Esercizi

Meccanica

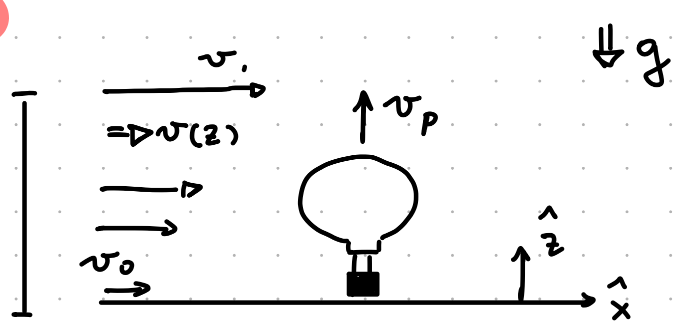
ESERCIZI a.a. 2021-2022

ARGOMENTI :

- exe 1, 2, 3 — CINEMATICA
- exe 4, 5, 6 — LEGGI DELLA DINAMICA
- exe 7 — LAVORO ED ENERGIA
- exe 8, 9 — SISTEMI DI RIFERIMENTO
- exe 10, 11, 12, 13, 14 — CORPO RIGIDO
- exe 15 — GRAVITAZIONE

exe 8

8.1



$$v(z) = a + bz$$

$$v_0 = 18 \text{ km/h}$$

$$h = 100 \text{ m}$$

$$v(h) = v_1 = 36 \frac{\text{km}}{h}$$

$$v_{p_z} = 9 \text{ km/h} \qquad v_{p_x} = v(z)$$

DETERMINA :

- a, b
- $z(x)$
- $x = \ell = 100$ m TROVA (x, z)
- $(x, z)(t)$ MA ANCHE CON $\vec{a} = \frac{3}{4} g \,\vec{z}$

TROVO a E b IMPONENDO $v(0) = v_0$ E $v(h) = v_1$

$$\begin{cases} v(0) = v_0 = a \\ v(h) = v_1 = a + bh \end{cases} ; \quad \begin{cases} a = v_0 \\ b = \dfrac{v_1 - v_0}{h} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 18 \frac{\text{km}}{h} \; ; \; b = 0{,}18 \ 1/s}$$

DUNQUE IL PALLONE HA

$$\vec{v}(x, z) = v_x \hat{x} + v_z \hat{z} = (a + bz)\hat{x} + v_p \hat{z}$$

$v_z = v_p$ POICHÈ IL TESTO MI DICE CHE È COSTANTE LUNGO Z (L'EFFETTO DI g È QUINDI GIÀ CONSIDERATO).

SO

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_0^t (a + bz)\,dt \\ z(t) = \displaystyle\int_0^t v_p\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_0^t (a + b v_p t)\,dt \\ z(t) = v_p t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = at + \dfrac{b v_p}{2} t^2 \\ z(t) = v_p t \end{cases}$$

PER TROVARE LA TRAIETTORIA:

$$\frac{b v_p}{2} t^2 + at - x = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2 b x v_p}}{b v_p}$$

PRENDO LA SOLUZIONE CON IL + (È POSITIVA)

$$\Rightarrow z(x) = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2 b x v_p}}{b}$$

$$\Rightarrow z(x) = -v_0 \frac{h}{v_1 - v_0} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 2 \frac{x v_p}{b}}$$

$$\Rightarrow \boxed{z(x) = -\frac{v_0 h}{v_1 - v_0} + \sqrt{\frac{v_0^2 h^2}{(v_1 - v_0)^2} + \frac{2 x v_p h}{v_1 - v_0}}}$$

SUL LIBRO PENSO SIA UN ERRORE, A LEZIONE (ESERCITAZIONE 2022_03_08) IL RISULTATO È QUESTO

METTO $x = \ell$ E TROVO

$$z(\ell) \equiv \tilde{z} = -\frac{v_0 h}{v_1 - v_0} + \sqrt{\frac{v_0^2 h^2}{(v_1 - v_0)^2} + \frac{2 \ell v_p h}{v_1 - v_0}}$$

QUINDI DOPO AVER PERCORSO $x = \ell$ IL PALLONE SI TROVA IN

$$\boxed{(x = \ell \; , \; z = \tilde{z})}$$

POSSO TROVARE $(x, z)(t)$ CON IL METODO USATO SOPRA, MA MODIFICANDO v_z:

$$v_z = v_p + \frac{3}{4} g t - g t = v_p - \frac{g}{4} t$$

DUNQUE

$$\begin{cases} dx = v_x \, dt \\ dz = v_z \, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \int (a + b z(t)) \, dt \\ z(t) = v_p t - \frac{g}{8} t^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = at + b\int_0^t \left(v_p t - \frac{g}{8}t^2\right) dt$$

$$= at + \frac{bv_p}{2}t^2 - \frac{bg}{24}t^3$$

$$= v_0 t + \frac{v_p(v_1 - v_0)}{2h}t^2 - \frac{(v_1 - v_0)g}{24h}t^3$$

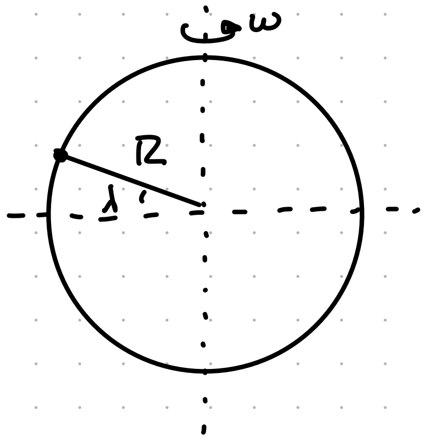
QUINDI

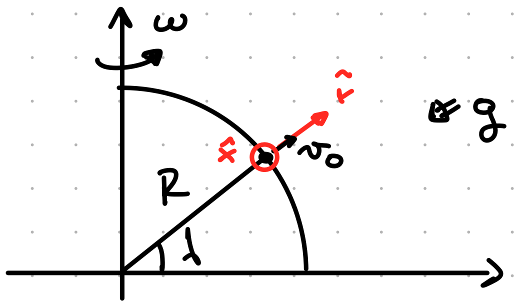
$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t + \dfrac{v_p(v_1 - v_0)}{2h}t^2 - \dfrac{(v_1 - v_0)g}{24h}t^3 \\[2ex] z(t) = v_p t - \dfrac{g}{8}t^2 \end{cases}}$$

8.2 $\vec{v} = v_0 \hat{y}$ TERRA : $\omega = \text{cost}$, g

LATITUDINE λ NO ATTRITI

DETERMINA : $\bullet$ X DOVUTO A $\vec{a}_c$

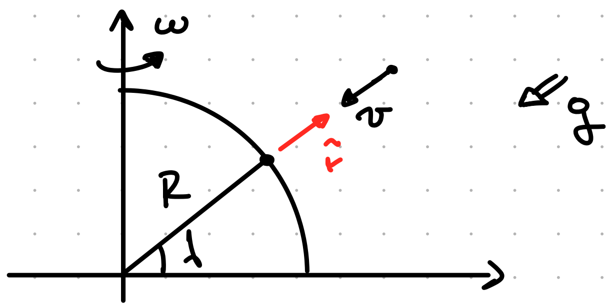




SO $\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v}$

DUNQUE $\vec{a}_c$ USCENTE DAL FOGLIO, OSSIA DIRETTO LUNGO $\hat{x}$.

DEVO PERÒ CONSIDERARE IL FATTO CHE IL PALLONE SALE E POI RISCENDE, MA SALE CON v_0 E RISCENDE CON $v_{0y} = 0$, QUINDI NON C'È SIMMETRIA E NON POSSO CALCOLARE SOLO IL PEZZO DI SALITA E MOLTIPLICARE PER 2_0

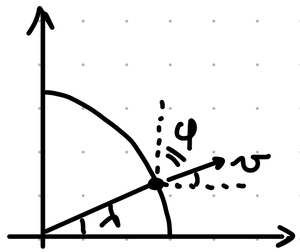


IL TEMPO DI VOLO, PER SALIRE È : $v(\tau) = v_0 - g\tau \Rightarrow \tau = \dfrac{v_0}{g}$

CALCOLO IL MODULO DI a_c :

$$a_c = 2\omega v \sin\varphi$$

CON $v = v(t)$ $\qquad \varphi = \frac{\pi}{2} - \lambda$



DUNQUE $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \cos\lambda$

$$a_c = 2\omega v(t) \cos\lambda$$

MA SO BENE $v(t) = v_0 - gt$, QUINDI

$$a_c = 2\omega (v_0 - gt) \cos\lambda$$

AVENDO L'ACCELERAZIONE (LUNGO $\hat{x}$) POSSO TROVARE VELOCITÀ E LEGGE ORARIA LUNGO $\hat{x}$:

$$\begin{cases} v_x(t) = \int_0^t a_c(t)\,dt = 2\omega\left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right)\cos\lambda \\ x(t) = \int_0^t v_x(t)\,dt = 2\omega\left(\frac{v_0}{2}t^2 - \frac{g}{6}t^3\right)\cos\lambda \end{cases}$$

SE ORA METTO $t = \tau = v_0/g$ IL TEMPO DI SALITA TROVO QUANTO SI È SPOSTATO LUNGO x NELLA SALITA.

$$x(\tau) = 2\omega\left(\frac{v_0}{2}\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{g}{6}\frac{v_0^3}{g^3}\right)\cos\lambda = \left(\frac{v_0^3}{g^2}\omega - \frac{v_0^3}{3g^2}\omega\right)\cos\lambda$$

CONTROLLO

$$\left[\frac{v_0^3}{g^2}\omega\right] = \frac{m^3}{s^3}\frac{s^4}{m^2}\frac{1}{s} = m$$

PER CUI

$$\boxed{x(\tau) = x_{SALITA} = \frac{2}{3}\frac{v_0^3}{g^2}\omega\cos\lambda}$$

BISOGNA FARE I CONTI PER LA DISCESA.

$$v_{0d} = 0 \ m/s \quad \Rightarrow \quad v_d(t) = -gt$$

MA IN GENERALE $\vec{v} = -v\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{v}$

IN MODULO

$$a_c = 2\omega v(t)\cos\lambda = -2\omega g t\cos\lambda$$

COME PRIMA

$$\int_{v_x(\tau)}^{v_x} dv_x' = -2\omega g\cos\lambda\int_0^t t'dt'$$

$$v_x(t) = v_x(\tau) - 2\omega g \cos\lambda \frac{t^2}{2}$$

$$\int_{x(\tau)}^{x(t)} dx' = \int_0^{\tau} v_x(t')dt'$$

INTEGRO TRA 0 E τ PERCHÈ COMUNQUE IL TEMPO IN CUI SCENDE È IL TEMPO IN CUI SALE

$$x(t) = x(\tau) + v_x(\tau)\tau - 2\omega g \frac{\tau^3}{6}\cos\lambda$$

AL $t=\tau$ DALLE RELAZIONI DI PRIMA TROVO:

$$x(\tau) = \frac{2}{3}\frac{v_0^3}{g^2}\omega\cos\lambda$$

$$v(\tau) = 2\frac{\omega v_0^2}{g}\cos\lambda - \frac{\omega v_0^2}{g}\cos\lambda = \frac{\omega v_0^2}{g}\cos\lambda$$

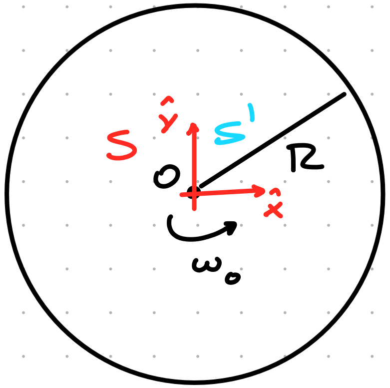
COSÌ HO

$$x_f(\tau) = \frac{2}{3}\frac{v_0^3}{g^2}\omega\cos\lambda + \frac{\omega v_0^2}{g}\cos\lambda\,\tau - \frac{1}{3}\omega g \tau^3\cos\lambda$$

$$= \frac{v_0^3}{g^2}\omega\cos\lambda\left(\frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_f = \frac{4}{3}\frac{v_0^3}{g^2}\omega\cos\lambda}$$

8.3



SR BAMBINO IN O : S' (NON INERZIALE)

$t=0$ LANCIA UNA PALLA CON $v_0 = \frac{R\omega_0}{2}$

SR MAMMA FUORI DA C_R : S (INERZIALE)

S VEDE PALLA CON MRU DECELLERATO

$v(R) = 0$

DETERMINA :
- m GIRI IN τ CHE LA PALLA RAGGIUNGE IL BORDO
- IN S' $\vec{a}$ QUANDO È A METÀ PERCORSO

DA $v_0 = \frac{\omega_0 R}{2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2v_0}{R}$

POSSO LAVORARE IN S, TROVARE CIÒ CHE MI INTERESSA, FARE LA TRASFORMAZIONE DEL SR E ANDARE NEL SISTEMA S' PER TROVARE IL RESTO.

INDICO LE GRANDEZZE DI S SENZA APICE E DI S' CON GLI APICI.

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + at \\ x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

(IMPLICITO IL SEGNO DI a)

POSSO TROVARE IL TEMPO IN CUI SI FERMA:

$$v(\tau) = 0 = v_0 + a\tau \Rightarrow \tau = -\frac{v_0}{a}$$

$$x(\tau) = R = -\frac{v_0^2}{a} + \frac{a}{2}\frac{v_0^2}{a^2} = -\frac{v_0^2}{a} + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}$$

$$\Rightarrow R = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{R}}$$

PER CUI

$$\boxed{\tau = \frac{2R}{v_0}}$$

SAPENDO CHE $\omega_0 = \text{COST}$ POSSO SCRIVERE

$$\theta(t) = \omega_0 t$$

E POSSO CALCOLARE A $t = \tau$ QUANTI GIRI HA FATTO

$$\theta(\tau) = \omega_0 \tau = n 2\pi \Rightarrow n = \frac{\omega_0}{2\pi}\frac{2R}{v_0}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\omega_0 R}{\pi v_0} \qquad \left(\omega_0 = \frac{2v_0}{R}\right) \Rightarrow \boxed{n = \frac{2}{\pi}}$$

A QUESTO PUNTO PERÒ DEVO ANDARE IN S'.

CONOSCO LA TRASFORMAZIONE DA FARE:

$$\vec{a}'(P) = \vec{a}(P) - \vec{a}(O) - \dot{\vec{\omega}} \times (\overline{O'P}) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_s(P)$$

NEL NOSTRO CASO $\vec{a}(O) = 0$

$$\dot{\vec{\omega}} = 0$$

DUNQUE $(O'P) \equiv \vec{r}$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{CENTRIFUGO}} - \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{CORIOLIS}}$$

SERVE ANCHE

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}$$

SOSTITUISCO $\vec{v}'$ IN $\vec{a}'$:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times (\vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= \vec{a} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v} + 2\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}' = \vec{a} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}$$

A METÀ PERCORSO HO:

$$\vec{a}'_{1/2} = \vec{a}_{1/2} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{1/2}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{1/2}$$

DOVE a, r, v SONO NEL SR S, PER CUI SONO

$$\| \quad \vec{r}_{1/2} = \frac{R}{2}\hat{x}$$

$$\| \quad \vec{a}_{1/2} = a\hat{x} = -\frac{v_0^2}{2R}\hat{x}$$

$\vec{v}_{1/2}$ LO POSSO RICAVARE FACILMENTE

$$v_{1/2}^2 - v_0^2 = 2a(r_{1/2} - r_0) \Rightarrow v_{1/2}^2 = v_0^2 + aR$$

$$\Rightarrow v_{1/2}^2 = v_0^2 - \frac{v_0^2}{2} = v_0^2/2$$

$$\| \quad \vec{v}_{1/2} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

ORA POSSIAMO FARE I PRODOTTI ESTERNI

$$\vec{a}'_{1/2} = -\frac{v_0^2}{2R}\hat{x} + \omega_0^2 \frac{R}{2}\hat{z} \times (\hat{z} \times \hat{x}) - 2\omega_0 \frac{v_0}{\sqrt{2}}\hat{z} \times \hat{x}$$

$$\Rightarrow \vec{a}'_{1/2} = -\frac{v_0^2}{2R}\hat{x} + \frac{4v_0^2}{R^2}\frac{R}{2}\hat{z}\times\hat{y} - 2\frac{2v_0}{R}\frac{v_0}{\sqrt{2}}\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{a}'_{1/2} = -\frac{v_0^2}{2R}\hat{x} - \frac{2v_0^2}{R}\hat{x} - \frac{4v_0^2}{\sqrt{2}R}\hat{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}'_{1/2} = -\frac{5v_0^2}{2R}\hat{x} - 2\sqrt{2}\frac{v_0^2}{R}\hat{y}}$$

DEVO ANCORA CAMBIARE PERÒ $\hat{x}$ ED $\hat{y}$. $\hat{x}'$ ED $\hat{y}'$ STANNO RUOTANDO CON VELOCITÀ ω_0, DUNQUE LA ROTAZIONE È NOTA, MA MI SERVE L'ANGOLO DI CUI SONO RUOTATI QUANDO È ARRIVATO AD $R/2$.

$$\theta_{1/2} = \omega_0 t_{1/2}$$

con $\quad v(t_{1/2}) = v_0 + a t_{1/2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{v_{1/2} - v_0}{a} = \frac{\frac{v_0}{\sqrt{2}} - v_0}{a} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)v_0}{a}$

$$\Rightarrow t_{1/2} = (\sqrt{2} - 2)\frac{v_0}{2}\cdot\left(-\frac{2R}{v_0^2}\right) = \frac{(2-\sqrt{2})R}{v_0}$$

NOTA $t_{1/2}$ L'HO SCRITTO COSÌ PERCHÈ IL TEMPO È UNIVERSALE IN RELATIVITÀ GALILEIANA. COSA DIVERSA SARÀ NELLA RELATIVITÀ SPECIALE DI EINSTEIN.

LA ROTAZIONE LA SCRIVO COME

$$\begin{cases} \hat{x} = \cos\theta_{1/2}\,\hat{x}' - \sin\theta_{1/2}\,\hat{y}' \\ \hat{y} = \sin\theta_{1/2}\,\hat{x}' + \cos\theta_{1/2}\,\hat{y}' \end{cases} \qquad \theta_{1/2} = \frac{(2-\sqrt{2})R}{v_0}\cdot\frac{2v_0}{R} = 2(2-\sqrt{2})$$

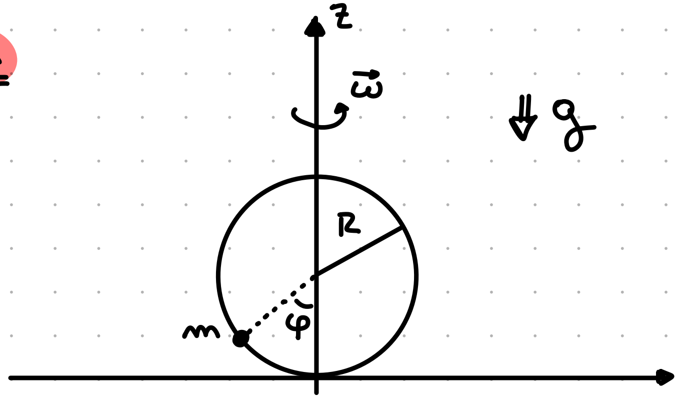
SOSTITUISCO E CONCLUDO

$$\vec{a}' = -\frac{5v_0^2}{2R}\left(\cos\theta_{1/2}\,\hat{x}' - \sin\theta_{1/2}\,\hat{y}'\right) - 2\sqrt{2}\,\frac{v_0^2}{R}\left(\sin\theta_{1/2}\,\hat{x}' + \cos\theta_{1/2}\,\hat{y}'\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered}\vec{a}' = \left(-\frac{5v_0^2}{2R}\cos\theta_{1/2} - 2\sqrt{2}\,\frac{v_0^2}{R}\sin\theta_{1/2}\right)\hat{x}' + \left(\frac{5v_0^2}{2R}\sin\theta_{1/2} - 2\sqrt{2}\,\frac{v_0^2}{R}\cos\theta_{1/2}\right)\hat{y}' \\ \theta_{1/2} = 4 - 2\sqrt{2}\end{gathered}}$$

exe 9

9.1



DETERMINA:
- LA POSIZIONE DI EQUILIBRIO
- PERIODO DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI

SULLA MASSA m AGISCONO . FORZA PESO, REAZIONE VINCOLARE E FORZA CENTRIFUGA (NEL S.R. NON INERZIALE DELLA MASSA m)

INDICHIAMO: S' S.R. NON INERZIALE
S S.R. INERZIALE DELL'OSSERVATORE ESTERNO

CONOSCO LA LEGGE DI TRASFORMAZIONE:

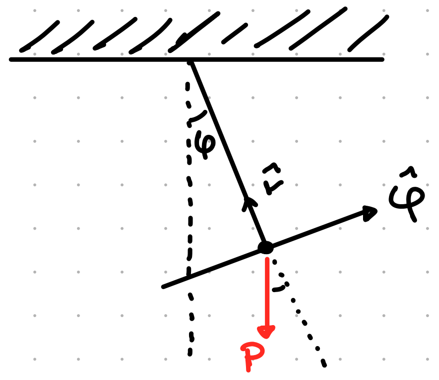
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}$$

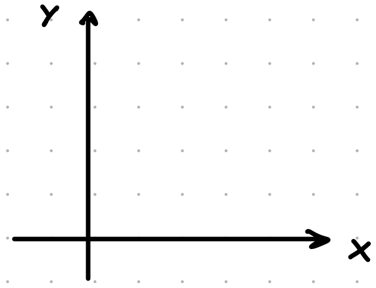
E NOTO CHE $\vec{r}' = \vec{r}$, $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$

$$\vec{r}' = \vec{r} = cost \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} = 0$$

SCELGO DI INDICARE L'ANGOLO φ RISPETTO LA VERTICALE.

VISTA LA PRIMA RICHIESTA (E LA SECONDA) CONVIENE SCEGLIERE IL SR INTRINSECO COSÌ DA LAVORARE PIÙ COMODAMENTE:





E POSSO SCRIVERE LE EQUAZIONI DEL MOTO

$$\begin{array}{l} \hat{\varphi} \\ \hat{r} \end{array} \begin{cases} m a_\varphi = -mg \sin\varphi \\ m a_r = -mg\cos\varphi + N \end{cases}$$

QUELLO CHE MI INTERESSA È SOLO LA $\varphi(t)$ CHE TROVO DALLA PRIMA RIGA. RICORDO

$$\begin{cases} a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \\ a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_\varphi = r\ddot{\varphi} \\ a_r = -r\dot{\varphi}^2 \end{cases}$$

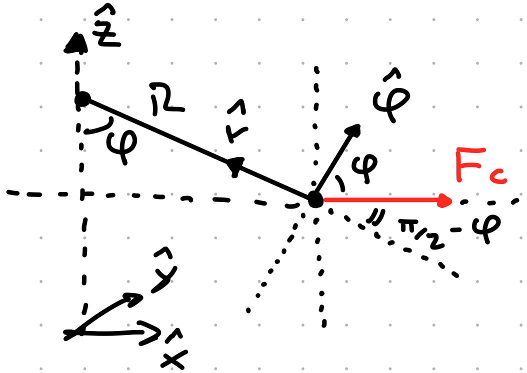
MA VOGLIO STUDIARE SOLO a_φ E SCRIVO

$$a_\varphi = \hat{\varphi} \cdot \vec{a} = r\ddot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad m a_\varphi = m r \ddot{\varphi}$$

MI SERVIRÀ POI IL TERMINE CENTRIPETO

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \omega^2 \hat{z} \times (\hat{z} \times \vec{r})$$

LA VEDO:



LA FORZA CENTRIFUGA È

$$\vec{F}_c = m\omega^2 \underbrace{R \sin\varphi}_{\text{DISTANZA DALL'ASSE DI ROTAZIONE}} \hat{x}$$

DA SCOMPORRE IN $\hat{r}$ E $\hat{\varphi}$:

$$\vec{F}_c = m\omega^2 R \sin\varphi \left(-\sin\varphi \, \hat{r} + \cos\varphi \, \hat{\varphi}\right)$$

$$= -m\omega^2 R \sin^2\varphi \, \hat{r} + m\omega^2 R \sin\varphi \cos\varphi \, \hat{\varphi}$$

A NOI INTERESSA SOLO F_c LUNGO $\hat{\varphi}$: $F_{c\varphi} = m\omega^2 R \sin\varphi \cos\varphi$

ESPRESSIONE CHE POSSO USARE NELL'EQUAZIONE DEL MOTO:

$$m r \ddot{\varphi} = -mg \sin\varphi + m\omega^2 R \sin\varphi \cos\varphi$$

PER TROVARE LA POSIZIONE DI EQUILIBRIO OVVIAMENTE IMPONGO

$$\ddot{\varphi} = 0 \implies -mg \sin\varphi + m\omega^2 R \sin\varphi \cos\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \sin\varphi\left(\omega^2 R\cos\varphi - g\right) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\varphi_{EQ1} = 0} \; ; \; \boxed{\varphi_{EQ2} = \pi}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{g}{\omega^2 R} \Rightarrow \boxed{\varphi_{EQ3} = \cos^{-1}\left(g/\omega^2 R\right)}$$

PERÒ DELLE 3 SOLUZIONI NON TUTTE SONO PER L'EQUILIBRIO STABILE. POSSO CAPIRE QUALE LO È SE DOPO UNA PICCOLA PERTURBAZIONE ~~m~~ RIMANE IN φ_{EQ} $\Rightarrow$ IN QUESTO CASO È FACILE PERCHÈ φ_{EQ3} È STABILE.

CONSIDERO LE PICCOLE OSCILLAZIONI RISPETTO φ_{EQ3} E AL POSTO DI SFRUTTARE LE RELAZIONI TRIGONOMETRICHE ($\sin(\alpha+\beta) = \dots$) INTRODUCENDO $\varphi = \varphi_{EQ} + \varepsilon$, POSSO SVILUPPARE TAYLOR QUANDO $\varphi \to \varphi_{EQ}$

$$\sin\varphi \sim \sin\varphi_{EQ} + \cos\varphi_{EQ}\left(\varphi - \varphi_{EQ}\right) + O((\varphi-\varphi_{EQ})^2)$$
$$\cos\varphi \sim \cos\varphi_{EQ} - \sin\varphi_{EQ}\left(\varphi - \varphi_{EQ}\right) + O((\varphi-\varphi_{EQ})^2)$$

SOSTITUISCO

$$R\ddot{\varphi} = R\omega^2\left(\sin\varphi_{EQ} + \cos\varphi_{EQ}(\varphi-\varphi_{EQ})\right)\left(\cos\varphi_{EQ} - \sin\varphi_{EQ}(\varphi-\varphi_{EQ})\right) -$$
$$- g\sin\varphi_{EQ} - g\cos\varphi_{EQ}(\varphi-\varphi_{EQ})$$

$$R\ddot{\varphi} = R\omega^2\Big(\sin\varphi_{EQ}\cos\varphi_{EQ} + \cos^2\varphi_{EQ}(\varphi-\varphi_{EQ}) - \sin^2\varphi_{EQ}(\varphi-\varphi_{EQ}) -$$

$$- \sin\varphi_{EQ}\cos\varphi_{EQ}(\varphi - \varphi_{EQ})^2\Big) - g\sin\varphi_{EQ} - g\cos\varphi_{EQ}(\varphi-\varphi_{EQ})$$

VEDO CHE C'È UN INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE E CHE C'È LA RELAZIONE DELL'EQUILIBRIO ($a_\varphi = 0$), DUNQUE MI RIMANE:

$$R\ddot{\varphi} = R\omega^2(\cos^2\varphi_{EQ} - \sin^2\varphi_{EQ})(\varphi-\varphi_{EQ}) - g\cos\varphi_{EQ}(\varphi-\varphi_{EQ})$$

VEDO $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$$R\ddot{\varphi} = R\omega^2(2\cos^2\varphi_{EQ} - 1)(\varphi-\varphi_{EQ}) - g\cos\varphi_{EQ}(\varphi-\varphi_{EQ})$$

$$R\ddot{\varphi} = \Big(R\omega^2(2\cos^2\varphi_{EQ} - 1) - g\cos\varphi_{EQ}\Big)(\varphi-\varphi_{EQ})$$

AFFINCHÈ CI SIANO OSCILLAZIONI (MOTO ARMONICO) ATTORNO φ_{EQ} DEV'ESSERE

$$R\omega^2(2\cos^2\varphi_{EQ} - 1) - g\cos\varphi_{EQ} < 0$$

L'ANGOLO DI EQUILIBRIO CHE SODDISFA LA RELAZIONE È QUELLO STABILE.

USANDO $\varphi_{3EQ} \Rightarrow \cos\varphi_{3EQ} = \dfrac{g}{\omega^2 R}$ È SODDISFATTA.

PER TROVARE IL PERIODO USO IL FATTO DI CONOSCERE IL PERIODO DI UN PENDOLO SEMPLICE DI LUNGHEZZA ℓ:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{a}}$$, a RADIALE NELLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO (IN MODULO)

IO HO $\ell = R$, $\cos\varphi_{EQ} = \frac{g}{\omega^2 R}$ E

$$a_r = -g\cos\varphi - \omega^2 R \sin^2\varphi$$

$$\Rightarrow a_{r_{EQ}} = -\frac{g^2}{\omega^2 R} - \omega^2 R \sin^2\varphi_{EQ}$$

$$1 - \cos^2\varphi_{EQ} = \sin^2\varphi_{EQ} \Rightarrow \sin^2\varphi_{EQ} = 1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 R \sin^2\varphi_{EQ} = \omega^2 R - \frac{g^2}{\omega^2 R}$$

COSI

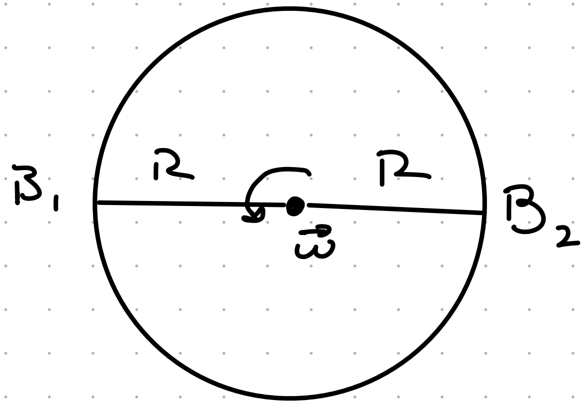
$$a_{r_{EQ}} = -\frac{g^2}{\omega^2 R} - \omega^2 R + \frac{g^2}{\omega^2 R} \Rightarrow a_{r_{EQ}} = -\omega^2 R$$

COSI VIENE

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{|a_{r_{EQ}}|}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{\omega^2 R}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

NON SONO SICURO DI QUESTO RISULTATO

9.2



$\omega = \text{COST}$

$v_1' = v_0$

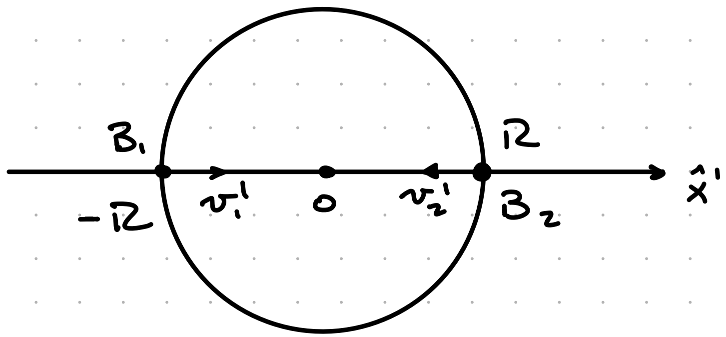
$v_2' = \frac{2}{3} v_0$

$v_0 = \text{COST}$

DETERMINA:

- DOVE SI INCONTRANO
- IL MODULO DELLE VELOCITÀ
- L'ANGOLO COMPRESO TRA v ED a Δt.

INDICO SEMPRE CON S = S.R INERZIALE ED S' = S.R. NON INERZIALE.
MI METTO IN S', CERCO IL PUNTO D'INCONTRO E POI CAMBIO S.R. :



SO SCRIVERE

$$\begin{cases} x_1'(t) = -R + v_1' t = -R + v_0 t \\ x_2'(t) = R - v_2' t = R - \frac{2}{3} v_0 t \end{cases}$$

VOGLIO CHE SI INCONTRINO AL TEMPO τ :

$$x'(\tau) = -R + v_0 \tau = R - \frac{2}{3} v_0 \tau \Rightarrow \frac{5}{3} v_0 \tau = 2R \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{6R}{5 v_0}}$$

ORA PERÒ I RISULTATI LI VOGLIO NEL SR INERZIALE DELL'OSSERVATORE ESTERNO CHE VEDE S' RUOTARE.

SCRIVO LA ROTAZIONE

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases} \qquad \text{DOVE} \qquad \theta = \theta(t) = \omega t$$

E LA LEGGE DI TRASFORMAZIONE DELLE VELOCITÀ E ACCELERAZIONI

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \\ \vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + 2\vec{\omega} \times \vec{v} \end{cases}$$

SAPENDO $a' = 0$, $\omega = \text{COST}$, $\vec{r} = \vec{r}\,'$.

VEDO DOVE SI INCONTRANO I BAMBINI. $\vec{r}\,'$ DISTANZA DAL CENTRO O' DI S':

$$\vec{r}\,'(\tau) = \vec{x}\,'_1(\tau) = \left(-R + v_0 \frac{6R}{5v_0}\right)\hat{x}' = \left(-R + \frac{6}{5}R\right)\hat{x}' = \frac{R}{5}\hat{x}'$$

FACENDO LA TRASFORMAZIONE

$$\boxed{\vec{r}(\tau) = \frac{R}{5}\left(\cos\left(\omega\frac{6R}{5v_0}\right)\hat{x} + \sin\left(\omega\frac{6R}{5v_0}\right)\hat{y}\right)}$$

ORA GUARDO LE VELOCITÀ

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

MI SERVE CALCOLARE

$$\vec{\omega} \times \vec{r}' = (\omega \hat{z}) \times (r'\hat{x}') = \omega r' \hat{z} \times \hat{x}' = \omega r' \hat{y}'$$

PER CUI

$$\vec{v} = v' \hat{x}' + \omega r'(t) \hat{y}'$$

DUNQUE I MODULI SARANNO

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 r_1'(\tau)^2} \\ v_2 = \sqrt{\frac{4}{9}v_0^2 + \omega^2 r_2'(\tau)^2} \end{cases}$$

IN CUI

$$r_1'(\tau) = x_1'(\tau)\hat{x}' = \frac{R}{5}\hat{x}'$$

$$r_2'(\tau) = x_2'(\tau)\hat{x}' = R - \frac{2}{3}v_0\tau = R - \frac{4}{5}R = \frac{R}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v_1 &= (v_0^2 + \omega^2 R^2/25)^{1/2} \\ v_2 &= (4v_0^2/9 + \omega^2 R^2/25)^{1/2} \end{aligned}}$$

PER TROVARE L'ANGOLO TRA v ED a SFRUTTO LA DEFINIZIONE DI PRODOTTO SCALARE

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = v a \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v a}$$

MI SERVE DUNQUE $\vec{a}$. HO

$$\vec{a} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

FACCIO I CONTI

$$\vec{\omega} \times \vec{v}\,' = \omega v' \hat{z} \times \hat{x}' = \omega v' \hat{y}'$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = \vec{\omega} \times \left(\omega r' \hat{z} \times \hat{x}' \right) = \omega^2 r' \hat{z} \times (\hat{z} \times \hat{x}') = \omega^2 r' \hat{z} \times \hat{y}' = -\omega^2 r' \hat{x}'$$

$$\Rightarrow \vec{a}(\tau) = 2\omega v'(\tau) \hat{y}' - \omega^2 r'(\tau) \hat{x}'$$

IL MODULO È

$$a(\tau) = \sqrt{\omega^4 r'(\tau)^2 + 4\omega^2 v'(\tau)^2}$$

$$r_1'(\tau) = \frac{R}{5} \qquad v_1'(\tau) = v_0$$

$$\Rightarrow a(\tau) = \sqrt{\frac{\omega^4 R^2}{25} + 4\omega^2 v_0^2}$$

VERO

$$\vec{v}(\tau) \cdot \vec{a}(\tau) \quad , \quad \vec{v} = v'\hat{x}' + \omega r'(t)\hat{y}'$$

$$= \left(v_0 \hat{x}' + \frac{\omega R}{5}\hat{y}'\right) \cdot \left(-\frac{\omega^2 R}{5}\hat{x}' + 2\omega v_0 \hat{y}'\right)$$

$$= -\frac{\omega^2 R v_0}{5} + 2\frac{\omega^2 R v_0}{5} = \frac{\omega^2 R v_0}{5}$$

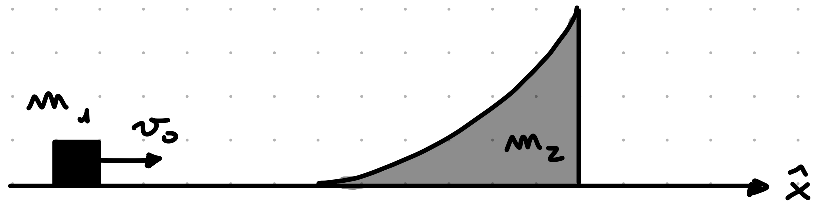
QUINDI L'ANGOLO È

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{v}(\tau) \cdot \vec{a}(\tau)}{v\, a} = \frac{\frac{\omega^2 R v_0}{5}}{\sqrt{\left(\frac{\omega^4 R^2}{25} + 4\omega^2 v_0^2\right)\left(v_0^2 + \frac{\omega^2 R^2}{25}\right)}}}$$

9.3 $m_1 = 0.05\ kg$ DETERMINA: • h_{MAX}, v_2

$v_0 = 1.4\ m/s$ • μ_1, μ_2

$m_2 = 0.26\ kg$



m_2 È LIBERA DI MUOVERSI.

POSSO SFRUTTARE LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO LUNGO L'ASSE X (LUNGO CUI NON HO FORZE)

LA COMPONENTE X DELLA REAZIONE VINCOLARE È UNA FORZA INTERNA E NON MI INTERESSA.

QUANDO m_1 È ALLA MASSIMA ALTEZZA HO CHE LA VELOCITÀ RELATIVA TRA m_1 ED m_2 È NULLA ED ENTRAMBE SI MUOVONO CON LA STESSA VELOCITÀ.

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_2 \implies v_2 = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}$$

PER TROVARE LA MASSIMA ALTEZZA PERÒ USO LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2^2 + m_1 g h_{MAX}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \frac{m_1^2 v_0^2}{(m_1 + m_2)^2} + m_1 g h_{MAX}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1^2 \frac{v_0^2}{m_1 + m_2} + m_1 g h_{MAX}$$

$$\Rightarrow \frac{v_0^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + g h_{MAX}$$

$$\Rightarrow \frac{v_0^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = g h_{MAX}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_{MAX} = \frac{v_0^2}{2g} \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0{,}084 \ m}$$

VOGLIO ORA LE VELOCITÀ DOPO CHE IL CORPO TORNA A TERRA. POSSO ANCORA CONSERVARE L'ENERGIA MECCANICA

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

E LA QUANTITÀ DI MOTO

$$m_1 v_0 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

CHE METTENDOLE A SISTEMA TROVO LE DUE VELOCITÀ

$$\begin{cases} \frac{m_1}{2} v_0^2 = \frac{m_1}{2} u_1^2 + \frac{m_2}{2} u_2^2 \\ m_1 v_0 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{m_1}{2} v_0^2 = \frac{m_1}{2} u_1^2 + \frac{m_2}{2} \frac{m_1^2}{m_2^2} (v_0 - u_1)^2 \\ u_2 = \frac{m_1}{m_2} (v_0 - u_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{m_1}{2} v_0^2 = \frac{m_1}{2} u_1^2 + \frac{m_1^2}{2 m_2} \left(v_0^2 + u_1^2 - 2 v_0 u_1 \right) \\ u_2 = \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1^2 - v_0^2 + \frac{m_1}{m_2} v_0^2 + \frac{m_1}{m_2} u_1^2 - 2 \frac{m_1}{m_2} v_0 u_1 = 0 \\ u_2 = \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) u_1^2 - 2 \frac{m_1}{m_2} v_0 u_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_2} v_0^2 = 0 \\ u_2 = \dots \end{cases}$$

$$u_1^{(1,2)} = \frac{2 \frac{m_1}{m_2} v_0 \pm \sqrt{4 \frac{m_1^2}{m_2^2} v_0^2 - 4 \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_2^2} v_0^2}}{2 \frac{m_1 + m_2}{m_2}}$$

$$= \frac{2\frac{m_1 v_0}{m_2} \pm \sqrt{4\frac{m_1^2}{m_2} v_0^2 - 4\frac{m_1^2}{m_2^2} v_0^2 + 4 v_0^2}}{2\,\frac{m_1 + m_2}{m_2}}$$

$$= \frac{m_1 v_0}{m_2}\,\frac{m_2}{m_1 + m_2} \pm v_0 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \pm \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2} v_0 = \begin{cases} + : & 1.55 \ m/s \\ - : & -1.05 \ m/s \end{cases}$$

GUARDANDO LA FIGURA VEDIAMO CHE $\vec{u}_1$ È PARALLELO A $-\hat{x}$ PER CUI LA SOLUZIONE CHE PRENDIAMO È

$$\boxed{u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = -1,05 \ m/s}$$

DI CONSEGUENZA AVREMO:

$$u_2 = \frac{m_1}{m_2}\left(v_0 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0\right) = \frac{m_1}{m_2} v_0 \left(\frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_0 = 0.50 \ m/s}$$