



Esercizi

MECCANICA

Esercizi a.a. 2021-2022

Argomenti:

- exe 1, 2, 3

CINEMATICA

- exe 4, 5, 6

LEGGI DELLA DINAMICA

- exe 7

LAVORO ED ENERGIA

- exe 8, 9

SISTEMI DI RIFERIMENTO

- exe 10, 11, 12, 13, 14

CORPO RIGIDO

- exe 15

GRAVITAZIONE

exe 7

7.1

$$m = 600 \text{ kg}$$

$$v_0 = 8,3 \text{ m/s}$$

$$F_a = -bv$$

$$b = 52,9 \text{ kg/s}$$

DETERMINA :

- x_{MAX} DOVE SI FERMA

- W_a LUNGO $\ell < x_{\text{MAX}}$

$$\ell = 70,8 \text{ m}$$

- x'_{MAX} , W'_a HA CON

$$a = 2,2 \text{ m/s}^2$$

SI HA $v_0 = 8,3 \text{ m/s}$ E L'EQUAZIONE DELLA DINAMICA

$$m \frac{dv}{dt} = -bv$$

($m = \text{cost}$)

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} dt \Rightarrow$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv'}{v'} = -\frac{b}{m} \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{v(t)}{v_0}\right) = -\frac{b}{m} t$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m} t}}$$

$$\text{HO } v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v(t') dt' \Rightarrow x(t) - x_0 = v_0 \int_0^t e^{-\frac{b}{m} t'} dt'$$

$$\Rightarrow x(t) - x_0 = -v_0 \frac{m}{b} e^{-\frac{b}{m}t'} \Big|_0^t$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$$

VEDO CHE IL CANOTTO SI FERMA A !

$$v(t_{\max}) = 0 \Rightarrow t_{\max} \rightarrow \infty$$

E QUINDI ALLA POSIZIONE

$$x(t_{\max}) = x_{\max} = x_0 + \frac{v_0 m}{b}$$

PER CALCOLARE IL LAVORO DELLA FORZA DI ATTRITO SFRUTTO LA FORMULA CLASSICA

$$W_A = \int_0^l \vec{F}_A \cdot d\vec{s} = \int_0^l F_A dx = \int_0^{t_e} F_A v dt = -b \int_0^{t_e} v^2 dt$$

$dx = v dt$

$$W_A = -bv_0^2 \int_0^{t_e} e^{-\frac{2b}{m}t} dt = -bv_0^2 \left(-\frac{m}{2b}\right) e^{-\frac{2b}{m}t} \Big|_0^{t_e}$$

$$\Rightarrow W_A = \frac{mv_0^2}{2} \left(e^{-\frac{2b}{m}t_e} - 1 \right)$$

POSSO RICAARE t_e :

$$x(t_e) \equiv \ell = x_0 + \frac{v_0 m}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t_e} \right)$$

$$\Rightarrow t_e = -\frac{m}{b} \ln \left\{ \frac{b}{v_0 m} (x_0 - \ell) + 1 \right\}$$

VEDO

$$\begin{aligned} e^{-\frac{2b}{m}t_e} &= \exp \left\{ -\frac{2b}{m} \left[-\frac{m}{b} \ln \left(\frac{b}{v_0 m} (x_0 - \ell) + 1 \right) \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \ln \left[\frac{b}{v_0 m} (x_0 - \ell) + 1 \right]^2 \right\} \\ &= \left[\frac{b}{v_0 m} (x_0 - \ell) + 1 \right]^2 \end{aligned}$$

PER CUI HO

$$W_A = \frac{mv_0^2}{2} \left(\left[\frac{b}{v_0 m} (x_0 - l) + 1 \right]^2 - 1 \right)$$

PER SEMPLICITÀ PONGO $x_0 = 0$

$$W_A = \frac{mv_0^2}{2} \left[\left(1 - \frac{b}{v_0 m} l \right)^2 - 1 \right] = \frac{mv_0^2}{2} \left[1 + \frac{b^2 l^2}{v_0^2 m^2} - 2 \frac{b l}{v_0 m} - 1 \right]$$

$$W_A = \frac{b^2 l^2}{2m} - b l v_0$$

ATTENZIONE!

QUESTO È IL MODO PIÙ LUNGO DI FARE IL PROBLEMA. SÌ, PUÒ FARE IN ALTRI MODI:

① USO LA DEFINIZIONE $W_A = \int_0^l F_A dx = -b \int_0^l v dx$ MA CON

$v(x)$, CHE PER TROVARLA FACCIO:

$$m \frac{dv}{dt} = -b v \Rightarrow \text{TROVO } v(t) \text{ E } x(t) \text{ COME SOPRA}$$

$$\Rightarrow \text{RICAVO } t(x) \Rightarrow \text{TROVO } v(t(x)) \equiv v(x)$$

OPPURE POSSO OTTENERE $v(x)$ COME:

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = m v \frac{dv}{dx} \Rightarrow m v \frac{dv}{dx} = -b v$$

$$\Rightarrow dv = -\frac{b}{m} dx \Rightarrow \boxed{v(x) = v_0 - \frac{b}{m} x} \quad (x_0 = 0)$$

ORA È FACILE

$$W_A = -b \int_0^l v(x) dx = \boxed{-b v_0 l + \frac{b^2 l^2}{2m}}$$

COME TROVATO CON IL METODO LUNGO.

◎ PERÒ POSSO ANCHE SFRUTTARE L'ENERGIA NOTO $v(x)$:

IL TEOREMA DELLE FORZE VIVE MI DICE

$$W_A = \Delta K = \frac{1}{2} m v^2(l) - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\text{HO } v(l) = v_0 - \frac{b}{m} l$$

DUNQUE

$$\begin{aligned}
 W_A &= \frac{m}{2} \left(v_0 - \frac{b}{m} \ell \right)^2 - \frac{m}{2} v_0^2 \\
 &= \frac{m}{2} \left(v_0^2 + \frac{b^2 \ell^2}{m^2} - 2 v_0 \frac{b \ell}{m} \right) - \frac{m}{2} v_0^2 \\
 &= \frac{b^2 \ell^2}{2m} - v_0 b \ell \quad \text{COME SOPRA.}
 \end{aligned}$$

◎ UN ALTRO METODO È QUELLO DI USARE LA POTENZA, MA È UN METODO LUNGO PERCHÉ DOVREI USARE $v(t)$, RICAVARE t_e E POI SOSTITUIRE.

$$W_A = \int_0^\ell P_A dt = \int_0^{t_e} F_A v dt = -b \int_0^{t_e} v^2(t) dt$$

È SOSTANZIALMENTE IL PRIMO METODO USATO.

SECONDA PARTE ABBIAMO $a = \text{cost}$ $v_0 = 0 \text{ m/s}$

DUNQUE PROSEGUENDO CON $a = \text{cost}$ CONOSCIAMO GIÀ LE ESPRESSIONI DI LEGGE ORARIA E $v(x)$.

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} a t^2 \\ v^2 = 2 a x \end{cases}$$

$$(x_0 = 0 \text{ m}, v_0 = 0 \text{ m/s})$$

$$\Downarrow \\ v(x) = \sqrt{2 a x}$$

DUNQUE È IMMEDIATO TROVARE

$$W_A = \int_0^l F_A dx = -b \int_0^l v(x) dx = -b \int_0^l \sqrt{2 a x} dx$$

$$\begin{aligned} y &= 2 a x \\ dy &= 2 a dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W_A = -\frac{b}{2a} \int_0^{2al} \sqrt{y} dy = -\frac{b}{2a} \frac{(y)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^{2al} = -\frac{b}{3a} (2al)^{3/2}$$

$$\Rightarrow W_A = -\frac{b}{3a} (2al) \sqrt{2al}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_A = -\frac{2bl}{3} \sqrt{2al}}$$

7.2 $K(t) = b t^4$, $b \in \mathbb{R}$

m

DETERMINA: $x(t)$ e F

IN GENERALE HO $K = \frac{m}{2} v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} K^{1/2} \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{2b}{m}} t^2 dt$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \sqrt{\frac{2b}{m}} \frac{t^3}{3} \Rightarrow$$

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2b}{m}} t^3$$

PER TROVARE F POSSO USARE $F = ma$, POICHÈ

$$v = \sqrt{\frac{2b}{m}} t^2 \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{2b}{m}} 2t$$

DUNQUE LA CANOA È SOGGETTA A

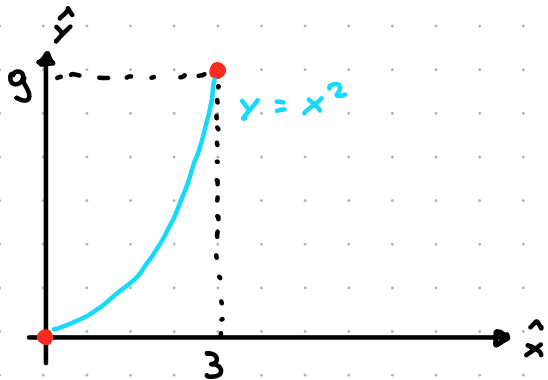
$$F = ma = 2m \sqrt{\frac{2b}{m}} t = \sqrt{8bm} t$$

7.3

$$\vec{F} = k(y^2 - x^2)\hat{x} + 2kxy\hat{y}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- DETERMINA:
- W NEL PERCORSO $(0,0) \rightarrow (3,9)$ LUNGO $y = x^2$
 - LA FORZA È CONSERVATIVA? CALCOLA $U(x,y)$ VERIFICANDO $W = -\Delta U$

ABBIAMO



$$\gamma : y = x^2$$

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

SCRIVO

$$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y}$$

$$d\vec{s} = dx \hat{x} + dy \hat{y}$$

$$W = \int F_x dx + \int F_y dy = \int_0^3 F_x dx + \int_0^9 F_y dy$$

$$= k \int_0^3 (y^2 - x^2) dx + 2k \int_0^9 xy dy$$

$$\text{HO } y = x^2 \Rightarrow y^2 = x^4 \quad \text{E} \quad dy = 2x dx \quad \begin{cases} y=0 \rightarrow x=0 \\ y=9 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

$$W = k \int_0^3 (x^4 - x^2) dx + 2k \int_0^3 x^3 \cdot 2x dx$$

$$= K \int_0^3 (x^4 - x^2 + 4x^4) dx = K \int_0^3 (5x^4 - x^2) dx$$

$$= K \left(x^5 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = K (3^5 - 9) = \boxed{234 K}$$

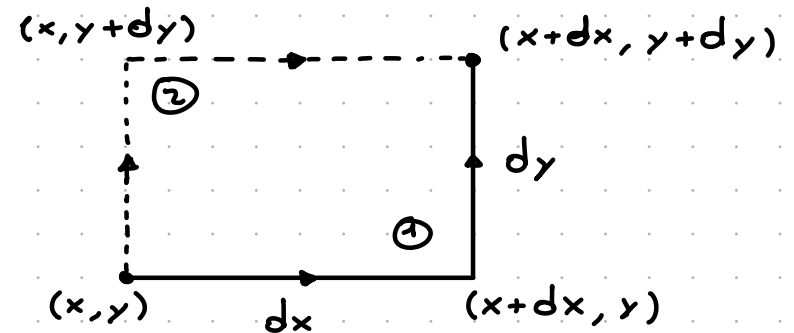
MA DOBBIAMO VEDERE SE UNA FORZA È CONSERVATIVA. POTREI CONTROLLARE CHE

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

MA NON SAREBBE UNA PROVA CHE $\vec{F}$ SIA CONSERVATIVA, PERCHÉ PER γ STO CONSIDERANDO UN PERCORSO SPECIFICO. PROVO A CONSIDERARE DUE PERCORSI INFINITESIMI E CALCOLO IL LAVORO INFINITESIMO DI $\vec{F}(x, y)$:

$$\vec{F}(x, y) = F_x(x, y) \hat{x} + F_y(x, y) \hat{y}$$

$$d\vec{r} = dx \hat{x} + dy \hat{y}$$



$$dW_1 = \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = F_x(x, y) dx + F_y(x+dx, y) dy$$

PARTO IN (x, y) , QUINDI HO $F_x(x, y)$, MI SPOSTO DI UN TRATTO dx , ARRIVO IN $(x+dx, y)$ E HO $F(x+dx, y)$.

POSSO SVILUPPARE

$$F_y(x+dx, y) = F_y(x, y) + \frac{\partial F_y}{\partial x} dx$$

COSÌ

$$dW_1 = F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy + \frac{\partial F_y}{\partial x} dx dy$$

POSSO FARE LA STESSA COSA SUL PERCORSO 2 :

$$\begin{aligned} dW_2 &= F_y(x, y) dy + F_x(x, y+dy) dx \\ &= F_y(x, y) dy + F_x(x, y) dx + \frac{\partial F_x}{\partial y} dx dy \\ &= F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy + \frac{\partial F_x}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

ORA, AFFINCHÈ SIA CONSERVATIVA, I dW DEVONO ESSERE
TALI PER CUI dW SU 1+2 SIA NULLO, OSSIA

$$dW_1 - dW_2 = 0$$

CHE SI TRADUCE NEL DIRE :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

NEL NOSTRO CASO:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 2ky$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = 2ky$$

$\Rightarrow F(x, y)$ È CONSERVATIVA

Po, so : $F = -\nabla U$

E IN COMPONENT,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

SO CHE PER CALCOLARE UN POTENZIALE :

$$U = -\int_0^x F_x dx + f(y), \quad f(y) = \text{FUNZIONE ARBITRARIA DI } y \text{ DA FISSARE}$$

$$= -k \int_0^x (y^2 - x^2) dx + f(y)$$

$$= -k \left(xy^2 - \frac{x^3}{3} \right) + f(y)$$

FISSO $f(y)$ CHIEDENDO

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = F_y \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = -2kxy + \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow f(y) = C \in \mathbb{R}$$

PER CUI HO

$$U(x, y) = -k \left(xy^2 - \frac{x^3}{3} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

VERIFICO $W = -\Delta U$

$$U(0, 0) = C$$

$$U(3,9) = -\kappa(3 \cdot 81 - 9) + C$$

$$\Rightarrow -\Delta U = -U(3,9) + U(0,0) = 234 \kappa$$

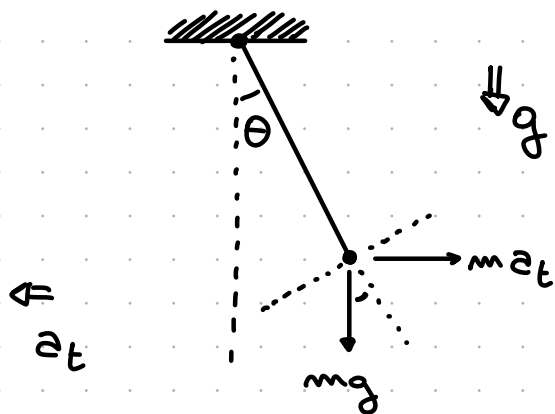
 $\Rightarrow$

$$W = -\Delta U$$

7.4 $a_t = g/\sqrt{3}$, $l = 1,6 \text{ m}$

DETERMINARE : • θ_{eq}

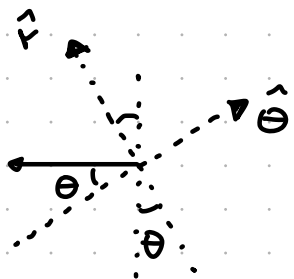
• T PICCOLE OSCILLAZIONI



MASSA DEL BATACCIO : m

COME SISTEMA DI RIFERIMENTO NE PRENDIAMO
UNO SOLIDALE CON IL BATACCIO $(\hat{r}, \hat{\theta})$.

PER TROVARE L'EQUILIBRIO DEVO RISOLVERE LE
EQUAZIONI DEL MOTO.



$$\vec{a}_t = a_{r_t} \hat{r} + a_{\theta_t} \hat{\theta} = a_t \sin \theta \hat{r} - a_{\theta} \cos \theta \hat{\theta}$$

LA F_t SARÀ $m \vec{a}_t$ DI VERSO OPPOSTO, PER VIA DEL
FATTO CHE IL FURGONE SI STA MUOVENDO DI MOTO
UNIFORME RISPETTO IL SR DEL BATACCIO E SO CHE
NASCONO FORZE APPARENTI $bc \quad m a = F - m a_t$.

$$\begin{cases} \hat{r} & m a_r = -m g \cos \theta - m a_t \sin \theta + N \\ \hat{\theta} & m a_{\theta} = -m g \sin \theta + m a_t \cos \theta \end{cases}$$

POSSO TROVARE L'ANGOLO DI EQUILIBRIO IMPONENDO $a_{\theta} = 0$!

$$0 = -mg \sin \theta + m a_t \cos \theta \quad \Rightarrow \quad a_t \cos \theta = g \sin \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{eq} = \tan^{-1} \left(\frac{a_t}{g} \right)}$$

ORA POSSO TROVARE IL PERIODO DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI RISPETTO L'ANGOLO DI EQUILIBRIO. PER TROVARLO RISOLVO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LUNGO $\hat{\theta}$, MA CONSIDERANDO APPUNTO PICCOLE VARIAZIONI RISPETTO θ_{eq} :

PRENDO $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$

$$\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$$

LO METTO IN $m a_\theta = -mg \sin \theta + m a_t \cos \theta$ CON $a_\theta = l \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow m l \ddot{\varepsilon} = -mg \sin(\theta_{eq} + \varepsilon) + m a_t \cos(\theta_{eq} + \varepsilon)$$

RICORDO
$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow m l \ddot{\varepsilon} = -mg (\sin \theta_{eq} \cos \varepsilon + \cos \theta_{eq} \sin \varepsilon) + m a_t (\cos \theta_{eq} \cos \varepsilon - \sin \theta_{eq} \sin \varepsilon)$$

MA SE $\varepsilon \ll 1$ ALLORA $\cos \varepsilon \sim 1$, $\sin \varepsilon \sim \varepsilon$

$$\Rightarrow m l \ddot{\epsilon} = -mg (\sin \theta_{eq} + \epsilon \cos \theta_{eq}) + m a_t (\cos \theta_{eq} - \epsilon \sin \theta_{eq})$$

$$\Rightarrow m l \ddot{\epsilon} = (m a_t \cos \theta_{eq} - mg \sin \theta_{eq}) - \epsilon (mg \cos \theta_{eq} + m a_t \sin \theta_{eq})$$

MA RICORDO CHE IMPONENDO $\partial_\theta = 0 \Rightarrow \theta = \theta_{eq}$ E AVEVO $0 = -mg \sin \theta_{eq} + m a_t \cos \theta_{eq}$
DUNQUE

$$m l \ddot{\epsilon} = - (mg \cos \theta_{eq} + m a_t \sin \theta_{eq}) \epsilon$$

$$\ddot{\epsilon} = - \frac{g \cos \theta_{eq} + a_t \sin \theta_{eq}}{l} \epsilon$$

CHE È L'EDO DELL'OSCILLATORE ARMONICO, E QUINDI

$$\epsilon(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{g \cos \theta_{eq} + a_t \sin \theta_{eq}}{l}}$$

PER CUI IL PERIODO DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI È

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \theta_{eq} + a_t \sin \theta_{eq}}}$$

NOTA

QUESTA COSA SI POTEVA FARE IN MODO AUTOMATICO
USANDO L'ESPRESSIONE ALL'EQUILIBRIO DELL'ACCELERAZIONE RADIALE (DATA
DALLA TRASFORMAZIONE DEL SR $ma = F - ma_t$) E INSERENDOLA
NELL'ESPRESSIONE DEL PERIODO DI UN PENDOLO SEMPLICE

DI LUNGHEZZA l .

INFATTI SO $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

IL MODULO DELL'ACCELERAZIONE RADIALE ALL'EQUILIBRIO È

$$a_t \sin \theta_{eq} + g \cos \theta_{eq}$$

E SI OTTIENE DUNQUE LA STESSA ESPRESSIONE PER T .