



Esercizi

MECCANICA

Esercizi a.a. 2021-2022

Argomenti:

- exe 1, 2, 3

CINEMATICA

- exe 4, 5, 6

LEGGI DELLA DINAMICA

- exe 7

LAVORO ED ENERGIA

- exe 8, 9

SISTEMI DI RIFERIMENTO

- exe 10, 11, 12, 13, 14

CORPO RIGIDO

- exe 15

GRAVITAZIONE

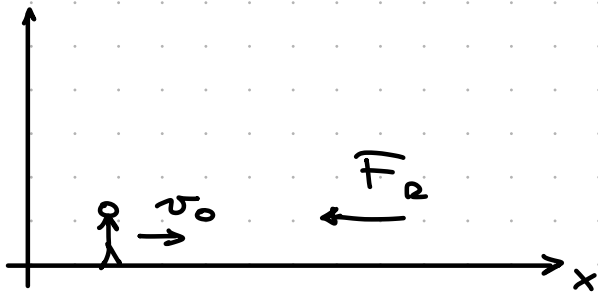
exe 4

4.1

$$v_0, |\vec{F}_r| = bv$$

DETERMINA :

- τ TEMPO PER FERMARSI
- $x(z)$
- ϵ $x(v)$



$$F = m\ddot{x} = m \frac{dv}{dt}$$

$$\text{HO } \sum F_i = F_r$$

$$\vec{F}_r = -bv \hat{x}$$

DUNQUE

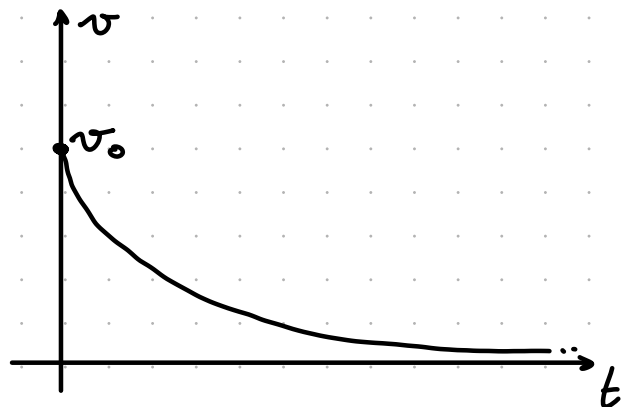
$$-bv = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} dt \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} \int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{b}{m} t$$

$\Rightarrow$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m} t}$$

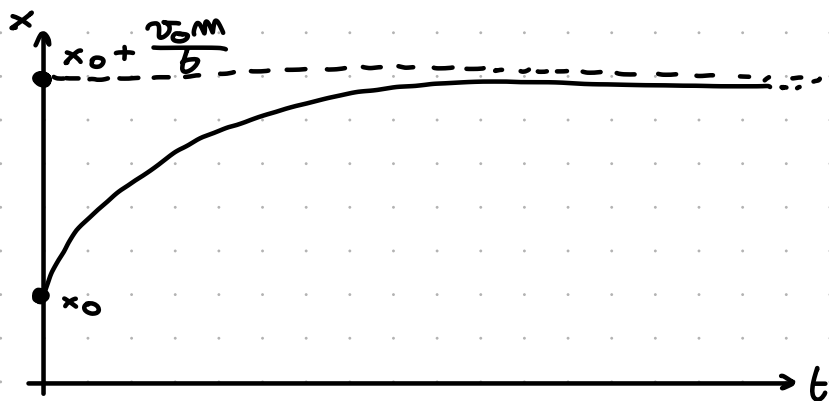
VEDO



C'EST UNE
A FERMARS, UN TEMPS $\sim \infty$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t v(t) dt = v_0 \int_0^t e^{-\frac{b}{m}t'} dt' = v_0 \left(-\frac{m}{b} e^{-\frac{b}{m}t'} \right) \Big|_0^t$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$$



PER MOSTRARE $x(v)$ SI PUÒ FARE:

$$m \frac{dv}{dt} = F \Rightarrow m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = F \Rightarrow m \frac{dv}{dx} v = -bv$$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dx} = -b \Rightarrow dx = -\frac{m}{b} dv \Rightarrow \boxed{x(v) = x_0 - \frac{m}{b}(v - v_0)}$$

4.2

m, v_0 , APRE IL PARACADUTE CON v_0

$$|\vec{F}_a| = b v$$

DETERMINA:

- $v(t)$

- $y(t)$

$m = \text{cost}$, APPLICO $F = ma$

$$\Rightarrow F = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow mg - b v = m \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m} v \Rightarrow \frac{dv}{g - \frac{b}{m} v} = dt \Rightarrow -\frac{m}{b} \int_{v_0}^v \frac{-\frac{b}{m} dv}{g - \frac{b}{m} v} = \int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow -\frac{m}{b} \log \left(\frac{g - \frac{b}{m} v}{g - \frac{b}{m} v_0} \right) = t \Rightarrow \log(-) = -\frac{b}{m} t$$

$$\Rightarrow g - \frac{b}{m} v = \left(g - \frac{b}{m} v_0 \right) e^{-\frac{b}{m} t} \Rightarrow -\frac{b}{m} v = -\frac{b}{m} v_0 e^{-\frac{b}{m} t} - g (1 - e^{-\frac{b}{m} t})$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m} t} + \frac{mg}{b} (1 - e^{-\frac{b}{m} t})}$$

LA VELOCITÀ LIMITE È QUELLA CHE OTTENGO A $t \rightarrow \infty$
IN CUI HO MRO

$$v(\infty) = v_{\text{lim}} = \frac{mg}{b}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow x(t) - x_0 = \int_0^t v(t') dt'$$

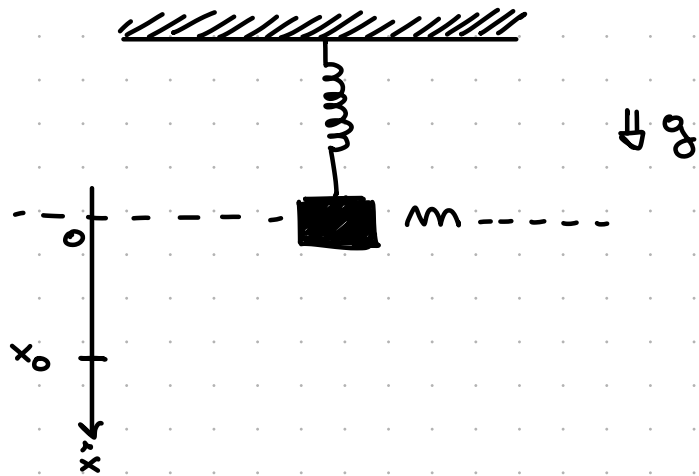
$$\Rightarrow x(t) - x_0 = v_0 \left(-\frac{m}{b} e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{m}{b} \right) + \frac{mg}{b} \left(t - \left(-\frac{m}{b} e^{-\frac{m}{b}t} + \frac{m}{b} \right) \right)$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{mv_0}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) + \frac{mg}{b} \left(t - \frac{m}{b} (1 - e^{-\frac{m}{b}t}) \right)$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_{\text{lim}} t + \frac{m}{b} (v_0 - v_{\text{lim}}) \left(1 - e^{-\frac{m}{b}t} \right)$$

4.3 MOLE IN GENERALE.

HO m APPESA CON UNA MOLLA, SO CHE x_0 È LA POSIZIONE DI EQUILIBRIO. POSSO DETERMINARE x_0 E LA LEGGE ORARIA:



IMPONGO

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - kx \\ \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} &= mg - kx \\ \Rightarrow m\ddot{x} &= mg - kx \end{aligned}$$

HO EQUILIBRIO SE $\sum F_i = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 0 \Rightarrow mg - kx_0 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{mg}{k}}$$

PER TROVARE L'EQUAZIONE DEL MOTO:

$$m\ddot{x} = k \frac{mg}{k} - kx = kx_0 - kx \Rightarrow m\ddot{x} = -k(x - x_0)$$

CAMBIO VARIABILI: $z = x - x_0 \Rightarrow \dot{z} = \dot{x} \Rightarrow \ddot{z} = \ddot{x}$

$$\Rightarrow m\ddot{z} = -kz$$

OSSIA UN' OSCILLATORE ARMONICO SEMPLICE

$$\Rightarrow z(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

DI CUI TROVO LE COSTANTI RIPONENDO LE CONDIZIONI AL CONTORNO:

$$\begin{cases} z(0) = x(0) - x_0 = -x_0 \\ \dot{z}(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(0) = A \sin \varphi = -x_0 \\ \dot{z}(0) = A \omega \cos(\varphi) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} A = -x_0 \\ \varphi = \pi/2 \end{cases}$$

QUINDI

$$z(t) = -x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 - x_0 \cos \omega t$$

VEDIAMO LA DIFFERENZA TRA MOLLE IN SERIE E PARALLELO:

SERIE

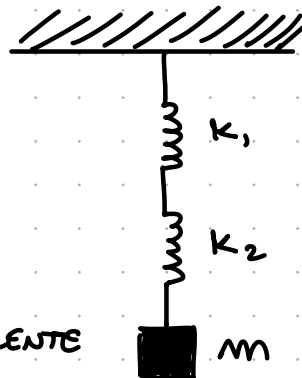
IL Δl È

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

COME SE FOSSERO SEPARATE,
PER CUI SAPENDO

$$\Delta l_i = \frac{mg}{k_i} \text{ TROVO } k \text{ EQUIVALENTE}$$

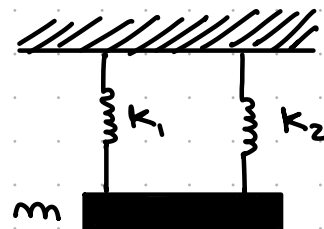
$$\frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2} = \frac{mg}{k_{eq}} \Rightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$



PARALLELO

IL Δl È $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l$

$$\text{SCRIVO } \begin{cases} F_1 = -k_1 \Delta l_1 \\ F_2 = -k_2 \Delta l_2 \end{cases}$$



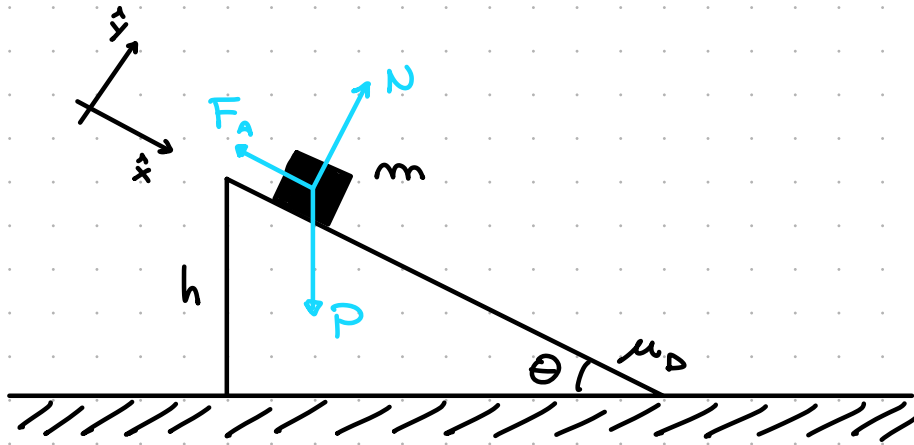
VOGLIO k EQUIVALENTE:

$$-k_{eq} \Delta l = -k_1 \Delta l_1 - k_2 \Delta l_2$$

$$\Rightarrow k_{eq} = k_1 + k_2$$

PIANO INCLINATO

ABBIAMO



COEFFICIENTE ATTRITO DINAMICO : μ_D

ANGOLO : θ

ALTEZZA : h

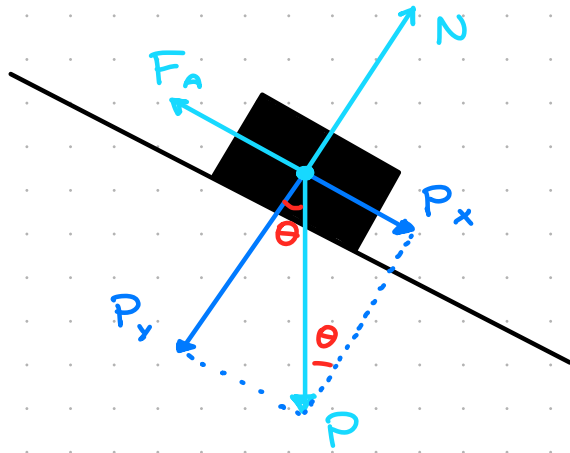
LUNGHEZZA : l

FORZA PESO : P

REAZIONE VINCOLARE : N

FORZA DI ATTRITO : F_a

RIDISEGNO LE FORZE APPLICATE AL CORPO



DUNQUE

$$\begin{cases} P_x = P \sin \theta \\ P_y = -P \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = mg \\ \vec{F}_a = -|N| \mu_D \hat{x} \end{cases}$$

IMPONENDO DUNQUE

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{SU} \quad \hat{x} \quad \text{ED} \quad \hat{y}$$

$$\begin{cases} \hat{x} & ma = P_x - F_A \\ \hat{y} & 0 = N - P_y \end{cases} ; \begin{cases} ma = mg \sin \theta - F_A \\ \boxed{N = P_y = mg \cos \theta} \end{cases}$$

$$\hat{x} : ma = mg \sin \theta - N \mu_0 \Rightarrow ma = mg \sin \theta - mg \mu_0 \cos \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{a = g \sin \theta - g \mu_0 \cos \theta} = \text{costante}$$

PER IL MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO SO

$$v^2 - v_0^2 = 2a \Delta x$$

CONSIDERO $v_0 = 0$ E $\Delta x = l$, COSÌ

$$v^2 = 2al \Rightarrow \boxed{v^2 = 2g(\sin \theta - \mu_0 \cos \theta)l}$$

MA NOTANDO $h = l \sin \theta$ POSSO SCRIVERE v IN FUNZIONE

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = 2gh \left(1 - \mu_0 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)}$$

4.4

$v_{\min}$

TC

RIESCA

IL

GIRO

DELLA

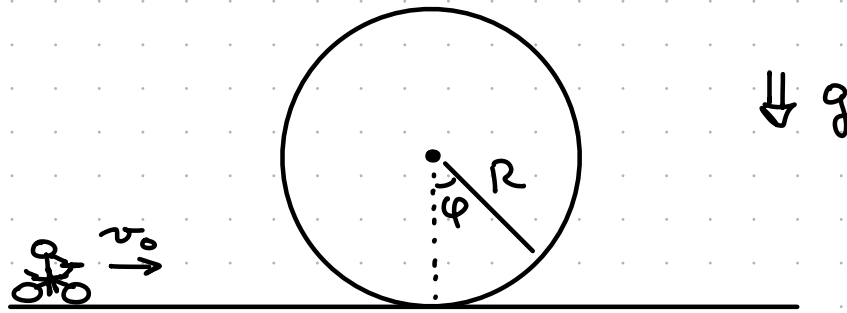
MORTE

GUIDA

DI

RAGGIO

R

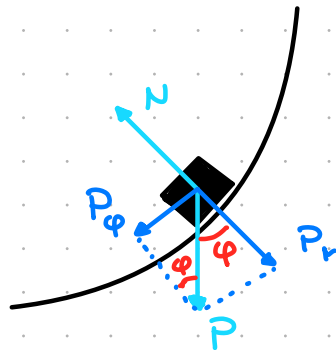


NOTA

IL PROBLEMA SI
PUÒ RISOLVERE ANCHE
CINEMATICAMENTE,
VEDI ESERCIZIO 2.1
DEL LIBRO COVARELLI
MASSARO

CHIAMO LE COORDINATE : $r, \varphi \Rightarrow$ POLARI

HO MOTO CIRCOLARE E ISTANTE PER ISTANTE HO LE SEGUENTI
FORZE IN GIOCO



φ ANGOLO DAL CENTRO RISPETTO LA VERTICALE

IMPONGO $F = ma$ IN COMPONENTI :

$$\begin{cases} \hat{r} & \left\{ \begin{aligned} ma_r &= N - P_r \\ \hat{\varphi} & \left\{ \begin{aligned} ma_\varphi &= -P_\varphi \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. ; \quad \left\{ \begin{aligned} ma_r &= N - mg \cos \varphi \\ ma_\varphi &= -mg \sin \varphi \end{aligned} \right.$$

RICORDANDO

$$\begin{cases} a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \\ a_\varphi = \frac{dv}{dt} = r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$

MA

SAPENDO

$$r = R = \text{cost}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_r = -r \dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi = r \ddot{\varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mR \dot{\varphi}^2 = N - mg \cos \varphi \\ mR \ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \end{cases}$$

COMINCIO CON

$$R \ddot{\varphi} = -g \sin \varphi$$

STRUTTO UN TRUCCHETTO

MOLTIPLICO

PER $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} \ddot{\varphi} = -\frac{g}{R} \sin \varphi \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \dot{\varphi} = -\frac{g}{R} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} d\varphi = -\frac{g}{R} \sin \varphi d\varphi \Rightarrow \int_{\dot{\varphi}_0}^{\dot{\varphi}} \dot{\varphi} d\varphi = -\frac{g}{R} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varphi' d\varphi'$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2}{2} = \frac{g}{R} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi}^2(\varphi) = \dot{\varphi}_0^2 + 2 \frac{g}{R} (\cos \varphi - 1)}$$

ORA GUARDO a_r :

$$m a_r = m R \dot{\varphi}^2 = N - mg \cos \varphi$$

$$\Rightarrow m R \left(\dot{\varphi}_0^2 + 2 \frac{g}{R} (\cos \varphi - 1) \right) = N - mg \cos \varphi$$

$$\Rightarrow m R \dot{\varphi}_0^2 + 2 mg \cos \varphi - 2 mg = N - mg \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{N = 3 mg \cos \varphi - 2 mg + m R \dot{\varphi}_0^2}$$

PER FARE IL GIRO SERVE CHE N CI SIA SEMPRE

$$\Rightarrow N \geq 0 \quad \Rightarrow 3 mg \cos \varphi - 2 mg + m R \dot{\varphi}_0^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow m R \dot{\varphi}_0^2 \geq 2 mg - 3 mg \cos \varphi \quad \Rightarrow \dot{\varphi}_0^2 R \geq 2g - 3g \cos \varphi$$

$$\text{HO } a_r = R \dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = R \cdot R \dot{\varphi}^2 \Rightarrow \boxed{v^2 \geq 2 R g - 3 R g \cos \varphi}$$

QUANDO È LA DX HO IL TERMINE CHE MI HASSIMO INTERESSA POSSO TROVARE

$$\text{MAX} \Rightarrow \varphi = \pi$$

$$\Rightarrow v^2 \geq 2 R g + 3 R g \Rightarrow$$

$$\boxed{v_{\min} \geq \sqrt{5 R g}}$$

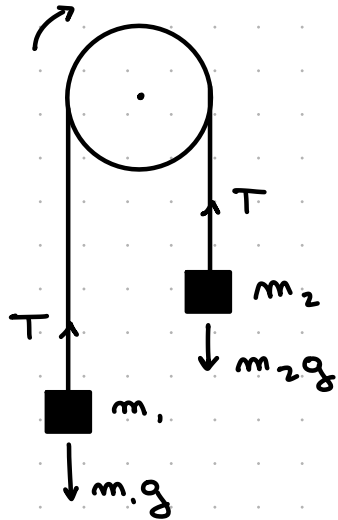
exe 5

MACCHINARIO DI ATWOOD

(ES 2.2 LIBRO MASSARO)

m_1

DETERMINA LA TENSIONE E L'ACCELERAZIONE DELLA CORDA



MI CHIEDO SOSTANZIALMENTE COME SI MUOVE IL SISTEMA.

ESSENDO LA CORDA INESTENSIBILE E CONTINUA LA TENSIONE SARÀ UGUALE IN TUTTI I PUNTI DELLA FUNE. ANCHE L'ACCELERAZIONE SARÀ LA STESSA PER ENTRAMBE LE MASSE.

SCRIVIAMO IL SISTEMA CON LE LEGGI DELLA DINAMICA DELLE DUE MASSE

$$\begin{cases} m_1 a = -m_1 g + T \\ m_2 a = m_2 g - T \end{cases}$$

COME SISTEMA DI RIFERIMENTO SI È PRESO QUELLO DIRETTO DA m_1 VERSO m_2 (SENSO DI ROTAZIONE).



RISOLVO IL SISTEMA

$$\begin{cases} a = -g + \frac{1}{m_1} T \\ -m_2 g + \frac{m_2}{m_1} T = m_2 g - T \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -g + \frac{1}{m_1} T \\ T \frac{m_1 + m_2}{m_1} = 2 m_2 g \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} - 1 \right) g \\ T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \\ T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \end{cases}$$

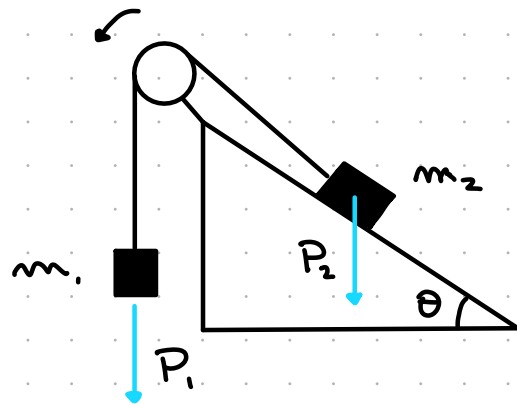
NOTA CHE SE $m_2 > m_1$, ALLORA LA CARRUCCOLA GIRA SECONDO IL RIFERIMENTO (SE $m_1 > m_2$ GIRA AL CONTRARIO).

ALTRO MODO PER TROVARE L'ACCELERAZIONE. SCRIVO L'EQUAZIONE DEL MOTO DEL SISTEMA COMPLESSIVO (USO LA RESULTANTE DELLE FORZE ESTERNE):

$$F_{\text{ext}} = -m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

LA TENSIONE È UNA FORZA INTERNA E NON CONTRIBUISCE AD a .

5.1



$$m_1 = 7 \text{ kg}$$

$$m_2 = 3 \text{ kg}$$

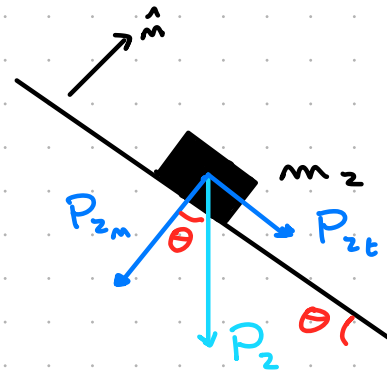
DETERMINA : T, a DELLA CORDA
 N DEL PIANO INCLINATO

SCELGO UN VERSO DI ROTAZIONE (SR) E IMPOSTO LA LEGGE DELLA DINAMICA PER m_1 ED m_2

$$\begin{cases} m_1 a = P_1 - T \\ m_2 a = T - P_2 \sin \theta \end{cases}$$

E SCEGLIENDO UN ASSE $\perp$ AL PIANO (RIVOLTO VERSO L'ALTO) POSSO SCRIVERE

$$0 = N - P_2 \cos \theta$$



QUINDI

$$\begin{cases} N = m_2 g \cos \theta \\ m_1 a = m_1 g - T \\ m_2 a = T - m_2 g \sin \theta \end{cases}$$

$$i \begin{cases} N = m_2 g \cos \theta \\ a = g - T/m_1 \\ m_2 g - \frac{m_2}{m_1} T = T - m_2 g \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = m_2 g \cos \theta \\ a = g - T/m_1 \\ \frac{m_1 + m_2}{m_1} T = m_2 (1 + \sin \theta) g \end{cases}$$

$$; \begin{cases} N = m g \cos \theta \\ a = g - \frac{m_2 (1 + \sin \theta)}{m_1 + m_2} g \\ T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sin \theta) g \end{cases}$$

$$N = m_2 g \cos \theta$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sin \theta) g$$

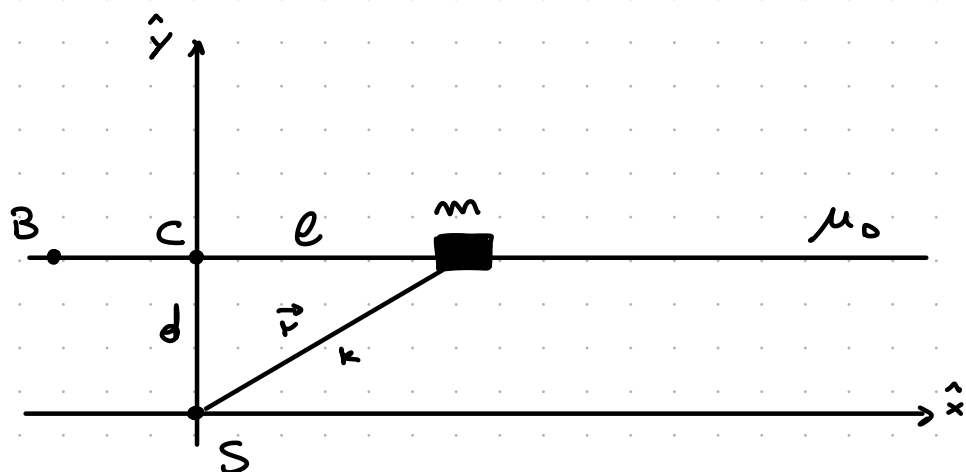
$$a = \frac{m_1 + m_2 - m_2 - m_2 \sin \theta}{m_1 + m_2} g \Rightarrow$$

$$a = \frac{m_1 - m_2 \sin \theta}{m_1 + m_2} g$$

$$a = \frac{F_{\text{ris}}}{m_{\text{tot}}} \rightarrow \text{RISULTANTE LUNGO LA DIREZIONE DEL MUOTO}$$

5.2

S.3 m , τ = RAGGIUNGE C



DETERMINA :

- x DA C TC $d=0$
- τ
- μ_s TC RIMANGA IN B

SCELGO IL SR $(\hat{x}, \hat{y})$. m INIZIALMENTE SI TROVA IN (x, d) .

HO $\vec{F}_{EL} = -k\vec{r}$, $\vec{r}$ DISTANZA $m-S$.

SCRIVO LE EQUAZIONI DELLA DINAMICA LUNGO GLI ASSI

$$\begin{cases} m\ddot{x} = (\vec{F}_{EL} \cdot \hat{x}) + \mu_0 N \\ 0 = (\vec{F}_{EL} \cdot \hat{y}) + N - mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -kx + \mu_0 N \\ N = mg + kd \end{cases}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = \mu_0 mg + \mu_0 kd - kx$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = \mu_0 mg + \mu_0 kd - kx$$

POSSIAMO GIÀ TROVARE IL PUNTO IN CUI L'ACCELERAZIONE È NULLA :

$$m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \mu_0(mg + kd) - kx_0 = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{\mu_0}{k}(mg + kd)}$$

COSÌ DESCRIVO

$$m\ddot{x} = \mu_0(mg + kd) - kx = k \frac{\mu_0}{k}(mg + kd) - kx$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -k(x - x_0)$$

CHE POSSO VEDERE ESSERE UN' OSCILLATORE ARMONICO

$$z = x - x_0 \Rightarrow \dot{z} = \dot{x} \Rightarrow \ddot{z} = \ddot{x}$$

$$m\ddot{z} = -kz \Rightarrow z(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + A \sin(\omega t + \varphi)} \quad \text{CON} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ATTENZIONE PERÒ CHE QUESTO VALE PER LA PRIMA OSCILLAZIONE.

POSSO DETERMINARE A E φ GRAZIE A DELLE CONDIZIONI INIZIALI:

$$\int x(0) \equiv \ell = x_0 + A \sin(\varphi)$$

$$\dot{x}(0) \equiv 0 = A\omega \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = l - x_0 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$x(t) = x_0 + (l - x_0) \cos(\omega t)$$

CERCO τ :

IMPONGO $x(\tau) = x_c = 0 = x_0 + (l - x_0) \cos(\omega \tau)$

$$\Rightarrow -\frac{x_0}{l - x_0} = \cos \omega \tau \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arccos\left(-\frac{x_0}{l - x_0}\right)$$

DEVO CERCARE μ_s MINIMO. LA COSA CHE SO È CHE M IN B SI FERMA :

$$\dot{x}(t_B) = 0 = -(l - x_0) \sin(\omega t_B) \Rightarrow \omega t_B = \pi \Rightarrow$$

$$t_B = \frac{\pi}{\omega}$$

DUNQUE ALLORA : $x_B = x(t_B) = x_0 + (l - x_0) \cos\left(\omega \frac{\pi}{\omega}\right) = x_0 - (l - x_0)$

$$\Rightarrow x_B = 2x_0 - l$$

CALCOLO LA FORZA CHE HO IN B :

$$F_{att} = \mu_s N = \mu_s (k\ell + mg)$$

E AFFINCHÉ SIA FERMO DEVO AVERE CHE LA FORZA DI RICHIAMO

sia INFERIORE

$$F_{elx} = -k(-|x_0|) = k|2x_0 - \ell|$$

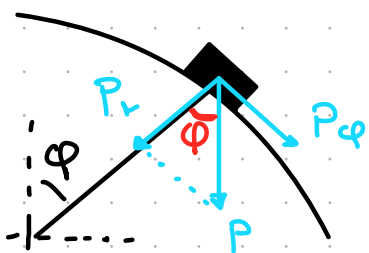
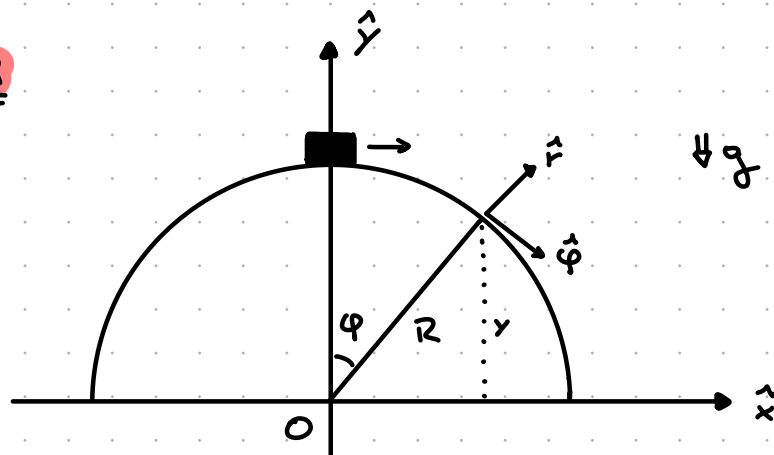
$$\Rightarrow k|2x_0 - \ell| \leq \mu_s(kd + mg)$$

$\Rightarrow$

$$\mu_s \geq \frac{k|2x_0 - \ell|}{kd + mg}$$

exe 6

6.1



so

$$\begin{cases} a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \\ a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_\varphi = R\ddot{\varphi} \\ a_r = -R\dot{\varphi}^2 \end{cases}$$

IMPONGO LE EQUAZIONI DEL MOTO

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} & mR\ddot{\varphi} = P_\varphi \sin\varphi \\ \dot{r} & -mR\dot{\varphi}^2 = -P_r \cos\varphi + N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mR\ddot{\varphi} = mg \sin\varphi \\ -mR\omega^2 = N - mg \cos\varphi \end{cases}$$

$(\dot{\varphi} = \omega)$

TROVO $\dot{\varphi}^2$ USANDO LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$mgR = \frac{m}{2}v^2 + mgR \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}v^2 = mgR(1 - \cos \varphi) \Rightarrow v^2 = 2gR(1 - \cos \varphi)$$

VOGLIO SAPERE SAPERE QUANDO IL IL BOB SI STACCA, OSSIA, VOGLIO QUANDO IL VINCULO NON È PIÙ SOLLECITATO ($N=0$):

2° EQ DEL MOTO CON $N=0$

$$\Rightarrow -mR\omega^2 = -mg \cos \varphi_0$$

$$v = \omega R \Rightarrow v^2 = \omega^2 R^2$$

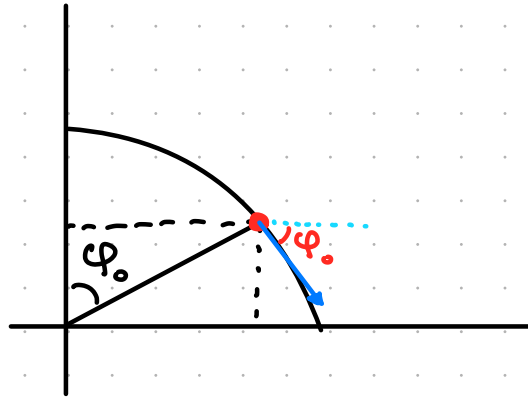
$$\Rightarrow -m \frac{v^2}{R} = -mg \cos \varphi_0 \Rightarrow v^2 = gR \cos \varphi_0$$

$$\Rightarrow 2gR(1 - \cos \varphi_0) = gR \cos \varphi_0 \Rightarrow 3gR \cos \varphi_0 = 2gR$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \varphi_0 = \frac{2}{3}}$$

φ_0 È L'ANGOLO DI DISTACCO E QUANDO IL BOB SI STACCA DALLA COLLINETTA.

ORA SAREBBE UN SEMPLICE MOTO PARABOLICO. IL PUNTO DI PARTENZA DEL MOTO È



$$\begin{cases} x_0 = R \sin \varphi_0 \\ y_0 = R \cos \varphi_0 \end{cases}$$

HO VELOCITÀ INIZIALE

$$v_0^2 = 2gR(1 - \cos \varphi) \Big|_{\varphi_0} = 2gR \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2gR}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2gR}{3}}}$$

LE COMPONENTI SARANNO

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \varphi_0 \\ v_{0y} = -v_0 \sin \varphi_0 \end{cases}$$

SCRIVENDO LE LEGGI ORARIE SI POSSONO POI TROVARE:
TRAJETTORIA, GITTATA E TEMPO DI VOLO MA ATTENZIONE CHE
NEL FORMULARIO SI USA $x_0 = y_0 = 0$!

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 \cos \varphi_0 t \\ y(t) = y_0 - v_0 \sin \varphi_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{v_0 \cos \varphi_0} = t \quad \Rightarrow \quad y(x) = y_0 - v_0 \sin \varphi_0 \frac{x - x_0}{v_0 \cos \varphi_0} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos \varphi_0} \right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = y_0 - (x - x_0) \tan \varphi_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi_0} (x - x_0)^2}$$

LA GITTATA:

$$y(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \varphi_0 t - y_0 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-v_0 \sin \varphi_0 \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \varphi_0 + 2 y_0 g}}{g} = \frac{-v_0 \sin \varphi_0 \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \varphi_0 + 2 g R \cos^2 \varphi_0}}{g}$$

$$\text{se } \cos \varphi_0 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \varphi_0 = \frac{4}{9} = 1 - \sin^2 \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \varphi_0 = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$t_{1,2} = \frac{-v_0 \frac{\sqrt{5}}{3} \pm \sqrt{\frac{5}{9} v_0^2 + \frac{4}{3} g R}}{g}$$

RICORDO $v_0^2 = \frac{2gR}{3}$

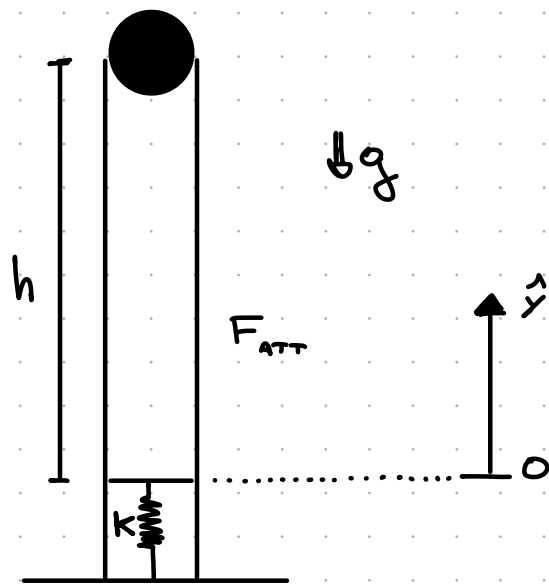
$$= \frac{-\sqrt{\frac{10}{27} g R} \pm \sqrt{\frac{10}{27} g R + \frac{4}{3} g R}}{g} = \frac{-\sqrt{\frac{10gR}{27}} \pm \sqrt{\frac{46gR}{27}}}{g}$$

UNICA ACCETTABILE $\tau = \frac{-\sqrt{\frac{10}{27}} + \sqrt{\frac{46}{27}}}{g} \sqrt{gR} = \frac{6}{\sqrt{27}} \sqrt{\frac{R}{g}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{R}{g}}}$

PER CUI :

$$\begin{aligned} X(\tau) \equiv x_G &= x_0 + v_0 \sin \varphi_0 \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{R}{g}} \\ &= R \sin \varphi_0 + \sqrt{\frac{2gR}{3}} \sin \varphi_0 \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{R}{g}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} R + \frac{2\sqrt{2}}{3} R \frac{\sqrt{5}}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{5}R}{3} \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)} \end{aligned}$$

6.2



DETERMINA : • v PRIMA CHE TOCCHI LA MOLLA
• Δl DI CUI SI COMPRIME LA MOLLA
• H A CUI RITORNA LA BIGLIA

HO MOTO DI CADUTA MA CON ATTRITO, SCRIVO L'EQUAZIONE DELLA DINAMICA

$$-mg + F_{ATT} = ma \Rightarrow$$

$$a = \frac{F_{ATT}}{m} - g$$

COSTANTE ESSENDO
 $|F_{ATT}| = \text{cost}$

so $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{F_{ATT} - mg}{m} t$$

so $v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_h^y dy' = \int_0^t dt' \left(\frac{F_{ATT} - mg}{m} \right) t'$

$$\Rightarrow y - h = \frac{F_{ATT} - mg}{2m} t^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = h + \frac{F_{ATT} - mg}{2m} t^2}$$

METTO LO ZERO DI $\hat{y}$ SULLA MOLLA. PER CUI TOCCA LA MOLLA A

$$y(\tau) = 0 \Rightarrow -h = \frac{F_{ATT} - mg}{2m} \tau^2 \Rightarrow \tau^2 \frac{mg - F_{ATT}}{2m} = h$$

$$\Rightarrow \tau^2 = \frac{2mh}{mg - F_{ATT}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = \sqrt{\frac{2mh}{mg - F_{ATT}}}}$$

LA VELOCITÀ È

$$v(\tau) = \frac{F_{ATT} - mg}{m} \sqrt{\frac{2mh}{mg - F_{ATT}}} = \boxed{-\sqrt{\frac{2h(mg - F_{ATT})}{m}}}$$

LA SI SAREBBE POTUTA TROVARE IMPONENDO LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA:

$$mgh = \frac{m}{2} v^2 + F_{ATT} h \Rightarrow |v| = \sqrt{\frac{2h(mg - F_{ATT})}{m}}$$

LA COMPRESSIONE LA TROVO DALLA CONSERVAZIONE DEL
ENERGIA, CONSIDERANDO Δl ANCHE NELL'ENERGIA POTENZIALE E NELL'ATTIVO

$$mg(h + \Delta l) = F_{ATT}(h + \Delta l) + \frac{1}{2} k \Delta l^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k \Delta l^2 + (F_{ATT} - mgh) \Delta l + (F_{ATT} - mg)h = 0$$

$$\Rightarrow \Delta l_{1,2} = \frac{(mgh - F_{ATT}) \pm \sqrt{(F_{ATT} - mgh)^2 - 2(F_{ATT} - mg)hk}}{k}$$

PRENDO LA Δl POSITIVA VISTO CHE VOGLIO LA MASSIMA
COMPRESSIONE

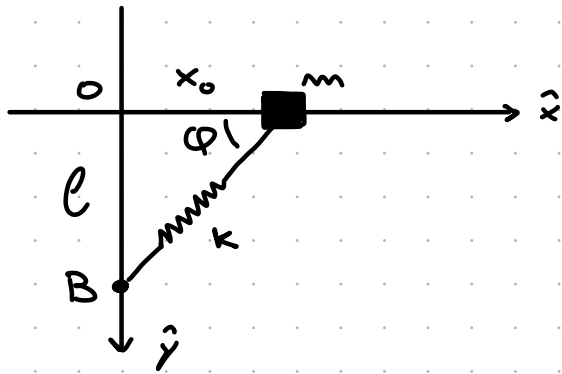
ANCHE PER H USO LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA:

$$mgh = mgH + F_{ATT}(h + 2\Delta l + H)$$

$$\Rightarrow mgh - F_{ATT}(h + 2\Delta l) = (mg + F_{ATT})H$$

$$\Rightarrow H = \frac{mgh - F_{ATT}(h + 2\Delta l)}{mg + F_{ATT}}$$

6.3



DETERMINA:

- $v_{\max}$

- $a(t)$

- $\mu_{\max}$ SE LUNGHEZZA A RIPOSO = l

IMPONGO LA LEGGE DELLA DINAMICA

$$\begin{cases} m a_x = \vec{T}_{EL} \cdot \hat{x} \\ 0 = m g + \vec{T}_{EL} \cdot \hat{y} - N \end{cases}$$

CON $\vec{r}_0 = (x_0, l)$

E $\vec{T}_{EL} = k \vec{r}$

, $\vec{r} = (x, l)$

↓
VINCOLATO

$$\begin{cases} m a_x = -k x \\ 0 = m g + k l - N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{N = m g + k l}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} x \Rightarrow \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{m} x \Rightarrow v dv = -\frac{k}{m} x dx$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} \Big|_0^v = -\frac{k}{m} \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^x \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{k}{2m} (x_0^2 - x^2)$$

$$\Rightarrow v(x) = \sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x^2)}$$

LA VELOCITÀ MASSIMA CE L'HO QUANDO L'ALLUNGAMENTO DELLA MOLLA È MINIMO $\Rightarrow x=0$ (PUNTO 0)

$$\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{kx_0^2}{m}}$$

NOTA CHE SI SAREBBE POTUTO USARE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA:

$$\frac{1}{2}k(x_0^2 + \ell^2) = \frac{m}{2}v_{\max}^2 + \frac{1}{2}k\ell^2$$

→ NORMA →

$$\Rightarrow \frac{m}{2}v_{\max}^2 = \frac{1}{2}k(x_0^2 + \ell^2) - \frac{1}{2}k\ell^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{kx_0^2}{m}}$$

ORA CALCOLIAMO $a(t)$:

$$\hat{x}: m\ddot{x} = F_{EL} = -k\vec{r} \cdot \hat{x} = -k\sqrt{x^2 + \ell^2} \cos\varphi = -k\sqrt{x^2 + \ell^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \ell^2}}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} = -kx} \quad \text{MOTO ARMONICO}$$

$$\Rightarrow x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

IMPONGO

$$\begin{cases} x(0) = A \sin \varphi \equiv x_0 \\ \dot{x}(0) = A \omega \cos(\omega t + \varphi) \big|_0 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} A \sin \varphi = x_0 \\ A \omega \cos \varphi = 0 \end{cases} ; \begin{cases} A = x_0 \\ \varphi = \pi/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow v(t) = -x_0 \omega \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow a(t) = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$

METTIAMO LA LUNGHEZZA A RIPOSO l :

DUNQUE

$$m a = -k(\vec{r} - l) \cdot \hat{x} = -k(\sqrt{x^2 + l^2} - l) \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}}$$

$$= -kx + kl \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}} = -kx + \beta(x)x$$

NON È UN MOTO ARMONICO SEMPLICE POICHÉ IL COEFFICIENTE β DIPENDE DA x . POSSO USARE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PER TROVARE

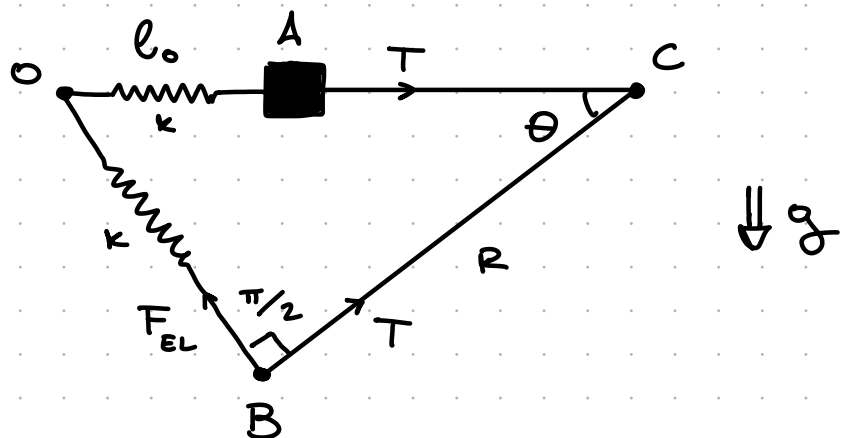
$\mu_{\max}$:

$$\frac{1}{2} \kappa (\sqrt{x_0^2 + l^2} - l)^2 = \frac{m}{2} \mu_{\max}^2$$

$$\Rightarrow \mu_{\max}^2 = \frac{\kappa}{m} (\sqrt{x_0^2 + l^2} - l)^2$$

$$\Rightarrow \mu_{\max} = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} (\sqrt{x_0^2 + l^2} - l)$$

6.4



$$F_{EL} = -k(l - l_0)$$

$$l_0 = \frac{2}{3}R$$

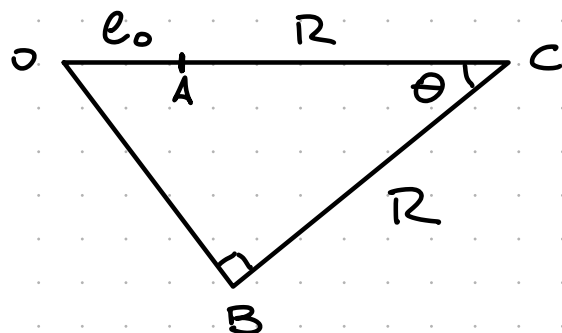
DETERMINA : • $W_{EL}(A, B)$

• k

• T_B

• $|a(B)|$

SISTEMIAMO I LATI DEL TRIANGOLO :



$$\overline{OC} = R + l_0 = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R$$

$$\overline{CB} = R$$

$$\overline{OA} = l_0 = \frac{2}{3}R$$

$$\overline{OB} = \sqrt{\frac{25}{9}R^2 - R^2} = \sqrt{\frac{16}{9}R^2} = \frac{4}{3}R$$

QUANDO MN È IN B :

$$\begin{cases} \overline{OC} \cos \theta = \overline{BC} & \Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5} \\ \overline{OC} \sin \theta = \overline{OB} & \Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{5} \end{cases}$$

PER TROVARE IL LAVORO DELLE FORZE ELASTICHE SFRUTTO IL TEOREMA SULL'ENERGIA:

$$W_{AB} = \frac{1}{2} k \Delta x^2 = \frac{1}{2} k (\overline{OB} - \overline{OA})^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{4}{3} R - \frac{2}{3} R \right)^2$$

$$\Rightarrow W_{AB} = \frac{1}{2} k \left(\frac{2}{3} R \right)^2 = \frac{2}{9} k R^2$$

NEL PUNTO B APPLICHO LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

(METTO LO 0 DELL'ENERGIA POTENZIALE ALLA QUOTA di 0)

$$0 = \frac{2}{9} k R^2 - mg R \sin \theta$$

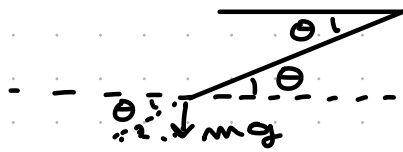
ALLA QUOTA di 0 HO ENERGIE
ALLA QUOTA di B

$$\Rightarrow \frac{2}{9} k R^2 = mg R \frac{4}{5} \Rightarrow k = \frac{9}{2} \frac{4}{5} \frac{mg}{R} \Rightarrow \boxed{k = \frac{18}{5} \frac{mg}{R}}$$

ORA CERCHIAMO LA TENSIONE DINAMICA. IN B LA VELOCITÀ È NULLA, PER CUI ANCHE L'ACCELERAZIONE CENTRIFUGA È NULLA. SE VEDO DUNQUE LA PROIEZIONE SULLA DIREZIONE

IN B SFRUTTANDO SOLO LA È NULLA, PER CUI ANCHE LA È NULLA. SE VEDO DUNQUE LA RADIALE HO:

$$0 = T - mg \sin \theta$$



$$\Rightarrow T = mg \sin \theta = \frac{4}{5} mg$$

ORA
MOTO : CERCO IL MODULO DELL'ACCELERAZIONE CON L'EQUAZIONE DEL

$$m a_t = -mg \cos \theta + k (OB - l_0)$$

$$\Rightarrow a_t = \frac{k}{m} \frac{2}{3} R - g \frac{3}{5} \quad \rightarrow \text{C'È UN SEGNO DI DIFFERENZA SE SI CONSIDERA } F_{EL} \text{ DI RICHIAMO}$$

$$\Rightarrow |a| = \sqrt{a_t^2 + a_c^2}$$

$$a_c = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$|a| = a_t = \frac{2}{3} \frac{k}{m} R - \frac{3}{5} g$$

$$k = \frac{18}{5} \frac{mg}{R}$$

$$\Rightarrow |a| = \frac{2}{3} \frac{18}{5} g - \frac{3}{5} g = \frac{12}{5} g - \frac{3}{5} g$$

$$\Rightarrow |a| = \frac{9}{5} g$$

6.5 $m, v_0, v(t) = v_0 e^{-t/\tau} \quad t \in \mathbb{R}$

DETERMINA: • LA FORZA CHE LO RALLENTA

• P TC $v(t) = \text{cost}$ SE $t > \tau$

• $W_{ATT} [0, \tau]$

$$v(t) \rightarrow a = \frac{dv}{dt} = -\frac{v_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

NON C'È NULLA IN GIOCO AD ECCEZIONE DI F_{ATT} . SCRIVO L'EQUAZIONE DELLA DINAMICA

$$-F_{ATT} = ma \Rightarrow F_{ATT} = -ma(t) = \frac{m}{\tau} v_0 e^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{F_{ATT}(v) = \frac{m}{\tau} v(t)}$$

($\hat{x}$ VERSO DEL MOTO)

DOPO $t = \tau$: $v(\tau) = v_0 e^{-1} = \frac{v_0}{e} \Rightarrow F_{ATT} = \frac{m}{\tau} \frac{v_0}{e}$

LA POTENZA CERCATA SARA' $P = -P_{ATT} = -(\vec{F}_{ATT} \cdot \vec{v})$

$$\Rightarrow P = -(-F_{ATT}(\tau) v(\tau)) = \frac{m v_0^2}{\tau e^2}$$

IL LAVORO DI F_{ATT} LO POSSO TROVARE IN DUE MODI

CONSERVAZIONE

DELL'ENERGIA :

$$\omega_{ATT} = \Delta K = \frac{m}{2} v_0^2 \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$$

INTEGRALE :

MA

DEVO

USARE

L'ESPRESSIONE

DI

$P_{ATT}(t)$

$$P_{ATT}(t) = \vec{F}_{ATT} \cdot \vec{v} = - \frac{m}{\tau} v_0^2 e^{-2t/\tau}$$

$$\omega_{ATT} = \int_0^{\tau} dt \left(\frac{m v_0^2}{\tau} \right) e^{-2t/\tau} = \frac{m v_0^2}{\tau} \left(-\frac{\tau}{2} \right) e^{-2t/\tau} \Big|_0^{\tau}$$

$$= - \frac{m v_0^2}{2} \left(e^{-2} - 1 \right) = \boxed{\frac{m}{2} v_0^2 \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)}$$