Esercizi

Meccanica

Esercizi a.a. 2021-2022

Argomenti:

- exe 1,2,3 — Cinematica
- exe 4,5,6 — Leggi della dinamica
- exe 7 — Lavoro ed energia
- exe 8,9 — Sistemi di riferimento
- exe 10,11,12,13,14 — Corpo rigido
- exe 15 — Gravitazione

exe 10

10.1 $m_0 = 1200$ Kg

$v_0 = 23$ m/s

$\lambda = 0{,}1$ kg/s

DETERMINA :
- $v(t)$, $x(t)$
- F_m tc. $v(t) = v_0 = \text{cost}$

A $t<0$ HO $x(t) = v_0 t$

A $t=0$ INIZIA A PIOVERE E IL FURGONE SI RIEMPIE COME

$$\lambda = \frac{dm}{dt} \Rightarrow \int_{m_0}^{m} dm = \lambda \int_{t_0}^{t} dt' \Rightarrow m(t) = m_0 + \lambda(t - t_0)$$

SFRUTTANDO LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO TROVO

$$m_0 v_0 = m(t) v(t) \Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \lambda(t-t_0)}}$$

UN ALTRO MODO PER TROVARE $v(t)$ AVREI POTUTO USARE LA 2° LEGGE DELLA DINAMICA :

$$F = \frac{dp}{dt} = 0 \quad \text{DOVE} \quad \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt} v(t) + m(t) \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} v = -m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \lambda v = -m \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{\lambda}{m}\,dt \qquad \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\lambda \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{m_0 + \lambda(t-t_0)}$$

$$y = m_0 + \lambda(t-t_0) \quad , \quad dy = \lambda dt$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\int_{m_0}^{m_0+\lambda(t-t_0)} \frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\ln\left(\frac{m_0 + \lambda(t-t_0)}{m_0}\right)$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \lambda(t-t_0)}$$

COME CON L'ALTRO METODO. SAREBBE FUNZIONATO ANCHE COME

$$\frac{dm}{dt} v = -m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dm}{m} = -\frac{dv}{v} \Rightarrow \text{STESSO RISULTATO}$$

PER LA FORZA MOTRICE INVECE CONSIDERO CHE SONO NELLA SITUAZIONE CON $v(t) = v_0 = \text{cost}$

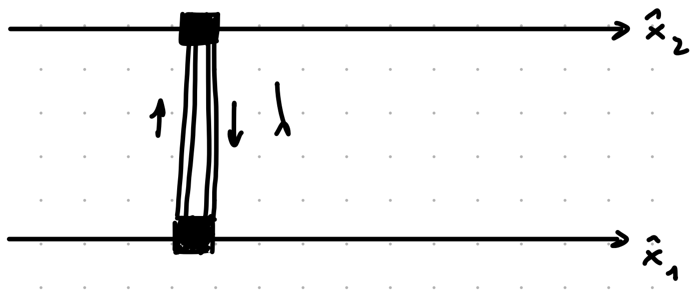
$$\Rightarrow F_m = \frac{dm}{dt} v + m \cancelto{0}{\frac{dv}{dt}} = \frac{dm}{dt} v \Rightarrow \boxed{F_m = \lambda v_0}$$

10.2

$\Delta v = v_0 = 2\ m/s$

$\lambda = 4\ kg/s$

$m_c = 1500\ kg$



DETERMINA:
- τ TC $\Delta v = v_0/2$
- $\Delta x(\tau)$
- $\Delta K(t)$

DEVO ASSUMERE CHE L'ACQUA VENGA TRASFERITA CON LA STESSA VELOCITÀ CON CUI SI MUOVE IL CARRELLO, PER CUI, ISTANTE PER ISTANTE LE QUANTITÀ DI MOTO VARIANO, AD ESEMPIO IL CARRELLO 1 PERDE UN dm D'ACQUA ALLA VELOCITÀ v_1 E NE RICEVE UNA ALLA VELOCITÀ 2, IN MODO CHE LA MASSA NON CAMBI.

$$\begin{cases} dp_1 = -dm\, v_1 + dm\, v_2 \\ dp_2 = dm\, v_1 - dm\, v_2 \end{cases}$$

IL FATTO CHE IO NON ABBIA INDIZI SULLE SINGOLE VELOCITÀ QUESTO MI DICE CHE POSSO RISOLVERE IL PROBLEMA SENZA TROVARE, MA UTILIZZANDO SOLO LA VELOCITÀ RELATIVA v_r.

"DIVIDO" PER dt

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{dm}{dt} v_1 + \dfrac{dm}{dt} v_2 \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \dfrac{dm}{dt} v_1 - \dfrac{dm}{dt} v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = -\lambda v_1 + \lambda v_2 \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \lambda v_1 - \lambda v_2 \end{cases}$$

PONENDO $v_R = v_1 - v_2$ HO

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = -\lambda v_R \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \lambda v_R \end{cases} \qquad (1)$$

HO TROPPI GRADI DI LIBERTÀ PER RISOLVERE IL PROBLEMA, UTILIZZO LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO (NON ESSENDOCI FORZE ESTERNE):

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \quad \underset{\text{NON CAMBIANDO LA MASSA DEL CARRELLO}}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = m_c \dfrac{dv_1}{dt} \\ \dfrac{dp_2}{dt} = m_c \dfrac{dv_2}{dt} \end{cases}$$

RICERCANDO v_R FACCIO LA DIFFERENZA DELLE DUE RIGHE DEL SISTEMA:

$$\frac{dp_1}{dt} - \frac{dp_2}{dt} = m_c \frac{dv_1}{dt} - m_c \frac{dv_2}{dt} = m_c \frac{d}{dt}(v_1 - v_2) = m_c \frac{dv_c}{dt} \qquad (2)$$

DUNQUE COMBINANDO (1) E (2) TROVO

$$-2\lambda v_R = m_c \frac{dv_R}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{2\lambda}{m_c}\,dt = \frac{dv_R}{v_R} \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v_R} \frac{dv_R}{v_R} = -\frac{2\lambda}{m_c}\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{v_R(t)}{v_0}\right) = -\frac{2\lambda}{m_c}\,t \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_R(t) = v_0\, e^{-\frac{2\lambda}{m_c}t}}$$

VOGLIAMO τ T.C. $v_R(\tau) = v_0/2$:

$$\frac{v_0}{2} = v_0\, e^{-\frac{2\lambda}{m_c}\tau} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2\lambda}{m_c}\tau = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{m_c \ln 2}{2\lambda}}$$

POSSO RICAVARE LA DISTANZA RELATIVA:

$$v_R(t) = \frac{dx_R}{dt} \quad \Rightarrow \quad dx_R = v_R(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad x_R(t) - x_0 = v_0 \int_0^t e^{-\frac{2\lambda}{m_c}t}\,dt = -\frac{v_0 m_c}{2\lambda}\left(e^{-\frac{2\lambda}{m_c}t} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_R(t) = x_0 + \frac{v_0 m_c}{2\lambda}\left(1 - e^{-\frac{2\lambda}{m_c}t}\right)}$$

LO SPOSTAMENTO RELATIVO È $x_R(t) - x_0$, PER CUI AL TEMPO τ SI HA

$$x_R(\tau) - x_0 = \frac{v_0 m_c}{2\lambda}\left(1 - \exp\left(-\frac{2\lambda}{m_c}\frac{m_c}{2\lambda}\ln 2\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x = \frac{v_0 m_c}{2\lambda}\left(1 - \exp\left(\ln\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = \frac{v_0 m_c}{2\lambda}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{v_0 m_c}{4\lambda}}$$

POSSIAMO VEDERE ORA L'ENERGIA DISSIPATA IN t:
SO

$$K = \frac{1}{2} m_c v_1^2 + \frac{1}{2} m_c v_2^2$$

NON CONOSCO v_1 E v_2 MA SO COSA SONO dv_1, dv_2
E v_R. DERIVO NEL TEMPO

$$\frac{dK}{dt} = m_c v_1 \frac{dv_1}{dt} + m_c v_2 \frac{dv_2}{dt}$$

MA RICORDO

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = m_c \dfrac{dv_1}{dt} \\ \dfrac{dp_2}{dt} = m_c \dfrac{dv_2}{dt} \end{cases}$$

E DALLA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO HO

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{dp_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad m_c \frac{dv_1}{dt} = -m_c \frac{dv_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv_1}{dt} = -\frac{dv_2}{dt}$$

COSÌ HO

$$\frac{dK}{dt} = m_c v_1 \frac{dv_1}{dt} - m_c v_2 \frac{dv_1}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dK}{dt} = m_c \frac{dv_1}{dt}(v_1 - v_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{dt} = m_c v_R(t) \frac{dv_1}{dt}$$

RICORDANDO (1) AVEVAMO

$$\frac{dp_1}{dt} = -\lambda v_R \quad \Rightarrow \quad m_c \frac{dv_1}{dt} = -\lambda v_R$$

DUNQUE

$$\frac{dK}{dt} = -\lambda v_R^2(t) \quad \Rightarrow \quad dK = -\lambda v_0^2 e^{-\frac{4\lambda}{m_c}t} dt$$

$$\int_{K_0}^{K} dK = -\lambda v_0^2 \int_0^t e^{-\frac{4\lambda}{mc}t}\, dt$$

$$\Rightarrow \Delta K = -\lambda v_0^2 \left(-\frac{mc}{4\lambda}\right)\left(e^{-\frac{4\lambda}{mc}t} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta K = \frac{mc\,v_0^2}{4}\left(e^{-\frac{4\lambda}{mc}t} - 1\right)}$$

10.3 IL PROBLEMA DEL RAZZO (5.9)

NOTA PER IL FUTURO, PRENDEREMO PER NOTE LE EQUAZIONI CHE RICAVEREMO IN VISTA DI UN COMPITO SCRITTO.

INDICHIAMO CON LETTERE MAIUSCOLE LE GRANDEZZE RELATIVE AL RAZZO E CON LE MINUSCOLE QUELLE DEL PROPELLENTE.

HO M, V , m, v , $V(t=0) = V_0$ E $\frac{dm}{dt} = -k$

NON CI SONO FORZE ESTERNE.

VEDIAMO 2 APPROCCI EQUIVALENTI PER TROVARE $V(t)$ (SENZA GRAVITÀ).

1° APPROCCIO NON ESSENDOCI FORZE ESTERNE APPLICO LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO (TOTALE)

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d(MV)}{dt} + \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dM}{dt}V + M\frac{dV}{dt} + \frac{dm}{dt}v$$

$\frac{dv}{dt} = 0$ POICHÈ DOPO CHE VIENE ESPULSO v NON VARIA NON ESSENDOCI FORZE ESTERNE.
IN PIÙ HO $v = V - v_E$ VISTA DAL SR DEL RAZZO.

POSSO PERÒ NOTARE CHE dM È $-dm$ POICHÈ LA MASSA CHE PERDE IL RAZZO È LA QUANTITÀ DI CARBURANTE CHE VIENE BUTTATA FUORI.
SOSTITUISCO

$$\frac{dM}{dt}V + M\frac{dV}{dt} - \frac{dM}{dt}(V - v_e) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt}V + M\frac{dV}{dt} - \frac{dM}{dt}V + \frac{dM}{dt}v_e = 0$$

$$\Rightarrow M\frac{dV}{dt} + \frac{dM}{dt}v_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M\frac{dV}{dt} = -\frac{dM}{dt}v_e}$$

CHE È L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL RAZZO E CI DICE CHE LA VARIAZIONE DI V È DETERMINATA COMPLETAMENTE DALL'ESPULSIONE DEL PROPELLENTE.
POSSO RISOLVERE L'EDO

$$M\,dV = -dM\,v_e \quad \Rightarrow \quad dV = -v_e\frac{dM}{M}$$

$$\Rightarrow V(t) = V_0 - v_e \ln\left(\frac{M(t)}{M_0}\right)$$

DEVO TROVARE ORA COME VARIA $M(t)$. RICORDO CHE HO

$$\frac{dm}{dt} = -k \quad , \quad \frac{dM}{dt} = -\frac{dm}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dt} = k$$

DUNQUE

$$dM = k\,dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{M(t) = M_0 + kt}$$

SOSTITUENDO IN $V(t)$ OTTENIAMO L' EQUAZIONE DI TSIOLKOVSKY (O EQUAZIONE CLASSICA DEL RAZZO):

$$\boxed{V(t) = V_0 + v_e \ln\left(\frac{M_0}{M_0 + kt}\right)}$$

<u>2° APPROCCIO</u> PER TROVARE L'EQUAZIONE DEL RAZZO POSSIAMO ANCHE SCRIVERE LA VARIAZIONE DI QUANTITÀ DI MOTO DEL PROPELLENTE E DEL RAZZO (TIPO ES 10.2).

SO SCRIVERE LA Q.TÀ DI MOTO IN UN ISTANTE GENERICO t:

$$P_{TOT}(t) = M\vec{V}$$

HO SOLO LA Q.TÀ DI MOTO DEL RAZZO.
E IN UN ISTANTE GENERICO HO

$$P_{TOT}(t+dt) = \vec{P} + \vec{p}$$

SOMMA DELLA QUANTITÀ DI MOTO DEL RAZZO (CHE È CAMBIATA RISPETTO AL TEMPO t) PIÙ QUELLA DEL PROPELLENTE

$$\begin{cases} \vec{P} = (M - dm)(V + dV) \\ \vec{p} = dm(\vec{v}_e + \vec{V} + d\vec{V}) \end{cases}$$

IL RAZZO PERDE UN dm QUANDO È ALLA VELOCITÀ $V + dV$ E IL CARBURANTE INVECE HA MASSA dm QUANDO VIENE ESPULSO CON VELOCITÀ $\vec{v}_e$ E IL RAZZO HA $\vec{V} + d\vec{V}$, IO SCRIVO $\vec{v}_e + \vec{V} + d\vec{V}$ PERCHÈ MI INTERESSA LA VELOCITÀ RELATIVA

TRA RAZZO E REPELLENTE ESSENDO NEL SR DEL RAZZO.

TOLGO I SEGNI DI VETTORE E METTO I SEGNI:

$$P_{TOT}(t+dt) = (M-dm)(V+dV) + dm(-v_e+V+dV)$$

LA QUANTITÀ DI MOTO SO CHE SI CONSERVA, PER CUI

$$P(t) = P(t+dt)$$

$$\Rightarrow MV = MV + MdV - Vdm - dmdV - v_e dm + Vdm + dmdV$$

$$\Rightarrow 0 = MdV - v_e dm$$

AVENDO SVOLTO I CONTI E TRASCURATO GLI INFINITESIMI DI 2° ORDINE $(dmdV)$.

$$\Rightarrow MdV = v_e dm$$

RICORDO CHE $dM = -dm$

$$\Rightarrow MdV = -v_e dM$$

COME CON IL PRIMO APPROCCIO.

2° PARTE AGGIUNGIAMO L'INTERAZIONE GRAVITAZIONALE.

IN QUESTO CASO ABBIAMO FORZE ESTERNE E SCRIVIAMO LA LEGGE DELLA DINAMICA:

$$\frac{dP_{TOT}}{dt} = -Mg \qquad \text{(CONSIDERANDO } \hat{y} \text{ VERSO L'ALTO)}$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt}V + M\frac{dV}{dt} + \frac{dm}{dt}v = -Mg$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt}V + M\frac{dV}{dt} - \frac{dM}{dt}(V - v_E) = -Mg$$

$$\Rightarrow \boxed{M\frac{dV}{dt} + v_e\frac{dM}{dt} = -Mg}$$

PER CUI ABBIAMO

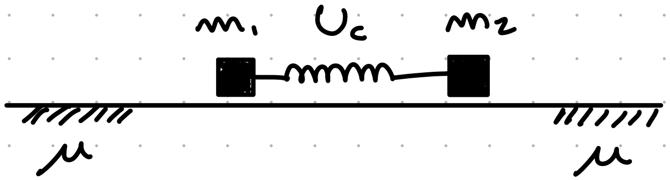
$$M\,dV + v_e\,dM = -Mg\,dt \quad \Rightarrow \quad dV + v_e\frac{dM}{M} = -g\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{V_0}^{V} dV + v_e\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M} = -g\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad V(t) - V_0 + v_e \ln\left(\frac{M(t)}{M_0}\right) = -gt$$

$$\Rightarrow \boxed{V(t) = V_0 + v_e \ln\left(\frac{M_0}{M_0 + kt}\right) - gt} \qquad \text{CON} \quad M(t) = M_0 + kt$$

exe 11

11.1



$U_c = 330\ J$

$\mu = 0.2$

$m_1 = 100\ g$

$m_2 = 250\ g$

DETERMINA :
- RIPARTIZIONE ENERGIA
- DISTANZA PERCORSA DAI BLOCCHI

PER CAPIRE COM'È RIPARTITA L'ENERGIA POSSO SFRUTTARE LE LEGGI DI CONSERVAZIONE (QUANTITÀ DI MOTO ED ENERGIA MECCANICA) (SEGNI IMPLICITI)

$$\begin{cases} U_c = K_1 + K_2 \\ 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{cases} \Rightarrow m_1 v_1 = -m_2 v_2$$

$$\xRightarrow{\text{QUADRATO}} m_1^2 v_1^2 = m_2^2 v_2^2 \xRightarrow{1/2} \frac{1}{2} m_1^2 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2^2 v_2^2$$

$$\Rightarrow m_1 K_1 = m_2 K_2 \Rightarrow K_1 = \frac{m_2}{m_1} K_2$$

DUNQUE LA PRIMA DIVENTA

$$U_c = \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) K_2 \Rightarrow K_2 \frac{m_1 + m_2}{m_1} = U_c$$

$$\Rightarrow \boxed{K_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} U_c}$$

E DI CONSEGUENZA $\boxed{K_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} U_c}$

PER DETERMINARE LA DISTANZA PERCORSA USO LA LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA (CON IL LAVORO)

$$W = \Delta K \Rightarrow \vec{F}_{ATT} \cdot \vec{l}_i = 0 - K_i \Rightarrow -F_{ATT} l_i = -K_i$$

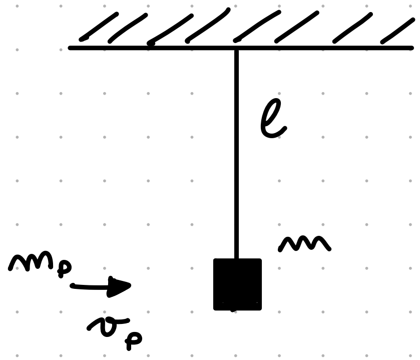
OTTENGO QUINDI

$$\begin{cases} K_1 = \mu m_1 g l_1 \\ K_2 = \mu m_2 g l_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} l_1 = \dfrac{K_1}{\mu m_1 g} = \dfrac{m_2 U_c}{\mu m_1 g (m_1 + m_2)} \\ l_2 = \dfrac{K_2}{\mu m_2 g} = \dfrac{m_1 U_c}{\mu m_2 g (m_1 + m_2)} \end{cases}}$$

SI TROVA

$$\begin{cases} l_1 = 1{,}2 \text{ m} \\ l_2 = 0{,}2 \text{ m} \end{cases}$$

11.2 Pendolo Balistico



Urto completamente anelastico

$h \,,\; \theta_{max}$

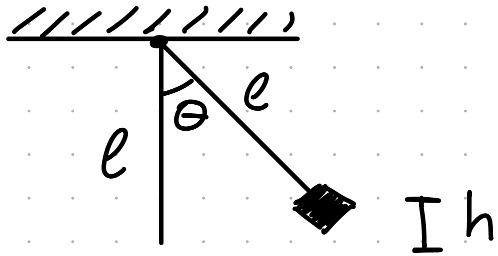
Determina:
- θ_{max}
- periodo delle piccole oscillazioni
- v_0 t.c. raggiunga h

Posso ricavare la velocità di $m + m_p$ dopo l'urto con la conservazione della quantità di moto:

$$m_p v_p = (m + m_p)\, v \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{m_p}{m + m_p} v_p}$$

Trovo il punto di arrivo (altezza h) sfruttando la conservazione dell'energia meccanica (origine asse verticale sulla traiettoria di p):

$$\frac{1}{2}(m+m_p)v_p^2 = (m+m_p)\,g\,h$$



Vedo che $h = \ell - \ell\cos\theta = \ell(1-\cos\theta)$

Dunque

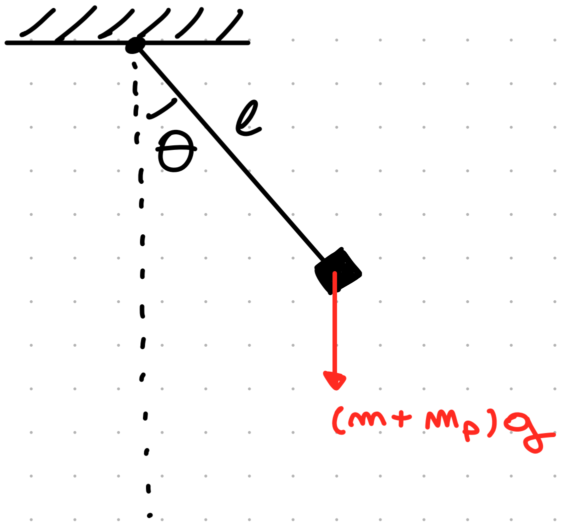
$$\frac{1}{2}(m+m_p)v^2 = (m+m_p)g\ell(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = g\ell(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{m_p^2}{(m+m_p)^2}v_p^2 = g\ell(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta = 1 - \frac{m_p^2 v_p^2}{2g\ell(m+m_p)^2}} \equiv \theta_{MAX}$$

HO CHIAMATO SOLO θ MA È DI FATTO θ_{MAX} VISTO CHE GLI HO FATTO RAGGIUNGERE h.

PER IL PERIODO DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI NOTO CHE È UN PENDOLO SEMPLICE ($m + m_p$ SONO PUNTIFORMI NON ESSENDO UN PROBLEMA DI CORPO RIGIDO) PER CUI HO



$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

E SO $\theta(t) = \theta_{MAX}\sin(\omega t + \varphi)$

IMPONENDO $\theta(0) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

POSSO VEDERE $v_\theta(t) = \ell\frac{d\theta}{dt} = \ell\omega\theta_{MAX}\cos(\omega t)$

POSSO IMPORRE CHE $v_\theta(0) \equiv v$ COSÌ:

$$\Rightarrow \ell\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,\theta_{MAX} = v \quad \Rightarrow \frac{m_p}{m+m_p} v_p = \sqrt{\ell g}\,\theta_{MAX}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_p = \frac{m+m_p}{m_p}\sqrt{\ell g}\,\theta_{MAX}}$$

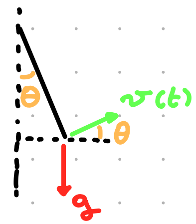
DA CONTROLLARE

PROCEDIMENTO FANTASIOSO?

L'UNICA EDO CHE MI VIENE IN MENTE È QUELLA DELLA DINAMICA

$$\frac{dp}{dt} = F$$

VEDO LA COMPONENTE y



$$\frac{dp_y}{dt} = F_y \Rightarrow \frac{dp_y}{dt} = -(m + m_p)g \Rightarrow \frac{dp_y}{dt} = -(m + m_p)g$$

E HO

$$\frac{d}{dt} p_y = \frac{d}{dt}\left\{(m + m_p)\, v_y(t)\right\} = (m + m_p)\frac{d}{dt}\left\{v \sin(\theta(t))\right\} = (m + m_p)v\frac{d}{dt}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dp_y}{dt} = (m + m_p)v\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

DUNQUE HO

$$(m + m_p)v\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = -(m + m_p)g$$

$$\Rightarrow v\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt} = -g \quad \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = -\frac{g}{v}\,\frac{1}{\cos\theta}}$$

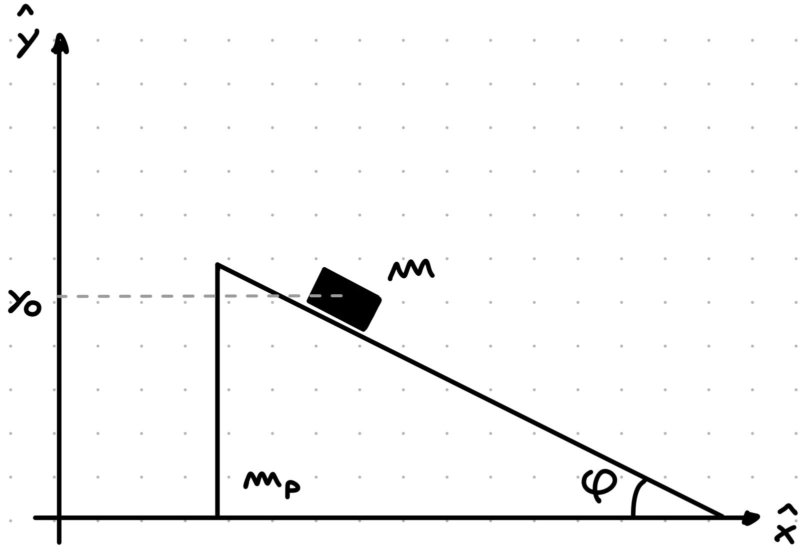
VALUTO LE PICCOLE OSCILLAZIONI CON $\theta \to \theta_{MAX}$ PER CUI SVILUPPANDO $\cos\theta$ CON TAYLOR

$$\cos\theta \underset{\theta\to\theta_{MAX}}{\sim} \cos\theta_{MAX} - \sin\theta_{MAX}\left(\theta - \theta_{MAX}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\left(\cos\theta_{MAX} - \sin\theta_{MAX}(\theta - \theta_{MAX})\right) = -\frac{g}{v}$$

11.3 m, $v_0 = 0$, φ, m_p, y_0

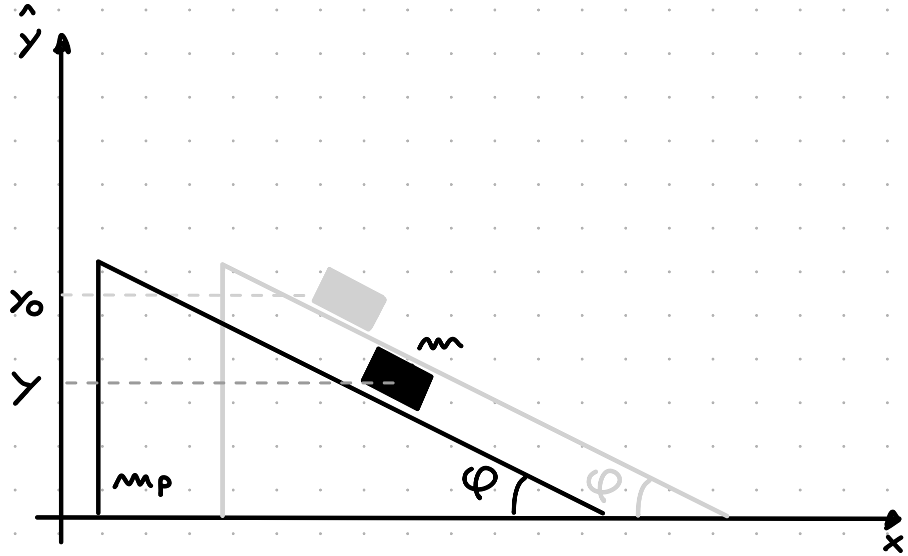
DETERMINA : • a_x



MENTRE IL BLOCCO m SCENDE IL PIANO SI MUOVERÀ DALL'ALTRA PARTE. POSSO PERÒ CONSERVARE LA QUANTITÀ DI MOTO LUNGO L'ASSE X NON ESSENDOCI FORZE:

INDICO CON v E VELOCITÀ LUNGO X (LASCIO I SEGNI IMPLICITI)

$$0 = m v_x + m_p v_p$$



CONSERVO L'ENERGIA MECCANICA

$$m g y_0 = m g y + \frac{m_p}{2} v_p^2 + \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right)$$

NOTA IN REALTÀ CI SAREBBE IL TERMINE POTENZIALE $m g y_p$ RELATIVO AL CENTRO DI MASSA MA SAREBBE SIA A DESTRA CHE A SINISTRA, PER CUI SI CANCELLANO.

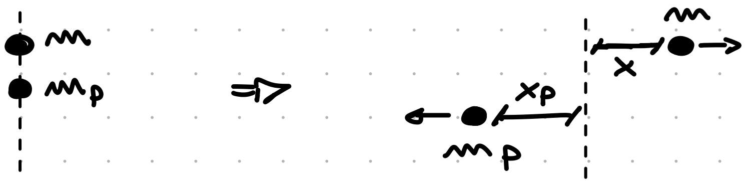
ORA CON QUESTE DUE LEGGI POSSO TROVARE v_x E v_y IN FUNZIONE DI v_p :

$$\begin{cases} m v_x + m_p v_p = 0 \\ mg(y_0 - y) = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2) + \frac{m_p}{2} v_p^2 \end{cases}$$

POSSO RIFLETTERE SU: QUANDO m SI SPOSTA DA y_0 AD y, DI QUANTO SI SONO SPOSTATI m E m_p RISPETTO x? USO LA RELAZIONE CLASSICA TRA x, y E $\text{tg}\,\varphi$:

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{y_0 - y}{x + x_p} \Rightarrow y_0 - y = (x + x_p)\,\text{tg}\,\varphi$$

QUI CI HO MESSO IL SEGNO "+" ANZICHÈ IL "-" PERCHÈ x_p È UN TERMINE NEGATIVO, POICHÈ IL PIANO SI MUOVE INDIETRO, IN VERSO OPPOSTO AD m.
QUINDI RISPETTO LA POSIZIONE INIZIALE SI È SPOSTATO NELLE DUE DIREZIONI OPPOSTE



PERÒ QUEST'ULTIMA LA POSSO DERIVARE NEL TEMPO E TROVARE LE VELOCITÀ

$$-v_y = (v_x + v_p)\,\text{tg}\,\varphi$$

HO TROVATO IL LEGAME TRA v_x, v_y E v_p SOLO DA CONSIDERAZIONI

GEOMETRICHE.

Ho DUNQUE UN SISTEMA

$$\begin{cases} m v_x + m_p v_p = 0 & \text{(IMPULSO)} \\ mg(y_0 - y) = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{m_p}{2} v_p^2 & \text{(ENERGIA)} \\ -v_y = (v_x + v_p)\, tg\varphi & \text{(GEOMETRIA)} \end{cases}$$

3 EQUAZIONI A 3 INCOGNITE $(v_x, v_y, tg\varphi)$.

PERÒ DEVO TROVARE a_x, QUINDI, METTO TUTTO NELL'ESPRESSIONE DELLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA E POI DERIVO:

$$\begin{cases} v_p = -\frac{m}{m_p} v_x \\ mg(y_0 - y) = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{m_p}{2}\frac{m^2}{m_p^2} v_x^2 \\ v_y = -(v_x + v_p)\, tg\varphi \end{cases} \quad \Rightarrow v_y = -\left(1 - \frac{m}{m_p}\right) v_x\, tg\varphi$$

$$\Rightarrow mg(y_0 - y) = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{m^2}{2m_p} v_x^2$$

$$\Rightarrow mg(y_0 - y) = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{m}{m_p}\right) v_x^2 + \frac{m}{2} v_y^2$$

$$\Rightarrow mg(y_0 - y) = \frac{m}{2}\left(\frac{m_p + m}{m_p}\right) v_x^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{m_p - m}{m_p}\right)^2 v_x^2 \, tg^2\varphi$$

$$\Rightarrow mg(y_0 - y) = \frac{m}{2} v_x^2 \left[\frac{m_p + m}{m_p} + \frac{(m_p - m)^2}{m_p^2} tg^2\varphi\right]$$

A QUESTO PUNTO DERIVO

$$- mg v_y = \frac{m}{2} 2 v_x a_x \left[\frac{m_p + m}{m_p} + \frac{(m_p - m)^2}{m_p^2} tg^2\varphi\right]$$

$$\Rightarrow - \frac{v_y}{v_x} g = a_x \left[\frac{m_p + m}{m_p} + \frac{(m_p - m)^2}{m_p^2} tg^2\varphi\right]$$

$$\Rightarrow a_x = - \frac{v_y}{v_x} g \left[\frac{m_p + m}{m_p} + \frac{(m_p - m)^2}{m_p^2} tg^2\varphi\right]^{-1}$$

RICORDO

$- v_y = (v_x + v_p) tg\varphi$ OPPURE $- v_y = \left(1 - \frac{m}{m_p}\right) v_x \, tg\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{a_x = \frac{v_x + v_p}{v_x} g \operatorname{tg}\varphi \left[\frac{m_p + m}{m_p} + \frac{(m_p - m)^2}{m_p^2} \operatorname{tg}^2\varphi \right]^{-1}}$$

OPPURE

$$\boxed{a_x = g \left(1 - \frac{m}{m_p}\right) \operatorname{tg}\varphi \left[\frac{m_p + m}{m_p} + \frac{(m_p - m)^2}{m_p^2} \operatorname{tg}^2\varphi \right]^{-1}}$$

11.4 URTO ANELASTICO

$m, \; m_e, \; E$

URTO ANELASTICO $\longrightarrow$ PARTE DELL'ENERGIA DI e^- VIENE CEDUTA AD m

$\Rightarrow$ POSSO CONSERVARE L'IMPULSO, MA NON L'ENERGIA CINETICA

PERÒ VOLENDO L'ENERGIA DISSIPATA MI SCRIVO COMUNQUE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA.

$$\begin{cases} m_e v_0 = m_e v + m u \\ \frac{1}{2} m_e v_0^2 = \frac{1}{2} m_e v^2 + \frac{1}{2} m u^2 + E \end{cases} ; \quad \begin{cases} v_0 = \text{VELOCITÀ INIZIALE } e^- \\ v = \text{ '' FINALE } e^- \\ u = \text{ '' FINALE } m \\ E = \text{ENERGIA DISSIPATA} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = v_0 - \frac{m}{m_e} u \\ \frac{m_e}{2} v_0^2 = \frac{m_e}{2}\left(v_0 - \frac{m}{m_e} u\right)^2 + \frac{m}{2} u^2 + E \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m_e}{2} v_0^2 = \frac{m_e}{2}\left(v_0^2 + \frac{m^2}{m_e^2} u^2 - 2 \frac{m}{m_e} v_0 u\right) + \frac{m}{2} u^2 + E$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{m^2}{2 m_e} u^2 - m v_0 u + \frac{m}{2} u^2 + E$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m^2}{2m_e}+\frac{m}{2}\right)u^2 - m v_0 u + E = 0$$

EQUAZIONE DI 2° GRADO IN u, VEDO QUANDO ESISTE E QUAL È LA SUA ESPRESSIONE IN FUNZIONE DI v_0 E POI CERCO QUAL È v_0 MINIMA TALE PER CUI u ESISTE.

$$u_\pm = \frac{m v_0 \pm \sqrt{m^2 v_0^2 - 4E\left(\frac{m^2}{2m_e}+\frac{m}{2}\right)}}{\frac{m^2}{m_e}+m} = \frac{m m_e v_0 \pm \sqrt{m^2 v_0^2 - 2E\left(\frac{m^2}{m_e}+m\right)}}{m^2 + m m_e}$$

$$\Rightarrow u_\pm = \frac{m_e v_0 \pm \sqrt{m^2 v_0^2 - \frac{2E}{m_e} m (m+m_e)}}{m+m_e}$$

$u_\pm$ ESISTE SSE:

$$m^2 v_0^2 - \frac{2E}{m_e} m (m+m_e) \geq 0$$

$$\Rightarrow m v_0^2 - \frac{2E}{m_e}(m+m_e) \geq 0$$

$$\Rightarrow m v_0^2 \geq \frac{2E}{m_e}(m + m_e)$$

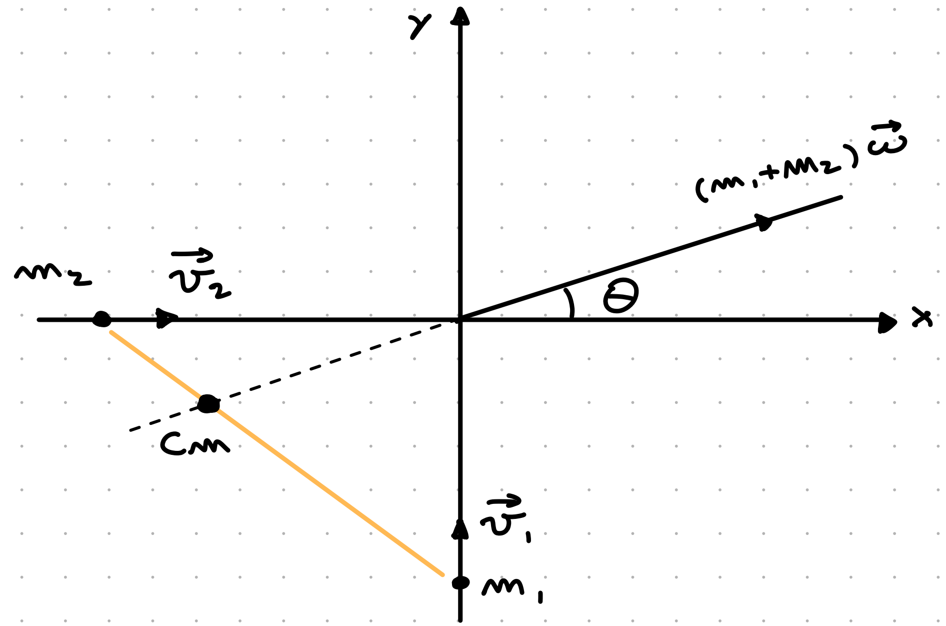
$$\Rightarrow \boxed{v_0 \geq \sqrt{\frac{2E}{m m_e}(m + m_e)}}$$

QUINDI LA VELOCITÀ MINIMA AFFINCHÈ AVVENGA IL PROCESSO È

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m m_e}(m + m_e)}}$$

11.5 RICHIAMI DI URTI

PRENDIAMO DUE CORPI CHE URTANO NELL'ORIGINE DI UN S.R. MUOVENDOSI LUNGO GLI ASSI (m_1, v_1 E m_2, v_2), POI DOPO L'URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO SI MUOVONO INSIEME LUNGO UNA DIREZIONE θ RISPETTO L'ORIZZONTALE.



PER PRIMA COSA POSSO STUDIARE LA POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA. PRIMA DELL'URTO STARÀ SICURAMENTE SULLA CONGIUNGENTE E SARÀ SUL PROLUNGAMENTO DELLA DIREZIONE DI (m_1+m_2) DOPO L'URTO, POICHÈ SO CHE LA QUANTITÀ DI MOTO SI CONSERVA IN MODULO, DIREZIONE E VERSO

$$\vec{P}_{PRIMA} = M\vec{v}_{cm} = (m_1+m_2)\vec{v}_{cm}$$

$$P_{DOPO} = (m_1+m_2)\vec{w}$$

$\Rightarrow$ $\vec{v}_{cm} = \vec{w}$ SIA PRIMA CHE DOPO L'URTO.

NOTA TUTTO CIÒ PERCHÈ LE MASSE NON CAMBIANO NELL'URTO.

POSSO ANCHE VEDERE I CONTI IN COMPONENTI:

PRIMA VEDO

$$m_2 v_2 = (m_1+m_2) w_x$$

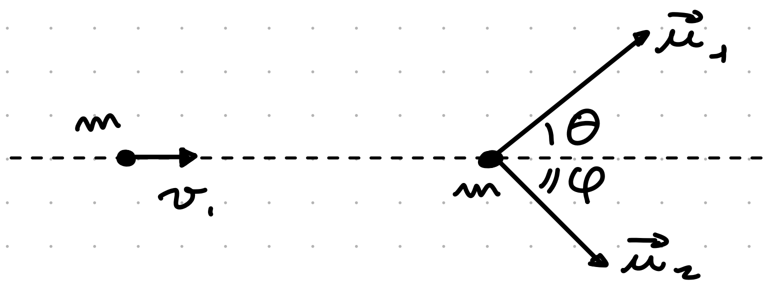
$$m_1 v_1 = (m_1+m_2) w_y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_x = \dfrac{m_2}{m_1+m_2} v_2 \\ w_y = \dfrac{m_1}{m_1+m_2} v_1 \end{cases}$$

L'ANGOLO LO VEDO CON

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{w_x}{w_y}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} \, \frac{m_1 + m_2}{m_1 v_1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{m_2 v_2}{m_1 v_1}\right)$$

VEDIAMO UN <u>URTO NON CENTRALE</u>. BERSAGLIO FISSO DI MASSA m E UN PROIETTILE m CON VELOCITÀ v_1.



NOTA IMPORTANTE CHE $\theta + \varphi = \pi/2$

DIMOSTRIAMO CHE $\theta + \varphi = \pi/2$
CONSERVO LA QUANTITÀ DI MOTO E L'ENERGIA CINETICA (ESSENDO UN URTO ELASTICO)

$$\begin{cases} m\vec{v}_1 = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2 \\ \frac{m}{2} v_1^2 = \frac{m}{2} u_1^2 + \frac{m}{2} u_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ v_1^2 = u_1^2 + u_2^2 \end{cases}$$

USO LA PRIMA RIGA PER VERIFICARE LA SECONDA

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$$

$$\Rightarrow v_1^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$$

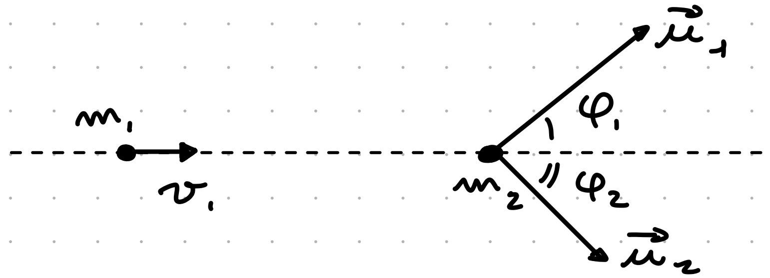
DUNQUE AFFINCHÈ QUEST'ULTIMA RELAZIONE SIA UGUALE ALLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA DEV'ESSERE

$$2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$$

ESERCIZIO 11.5 → UTILE PER LA TEORIA

m_1, m_2, φ_1, v_1

DETERMINA: • MODULI v DOPO L'URTO



HO UN URTO ELASTICO E SO CHE POSSO CONSERVARE LA QUANTITÀ DI MOTO ($\vec{p}$ = PRIMA DELL'URTO $\vec{q}$ = DOPO L'URTO)

$$\vec{p} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 \xRightarrow{\text{ELEVO AL QUADRATO}} q_2^2 = (\vec{p} - \vec{q}_1)^2$$

$$\Rightarrow q_2^2 = p^2 + q_1^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q}_1$$

$$\Rightarrow \boxed{q_2^2 = p^2 + q_1^2 - 2pq_1 \cos\varphi_1}$$

POSSO SCRIVERE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA (IN TERMINI DELL'IMPULSO)

$$\frac{p^2}{2m_1} = \frac{q_1^2}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_2} \quad \Rightarrow \frac{p^2}{m_1} = \frac{q_1^2}{m_1} + \frac{q_2^2}{m_2}$$

$$\Rightarrow q_2^2 = \frac{m_2}{m_1}\left(p^2 - q_1^2\right)$$

POSSO EGUAGLIARE LE DUE ESPRESSIONI DI q_2^2 :

$$p^2 + q_1^2 - 2pq_1\cos\varphi_1 = \frac{m_2}{m_1}(p^2 - q_1^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) q_1^2 - 2pq_1\cos\varphi_1 + \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)p^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m_1 + m_2}{m_1} q_1^2 - 2pq_1\cos\varphi_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1} p^2 = 0$$

ABBIAMO TROVATO QUINDI UN'EQUAZIONE DI 2° GRADO IN q_1 CHE RISOLVENDO TROVO IL MODULO DELLA VELOCITÀ FINALE:

$$q_1 = \frac{2p\cos\varphi_1 \pm \sqrt{4p^2\cos^2\varphi_1 - 4\frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2}p^2}}{2\frac{m_1 + m_2}{m_1}}$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{m_1 p\cos\varphi_1 \pm m_1\sqrt{p^2\cos^2\varphi_1 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2}p^2}}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{m_1 p \cos\varphi_1 \pm m_1 p \sqrt{\cos^2\varphi_1 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2}}}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{m_1 p}{m_1 + m_2}\left(\cos\varphi_1 \pm \sqrt{\cos^2\varphi_1 - 1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{q_1 = \frac{m_1 p}{m_1 + m_2}\left(\cos\varphi_1 \pm \sqrt{-\sin^2\varphi_1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}}\right)}$$

ESPLICITANDO $\quad q_1 = m_1 u_1 \quad , \quad p = m_1 v_1$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\left(\cos\varphi_1 \pm \sqrt{-\sin^2\varphi_1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}}\right)}$$

PERÒ NOTA HO 2 SOLUZIONI PER u_1, E QUESTO È PROPRIO PERCHÈ HO ELEVATO AL QUADRATO LA QUANTITÀ DI MOTO OTTENENDO UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO E QUINDI UN'EQUAZIONE CON 2 SOLUZIONI. HO SEMPLIFICATO SICURAMENTE I CONTI PERCHÈ NON SONO PASSATO PER LE COMPONENTI (NELLA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO) COSA ANCHE SUGGERITA DAL TESTO DELL'ESERCIZIO POICHÉ NON CI DAVA IL SECONDO ANGOLO,

PER CUI MI STAVA IMPLICITAMENTE DICENDO DI GUARDARE DIRETTAMENTE I MODULI (IL QUADRATO DELLA QUANTITÀ DI MOTO) ANZICHÈ LE COMPONENTI.
UNA DELLE DUE SOLUZIONI PERÒ È SICURAMENTE SPURIA. CAPISCO QUALE DEVO ELIMINARE GUARDANDO COSA SUCCEDE NEL CASO LIMITE DI MASSE UGUALI $m_1 = m_2$!

$$u_1 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\left(\cos\varphi_1 \pm \sqrt{-\sin^2\varphi_1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}}\right)$$

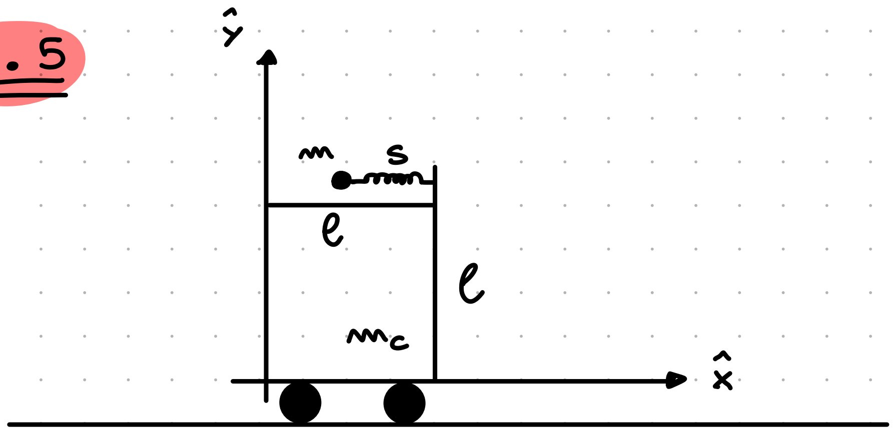
$$u_1 \xrightarrow[m_1 = m_2]{} \frac{v_1}{2}\left(\cos\varphi_1 \pm \sqrt{1 - \sin^2\varphi}\right)$$

$$= \frac{v_1}{2}\left(\cos\varphi_1 \pm \cos\varphi_1\right)$$

LA SOLUZIONE CON IL "−" SAREBBE $u_1 = 0$ OSSIA LA SOLUZIONE CHE CORRISPONDE AD UN NON URTO.

NOTA QUESTO DI VEDERE I CASI LIMITE È SEMPRE UTILE IN MOLTI PROBLEMI ANCHE SOLO PER VEDERE DI AVER FATTO IL PROBLEMA NEL MODO CORRETTO.

11.5



DA CONTROLLARE

QUANDO m VERRÀ RILASCIATA, PER LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO IL CARRELLO SI MUOVERÀ IN VERSO OPPOSTO. POSSO CALCOLARE LA VELOCITÀ DELLA PALLINA DOPO ESSERE STATA RILASCIATA DALLA MOLLA USANDO LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$\frac{1}{2} k s^2 = \frac{m}{2} v^2 + \frac{m_c}{2} v_c^2$$

MA CON LA CONSERVAZIONE DELL'IMPULSO POSSO TROVARE ANCHE LA VELOCITÀ DEL CARRELLO

$$0 = m v + m_c v_c$$

DUNQUE MESSI A SISTEMA

$$v_c = -\frac{m}{m_c} v$$

$$\frac{1}{2} k s^2 = \frac{m}{2} v^2 + \frac{m_c}{2} \frac{m^2}{m_c^2} v^2$$

$$\begin{cases} v_c = -\dfrac{m}{m_c} v \\ k s^2 = m v^2 + \dfrac{m^2}{m_c} v^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} v_c = -\dfrac{m}{m_c} v \\ k s^2 = m v^2 \left(1 + \dfrac{m}{m_c} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_c = -\dfrac{m}{m_c} v \\ k s^2 = \dfrac{m + m_c}{m_c} m v^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{m_c k s^2}{m(m + m_c)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{m_c k s^2}{m(m+m_c)}}}$$

PERÒ v È LA VELOCITÀ DELLA PALLINA, SE IO MI METTO A GUARDARLA IN UN SR ESTERNO INERZIALE VEDO ANCHE CHE LA PALLINA HA UNA VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO CHE È LA VELOCITÀ DEL CARRELLO:

$$\begin{cases} v = \sqrt{\dfrac{m_c k s^2}{m(m+m_c)}} \\ v_c = -\dfrac{m}{m_c} v \end{cases}$$

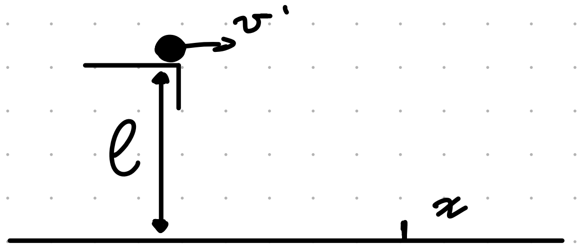
DUNQUE NEL SR S' ESTERNO VEDO LA PALLINA CON VELOCITÀ

$$v' = v + v_c = v - \frac{m}{m_c} v = \left(1 - \frac{m}{m_c}\right) v = \frac{m_c - m}{m_c} \sqrt{\frac{m_c k s^2}{m (m_c + m_c)}}$$

$$= \sqrt{\frac{m_c k s^2 (m_c - m)^2}{m\, m_c^2 (m_c + m)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v' = \sqrt{\frac{k s^2 (m_c - m)^2}{m\, m_c (m_c + m)}}}$$

QUESTA SARÀ LA VELOCITÀ INIZIALE CON CUI LA PALLINA COMPIRÀ MOTO PARABOLICO E PASSERÀ PER (0,0)



CONOSCO LE LEGGI DEL MOTO

$$\begin{cases} x'(t) = x_0 - v' t \\ y'(t) = l - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

CON x_0 LA COORDINATA X IN CUI LA PALLINA EFFETTIVAMENTE COMINCIA A CADERE.

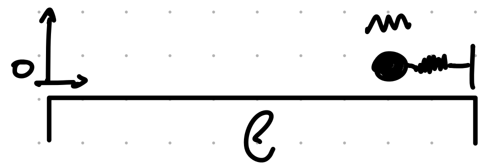
CERCO LA TRAIETTORIA:

$$v' t = x_0 - x \implies t = \frac{x_0 - x}{v'}$$

$$\implies \boxed{y'(x) = \ell - \frac{g}{2} \frac{(x_0 - x)^2}{v'^2}}$$

x_0 È LA POSIZIONE, RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO ORIGINARIO, IN CUI SI TROVA LA PALLINE, E QUINDI È LO SPAZIO DI CUI SI È MOSSO IL CARRELLO NEL TEMPO IN CUI LA PALLINA HA PERCORSO IL LATO SUPERIORE DEL CUBO, OSSIA (TRASCURANDO ATTRITI):

$$x_m(t) = \ell - v t$$



$$\implies x_m(\tau) = \ell - v\tau = 0$$

$$\implies \tau = \ell / v$$

QUINDI x_0 È LO SPAZIO CHE PERCORRE IL CARRELLO NEL TEMPO τ (SEMPRE TRASCURANDO ATTRITI):

$$x_c(t) = v_c t \implies x_c(\tau) \equiv x_0 = v_c \tau = \frac{v_c}{v} \ell$$

DUNQUE LA TRAIETTORIA DI m È

$$y'(x) = \ell - \frac{g}{2v'^2}\left(\frac{v_c}{v}\ell - x\right)^2$$

IMPONENDO CHE PASSI IN $(0,0)$ TROVO

$$0 = \ell - \frac{g}{2v'^2}\left(\frac{v_c}{v}\ell\right)^2 \Rightarrow \frac{g}{2v'^2}\frac{v_c^2}{v^2}\ell^2 = \ell$$

RICORDO $v' = \left(1 - \frac{m}{m_c}\right)v$, $v_c = -\frac{m}{m_c}v$, $v = \sqrt{\frac{m_c k S^2}{m(m+m_c)}}$

$$\Rightarrow g\ell\frac{v_c^2}{v^2} = 2v'^2 \Rightarrow g\ell\frac{m^2}{m_c^2}v^2\frac{1}{v^2} = 2\frac{(m_c-m)^2}{m_c^2}v^2$$

$$\Rightarrow g\ell\frac{m^2}{m_c^2} = 2\frac{(m_c-m)^2}{m_c^2}v^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{g\ell m^2}{2(m_c-m)^2} \Rightarrow \frac{m_c k S^2}{m(m+m_c)} = \frac{g\ell m^2}{2(m_c-m)^2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{g\ell m^2}{2(m_c-m)^2}\frac{m(m+m_c)}{m_c S^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{g\,\ell\, m^3 (m + m_c)}{2 m_c s^2 (m_c - m)^2}}$$

ANALISI DIMENSIONALE:

$$[K] = \frac{m\, s^{-2}\, m\, Kg^3 \cdot Kg}{Kg\, m^2\, Kg^2} = \frac{m^2\, s^{-2}\, Kg^4}{m^2\, Kg^3} = Kg\, s^{-2}$$

FORZA ELASTICA $F \propto kx \Rightarrow [k] = \frac{N}{m} = \frac{Kg\, m\, s^{-2}}{m} = Kg\, s^{-2}$

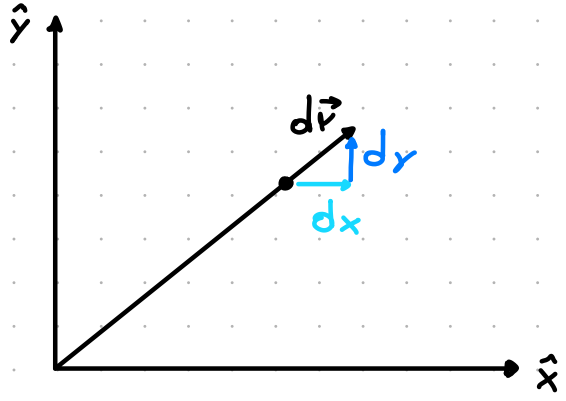
exe 12

ELEMENTI INFINITESIMI DI SUPERFICIE E DI VOLUME NELLE DIVERSE COORDINATE

PRENDO UN SR CARTESIANO E VOGLIO FARE UNO SPOSTAMENTO INFINITESIMO, CIÒ CORRISPONDE A FARE UNO SPOSTAMENTO

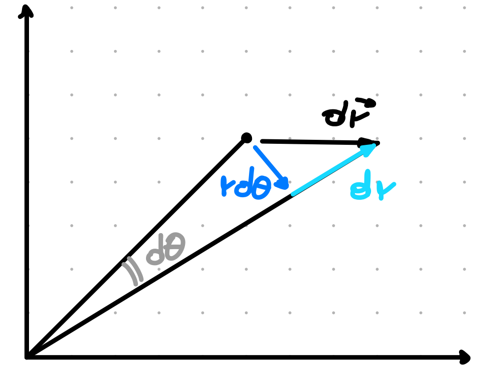
$$d\vec{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y}$$

OSSIA UNO SPOSTAMENTO INFINITESIMO IN OGNI DIREZIONE.



IN COORDINATE POLARI SAREBBE

$$d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta}$$



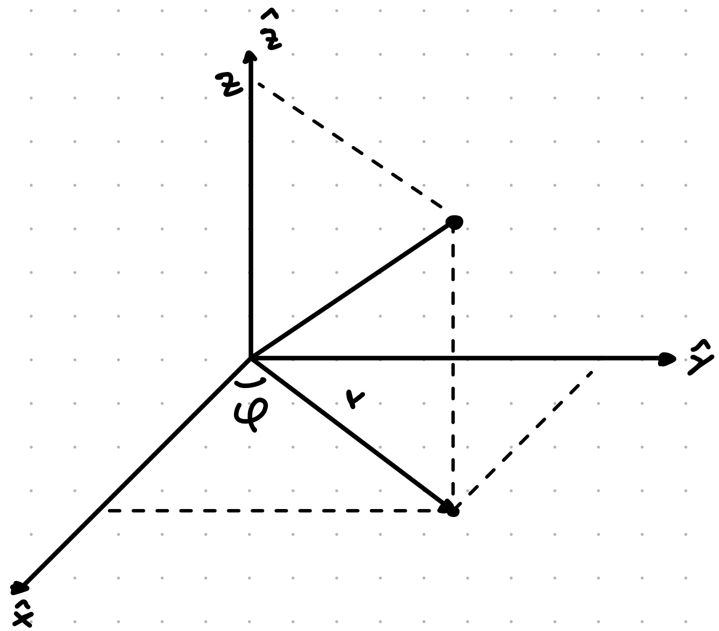
L'ELEMENTO DI SUPERFICIE IN COORDINATE CARTESIANE È (AREA RETTANGOLO FORMATO DAI VETTORI BLU E AZZURRO)

$$dS = dx\,dy$$

IN POLARI È

$$dS = r\,dr\,d\theta$$ (PRODOTTO COMPONENTI $d\vec{r}$)

ANDIAMO IN 3 DIMENSIONI CON LE COORDINATE POLARI, PRIMA AGGIUNGENDOCI LA COORDINATA z E OTTENENDO LE COORDINATE CILINDRICHE E POI METTENDOCI UN'ALTRA COORDINATA ANGOLARE OTTENENDO LE COORDINATE SFERICHE.

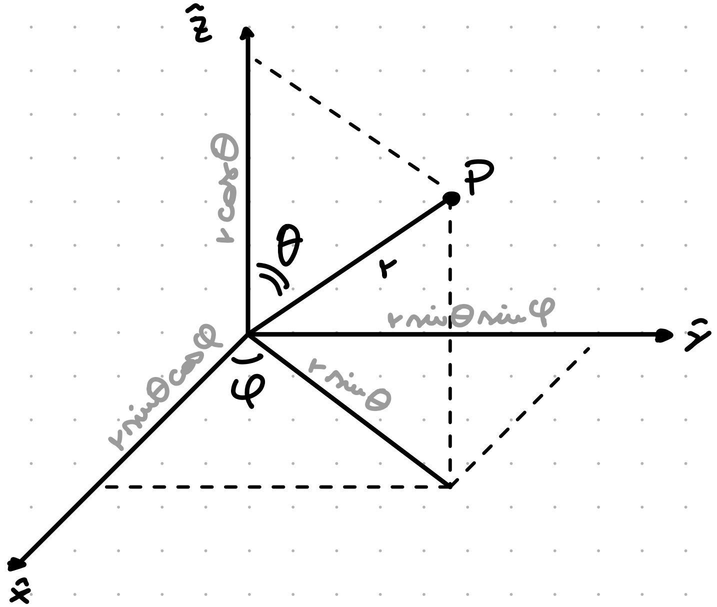


NEL PIANO $(\hat{x}, \hat{y})$ CI SONO LE COORDINATE POLARI + LA COORDINATA $\hat{z}$.

L'ELEMENTO INFINITESIMO DI VOLUME SARÀ IL dS NEL PIANO ALZATA DI UN dz:

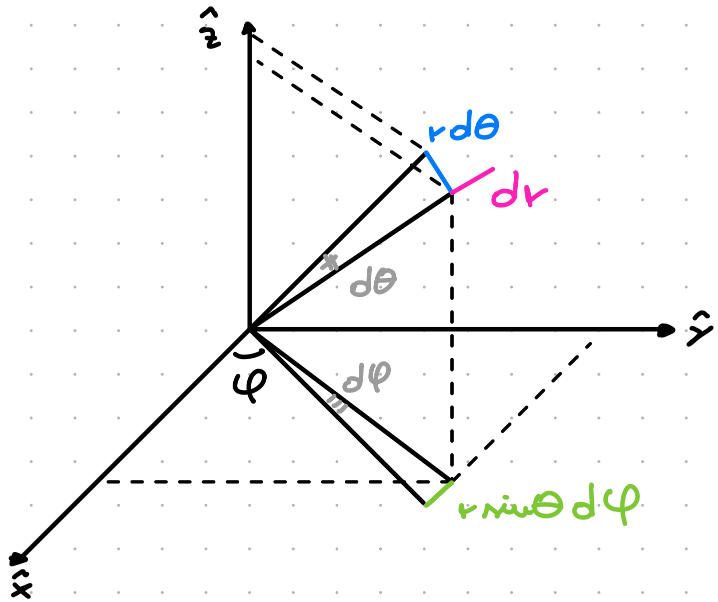
$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$

PER LE COORDINATE SFERICHE:



PER CONVENZIONE $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

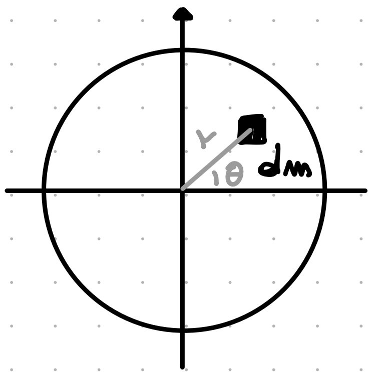
PER TROVARE UN'ESPRESSIONE PER IL dV GUARDO UN ATTIMO COSA VUOL DIRE FARE ROTAZIONI INFINITESIME DELL'ANGOLO φ O DELL'ANGOLO θ NELLE LORO DIREZIONI TANGENZIALI $(\hat{\theta}, \hat{\varphi})$. UNO SPOSTAMENTO LUNGO LA DIREZIONE RADIALE È SEMPLICEMENTE dr.



L'ELEMENTO DI VOLUME SARÀ DUNQUE

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

ESEMPIO ABBIAMO UNA DENSITÀ SUPERFICIALE $\sigma = cr^2$ E VOGLIAMO LA MASSA TOTALE DI UN DISCO.



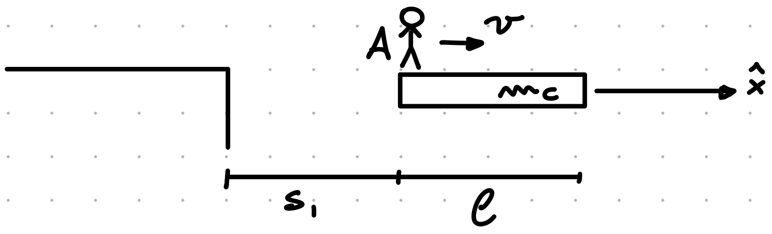
$$\sigma = \frac{dm}{ds} \Rightarrow dm = \sigma \, ds \Rightarrow m = \int \sigma \, ds$$

MI CONVIENE METTERMI IN COORDINATE POLARI, IN CUI SO $ds = r\,dr\,d\theta$

$$\Rightarrow m = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma \, r \, dr \, d\theta = c \int_0^R r^3 \, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{cR^4}{4} 2\pi = \frac{c\pi R^4}{2}$$

VEDI INIZIO PER CALCOLI DEI MOMENTI D'INERZIA DEI VARI CORPI RIGIDI.

12.1



DETERMINA:
- v_c PER UN SR ESTERNO
- D DOPO AVER PERCORSO $\ell/2$

COMINCIO CON IL CALCOLARE DI QUANTO SI SPOSTA LA CHIATTA QUANDO L'UOMO ARRIVA AD $\ell/2$. POSSO SFRUTTARE LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO E IL FATTO CHE LA POSIZIONE x_{cm} NON CAMBI, DUNQUE EGUAGLIANDONE L'ESPRESSIONE INIZIALE E FINALE POSSO TROVARE LO SPOSTAMENTO.

INIZIALE $$x^{i}_{cm} = \frac{m s_1 + m_c\left(s_1 + \frac{\ell}{2}\right)}{m_1 + m_2}$$

HO MESSO m_c DISTANTE $s_1 + \frac{\ell}{2}$ PERCHÈ HO ASSUNTO m_c OMOGENEA E QUINDI CON CENTRO DI MASSA A METÀ.

FINALE $$x^{F}_{cm} = \frac{m(s_2 + x) + m_c\left(s_2 + \frac{\ell}{2}\right)}{m_1 + m_2}$$

DOVE INDICO CON s_2 LA DISTANZA NUOVA DALLA RIVA ED x LO SPOSTAMENTO CHE m HA FATTO LUNGO L'ASSE x.

SE METTO $x = \ell/2$ CHE È QUELLO CHIESTO DAL TESTO ED EGUAGLIO LE ESPRESSIONI DI x_{cm} TROVO s_2

$$\frac{m s_1 + m_c\left(s_1 + \frac{\ell}{2}\right)}{m_1 + m_2} = \frac{m\left(s_2 + \frac{\ell}{2}\right) + m_c\left(s_2 + \frac{\ell}{2}\right)}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow s_1(m + m_c) + m_c\frac{\ell}{2} = s_2(m + m_c) + m\frac{\ell}{2} + m_c\frac{\ell}{2}$$

$$\Rightarrow s_1(m + m_c) - m\frac{\ell}{2} = s_2(m + m_c)$$

$$\Rightarrow \boxed{s_2 = s_1 - \frac{m}{m + m_c}\frac{\ell}{2}}$$

L'UOMO SI TROVERÀ DUNQUE AD UNA DISTANZA DALLA RIVA PARI A

$$D = s_2 + \frac{\ell}{2} = s_1 + \frac{\ell}{2}\left(1 - \frac{m}{m + m_c}\right)$$

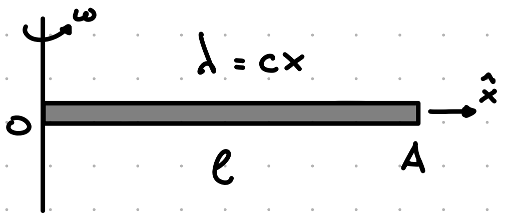
$$\Rightarrow \boxed{D = s_1 + \frac{\ell}{2}\frac{m_c}{m + m_c}}$$

PER TROVARE LA VELOCITÀ USO ANCORA LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO LUNGO L'ASSE x.

CONSERVO p_x : $m v + m_c v_c = 0 \Rightarrow \boxed{v_c = -\frac{m}{m_c} v}$ → NON SIA CREDO GIUSTO

12.2 ℓ , $\lambda = cx$

DETERMINA:
- m
- I_0
- I_{cm}
- N



IL CALCOLO DELLA MASSA TOTALE È IMMEDIATO:

$$\frac{dm}{dx} = \lambda \Rightarrow m = \int_0^m dm' = \int_0^\ell \lambda\, dx = c\int_0^\ell x\, dx \Rightarrow \boxed{m = \frac{c\ell^2}{2}}$$

POSSO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA PASSANTE PER O ANCHE SENZA CONOSCERE ALTRO:

$$I_0 = \int_0^m b^2\, dm$$ (b DISTANZA ELEMENTO dm DALL'ASSE DI O)

$$= \int_0^\ell x^2 \lambda\, dx = \int_0^\ell c x^3\, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{c\ell^4}{4}}$$

POSSO ANCHE SCRIVERLO COME

$$I_0 = \frac{c\ell^2}{2}\frac{\ell^2}{2} = \frac{m\ell^2}{2}$$

(FORMA USUALE: FATTORE NUMERICO • MASSA • • GRANDEZZA CARATTERISTICA)

ORA, PER IL CALCOLO DI I_{cm} MI SERVE CHIARAMENTE LA POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA:

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int_0^m x\, dm = \frac{1}{m}\int_0^\ell x \lambda\, dx = \frac{1}{m}\int_0^\ell c x^2\, dx = \frac{2}{c\ell^2} c \frac{\ell^3}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{cm} = \frac{2\ell}{3}}$$

CALCOLO I_{cm}. APPLICO IL TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

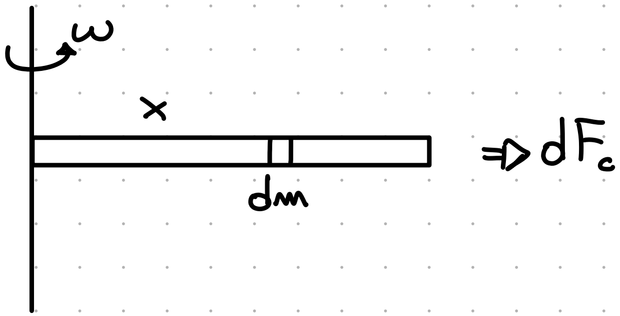
$$I = I_{cm} + m x_{cm}^2 \Rightarrow I_{cm} = I_0 - m x_{cm}^2$$

$$\Rightarrow I_{cm} = \frac{m\ell^2}{2} - \frac{4m\ell^2}{9} = m\ell^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right) = \frac{m\ell^2}{18}(9-8)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{cm} = \frac{m\ell^2}{18}}$$

LA REAZIONE VINCOLARE SARÀ TALE DA BILANCIARE LA FORZA CENTRIFUGA (O CENTRIPETA SE VISTO DA UN SR ESTERNO) CHE

SENTE OGNI ELEMENTINO dm.



L'ELEMENTO dm SI TROVA A DISTANZA x, RUOTA CON ω E SENTE UNA FORZA dF_c.

$$dF_c = dm\,\omega^2 x$$

VEDO LA FORZA CENTRIFUGA CHE SENTE L'INTERA SBARRA

$$F_c = \int_0^m \omega^2 x\, dm = \omega^2 c \int_0^\ell x^2\, dx = \frac{\omega^2 c \ell^3}{3}$$

LO SCRIVO CON LA MASSA

$$F_c = \frac{\omega^2 \ell}{3} 2 \frac{c\ell^2}{2} = m\omega^2 \frac{2\ell}{3} = m\omega^2 x_{cm}$$

E COSÌ VEDO BENE CHE AL POSTO DI FARE IL CONTO SU dm AVREI POTUTO CONSIDERARE TUTTA LA MASSA CONCENTRATA NEL CENTRO DI MASSA E CALCOLARE COSÌ F_c.

DUNQUE

$$\boxed{|N| = m\omega^2 x_{cm}}$$

12.3

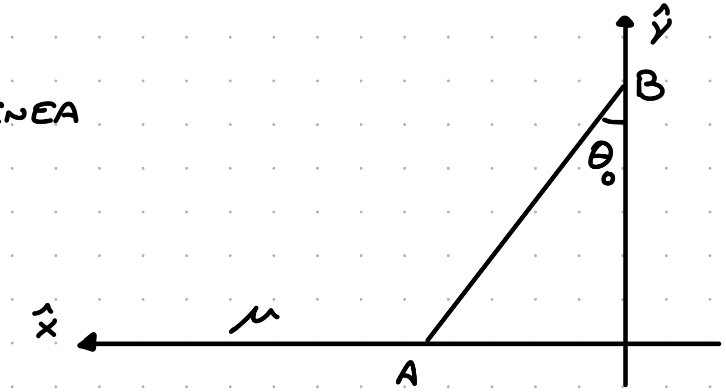
$\ell = 1,3\ m$

$m = 1\ kg$ OMOGENEA

$\mu = 0.25$

$\theta_0 = 30°$

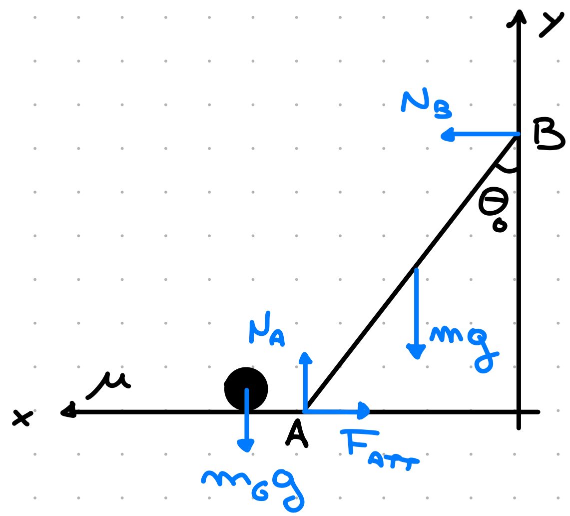
$m_G = 2,4\ kg$



DETERMINA: • h_{MAX}

VEDIAMO LE FORZE IN GIOCO

- ABBIAMO UNA SCALA OMOGENEA ⇒ FORZA PESO APPLICATA NEL CM E CM A METÀ SCALA.
- FORZA PESO DELLA GALLINA
- ATTRITO
- REAZIONI VINCOLARI



È UN PROBLEMA DI STATICA, PER CUI HO LE RELAZIONI

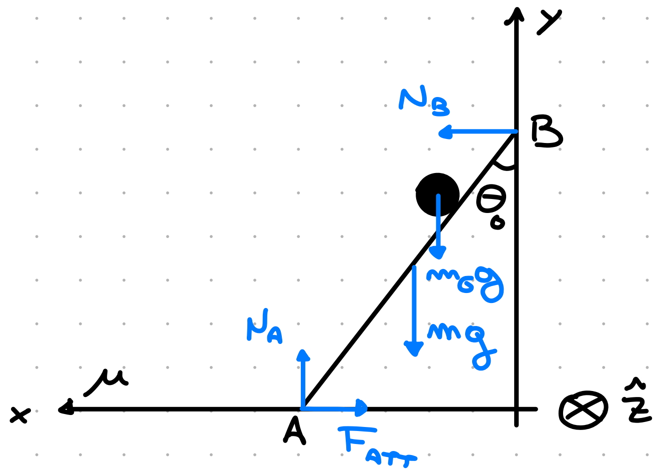
$$\begin{cases} \vec{M}_{RIS} = 0 \\ \vec{F}_{RIS} = 0 \end{cases}$$

GUARDO PRIMA LE FORZE. AVRÒ DUE COMPONENTI

$$\vec{F}_{RIS} = \begin{array}{l} \hat{x} \\ \hat{y} \end{array} \begin{cases} -F_{ATT} + N_B = 0 \\ N_A - m_G g - mg = 0 \end{cases} = \begin{cases} -N_A \mu + N_B = 0 \\ N_A - m_G g - mg = 0 \end{cases} \quad (F_{ATT} = N_A \mu)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{RIS} = \begin{cases} N_B = N_A \mu = (m + m_G) g \mu \\ N_A = (m + m_G) g \end{cases}$$

ORA GUARDO I MOMENTI. PER CALCOLARE UN MOMENTO MI SERVE UN POLO, SCELGO COME POLO A POICHÈ CI SONO PIÙ FORZE APPLICATE E COSÌ FACENDO TOLGO TERMINI.



INDICO CON r LA DISTANZA DI UN PUNTO DAL POLO A.

$$\vec{M}_{RIS} = \left(\frac{\ell}{2} m g \sin\theta_0 + r m_G g \sin\theta_0 - \ell N_B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)\right) \hat{z} = 0$$

$$= \left(\frac{\ell}{2} m g \sin\theta_0 + r m_G g \sin\theta_0 - \ell N_B \cos\theta_0\right) \hat{z} = 0$$

SOSTITUISCO IN $\vec{M}_{RIS}$ LE COSE TROVATE IN $\vec{F}_{RIS} = 0$ (IN MODULO)

$$\frac{\ell}{2} m g \sin\theta_0 + r m_G g \sin\theta_0 - \ell (m + m_G) g \mu \cos\theta_0 = 0$$

$$\Rightarrow r m_G g \sin\theta_0 = \ell (m + m_G) g \mu \cos\theta - \frac{\ell}{2} m g \sin\theta_0$$

$$\Rightarrow \quad r = \ell \, \frac{m + m_G}{m_G} \mu \, \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0} - \frac{\ell}{2} \frac{m}{m_G}$$

R È LA DISTANZA LUNGO LA SCALA, SE VOGLIO L'ALTEZZA ALLORA

$$h_{MAX} = r \cos\theta_0$$

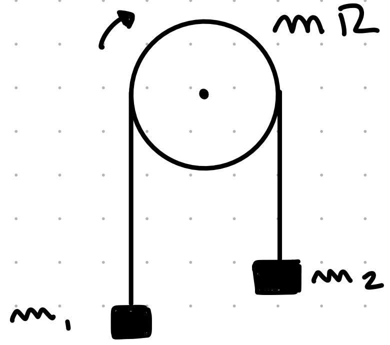
$$\Rightarrow \boxed{h_{MAX} = \ell \, \frac{m + m_G}{m_G} \mu \, \frac{\cos^2\theta_0}{\sin\theta_0} - \frac{\ell}{2} \frac{m}{m_G} \cos\theta_0}$$

12.4 CARRUCOLA = DISCO m, R

m_1, m_2

DETERMINA: • T

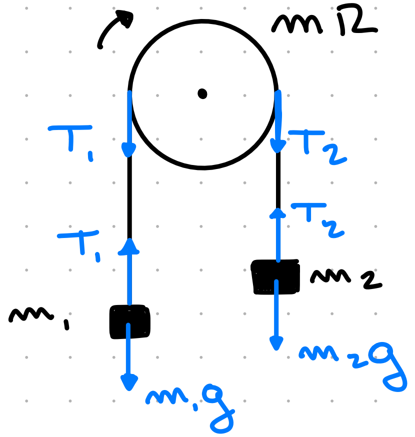
• a



RICORDA DALL' exe 5 IN CUI LA CARRUCOLA NON AVEVA MASSA

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \\ T = \dfrac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \end{cases}$$

ORA GUARDIAMO IL NOSTRO PROBLEMA. DISEGNIAMO LE FORZE IN GIOCO



ORA TENGO CONTO CHE LA TENSIONE NON SARÀ PROPAGATA LUNGO IL DISPOSITIVO, MA CI SARÀ UNA TENSIONE TRA LA CARRUCOLA E CIASCUNA MASSA m_i
$\Rightarrow$ 2 EQUAZIONI CARDINALI.

POI TENENDO CONTO CHE LA CARRUCOLA RUOTA AVRÒ UNA 3° EQUAZIONE CARDINALE, CHE IN QUESTO CASO SCRIVO COME $\mathcal{M} = I\alpha$ (EQUIVALENZA CON $F = ma$)

$$\begin{cases} m_1 a = T_1 - m_1 g \\ m_2 a = m_2 g - T_2 \\ I\alpha = -RT_1 + RT_2 \end{cases}$$

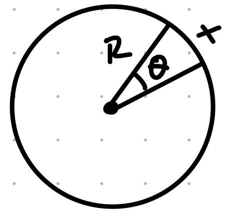
NOTA AVREI FACENDO $I\alpha = M_{RIS} = M_{T_1} + M_{T_2}$, I MOMENTI LI CALCOLO

$M_i = \vec{R} \times \vec{T}_i$ E VERRANNO UNO ENTRANTE E L'ALTRO USCENTE

CON LA REGOLA DELLA VITE VEDO SE M_i È POSITIVO (CONCORDE CON LA ROTAZIONE CHE HO SCELTO) OPPURE NEGATIVO.

DUNQUE DEVO SOLO PIÙ RISOLVERE IL SISTEMA:

$$\begin{cases} T_1 = m_1 (a+g) \\ T_2 = m_2 (g-a) \\ I\alpha = R(T_2 - T_1) \end{cases}$$



RICORDO LA RELAZIONE $R\theta = x$ DERIVANDOLA 2 VOLTE

$$R\dot{\theta} = \dot{x} \Rightarrow R\ddot{\theta} = \ddot{x} \Rightarrow R\alpha = a$$

DUNQUE $\alpha = a/R$ E POSSO TROVARE

$$I\frac{a}{R} = R\left(m_2(g-a) - m_1(a+g)\right)$$

$$\Rightarrow \quad Ia = R^2\left(g(m_2 - m_1) - a(m_1 + m_2)\right)$$

IL MOMENTO D'INERZIA DEL DISCO È $I = \frac{1}{2} m R^2$

$$\frac{1}{2} m R^2 a + R^2 a (m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1) R^2$$

$$\Rightarrow \quad a\left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2}\right) = g(m_2 - m_1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m/2} g}$$

POSSO TROVARE LE TENSIONI:

$$T_1 = m_1(a+g) = m_1\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} + 1\right)g = m_1\left(\frac{2m_2 + m/2}{m_1 + m_2 + m/2}\right)g$$

$$T_2 = m_2(g-a) = m_2\left(1 - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m/2}\right)g = m_2\left(\frac{2m_1 + m/2}{m_1 + m_2 + m/2}\right)g$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} T_1 &= \frac{2m_1m_2 + \frac{m_1 m}{2}}{m_1 + m_2 + m/2}\, g \\ T_2 &= \frac{2m_1m_2 + \frac{m_2 m}{2}}{m_1 + m_2 + m/2}\, g \end{aligned}}$$

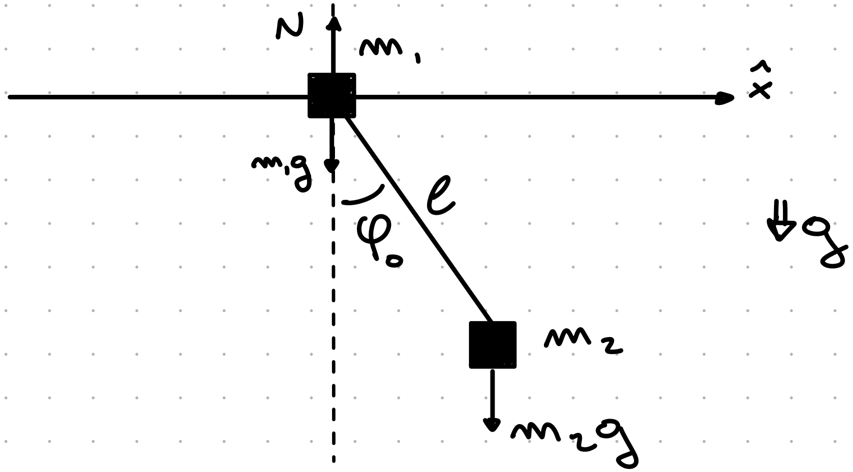
12.5 $\ell = 130 \text{ cm}$

$m_1 = 0.15 \text{ kg}$

$m_2 = 0{,}28 \text{ kg}$

DETERMINA : • A_1

• v_2 $(\varphi_0 = 0)$



LE DOMANDE SONO SCORRELATE, PER TROVARE v_2 POSSO USARE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA (METTO LA QUOTA 0 SULLA GUIDA DI m_1)

$$-m_2 g \ell \cos\varphi_0 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - m_2 g \ell + \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

HO 2 INCOGNITE, DEVO AGGIUNGERE QUALCOSA. IMPONGO LA CONSERVAZIONE SULL'ASSE X (SU $\hat{y}$ NON SI CONSERVA POICHÈ C'È LA FORZA PESO) ANCHE PERCHÈ QUANDO m_2 È NEL PUNTO PIÙ BASSO $v_2 \parallel \hat{x}$:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

METTENDO A SISTEMA TROVO

$$\begin{cases} v_1 = -\dfrac{m_2}{m_1} v_2 \\ m_2 g \ell (1 - \cos\varphi_0) = \dfrac{m_2}{2} v_2^2 + \dfrac{m_1}{2} \dfrac{m_2^2}{m_1^2} v_2^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2gl(1-\cos\varphi_0) = v_2^2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_2 = \left(\frac{2m_1 gl}{m_1+m_2}(1-\cos\varphi_0)\right)^{1/2}}$$

PER TROVARE L'AMPIEZZA A_1 USO IL CENTRO DI MASSA. HO CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO LUNGO L'ASSE X, DUNQUE x_{cm} NON CAMBIA, QUINDI POSSO CALCOLARE x_{cm} ALL'INIZIO, IL x_{cm} ALLA FINE E POSSO RICAVARE L'AMPIEZZA.

COME ORIGINE DEL SR PRENDO LA POSIZIONE INIZIALE DI m_1, DUNQUE

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1+m_2} \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ \Rightarrow \\ x_2 = l\sin\varphi_0 \end{matrix} \quad x_{cm}^{i} = \frac{m_2 l \sin\varphi_0}{m_1+m_2}$$

NEL PUNTO FINALE x_1 SARÀ $2A$ E x_2 $2A - l\sin\varphi_0$ POICHÈ SPOSTANDO DI $2A$ x_1 ALLORA m_2 È LEGATA E RAGGIUNGE DI NUOVO φ_0:

$$x_{cm}^{f} = \frac{m_1 2A + (2A - l\sin\varphi_0)m_2}{m_1+m_2}$$

LI EGUAGLIO

$$x_{cm}^{f} = x_{cm}^{i} \Rightarrow \frac{m_2 \, l \sin\varphi_0}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \, 2A + (2A - l\sin\varphi_0)\, m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow m_2 \, l \sin\varphi_0 = 2A\left(m_1 + m_2\right) - m_2 \, l \sin\varphi_0$$

$$\Rightarrow 2 m_2 \, l \sin\varphi_0 = 2A(m_1 + m_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{m_2 \, l \sin\varphi_0}{m_1 + m_2}}$$

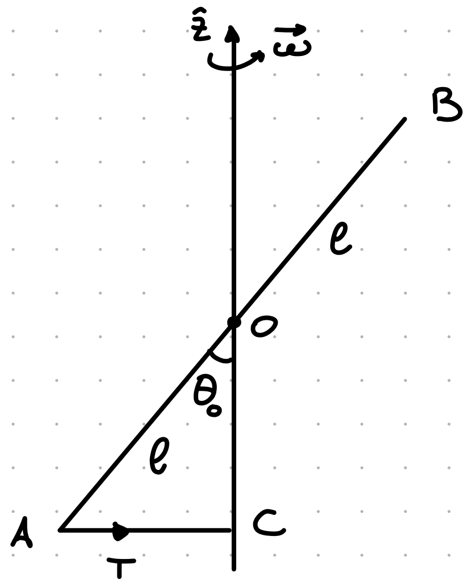
12.6

$2\ell = 1{,}2\,m$

$m = 0.7\,Kg$

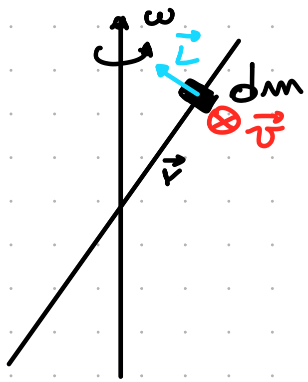
$\omega = \pi\,rad/s$

$\theta = 30°$



DETERMINA : • T

SE PRENDO UN ELEMENTO dm DELLA SBARRETTA POSSO VEDERE CHE IL MOMENTO ANGOLARE È ORTOGONALE ALLA SBARRETTA



$L \propto \vec{r} \times \vec{v}$

$\Rightarrow$ QUESTO MI DICE CHE $\vec{L} \not\parallel$ L'ASSE DI ROTAZIONE

$\Rightarrow$ NON USO LA 2° EQUAZIONE NELLA FORMA CON $\vec{\alpha}$

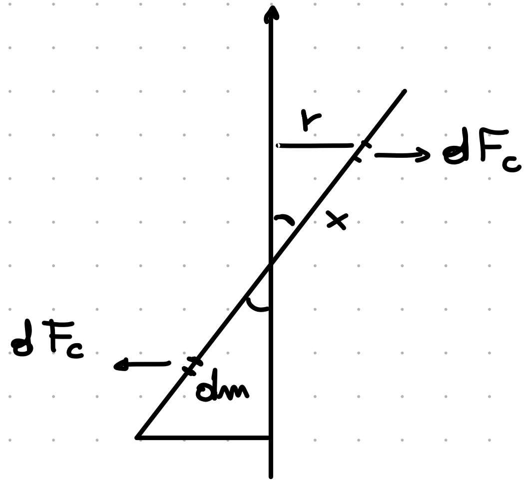
NOTA QUANDO SCRIVO $\vec{M}^{(E)} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ NON POSSO SEMPRE DIRE CHE IL MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE È UGUALE AL MOMENTO DELLA RISULTANTE DELLE FORZE. BANALMENTE QUANDO HO UNA COPPIA DI FORZE QUESTO NON VALE.

M. SCRIVO LE EQUAZIONI CARDINALI:

$$\vec{F}_{EXT} = 0 \qquad \text{(CI SONO SEMPRE COPPIE UGUALI E CONTRARIE)}$$

LA TENSIONE DELLA FUNE È DOVUTA ALLA FORZA CENTRIFUGA DEI DUE TRATTI DI SBARRE. PER TROVARE T POSSO TROVARE IL MOMENTO RISULTANTE DELLA FORZA CENTRIFUGA ED EGUAGLIARLO A QUELLO DELLA TENSIOE.

M_c = MOMENTO FORZA CENTRIFUGA



HO $dF_c = dm\,\omega^2 r$

DOVE x = DISTANZA TRA O E dm E QUINDI

$$r = x \sin\theta_0$$

$$\Rightarrow dF_c = dm\,\omega^2 x \sin\theta_0 \qquad \Rightarrow F_c = \omega^2 \sin\theta_0 \lambda \int_{-\ell}^{\ell} x\,dx = \lambda\omega^2 \sin\theta_0 \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\ell}^{\ell} = 0$$

SE CALCOLO APPUNTO dF_c INTEGRANDO TROVO $F_{EXT} = 0$, QUINDI MI CALCOLO IL MOMENTO

$$d\vec{M}_c = \vec{x} \times d\vec{F}_c \Rightarrow dM_c = x\,dF_c \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) = x\,dF_c \cos(\theta_0)$$

(dM_c È ENTRANTE NEL FOGLIO). INTEGRO

$$M_c = \int x\cos\theta_0 \, dF_c = \int x\cos\theta_0 \, \omega^2 x \sin\theta_0 \, dm$$

$$= \omega^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \int x^2 \, dm = \omega^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \int_{-\ell}^{\ell} x^2 \lambda \, dx$$

$$= \lambda \omega^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \, 2 \frac{\ell^3}{3}$$

MA PER UNA SBARRETTA CON λ UNIFORME E LUNGA 2ℓ LA MASSA È $m = 2\ell\lambda$. DUNQUE

$$M_c = \frac{1}{3} m \omega^2 \ell^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0$$

PER TROVARE LA TENSIONE EGUAGLIO M_c CON IL MOMENTO DI $\vec{T}$ E TROVO

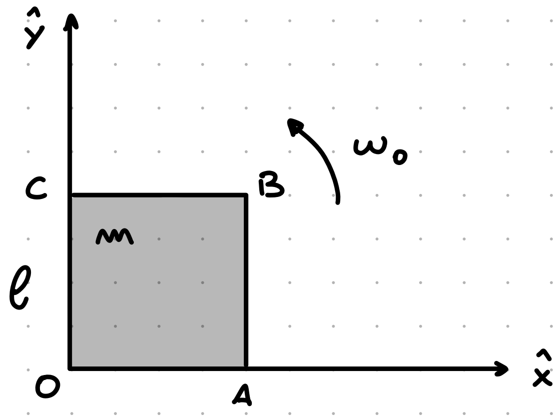
$$M_T = M_c \Rightarrow \ell T \cos\theta_0 = \frac{1}{3} m \omega^2 \ell^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{3} m \omega^2 \ell \sin\theta_0}$$

exe 13

13.1 σ UNIFORME

ℓ LATO



POTREI SCRIVERE L'ESPRESSIONE DELLA FORZA CENTRIFUGA IN UN SINGOLO PASSAGGIO, SFRUTTANDO IL CENTRO DI MASSA E PENSANDO TUTTA m CONCENTRATA LÌ. IL CM È AL CENTRO DELLA CARTA E DISTANTE DA O

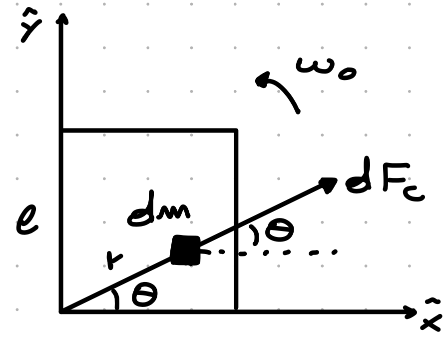
$$r_{cm} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell$$

PER CUI LA FORZA CENTRIFUGA DELLA CARTA È

$$\boxed{F_c = m \omega^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \ell}$$

POSSO PERÒ FARE IL CONTO RAGIONANDO SUGLI ELEMENTI INFINITESIMI (DIMOSTRANDO IL RAGIONAMENTO SOPRA).

DISEGNO SOTTO



OGNI ELEMENTO È SOGGETTO AD UNA FORZA CENTRIFUGA (IN COMPONENTI):

$$\begin{cases} dF_{cx} = dF_c \cos\theta \\ dF_{cy} = dF_c \sin\theta \end{cases}$$

IL MODULO SARÀ $dF_c = dm\,\omega_0^2 r$, PER CUI

$$\begin{cases} dF_{cx} = \omega_0^2 \cos\theta\, r\, dm \\ dF_{cy} = \omega_0^2 \sin\theta\, r\, dm \end{cases}$$

MA $\cos\theta$ E $\sin\theta$ SONO $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$

PER CUI

$$\begin{cases} dF_{cx} = \omega_0^2\, x\, dm \\ dF_{cy} = \omega_0^2\, y\, dm \end{cases}$$

<u>NOTA</u> ARRIVAVO A QUESTO BANALMENTE PRENDENDO LE COMPONENTI LUNGO GLI ASSI CARTESIALI DI dm, OSSIA x ED y, DA METTERE IN dF_{cx}, dF_{cy}.

ORA SO $dm = \sigma\, dx\, dy$ E POSSO INTEGRARE

$$\begin{cases} F_{cx} = \omega_0^2 \sigma \int_0^\ell x\,dx \int_0^\ell dy = \omega_0^2 \sigma \dfrac{\ell^3}{2} \\ F_{cy} = \omega_0^2 \sigma \int_0^\ell dx \int_0^\ell y\,dy = \omega_0^2 \sigma \dfrac{\ell^3}{2} \end{cases}$$

RICORDO CHE PER UN QUADRATO OMOGENEO $m = \sigma \ell^2$

DUNQUE

$$\begin{cases} F_{cx} = m\omega_0^2 \dfrac{\ell}{2} \\ F_{cy} = m\omega_0^2 \dfrac{\ell}{2} \end{cases}$$

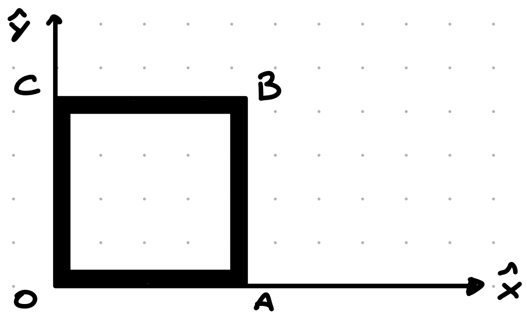
POSSO CALCOLARE QUINDI IL MODULO

$$F_c = \sqrt{m^2\omega_0^4 \frac{\ell^2}{4} + m^2\omega_0^4 \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{2m^2\omega_0^4 \frac{\ell^2}{4}} = m\omega_0^2 \ell \frac{\sqrt{2}}{2}$$

VEDIAMO IL CASO CON σ SOLO SUI LATI.

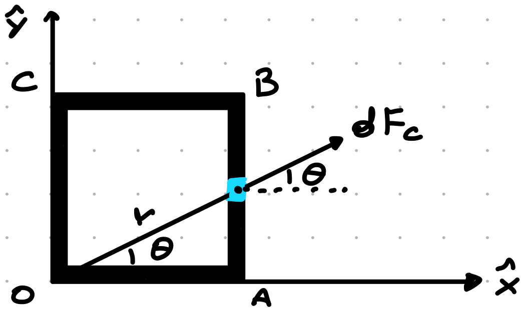
NOTA IL RISULTATO NON DEVE CAMBIARE, HO SOLO CAMBIATO COM'È LA σ.

HO LA SITUAZIONE



E ORA DOVRÒ CONSIDERARE NON σ, BENSÌ 4 SBARRETTE CON DENSITÀ λ UNIFORME.

GUARDO PER PRIMO IL LATO AB.



$$AB \begin{cases} dF_{c_x} = dF_c \cos\theta \\ dF_{c_y} = dF_c \sin\theta \end{cases}$$ CON $dF_c = dm\,\omega_0^2 r$

PER AB HO $\cos\theta = \frac{\ell}{r}$ $\sin\theta = \frac{y}{r}$

PER GLI ALTRI LATI LE COMPONENTI DI dF_c SONO ANALOGHE MA CON

OA : $\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\sin\theta = \frac{0}{r} = 0$

CB : $\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\sin\theta = \frac{\ell}{r}$

OC : $\cos\theta = \frac{0}{r} = 0$ $\sin\theta = \frac{y}{r}$

COSÌ HO

$$AB : \begin{cases} dF_{cx} = dm\,\omega_0^2\,\ell \\ dF_{cy} = dm\,\omega_0^2\,y \end{cases}$$

$$OA : \begin{cases} dF_{cx} = dm\,\omega_0^2\,x \\ dF_{cy} = 0 \end{cases}$$

CB : $\begin{cases} dF_{cx} = dm\,\omega_0^2\, x \\ dF_{cy} = dm\,\omega_0^2\, \ell \end{cases}$

OC : $\begin{cases} dF_{cx} = 0 \\ dF_{cy} = dm\,\omega_0^2\, y \end{cases}$

POSSO USARE $dm = \lambda dx$ O $dm = \lambda dy$ (A SECONDA DEL LATO) ED INTEGRARE

AB : $\begin{cases} F_{cx} = \lambda \omega_0^2 \ell \int_0^\ell dy = \lambda \omega_0^2 \ell^2 \\ F_{cy} = \lambda \omega_0^2 \int_0^\ell y\, dy = \lambda \omega_0^2 \frac{\ell^2}{2} \end{cases}$

OA : $\begin{cases} F_{cx} = \lambda \omega_0^2 \int_0^\ell x\, dx = \lambda \omega_0^2 \frac{\ell^2}{2} \\ F_{cy} = 0 \end{cases}$

CB : $\begin{cases} F_{cx} = \lambda \omega_0^2 \int_0^\ell x\, dx = \lambda \omega_0^2 \frac{\ell^2}{2} \\ F_{cy} = \lambda \omega_0^2 \ell \int_0^\ell dx = \lambda \omega_0^2 \ell^2 \end{cases}$

OC : $\begin{cases} F_{cx} = 0 \\ F_{cy} = \lambda \omega_0^2 \int_0^\ell y\, dy = \lambda \omega_0^2 \frac{\ell^2}{2} \end{cases}$

GUARDO LA RISULTANE IN COMPONENTI E NE FACCIO IL MODULO :

$$
\begin{cases}
F^{R}_{cx} = \lambda \omega_0^2 \ell^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \lambda \omega_0^2 2 \ell^2 \\
F^{R}_{cy} = \lambda \omega_0^2 \ell \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) = \lambda \omega_0^2 2 \ell^2
\end{cases}
$$

PER OGNI SBARRETTA HO $m_i = \lambda \ell$, AVENDONE 4

$$m = 4 \lambda \ell$$

DUNQUE

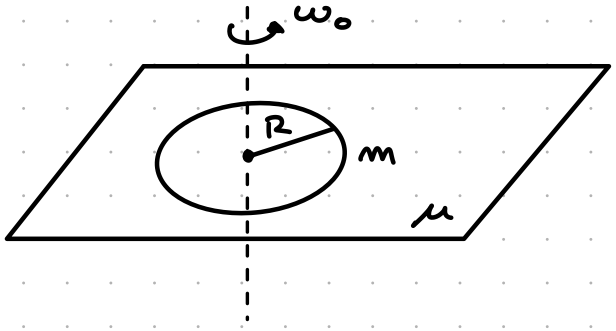
$$
\begin{cases}
F^{R}_{cx} = \omega_0^2 m \frac{\ell}{2} \\
F^{R}_{cy} = \omega_0^2 m \frac{\ell}{2}
\end{cases}
$$

E QUINDI

$$\boxed{F_c = m \omega_0^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \ell}$$

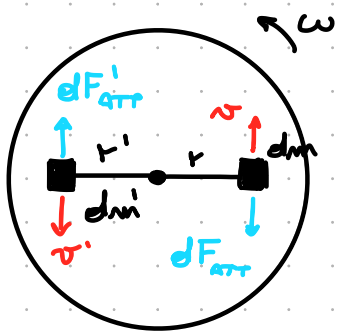
COME PRIMA. $\blacksquare$

13.2



DETERMINA:
- M_{ATT}
- τ CHE SI FERMA
- $\theta(t)$

IN QUESTO PROBLEMA DEVO RAGIONARE SUI SINGOLI ELEMENTI INFINITESIMI dm CHE SUBIRANNO TUTTI UNA FORZA D'ATTRITO FRENANTE.



dm E dm' SONO UGUALI E SIMMETRICI
$\Rightarrow r = r'$

ALLORA, LE FORZE D'ATTRITO SARANNO UGUALI E CONTRARIE
$\Rightarrow$ COPPIA NULLA

$$dF_{ATT}^{(\prime)} = dm^{(\prime)} g \mu$$

QUELLO CHE NON È NULLO È IL MOMENTO RISULTANTE!

IL MOMENTO (INFINITESIMO) SARÀ (IN MODULO) PER CIASCUN dm:

$$dM_{ATT} = r\, dF_{ATT} = r g \mu\, dm$$

ENTRANTE NEL FOGLIO

SUPPONENDO LA MONETA CON DENSITÀ SUPERFICIALE σ OMOGENEA:

$$dM_{ATT} = r g \mu \sigma\, dS = r g \mu \sigma\, r\, dr\, d\theta$$

INTEGRANDO SULLA MONETA

$$M_{ATT} = g\mu\sigma \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta = g\mu\sigma \frac{R^3}{3} 2\pi$$

LA MASSA DI UN DISCO OMOGENEO È $m = \sigma \pi R^2$
DUNQUE

$$\boxed{M_{ATT} = \frac{2}{3} m g \mu R}$$

AVENDO TROVATO M = COSTANTE SO DALLA 2° EQUAZIONE CARDINALE

$$M = I\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{COSTANTE}$$

NOTA PARALLELISMO CON IL MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO.

RICORDO : $a = \text{cost}$, $v(t) = v_0 + at$, $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

ORA HO: $\alpha = \text{cost}$, $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$, $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

(LE VEDO INTEGRANDO $\alpha = \text{cost} = \frac{d\omega}{dt}$)

RICAVO α RICORDANDO CHE PER UN DISCO $I = \frac{1}{2} m R^2$

$$M_{ATT} = -I\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{M_{ATT}}{I}$$

SEGNO MENO PERCHÈ α ED M_{ATT} SONO OPPOSTI

HO $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = \omega_0 - \frac{M_{ATT}}{I} t$

VOGLIO τ TC $\omega(\tau) = 0$:

$$0 = \omega_0 - \frac{M_{ATT}}{I}\tau \Rightarrow \tau = \frac{\omega_0 I}{M_{ATT}}$$

ESPLICITANDO

$$\tau = \omega_0 \frac{mR^2}{2} \frac{3}{2m\mu g R} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{3\omega_0 R}{4\mu g}}$$

$\theta(t)$ SARÀ (CON $\alpha = \text{COST}$) :

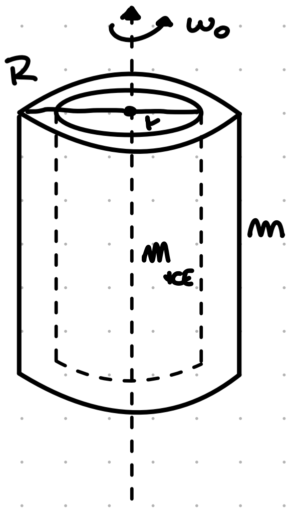
$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

IN τ LA MONETA È RUOTATA DI

$$\theta(\tau) - \theta_0 = \omega_0 \frac{3\omega_0 R}{4\mu g} - \frac{1}{2} \frac{2mg\mu R}{mR^2} 2 \cdot \frac{9\omega_0^2 R^2}{16\mu^2 g^2}$$

$$= \frac{3\omega_0^2 R}{4\mu g} - \frac{9}{8}\frac{\omega_0^2 R}{\mu g} \Rightarrow \boxed{\Delta\theta = -\frac{3\omega_0^2 R}{8\mu g}}$$

13.3



DETETERMINA :
- ω_1
- ΔE

PER TROVARE ω_1 SFRUTTO LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE. (AVENDO SOLO FORZE INTERNE).

NOTA QUANDO HO LA MASSA O LA SUA DISTRIBUZIONE CHE CAMBIANO NEL TEMPO IL PROCEDIMENTO È STANDARD E SEMPRE LO STESSO.

DATA LA SIMMETRIA CILINDRICA SO CHE $\vec{L}$ SIA DELLA PENTOLA CHE DEL GHIACCIO SONO LUNGO $\hat{z}$.

$$I_0 \omega_0 = I_1 \omega_1$$

CON I MOMENTI D'INERZIA CHE SONO

$$I_0 = \frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{2} m_{ICE} r^2$$

$$I_1 = \frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{2} m_{ICE} R^2 = \frac{1}{2} R^2 (m + m_{ICE})$$

DUNQUE

$$\omega_1 = \frac{I_0}{I_1}\omega_0 = \boxed{\frac{mR^2 + m_{ICE}r^2}{(m+m_{ICE})R^2}\omega_0}$$

CALCOLO LA VARIAZIONE DELL'ENERGIA, CHE CAMBIANDO VELOCITÀ ω_1 SICURAMENTE SARÀ UNA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA:

$$K_{IN} = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$$

$$K_{FIN} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$

E NOTANDO CHE L'ENERGIA POTENZIALE CAMBIA, POICHÈ CAMBIA L'ALTEZZA DEL CILINDRO DI m_{ICE} E QUINDI L'ALTEZZA DEL CENTRO DI MASSA

$$U_j = m_{ICE}\, g\, y_{cm_j}$$

INIZIALMENTE (h_1 ALTEZZA GHIACCIO) $y_{cm} = \frac{h_1}{2}$

FINALE (h_2 ALTEZZA ACQUA) $y_{cm} = \frac{h_2}{2}$

DUNQUE

$$\Delta U = m_{ICE}\, g\frac{h_2}{2} - m_{ICE}\, g\frac{h_1}{2} = \frac{m_{ICE}\, g}{2}(h_2 - h_1)$$

SFRUTTANDO LA DEFINIZIONE DI DENSITÀ SOSTITUISCO LE h_j

(ASSUMO LE DENSITÀ UGUALI)

$$\begin{cases} m_1 = \rho V_1 = \rho \pi r^2 h_1 & \Rightarrow \quad h_1 = \dfrac{m_{ICE}}{\rho \pi r^2} \\ m_2 = \rho V_2 = \rho \pi R^2 h_2 & \Rightarrow \quad h_2 = \dfrac{m_{ICE}}{\rho \pi R^2} \end{cases}$$

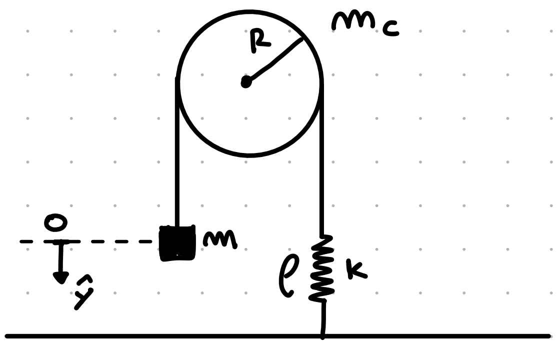
DUNQUE

$$\Delta U = \frac{m_{ICE}^2 g}{2 \rho \pi} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

COSÌ TROVO

$$\boxed{\Delta E = \Delta K + \Delta U = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 + \frac{m_{ICE}^2 g}{2 \rho \pi} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right)}$$

13.4



DETERMINA:
- T
- y_{EQ}

POTREI RISOLVERE IL PROBLEMA STUDIANDO LA DINAMICA (SIMILE ALL'ESERCIZIO 12.4), OPPURE FARE IN UN MODO PIÙ RAPIDO, CALCOLANDO L'ESPRESSIONE DELLA POSIZIONE y DELLA MASSA, TROVO L'ESPRESSIONE DELL'ENERGIA TOTALE E POI DERIVO (IN QUESTO MODO TROVO L'EQUAZIONE DEL MOTO).

CHIAMO L'ENERGIA INIZIALE (DOPO AVER SPOSTATO m DI UN TRATTO y)

$$E_0 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 + mgy + \frac{1}{2} k (y - \ell)^2$$

CONSIDERANDO IL FILO INESTENSIBILE E QUINDI MUOVENDO m DI y LA CARRUCOLA RUOTA DI $\theta = y/R$ E LA MOLLA SI ALLUNGA DI y. È UTILE QUESTA COSA PERCHÉ

$$y = R\theta \xrightarrow{\text{DERIVO}} \frac{dy}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$$

PERMETTENDO DI RISCRIVERE

$$E_0 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4} m_c R^2 \omega^2 + mgy + \frac{1}{2} k (y - \ell)^2$$

$$E_0 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4} m_c v^2 + mgy + \frac{1}{2} k (y-\ell)^2$$

L'ENERGIA SI CONSERVA, PER CUI DERIVANDO NEL TEMPO TROVO:

$$0 = \frac{m}{2} 2v \frac{dv}{dt} + \frac{m_c}{4} 2v \frac{dv}{dt} + mg \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} k 2 (y-\ell) \frac{dy}{dt}$$

$$0 = mv \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} m_c v \frac{dv}{dt} + mgv + kv(y-\ell)$$

SEMPLIFICO v

$$0 = \frac{dv}{dt}\left(m + \frac{m_c}{2}\right) + mg + k(y-\ell)$$

INSERENDO $v = \frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\left(m + \frac{m_c}{2}\right) + mg + k(y-\ell) = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2mg}{2m+m_c} - \frac{2k}{2m+m_c}(y-\ell)}$$

CHE È L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI UN'OSCILLATORE ARMONICO CON FORZA COSTANTE.

TROVO LA POSIZIONE DI EQUILIBRIO

IMPONGO $\frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2k}{2m + m_c}(y - \ell) = -\frac{2mg}{2m + m_c}$

$$\Rightarrow 2k(y - \ell) = -2mg$$

$$\Rightarrow y - \ell = -\frac{mg}{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{EQ} = \ell - \frac{mg}{k}}$$

E POSSO TROVARE IL PERIODO RICAVANDO ω DALLA EDO

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\left[\frac{2mg}{2m + m_c} - \frac{2k\ell}{2m + m_c} - \frac{2k}{2m + m_c} y\right]$$

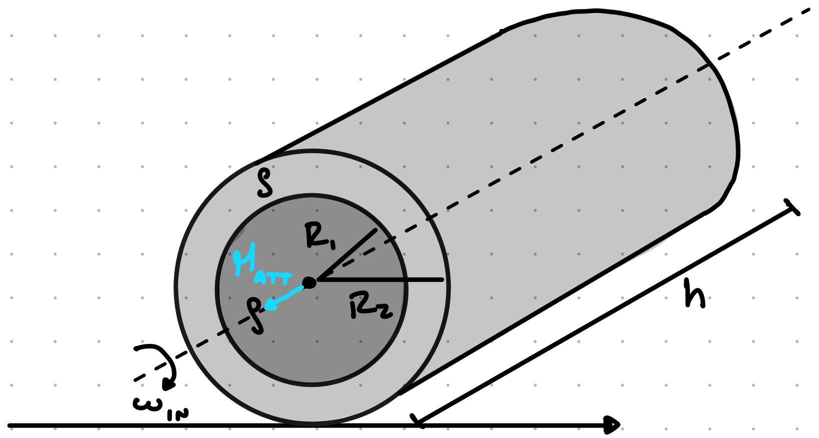
$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2k}{2m + m_c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2k}{2m + m_c}}}$$

IL PERIODO È

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2m + m_c}{2k}}}$$

OSS QUESTO PROCEDIMENTO (DERIVARE IN t L'ENERGIA) È L'APPLICAZIONE DELL'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE IN UN CASO SPECIFICO.

13.5



$M_{ATT} = R_1 F_{ATT}$

ρ

DOPO τ ω_{FIN} ENTRAMBI

DETERMINA:
- K_{IN}
- ω_{FIN}
- ΔE_{ATT}
- τ

HO I SEGUENTI MOMENTI D'INERZIA

INIZIALI
$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 , & m_1 = \rho \pi R_1^2 h \\ I_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 , & m_2 = \rho \pi (R_2 - R_1)^2 h \end{cases}$$

FINALE $I_F = \frac{1}{2} m R_2^2$, $m = \rho \pi R_2^2 h$ (UN UNICO CILINDRO)

L'ENERGIA CINETICA INIZIALE È

$$K_{IN} = \frac{1}{2} I_2 \omega_{IN}^2 = \frac{\omega_{IN}^2}{2} \rho \pi (R_2 - R_1)^2 h R_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{IN} = \frac{1}{2} \pi \rho h \omega_{IN}^2 R_2^2 (R_2 - R_1)^2}$$

MI SCRIVO

$$M_{ATT} = -I\alpha \qquad (\alpha \text{ ED } M_{ATT} \text{ IN VERSO OPPOSTO})$$

$M_{ATT} =$ COSTANTE $\Rightarrow$ $\alpha =$ COST E SO QUINDI SCRIVERE LE LEGGI

$$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad , \quad \omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

VEDO

$$\alpha = -\frac{M_{ATT}}{I}$$

PER CUI PER I DUE CILINDRI AVRÒ

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{M_{ATT}}{I_1} = -R_1 F_{ATT}\dfrac{2}{m_1 R_1^2} = -\dfrac{2F_{ATT}}{\pi \rho h R_1^3} \\ \alpha_2 = -\dfrac{M_{ATT}}{I_2} = -R_1 F_{ATT}\dfrac{2}{m_2 R_2^2} = -\dfrac{2R_1}{R_2^2}F_{ATT}\dfrac{1}{\pi \rho h (R_2 - R_1)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{2F_{ATT}}{\pi \rho h R_1^3} \\ \alpha_2 = -\dfrac{2R_1 F_{ATT}}{\pi \rho h R_2^2 (R_2 - R_1)^2} \end{cases}$$

POSSO TROVARE, PER IL PRIMO CILINDRO AD ESEMPIO

$$\omega(\tau) = \omega_{FIN} = \omega_{01} + \alpha_1 \tau \quad , \quad \omega_{01} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{FIN} = \alpha_1 \tau = -\frac{2F_{ATT}}{\pi \rho h R_1^3} \tau$$

PER IL SECONDO CILINDRO

$$\omega_{FIN} = \omega_{IN} + \alpha_2 \tau = \omega_{IN} - \frac{2R_1 F_{ATT}}{\pi \rho h R_2^2 (R_2 - R_1)^2} \tau$$

EGUAGLIANDOLE TROVO τ

$$\omega_{IN} - \frac{2R_1 F_{ATT}}{\pi \rho h R_2^2 (R_2 - R_1)^2} \tau = -\frac{2F_{ATT}}{\pi \rho h R_1^3} \tau$$

$$\Rightarrow \frac{2F_{ATT}}{\pi \rho h} \left(\frac{R_1}{R_2^2 (R_2 - R_1)^2} - \frac{1}{R_1^3} \right) \tau = \omega_{IN}$$

$$\Rightarrow \frac{2F_{ATT}}{\pi \rho h} \frac{R_1^4 - R_2^2(R_2^2 + R_1^2 - 2R_1R_2)}{R_1^3 R_2^2 (R_2 - R_1)^2} \tau = \omega_{IN}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\pi \rho h \omega_{IN}}{2F_{ATT}} \frac{R_1^3 R_2^2 (R_2 - R_1)^2}{R_1^4 - R_2^4 - R_1^2 R_2^2 + 2R_1 R_2^3}}$$

VERIFICA DIMENSIONALE

$$[\tau] = \frac{Kg\ m^{-3} \cdot m \cdot rad\ s^{-1}}{Kg\ m\ s^{-2}} \frac{m^7}{m^4} = m^{-3}\ s\ m^3 = s \quad \checkmark$$

POTREI DUNQUE ESPLICITARE

$$\omega_{FIN} = \alpha_1 \tau = -\frac{\cancel{2F_{ATT}}}{\cancel{\pi \rho h} \cancel{R_1^3}} \frac{\cancel{\pi \rho h} \omega_{IN}}{\cancel{2F_{ATT}}} \frac{\cancel{R_1^3} R_2^2 (R_2 - R_1)^2}{R_1^4 - R_2^4 - R_1^2 R_2^2 + 2R_1 R_2^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{FIN} = -\frac{R_2^2 (R_2 - R_1)^2}{R_1^4 - R_2^4 - R_1^2 R_2^2 + 2R_1 R_2^3} \omega_{IN}}$$

L'ENERGIA DISSIPATA LA TROVO CON IL TEOREMA DELLE FORZE VIVE

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} I_F \omega_{FIN}^2 - \frac{1}{2} I_2 \omega_{IN}^2$$

$$= \frac{1}{2} m R_2^2 \omega_{FIN}^2 - \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \omega_{IN}^2$$

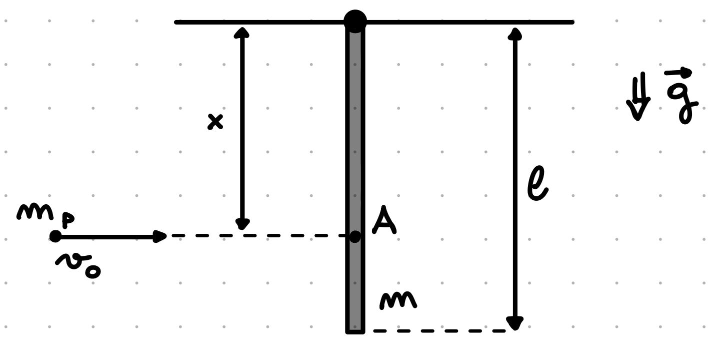
$$= \frac{1}{2} \rho \pi h R_2^4 \omega_{FIN}^2 - \frac{1}{2} \rho \pi R_2^2 (R_2 - R_1)^2 h \omega_{IN}^2$$

$$= \frac{1}{2} \rho \pi h R_2^2 \left(\frac{R_2^6 (R_2 - R_1)^4}{(R_1^4 - R_2^4 - R_1^2 R_2^2 + 2 R_1 R_2^3)^2} - (R_2 - R_1)^2 \right) \omega_{IN}^2$$

$$= \frac{1}{2} \rho \pi h R_2^2 (R_2 - R_1)^2 \left(\frac{R_2^6 (R_2 - R_1)^2}{(R_1^4 - R_2^4 + R_1^2 R_2^2 + 2 R_1 R_2^3)^4} - 1 \right) \omega_{IN}^2$$

exe 14

14.1



DETERMINA:
- x T.C. ω È MAX
- ω_{MAX} E I SUOI LIMITI

RIMANENDO CONFICCATO È UN URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO. COME PER IL PENDOLO BALISTICO PRIMA RISOLVO L'URTO E POI TROVO IL RESTO DELLE COSE (QUOTA MASSIMA, PERIODO DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI ECC.). IN QUESTO CASO È IMPORTANTE NOTARE CHE SI CONSERVA IL MOMENTO ANGOLARE E NON LA QUANTITÀ DI MOTO (PERCHÈ C'È IL VINCOLO = FORZA ESTERNA).

HO

$$L_{IN} = m_p v_0 x \equiv I_0 \omega = L_{FIN}$$

DOVE HO $I_0 = I_{ASTA} + m_p x^2$, $I_{ASTA} = \frac{1}{3} m \ell^2$

DUNQUE

$$m_p v_0 x = \left(\frac{m\ell^2}{3} + m_p x^2\right)\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{3 m_p v_0 x}{m\ell^2 + 3 m_p x^2}}$$

PER TROVARE IL MASSIMO FACCIO

$$\frac{d\omega}{dx} = 0 \implies \frac{3 m_p v_0}{m\ell^2 + 3m_p x^2} - \frac{3 m_p v_0 x}{(m\ell^2 + 3m_p x^2)^2} 6 m_p x = 0$$

$$\implies 3 m_p v_0 = 3 m_p v_0 x \cdot \frac{6 m_p x}{(m\ell^2 + 3 m_p x^2}$$

$$\implies m\ell^2 + 3 m_p x^2 = 6 m_p x^2$$

$$\implies 3 m_p x^2 = m\ell^2 \implies \boxed{x = \sqrt{\frac{m\ell^2}{3m_p}}}$$

VOGLIO SEMPRE, AFFINCHÈ CI SIA URTO, CHE

$$x \in [0, \ell] \implies x = \sqrt{\frac{m}{3m_p}}\,\ell < \ell \implies \boxed{m < 3 m_p}$$

OSSERVAZIONE C'È UN'OSSERVAZIONE IMPORTANTE DA FARE SULLA QUANTITÀ DI MOTO. IN QUESTO PROBLEMA L'IMPULSO NON SI CONSERVA, MA POSSONO CAPITARE CASI IN CUI PER CASUALITÀ I VALORI DELLE GRANDEZZE IN GIOCO SONO TALI PER CUI SI TROVA CHE Δp È COMUNQUE NULLA. VEDIAMO LA VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\Delta p = (m + m_p)\, v_{cm} - m_p v_p$$

PER SCRIVERE v_{cm} MI SERVA x_{cm}:

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_p x + m\frac{\ell}{2}}{m_p + m} = \frac{2m_p x + m\ell}{2(m_p + m)}$$

E AVRÒ $v_{cm} = \omega x_{cm}$, QUINDI

$$\Delta p = (m + m_p)\omega \frac{2m_p x + m\ell}{2(m_p + m)} - m_p v_p$$

VEDO QUAL È LA RELAZIONE PER CUI $\Delta p = 0$. SARÀ UNA CONDIZIONE SULLE MASSE O SULLE LUNGHEZZE, PER CUI

$$x = b\ell \qquad m_p = am \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = (am + m)\omega \frac{2amx + m\ell}{2(am + m)} - amv_p$$

$$\Rightarrow \quad amx\omega + \frac{m\omega\ell}{2} - amv_p = 0$$

$$\omega = \frac{3m_p v_p x}{m\ell^2 + 3m_p x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{2}(\ell + 2ax) \cdot \frac{3amv_p x}{m\ell^2 + 3amx^2} = amv_p$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}(\ell + 2ax)\frac{x}{\ell^2 + 3ax^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x(\ell + 2ax) = \ell^2 + 3ax^2$$

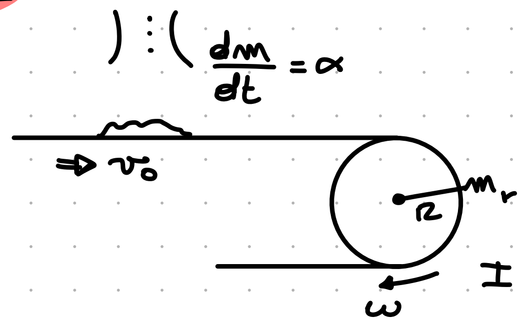
$$\Rightarrow \frac{3}{2}x\ell + 3ax^2 = \ell^2 + 3ax^2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x\ell = \ell^2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}\ell}$$

SE LA DISTANZA DALLA CERNIERE A CUI IL PROIETTILE COLPISCE L'ASTA È $3/2\,\ell$ ALLORA SI TROVA CHE $\Delta p = 0$ ANCHE SE SO CHE p NON SI CONSERVA.

NOTA VEDI P. 235 - 236 MAZZOLDI

14.2



$I_r = m_r R^2$

DETERMINA : • M_r , P_r

• τ T.C. $v = v_0/2$

DOVENDO TROVARE $\vec{M}$ POSSO USARE LA 2° EQUAZIONE CARDINALE. SCRIVO $\vec{L}$ E DERIVO IN t. $\vec{L}$ AVRÀ CONTRIBUTO DALLA SABBIA E DALLA RUOTA

$$L = mvR + I_r \omega \qquad \text{(ENTRANTE)}$$

HO LA RELAZIONE $x = R\theta$ ESSENDO IL NASTRO RIGIDO

$$\Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta} \Rightarrow v = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$$

COSì HO

$$L = mvR + I_r \frac{v}{R}$$

DERIVO

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dm}{dt} vR + m\frac{dv}{dt} R + \frac{I_r}{R}\frac{dv}{dt}$$

USO $\frac{dm}{dt} = \alpha$

$$\frac{dL}{dt} = \alpha v R + \frac{dv}{dt}\left(mR + \frac{I_r}{R}\right)$$

E QUESTO È IL MOMENTO GENERICO

$$M_{EXT} = \alpha v R + \frac{dv}{dt}\left(mR + \frac{I_r}{R}\right)$$

SE VOGLIO IL MOMENTO DA APPLICARE PER AVERE $v = v_0 = \text{COST}$ HO

$$\boxed{M_{EXT} = \alpha v_0 R}$$

LA POTENZA LA CALCOLAVO COME $\vec{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ IN DINAMICA, ORA AVRÒ L'ANALOGO PER IL CORPO RIGIDO

$$\vec{P} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow P = M_{EXT}\,\omega = \alpha v_0 R \omega = \alpha v_0 R \frac{v_0}{R} \Rightarrow \boxed{P = \alpha v_0^2}$$

DOBBIAMO MOSTRARE CHE QUESTA POTENZA NON VIENE SPESA TUTTA IN AUMENTO DI ENERGIA CINETICA DEL SISTEMA.
M. SCRIVO L'ENERGIA CINETICA

$$K = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_r \omega^2$$

AVENDO $\frac{dm}{dt} = \alpha \Rightarrow m = \alpha t$

QUINDI

$$K = \frac{1}{2}\alpha v_0^2 t + \frac{1}{2} I_r \omega^2$$

POSSO A QUESTO PUNTO VEDERE QUANT'È LA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\alpha v_0^2$$

E VEDO CHE $\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}P$, DUNQUE METÀ DI P SERVE A MANTENERE L'ENERGIA CINETICA E L'ALTRA METÀ LA DISSIPO NELL'URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO CHE INDIVIDUO QUANDO LA SABBIA CADE SUL NASTRO.

PER L'ULTIMA PARTE NON HO PIÙ M_{EXT} CHE È $=0$ E USO LA SUA ESPRESSIONE GENERICA PER RISPONDERE ALLA DOMANDA

$$0 = \alpha v R + \frac{dv}{dt}\left(\alpha t R + \frac{I_r}{R}\right)$$

$$\frac{dv}{dt}\left(\alpha R t + \frac{I_r}{R}\right) = -\alpha v R$$

$$-\frac{dv}{\alpha R v} = \frac{dt}{\frac{m_r R^2}{R} + \alpha R t} \Rightarrow \frac{dv}{\alpha R v} = -\frac{dt}{m_r R + \alpha R t} \Rightarrow \frac{dv}{\alpha v} = -\frac{dt}{m_r + \alpha t}$$

$$\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{m_r + \alpha t}{m_r + \alpha t_0}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 \frac{m_r + \alpha t_0}{m_r + \alpha t}}$$

IO VOGLIO τ TC $v(\tau) = \frac{v_0}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{m_r + \alpha t_0}{m_r + \alpha \tau} \Rightarrow m_r + \alpha\tau = 2m_r + 2\alpha t_0$$

$$\alpha\tau = m_r + 2\alpha t_0 \Rightarrow \tau = \frac{m_r}{\alpha} + 2t_0$$

IL TEMPO IN CUI LA v PASSA DA v_0 A $v_0/2$ È

$$\boxed{\Delta t = \tau - t_0 = \frac{m_r}{\alpha} + t_0}$$

MA NOTA CHE SI SAREBBE POTUTO FARE PIÙ VELOCEMENTE USANDO LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

$$L = mvR + I_r\omega = mvR + m_r R v$$

IMPONGO $L_{IN} = L_{FIN}$ E TROVO

$$m(t_0)v_0 R + m_r R v_0 = m(\tau)\frac{v_0}{2}R + m_r R\frac{v_0}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha t_0 v_0 + \frac{1}{2}m_r v_0 = \alpha\tau\frac{v_0}{2}$$

$$\Rightarrow \tau = 2t_0 + \frac{m_r}{\alpha}$$ COME SOPRA

E QUINDI

$$\Delta t = \tau - t_0 = \frac{m_r}{\alpha} + t_0$$

NOTA L SI CONSERVA POICHÈ $\frac{dL}{dt} = M_{EXT} = 0 \Rightarrow L = \text{cost}$.

OSSERVAZIONE IN ALCUNI CASI POSSO SCRIVERE

$$L = I\omega$$

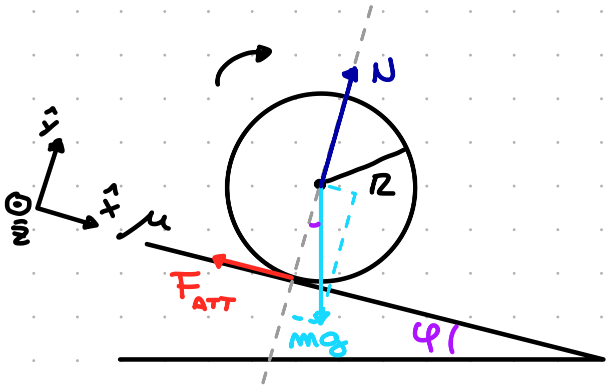
CHE DERIVANDOLO MI DA

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dI}{dt}\omega + I\frac{d\omega}{dt}$$

CHE È UN' ESPRESSIONE GENERALE E UN SUO CASO PARTICOLARE QUANDO $I = \text{cost}$ NEL TEMPO È LA NOTA

$$M_{EXT} = \frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt}$$

14.3



DETERMINA : • φ T.C. PURO ROTOLAMENTO

MI SCRIVO LE EQUAZIONI CARDINALI

$$\begin{cases} \vec{F}_{EXT} = m\vec{a} \\ \vec{M}_{EXT} = I\alpha\hat{z} \end{cases}$$

LA PRIMA EQUAZIONE CARDINALE È SUGLI ASSI $\hat{x}$ E $\hat{y}$ MENTRE LA 2° È LUNGO $\hat{z}$. SCOMPONGO LA 1° E SCRIVO M_{EXT} RISPETTO L'ASSE DEL CILINDRO

$$\begin{cases} mg\sin\varphi - F_{ATT} = ma_x \\ N - mg\cos\varphi = 0 \\ -F_{ATT}R = -I\alpha \end{cases}$$

NOTA SOLITAMENTE CONVIENE SCEGLIERE COME POLO IL PUNTO DI CONTATTO COSÌ MI TOLGO F_{ATT} DALLE EQUAZIONI, MA STA VOLTA CONVIENE PRENDERE L'ASSE DI SIMMETRIA (LÁ POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA) VISTO CHE F_{ATT} È PROPRIO L'INCOGNITA.

SCEGLIENDO IL CM COME POLO HO $I = I_{cm}$ $a_x = a_{cm}$ E VOLENDO IL PURO ROTOLAMENTO VALE

$$v_{cm} = \omega R \Rightarrow a_{cm} = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a_{cm}}{R}$$

$$\begin{cases} mg\sin\varphi - F_{ATT} = m a_{cm} \\ N = mg\cos\varphi \\ F_{ATT} = \dfrac{I_{cm}}{R^2} a_{cm} \end{cases} , \quad \begin{cases} mg\sin\varphi - \dfrac{I_{cm}}{R^2} a_{cm} = m a_{cm} \\ N = mg\cos\varphi \\ F_{ATT} = \dfrac{I_{cm}}{R^2} a_{cm} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{cm}\left(m + \frac{I_{cm}}{R^2}\right) = mg\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{mgR^2\sin\varphi}{mR^2 + I_{cm}}}$$

POSSO TROVARE LA FORZA D'ATTRITO

$$\boxed{F_{ATT} = \frac{mg I_{cm}\sin\varphi}{mR^2 + I_{cm}}}$$

NOTA QUESTO PROBLEMA È UN CLASSICO ESEMPIO DI QUELLA TIPOLOGIA DI PROBLEMI, IN CUI LA FORZA D'ATTRITO LA SI TROVA A POSTERIORI E NON È μN.

POSSO TROVARE LA CONDIZIONE SULL'ANGOLO ORA, SCRIVENDO

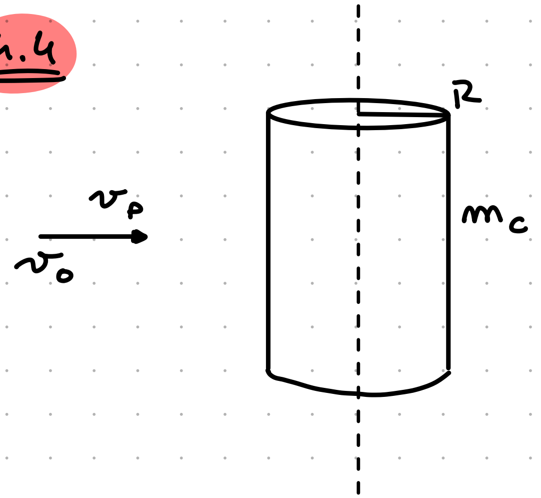
$$F_{att} < N\mu \Rightarrow \frac{mg\, I_{cm} \sin\varphi}{mR^2 + I_{cm}} < mg\mu\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\varphi < \frac{\mu(mR^2 + I_{cm})}{I_{cm}}}$$

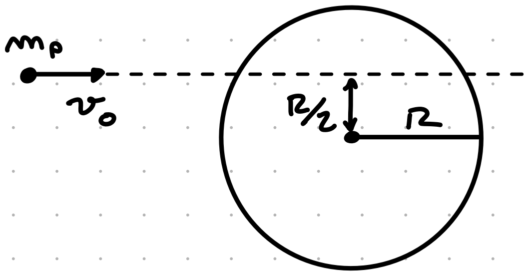
PER VALORI DI φ MAGGIORI HO CHE IL CORPO ROTOLA E STRISCIA.

ALLA DOMANDA "COME CAMBIA a_{cm} SE AL POSTO DI UN CILINDRO METTO UN ANELLO CON STESSA m ED R" RISPONDO DICENDO CHE CAMBIA SOLO PER IL FATTORE NUMERICO CHE C'È DI DIFFERENZA TRA I MOMENTI D'INERZIA DEL CILINDRO E DEL DISCO, OSSIA, 1/2.

11.4



ALTO :



$$\frac{dm}{dt} = 2kt \quad , \quad k \in \mathbb{R}_+$$

DETERMINA :

- ω_0 CON CUI GIRA
- $\frac{\Delta K}{K_{IN}}$
- τ TC $\omega(\tau) = 2\omega_0$

IL FATTO CHE IL PROIETTILE RIMANGA SULLA SUPERFICIE MI SARÀ UTILE PER IL CALCOLO DEL MOMENTO D'INERZIA, MENTRE IL FATTO CHE È A R/2 DALL'ASSE MI SERVE PER IL MOMENTO ANGOLARE. FONDAMENTALE ANCHE IL FATTO CHE LA SABBIA PUR DIMINUENDO RIMANGA DI FORMA CILINDRICA E CHE ESCA IN DIREZIONE RADIALE, POICHÈ COSÌ LA VELOCITÀ DI USCITA (E L'IMPULSO) È // ALLA COORDINATA $\hat{r}$ E QUINDI USCENDO LA SABBIA NON SI PORTA VIA MOMENTO ANGOLARE.

PER TROVARE ω_0 APPLICO LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

$$m_p v_0 \frac{R}{2} = I\omega_0 \qquad \text{CON} \qquad I = \frac{1}{2} m R^2 + m_p R^2$$

$$\Rightarrow m_p v_0 \frac{R}{2} = \left(\frac{1}{2} m R^2 + m_p R^2\right)\omega_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{2} \frac{m_p v_0 R}{I_c + m_p R^2}}$$

$$\Rightarrow \quad m_p v_0 \frac{R}{2} = \frac{1}{2} R^2 (m + 2m_p)\,\omega_0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \frac{m_p v_0}{R(m+2m_p)}}$$

ORA ΔK CALCOLO

$$\Delta K = \frac{1}{2} I \omega_0^2 - \frac{m_p}{2} v_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2 + m_p R^2\right)\omega_0^2 - \frac{m_p}{2} v_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} m R^2 + m_p R^2\right)\omega_0^2 - m_p v_0^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(I_c + m_p R^2\right)\frac{1}{4}\frac{m_p^2 v_0^2 R^2}{(I_c + m_p R^2)^2} - m_p v_0^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} v_0^2 m_p \left[\frac{1}{4}\frac{m_p R^2}{(I_c + m_p R^2)} - 1\right]$$

HO $K_{IN} = \frac{1}{2} m_p v_0^2$

PER CUI $\boxed{\frac{\Delta K}{K_{IN}} = \frac{1}{4}\frac{m_p R^2}{(I_c + m_p R^2)} - 1}$

PER TROVARE τ T.C. $\omega(\tau) = \omega_0/2$ USO LA SECONDA EQUAZIONE CARDINALE E dm/dt. VISTO CHE $dm/dt \neq 0$ IL MOMENTO D'INERZIA DEVE CAMBIARE (DIMINUISCE VISTO CHE m DIMINUISCE) E LA ω DEVE AUMENTARE AFFINCHÈ L SI CONSERVI.

HO
$$L = I\omega = \left(I_c + m_p R^2\right)\omega$$
$$= \left(\frac{1}{2} m R^2 + m_p R^2\right)\omega$$

DERIVO
$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}R^2\omega + \left(\frac{1}{2} m R^2 + m_p R^2\right)\frac{d\omega}{dt}$$

OSS PER EVITARE DI DOVER SEMPLIFICARE BRUTALMENTE I dt A DENOMINATORE AL POSTO DI DERIVARE DIFFERENZIO

$$dL = \frac{1}{2} dm R^2 \omega + \left(\frac{1}{2} m R^2 + m_p R^2\right) d\omega$$

SO CHE HO CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE (NON AGISCONO FORZE ESTERNE) PER CUI HO

$$\frac{1}{2} dm R^2 \omega + \left(\frac{1}{2} m R^2 + m_p R^2\right) d\omega = 0$$

CHE È UN'EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI. RICORDO CHE HO
$$\frac{dm}{dt} = -2kt \Rightarrow dm = -2kt\,dt \Rightarrow m = m_c - kt^2$$

$$\frac{1}{2} 2kt\omega R^2 dt = -\left(\frac{1}{2} m_c R^2 - \frac{1}{2} k t^2 R^2 + m_p R^2\right) d\omega$$

$$\Rightarrow kt\omega R^2 dt = -\left(\frac{1}{2} m_c R^2 + m_p R^2 - \frac{1}{2} k R^2 t^2\right) d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{R^2 k t\, dt}{\frac{1}{2} m_c R^2 + m_p R^2 - \frac{1}{2} k R^2 t^2} = -\frac{d\omega}{\omega}$$

$$\Rightarrow -\int \frac{k R^2 t\, dt}{\frac{1}{2} m_c R^2 + m_p R^2 - \frac{1}{2} k R^2 t^2} = -\ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\frac{1}{2} m_c R^2 + m_p R^2 - \frac{1}{2} k R^2 t^2}{\frac{1}{2} m_c R^2 + m_p R^2}\right) = \ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega(t) = \omega_0 \frac{m_c + 2m_p - kt^2}{m_c + 2m_p}}$$

CHIEDO $\omega(\tau) = \frac{\omega_0}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{m_c + 2m_p - k\tau^2}{m_c + 2m_p}$

$$\frac{1}{2} m_c + m_p = m_c + 2m_p - k\tau^2$$

$$\Rightarrow k\tau^2 = \frac{1}{2} m_c + m_p$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = \sqrt{\frac{m_c + 2m_p}{2k}}}$$

VEDO CHE τ NON DIPENDE DA ω_0. IL MOTIVO È PERCHÈ GIÀ SO CHE $\omega(\tau)$ È UNA FRAZIONE DI ω_0 E SO GIÀ CHE SI SEMPLIFICHERÀ.

<u>NOTA</u> AL POSTO DI TROVARE $\omega(t)$ E POI RICAVARE τ IN AULA ABBIAMO IMPOSTO LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

$$I(t)\,\omega(t) = I_0\,\omega_0$$

CON
$$I(t) = I_c(t) + m_p R^2 = \frac{1}{2} m(t) R^2 + m_p R^2$$

$$I_0 = I_c + m_p R^2 = \frac{1}{2} m_c R^2 + m_p R^2$$

$$m(t) = m_c - kt^2$$

SOSTITUENDO

$$\left(\frac{1}{2} m_c R^2 - \frac{1}{2} k t^2 R^2 + m_p R^2\right) \omega(t) = \left(\frac{1}{2} m_c R^2 + m_p R^2\right) \omega_0$$

METTENDO $\omega(t) = \omega(\tau) = \omega_0/2$ E $t = \tau$ POSSO RICAVARE τ.

14.5 È IMPORTANTE VEDERE LA PARTE DI TEORIA SULL' <u>ENERGIA PROPRIA</u> O VEDI ES 7.2 DEL LIBRO DI MASSARO.