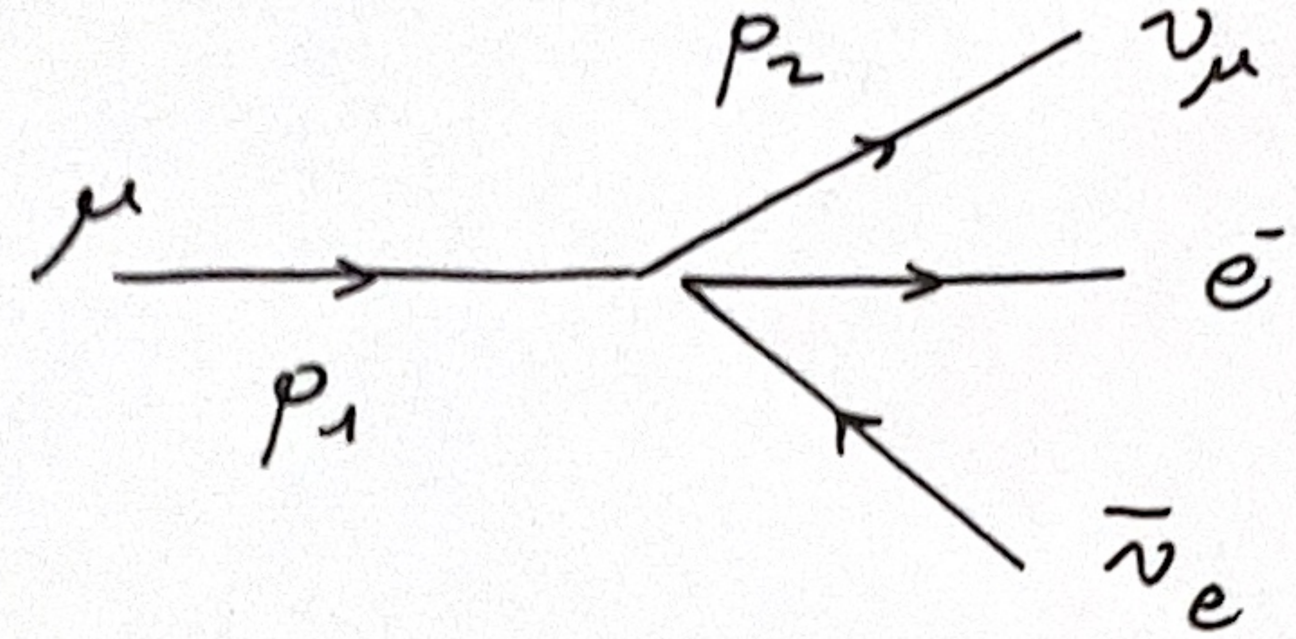
FENOMENOLOGIA DELLE INTERAZIONI FONDAMENTALI

CALCOLIAMO IN MODO ESPLICITO IL DECADIMENTO DEL MUONE:

$$\mu \to \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$



CALCOLIAMO L'ELEMENTO DI MATRICE (CONVENZIONI DEL PESKIN)

$$i\mathcal{M} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(p_2)\gamma^\mu (1-\gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (1-\gamma^5) v(p_4)$$

POICHÈ RICORDIAMO
$$\mathcal{L}_{INT} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\mu (1-\gamma_5) \psi_\mu \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_\mu (1-\gamma_5) \psi_e .$$

CALCOLIAMO IL MODULO QUADRO PER IL PROCESSO NON POLARIZZATO:

$$\sum_{SPIN} |\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F^2}{2} \sum_s{}' \left[\bar{u}(p_2)\gamma^\mu (1-\gamma^5) u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (1-\gamma^5) v(p_4) \right] \times$$
$$\times \left[\bar{v}(p_4) \gamma^\nu (1-\gamma^5) u(p_3) \bar{u}(p_1) \gamma_\nu (1-\gamma^5) u(p_2) \right]$$

$$= \frac{G_F^2}{2} \sum_s \mathrm{Tr} \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma^\mu (1-\gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu (1-\gamma_5) u(p_2) \right\} \times$$
$$\times \mathrm{Tr} \left\{ \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (1-\gamma_5) v(p_4) v(p_4) \gamma_\nu (1-\gamma_5) u(p_3) \right\}$$

$$= \frac{G_F^2}{2} Tr\left\{ (\not{p}_2 + m_{\nu_\mu}) \gamma^\mu (1-\gamma_5)(\not{p}_1 + m_\mu) \gamma^\nu (1-\gamma^5) \right\} \times$$

$$\times Tr\left\{ (\not{p}_3 + m_e) \gamma_\mu (1-\gamma_5)(\not{p}_4 - m_{\nu e}) \gamma_\nu (1-\gamma_5) \right\}$$

LE MASSE, PER VIA DELLA PRESENZA DI γ_5, NON CONTRIBUISCONO; INFATTI:

$$\not{p}_1 \gamma^\nu (1-\gamma^5)^2 = 2 \not{p}_1 \gamma^\nu (1-\gamma^5)$$

$$m_\mu \gamma^\nu (1+\gamma^5)(1-\gamma^5) = 0$$

→ IL SEGNO + ESCE DALL'ANTICOMMUTAZIONE CON LA γ^ν

DUNQUE, TOGLIENDO I CONTRIBUTI DELLE MASSE:

$$= \frac{G_F^2}{2} 4 Tr\left\{ \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu (1-\gamma^5) \right\} Tr\left\{ \not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu (1-\gamma_5) \right\}$$

$$= \frac{G_F^2}{2} 64 \Big[\underbrace{p_2^\mu p_1^\nu + p_1^\mu p_2^\nu - g^{\mu\nu} p_1 p_2}_{1} - \underbrace{i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{2\alpha} p_{1\beta}}_{2} \Big] \times$$

$$\times \Big[\underbrace{p_{3\mu} p_{4\nu} + p_{4\mu} p_{3\nu} - g_{\mu\nu} p_3 p_4}_{1} - \underbrace{i \varepsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'} p_3^{\alpha'} p_4^{\beta'}}_{2} \Big]$$

IN CUI ABBIAMO UTILIZZATO :

$$\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma\} = -4i\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

E DOVE POSSIAMO NOTARE CHE LE PARTI 1, NEI DUE TERMINI, È SIMMETRICA, MENTRE LA SECONDA 2 È ANTISIMMETRICA PER LO SCAMBIO $\mu \leftrightarrow \nu$. PER QUESTO:

$$= \frac{G_F^2}{2} 64 \Big\{ (p_2 p_3)(p_1 p_4)\left[1 + 1 + (-i)^2(-2)\right] +$$

$$+ (p_1 p_3)(p_2 p_4)\left[1 + 1 + (-i)^2(-2)\right] + \qquad \circledast$$

$$+ (p_1 p_2)(p_3 p_4)\Big[-1 - 1 - 1 - 1 + \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{=4}\Big]\Big\}$$

→ QUESTO TERMINE VIENE FUORI DA CONTRIBUTI SENZA γ_5.

DOVE ABBIAMO UTILIZZATO, PER LE CONTRAZIONI DELLE PARTI ANTISIMMETRICHE, LA RELAZIONE :

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'} = -2\left(g^{\alpha}{}_{\alpha'}\, g^{\beta}{}_{\beta'} - g^{\alpha}{}_{\beta'}\, g^{\beta}{}_{\alpha'}\right).$$

LA PRESENZA DELLA γ^5 VA A ROMPERE LA SIMMETRIA TRA LE PRIME DUE RIGHE DI $\circledast$.

OTTENIAMO:

$$\sum_{\text{SPIN}} |\mathcal{M}|^2 = 128\, G_F^2\, (p_1 p_4)(p_2 p_3).$$

NOTA LA PRESENZA DI γ^5 È RESPONSABILE DEL FATTO CHE LA MASSA NON CONTRIBUISCONO, E INOLTRE ANCHE DELLA CANCELLAZIONE DI UN TERMINE, IN QUESTO CASO QUELLO PROPORZIONALE A $(p_1 p_3)(p_2 p_4)$.

SCEGLIAMO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL μ, IN CUI:

$$p_1 = (m_\mu, \vec{0})$$

QUINDI:

$$p_1 p_4 = m_\mu E_4$$

MENTRE:

$$\begin{aligned} p_2 p_3 &= \frac{1}{2}\left[(p_2+p_3)^2 - p_2^2 - p_3^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(p_1 - p_4)^2 - m_{\nu_\mu}^2 - m_e^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_4 - m_{\nu_\mu}^2 - m_e^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[m_\mu^2 + m_{\nu_e}^2 - 2m_\mu E_4 - m_\nu^2 - m_e^2\right] \end{aligned}$$

CIOÈ DIPENDE DA TUTTE LE MASSE E DA UNA SOLA VARIABILE CINEMATICA E_4. QUESTO FA SÌ CHE QUANDO CALCOLIAMO LA LARGHEZZA DI DECADIMENTO, E INTEGRIAMO SULLO SPAZIO DELLE FASI, L'UNICO INTEGRALE UN PO' COMPLICATO SARÀ QUELLO IN E_4.

VISTO CHE STIAMO CONSIDERANDO IL DECADIMENTO DEL μ, PER LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA, LE ENERGIE IN GIOCO NEL PROCESSO SARANNO DELL'ORDINE DELL'ENERGIA DEL μ (m_μ).

INOLTRE, LE MASSE SONO MOLTO PIÙ PICCOLE DI m_μ:

$$m_\mu >> m_e, m_{\nu_e}, m_{\nu_\mu}.$$

SI HA QUINDI: $\quad (m_e = m_{\nu_\mu} = m_{\nu_e} = 0)$

$$|\vec{p}_2| = E_2 \quad ; \quad |\vec{p}_3| = E_3 \quad ; \quad |\vec{p}_4| = E_4$$

E LA LARGHEZZA DI DECADIMENTO:

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^{4-9}}{2m_\mu} \int \frac{d^3p_2}{2E_2} \int \frac{d^3p_3}{2E_2} \int \frac{d^3p_4}{2E_4} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{SOMMA SULLE POLARIZZAZIONI INIZIALI}} \sum_{SPIN} |\mathcal{M}|^2$$

SFRUTTIAMO LA δ^3 PER $\int d^3p_2$

$$= \frac{1}{2^{10}\pi^5 m_\mu} \int \frac{d^3p_3}{E_3} \frac{d^3p_4}{E_4} \frac{1}{|\vec{p}_3 + \vec{p}_4|} \delta(m_\mu - |\vec{p}_3 + \vec{p}_4| - E_3 - E_4) \times$$

$$\times \underbrace{128}_{2^7} G_F^2 (m_\mu E_4) \frac{1}{2} m_\mu (m_\mu - 2E_4)$$

POICHÈ $\vec{p}_1 = 0 \Rightarrow \delta^3(\vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4)$

IL CHE IMPONE $\Rightarrow \vec{p}_2 = -\vec{p}_3 - \vec{p}_4 \Rightarrow E_2 = |\vec{p}_3 + \vec{p}_4|$

DUNQUE:

$$= \frac{m_\mu}{16\,\pi^5} G_F^2 \, 4\pi \int_0^\infty \frac{dE_3 \, E_3^2}{E_3} \; 2\pi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta_{3,4} \; \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{dE_4 \, E_4^2}{E_4} \frac{E_4(m_\mu - 2E_4)}{\mu} \delta(m_\mu - \mu - E_3 - E_4)$$

DALL'INTEGRALE NELL'ANGOLO SOLIDO DI d^3p_3 DA' 4π E RIMANE L'INTEGRALE SUL MODULO $|\vec{p}_3| = E_3$.

IN CUI METTIAMO:

$$\mu^2 = |\vec{p}_3 + \vec{p}_4|^2 = |\vec{p}_3|^2 + |\vec{p}_4|^2 + 2|\vec{p}_3||\vec{p}_4|\cos\theta_{34}$$

$$= E_3^2 + E_4^2 + 2E_3 E_4 \cos\theta_{34}$$

E VOGLIAMO PASSARE ALL'INTEGRALE IN $d\mu$:

$$2\mu\, d\mu = 2E_3 E_4 \, d\cos\theta_{34} \Rightarrow d\cos\theta_{34} = \frac{\mu\, d\mu}{E_3 E_4}$$

COSÌ SPARISCE ANCHE LA DIPENDENZA DA μ NELL'INTEGRANDO:

$$\Gamma = \frac{m_\mu G_F^2}{16\,\pi^5} 8\pi^2 \int_0^\infty dE_3 \int_0^\infty dE_4 \int_{\mu_-}^{\mu_+} d\mu \; E_4(m_\mu - 2E_4)\,\delta(m_\mu - \mu - E_3 - E_4)$$

DOVE:

$$\begin{cases} \mu_+^2 = \mu^2\Big|_{\cos\theta_{34}=1} = E_3^2 + E_4^2 + 2E_3E_4 \overset{!}{=} (E_3+E_4)^2 \\ \\ \mu_-^2 = \mu^2\Big|_{\cos\theta_{34}=-1} = (E_3-E_4)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_+ = E_3+E_4 \\ \\ \mu_- = |E_3-E_4| \end{cases}$$

POSSIAMO SFRUTTARE LA δ DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PER CAPIRE MEGLIO GLI ESTREMI DELLE ENERGIE:

$$\int_{\mu_-}^{\mu_+} d\mu \; \delta(m_\mu - \mu - E_3 - E_4) = \begin{cases} 1 & \text{SE} \quad \mu_- \leq m_\mu - E_3 - E_4 \leq \mu_+ \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$

QUINDI L'UNICO CONTRIBUTO A Γ LO SI HA QUANDO VALE

$$\mu_- \leq m_\mu - E_3 - E_4 \leq \mu_+ .$$

POSSIAMO [redacted] [redacted] RISCRIVERLA IN DUE RELAZIONI:

$\oplus$ $\quad m_\mu - E_3 - E_4 \leq \mu_+ = E_3 + E_4 \Rightarrow m_\mu \leq 2(E_3 + E_3)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Rightarrow E_3 + E_4 \geq m_\mu/2$

$\oplus$ $\quad m_\mu - E_3 - E_4 \geq \mu_- = |E_3 - E_4|$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{SE} \quad E_3 \geq E_4 \Rightarrow m_\mu \geq 2E_3 \Rightarrow E_4 \leq E_3 \leq m_\mu/2 \\ \text{SE} \quad m_\mu \geq 2E_4 \Rightarrow E_3 \leq E_4 \leq m_\mu/2 \end{cases}$$

Però nella seconda relazione, mettendo insieme i due casi, si ha:

$$E_3, E_4 \leq \frac{m_\mu}{2}.$$

Prendiamo per esempio $E_4 \leq \frac{m_\mu}{2} \Rightarrow E_3 \geq \frac{m_\mu}{2} - E_4$

per cui si ha:

$$\Gamma = \frac{m_\mu G_F^2}{2\pi^3} \int_0^{m_\mu/2} dE_4 \int_{\frac{m_\mu}{2} - E_4}^{m_\mu/2} dE_3 \; E_4 (m_\mu - 2E_4)$$

$$\frac{m_\mu}{2} - \left(\frac{m_\mu}{2} - E\right) = E$$

$$= \frac{m_\mu G_F^2}{2\pi^3} \int_0^{m_\mu/2} dE_4 \left(m_\mu E_4^2 - 2E_4^3\right)$$

$$= \frac{m_\mu G_F^2}{2\pi^3} \left[m_\mu \frac{1}{3}\left(\frac{m_\mu}{2}\right)^3 - 2\frac{1}{4}\left(\frac{m_\mu}{2}\right)^4 \right]$$

$$= \frac{m_\mu^5 G_F^2}{192\pi^3}.$$

Il risultato cinematico ha senso perchè ci dice che le energie non possono superare la metà della massa del muone, ma ognuna se ne può portare via al massimo la metà. La somma, tuttavia, dev'essere maggiore o uguale, perchè c'è da considerare anche E_2.