Esercizi

Meccanica

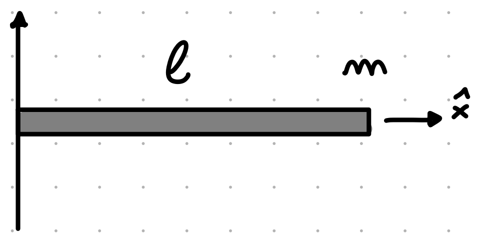
MOMENTI D'INERZIA

RIPORTO I CALCOLI PER I DIVERSI MOMENTI D'INERZIA DI CORPI RIGIDI NOTEVOLI. SARANNO UTILI PER LA PARTE DI CORPO RIGIDO.

INDICHERÒ CON b = DISTANZA dm DALL'ASSE DI ROTAZIONE

ASTA 1

VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN'ASTA CON DENSITÀ LINEARE $\lambda = cost$ PER UN'ASSE PASSANTE PER UN ESTREMO

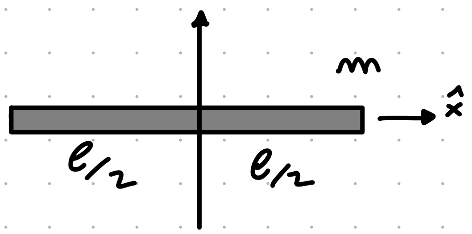


LA MASSA È $dm = \lambda dx \Rightarrow m = \lambda \ell$

$$I = \int b^2 dm = \int_0^{\ell} x^2 \lambda dx = \lambda \frac{\ell^3}{3} = \lambda \ell \frac{\ell^2}{3} = \boxed{\frac{1}{3} m \ell^2}$$

ASTA 2

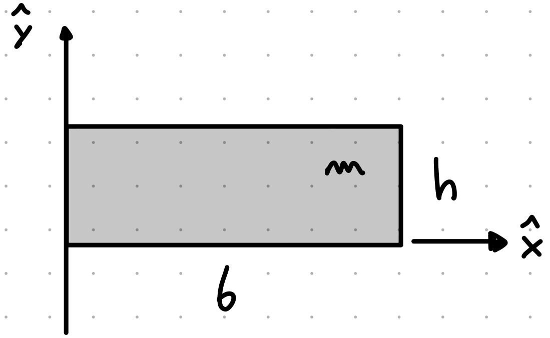
VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN'ASTA CON DENSITÀ LINEARE $\lambda = cost$ PER UN'ASSE PASSANTE PER LA METÀ.



LA MASSA È $dm = \lambda dx \Rightarrow m = \lambda \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dx = \lambda \ell$

$$I = \int b^2 dm = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 \lambda dx = \lambda \frac{1}{3} \left(\frac{\ell^3}{8} - \frac{(-\ell)^3}{8} \right) = \lambda \frac{1}{3} \frac{\ell^3}{4} = \boxed{\frac{1}{12} m \ell^2}$$

RETTANGOLO 1 VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN RETTANGOLO CON DENSITÀ SUPERFICIALE $\sigma = \text{cost}$ PER UN'ASSE PASSANTE PER UN ESTREMO

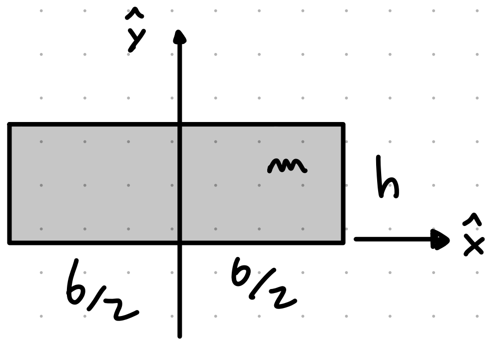


LA MASSA È:

$$dm = \sigma\, dS \Rightarrow m = \sigma \int_0^b dx \int_0^h dy = \sigma b h$$

$$I = \int b^2\, dm = \int x^2 \sigma\, dS = \sigma \int_0^b x^2\, dx \int_0^h dy = \frac{1}{3} \sigma b^3 h = \boxed{\frac{1}{3} m b^2}$$

RETTANGOLO 2 VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN RETTANGOLO CON DENSITÀ SUPERFICIALE $\sigma = \text{cost}$ PER UN'ASSE PASSANTE PER LA METÀ



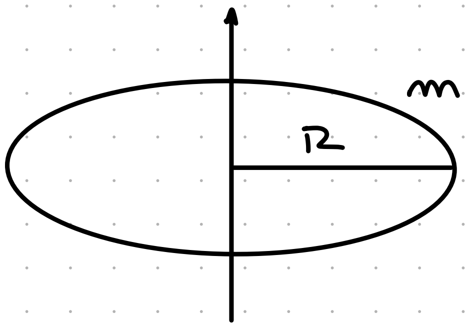
LA MASSA È:

$$dm = \sigma\, dS \Rightarrow m = \sigma \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_0^h dy = \sigma b h$$

$$I = \int b^2\, dm = \int x^2 \sigma\, dS = \sigma \int_{-b/2}^{b/2} x^2\, dx \int_0^h dy = \sigma h \frac{1}{3}\left(\frac{b^3}{8} - \frac{(-b)^3}{8}\right) = \boxed{\frac{1}{12} m b^2}$$

ANELLO

VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN ANELLO CON DENSITÀ LINEARE λ = COST PER UN ASSE PASSANTE PER IL CENTRO.



LA MASSA È

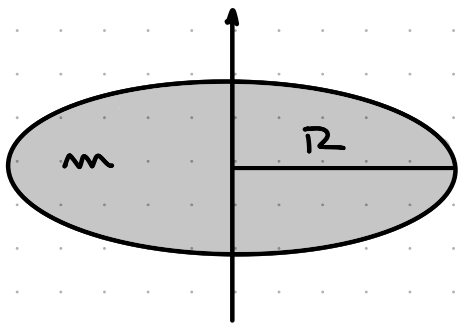
$$dm = \lambda \, dl \quad \Rightarrow \quad dm = \lambda \int_0^{2\pi} R \, d\theta = 2\pi R \lambda$$

$$dS = r \, dr \, d\theta$$ MA AVENDO $r = \text{COST} = R \Rightarrow dS \to dl = R \, d\theta$

$$I = \int b^2 \, dm = \int R^2 \lambda \, dl = \lambda R^2 \int_0^{2\pi} R \, d\theta = 2\pi \lambda R^3 = \boxed{mR^2}$$

DISCO 1

VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN DISCO CON DENSITÀ SUPERFICIALE σ = COST PER UN ASSE PASSANTE PER IL CENTRO.



RICORDO $dm = \sigma \, dS$, $dS = r \, dr \, d\theta$

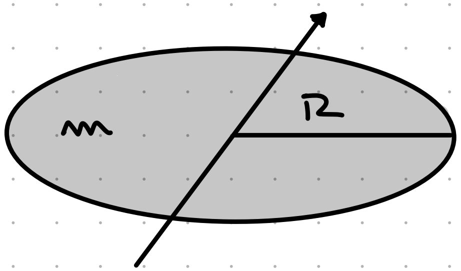
LA MASSA DEL DISCO È

$$m = \int \sigma \, dS = \sigma \int_0^R r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2 \sigma$$

$$I = \int b^2 \, dm = \int r^2 \, dm = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \sigma \, r \, dr \, d\theta = \int_0^R r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \sigma \, d\theta = \sigma \, 2\pi \frac{R^4}{4}$$

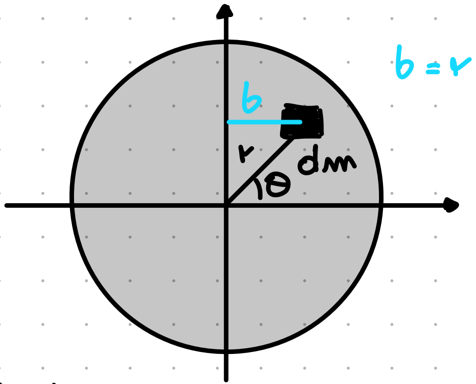
$$\Rightarrow I = \pi R^2 \sigma \frac{R^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2} m R^2}$$

DISCO 2 VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN DISCO CON DENSITÀ SUPERFICIALE σ = COST PER UN ASSE PASSANTE PER UN SUO DIAMETRO



LA MASSA DEL DISCO È

$$dm = \sigma dS \Rightarrow m = \pi R^2 \sigma$$



DALL'ALTO

$b = r\cos\theta$

$$I = \int b^2 dm = \int r^2 \cos^2\theta \, \sigma dS = \sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2\theta \, r \, dr \, d\theta$$

$$\Rightarrow I = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \sigma \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

CALCOLO $\int_a^b \cos^2\theta \, d\theta = \int_a^b \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 d\theta = \frac{1}{4}\int_a^b \left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} + 2\right) d\theta$

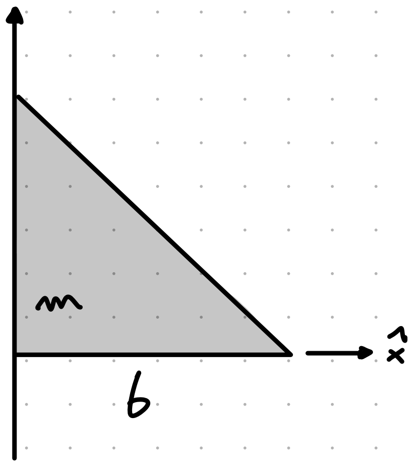
$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2i} e^{i2\theta} - \frac{1}{2i} e^{-i2\theta} + 2\theta\right\}\Bigg|_a^b = \frac{1}{4}\left\{\sin(2\theta) + 2\theta\right\}\Bigg|_a^b$$

CON $a = 0$, $b = 2\pi$ $\Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{4}\left(0 - 0 + 4\pi - 0\right) = \pi$

DUNQUE

$$I = \sigma \frac{R^4}{4} \pi = \pi R^2 \sigma \frac{R^2}{4} = \boxed{\frac{1}{4} m R^2}$$

TRIANGOLO RETTANGOLO



VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO CON DENSITÀ SUPERFICIALE σ = COST PER UN ASSE PASSANTE PER UN SUO CATETO.

LA MASSA È

$$dm = \sigma dS \Rightarrow m = \sigma \int dx\, dy$$

E HO $y(x) = h - \frac{h}{b} x$

$$\Rightarrow m = \sigma \int_0^b dx \int_0^{h - \frac{h}{b}x} dy = \sigma \int_0^b dx \left(h - \frac{h}{b} x \right)$$

$$= \sigma \left(hb - \frac{h}{b} \frac{b^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \sigma hb$$

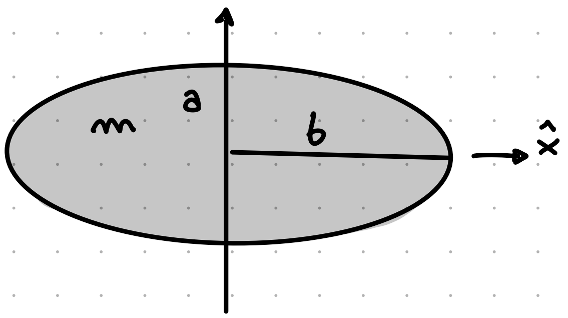
CALCOLO

$$I = \int b^2 dm = \int x^2 dm = \sigma \int x^2 dx\, dy = \sigma \int_0^b x^2 dx \int_0^{h - \frac{h}{b}x} dy = \sigma \int_0^b x^2 \left(h - \frac{h}{b} x \right) dx$$

$$\Rightarrow I = \sigma \int_0^b \left(h x^2 - \frac{h}{b} x^3 \right) dx = \sigma \left(h \frac{b^3}{3} - \frac{h}{b} \frac{b^4}{4} \right) = \sigma h b^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\Rightarrow I = \sigma h b^3 \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}\sigma h b^3 = \boxed{\frac{1}{6} m b^2}$$

ELLISSE VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN'ELLISSE CON DENSITÀ SUPERFICIALE σ = COST PER UN ASSE PASSANTE PER IL SEMIASSE PIÙ CORTO.



LA MASSA È

$$dm = \sigma\, dS \Rightarrow m = \sigma \int dx\, dy$$

MA SO

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow y = \sqrt{a^2\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)}$$

$$\Rightarrow m = \sigma \int_0^b dx \int_0^{y(x)} dy = \sigma \int_0^b dx\, a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} \qquad t = \frac{x}{b} \Rightarrow dx = b\,dt$$

$$= \sigma a b \int_0^1 dt \sqrt{1 - t^2} \qquad t = \sin\theta \qquad dt = \cos\theta\, d\theta$$

$$= \sigma a b \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sigma a b \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$$

(VEDI IN I DISCO 2): $\int_a^b \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{4}\left\{ \sin(2\theta) + 2\theta \right\}\Big|_a^b$

$$\Rightarrow m = \frac{\sigma a b}{4}\left(\sin(2\theta) + 2\theta \right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\sigma a b \pi}{4}$$

$$I = \int x^2 dm = \sigma \int_0^b x^2 dx \int_0^{y(x)} dy = \sigma \int_0^b a x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}$$

$t = \frac{x}{b}$

$dx = b\,dt$

$$= \sigma a b \int_0^1 dt \, b^2 t^2 \sqrt{1 - t^2}$$

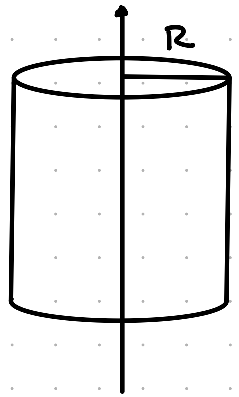
$t = \sin\theta \qquad dt = \cos\theta \, d\theta$

$$= \sigma a b^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sigma a b^3 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta}_{\frac{1}{32}\left(4\theta - \sin(4\theta)\right)\Big|_0^{\pi/2}}$$

$$= \frac{\sigma a b^3}{32} 2\pi = \frac{\sigma \pi a b^3}{16} = \boxed{\frac{1}{4} m b^2}$$

GUSCIO CILINDRICO

VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN GUSCIO CILINDRICO CON DENSITÀ SUPERFICIALE σ = COST PER UN ASSE COINCIDENTE CON IL SUO ASSE DI SIMMETRIA.



OVVIAMENTE USIAMO COORDINATE CILINDRICHE, $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$

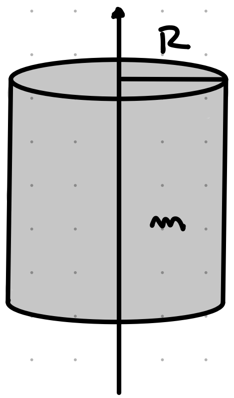
LA MASSA È (CONSIDERANDO $r \equiv R$)

$$dm = \sigma\, dS \Rightarrow m = \sigma R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \sigma 2\pi R h$$

$$I = \int b^2\, dm = \int R^2 \sigma R\, d\theta\, dz = \sigma R^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \sigma R^3 2\pi h = \boxed{m R^2}$$

CILINDRO

VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN CILINDRO CON DENSITÀ VOLUMICA ρ = COST PER UN ASSE COINCIDENTE CON IL SUO ASSE DI SIMMETRIA.

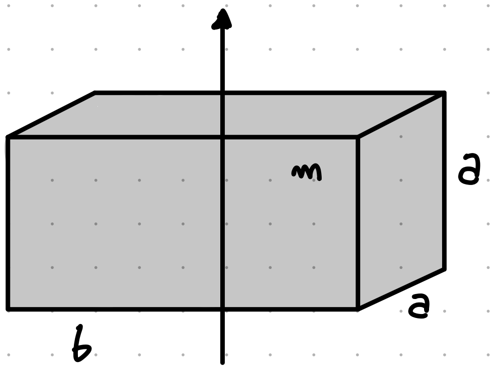


$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz \Rightarrow m = \rho \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \pi \rho R^2 h$$

$$I = \int b^2\, dm = \int r^2 \rho\, dV = \rho \int r^3\, dr\, d\theta\, dz = \frac{1}{4} \rho R^4 2\pi h = \frac{1}{2} \rho R^4 \pi h$$

$$\Rightarrow I = \boxed{\frac{1}{2} m R^2}$$

PARALLELEPIPEDO VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN PARALLELEPIPEDO CON DENSITÀ VOLUMICA ρ = COST PER UN ASSE PASSANTE AL CENTRO DELLA BASE



HO $dV = dx\,dy\,dz$

$$dm = \rho\, dV \Rightarrow m = \rho \int dx\,dy\,dz = \rho \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} dz$$

$$\Rightarrow m = \rho a^2 b$$

$$I = \int r^2\, dm = \rho \int \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 dx\,dy\,dz = \rho \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} dz\,(x^2+y^2)$$

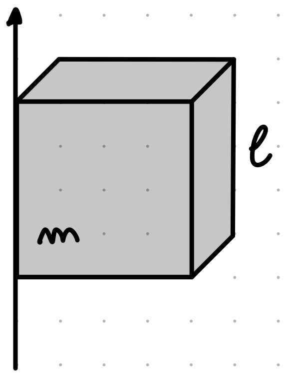
$$= \rho \int_{-a/2}^{a/2} dz \left\{ \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx \int_{-a/2}^{a/2} dy + \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy \right\}$$

$$= \rho a \left\{ \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} a + b \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \right\} = \rho a \left\{ \frac{a}{3} \cdot 2\frac{b^3}{8} + \frac{b}{3} \cdot 2\frac{a^3}{8} \right\}$$

$$= \rho a^2 b \left(\frac{b^2}{12} + \frac{a^2}{12} \right) \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)}$$

CUBO

VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN CUBO CON DENSITÀ VOLUMICA ρ = COST PER UN ASSE PASSANTE UN SUO SPIGOLO



$$dV = dx\,dy\,dz$$

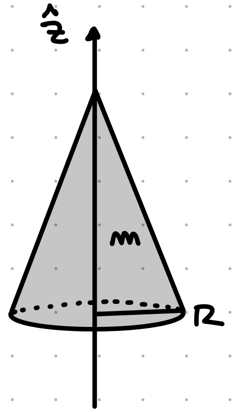
$$dm = \rho\, dV \Rightarrow m = \rho \int_0^{\ell} dx \int_0^{\ell} dy \int_0^{\ell} dz = \rho\,\ell^3$$

$$I = \int b^2\, dm = \rho \int \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 dx\,dy\,dz = \rho \int_0^{\ell} dx \int_0^{\ell} dy \int_0^{\ell} dz \,(x^2+y^2)$$

$$= \rho\,\ell \left(\frac{\ell^3}{3}\ell + \ell\frac{\ell^3}{3} \right) = \rho\,\ell^5 \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{3} m \ell^2}$$

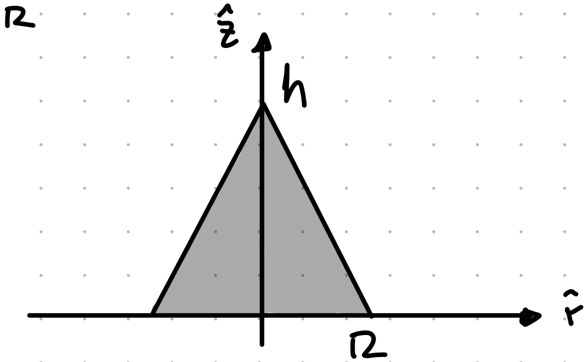
CONO

VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN CONO CON DENSITÀ VOLUMICA ρ = COST PER UN ASSE COINCIDENDE CON IL SUO ASSE DI SIMMETRIA.



CALCOLO LA MASSA : $dm = \rho\, dV \quad , \quad dV = dx\,dy\,dz$

PROIETTO SU UN PIANO $(\hat{y}, \hat{z})$



$$\Rightarrow \quad z(r) = h - \frac{h}{R} r$$

DUNQUE $\quad dm = \rho\, dV \Rightarrow m = \rho \int r\,dr\,d\theta\,dz = \rho \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{z(r)} dz$

$$\Rightarrow m = 2\pi \rho \int_0^R r \left(h - \frac{h}{R} r \right) dr$$

$$= 2\pi \rho \left(h \frac{R^2}{2} - \frac{h}{R} \frac{R^3}{3} \right) = 2\pi \rho h R^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{3} \pi R^2 h \rho$$

PER CUI

$$I = \int b^2 \, dm = \int r^2 \rho \, dV = \rho \int r^3 \, dr \, d\theta \, dz$$

$$= \rho \int_0^R r^3 \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{z(r)} dz = \rho \, 2\pi \int_0^R r^3 \left(h - \frac{h}{R} r \right) dr$$

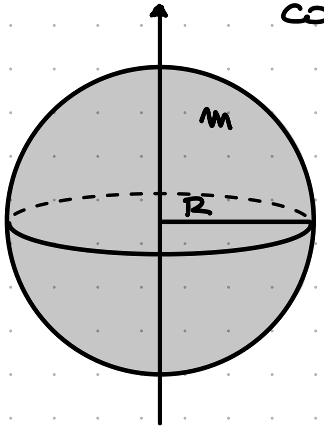
$$= 2\pi \rho \left(h \frac{R^4}{4} - \frac{h}{R} \frac{R^5}{5} \right) = 2\pi \rho h R^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)$$

$$= 2\pi \rho h R^4 \frac{1}{20} = \frac{1}{10} \pi \rho h R^4$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{3}{10} m R^2}$$

SFERA 1

VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UNA SFERA CON DENSITÀ VOLUMICA ρ = COST PER UN ASSE COINCIDENDE CON IL SUO ASSE DI SIMMETRIA.

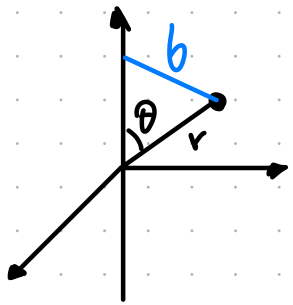


$$dV = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$dm = \rho \, dV \Rightarrow m = \rho \int r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi \frac{R^3}{3} \rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$I = \int b^2 dm$$

$$\Rightarrow I = \int r^2 \sin^2\theta \, \rho \, dV$$



$$b = r \sin\theta$$

$$\Rightarrow I = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{2}{5}\pi R^5 \rho \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta$$

CALCOLO

$$\int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = \int_0^\pi \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 d\theta = -\frac{1}{8i} \int_0^\pi d\theta \left(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^\pi d\theta \left(\frac{e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}}{2i} - 3 \, \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\theta\left(\sin(3\theta) - 3\sin\theta\right)$$

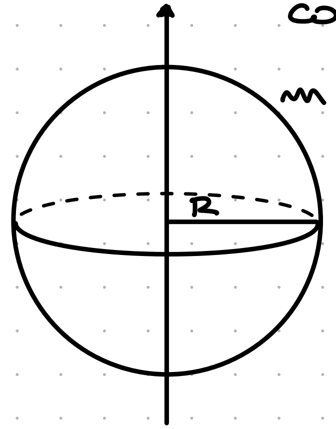
$$= -\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}\cos(3\theta) + 3\cos\theta\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 3 - 3\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} - 6\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{4}{3}\,\frac{2}{5}\,\pi R^5 \rho = \boxed{\frac{2}{5} m R^2}$$

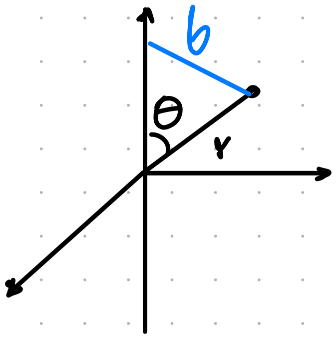
SFERA 2

VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN GUSCIO SFERICO CON DENSITÀ SUPERFICIALE σ = COST PER UN ASSE COINCIDENDE CON IL SUO ASSE DI SIMMETRIA.



$$dV = r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \longrightarrow dS = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$dm = \sigma dS \Rightarrow m = \sigma R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta = 4\pi R^2 \sigma$$



$$b = r \sin\theta$$

$$I = \int b^2 dm = \sigma R^2 \int R^2 \sin^2\theta \cdot \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \sigma R^4 \, 2\pi \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta}_{\substack{\text{VEDI CALCOLI} \\ \text{SFERA 1} \\ = \frac{4}{3}}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{3} 2\pi \sigma R^4 = \boxed{\frac{2}{3} m R^2}$$