} \text{Tr} \left\{ \not{p}_2 \not{p}_3 \not{p}_1 \not{p}_1 \right\}$$

DUNQUE

$$\frac{1}{4} \sum \{ |\mathcal{M}_s|^2 + |\mathcal{M}_\mu|^2 \} = 4 \frac{e^4}{s^2} \left[2(p_s p_3)(p_s p_1) - (p_1 p_3)(p_s)^2 \right] +$$

$$+ 4 \frac{e^4}{\mu^2} \left[2(p_\mu p_3)(p_\mu p_1) - (p_1 p_3)(p_\mu)^2 \right]$$

$$= 4 \frac{e^4}{s^2} \left[2(p_3 p_4)(p_1 p_2) + \frac{t}{2} (2p_1 p_2) \right] + 4 \frac{e^4}{\mu^2} \left[2(-p_2 p_3)(-p_1 p_4) + \frac{t}{2} (-2p_1 p_4) \right]$$

$$= 4 \frac{e^4}{s^2} \left[\frac{s^2}{2} + \frac{ts}{2} \right] + 4 \frac{e^4}{\mu^2} \left[\frac{\mu^2}{2} + \frac{t\mu}{2} \right]$$

$$= \frac{2e^4}{s} (s+t) + 2 \frac{e^4}{\mu} (\mu+t)$$

$$= -2e^4 \left(\frac{\mu}{s} + \frac{s}{\mu} \right)$$

ORA IL TERMINE MISTO:

$$\frac{1}{4} \sum_{\lambda, s} \mathcal{M}_s^\dagger \mathcal{M}_\mu = \frac{e^4}{4\mu s} \sum_{\lambda, s} \left(\bar{u}_\alpha(p_1) \not{\epsilon}_{\alpha\beta}^{(\lambda)} (p_s)_{\beta\gamma} \not{\epsilon}_{\gamma\delta}^{(24)*} u_\delta(p_3) \right) \times$$

$$\times (\bar{\mu}_\varepsilon(p_3) \not{\varepsilon}_{\varepsilon\tau}^{(\lambda_2)*} (\not{p}_\mu)_{\tau\omega} \not{\varepsilon}_{\omega\theta}^{(\lambda_4)} \mu_\theta(p_1))$$

$$= \frac{e^4}{4ms} \sum_{\lambda} \varepsilon_\mu^{(\lambda_4)} \varepsilon_\nu^{(\lambda_4)*} \varepsilon_\rho^{(\lambda_2)} \varepsilon_\sigma^{(\lambda_2)*} \times$$

$$\times \int_s \bar{\mu}_\alpha(p_1) (\gamma^\rho)_{\alpha\beta} (\not{p}_s)_{\beta\gamma} (\gamma^\nu)_{\gamma\delta} \mu_\delta(p_3) \bar{\mu}_\varepsilon(p_3) (\gamma^\sigma)_{\varepsilon\tau} (\not{p}_\mu)_{\tau\omega} (\gamma^\mu)_{\omega\theta} \mu_\theta(p_1)$$

$$= \frac{e^4}{4ms} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} (\not{p}_3)_{\delta\varepsilon} (\gamma^\sigma)_{\varepsilon\tau} (\not{p}_\mu)_{\tau\omega} (\gamma^\mu)_{\omega\theta} (\not{p}_1)_{\theta\alpha} (\gamma^\rho)_{\alpha\beta} (\not{p}_s)_{\beta\gamma} (\gamma^\nu)_{\gamma\delta}$$

$$= \frac{e^4}{4ms} \text{Tr} \{ \not{p}_3 \gamma^\sigma \not{p}_\mu \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\sigma \not{p}_s \gamma_\mu \}$$

$$= \frac{e^4}{4ms} (\not{p}_3)^\alpha (\not{p}_\mu)^\beta (\not{p}_1)^\delta (\not{p}_s)^\gamma \underbrace{\text{Tr} \{ \gamma_\alpha \gamma^\sigma \gamma_\beta \gamma^\mu \gamma_\delta \gamma_\sigma \gamma_\gamma \gamma_\mu \}}_{-32 \eta_{\beta\gamma} \eta_{\alpha\delta}}$$

$$= -\frac{8e^4}{sm} (p_\mu p_s)(p_1 p_3)$$

$$= \frac{4e^4}{s\mu} t \left[(p_1 p_2) - (p_2 p_4) - (p_1 p_4) \right]$$

$$= 4e^4 \frac{t}{s\mu} \left[\frac{s}{2} + \frac{t}{2} + \frac{\mu}{2} \right] = 0$$

DONQUE :

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{-ze^4}{64\pi^2 s} \left(\frac{\mu}{s} + \frac{s}{\mu} \right)$$

PROBLEMA 2. DATA LA DENSITÀ DI LAGRANGIANA:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{3}{4} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_1^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_2^2 \\ & - \frac{1}{8} \lambda \phi_1^4 - \frac{1}{4} \lambda \phi_2^4 + \bar{\psi} (i \not{\partial} - M) \psi - \\ & - g \left(\phi_1 \sqrt{2-\sqrt{2}} + \phi_2 \sqrt{2+\sqrt{2}} \right) \bar{\psi} \psi \end{aligned}$$

CON $\phi_{1,2}$ CAMPI SCALARI REALI E ψ UNO SPINORE DI DIRAC, TUTTE LE COSTANTI SONO REALI E POSITIVE. DETERMINARE

1. LO SPETTRO DELLE PARTICELLE
2. LE REGOLE DI FEYNMAN
3. I DIAGRAMMI DI FEYNMAN PER I PROCESSI $e^+ + e^- \rightarrow 2\eta_i$
4. LE AMPIEZZE DI PROBABILITÀ PER I SUDDETTI PROCESSI

DOVE L'ELETTRONE È ASSOCIATO AL CAMPO DI DIRAC ψ , MENTRE η_i ($i=1,2$) SONO LE DUE PARTICELLE SCALARI (REALI) PRESENTI NELLA TEORIA.

SOL. ABBIAMO

$$\begin{aligned} V(\phi_1, \phi_2) = & \bar{\psi} m \psi + \frac{1}{2} m^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi_2^2 + \frac{1}{8} \lambda \phi_1^4 + \frac{1}{4} \lambda \phi_2^4 + \\ & + g \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} \phi_1 + \sqrt{2+\sqrt{2}} \phi_2 \right) \bar{\psi} \psi \end{aligned}$$

È IL TERMINE CINETICO:

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \partial_\mu (\phi_1 \quad \phi_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \partial^\mu \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + i \bar{\psi} \not{\partial} \psi$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu (\phi_1 \quad \phi_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial^\mu \phi_2 \\ \frac{1}{2} \partial^\mu \phi_1 + \frac{3}{2} \partial^\mu \phi_2 \end{pmatrix} + i \bar{\psi} \not{\partial} \psi$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_1 + \frac{3}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 \right\} + i \bar{\psi} \not{\partial} \psi$$

$$= \frac{1}{4} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_2 + \frac{3}{4} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 + i \bar{\psi} \not{\partial} \psi$$

CHE CHIARAMENTE NON È DIAGONALE PER I CAMP. ϕ .
DOBBIAMO DIAGONALIZZARE:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

risolvo $\det |K - \lambda \mathbb{1}| = 0$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \left(\frac{3}{2} - \lambda \right) - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{1}{2} - 2\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1 RELATIVI AUTONETTORI:

$$(K - \lambda_{\pm} 11) v = 0$$

$$\lambda_+ : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{b}{2} = 0 \\ \dots \end{cases} \rightarrow b = (1 + \sqrt{2})a$$

$$\lambda_- : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{b}{2} = 0 \\ \dots \end{cases} \rightarrow b = (1 - \sqrt{2})a$$

DUNQUE TROVIAMO:

$$K = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

NORMALIZZANDO GLI AUTOVETTORI:

$$\|v_{\pm}\|^2 = 1 + (1 \pm \sqrt{2})^2 = 1 + 1 + 2 \pm 2\sqrt{2} = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

così

$$\xi_+ = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\xi_- = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

CHIAMO

$$S = \left(\frac{\xi_+}{\sqrt{\lambda_+}} \mid \frac{\xi_-}{\sqrt{\lambda_-}} \right)$$

MATRICE CON GLI AUTOVETTORI
CINETICI SULLA DIAGONALE.
DIVIDIAMO GIÀ PER GLI AUTOVALORI
PER AVERE I NUOVI CAMPI
CORRETTAMENTE NORMALIZZATI.

SI HA:

$$\phi = S \tilde{\phi} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\xi_{+x}}{\sqrt{\lambda_+}} & \frac{\xi_{-x}}{\sqrt{\lambda_-}} \\ \frac{\xi_{+y}}{\sqrt{\lambda_+}} & \frac{\xi_{-y}}{\sqrt{\lambda_-}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\phi} = S^{-1} \phi \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_+} \xi_{+x} & \sqrt{\lambda_+} \xi_{+y} \\ \sqrt{\lambda_-} \xi_{-x} & \sqrt{\lambda_-} \xi_{-y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

DUNQUE

ABBIAMO

I NUOVI CAMPI

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} & \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \\ \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} & \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(1 - \sqrt{2})}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \left\{ \phi_1 + (1 + \sqrt{2})\phi_2 \right\} \\ \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \left\{ \phi_1 + (1 - \sqrt{2})\phi_2 \right\} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{\sqrt{2} \pm 1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}}$$

MA

CI

SERVONO

I

VECCHI

CAMPI

IN

FUNZIONE

DEI

NUOVI:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{2 + \sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} & \sqrt{\frac{2}{2 - \sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \\ \sqrt{\frac{2}{2 + \sqrt{2}}} \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} & \sqrt{\frac{2}{2 - \sqrt{2}}} \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \tilde{\phi}_1 + \sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \tilde{\phi}_2 \\ \sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{2}}} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \tilde{\phi}_1 + \sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\frac{2}{2\pm\sqrt{2}}} \frac{1\pm\sqrt{2}}{\sqrt{4\pm2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pm\sqrt{2}}} \frac{1\pm\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2\pm\sqrt{2}}} = \frac{1\pm\sqrt{2}}{2\pm\sqrt{2}}$$

DUNQUE ABBIAMO

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \left\{ \phi_1 + (1+\sqrt{2})\phi_2 \right\} \\ \tilde{\phi}_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \left\{ \phi_1 + (1-\sqrt{2})\phi_2 \right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \tilde{\phi}_1 + \frac{1}{2-\sqrt{2}} \tilde{\phi}_2 \\ \phi_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \tilde{\phi}_1 + \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \tilde{\phi}_2 \end{cases}$$

SI POSSONO PULIRE ANCORA SE RAZIONALIZZIAMO. INFATTI VALGONO

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2} \pm 1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2 \pm \sqrt{2}} \cdot \frac{2 \mp \sqrt{2}}{2 \mp \sqrt{2}} = \frac{2 \mp \sqrt{2} \pm 2\sqrt{2} - 2}{2} = \frac{\pm \sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{2 \pm \sqrt{2}} \cdot \frac{2 \mp \sqrt{2}}{2 \mp \sqrt{2}} = \frac{2 \mp \sqrt{2}}{2}$$

È SI HA

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_1 = \frac{1}{2} (\phi_1 + (1 + \sqrt{2})\phi_2) \\ \tilde{\phi}_2 = \frac{1}{2} (\phi_1 + (1 - \sqrt{2})\phi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \tilde{\phi}_1 + \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \tilde{\phi}_2 \\ \phi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\tilde{\phi}_1 - \tilde{\phi}_2) \end{cases}$$

SE RISCRIVIAMO LA LAGRANGIANA USANDO QUESTE ESPRESSIONI:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu (\tilde{\Phi}_1 \quad \tilde{\Phi}_2) \underbrace{S^T K S}_{\tilde{K} \quad (?) } \partial^\mu \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix} + \bar{\Psi} (\not{\partial} - \mathcal{H}) \Psi - \\
 & - \frac{1}{2} m^2 \left[\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} \tilde{\Phi}_1 + \frac{2+\sqrt{2}}{2} \tilde{\Phi}_2 \right)^2 + \frac{2}{4} (\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2)^2 \right] - \\
 & - \frac{1}{8} \lambda \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} \tilde{\Phi}_1 + \frac{2+\sqrt{2}}{2} \tilde{\Phi}_2 \right)^4 - \\
 & - \frac{1}{4} \lambda \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2) \right)^4 - \\
 & - g \left[\sqrt{2-\sqrt{2}} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} \tilde{\Phi}_1 + \frac{2+\sqrt{2}}{2} \tilde{\Phi}_2 \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \sqrt{2+\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} (\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2) \right] \bar{\Psi} \Psi
 \end{aligned}$$

CALCOLIAMO I SINGOLI PEZZI:

$$\frac{1}{2} m^2 [\Phi_1^2 + \Phi_2^2] = \frac{m^2}{2} \left[\frac{2-2\sqrt{2}}{4} \tilde{\Phi}_1^2 + \frac{6+2\sqrt{2}}{4} \tilde{\Phi}_2^2 + \frac{2}{2} \tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_2 + \frac{1}{2} (\tilde{\Phi}_1^2 + \tilde{\Phi}_2^2 - 2\tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_2) \right]$$

$$= \frac{m^2}{2} \left[\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \right) \tilde{\phi}_1^2 + \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \right) \tilde{\phi}_2^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} \right) m^2 \tilde{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} (2+\sqrt{2}) m^2 \tilde{\phi}_2^2$$

DUNQUE I CAMPI SCALARI HANNO MASSE DIVERSE

$$m_1^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} m^2$$

$$m_2^2 = (2+\sqrt{2}) m^2$$

TERMINE $\lambda \phi^4$:

$$\frac{1}{8} \lambda \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} \tilde{\phi}_1 + \frac{2+\sqrt{2}}{2} \tilde{\phi}_2 \right)^4 + \frac{1}{4} \lambda \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\tilde{\phi}_1 - \tilde{\phi}_2) \right)^4$$

RINOMINIAMO LE COSTANTI

$$a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$b = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

COSÌ ABBIAMO

$$\frac{\lambda}{8} \left(a^4 \tilde{\phi}_1^4 + 4a^3b \tilde{\phi}_1^3 \tilde{\phi}_2 + 6a^2b^2 \tilde{\phi}_1^2 \tilde{\phi}_2^2 + 4ab^3 \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2^3 + b^4 \tilde{\phi}_2^4 \right) +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{4} c^4 \left(\tilde{\phi}_1^4 + 4\tilde{\phi}_1^3\tilde{\phi}_2 + 6\tilde{\phi}_1^2\tilde{\phi}_2^2 + 4\tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_2^3 + \tilde{\phi}_2^4 \right) \\
&= \lambda \left\{ \left(\frac{a^4}{8} + \frac{c^4}{4} \right) \tilde{\phi}_1^4 + \left(\frac{4a^3b}{8} + \frac{4c^4}{4} \right) \tilde{\phi}_1^3\tilde{\phi}_2 + \left(\frac{6a^2b^2}{8} + \frac{6c^4}{4} \right) \tilde{\phi}_1^2\tilde{\phi}_2^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{4ab^3}{8} + \frac{4c^4}{4} \right) \tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_2^3 + \left(\frac{b^4}{8} + \frac{c^4}{4} \right) \tilde{\phi}_2^4 \right\}
\end{aligned}$$

VALGONO

$$a^4 = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^4 = \left(\frac{6 - 4\sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{36 + 32 - 48\sqrt{2}}{16} = \frac{68 - 48\sqrt{2}}{16} = \frac{17 - 12\sqrt{2}}{4}$$

$$b^4 = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right)^4 = \frac{17 + 12\sqrt{2}}{4}$$

$$c^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$a^2b^2 = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^2 \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right)^2 = \left(\frac{2}{4} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a^3b = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^3 \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^2 \frac{2}{4} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{4}$$

$$2b^3 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{6+2\sqrt{2}}{4} = \frac{3+\sqrt{2}}{4}$$

$$= \lambda \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{17-12\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} \right) \tilde{\phi}_1^4 + \left(\frac{3-\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} \right) \tilde{\phi}_1^3 \tilde{\phi}_2 + \left(\frac{3}{16} + \frac{3}{8} \right) \tilde{\phi}_1^2 \tilde{\phi}_2^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{3+\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} \right) \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{17+12\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} \right) \tilde{\phi}_2^4 \right\}$$

$$= \lambda \left\{ \frac{19-12\sqrt{2}}{32} \tilde{\phi}_1^4 + \frac{5-\sqrt{2}}{8} \tilde{\phi}_1^3 \tilde{\phi}_2 + \frac{9}{16} \tilde{\phi}_1^2 \tilde{\phi}_2^2 + \right. \\ \left. + \frac{5+\sqrt{2}}{8} \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2^3 + \frac{19+12\sqrt{2}}{32} \tilde{\phi}_2^4 \right\}$$

$$\phi^4 \rightarrow \frac{\lambda}{4!}$$

$$\phi^3 \rightarrow \frac{\lambda}{3!}$$

$$\phi^2 \rightarrow \frac{\lambda}{2}$$

$$\phi \rightarrow \lambda$$

$$= \frac{\lambda}{4!} \frac{24}{32} (19-12\sqrt{2}) \tilde{\phi}_1^4 + \frac{\lambda}{3!} \frac{6}{8} (5-\sqrt{2}) \tilde{\phi}_1^3 \tilde{\phi}_2 + \frac{\lambda}{(2!)^2} \frac{9}{4} \tilde{\phi}_1^2 \tilde{\phi}_2^2 + \\ + \frac{\lambda}{3!} \frac{6}{8} (5+\sqrt{2}) \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2^3 + \frac{\lambda}{4!} \frac{24}{32} (19+12\sqrt{2}) \tilde{\phi}_2^4$$

LI SCRIVO COME

$$= \frac{\lambda_1}{4!} \tilde{\phi}_1^4 + \frac{\lambda_2}{3!} \tilde{\phi}_1^3 \tilde{\phi}_2 + \frac{\lambda_3}{4} \tilde{\phi}_1^2 \tilde{\phi}_2^2 + \frac{\lambda_4}{3!} \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2^3 + \frac{\lambda_5}{4!} \tilde{\phi}_2^4$$

CON

$$\lambda_1 = \lambda \frac{3}{4} (19 - 12\sqrt{2})$$

$$\lambda_3 = \lambda \frac{9}{4}$$

$$\lambda_2 = \lambda \frac{3}{4} (5 - \sqrt{2})$$

$$\lambda_4 = \lambda \frac{3}{4} (5 + \sqrt{2})$$

$$\lambda_5 = \lambda \frac{3}{4} (19 + 12\sqrt{2})$$

L'ULTIMO TERMINE È :

$$g \left[\sqrt{2-\sqrt{2}} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} \tilde{\phi}_1 + \frac{2+\sqrt{2}}{2} \tilde{\phi}_2 \right) + \sqrt{2+\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} (\tilde{\phi}_1 - \tilde{\phi}_2) \right] \bar{\psi} \psi$$

$$= \frac{g}{2} \left\{ \left[(2-\sqrt{2})^{3/2} + \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \right] \tilde{\phi}_1 + \left[(2+\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}} - \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \right] \tilde{\phi}_2 \right\} \bar{\psi} \psi$$

DEFINIAMO

$$g_1 = \frac{g}{2} \left((2-\sqrt{2})^{3/2} + \sqrt{4+2\sqrt{2}} \right)$$

$$g_2 = \frac{g}{2} \left((2+\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}} - \sqrt{4+2\sqrt{2}} \right)$$

così

$$= g_1 \tilde{\phi}_1 \bar{\psi} \psi + g_2 \tilde{\phi}_2 \bar{\psi} \psi$$

ABBIAMO LA LAGRANGIANA:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi}_1 \partial^\mu \tilde{\phi}_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi}_2 \partial^\mu \tilde{\phi}_2 + \bar{\psi} (i \not{\partial} - M) \psi - \\ & - \frac{1}{2} m_1^2 \tilde{\phi}_1^2 - \frac{1}{2} m_2^2 \tilde{\phi}_2^2 - \\ & - \frac{\lambda_1}{4!} \tilde{\phi}_1^4 - \frac{\lambda_2}{3!} \tilde{\phi}_1^3 \tilde{\phi}_2 - \frac{\lambda_3}{4} \tilde{\phi}_1^2 \tilde{\phi}_2^2 - \frac{\lambda_4}{3!} \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2^3 - \frac{\lambda_5}{4!} \tilde{\phi}_2^4 - \\ & - g_1 \tilde{\phi}_1 \bar{\psi} \psi - g_2 \tilde{\phi}_2 \bar{\psi} \psi \end{aligned}$$

DOVE ABBIAMO DEFINITO: $m_1^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} m^2$ $m_2^2 = (2 + \sqrt{2}) m^2$

$$\lambda_1 = \lambda \frac{3}{4} (19 - 12\sqrt{2}) \quad \lambda_3 = \lambda \frac{9}{4} \quad \lambda_5 = \lambda \frac{3}{4} (19 + 12\sqrt{2})$$

$$\lambda_2 = \lambda \frac{3}{4} (5 - \sqrt{2}) \quad \lambda_4 = \lambda \frac{3}{4} (5 + \sqrt{2})$$

$$g_1 = \frac{g}{2} \left((2 - \sqrt{2})^{3/2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \right) \quad g_2 = \frac{g}{2} \left((2 + \sqrt{2}) \sqrt{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \right)$$

SPETTRO DELLE PARTICELLE:

ψ : MASSA M

$\hat{\phi}_1$: MASSA $m_1^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} m^2$

$\hat{\phi}_2$: MASSA $m_2^2 = (2 + \sqrt{2}) m^2$

REGOLE DI FEYNMAN:

⊕ LINEE INTERNE (PROPAGATORI):

$$\psi : S_{\alpha\beta}(p) = i(\not{p} - M)_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{i}{p^2 - M^2} (\not{p} + M)_{\alpha\beta}$$

$$\hat{\phi}_i : \Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m_i^2}$$

⊕ GAMBE ESTERNE (PER AMPIEZZA M)

$u(p)$ $\bar{u}(p)$ $\rightarrow$ PART. ENTRANTE USCENTE

$\bar{v}(p)$ $v(p)$ $\rightarrow$ ANTI-PART ENTRANTE USCENTE

$$\phi \sim 1$$

⊕ VERTICI :

$\tilde{\phi}_1^4 :$



$= -i\lambda_1$

$\tilde{\phi}_2^4 :$



$= -i\lambda_5$

$\phi_1^3 \phi_2 :$



$= -i\lambda_2$

$\phi_1 \phi_2^3 :$



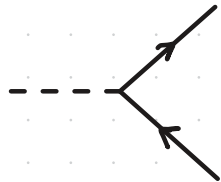
$= -i\lambda_4$

$\phi_1^2 \phi_2^2 :$



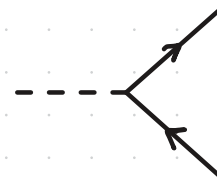
$= -i\lambda_3$

$\tilde{\phi}_1 \bar{\psi} \psi :$



$= -ig_1$

$\tilde{\phi}_2 \bar{\psi} \psi :$



$= -ig_2$

1

PROCESSI

$$e^+ e^- \rightarrow 2\eta$$

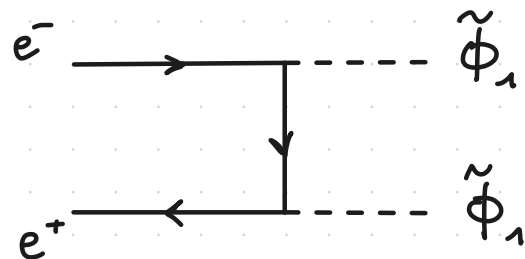
HANNO

1

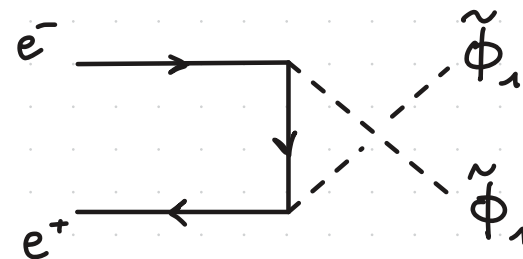
DIAGRAMMI:

CASO 1:

$$e^+ e^- \rightarrow 2\tilde{\phi}_1$$

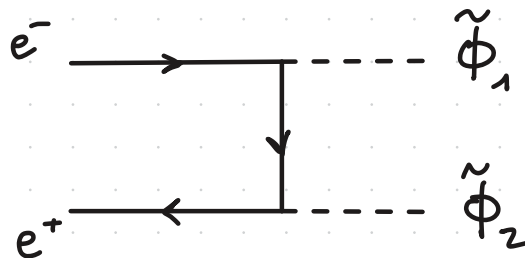


+

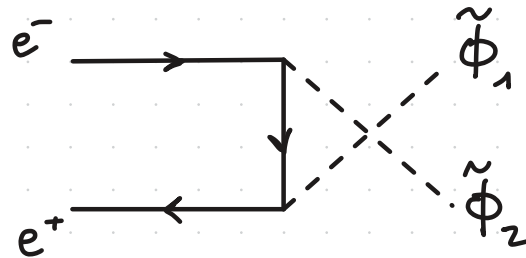


CASO 2:

$$e^+ e^- \rightarrow \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2$$

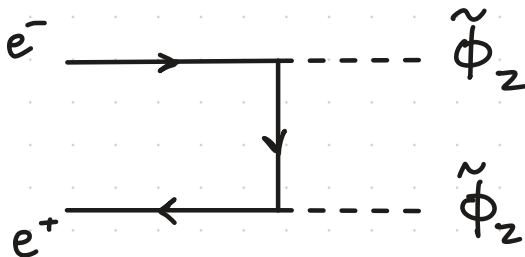


+

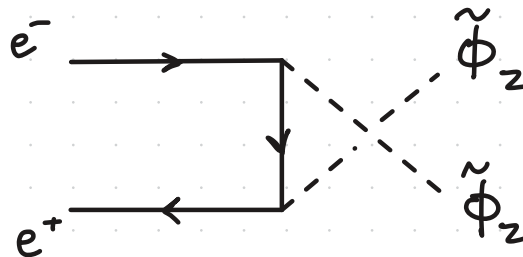


CASO 3:

$$e^+ e^- \rightarrow \tilde{\phi}_2 \tilde{\phi}_2$$



+



NO SEGNO RELATIVO

PER
A

PER

2°

E

3°

RIGA

SI

HANNO

DIAGRAMMI

PROPORZIONALI

$$g_2^2 = \frac{g^2}{4} \left((2+\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}} - \sqrt{4+2\sqrt{2}} \right)^2$$

$$= \frac{g^2}{4} \left((6+4\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) + (4+2\sqrt{2}) - 2(2+\sqrt{2})\sqrt{2(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} \right)$$

$$= \frac{g^2}{4} \left(12 - 6\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 8 + 4 + 2\sqrt{2} - 2(2+\sqrt{2})\sqrt{2(4-2)} \right)$$

$$= \frac{g^4}{4} \left(8 + 4\sqrt{2} - 4(2+\sqrt{2}) \right)$$

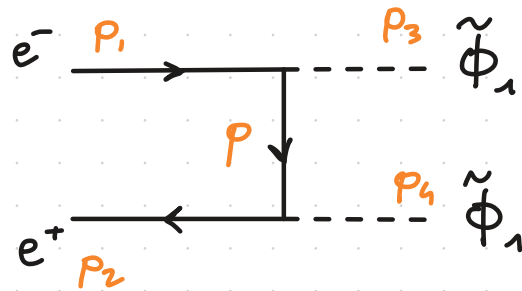
$$= \frac{g^4}{4} \left(8 + 4\sqrt{2} - 8 - 4\sqrt{2} \right)$$

$$= 0$$

DUNQUE ACCOPPIA C'È SOLO UN CASO POSSIBILE (IN CUI ϕ_2 NON SI ACCOPPIA CON I FERMIONI)

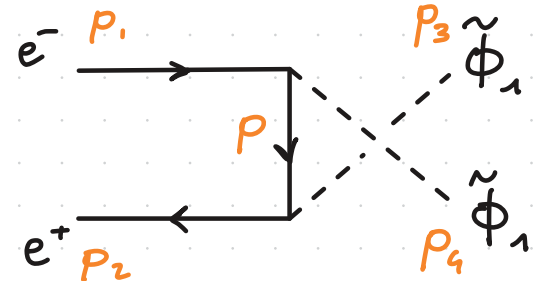
CASO 1:

$$e^+ e^- \rightarrow 2\tilde{\phi}_1$$



$$t: p = p_1 - p_3$$

+



$$u: p = p_1 - p_4$$

$$\mathcal{M}_t = \frac{(-ig_1)^2}{(p_1 - p_3)^2 - M^2} \left(\bar{v}_\alpha(p_2) (\not{p}_t + M)_{\alpha\beta} u_\beta(p_1) \right)$$

$$\mathcal{M}_u = \frac{(-ig_1)^2}{(p_1 - p_4)^2 - M^2} \left(\bar{v}_\alpha(p_2) (\not{p}_t + M)_{\alpha\beta} u_\beta(p_1) \right)$$

17/02/2025

PROBLEMA 1

SI CONSIDERI LA LAGRANGIANA

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \lambda \phi^4 + \bar{\psi} (\not{\partial} - \mathcal{M}) \psi - g \phi \bar{\psi} \psi$$

CON $m^2, \mathcal{M}, g$ E λ COSTANTI POSITIVE, ϕ CAMPO SCALARE REALE E ψ CAMPO DI DIRAC.

1. CALCOLARE I PROPAGATORI E DISCUTERE LE REGOLE DI FEYNMAN.
2. CALCOLARE LA SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE NON POLARIZZATA NEL LIMITE DI ALTE ENERGIE, PER IL PROCESSO $e^+ e^- \rightarrow 2\phi$, DOVE L'ELETTRONE È ASSOCIATO AL CAMPO DI DIRAC ψ E ϕ È UNA PARTICELLA SCALARE ASSOCIATA AL CAMPO ϕ .

SOLUZIONE

PER PRIMA COSA DOBBIAMO TROVARE IL VUOTO DELLA TEORIA. ABBIAMO

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} \phi^4 - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

$$\Rightarrow V'(\phi) = 2\lambda\phi^3 - m^2\phi$$

$$\text{IMPONIAMO } V'(\phi) = 0 \Rightarrow \phi(2\lambda\phi^2 - m^2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \phi_0 &= 0 \\ \phi_{\pm} &= \pm \sqrt{\frac{m^2}{2\lambda}} \end{aligned}$$

CALCOLIAMO ANCHE

$$V''(\phi) = 6\lambda\phi^2 - m^2$$

E VEDIAMO CHE, AVENDO $m^2 > 0$, SI HA

$$V''(\phi_0) = -m^2 < 0 \Rightarrow \phi_0 \text{ È UN MASSIMO DI } V(\phi)$$

$$V''(\phi_{\pm}) = 6\lambda \frac{m^2}{2\lambda} - m^2 = 2m^2 > 0 \Rightarrow \phi_{\pm} \text{ SONO DUE MINIMI DI } V(\phi)$$

SCEGLIAMO DI ESPANDERE ATTORNO

$$\varphi = \phi - \phi_+$$

COSÌ ABBIAMO

$$= \frac{\lambda}{2} \left(\frac{m^2}{2\lambda} \right)^2 - \frac{m^2}{2} \frac{m^2}{2\lambda} = \frac{1}{8\lambda} m^4 - \frac{1}{4\lambda} m^4 = -\frac{1}{8\lambda} m^4$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\phi) \Big|_{\phi=\phi_+} - \frac{\partial V}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_+} (\phi - \phi_+) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=\phi_+} (\phi - \phi_+)^2 -$$

$$- \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial \phi^3} \Big|_{\phi=\phi_+} (\phi - \phi_+)^3 - \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 V}{\partial \phi^4} \Big|_{\phi=\phi_+} (\phi - \phi_+)^4 +$$

$$+ \bar{\varphi} (\not{\partial} - m) \varphi - g(\varphi + \phi_+) \bar{\varphi} \varphi$$

$$12\lambda \phi \Big|_{\phi_+} \\ = 12\lambda \sqrt{\frac{m^2}{2\lambda}}$$

$$12\lambda$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{8\lambda} m^4 + 0 - \frac{1}{2} (2m^2) \phi^2 - \frac{1}{3!} 12\lambda \sqrt{\frac{m^2}{2\lambda}} \phi^3 - \\ - \frac{1}{4!} (12\lambda) \phi^4 + \bar{\psi} (\not{\partial} - \mathcal{H}) \psi - g \phi_+ \bar{\psi} \psi - g \psi \bar{\psi} \psi$$

RIMOVENDO IL TERMINE COSTANTE (IRRELEVANTE):

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (2m^2) \phi^2 - \frac{1}{3!} g_\phi \phi^3 - \frac{1}{4!} \lambda_\phi \phi^4 + \\ + \bar{\psi} (\not{\partial} - \mathcal{H} - g \phi_+) \psi - g \psi \bar{\psi} \psi$$

DUNQUE POSSIAMO LEGGERE LE MASSE DELLE PARTICELLE FERMIONICHE E SCALARI:

$$\mathcal{H}_\psi = \mathcal{H} - g \phi_+ = \mathcal{H} + g \sqrt{\frac{m^2}{2\lambda}}$$

$$m_\psi = \sqrt{2} m$$

DUNQUE I PROPAGATORI DELLA TEORIA SONO

$$\psi : \quad S = \not{\partial} (\not{\partial} - \mathcal{H}_\psi)^{-1}$$

$$\phi : \quad \Delta = \frac{i}{p^2 - m_\phi^2}$$

DOBBIAMO SCRIVERE LE REGOLE DI FEYNMAN. DA

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{1}{3!} g_{\varphi} \varphi^3 + \frac{1}{4!} \lambda_{\varphi} \varphi^4 + g \varphi \bar{\varphi} \varphi$$

SI VEDE CHE ABBIAMO 3 VERTICI POSSIBILI



E POSSIAMO CALCOLARE LE RISPETTIVE FUNZIONI DI GREEN

$$\text{---} \rightarrow \langle \Omega | T \varphi(x) \varphi(y) \varphi(z) | \Omega \rangle$$

$$= -i \langle 0 | T \left[\varphi(x) \varphi(y) \varphi(z) \frac{g_{\varphi}}{3!} \int d^4 u \varphi(u) \varphi(u) \varphi(u) + \dots \right] | 0 \rangle$$

IN CUI DOBBIAMO CONSIDERARE LA MOLTEPLICITÀ DEL DIAGRAMMA, CHE TROVAMO CONTANDO LE SCELTE DI CONTRAZIONI POSSIBILI $\rightarrow$ SONO $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

GLI ALTRI PEZZI DI $\mathcal{H}_{\text{int}}$ SAREBBERO NULLI PER IL TEOREMA DI WICK

$$= -i g_{\varphi} \int d^4 u \Delta_{xu} \Delta_{yu} \Delta_{zu}$$

$$\text{---} \rightarrow \langle \Omega | T \varphi(x) \varphi(y) \varphi(z) \varphi(w) | \Omega \rangle$$

$$= -i \langle 0 | T \left[\underbrace{\varphi(x) \varphi(y) \varphi(z) \varphi(w)}_{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{\lambda \varphi}{4!} \int d^4 k \varphi(k) \varphi(k) \varphi(k) \varphi(k) + \dots \right] | 0 \rangle$$

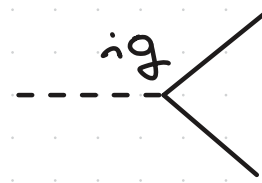
$$= -i \lambda \varphi \int d^4 k \Delta_{xk} \Delta_{yk} \Delta_{zk} \Delta_{wk}$$

$$\dots \langle \rightarrow \langle 0 | T \left[\underbrace{\varphi(x) \varphi(y) \varphi(z)}_{\text{green}} (-i) g \underbrace{\int d^4 w \varphi(w) \varphi(w) \varphi(w)}_{\text{purple}} + \dots \right] | 0 \rangle$$

DOBBIAMO SPOSTARE I CAMPI NELL'ORDINE GIUSTO :

$$= -ig \int d^4 w \Delta_{xw} \Delta_{zw} (-\Delta_{yw})$$

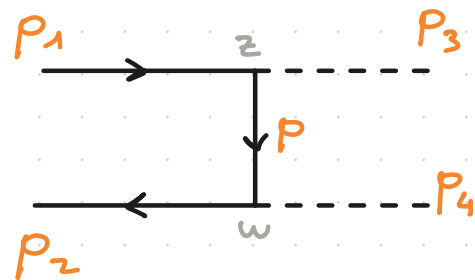
QUINDI ABBIAMO I VERTICI :



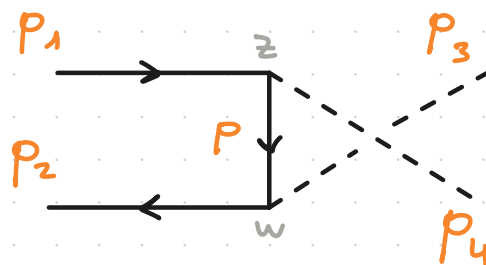
DATE LE REGOLE POSSIAMO STUDIARE IL PROCESSO

$$e^+ e^- \rightarrow 2\varphi$$

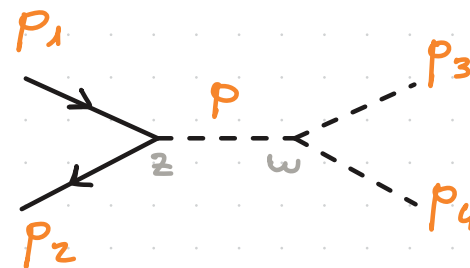
1 DIAGRAMMI POSSIBILI SONO



CANALE t



CANALE u



CANALE s

ABBIAMO

$$\mathcal{M}_t = \frac{i(g)^2}{(p_1 - p_3)^2 - m_\phi^2} (\bar{v}(p_2) (\not{p}_t + m_\phi) u(p_1))$$

$$\mathcal{M}_u = \frac{i(g)^2}{(p_1 - p_4)^2 - m_\phi^2} (\bar{v}(p_2) (\not{p}_u + m_\phi) u(p_1))$$

$$\mathcal{M}_s = \frac{i(g)(-ig\phi)}{(p_1 + p_2)^2 - m_\phi^2} (\bar{v}(p_2) u(p_1))$$

VEDIAMO I SEGNI RELATIVI

$$t \propto \langle 0 | T \left[\underbrace{\phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4)}_{\text{t-channel}} \int d^4 z \phi(z) \underbrace{\phi(z) \phi(z) \phi(z) \phi(z)}_{\text{s-channel}} \int d^4 w \phi(w) \phi(w) \phi(w) \phi(w) \right] | 0 \rangle$$

$$u \propto \langle 0 | T \left[\underbrace{\overline{\psi}(x_1) \psi(x_2) \overline{\psi}(x_3) \psi(x_4)}_{\text{quark line}} \underbrace{\int d^4 z \psi(z) \overline{\psi}(z) \psi(z) \overline{\psi}(z)}_{\text{gluon loop}} \underbrace{\int d^4 w \psi(w) \overline{\psi}(w) \psi(w) \overline{\psi}(w)}_{\text{gluon loop}} \right] | 0 \rangle$$

$$s \propto \langle 0 | T \left[\underbrace{\overline{\psi}(x_1) \psi(x_2) \overline{\psi}(x_3) \psi(x_4)}_{\text{quark line}} \underbrace{\int d^4 z \psi(z) \overline{\psi}(z) \psi(z) \overline{\psi}(z)}_{\text{gluon loop}} \underbrace{\int d^4 w \psi(w) \overline{\psi}(w) \psi(w) \overline{\psi}(w)}_{\text{gluon loop}} \right] | 0 \rangle$$

ORDINANDO OPPORTUNAMENTE ABBIAMO I SEGN:

$$\mathcal{M}_s \rightarrow -1 \quad \mathcal{M}_u \rightarrow +1 \quad \mathcal{M}_t \rightarrow +1$$

DUNQUE VOGLIAMO CALCOLARE

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_s \left\{ |\mathcal{M}_s|^2 + |\mathcal{M}_u|^2 + |\mathcal{M}_t|^2 + 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_s^\dagger \mathcal{M}_t + 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_s^\dagger \mathcal{M}_u + 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_t^\dagger \mathcal{M}_u \right\}$$

COMINCIAMO

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}_s|^2 &= \frac{g_s^2 g_\psi^2}{4s^2} \sum (\bar{u}_\alpha(p_2) u_\alpha(p_1)) (\bar{u}_\beta(p_1) u_\beta(p_2)) \\ &= \frac{g_s^2 g_\psi^2}{4s^2} (\not{p}_1)_{\alpha\beta} (\not{p}_2)_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

$$= \frac{(gg_\varphi)^2}{4s^2} \text{Tr} \{ \not{p}_1 \not{p}_2 \}$$

$$= \frac{(gg_\varphi)^2}{4s^2} 4 (p_1 p_2)$$

$$= \frac{(gg_\varphi)^2}{2s}$$

$$\frac{1}{4} |\mathcal{M}_t|^2 = \frac{g^4}{4t^2} \int_s (\bar{v}_\alpha(p_2) (\not{p}_t)_{\alpha\beta} u_\beta(p_1)) (\bar{u}_\delta(p_1) (\not{p}_t)_{\delta\gamma} v_\gamma(p_2))$$

$$= \frac{g^4}{4t^2} (\not{p}_1)_{\beta\delta} (\not{p}_t)_{\delta\gamma} (\not{p}_2)_{\gamma\alpha} (\not{p}_t)_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{g^4}{4t^2} \text{Tr} \{ \not{p}_1 \not{p}_t \not{p}_2 \not{p}_t \}$$

$$= \frac{g^4}{t^2} [2(p_1 p_t)(p_2 p_t) - p_t^2 (p_1 p_2)]$$

$$= \frac{g^4}{t^2} \left[2(-p_1 p_3)(p_2 p_4) - \frac{t s}{2} \right]$$

$$= \frac{g^4}{t^2} \left[-\frac{t^2}{2} - \frac{t s}{2} \right]$$

$$= \frac{g^4}{2t} [-t - s]$$

$$= \frac{g^4}{2} \frac{\mu}{t}$$

$$\frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}_\mu|^2 = \frac{g^4}{4\mu^2} \sum_s \left(\bar{v}_\alpha(p_2) (\not{p}_\mu)_{\alpha\beta} u_\beta(p_1) \right) \left(\bar{u}_\gamma(p_1) (\not{p}_\mu)_{\gamma\delta} v_\delta(p_2) \right)$$

$$= \frac{g^4}{4\mu^2} (\not{p}_1)_\beta\gamma (\not{p}_\mu)_{\gamma\delta} (\not{p}_2)_{\delta\alpha} (\not{p}_\mu)_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{g^4}{4\mu^2} \text{Tr} \{ \not{p}_1 \not{p}_\mu \not{p}_2 \not{p}_\mu \}$$

$$= \frac{g^4}{\mu^2} \left[2(p_1 p_\mu)(p_2 p_\mu) - p_\mu^2 (p_1 p_2) \right]$$

$$= \frac{g^4}{\mu^2} \left[2(-p_1 p_4)(p_2 p_3) - \frac{\mu s}{2} \right]$$

$$= \frac{g^4}{\mu^2} \left[-\frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu s}{2} \right]$$

$$= \frac{g^4}{2} \frac{t}{\mu}$$

1 TERMINI DI INTERFERENZA

$$\frac{1}{4} \sum_s \mathcal{M}_s^\dagger \mathcal{M}_\mu = \frac{-g^2 g_\phi^2}{45\mu} \sum_s (\bar{u}_\alpha(p_1) v_\alpha(p_2)) (\bar{v}_\gamma(p_2) (\not{p}_\mu)_{\gamma\delta} u_\delta(p_1))$$

$$= -\frac{(gg_\phi)^2}{45\mu} (\not{p}_2)_{\alpha\gamma} (\not{p}_\mu)_{\gamma\delta} (\not{p}_1)_{\delta\alpha}$$

$$= -\frac{(gg_\phi)^2}{45\mu} \text{Tr} \{ \not{p}_2 \not{p}_\mu \not{p}_1 \}$$

$$= 0$$

$$\frac{1}{4} \sum_s \mathcal{M}_s^\dagger \mathcal{M}_t = -\frac{(gg_\phi)^2}{45t} \sum_s (\bar{u}_\alpha(p_1) v_\alpha(p_2)) (\bar{v}_\beta(p_2) (\not{p}_t)_{\beta\gamma} u_\gamma(p_1))$$

$$= -\frac{(gg_\phi)^2}{45t} (\not{p}_2)_{\alpha\beta} (\not{p}_t)_{\beta\gamma} (\not{p}_1)_{\gamma\alpha}$$

$$= 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_t \mathcal{M}_t^\dagger \mathcal{M}_\mu &= \frac{g^4}{4t\mu} \sum_t (\bar{u}_\alpha(p_1) (\not{p}_t)_{\alpha\beta} v_\beta(p_2)) (\bar{v}_\gamma(p_2) (\not{p}_\mu)_{\gamma\delta} u_\delta(p_1)) \\ &= \frac{g^4}{4t\mu} (\not{p}_2)_{\beta\gamma} (\not{p}_\mu)_{\gamma\delta} (\not{p}_1)_{\delta\alpha} (\not{p}_t)_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$$= \frac{g^4}{4tu} \text{Tr} \{ \not{p}_2 \not{p}_\mu \not{p}_1 \not{p}_t \}$$

$$= \frac{g^4}{tu} \left[(p_2 p_\mu)(p_1 p_t) - (p_\mu p_t)(p_1 p_2) + (p_2 p_t)(p_1 p_\mu) \right]$$

$$= \frac{g^4}{tu} \left[(p_2 p_3)(-p_1 p_3) - \left[-p_1 p_3 - p_1 p_4 + p_3 p_4 \right] \frac{s}{2} + (p_2 p_4)(-p_1 p_4) \right]$$

$$= \frac{g^4}{tu} \left[-\frac{\mu t}{4} - \underbrace{\left[\frac{t}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{s}{2} \right]}_{=0} \frac{s}{2} - \frac{\mu t}{4} \right]$$

$$= -\frac{g^4}{2}$$

DUNQUE

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{(gg_\varphi)^2}{2s} + \frac{g^4}{2} \frac{\mu}{t} + \frac{g^4}{2} \frac{t}{\mu} + g^4$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{cm}} = \frac{1}{64\pi^2 s} \left[\frac{(gg_\varphi)^2}{2s} + \frac{g^4}{2} \frac{\mu}{t} + \frac{g^4}{2} \frac{t}{\mu} - g^4 \right]$$

PROBLEMA 2: Si consideri una teoria invariante rispetto a trasformazioni globali $SU(8)$ che contiene un campo scalare reale Σ che trasforma nella rappresentazione aggiunta e un campo di Dirac che trasforma nella rappresentazione fondamentale

$$\Sigma \rightarrow U \Sigma U^\dagger$$

$$4 \rightarrow U 4$$

con U generico elemento di $SU(8)$. Scrivere la più generica Lagrangiana invariante rispetto a tale trasformazione, che contenga termini al più quartici nei campi, determinando le dimensioni delle varie costanti. Supponiamo ora di rendere tale simmetria locale. Come si modifica la Lagrangiana?

Se il campo Σ assume un valore di aspettazione di vuoto

$$\langle \Sigma \rangle \equiv \Sigma_0 = v \text{diag}(5, 5, 5, -3, -3, -3, -3, -3)$$

Qual è il gruppo di simmetria residuo? Quanto vale la massa dei bosoni di gauge associati ai generatori rotti?

SOLUZIONE: Σ trasformandosi, nell'aggiunta è, così come U , una matrice 8×8 , che noi possiamo scrivere come un vettore a 64 componenti (imponiamo la legge di trasformazione).

4 si trasforma nella rappresentazione fondamentale, dunque è un vettore a 8 componenti.

QUINDI ABBIAMO $\Sigma \sim \text{Adj}$ $4 \sim 8$ VOGLI DIRE TRASFORMAZIONE DI SU(8) CON LA RAPPRESENTAZIONE DIMENSIONE 8

OVVERO 63 CAMPI SCALARI E 8 SPINORIALI.

NOTA IL FATTO DI SCRIVERE UN VETTORE A 63 COMPONENTI COME UNA MATRICE 8×8 , OLTRE AD ESSERE CONVENIENTE PER I CONTI, È ANALOGO A QUANDO SCRIVIAMO CON SU(2) FACEVAMO:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim a_{\alpha \dot{\alpha}} \sim A_{\mu} \sigma^{\mu}_{\alpha \dot{\alpha}}$$

VETTORE

VETTORE
CON INDICI
 $\alpha, \dot{\alpha}$ ASSOCIATI
AI FATTORI
 $1/2$

DECOMPONIAMO UNA
QUALSIASI MATRICE
 2×2 (A_{μ}) NELLA
BASE DELLE MATRICI
 σ^{μ} . LE COMPONENTI
NELLA BASE σ^{μ} SONO
LE COMPONENTI
DEI VETTORI

PER QUESTO DICIAMO CHE UN VETTORE HA LE STESSA INFORMAZIONI DI UNA MATRICE.

PER RISCRIVERE IL SCALARE Σ LO POSSIAMO DECOMPORRE NELLA BASE DEI GENERATORI T^A :

$$\Sigma = \Sigma_{ij} = \Sigma^A T^A_{ij}$$

MATRICE
 8×8

VETTORE
63
DIMENSIONALE

DOBBIAMO SCRIVERE UNA LAGRANGIANA INVARIANTE PER
TRASFORMAZIONE U GLOBALE DI $SU(8)$.

$\mathcal{L}$ CONTERRÀ I TERMINI CINETICI, I TERMINI DI MASSA E LE
POSSIBILI INTERAZIONI AL PIÙ QUADRATICHE.
IL PEZZO FACILE È TERMINE CINETICO + MASSA PER IL CAMPO 4:

$$\mathcal{L}(\psi - m)\psi.$$

PER IL TERMINE CINETICO DEI CAMPI SCALARI Σ POSSIAMO RENDERNOCI
CONTO CHE ESSENDO DELLE MATRICI (O VETTORI) È MOLTO SIMILE,
COME CARATTERISTICHE, AI BOSONI DI GAUGE. DUNQUE IL TERMINE
CINETICO INVARIANTE AVRÀ SICURAMENTE DELLE DERIVATE, DI CUI POI
NE FACCIAMO LA TRACCIA DOVENDO AVERE $\mathcal{L}$ SCALARE:

$$\text{Tr}\{\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma\}.$$

VERIFICHIAMO CHE EFFETTIVAMENTE QUESTO PEZZO È INVARIANTE

$$\text{Tr}\{\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma\} \rightarrow \text{Tr}\left\{U \partial_\mu \Sigma \underbrace{U^\dagger U}_{=1} \partial^\mu \Sigma U^\dagger\right\}$$

USANDO LA CICLICITÀ DELLA TRACCIA

$$= \text{Tr}\left\{\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma \underbrace{U^\dagger U}_{=1}\right\}$$

$$= \text{Tr}\{\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma\} \quad \checkmark$$

SAPPIAMO CHE DOVREMO METTERE UNA NORMALIZZAZIONE $\frac{1}{2}$ DAVANTI, MA POSSIAMO RIASSORBIRLA NELLA DEFINIZIONE DI $\square$ IN TERMINI DEI GENERATORI:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ \partial_\mu \square^A T^A \partial^\mu \square^B T^B \right\} &= \partial_\mu \square^A \partial^\mu \square^B \underbrace{\text{Tr} \left\{ T^A T^B \right\}}_{\frac{1}{2} \delta^{AB}} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \square^A \partial^\mu \square^A. \end{aligned}$$

IL TERMINE DI MASSA, CHE DEV'ESSERE QUADRATICO NEI CAMPI, LO COSTRUIAMO IN MODO ANALOGO, OVERO SCRIVIAMO

$$M^2 \text{Tr} \left\{ \square^2 \right\}.$$

NOTA. ANCHE IL TERMINE $(\text{Tr} \left\{ \square \right\})^2$ È QUADRATICO NEI CAMPI $\square$, MA NON LO METTIAMO POICHÈ.

$$\begin{aligned} (\text{Tr} \left\{ \square^A T^A \right\})^2 &= \square^A \underbrace{(\text{Tr} \left\{ T^A \right\})^2}_{=0} = 0 \\ &\text{PER DEFINIZIONE DI SU}(8) \end{aligned}$$

POSSIAMO METTERE DEI TERMINI DI INTERAZIONE, MA DOBBIAMO FARLO IN MODO CHE ESSI ABBIANO COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO ADIMENSIONALE. IL PRIMO CHE POSSIAMO SCEGLIERE È UN TERMINE DI TIPO YUKAWA:

$$-g \bar{\psi} \square \psi \rightarrow -g \bar{\psi} U^\dagger U \square U^\dagger U \psi = -g \bar{\psi} \square \psi$$

MA ANCHE DEI TERMINI DEL TIPO QUARTICO PER $\square$; I QUALI POSSONO ESSERE SCRITTI COME

$$-\lambda_1 \text{Tr}\{\square^4\} \quad -\lambda_2 (\text{Tr}\{\square^2\})^2.$$

DUNQUE LA LAGRANGIANA È:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\not{\partial} - m)\psi + \text{Tr}\{\partial_\mu \square \partial^\mu \square\} - M^2 \text{Tr}\{\square^2\} - \\ - g \bar{\psi} \square \psi - \lambda_1 \text{Tr}\{\square^4\} - \lambda_2 (\text{Tr}\{\square^2\})^2.$$

IL SECONDO PUNTO RICHIEDE DI RENDERE $SU(8)$ LOCALE. NOI SAPPIAMO CHE I TERMINI DI $\mathcal{L}$ PROBLEMATICI SONO QUELLI CON LE DERIVATE.

SCRIVENDO

$$U = e^{i\omega^A T^A}$$

ABBIAMO

$$\delta \psi = i\omega^A T^A \psi$$

E LA CORRENTE DI NOETHER ASSOCIATA A $SU(8)$ GLOBALE È

$$j^\mu = -\bar{\psi} \gamma^\mu T^a \psi$$

DUNQUE IL PEZZO CINETICO PER IL CAMPO ψ LO COSTRUIAMO ACCOPPIANDO j^μ CON UN CAMPO O GAUGE E DEFINENDO LA DERIVATA COVARIANTE

$$\psi \rightarrow D\psi = \psi (\partial_\mu + ig A_\mu^a \gamma^\mu T^a)$$

PER Σ È LA PARTE LABORIOSA.

PROCEDIMENTO 1. A LIVELLO INFINITESIMO ABBIAMO:

$$\begin{aligned} \Sigma &\rightarrow (1 + i\omega^a T^a) \Sigma (1 - i\omega^a T^a) \\ &= \Sigma + i\omega^a [T^a, \Sigma] \end{aligned}$$

DUNQUE

$$\delta \Sigma = i\omega^a [T^a, \Sigma]$$

LA CORRENTE IN QUESTO CASO È

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \Sigma)} \delta \Sigma = 2i \partial_\mu \Sigma [T^a, \Sigma]$$

SE ACCOPPIAMO A_μ^a (CHE VIENE DA $A_\mu = A_\mu^a T^a$) CON LA CORRENTE ABBIAMO

$$2i \partial_\mu \Sigma [A_\mu, \Sigma]$$

PER CUI IL TERMINE CINETICO DIVENTA

$$\text{Tr} \{ \cancel{D}_\mu \Sigma \cancel{D}^\mu \Sigma \} \quad \text{con} \quad \cancel{D}_\mu \Sigma = \partial_\mu \Sigma - i [A_\mu, \Sigma]$$

PROCEDIMENTO 2. VEDIAMO LA TRASFORMAZIONE LOCALE

$$\partial_\mu \Sigma \rightarrow \partial_\mu (U \Sigma U^\dagger) = \partial_\mu U \Sigma U^\dagger + U \partial_\mu \Sigma U^\dagger + U \Sigma \partial_\mu U^\dagger$$

SE VOGLIAMO QUALCOSA DI INVARIANTE, ALLORA DOBBIAMO COSTRUIRE
LA DERIVATA COVARIANTE IN MODO CHE TRASFORMI COME;

$$\cancel{D}_\mu \Sigma \rightarrow U (\cancel{D}_\mu \Sigma) U^\dagger$$

POICHÉ IN QUESTO MODO IL TERMINE CINETICO SAREBBE INVARIANTE.

ES NON ANDREBBE BENE $\partial_\mu \Sigma + ig A_\mu \Sigma$
PERCHÉ SAPPIAMO

$$A_\mu \rightarrow \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger + U A_\mu U^\dagger$$

E SCRITTA $\cancel{D}_\mu$ COSÌ RIUSCIREMO A
TOGLIERE SOLO IL PEZZO $\partial_\mu U \Sigma U^\dagger$
DALLA TRASFORMAZIONE DI $\cancel{D}_\mu \Sigma$

PRENDIAMO (SEGNI RELATIVI DA DETERMINARE)

$$\cancel{D}_\mu \Sigma = \partial_\mu \Sigma \oplus ig A_\mu \Sigma \oplus ig \Sigma A_\mu$$

VEDIAMO COME TRASFORMA:

$$D_\mu \Sigma \rightarrow \partial_\mu U \Sigma U^\dagger + U \partial_\mu \Sigma U^\dagger + U \Sigma \partial_\mu U^\dagger \quad \ominus$$

$$\ominus i g \left(\frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger + U A_\mu U^\dagger \right) (U \Sigma U^\dagger) \quad \oplus$$

$$\oplus i g (U \Sigma U^\dagger) \left(\frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger + U A_\mu U^\dagger \right)$$

$$= (-U \partial_\mu U^\dagger + i g U A_\mu U^\dagger) (U \Sigma U^\dagger)$$

$$= -U \Sigma \partial_\mu U^\dagger + i g U \Sigma A_\mu U^\dagger$$

$$= -U \partial_\mu U^\dagger U \Sigma U^\dagger + i g U A_\mu \Sigma U^\dagger$$

MA USIAMO $\partial_\mu U U^\dagger = -U \partial_\mu U^\dagger$

$$= \partial_\mu U U^\dagger U \Sigma U^\dagger + i g U A_\mu \Sigma U^\dagger$$

$$= \partial_\mu U \Sigma U^\dagger + i g U A_\mu \Sigma U^\dagger$$

$$= \cancel{\partial_\mu U \Sigma U^\dagger} + U \partial_\mu \Sigma U^\dagger + U \cancel{\Sigma \partial_\mu U^\dagger} -$$

$$- \cancel{\partial_\mu U \Sigma U^\dagger} - i g U A_\mu \Sigma U^\dagger -$$

$$- U \cancel{\Sigma \partial_\mu U^\dagger} + i g U \Sigma A_\mu U^\dagger$$

$$\begin{aligned}
&= U \partial_\mu \Sigma U^\dagger - i g U [A_\mu, \Sigma] U^\dagger \\
&= U (\partial_\mu \Sigma - i g [A_\mu, \Sigma]) U^\dagger \\
&= U \mathcal{D}_\mu \Sigma U^\dagger
\end{aligned}$$

DUNQUE ABBIAMO

$$\mathcal{D}_\mu \Sigma = \partial_\mu \Sigma - i g [A_\mu, \Sigma]$$

PER IL TERZO PUNTO DELL'ESERCIZIO DIAMO DINAMICA AL CARPO DI GAUGE.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \bar{\psi} (i \not{\mathcal{D}}_\mu - m) \psi + \text{Tr} \{ \mathcal{D}_\mu \Sigma \mathcal{D}^\mu \Sigma \} - M \text{Tr} \{ \Sigma^2 \} - \\
& - g \bar{\psi} \Sigma \psi - \lambda_1 \text{Tr} \{ \Sigma^4 \} - \lambda_2 (\text{Tr} \{ \Sigma^2 \})^2 + \\
& + \frac{1}{2} \text{Tr} \{ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \}
\end{aligned}$$

con $\mathcal{D}_\mu \psi = (\partial_\mu + i g A_\mu) \psi$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i g [A_\mu, A_\nu]$$

$$\mathcal{D}_\mu \Sigma = \partial_\mu \Sigma - i g [A_\mu, \Sigma]$$

ABBIAMO UN GRUPPO DI SIMMETRIA CHE NON ROMPE IL VUOTO,
IL GRUPPO RESIDUO.

CI SERVONO I GENERATORI DI $SU(8)$ T^A , PER CAPIRE QUALI
LASCIANO INVARIATO Σ_0 .

NOI ABBIAMO

$$\delta \Sigma = i \omega^A [T^A, \Sigma]$$

È CERCHIAMO QUANDO

$$\delta \langle \Sigma \rangle = 0.$$

POSSIAMO RISCRIVERE Σ_0 COME UNA MATRICE DIAGONALE A BLOCCHI

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 5 \mathbb{1}_3 & 0 \\ 0 & -3 \mathbb{1}_5 \end{pmatrix}$$

I GENERATORI LI POSSIAMO SCRIVERE A BLOCCHI

$$T^A = \begin{pmatrix} A_{3 \times 3}^A & C_{3 \times 5}^A \\ D_{5 \times 3}^A & B_{5 \times 5}^A \end{pmatrix}$$

MA ESSENDO T^A HERMITIANA $\Rightarrow A, B$ HERMITIANI

$$D^A = (C^A)^\dagger$$

MA T^A È ANCHE A $T_V = 0$

DUNQUE

$$\text{Tr}\{T^A\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tr}(A^A) + \text{Tr}(B^A) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Tr}(A^A) = \text{Tr}(B^A) = 0 \\ \text{Tr}(A^A) = -\text{Tr}(B^A) \end{cases}$$

NOI RICHIEDIAMO

$$\delta \langle L \rangle = i \omega^A [T^A, \langle L \rangle] = 0$$

IN CUI VEDIAMO

$$\begin{aligned} [T^A, L_0] &= \begin{pmatrix} A & C \\ C^\dagger & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ C^\dagger & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5A & -3C \\ 5C^\dagger & -3B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5A & 5C \\ -3C^\dagger & -3B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -8C \\ 8C^\dagger & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

DUNQUE IMPARIAMO $C = 0$.

QUINDI, T^A CHE PRESERVANO IL VUOTO SONO MATRICI
DIAGONALI A BLOCCHI DEL TIPO!

$$T^A = \begin{pmatrix} A^A_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & B^A_{5 \times 5} \end{pmatrix}$$

CON A^A MATRICI 3×3 HERMITIANE $\rightarrow 9$ MATRICI

B^A MATRICI 5×5 HERMITIANE $\rightarrow 25$ MATRICI.

TRA LE 9 MATRICI DI A^A NE AVREMO 1 CON $T_V \neq 0$ E 8
CON $T_V = 0$.

$\rightarrow$ RICORDIAMO LA DECOMPOSIZIONE

$$U(3) = U(1) \times SU(3)$$

IN MODO ANALOGO AVREMO 24 MATRICI DI B^A CON $T_V = 0$ E 1
CON $T_V \neq 0$.

ABBIAMO QUINDI $A^A = \{1, \lambda^A\}$ $B^A = \{1, g^A\}$, PER CUI

$$T^A = \begin{pmatrix} \{1, \lambda^A\} & 0 \\ 0 & \{1, g^A\} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g^A \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \lambda^A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \lambda^A & 0 \\ 0 & g^A \end{pmatrix} \right\}$$

$\rightarrow$ CI SONO DA METTERE IL +5 E -3

VEDIAMO CHE 2° E 3° POSSIBILITÀ NON LE POSSIAMO AVERE, POICHÉ

NON SODDISFEREMMO $\text{Tr}\{T^A\} = 0$.

SE PRENDIAMO $\text{Tr}\{T^A\} = 0 \Rightarrow \text{Tr}\{A^A\} = \text{Tr}\{B^A\} = 0$

$\Rightarrow$ SELEZIONIAMO $A^A \rightarrow \text{SU}(3)$

$B^A \rightarrow \text{SU}(5)$

✓
MATRICI HERMITIANE A
TRACCIA NULLA.

MENTRE AVERE CON $\text{Tr}\{A^A\} = -\text{Tr}\{B^A\}$ L'UNICO GENERATORE CHE POSSIAMO È :

$$\begin{pmatrix} 5\mathbb{1}_3 & 0 \\ 0 & -3\mathbb{1}_5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ GRUPPO UNIMODULARE $\Rightarrow \text{U}(1)$

QUINDI IL GRUPPO RESIDUO DI SIMMETRIA È

$$\text{SU}(8) \rightarrow \text{SU}(3) \times \text{SU}(5) \times \text{U}(1).$$

POSSIAMO ANCORA TROVARE LE MASSE DEI BOSONI DI GAUGE
ROTTI. INFATTI ABBIAMO:

$$D_\mu \Sigma = \partial_\mu \Sigma + ig[A_\mu, \Sigma]$$

E LE MASSE LE LEGGIAMO DAL TERMINE CINETICO NEL
VUOTO

$$\text{Tr} \left\{ (D_\mu \langle \Sigma \rangle)^\dagger (D^\mu \langle \Sigma \rangle) \right\} =$$

$$= \text{Tr} \left\{ (-ig A_\mu^a [T^a, \langle \Sigma \rangle]) (ig A^{\mu b} [T^b, \langle \Sigma \rangle]) \right\}$$

$$= g^2 A_\mu^a A^{\mu b} \text{Tr} \left\{ [T^a, \langle \Sigma \rangle] [T^b, \langle \Sigma \rangle] \right\}$$

DUNQUE LEGGIAMO $\mathcal{H}_A^2 = -g^2 \text{Tr} \left\{ [T^a, \langle \Sigma \rangle], [T^b, \langle \Sigma \rangle] \right\}$

NOI AVEVAMO VISTO

$$[T^a, \langle \Sigma \rangle] = \begin{pmatrix} 0 & -8c \\ 8c^\dagger & 0 \end{pmatrix} v$$

DUNQUE $[T^a, \langle \Sigma \rangle] [T^b, \langle \Sigma \rangle] = v^2 \begin{pmatrix} 0 & -8c \\ 8c^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -8\tilde{c} \\ 8\tilde{c}^\dagger & 0 \end{pmatrix}$

$$= v^2 \begin{pmatrix} -64 C \tilde{C}^+ & 0 \\ 0 & -64 C^+ \tilde{C} \end{pmatrix}$$

$$= -64 v^2 \begin{pmatrix} T^b & T^b \end{pmatrix}$$

INFATTI

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ C^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{C} \\ \tilde{C}^+ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \tilde{C}^+ & 0 \\ 0 & C^+ \tilde{C} \end{pmatrix}$$

PER LEGGERE
LA MASSA DI Δ_m^a

ALLORA

$$M_a^2 = -g^2 (-64 v^2) \text{Tr} \{ T^a T^a \} = 32 g^2 v^2$$

$$\frac{1}{2} \delta^{aa} = \frac{1}{2}$$

2025 06 18

PROBLEMA 1. In un ipotetico U parallelo, le interazioni elettrodeboli sono invarianti rispetto a trasformazioni di parità. Come nel nostro U , il gruppo di gauge è $G = SU(2) \times U(1)_Y$, mentre la materia leptonica è descritta da spinori di Dirac ψ formando un doppietto di $SU(2)$ con ipercarica $Y = -1$. La simmetria è spontaneamente rotta a $SU(2) \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ attraverso un meccanismo Brout-Englert-Higgs indotto da un doppietto scalare ϕ , esattamente come nel SM del nostro U .

1. SCRIVERE LA LAGRANGIANA PIÙ GENERALE CHE CONTENGA IL SETTORE DI YANG-MILLS, DI HIGGS E DI MATERIA LEPTONICA.
2. CALCOLARE LE VARIE CORRENTI CARICHE, NEUTRA ED ELETTROMAGNETICA.
3. CALCOLARE LA SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE PER IL PROCESSO $e^- + \bar{\nu}_e \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$.

SOL. ABBIAMO:

$$\psi = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$$

E SE $Y_\psi = -1$ ALLORA:

$$Q_e = -1 = T^3 - \frac{1}{2} \Rightarrow T^3_e = -\frac{1}{2}$$

$$Q_\nu = 0 = +\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \checkmark$$

E POSSIAMO SCRIVERE

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu - i g_1 W_\mu^a T^a + \frac{i}{2} g_2 B_\mu \right) \psi$$

IL TERMINE CINETICO DELLA LAGRANGIANA È:

$$\mathcal{L}_k = i \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{a\mu\nu}$$

$$\text{con } W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + i g [W_\mu^a, W_\nu^a] \longrightarrow SU(2)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \longrightarrow U(1)$$

LA MASSA DEI LEPTONI NON POSSIAMO SCRIVERLA COME:

$$\mathcal{L}_m = -m \bar{\psi} \psi$$

POICHÉ IN QUESTO CASO ABBIAMO LA PARITÀ PRESERVATA, ANCHE L'INVARIANZA DI GAUGE SAREBBE PRESERVATA, PERO' SI ROMPEREBBE ESPlicitAMENTE LA SIMMETRIA.

INTRODUCIAMO

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H_0 \end{pmatrix}$$

CON NUMERI QUANTICI:

$$Q_{H^0} = 0 = -\frac{1}{2} + \frac{Y}{2} \Rightarrow Y_{H^0} = 1$$

$$Q_{H^+} = +1 = \frac{1}{2} + \frac{Y}{2} \Rightarrow Y_{H^+} = 1 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} m^2 \bar{\psi} \psi &= m^2 (\bar{\nu} \quad \bar{e}) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \\ &= m^2 (\bar{\nu} \nu + \bar{e} e) \end{aligned}$$

E POSSIAMO SCRIVERE LA DERIVATA COVARIANTE

$$\mathcal{D}_\mu H = \left(\partial_\mu - i g_1 W_\mu^a T^a - \frac{i}{2} g_2 B_\mu \right) H$$

INTRODUCIAMO IL POTENZIALE

$$V_H = \frac{\lambda}{4} \left(H^\dagger H - \frac{v^2}{2} \right)^2$$

DA CUI

$$\frac{\partial V}{\partial H} = 0 \Rightarrow H^\dagger H = \frac{v^2}{2} \Rightarrow \langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

COSÌ LA LAGRANGIANA PIÙ GENERALE POSSIBILE È:

$$\mathcal{L} = i \bar{\Psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu}^a B^{a\mu\nu} - m \bar{\Psi} \Psi + (\mathcal{D}_\mu H)^\dagger (\mathcal{D}^\mu H) - \frac{\lambda}{4} \left(H^\dagger H - \frac{v^2}{2} \right)^2$$

SVILUPPATA ATTORNO $\langle H \rangle$ LE $\mathcal{D}_\mu H$ CI FANNO LEGGERE LE MASSE DEI BOSONI DI GAUGE:

$$\mathcal{D}_\mu \langle H \rangle = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} g_1 W_\mu^3 + \frac{i}{2} g_2 B_\mu & \frac{i}{2} g_1 (W_\mu^1 - i W_\mu^2) \\ \frac{i}{2} g_1 (W_\mu^1 + i W_\mu^2) & -\frac{i}{2} g_1 W_\mu^3 + \frac{i}{2} g_2 B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i g_1 W_\mu^3 + i g_2 B_\mu & i \sqrt{2} g_1 \frac{W_\mu^1 - i W_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ i \sqrt{2} g_1 \frac{W_\mu^1 + i W_\mu^2}{\sqrt{2}} & -i g_1 W_\mu^3 + i g_2 B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$W_\mu^+ = \frac{W_\mu^1 + i W_\mu^2}{\sqrt{2}}$$

$$W_\mu^- = \frac{W_\mu^1 - i W_\mu^2}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \sqrt{2} g_1 W_\mu^- \frac{v}{\sqrt{2}} \\ i (-g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu) \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu \langle H \rangle)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \langle H \rangle) &= \frac{1}{4} \left(g_1^2 v^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{v^2}{2} (-g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} g_1^2 v^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{v^2}{8} (g_1^2 + g_2^2) \left(\frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} W_\mu^3 - \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} B_\mu \right)^2 \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

$$= \frac{1}{4} g_1^2 v^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{v^2}{8} (g_1^2 + g_2^2) (\cos \theta W_\mu^3 - \sin \theta B_\mu)^2$$

$$Z_\mu = \cos\theta W_\mu^3 - \sin\theta B_\mu$$

LA COMBINAZIONE ORTOGONALE
 $A_\mu = \cos\theta B_\mu + \sin\theta W_\mu^3$
 NON COMPARE E RIMANE MASSLESS

DUNQUE

$$(D_\mu \langle H \rangle)^\dagger (D^\mu \langle H \rangle) = \frac{1}{4} g_1^2 v^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{v^2}{8} (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu$$

E SI HA → CAMPI COMPLESSI, $m^2 \phi^\dagger \phi$

$$m_{W^\pm} = \frac{1}{4} g_1^2 v^2$$

→ CAMPO SCALARE $\frac{1}{2} m^2 \phi^2$

$$m_Z = \frac{v^2}{4} (g_1^2 + g_2^2)$$

I CUI PROPAGATORI SONO:

$$\Delta_{\mu\nu}^W(p) = \frac{-i \eta_{\mu\nu}}{p^2 - m_{W^\pm}^2}$$

$$\Delta_{\mu\nu}^Z(p) = \frac{-i \eta_{\mu\nu}}{p^2 - m_Z^2}$$

LA MASSA DEI LEPTONI LA VEDIAMO DAI TERMINI DI TIPO
 YUKAWA. DOVREMO USARE

$$\tilde{H} = i\sigma_2 H^* = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

NEL VUOTO

COSÌ DA SELEZIONARE LE COMPONENTI ALTRE. → ν

DUNQUE:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_Y &= \gamma_e (\bar{\psi}_L H \ell_R + \bar{\ell}_R H^\dagger \psi_L) + \gamma_\nu (\bar{\psi}_L \tilde{H} \nu_R + \bar{\nu}_R \tilde{H}^\dagger \psi_L) \\
 &= \gamma_e \left\{ (\bar{\nu} \ \bar{\ell})_L \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \ell_R + \bar{\ell}_R \begin{pmatrix} 0 & v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \ell \end{pmatrix}_L \right\} + \\
 &\quad + \gamma_\nu \left\{ (\bar{\nu} \ \bar{\ell})_L \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \nu_R + \bar{\nu}_R \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \ell \end{pmatrix}_L \right\} \\
 &= \gamma_e \left\{ \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_L \ell_R + \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_R \ell_L \right\} + \gamma_\nu \left\{ \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L \nu_R + \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_R \nu_L \right\} \\
 &= \frac{\gamma_e v}{\sqrt{2}} (\bar{\ell}_L \ell_R + \bar{\ell}_R \ell_L) + \frac{\gamma_\nu v}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L)
 \end{aligned}$$

DUNQUE

$$m_e = \frac{\gamma_e v}{\sqrt{2}} \quad m_\nu = \frac{\gamma_\nu v}{\sqrt{2}} .$$

LE CORRENTI LE MEDIAMO DALLE DERIVATE COVARIANTI

$$i \bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi \sim \frac{i}{2} (\bar{\nu} \ \bar{\ell}) \gamma^\mu \left(\mathcal{D}_\mu \right) \begin{pmatrix} \nu \\ \ell \end{pmatrix}$$

cos

$$D_\mu 4 = \left(\partial_\mu - i g_1 W_\mu^a T^a + \frac{i}{2} g_2 B_\mu \right) 4$$

$$\Rightarrow \frac{i}{2} g_1 W_\mu^a T^a - \frac{i}{2} g_2 B_\mu = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} g_1 W_\mu^3 - g_2 B_\mu & g_1 W_\mu^1 - i g_1 W_\mu^2 \\ g_1 W_\mu^1 + i g_1 W_\mu^2 & -\frac{g_1}{2} W_\mu^3 - g_2 B_\mu \end{pmatrix}$$

$$= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} g_1 W_\mu^3 - g_2 B_\mu & \sqrt{2} g_1 \frac{W_\mu^1 - i W_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} g_1 \frac{W_\mu^1 + i W_\mu^2}{\sqrt{2}} & -g_1 W_\mu^3 - g_2 B_\mu \end{pmatrix}$$

cos

$$i 4 \gamma^\mu D_\mu 4 = i (\bar{\nu} \ \bar{e}) \gamma^\mu \frac{i}{2} \begin{pmatrix} g_1 W_\mu^3 - g_2 B_\mu & \sqrt{2} g_1 W_\mu^- \\ \sqrt{2} g_1 W_\mu^+ & -g_1 W_\mu^3 - g_2 B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} (\bar{\nu} \ \bar{e}) \gamma^\mu \begin{pmatrix} (g_1 W_\mu^3 - g_2 B_\mu) \nu + \sqrt{2} g_1 W_\mu^- e \\ \sqrt{2} g_1 W_\mu^+ \nu + (-g_1 W_\mu^3 - g_2 B_\mu) e \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \bar{\nu} \gamma^\mu (g_1 W_\mu^3 - g_2 B_\mu) \nu + \bar{\nu} \sqrt{2} g_1 \gamma^\mu W_\mu^- e + \right. \\ \left. + \bar{e} \gamma^\mu \sqrt{2} g_1 W_\mu^+ \nu + \bar{e} \gamma^\mu (-g_1 W_\mu^3 - g_2 B_\mu) e \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \bar{\nu} \gamma^\mu (g_1 W_\mu^3 - g_2 B_\mu) \nu - \frac{g_1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu} \gamma^\mu W_\mu^- \ell + \bar{\ell} \gamma^\mu W_\mu^+ \nu) -$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{\ell} \gamma^\mu (g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu) \ell$$

USANDO

$$\begin{cases} Z_\mu = \cos\theta W_\mu^3 - \sin\theta B_\mu \\ A_\mu = \sin\theta W_\mu^3 + \cos\theta B_\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_\mu^3 = \cos\theta Z_\mu + \sin\theta A_\mu \\ B_\mu = \sin\theta A_\mu - \cos\theta Z_\mu \end{cases}$$

$$\cos\theta = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \bar{\nu} \gamma^\mu \left[g_1 \cos\theta Z_\mu + g_1 \sin\theta A_\mu - g_2 \cos\theta A_\mu + g_2 \sin\theta Z_\mu \right] \nu -$$

$$- \frac{g_1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu} \gamma^\mu W_\mu^- \ell + \bar{\ell} \gamma^\mu W_\mu^+ \nu) +$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{\ell} \gamma^\mu \left[g_1 \cos\theta Z_\mu + g_1 \sin\theta A_\mu + g_2 \cos\theta A_\mu - g_2 \sin\theta Z_\mu \right] \ell$$

$$= -\frac{1}{2} \bar{\nu} \gamma^\mu \left[g_1 \cos\theta + g_2 \sin\theta \right] Z_\mu \nu - \frac{1}{2} \bar{\nu} \gamma^\mu \underbrace{\left[g_1 \sin\theta - g_2 \cos\theta \right]}_{0} A_\mu \nu -$$

$$- \frac{g_1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu} \gamma^\mu W_\mu^- \ell + \bar{\ell} \gamma^\mu W_\mu^+ \nu) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \bar{\ell} \gamma^\mu [g_1 \cos \theta - g_2 \sin \theta] Z_\mu \ell \\
& + \frac{1}{2} \bar{\ell} \gamma^\mu [g_1 \sin \theta + g_2 \cos \theta] A_\mu \ell
\end{aligned}$$

$$\text{VEDO} \quad g_2 \cos \theta = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = g_1 \sin \theta \quad g_1 \cos \theta \pm g_2 \sin \theta = \frac{g_1^2 \pm g_2^2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

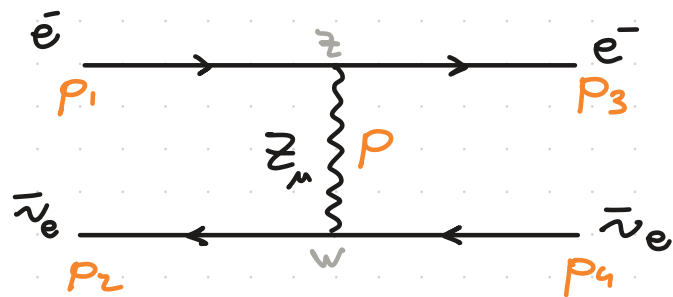
$$\begin{aligned}
& = -\frac{1}{2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \bar{\nu} \gamma^\mu Z_\mu \nu - \frac{g_1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu} \gamma^\mu W_\mu^- \ell + \bar{\ell} \gamma^\mu W_\mu^+ \nu) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{g_1^2 - g_2^2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \bar{\ell} \gamma^\mu Z_\mu \ell + g_1 \sin \theta \bar{\ell} \gamma^\mu A_\mu \ell
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \bar{\nu} \gamma^\mu \nu - \frac{g_1^2 - g_2^2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \bar{\ell} \gamma^\mu \ell \right\} Z_\mu - \\
& - \frac{g_1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu} \gamma^\mu W_\mu^- \ell + \bar{\ell} \gamma^\mu W_\mu^+ \nu) + \\
& + e \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \bar{\ell} \gamma^\mu A_\mu \ell
\end{aligned}$$

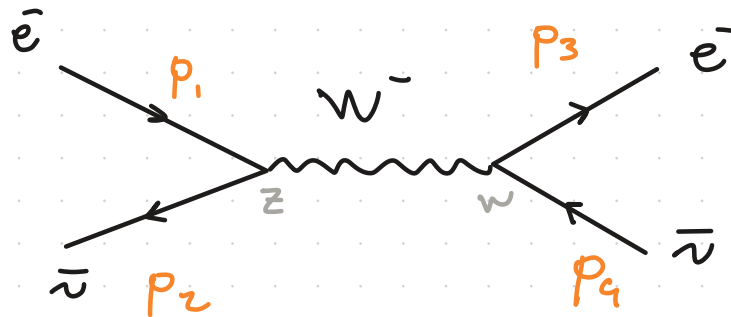
CALCOLIAMO

$$e^- + \bar{\nu}_e \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$$

I DIAGRAMMI DELLA TEORIA SONO:



CANALE t : $p = p_1 - p_3$



CANALE s : $p = p_1 + p_2$

$$\mathcal{M}_t = \bar{J}_{\mu,e} (\Delta_{\mu\nu}^Z(p)) J_{\mu,\nu}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \frac{g_1^2 - g_2^2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \bar{\ell} \gamma^\mu \ell \right] \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p_t^2 - m_Z^2} \left[\frac{1}{2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \bar{\nu} \gamma^\nu \nu \right]$$

$$= \frac{-i(g_1^2 - g_2^2)}{4(t - m_Z^2)} (\bar{\ell} \gamma^\mu \ell) (\bar{\nu} \gamma_\mu \nu)$$

$$\mathcal{M}_s = \bar{J}_{\mu,e} (\Delta_{\mu\nu}^W(p)) J_{\mu,\nu}$$

$$= \left[-\frac{g_1}{\sqrt{2}} \bar{\nu} \gamma^\mu \ell \right] \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p_s^2 - m_W^2} \left[-\frac{g_1}{\sqrt{2}} \bar{\ell} \gamma^\nu \nu \right]$$

$$= \frac{-ig_1^2}{s - m_w^2} (\bar{\nu}(p_2) \gamma^\mu \ell(p_1)) (\bar{\ell}(p_3) \gamma_\mu \nu)$$

CALCOLO

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 s}$$

$$= \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{1}{4} \int \left\{ |\mathcal{M}_t|^2 + |\mathcal{M}_s|^2 + 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_s^\dagger \mathcal{M}_t \right\}$$

s: $\langle 0 | T \left[\underbrace{\bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) \dots W_\mu^-(z) \bar{\psi}(z) \psi(z) \dots W^-(w) \bar{\psi}(w) \psi(w)}_{\text{diagram}} \right] | 0 \rangle$

t: $\langle 0 | T \left[\underbrace{\bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \psi(x_4) \dots W_\mu^-(z) \bar{\psi}(z) \psi(z) \dots W^-(w) \bar{\psi}(w) \psi(w)}_{\text{diagram}} \right] | 0 \rangle$

NO SEGNO RELATIVO

$$\frac{1}{4} \int |\mathcal{M}_t|^2 = \frac{1}{4} \int \frac{(g_1^2 - g_2^2)^2}{16(t - m_z^2)^2} (\bar{\ell}_\alpha(p_3) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \ell_\beta(p_1)) (\bar{\nu}_\delta(p_2) (\gamma_\mu)_{\delta\gamma} \nu_\gamma(p_4)) \times$$

$$\times (\bar{\ell}_\varepsilon(p_1)(\gamma^\nu)_{\varepsilon\tau} \ell_\tau(p_3)) (\bar{\nu}_\delta(p_4)(\gamma_\nu)_{\delta\sigma} \nu_\sigma(p_2))$$

$$= \frac{(g_1^2 - g_2^2)^2}{64} \frac{1}{(t - m_\tau^2)^2} (\not{p}_1 + m_e)_{\beta\varepsilon} (\gamma^\nu)_{\varepsilon\tau} (\not{p}_3 + m_e)_{\tau\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \times$$

$$(\not{p}_4 - m_\nu)_{\delta\delta} (\gamma_\nu)_{\delta\sigma} (\not{p}_2 - m_\nu)_{\sigma\sigma} (\gamma_\mu)_{\delta\delta}$$

$$= \frac{(g_1^2 - g_2^2)^2}{64 (t - m_\tau^2)^2} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_3 + m_e) \gamma^\mu \right\} \times$$

$$\times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_4 - m_\nu) \gamma_\nu (\not{p}_2 - m_\nu) \gamma_\mu \right\}$$

$$= \frac{(g_1^2 - g_2^2)^2}{64 (t - m_\tau^2)^2} \text{Tr} \left\{ \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_3 \gamma^\mu + m_e^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \right\} \times$$

$$\times \text{Tr} \left\{ \not{p}_4 \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_\mu + m_\nu^2 \gamma_\nu \gamma_\mu \right\}$$

$$= \frac{(g_1^2 - g_2^2)^2}{64 (t - m_\tau^2)^2} \left\{ 4(p_1)_\alpha (p_3)_\beta (\eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\nu\mu} + \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu}) + \right.$$

$$+ 4m_e^2 \eta^{\nu\mu} \} \left\{ 4(p_4)^\gamma (p_2)^\delta (\eta_{\gamma\nu} \eta_{\delta\mu} - \eta_{\gamma\delta} \eta_{\nu\mu} + \eta_{\gamma\mu} \eta_{\nu\delta}) + m_\nu^2 4\eta_{\nu\mu} \right\}$$

$$= \frac{16(g_1^2 - g_2^2)^2}{64 s(t - m_\pi^2)^2} \left\{ (p_1)_\alpha (p_3)_\beta (p_4)^\gamma (p_2)^\delta \left[2\eta^\alpha_\gamma \eta^\beta_\delta + 2\eta^\alpha_\delta \eta^\beta_\gamma \right] + \right.$$

$$+ m_\nu^2 (p_1)_\alpha (p_3)_\beta (\eta^{\alpha\beta} - 4\eta^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta}) +$$

$$\left. + m_e^2 (p_4)^\gamma (p_2)^\delta (\eta_{\gamma\delta} - 4\eta_{\gamma\delta} + \eta_{\gamma\delta}) + 4m_e^2 m_\nu^2 \right\}$$

$$= \frac{(g_1^2 - g_2^2)^2}{4 (t - m_\pi^2)^2} \left\{ 2(p_1 p_4)(p_2 p_3) + 2(p_1 p_2)(p_3 p_4) - 2m_\nu^2 (p_1 p_3) - \right.$$

$$\left. - 2m_e^2 (p_2 p_4) + 4m_e^2 m_\nu^2 \right\}$$

$$= \frac{(g_1^2 - g_2^2)^2}{4 (t - m_\pi^2)^2} \left\{ (p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_2)(p_3 p_4) - m_\nu^2 (p_1 p_3) - m_e^2 (p_2 p_4) + \right. \\ \left. + 2m_\nu^2 m_e^2 \right\}$$

$$\frac{1}{4} \int |\mathcal{M}_s|^2 = \frac{g_1^4}{4(s-m_w^2)^2} \int (\bar{v}_\alpha(p_2) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \ell_\beta(p_1)) (\bar{\ell}_\gamma(p_3) (\gamma_\mu)_{\gamma\delta} \nu_\delta(p_4)) \\ \times (\bar{\ell}_\varepsilon(p_1) (\gamma^\nu)_{\varepsilon\tau} \nu_\tau(p_2)) (\bar{\nu}_\delta(p_4) (\gamma_\nu)_{\delta\sigma} \ell_\sigma(p_3))$$

$$= \frac{g_1^4}{4(s-m_w^2)^2} (\not{p}_2 - m_\nu)_{\tau\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\not{p}_1 + m_e)_{\beta\varepsilon} (\gamma^\nu)_{\varepsilon\tau} \times \\ \times (\not{p}_4 - m_\nu)_{\delta\gamma} (\gamma_\nu)_{\gamma\sigma} (\not{p}_3 + m_e)_{\sigma\delta} (\gamma_\mu)_{\delta\delta}$$

$$= \frac{g_1^4}{4(s-m_w^2)^2} \text{Tr} \{ \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu - m_e m_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \} \times \\ \times \text{Tr} \{ \not{p}_4 \gamma_\nu \not{p}_3 \gamma_\mu - m_e m_\nu \gamma_\nu \gamma_\mu \}$$

$$= \frac{g_1^4}{4(s-m_w^2)^2} \left\{ 4(p_2)_\alpha (p_1)_\beta [\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} + \eta^{\alpha\nu} \eta^{\mu\beta}] - 4m_e m_\nu \eta^{\mu\nu} \right\} \times \\ \times \left\{ 4(p_4)_\delta (p_3)_\sigma [\eta_{\delta\nu} \eta_{\sigma\mu} - \eta_{\delta\sigma} \eta_{\mu\nu} + \eta_{\delta\mu} \eta_{\nu\sigma}] - 4m_e m_\nu \eta_{\mu\nu} \right\}$$

$$= \frac{g_1^4}{(s - m_w^2)^2} \left\{ (p_1)_\beta (p_2)_\alpha (p_3)^\sigma (p_4)^\delta \left[2\eta^\alpha{}_\sigma \eta^\beta{}_\delta + 2\eta^\alpha{}_\delta \eta^\beta{}_\sigma \right] + 2m_e m_\nu (p_1 p_2) + \right. \\ \left. + 2m_e m_\nu (p_3 p_4) + 4m_e^2 m_\nu^2 \right\}$$

$$= \frac{2g_1^4}{(s - m_w^2)^2} \left\{ (p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_3)(p_2 p_4) + m_e m_\nu [(p_1 p_2) + (p_3 p_4)] + \right. \\ \left. + m_e^2 m_\nu^2 \right\}$$

IL TERMINE DI INTERFERENZA

$$\frac{1}{4} \sum \mathcal{M}_s^+ \mathcal{M}_t = \frac{g_1^2 (g_1^2 - g_2^2)}{4(t - m_z^2)(s - m_w^2)} \sum (\bar{\ell}_\alpha(p_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \nu_\beta(p_2)) (\bar{\nu}_\delta(p_4) (\gamma_\mu)_{\delta\sigma} \ell_\sigma(p_3)) \\ \times (\bar{\ell}_\varepsilon(p_3) (\gamma^\nu)_{\varepsilon\tau} \ell_\tau(p_1)) (\bar{\nu}_\omega(p_2) (\gamma_\nu)_{\omega\theta} \nu_\theta(p_4)) \\ = \frac{g_1^2 (g_1^2 - g_2^2)}{4(t - m_z^2)(s - m_z^2)} (\not{p}_2 - m_\nu)_{\beta\omega} (\gamma_\nu)_{\omega\theta} (\not{p}_4 - m_\nu)_{\theta\delta} (\gamma_\mu)_{\delta\sigma} (\not{p}_3 + m_e)_{\sigma\varepsilon} (\gamma^\nu)_{\varepsilon\tau} \times \\ \times (\not{p}_1 + m_e)_{\tau\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$$

$$= \underbrace{\frac{g_1^2 (g_1^2 - g_2^2)}{4(t - m_Z^2)(s - m_Z^2)}}_G \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 - m_\nu) \gamma_\nu (\not{p}_4 - m_\nu) \gamma_\mu (\not{p}_3 + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu \right\}$$

$$\sim G \text{Tr} \left\{ \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_4 \gamma_\mu \not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma^\mu \right\}$$

→ ALTE ENERGIE

$$= G (p_1)_\alpha (p_2)_\beta (p_3)_\gamma (p_4)_\sigma \text{Tr} \left\{ \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\gamma \gamma_\nu \gamma^\alpha \gamma_\mu \right\}$$

$$= G (p_1)_\alpha (p_2)_\beta (p_3)_\gamma (p_4)_\sigma (-32) \eta^{\sigma\alpha} \eta^{\beta\gamma}$$

$$\sim - \frac{8 g_1^2 (g_1^2 - g_2^2)}{t s} (p_1 p_4) (p_2 p_3)$$

Donc

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 s} \left\{ \frac{(g_1^2 - g_2^2)^2}{4t^2} \left[(p_1 p_4) (p_2 p_3) + (p_1 p_2) (p_3 p_4) \right] + \right.$$

$$+ \frac{2g_1^4}{s^2} \left[(p_1 p_4) (p_2 p_3) + (p_1 p_3) (p_2 p_4) \right] -$$

$$\left. - \frac{16 g_1^2 (g_1^2 - g_2^2)}{t s} (p_1 p_4) (p_2 p_3) \right\}$$

PROBLEMA 2. DIMOSTRARE LE IDENTITÀ DI GORDON:

$$\bar{u}_{s'}(p') \left[(p' + p)^\mu - 2i S^{\mu\nu} (p' - p)_\nu \right] \gamma_5 u_s(p) = 0$$

$$\bar{v}_{s'}(p') \left[(p' + p)^\mu - 2i S^{\mu\nu} (p' - p)_\nu \right] \gamma_5 v_s(p) = 0$$

DOVE $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

SUGGERIMENTO: DIMOSTRARE E UTILIZZARE L'IDENTITÀ:

$$\textcircled{*} \quad \gamma^\mu \not{p} + \not{p}' \gamma^\mu = - (p + p')^\mu + 2i S^{\mu\nu} (p' - p)_\nu.$$

SOL. COMINCIANDO DA $\textcircled{*}$:

$$\gamma^\mu \not{p} + \not{p}' \gamma^\mu = \gamma^\mu \gamma^\nu p_\nu + p'_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu$$

RICORDANDO $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$$

$$\gamma^\mu \not{p} + \not{p}' \gamma^\mu = \gamma^\mu \gamma^\nu p_\nu + p'_\nu (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu)$$

HA DA $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{4} [\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu]$

$$= \frac{i}{4} [\gamma^\mu \gamma^\nu - (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu})]$$

$$= \frac{i}{4} [2\gamma^\mu \gamma^\nu - 2\eta^{\mu\nu}]$$

$$= -\frac{i}{2} [\eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu]$$

$$\Rightarrow \gamma^\mu \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} - 2iS^{\mu\nu}$$

così :

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \not{p} + \not{p}' \gamma^\mu &= (\eta^{\mu\nu} - 2iS^{\mu\nu}) p_\nu + p'_\nu (2\eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} + 2iS^{\mu\nu}) \\ &= \eta^{\mu\nu} (p_\nu + p'_\nu) - 2iS^{\mu\nu} (p_\nu - p'_\nu) \\ &= -[(p + p')^\mu + 2iS^{\mu\nu} (p - p')_\nu] \end{aligned}$$


NELLE IDENTITÀ DI GORDON:

$$\begin{cases} \bar{u}_{s'}(p') [(p' + p)^\mu - 2iS^{\mu\nu} (p' - p)_\nu] \gamma_\mu u_s(p) \\ \bar{v}_{s'}(p') [(p' + p)^\mu - 2iS^{\mu\nu} (p' - p)_\nu] \gamma_\mu v_s(p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\mu}_{s'}(p') [\gamma^\mu \not{p} + \not{p}' \gamma^\mu] \gamma_5 \mu_s(p) \\ \bar{\nu}_{s'}(p') [\gamma^\mu \not{p} + \not{p}' \gamma^\mu] \gamma_5 \nu_s(p) \end{cases}$$

$$\int \bar{\mu}_{s'}(p') \gamma^\mu \not{p} \gamma_5 \mu_s(p) + \bar{\mu}_{s'}(p') \not{p}' \gamma^\mu \gamma_5 \mu_s(p)$$

$$\int \bar{\nu}_{s'}(p') \gamma^\mu \not{p} \gamma_5 \nu_s(p) + \bar{\nu}_{s'}(p') \not{p}' \gamma^\mu \gamma_5 \nu_s(p)$$

$$\int -\bar{\mu}_{s'}(p') \gamma^\mu \gamma_5 \not{p} \mu_s(p) + \bar{\mu}_{s'}(p') \not{p}' \gamma^\mu \gamma_5 \mu_s(p)$$

$$\int -\bar{\nu}_{s'}(p') \gamma^\mu \gamma_5 \not{p} \nu_s(p) + \bar{\nu}_{s'}(p') \not{p}' \gamma^\mu \gamma_5 \nu_s(p)$$

VALGONO LE EQUAZIONI DI WEYL:

$$\begin{cases} (\not{p} - m) \mu = 0 \\ (\not{p} + m) \nu = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\bar{\mu}_{s'}(p') \gamma^\mu \gamma_5 m \mu_s(p) + m \bar{\mu}_{s'}(p') \gamma^\mu \gamma_5 \mu_s(p) = 0 \\ +\bar{\nu}_{s'}(p') \gamma^\mu \gamma_5 m \nu_s(p) - m \bar{\nu}_{s'}(p') \gamma^\mu \gamma_5 \nu_s(p) = 0 \end{cases}$$



PROBLEMA 1. SI CONSIDERI UNA TEORIA CON SIMMETRIA LOCALE $U(1) \times U(1)$, CON A_μ E B_μ I RISPETTIVI CAMPI DI GAUGE. SI DISCUTA L'EFFETTO DI UN CAMPO SCALARE (COMPLESSO) CON CARICA $(+e, -2g)$ RISPETTO AI DUE FATTORI ABELIANI E POTENZIALE:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 - \mu^2 \phi^\dagger \phi$$

INDIVIDUANDO IL BOSONE DI GOLDSTONE E LO SPETTRO DEI VETTORI E DELLO SCALARE RESIDUO.

SE AGGIUNGIAMO DUE CAMPI DI SPIN $1/2$ DESCRITTI DA SPINORI DI DIRAC ψ_i ($i=1,2$) CON CARICA $(e, 0)$ E $(0, 2g)$ RISPETTO AI DUE FATTORI $U(1)$, RISPETTIVAMENTE, DETERMINARE:

1. LE CORRENTI ASSOCIATE AI CAMPI DI GAUGE FISICI.
2. L'AMPIEZZA DI PROBABILITÀ PER LO SCATTERING $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$, DOVE L'ELETTRONE È ASSOCIATO AL CAMPO ψ_1 MENTRE IL MUONE AL CAMPO ψ_2 .
3. DISCUTERE IL LIMITE DI ALTE ENERGIE.

SOL. ABBIAMO

$$U(1)_1 \times U(1)_2 \rightarrow A_\mu, B_\mu$$

ϕ CON CARICA $(+e, -2g)$ OVERO:

$$\begin{cases} U(1)_1 : & \phi \rightarrow e^{ie} \phi \\ U(1)_2 : & \phi \rightarrow e^{-2ig} \phi \end{cases}$$

SAPPIAMO ANCHE DI AVERE:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 - \mu^2 \phi^\dagger \phi.$$

LA LAGRANGIANA DELLA TEORIA È:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(\phi)$$

MA SAPPIAMO CHE, ACCORPIANDO IN MODO MINIMALE I CAMPI DI GAUGE IN MODO DA RENDERE LA TEORIA LOCALE, DOBBIAMO INTRODURRE LA DERIVATA COVARIANTE:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu + zigB_\mu) \phi$$

COSÌ CHE:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi).$$

PER STUDIARE $V(\phi)$ PUÒ ESSERE COMODO RIPARAMETRIZZARE IL CAMPO ϕ COME:

$$\phi = \rho e^{i\theta}$$

COSÌ CHE:

$$V(\rho) = \frac{\lambda}{2} \rho^4 - \mu^2 \rho^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 2\lambda \varphi^3 - 2\mu^2 \varphi \quad \Rightarrow \quad V' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \end{cases}$$

OSSERVIAMO CHE

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 6\lambda \varphi^2 - 2\mu^2 \quad \Rightarrow \quad V''|_{\langle \varphi \rangle} = \begin{cases} -2\mu^2 \\ 4\mu^2 \end{cases}$$

SE $\mu^2 < 0$ ALLORA $\langle \varphi \rangle = 0$ È IL MINIMO DEL POTENZIALE, LA LAGRANGIANA DESCRIVE I CAMPI FISICI E I BOSONI SONO ENTRAMBI MASS-LESS.

SE $\mu^2 > 0$ ALLORA IL MINIMO DI $V(\varphi)$ È $\langle \varphi \rangle = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$, PER CUI DOBBIAMO SVILUPPARE ATTORNO ESSO. SCEGLIAMO DI VEDERE LE FLUTTUAZIONI ATTORNO

$$\xi_{\pm} \equiv \xi = \varphi - \langle \varphi \rangle$$

E CI VIENE COMODO VEDERE

$$V''' = 12\lambda \varphi \quad \longrightarrow \quad V'''(\langle \varphi \rangle) = 12\lambda \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} = 12\sqrt{\mu^2 \lambda}$$

$$V'''' = 12\lambda$$

E

ABBIAMO :

$$\begin{aligned}
 D_\mu \phi &= (\partial_\mu - ieA_\mu + zigB_\mu) \rho e^{i\theta} \\
 &= e^{i\theta} \partial_\mu \rho + i\rho e^{i\theta} \partial_\mu \theta + (-ieA_\mu + zigB_\mu) \rho e^{i\theta} \\
 &= \left[\partial_\mu \rho + i\rho (\partial_\mu \theta - eA_\mu + zigB_\mu) \right] e^{i\theta}
 \end{aligned}$$

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) = \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho^2 (\partial_\mu \theta - eA_\mu + zigB_\mu)^2$$

COSÌ ATTORNO IL VUOTO $\xi = \rho - \langle \rho \rangle$

$$\begin{aligned}
 &= \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi + \langle \rho \rangle)^2 (\partial_\mu \theta - eA_\mu + zigB_\mu)^2 \\
 &= \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi^2 + 2\langle \rho \rangle \xi + \langle \rho \rangle^2) (\partial_\mu \theta - eA_\mu + zigB_\mu)^2
 \end{aligned}$$

VEDIAMO θ COME UN BOSONE DI GOLDSTONE, DEFINIAMO

$$\cos \theta = \frac{e}{\sqrt{e^2 + 4g^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{2g}{\sqrt{e^2 + 4g^2}}$$

COSÌ $Z_\mu \equiv \cos \theta A_\mu - \sin \theta B_\mu$

$$H_\mu \equiv \sin\Theta A_\mu + \cos\Theta B_\mu$$

IN QUESTO MODO

$$(\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) = \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi^2 + 2\langle g \rangle \xi + \langle g \rangle^2) \left(\partial_\mu \Theta - \sqrt{e^2 + 4g^2} Z_\mu \right)^2$$

RICHIAMANDO

$$\tilde{Z}_\mu = Z_\mu - \frac{1}{\sqrt{e^2 + 4g^2}} \partial_\mu \Theta$$

(IGNORANDO I $\sim$)

$$= \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi^2 + 2\langle g \rangle \xi + \langle g \rangle^2) (e^2 + 4g^2) Z_\mu Z^\mu$$

COSÌ LA LAGRANGIANA SVILUPPATA ATTORNO IL VUOTO È:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi^2 + 2\langle g \rangle \xi + \langle g \rangle^2) (e^2 + 4g^2) Z_\mu Z^\mu - V(g)|_{\langle g \rangle} \\ & - \frac{\partial V}{\partial g} \Big|_{\langle g \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial g^2} \Big|_{\langle g \rangle} \xi^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial g^3} \Big|_{\langle g \rangle} \xi^3 - \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 V}{\partial g^4} \Big|_{\langle g \rangle} \xi^4 \end{aligned}$$

$$= \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \lambda_1 \xi^2 Z_\mu Z^\mu + \lambda_2 \xi Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2} m_z^2 Z_\mu Z^\mu -$$

$$- \frac{1}{2} \underbrace{(4\mu^2)}_{m_\xi^2} \xi^2 - \frac{1}{3!} (12\sqrt{\mu^2 \lambda}) \xi^3 - \frac{1}{4!} (12\lambda) \xi^4$$

IN CUI LEGGIAMO TUTTE LE INTERAZIONI TRA Z_μ E Z_μ .
 E IL CAMPO SCALARE ξ E LE MASSE DI ξ E Z_μ .
 OTTENIAMO μ_μ MASSLESS DISACCOUPLATO DA ξ .

$$\lambda_1 = e^2 + 4g^2$$

$$\lambda_2 = 2\langle g \rangle (e^2 + 4g^2)$$

$$m_z^2 = \langle g \rangle^2 (e^2 + 4g^2)$$

$$m_\xi^2 = 4\mu^2.$$

AGGIUNGIAMO DUE CAMPI DI SPIN $1/2$ ψ_i ($i=1,2$)
 CON CARICHE

$$\psi_1 \quad (e, 0) \quad \begin{cases} U(1)_1 \\ U(1)_2 \end{cases} \quad \begin{aligned} \psi_1 &\rightarrow e^{ie} \psi_1 \\ \psi_1 &\rightarrow \psi_1 \end{aligned}$$

$$\psi_2 \quad (0, 2g) \quad \begin{cases} U(1)_1 \\ U(1)_2 \end{cases} \quad \begin{aligned} \psi_2 &\rightarrow \psi_2 \\ \psi_2 &\rightarrow e^{2ig} \psi_2 \end{aligned}$$

LE CUI DERIVATE COVARIANTI SARANNO CONSEGUENTEMENTE

$$D_\mu \psi_1 = (\partial_\mu - ie A_\mu) \psi_1$$

$$D_\mu \psi_2 = (\partial_\mu - 2ig B_\mu) \psi_2$$

ABBIAMO NOTATO PERÒ CHE I CAMPI DI GAUGE FISICI SONO Z_μ ED H_μ , PER CUI:

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ H_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad \begin{cases} Z_\mu = \cos\theta A_\mu - \sin\theta B_\mu \\ H_\mu = \sin\theta A_\mu + \cos\theta B_\mu \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ H_\mu \end{pmatrix} \quad \begin{cases} A_\mu = \cos\theta Z_\mu + \sin\theta H_\mu \\ B_\mu = -\sin\theta Z_\mu + \cos\theta H_\mu \end{cases}$$

CHE SOSTITUITI CI DANNO

$$\begin{cases} D_\mu \psi_1 = [\partial_\mu - i(e \cos\theta Z_\mu + e \sin\theta H_\mu)] \psi_1 \\ D_\mu \psi_2 = [\partial_\mu - i(2g \cos\theta H_\mu - 2g \sin\theta Z_\mu)] \psi_2 \end{cases}$$

POSSIAMO NOTARE $e \sin\theta = \frac{e 2g}{\sqrt{e^2 + 4g^2}} = 2g \cos\theta$

DUNQUE

$$\begin{cases} \mathcal{D}_\mu \psi_1 = [\partial_\mu - i \cos\theta (e z_\mu + z g \mathcal{H}_\mu)] \psi_1 \\ \mathcal{D}_\mu \psi_2 = [\partial_\mu - i \sin\theta (e \mathcal{H}_\mu - z g z_\mu)] \psi_2 \end{cases}$$

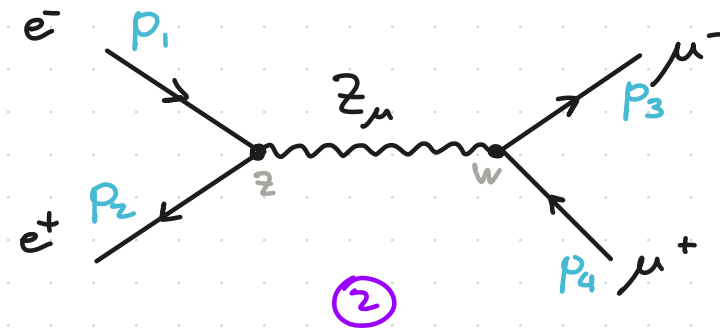
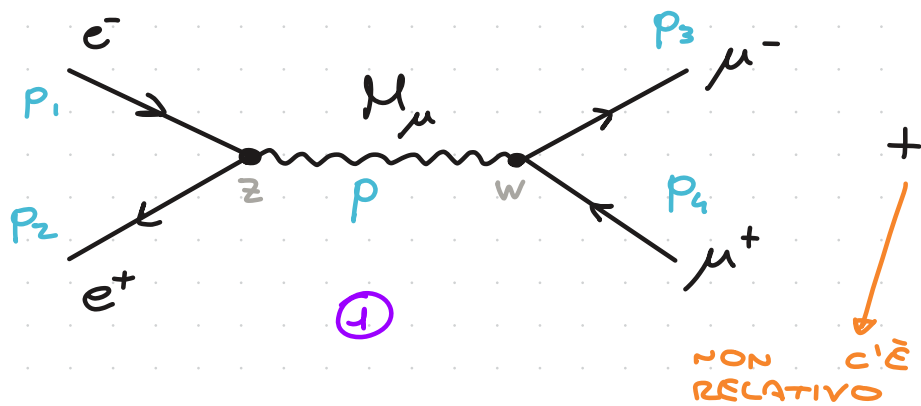
PER CUI LE CORRENTI SONO:

$$\begin{cases} J_{1,z}^\mu = \gamma^\mu e \cos\theta \\ J_{1,\mu}^\mu = \gamma^\mu z g \cos\theta \\ J_{2,z}^\mu = -\gamma^\mu z g \sin\theta \\ J_{2,\mu}^\mu = \gamma^\mu e \sin\theta \end{cases}$$

SE ASSOCIAMO $e^- \leftrightarrow \psi_1$, $\mu \leftrightarrow \psi_2$ ALLORA LO
SCATTERING

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

È DESCRITTO DAI DIAGRAMMI:



NON RELATIVO
C'È
SEGNO

ENTRambi i canali s: $p = p_1 + p_2$ con ampiezze:

$$\mathcal{M}_1 = \left(\bar{v}_\alpha(p_2) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (2g \cos\theta) u_\beta(p_1) \right) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \left(\bar{u}_\beta(p_3) (\gamma^\nu)_{\beta\sigma} (e \sin\theta) v_\sigma(p_4) \right)$$

$$\mathcal{M}_2 = \left(\bar{v}_\alpha(p_2) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (e \cos\theta) u_\beta(p_1) \right) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2 - m_Z^2} \left(\bar{u}_\beta(p_3) (\gamma^\nu)_{\beta\sigma} (-2g \sin\theta) v_\sigma(p_4) \right)$$

VEDIAMO CHE, A MENO DELLE COSTANTI NEI VERTICI E LA MASSA A DENOMINATORE DEL PROPAGATORE, LE DUE AMPIEZZE SONO IDENTICHE, PER CUI POSSIAMO DEFINIRE:

$$\tilde{\mathcal{M}} = \left(\bar{v}_\alpha(p_2) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} u_\beta(p_1) \right) (-i\eta_{\mu\nu}) \left(\bar{u}_\beta(p_3) (\gamma^\nu)_{\beta\sigma} v_\sigma(p_4) \right)$$

$$\mathcal{M}_1 = \frac{2ge \sin\theta \cos\theta}{(p_1 + p_2)^2} \tilde{\mathcal{M}}$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{-2ge \sin\theta \cos\theta}{(p_1 + p_2)^2 - m_Z^2} \tilde{\mathcal{M}}$$

$$\mathcal{M}_1^\dagger \mathcal{M}_2 = \frac{-4g^2 e^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}{(p_1 + p_2)^2 [(p_1 + p_2)^2 - m_Z^2]} |\tilde{\mathcal{M}}|^2$$

DUNQUE PER TROVARE:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum \left\{ |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_1^\dagger \mathcal{M}_2 \right\}$$
$$= \frac{1}{4} \sum |\tilde{\mathcal{M}}|^2 \left\{ \frac{4g^2 e^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{((p_1 + p_2)^2)^2} + \frac{4g^2 e^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{((p_1 + p_2)^2 - m_Z^2)^2} - \frac{8g^2 e^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(p_1 + p_2)^2 [(p_1 + p_2)^2 - m_Z^2]} \right\}$$

POTREMMO GIÀ NOTARE CHE AD ALTE ENERGIE, DUNQUE $m \sim 0$
IL TERMINE TRA $\{...\} = 0$.

AD OGNI MODO, PER TROVARE L'AMPIEZZA CI SERVE SOLO
 $|\mathcal{M}|^2$ (NON POLARIZZATA):

$$\frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum \left(\bar{v}_\alpha(p_2) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} u_\beta(p_1) \right) \left(\bar{u}_\delta(p_3) (\gamma_\mu)_{\delta\sigma} v_\sigma(p_4) \right) \times$$
$$\times \left(\bar{v}_\varepsilon(p_1) (\gamma^\nu)_{\varepsilon\tau} u_\tau(p_3) \right) \left(\bar{u}_\omega(p_1) (\gamma_\nu)_{\omega\theta} v_\theta(p_2) \right)$$

USANDO $\sum u \bar{u} = (\not{p} + m)$

$$\sum v \bar{v} = (\not{p} - m)$$

$$= \frac{1}{4} (\not{p}_1 + m_e)_{\beta\omega} (\gamma_\nu)_{\omega\theta} (\not{p}_2 - m_e)_{\theta\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \times$$
$$\times (\not{p}_3 + m_\mu)_{\tau\delta} (\gamma_\mu)_{\delta\sigma} (\not{p}_4 - m_\mu)_{\sigma\varepsilon} (\gamma^\nu)_{\varepsilon\tau}$$

$$= \frac{1}{4} \text{Tr} \{ (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}_2 - m_e) \gamma^\mu \} \text{Tr} \{ (\not{p}_3 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_4 - m_\mu) \gamma^\nu \}$$

$$= \frac{1}{4} \text{Tr} \{ \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\mu - m_e^2 \gamma_\nu \gamma^\mu \} \text{Tr} \{ \not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma^\nu - m_\mu^2 \gamma_\mu \gamma^\nu \}$$

$$= 4 \left\{ (p_1)_\alpha (p_2)_\beta \left[\eta^\alpha{}_\nu \eta^{\beta\mu} - \eta^{\alpha\beta} \eta_\nu{}^\mu + \eta^{\alpha\mu} \eta^\beta{}_\nu \right] - m_e^2 \eta_\nu{}^\mu \right\} \times \\ \times \left\{ (p_3)_\delta (p_4)_\sigma \left[\eta^\delta{}_\mu \eta^{\sigma\nu} - \eta^{\delta\sigma} \eta_\mu{}^\nu + \eta^{\delta\nu} \eta_\mu{}^\sigma \right] - m_\mu^2 \eta_\mu{}^\nu \right\}$$

$$= 4 (p_1)_\alpha (p_2)_\beta (p_3)_\delta (p_4)_\sigma \left[2 \eta^{\alpha\sigma} \eta^{\delta\beta} + 2 \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\sigma} \right] + 8 m_\mu^2 (p_1)_\alpha (p_2)_\beta \eta^{\alpha\beta} - \\ + 8 m_e^2 (p_3)_\delta (p_4)_\sigma \eta^{\delta\sigma} + 16 m_e^2 m_\mu^2$$

$$= 8 \left\{ (p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_1 p_3)(p_2 p_4) + m_\mu^2 (p_1 p_2) + m_e^2 (p_3 p_4) + \right. \\ \left. + 2 m_e^2 m_\mu^2 \right\}$$

LE VARIABILI DI MANDELSTAM SONO:

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2(p_1, p_2) = 2m_e^2 + 2(p_1, p_2) \\ t = (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2(p_1, p_3) = m_e^2 + m_\mu^2 - 2(p_1, p_3) \equiv (p_4 - p_2) \\ u = (p_1 - p_4)^2 = p_1^2 + p_4^2 - 2(p_1, p_4) = m_e^2 + m_\mu^2 - 2(p_1, p_4) \equiv (p_3 - p_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p_1, p_2) = \frac{s}{2} - m_e^2 \\ (p_1, p_3) = -\frac{t}{2} + m_e^2 + m_\mu^2 = (p_2, p_4) \\ (p_1, p_4) = -\frac{u}{2} + m_e^2 + m_\mu^2 = (p_2, p_3) \end{cases}$$

HA

$$(p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

$$\Rightarrow 2m_e^2 + 2(p_1, p_2) = 2m_\mu^2 + 2(p_3, p_4)$$

$$\Rightarrow (p_3, p_4) = (p_1, p_2) + m_e^2 - m_\mu^2$$

ALLORA L'AMPIEZZA È .

$$\frac{1}{4} \int |\mathcal{M}|^2 = 8 \left\{ \left(-\frac{u}{2} + m_e^2 + m_\mu^2 \right)^2 + \left(-\frac{t}{2} + m_e^2 + m_\mu^2 \right)^2 + \right.$$

$$+ m_\mu^2 \left(\frac{s}{2} - m_e^2 \right) + m_e^2 \left[\left(\frac{s}{2} - m_e^2 \right) + m_e^2 - m_\mu^2 \right] + 2 m_e^2 m_\mu^2 \Big\}$$

$\frac{s}{2} - m_\mu^2$

$$= 8 \left\{ \frac{\mu^2}{4} + \underline{m_e^4} + \underline{m_\mu^4} - \mu \underline{m_e^2} - \mu \underline{m_\mu^2} + 2 \underline{m_e^2} m_\mu^2 + \right.$$

$$+ \frac{t^2}{4} + \underline{m_e^4} + \underline{m_\mu^4} - t \underline{m_e^2} - t \underline{m_\mu^2} + 2 \underline{m_e^2} m_\mu^2 +$$

$$+ \frac{s}{2} \underline{m_\mu^2} - \cancel{m_e^2 / m_\mu^2} + \frac{s}{2} \underline{m_e^2} - \cancel{m_e^2 / m_\mu^2} + 2 \cancel{m_e^2 / m_\mu^2} \Big\}$$

$$= 8 \left\{ \frac{\mu^2 + t^2}{4} + 2 (\underline{m_e^2 + m_\mu^2})^2 + \frac{s}{2} (\underline{m_\mu^2 + m_e^2}) - (\mu + t) (\underline{m_e^2 + m_\mu^2}) \right\}$$

$$= 8 \left\{ \frac{\mu^2 + t^2}{4} + \left(2 (\underline{m_e^2 + m_\mu^2}) + \frac{s}{2} - \underbrace{(\mu + t)}_{\substack{\text{I: } m^2 - s}} \right) (\underline{m_e^2 + m_\mu^2}) \right\}$$

$$= 8 \left\{ \frac{\mu^2 + t^2}{4} + \left(2 (\underline{m_e^2 + m_\mu^2}) + \frac{s}{2} - 2 (\underline{m_e^2 + m_\mu^2}) + s \right) (\underline{m_e^2 + m_\mu^2}) \right\}$$

$$= 8 \left\{ \frac{\mu^2 + t^2}{4} + \frac{3s}{2} (\underline{m_e^2 + m_\mu^2}) \right\}$$

DUNQUE ALLA FINE TERMINIAMO CON

$$|\mathcal{M}|^2 = 4 \left\{ \frac{\mu^2 + t^2}{2} + 3s(m_e^2 + m_\mu^2) \right\} 4g^2 e^2 m_z^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left\{ \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s - m_z^2)} - \frac{2}{s(s - m_z^2)} \right\}$$

$$\frac{1}{s^2(s - m_z^2)^2} \left((s^2 + m_z^4 - 2sm_z^2) + s^2 - 2s(s - m_z^2) \right)$$

$$\frac{m_z^4}{s^2(s - m_z^2)^2}$$

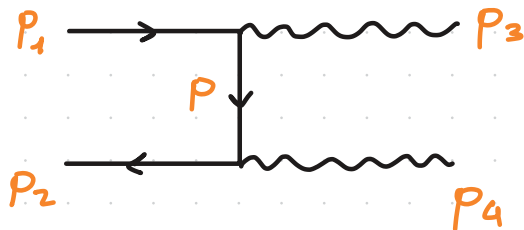
$$|\mathcal{M}|^2 = \left[\frac{\mu^2 + t^2}{2} + 3s(m_e^2 + m_\mu^2) \right] 16g^2 e^2 m_z^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{m_z^4}{s^2(s - m_z^2)^2}$$

SE COME LIMITE AD ALTE ENERGIE CONSIDERIAMO $\forall m \sim 0$
 ALLORA $|\mathcal{M}|^2 = 0$, MA SE CONSIDERIAMO m_z FINITA E SOLO
 LE MASSE DEI FERMIONI ~ 0 , ALLORA

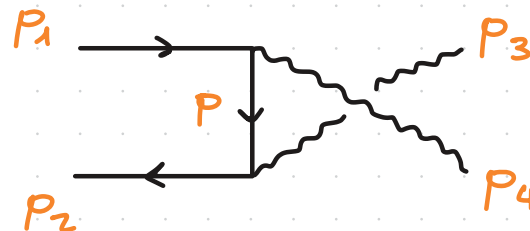
$$|\mathcal{M}|^2 = 8g^2 e^2 m_z^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{\mu^2 + t^2}{s^2(s - m_z^2)^2}.$$

PROBLEMA 2. DIMOSTRARE L'IDENTITÀ DI WARD IN QED PER IL PROCESSO $e^+ e^- \rightarrow 2\gamma$.

SOL. IN QED IL PROCESSO $e^+ e^- \rightarrow 2\gamma$ AVVIENE CON I DIAGRAMMI



CANALE ϵ : $p = p_1 - p_3$



CANALE μ : $p = p_1 - p_4$

$$\mathcal{L}_{\text{INT}} = -ie\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$$

SI HA:

$$\mathcal{M}_{\text{TOT}} = \mathcal{M}_\epsilon + \mathcal{M}_\mu$$

$$= i(-ie)^2 \left(\bar{u}(p_2) \gamma^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda_4)}(p_4) (\not{p}_\epsilon - m)^{-1} \gamma^\nu \epsilon_\nu^{(\lambda_3)}(p_3) u(p_1) \right) +$$

$$+ i(-ie)^2 \left(\bar{u}(p_2) \gamma^\nu \epsilon_\nu^{(\lambda_3)}(p_3) (\not{p}_\mu - m)^{-1} \gamma^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda_4)}(p_4) u(p_1) \right)$$

VOGLIAMO FARE LA TRASFORMAZIONE DI GAUGE $\epsilon_\mu(k) \rightarrow \epsilon_\mu(k) + \alpha K_\mu$ E VEDERE CHE:

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} \epsilon_\mu \epsilon_\nu \rightarrow \mathcal{M}^{\mu\nu} \epsilon_\mu \epsilon_\nu + \underbrace{\alpha^2 \mathcal{M}^{\mu\nu} K_\mu K_\nu}_{=0} + \left(\text{ALTRI PEZZI ANALOGHI} \right) = 0$$

DUNQUE

GUARDIAMO

$$\delta \mathcal{M} = \mathcal{M}^{\mu\nu} (p_4)_\mu (p_3)_\nu$$

$$= -ie^2 \left\{ \bar{v}(p_2) \not{p}_4 (\not{p}_1 - m)^{-1} \not{p}_3 u(p_1) + \bar{v}(p_2) \not{p}_3 (\not{p}_1 - m)^{-1} \not{p}_4 u(p_1) \right\}$$

DESCRIVIAMO

$$\not{p}_3 = (\not{p}_1 - m) - (\not{p}_1 - \not{p}_3 - m)$$

$$\not{p}_4 = (\not{p}_1 - m) - (\not{p}_1 - \not{p}_4 - m)$$

così:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{M} = -ie^2 \left\{ \bar{v}(p_2) \not{p}_4 (\not{p}_1 - \not{p}_3 - m)^{-1} [(\not{p}_1 - m) - (\not{p}_1 - \not{p}_3 - m)] u(p_1) + \right. \\ \left. + \bar{v}(p_2) \not{p}_3 (\not{p}_1 - \not{p}_4 - m)^{-1} [(\not{p}_1 - m) - (\not{p}_1 - \not{p}_4 - m)] u(p_1) \right\} \end{aligned}$$

USIAMO

LE RELAZIONI ON-SHELL:

$$(\not{p} - m) u(p) = 0$$

$$\bar{v}(p) (\not{p} + m) = 0$$

$$\delta\mathcal{M} = -ie^2 \left\{ -\bar{v}(p_2) \not{p}_4 \not{u}(p_1) - \bar{v}(p_2) \not{p}_3 \not{u}(p_1) \right\}$$

$$= +ie^2 \bar{v}(p_2) (\not{p}_4 + \not{p}_3) u(p_1)$$

USO LA CONSERVAZIONE DEL QUADRI-IMPULSO

$$p_3 + p_4 = p_1 + p_2$$

E RISCOVO

$$\not{p}_1 + \not{p}_2 = (\not{p}_1 - m) + (\not{p}_2 + m)$$

$$\delta\mathcal{M} = +ie^2 \bar{v}(p_2) \left[(\not{p}_1 - m) + (\not{p}_2 + m) \right] u(p_1)$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

2250915

PROBLEMA 1. SI CONSIDERI LA LAGRANGIANA

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - V(\phi) + \\ & + i\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 + i\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 + \frac{i}{2} \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 + \frac{i}{2} \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 - \\ & - m(\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) \end{aligned}$$

DOVE $F_{\mu\nu}$ E $B_{\mu\nu}$ SONO I TENSORI DEGLI SFORZI DI DUE CAMPI ABELIANI A_μ E B_μ , ϕ È UN CAMPO SCALARE COMPLESSO, MENTRE ψ_1 E ψ_2 SONO DUE CAMPI FERMIONICI, DESCRITTI DA SPINORI DI DIRAC. I CAMPI FERMIONICI HANNO ENTRAMBI CARICA $(+e, -e)$ RISPETTO AI CAMPI $U(1)$, MENTRE IL CAMPO SCALARE HA CARICA $(-2e, 0)$ E È CARATTERIZZATO DA UN POTENZIALE

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 + \mu^2 \phi^\dagger \phi$$

STUDIARE LO SPETTRO DELLA TEORIA AL VARIARE DEL SEGNO DI μ^2 . IN ENTRAMBI I CASI, CALCOLARE L'AMPIEZZA DI PROBABILITÀ PER IL PROCESSO $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ DOVE L'ELETTRONE E IL MUONE SONO LE DUE PARTICELLE FERMIONICHE PRESENTI NEL MODELLO.

(INTRODURRE, SE NECESSARIO, I TERMINI DI GAUGE FIXING OPPORTUNI).

SOL. IN QUESTO MODELLO IL GRUPPO DI GAUGE È:

$$G = U(1) \times U(1)$$

A, α

B, β

È PER DIRE COME TRASFORMANO I CAMPI, PER TRASFORMAZIONI ASSOCIATE AL GRUPPO DI GAUGE, DIAMO LE CARICHE DEI CAMPI. IN QUESTO CASO:

$$\psi_1, \psi_2 : (e, -g)$$

VUOL DIRE

$$\psi_1 \rightarrow e^{ie\alpha} \psi_1$$

$$\psi_2 \rightarrow e^{-ig\beta} \psi_2$$

MENTRE

$$\phi : (-2e, 0) \quad \begin{cases} \phi \rightarrow e^{-2ie} \phi \\ \phi \rightarrow \phi \end{cases}$$

PERÒ DATE LE TRASFORMAZIONI DEI CAMPI POSSIAMO VEDERE LE CORRENTI ASSOCIATE E DARE UNA FORMA ALLE DERIVATE COVARIANTI. OVVIAMENTE DOBBIAMO CONSIDERARE ENTRAMBI I CAMPI DI GAUGE E LE 2 CORRENTI DI NOETHER.

ABBIAMO $A_\mu :$

$$\begin{aligned} \delta \psi_1 &= ie\alpha \psi_1 \\ \delta \phi &= -2ie\alpha \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_\mu : \quad \delta \psi_2 &= -ig\beta \psi_2 \\ \delta \phi &= 0 \end{aligned}$$

DUNQUE:

$$D_\mu \psi_1 = (\partial_\mu + ieA_\mu - igB_\mu) \psi_1$$

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - 2ieA_\mu) \phi$$

ORA, PRIMA DI PROSEGUIRE DOBBIAMO CONSIDERARE IL FATTO CHE $\mathcal{L}$ NON HA 1 TERMINI CINETICI PER 1 CAMPI 4 DIAGONALI. INFATTI ABBIAMO

$$\mathcal{L}_{4,2} = i(\bar{\varphi}_1 \quad \bar{\varphi}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \not\rightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} - m(\bar{\varphi}_1 \quad \bar{\varphi}_2) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

QUADRATICA

IL TERMINE DI MASSA È GIÀ APPOSTO, POICHÈ È DIAGONALE, MA DOBBIAMO SISTEMARE QUELLO CINETICO.

CHIAMIAMO

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

DIAGONALIZZIAMO

$$0 = \det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4}$$

$$= 4 + 4\lambda^2 - 8\lambda - 1$$

$$\Rightarrow 4\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} = \left\{ \frac{3}{2} ; \frac{1}{2} \right\}$$

MA PUOI ANCHE FARE

$$\det D = \frac{3}{4} \quad \text{Tr } D = 2$$

COSÌ

$$\begin{cases} \det D = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{3}{4} \\ \text{Tr } D = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

E RISOLVI IL SISTEMA.

DUNQUE LA MATRICE DIAGONALIZZATA È

$$D' = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

GLI AUTOVETTORI SONO $(D - \lambda I)v = 0$

$$\lambda_1 : \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow a = b$$

$$\lambda_2 : \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+b \\ a+b \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow a = -b$$

DUNQUE

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

NORMALIZZANDOLI.

ABBIAMO DUNQUE I NUOVI CAMPI

$$\begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_e = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_1 + \chi_2)$$

↓
ELETTRONE

$$\chi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_1 - \chi_2)$$

↓
MUONE

COSÌ LA LAGRANGIANA DIVENTA

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi) - V(\phi) + i \frac{3}{2} \bar{\chi}_e \not{\partial} \chi_e +$$

$$+ i \frac{1}{2} \bar{\psi}_\mu \not{\partial} \psi_\mu - m(\bar{\psi}_e \psi_e + \bar{\psi}_\mu \psi_\mu)$$

I TERMINI CINETICI PERÒ LI VOGLIAMO NORMALIZZATI ↓, QUINDI DOBBIAMO DEFINIRE

$$\psi'_e = \sqrt{\frac{3}{2}} \psi_e$$

$$\psi'_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_\mu$$

così ABBIAMO:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi) - V(\phi) + i \bar{\psi}_e \not{\partial} \psi_e + \\ & + i \bar{\psi}_\mu \not{\partial} \psi_\mu - m\left(\frac{2}{3} \bar{\psi}_e \psi_e + 2 \bar{\psi}_\mu \psi_\mu\right) \end{aligned}$$

ORA CHE LA LAGRANGIANA È FATTA BENE POSSIAMO STUDIARE LO SPETTRO

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 + \mu^2 \phi^\dagger \phi$$

PER CUI

$$V'_\phi = \lambda (\phi^\dagger \phi) \phi^\dagger + \mu^2 \phi^\dagger$$

$$V'_{\phi^\dagger} = \lambda (\phi^\dagger \phi) \phi + \mu^2 \phi$$

SE $\mu^2 > 0$ ALLORA $\phi = 0$ È UN MINIMO
 E IL VUOTO È
 $\langle \phi \rangle = 0$

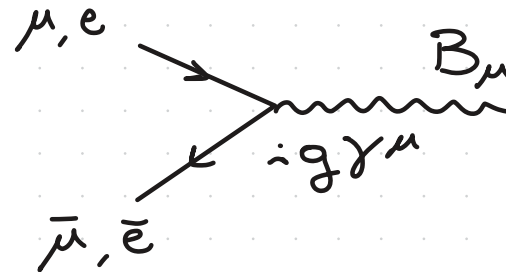
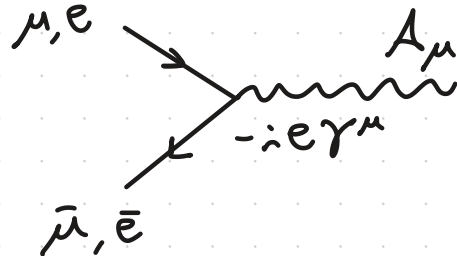
$\Rightarrow$ SIMMETRIA ALLA WIGNER. INFATTI

$$\delta \langle \phi \rangle = -z i e \langle \phi \rangle = 0 \quad \checkmark$$

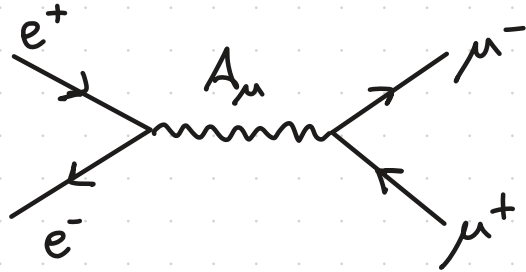
NELLA NOSTRA $\mathcal{L}$ IL CAMPO ψ_e NON SI ACCOPPIA CON I
 CAMPI ϕ , DUNQUE PER TROVARE LE AMPIEZZE DI PROBABILITÀ,
 DOPO AVER TROVATO I VERTICI POSSIAMO GUARDARE
 SOLO IL PEZZO DI $\mathcal{L}$ CON ψ_e . IL PEZZO CINETICO
 È:

$$i \bar{\psi}_e \gamma^\mu (\partial_\mu + i e A_\mu - i g B_\mu) \psi_e + i \bar{\psi}_\mu \gamma^\mu (\partial_\mu + i e A_\mu - i g B_\mu) \psi_\mu$$

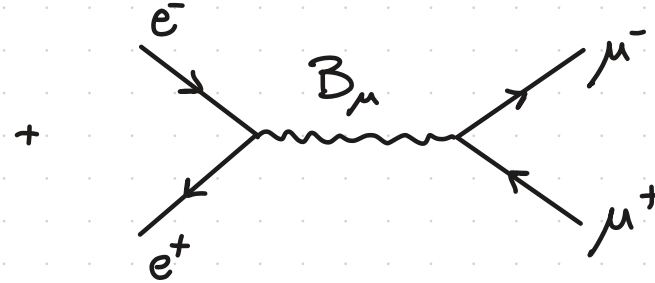
DA CUI LEGGIAMO CHE SIA PER A_μ CHE B_μ ABBIAMO 2
 VERTICI TIPO QED



DUNQUE PER IL PROCESSO
DUE DIAGRAMMI



$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ ABBIAMO 1



MA POSSIAMO SEMPLIFICARE UN
CINETICO COMPARE SEMPRE LA
PER QUESTO POSSIAMO SCRIVERE

$$A'_\mu = \frac{eA_\mu - gB_\mu}{\sqrt{e^2 + g^2}}$$

PO' LE COSE. INFATTI NEL TERMINE
COMBINAZIONE $i e A_\mu - i g B_\mu$,

$$B'_\mu = \frac{gA_\mu + eB_\mu}{\sqrt{e^2 + g^2}}$$

MA NOI POSSIAMO ANCHE SCRIVERE

$$\frac{e}{\sqrt{e^2 + g^2}} = \cos \alpha$$

$$\frac{g}{\sqrt{e^2 + g^2}} = \sin \alpha$$

così

$$\begin{cases} A'_\mu = \cos \alpha A_\mu - \sin \alpha B_\mu \\ B'_\mu = \sin \alpha A_\mu + \cos \alpha B_\mu \end{cases}$$

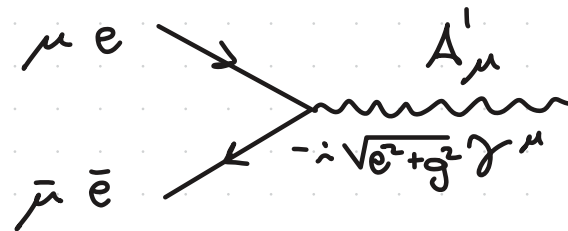
CHE NON È ALTRO CHE UNA ROTAZIONE DI $SO(2)$, PER
CUI IL TERMINE CINETICO RIMANE INVARIATO

$$-\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B'_{\mu\nu} B'^{\mu\nu}$$

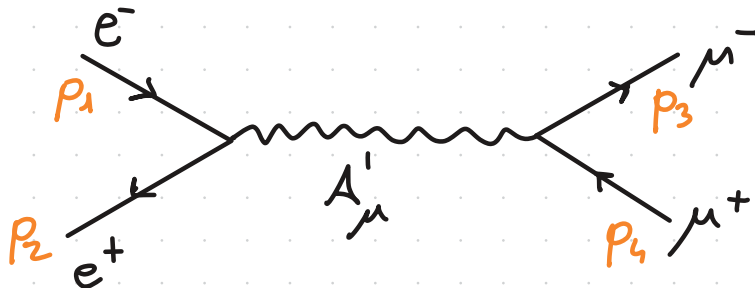
MA IL PEZZO CINETICO DEI CAMPI FERMIONICI SI SEMPLIFICA:

$$i\bar{\psi}_e \gamma^\mu (\partial_\mu + i\sqrt{e^2 + g^2} A'_\mu) \psi_e + i\bar{\psi}_\mu \gamma^\mu (\partial_\mu + i\sqrt{e^2 + g^2} A'_\mu) \psi_\mu$$

DUNQUE ORA ABBIAMO UN SOLO VERTICE



E DOBBIAMO CALCOLARE L'AMPIEZZA DI UN SOLO DIAGRAMMA



IL CHE È MOLTO PIÙ RAPIDO. NOTA CHE SIAMO RIUSCITI A FARE IN MODO CHE IL CAMPO B'_μ SI DISACCOPI COMPLETAMENTE PER IL NOSTRO PROCESSO.

IL PROPAGATORE PER Δ_μ È :

$$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \quad \xi = 1 \quad (\text{SPAZIO DEGLI IMPULSI})$$

PER CUI ABBIAMO

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{cm}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 s} \quad \text{CON}$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \left(\bar{u}^{(\mu)}(p_3) (-i\sqrt{q^2 + e^2} \gamma^\mu) v^{(\mu)}(p_4) \right) \left(\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2 + i\varepsilon} \right) \times \\ \times \left(\bar{v}^{(e)}(p_2) (-i\sqrt{e^2 + q^2} \gamma^\nu) u^{(e)}(p_1) \right)$$

DUNQUE

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{cm}} = \frac{1}{64\pi^2 s} \int \frac{(-i\sqrt{q^2 + e^2})^4}{4(p_1 + p_2)^2} \left(\bar{u}_\alpha^{(\mu)}(p_3) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} v_\beta^{(\mu)}(p_4) \right) \times \\ \times \eta_{\mu\nu} \left(\bar{v}_\rho^{(e)}(p_2) (\gamma^\nu)_{\rho\sigma} u_\sigma^{(e)}(p_1) \right) \times$$

$$\times (\bar{v}_\delta^{(\mu)}(p_4) (\gamma^\tau)_{\delta\delta} u_\delta^{(\mu)}(p_3)) \eta_{\tau\varepsilon} (\bar{u}_\omega^{(e)}(p_1) (\gamma^\varepsilon)_{\omega\kappa} v_\kappa^{(e)}(p_2))$$

$$\sim \frac{(g^2 + e^2)^2}{4 \cdot 64 \pi^2 s^2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\tau\varepsilon} (p_4)_\beta \gamma (\gamma^\tau)_{\delta\delta} (p_3)_{\delta\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \times$$

$$\times (p_1)_\sigma \omega (\gamma^\varepsilon)_{\omega\kappa} (p_2)_{\kappa\gamma} (\gamma^\nu)_{\gamma\sigma}$$

$$\sim \frac{(g^2 + e^2)^2}{4 \cdot 64 \pi^2 s^2} (p_1)_\sigma (p_2)_\kappa (p_3)_\delta (p_4)_\beta \eta_{\mu\nu} \eta_{\tau\varepsilon} \text{Tr} \{ \gamma^\beta \gamma^\tau \gamma^\delta \gamma^\mu \} \times$$

$$\times \text{Tr} \{ \gamma^\sigma \gamma^\varepsilon \gamma^\kappa \gamma^\nu \}$$

$$= \frac{4(g^2 + e^2)^2}{64 \pi^2 s^2} (p_1)_\sigma (p_2)_\kappa (p_3)_\delta (p_4)_\beta \eta_{\mu\nu} \eta_{\tau\varepsilon} [\eta^{\beta\tau} \eta^{\delta\mu} - \eta^{\beta\delta} \eta^{\tau\mu} + \eta^{\beta\mu} \eta^{\tau\delta}] \times$$

$$\times [\eta^{\sigma\varepsilon} \eta^{\kappa\nu} - \eta^{\sigma\kappa} \eta^{\varepsilon\nu} + \eta^{\sigma\nu} \eta^{\varepsilon\kappa}]$$

$$= \frac{4(g^2 + e^2)^2}{64 \pi^2 s^2} (p_1)_\sigma (p_2)_\kappa (p_3)_\delta (p_4)_\beta [2 \eta^{\beta\sigma} \eta^{\delta\kappa} + 2 \eta^{\beta\kappa} \eta^{\delta\sigma}]$$

$$= \frac{8(g^2 + e^2)^2}{64\pi^2 s^2} \left[(p_1 p_4)(p_2 p_3) + (p_2 p_4)(p_1 p_3) \right]$$

$$= \frac{8(g^2 + e^2)^2}{64\pi^2 s^2} \left[\frac{\mu^2}{4} + \frac{t^2}{4} \right]$$

$$= \frac{(g^2 + e^2)^2}{32\pi^2} \frac{\mu^2 + t^2}{s^2}.$$

VEDIAMO ORA IL CASO $\mu^2 < 0$. ABBIAMO

$$V'(\phi) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \langle \phi \rangle &= 0 \\ \langle \phi^\dagger \phi \rangle &= -\frac{\mu^2}{\lambda} \end{aligned} \quad \text{MINIMO}$$

E POSSIAMO RISCRIVERE IL NOSTRO CAMPO COME

$$\phi = \rho e^{i\theta} \quad \text{così} \quad \langle \rho \rangle = \rho_0 = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$$

ED ESPANDIAMO ATTORNO AL VUOTO.

$$\xi = \varphi - \varphi_0$$

IL TERMINE CINETICO È

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \phi &= (\partial_\mu - 2ieA_\mu)(\xi + \varphi_0)e^{i\theta} \\ &= [\partial_\mu \xi - i(\xi + \varphi_0)(2eA_\mu - \partial_\mu \theta)]e^{i\theta} \end{aligned}$$

$$(\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) = \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + (\xi + \varphi_0)^2 (2eA_\mu - \partial_\mu \theta)^2$$

ORA PERÒ IL VUOTO NON PRESERVA PIÙ LA SIMMETRIA,
IL VETTORE A_μ HA UNA MASSA IL CAMPO θ È DAL TERMINE
CINETICO NE POSSIAMO LEGGERE LA MASSA

$$\hookrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{2e} \partial_\mu \theta$$

$$\varphi_0^2 (2eA_\mu)^2 = \varphi_0^2 4e^2 A_\mu A^\mu = \frac{1}{2} (\varphi_0^2 8e^2) A_\mu A^\mu$$

È IL POTENZIALE DIVENTA

$$\begin{aligned} V &= \mu^2 (\xi + \varphi_0)^2 + \frac{\lambda}{2} (\xi + \varphi_0)^4 \\ &\sim \mu^2 \xi^2 + 6 \frac{\lambda}{2} \xi^2 \varphi_0^2 + \frac{\lambda}{2} \xi^4 + 4 \frac{\lambda}{2} \varphi_0 \xi^3 \end{aligned}$$

ORA NON POSSIAMO PIÙ MISCHIARE A_μ E B_μ POICHÈ UNO
MASSIVO ED UNO MASSLESS.

1 DUE DIAGRAMMI CHE CI INTERESSANO SONO:



IL PROPAGATORE DI A_μ È $\frac{-i \eta_{\mu\nu}}{p^2 - M_A^2 + i\epsilon}$ ($\epsilon = 1$)

DUNQUE

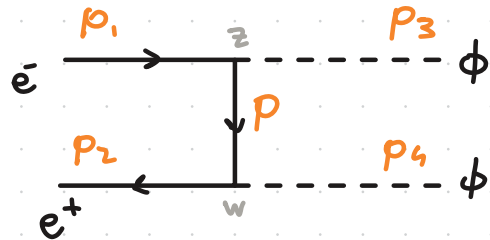
$$\mathcal{M}_A = \frac{-i(-ie)^2}{(p_1 + p_2)^2 - M_A^2} (\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)) \eta_{\mu\nu} (\bar{u}(p_3) \gamma^\nu v(p_4))$$

$$\mathcal{M}_B = \frac{-i(+ig)^2}{(p_1 + p_2)^2} (\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)) \eta_{\mu\nu} (\bar{u}(p_3) \gamma^\nu v(p_4))$$

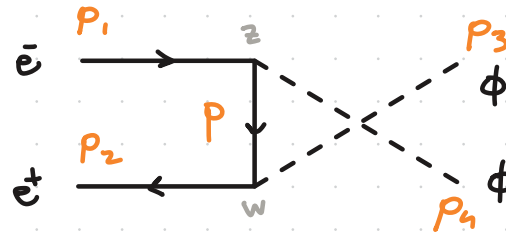
A MENO DELLA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO LE DUE MATRICI RIDOTTE SONO UGUALI NEL LIMITE DELLE ALTE ENERGIE

PROBLEMA 2. NELLA TEORIA DI YUKAWA CALCOLARE LA SEZIONE D'URTO NON POLARIZZATA PER IL PROCESSO $e^+ e^- \rightarrow 2\phi$ NEL LIMITE DELLE ALTE ENERGIE.

SOL. ABBIAMO $\mathcal{L}_{INT} = -ig\phi\bar{\psi}\psi$ E I DIAGRAMMI:



CANALE t : $p = p_1 - p_3$



CANALE u : $p = p_1 - p_4$

IL SEGNO TRA I DIAGRAMMI LO VEDIAMO DA:

$$t: \langle 0 | T \left[\bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \dots \phi(z) \bar{\psi}(z) \psi(z) \dots \phi(w) \bar{\psi}(w) \psi(w) \right] | 0 \rangle$$

$$u: \langle 0 | T \left[\bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \dots \phi(z) \bar{\psi}(z) \psi(z) \dots \phi(w) \bar{\psi}(w) \psi(w) \right] | 0 \rangle$$

$\Rightarrow$ ESSENDO L'UNICA DIFFERENZA LA CONTRAZIONE DEI CAMPI SCALARI, ESSA NON HA SEGNO RELATIVO.

CALCULONS DUNQUE :

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \square \left\{ |\mathcal{M}_t|^2 + |\mathcal{M}_u|^2 + 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u \right\}$$

$$\mathcal{M}_t = \frac{i(-ig)^2}{(p_1 - p_3)^2 - m^2} \left(\bar{v}_\alpha(p_2) (\not{p}_t + m)_{\alpha\beta} u_\beta(p_1) \right)$$

$$\mathcal{M}_u = \frac{i(-ig)^2}{(p_1 - p_4)^2 - m^2} \left(\bar{v}_\alpha(p_2) (\not{p}_u + m)_{\alpha\beta} u_\beta(p_1) \right)$$

DUNQUE

$$\frac{1}{4} \square |\mathcal{M}_t|^2 = \frac{g^4}{4t^2} \square \left(\bar{v}_\alpha(p_2) (\not{p}_t)_{\alpha\beta} u_\beta(p_1) \right) \left(\bar{u}_\gamma(p_1) (\not{p}_t)_{\gamma\delta} v_\delta(p_2) \right)$$

$$= \frac{g^4}{4t^2} (\not{p}_1)_{\beta\delta} (\not{p}_t)_{\delta\delta} (\not{p}_2)_{\delta\alpha} (\not{p}_t)_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{g^4}{4t^2} \operatorname{Tr} \{ \not{p}_1 \not{p}_t \not{p}_2 \not{p}_t \}$$

$$= \frac{g^4}{t^2} \left[(p_1 p_t)(p_2 p_t) - (p_1 p_2) p_t^2 + (p_1 p_t)(p_2 p_t) \right]$$

$$= \frac{g^4}{t^2} \left[2(p_1 p_t)(p_2 p_t) - \frac{s}{2} p_t^2 \right] \quad (*)$$

$$= \frac{g^4}{t^2} \left\{ 2[p_1(p_1 - p_3)][p_2(p_4 - p_2)] - \frac{s}{2} (-2p_1 p_3) \right\}$$

$$= \frac{g^4}{t^2} \left\{ 2[-p_1 p_3][p_2 p_4] - \frac{st}{2} \right\}$$

$$= \frac{g^4}{t^2} \left\{ -\frac{t^2}{2} - \frac{st}{2} \right\}$$

$$= \frac{g^4}{2} \frac{-t - s}{t} = \frac{g^4}{2} \frac{\mu}{t}$$

NOTIAMO CHE DA $(*)$ PER $|\mathcal{M}_\mu|^2$ CAMBIA SOLO $t \rightarrow \mu$:

$$\frac{1}{4} |\mathcal{M}_\mu|^2 = \frac{g^4}{\mu^2} \left[2(p_1 p_\mu)(p_2 p_\mu) - \frac{s}{2} p_\mu^2 \right]$$

$$= \frac{g^4}{\mu^2} \left[2(-p_1 p_4)(p_2 p_3) - \frac{s}{2} (-2p_1 p_4) \right]$$

$$= \frac{g^4}{\mu^2} \left[-\frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu s}{2} \right]$$

$$= \frac{g^4}{2} \frac{t}{u}$$

POI ABBIAMO

$$\frac{1}{4} \Gamma \mathcal{M}_t^+ \mathcal{M}_u = \frac{g^4}{4tu} \Gamma (\bar{u}_\alpha(p_1) (\not{p}_t)_{\alpha\beta} v_\beta(p_2)) (\bar{v}_\gamma(p_2) (\not{p}_u)_{\gamma\delta} u_\delta(p_1))$$

$$= \frac{g^4}{4tu} (\not{p}_2)_{\beta\gamma} (\not{p}_u)_{\gamma\delta} (\not{p}_1)_{\delta\alpha} (\not{p}_t)_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{g^4}{tu} \left\{ (p_2 p_u)(p_1 p_t) - (p_1 p_2)(p_u p_t) + (p_1 p_u)(p_2 p_t) \right\}$$

$$= \frac{g^4}{tu} \left\{ (p_2 p_3)(-p_1 p_3) - \frac{s}{2} [-p_1 p_3 - p_1 p_4 + p_3 p_4] + (-p_1 p_4)(p_2 p_4) \right\}$$

$$= \frac{g^4}{tu} \left\{ -\frac{ut}{4} - \frac{s}{4} \underbrace{[t + u + s]}_{\sim 0} - \frac{ut}{4} \right\}$$

$$= -\frac{g^4}{2}$$

DUNQUE : $|\mathcal{M}|^2 = g^4 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u} \right) - 1 \right\}$

NEL SR cm :

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{|M|^2}{64\pi^2 s}$$

MA DOBBIAMO USARE :

$$(p_1 + p_2)^2 = s = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \Rightarrow s^2 = E_{cm}^2 = 4E^2$$

$$(p_1 - p_3)^2 = t = p_1^2 - p_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 = m_1^2 - m_3^2 - 2(E_1 E_3 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3)$$

$$\Rightarrow t = -2(E^2 - |p_1||p_3|\cos\theta) \quad \rightarrow |p| \sim E$$
$$= -2E^2(1 - \cos\theta)$$

$$(p_1 - p_4)^2 = u = m_1^2 - m_4^2 - 2(E_1 E_4 - \vec{p}_1 \cdot (-\vec{p}_4))$$

$$\Rightarrow u = -2E^2(1 + \cos\theta)$$

$$\Rightarrow t = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta) \quad u = -\frac{s}{2}(1 + \cos\theta)$$

così

$$\sigma_{cm} = \frac{g^4}{64\pi^2 s} \int d\phi d(\cos\theta) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} + \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \right) - 1 \right\}$$

$$= \frac{g^4}{32\pi s} \int d(\cos\theta) \left\{ \frac{1}{2} \frac{(1+\cos\theta)^2 + (1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} - 1 \right\}$$

$$= \frac{g^4}{32\pi s} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \left\{ \frac{1}{2} \frac{2 + 2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta} - 1 \right\}$$

$$x = \cos\theta$$

$$dx = d(\cos\theta)$$

$$= \frac{g^4}{32\pi s} \int_{-1}^1 dx \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \right)$$

$$= \frac{g^4}{32\pi s} \int_{-1}^1 dx \frac{2x^2}{1-x^2}$$